

**EFFECTO DE CAMPOS ELÉCTRICOS MEDIANOS SOBRE EL NIVEL  
MÁS BAJO DE UNA  $D^0$  EN DOS POZOS CUÁNTICOS ACOPLADOS**

**WILLIAM AMADO ANGULO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
Noviembre, 2006**

**EFFECTO DE CAMPOS ELÉCTRICOS MEDIANOS SOBRE EL NIVEL  
MÁS BAJO DE UNA  $D^0$  EN DOS POZOS CUÁNTICOS ACOPLADOS**

**Trabajo de Grado como requisito parcial para optar el título de Físico:  
WILLIAM AMADO ANGULO**

**Director:**

**Dr. CARLOS LEONARDO BELTRÁN RÍOS**

**Codirector:**

**Dr. HAROLD PAREDES GUTIÉRREZ**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
Noviembre, 2006**

*A Dios  
A mis padres  
María Delia Angulo  
Marcos Amado  
A mi hermano y hermanas  
Marcos, Fanny, Nancy y Paola  
Por todo su apoyo e incondicional ayuda  
A Flor Maritza Barbosa Durán  
quien comparte conmigo su vida dándome  
su apoyo amor y amistad  
...A toda mi familia.*

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a las personas y entidades quienes en mayor o menor medida contribuyeron a dar forma a este trabajo:

A mis padres y a mi hermano y hermanas, a Blanca Pinzón, Pedro Cobos, Esther Rodríguez y familia, que con su apoyo moral e incondicional, me dieron la motivación necesaria para dejar mi pueblo y emprender esta etapa de formación universitaria, que en estos momentos me da la oportunidad de desarrollar este trabajo.

A los amigos, orientadores y compañeros: Dr. Carlos Beltrán Ríos, por aceptar ser mi director y su gran colaboración. Dr. Harold Paredes, quien fue el codirector. Dr. Javier Betancur por brindarme un poco de su amistad y un cupo en tan prestigioso grupo. Msc. Jairo Marín Cadavid, por sus consejos, chistes, amabilidad y valiosa amistad. Msc. Francisco García, por sus bendiciones y amistad. Fredy Rodríguez, por ser un gran amigo y apoyo a la hora de compartir sus conocimientos durante toda la carrera y quien aceptó ser mi colega en esta última etapa. Eduardo Galván Moya, por su ayuda, sus chistes, sus consejos en el manejo de programación Fortran. Carlos Gómez (Cuervo), por brindarme su amistad incondicional, Janeth Fernández P, compañera y amiga de carrera. A los Ficomacos y ex - Ficomacos, al *tocayo* William Gutiérrez, una gran amistad. Juan Carlos Piña V., el viejo *ñapi*, compañero de residencias universitarias UIS y gran amigo, Victor Basto, por aceptar ser mis colegas durante y espero después de la realización de este proyecto. A las compañeras de sufrimiento Malka y Karina.

A Ivon Marcela Vargas Carreño y familia quienes me brindaron su carisma, calor familiar y apoyo.

A María Edelmira Lesmes G. y familia, por aceptarme en el hogar como uno más de la familia.

Este trabajo fue financiado por la Universidad Industrial de Santander (UIS), a través de la dirección general de investigaciones (DIF Ciencias, Cod. 5124) y el centro de excelencia de nuevos materiales *CENM*, bajo el contrato No. 043-2005 y el Cod. No. 1102-05-16923 suscrito con COLCIENCIAS.

**TÍTULO :** EFECTO DE CAMPOS ELÉCTRICOS MEDIANOS SOBRE EL NIVEL MÁS BAJO DE UNA  $D^0$  EN DOS POZOS CUÁNTICOS ACOPLADOS\*.

**AUTOR :** Amado Angulo William\*\*.

**PALABRAS CLAVES :** Donadora neutra, energía de enlace, dimensión fractal, barrido trigonométrico, pozo cuántico (Qw), doble pozo cuántico (DQW).

**RESUMEN :** En este trabajo se reportan resultados obtenidos para la energía de enlace de una impureza donadora neutra  $D^0$ , localizada en un sistema de doble pozo cuántico con confinamiento en la dirección de crecimiento de la heteroestructura. En este sistema, la donadora se ha localizado en tres posiciones diferentes y está sometida a la acción de un campo eléctrico uniforme, aplicado paralelo a la dirección de crecimiento de la heterojuntura. La función de onda es expresada como el producto, de la función de onda del electrón desacoplado con una función de correlación, que corresponde a la interacción donadora-electrón.

La solución para la ecuación de Schrödinger asociada al sistema, para el electrón desacoplado es una combinación lineal de dos funciones Airy independientes. Como primera medida, se calcula la energía de enlace de una  $D^0$ , en función de parámetros tales como: el ancho del pozo, barrera de separación entre pozos, la intensidad de campo aplicado, y la posición de la impureza. Para solucionar la ecuación de Schrödinger asociada al sistema, se usó el método de dimensión fractal, el cual es un principio variacional, y barrido trigonométrico. Los resultados reportados fueron obtenidos mediante métodos numéricos en lenguaje de programación FORTRAN. Nuestro trabajo esta dentro de la aproximación de masa efectiva, considerando uniforme los parámetros efectivos, como la masa efectiva y la constante dieléctrica del material a través de las capas de  $GaAs$  y  $Ga_{1-x}Al_xAs$ .

---

\*Proyecto de Grado

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Carlos Leonardo Beltrán Ríos (Director), Harold Paredes Gutiérrez (Codirector)

**TITLE :** EFFECT OF MEDIUM ELECTRIC FIELDS ON THE GROUND STATE OF A  $D^0$  IN TWO QUANTUM WELLS COUPLED \*.

**AUTHORS :** Amado Angulo William ; \*\*.

**KEY WORDS :** Neutral donor, Binding energy, Trigonometric sweep method, Fractal dimension, Quantum well (Qw), Double quantum well (DQW)

**DESCRIPTION:** The results for the ground state binding energy of a neutral donor impurity  $D^0$ , located in an system of double quantum well with confinement in the growth direction of the heterostructure is reported. In this system, the  $D^0$  is located in three different positions and it's under the influence of an external uniform electric field, applied parallel to the heterostructures grow axis. Wave functions are expressed as a product of the free electron wave function (unbounded electron) with a correlation function which is introduced in order to take into account the attracted Coulomb interaction between donor and electron.

The solution for the Schrödinger equation associated to the system for the disaccoupling electron are linear combinations of two independent Airy functions. Results for the binding energy of impurity ground state as functions of the well width, of the interwell barrier width, applied electric fields, and the donor position inside the heterostructure are reported. For the solution of the Schrödinger equation associated to the system, we used the "Fractal Dimension Method FDM", which starting from the Schrödinger's variational principle we find the Euler-Lagrange equation in order to get the correlation function which minimize the functional and was used the trigonometric sweep method, and the result reported was obtained by means of numerical calculations in FORTRAN language. We work within the framework of the effective mass approximation considering material's parametters as effective mass and dielectric constant uniform throughout the layers of  $GaAs$  and  $Ga_{1-x}Al_xAs$ .

---

\*Senior thesis project.

\*\*Science Faculty, Physics school, Carlos Leonardo Beltrán Ríos (Director), Harold Paredes Gutiérrez (Codirector)

# NOTACIÓN

En el presente trabajo se ha utilizado un hamiltoniano adimensional en unidades efectivas, a fin de simplificar las labores de programación. En una posterior conversión de unidades, se eligió como unidad de longitud el Nanómetro (nm) y como unidad de energía el Milielctronvoltios (meV), mientras que el campo eléctrico se expresa en voltios por metro  $V/m$ .

A continuación se dará una lista con la notación empleada y mencionada en el desarrollo del trabajo para los parámetros utilizados:

$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} [Kg]$	:	<i>Masa del electrón libre</i>
$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} [\frac{C^2}{N \cdot m^2}]$	:	<i>Constante dieléctrica en el vacío</i>
$e = 1,6 \cdot 10^{-19} [C]$	:	<i>Carga del electrón</i>
$h = 6,62 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]$	:	<i>Constante de Plank</i>
$AME$	:	<i>Aproximación de masa efectiva</i>
$D^0$	:	<i>Impureza donadora neutra</i>
$D^-$	:	<i>Impureza donadora negativa</i>
$m^*$	:	<i>Masa efectiva del electrón</i>
$\vec{p}$	:	<i>Momento Lineal</i>
$\epsilon$	:	<i>Constante dieléctrica del material</i>
$\tau$	:	<i>Parámetro de la interacción Coulombiana</i>
$a_0^*$	:	<i>Radio de Bohr efectivo</i>
$Ry^*$	:	<i>Rydberg efectivo</i>
$F$	:	<i>Campo eléctrico</i>
$\Delta$	:	<i>Laplaciano</i>

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. GENERALIDADES</b>	<b>1</b>
1.1. Impurezas donadoras . . . . .	1
1.2. Pozo y Doble Pozo Cuántico . . . . .	3
<b>2. INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>3. MODELO DE CONFINAMIENTO</b>	<b>7</b>
<b>4. MODELO TEÓRICO</b>	<b>9</b>
4.1. Aproximación de masa efectiva-AME . . . . .	9
4.2. Método de dimensión fractal . . . . .	10
4.3. Parámetros efectivos para GaAs/GaAlAs . . . . .	11
4.4. Hamiltoniano para la impureza en unidades efectivas . . . . .	12
4.5. Ecuación de Schrödinger para el electrón ( $\tau = 0$ ) . . . . .	13
4.6. Ecuación de schrödinger para una $D^0$ . . . . .	14
<b>5. MÉTODO DE DIMENSIÓN FRACTAL PARA UNA <math>D^0</math> CONFINADA</b>	<b>17</b>

<b>6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>20</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>31</b>
<b>APÉNDICE</b>	<b>32</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>33</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Impureza Donadora $D^0$ . . . . .	2
1.2. Aceptora . . . . .	2
1.3. Sistema de doble pozo cuántico . . . . .	3
3.1. Sistema de doble pozo cuántico con una impureza donadora $D^0$ bajo la acción de un campo eléctrico externo uniforme perpendicular a las interfaces . . . . .	8
6.1. Distribución de la densidad de probabilidad para el electrón en el sistema de doble pozo con campo eléctrico aplicado. En el gráfico se muestra el nivel de energía del estado base y el perfil del potencial con tres valores diferentes de campo, con igual ancho para los pozos y la barrera central $L_w = L_b = 0,5a_0^*$ y potencial $V_0 = 40R_y^*$ . . . . .	20
6.2. Energía de enlace de la $D^0$ ubicada en el centro de la barrera de ancho constante en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante. . . . .	21
6.3. Energía de enlace de la $D^0$ ubicada en el centro del pozo derecho en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante. . . . .	22
6.4. Energía de enlace de la $D^0$ ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante. . . . .	22

6.5. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro de la barrera en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	23
6.6. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro del pozo derecho en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	24
6.7. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	25
6.8. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro de la barrera en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	26
6.9. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro del pozo derecho en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	26
6.10. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.</i> . . . . .	27
6.11. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> variando su posición dentro de la heteroestructura, para <math>L_b = L_W = 0,5 a_0^*</math>.</i> . . . . .	28
6.12. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> variando su posición dentro de la heteroestructura, para <math>L_b = 2L_W</math>.</i> . . . . .	29
6.13. <i>Energía de enlace de la <math>D^0</math> variando su posición dentro de la heteroestructura, para <math>L_b = 0,5L_W</math>.</i> . . . . .	29
14. <i>Comportamiento de las funciones de Airy y sus derivadas</i> . . . . .	32



# GENERALIDADES

## 1.1 Impurezas donadoras

Una impureza es un átomo que se introduce a la red ocupando sitios de ésta que normalmente estarían ocupados por átomos originales del semiconductor. Estos átomos forman enlaces con los átomos circunvecinos dejando un electrón de valencia interactuando débilmente con el que se encuentra inmóvil, en vista de que está fuertemente unido a cuatro átomos vecinos. Por ejemplo, sustancias tales como arsénico, antimonio u otros elementos que pertenecen al grupo V de la distribución periódica, son impurezas de sustitución en cristales puros de silicio o germanio.

Los átomos del grupo  $V$  tienen cinco electrones de valencia, cuatro de ellos se usan para formar enlaces covalentes con átomos circunvecinos del semiconductor y el quinto se enlaza al átomo de impureza mediante fuerzas electrostáticas que son muy débiles, por eso se puede ionizar con facilidad mediante la agitación térmica de la red a temperaturas ordinarias para proporcionar una conducción electrónica *adicional*. El átomo de impureza que queda se convierte en un ion positivo, inmóvil, debido a que se encuentra fuertemente unido a cuatro átomos vecinos por medio de los enlaces covalentes normales.

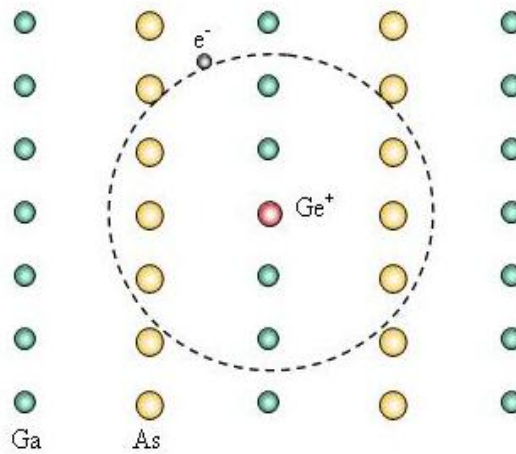


figura 1.1: Impureza Donadora  $D^0$

Si la impureza es del grupo *III* (Al, Ga, In, etc), el efecto es distinto, en ellos sólo hay tres electrones de valencia que forman enlaces covalentes con tres átomos cercanos, quedando un cuarto enlace sin electrón, formando un *hueco* en la estructura del enlace covalente en el átomo de la impureza. Esta ausencia de electrones se denomina hueco y puede moverse con facilidad, alejándose del sitio de la impureza, porque un electrón adicional del enlace covalente cercano, llena el cuarto enlace de par de electrones y el hueco se asocia con el átomo cercano el cual no se puede distinguir de un hueco térmicamente formado.

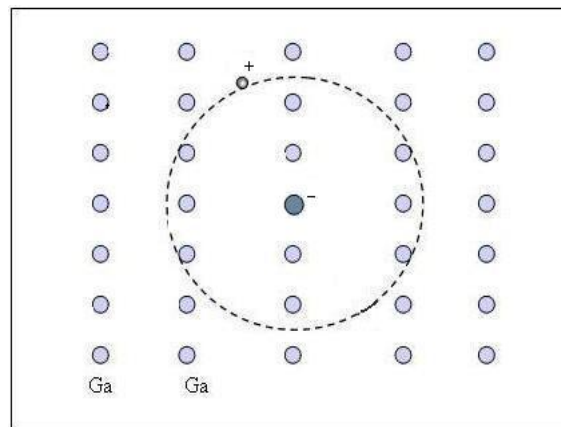


figura 1.2: Aceptora

En cristales con este tipo de impurezas se tienen más huecos que electrones, se conocen como impurezas aceptoras, y los cristales de este tipo se denominan semiconductores tipo p, dado que los portadores de carga mayoritarios son positivos.

## 1.2 Pozo y Doble Pozo Cuántico

Una heteroestructura de pozo cuántico (QW), consiste en una capa de material semiconductor, entre dos capas de otro material semiconductor, con una brecha entre las bandas de valencia y de conducción mayor lo cual restringe el movimiento de los portadores a la dirección perpendicular de las capas del material. El doble pozo cuántico (DQW) y las superredes (SL) son sistemas compuestos por varias capas alternadas de dos materiales semiconductores diferentes. Las superredes más estudiadas son las formadas por capas alternadas de  $GaAs$  y  $Ga_{1-x}Al_xAs$ , donde las capas de  $GaAs$  forman pozos cuánticos y las capas de  $Ga_{1-x}Al_xAs$  forman barreras de potencial.

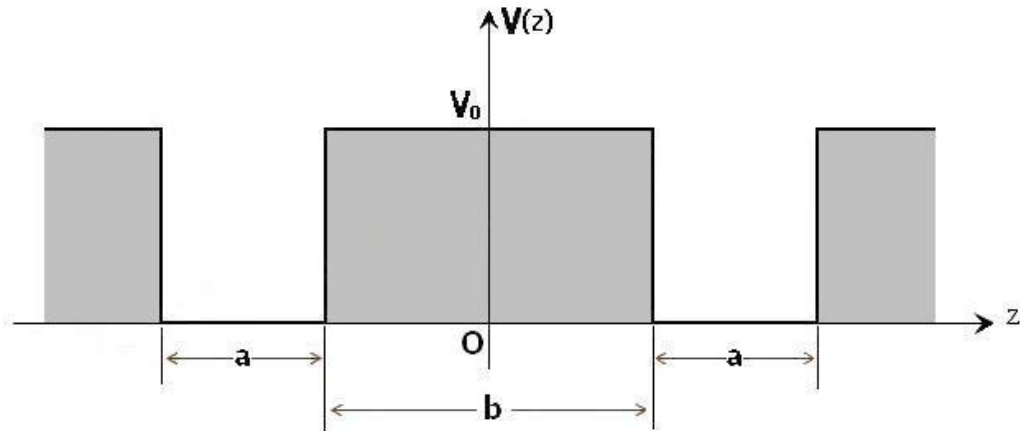


figura 1.3: Sistema de doble pozo cuántico

# INTRODUCCIÓN

El estudio de una rama de la materia condensada se ha orientado al análisis de nanoestructuras semiconductoras fabricadas mediante diferentes técnicas de crecimiento. Los investigadores han centrado sus esfuerzos en el comportamiento de los portadores de carga en estos sistemas de baja dimensionalidad, las cuales constituyen sistemas cuánticos con propiedades electrónicas y opto-electrónicas, apropiadas para la creación de nuevos dispositivos optoelectrónicos, los cuales son la base de la Nanotecnología.

Las técnicas de crecimiento de cristales, para la fabricación de heteroestructuras, incluyen métodos tales como Litografía con base en rayos electrónicos e interdifusión a través de impurezas en la estructura cristalina [1]. La deposición molecular epitaxial (MBE), la deposición metal-orgánica de vapor químico (MOCVD) [2] y epitaxia por fase líquida [3] son técnicas que permiten fabricar estructuras donde los portadores pueden tener un confinamiento cuántico en todas sus direcciones, lo que conduce a confinar los portadores en regiones muy pequeñas.

Las estructuras más estudiadas, construidas con las técnicas mencionadas anteriormente [1, 3] son los llamados pozos (QW's), múltiples pozos (MQW's), hilos (QWW's), anillos (QR's), super-redes (SL's) y puntos cuánticos (QD's), estos últimos con geometrías diversas tales como discos, lentes y pirámides, entre otros [4]. Estas estructuras se forman por métodos de crecimiento de cristales, como el de Stranski-Krastanov [5], basados en la deposición de un material sobre un sustrato con parámetro de red diferente, sobre el cual se forman espontáneamente pequeñas islas de material semiconductor dando lugar al punto.

El crecimiento epitaxial de haz molecular y deposición de vapor químico metal-orgánico, son técnicas que permiten crecer heteroestructuras de alta calidad, las cuales han

permitido fabricar heterojunturas de capas múltiples con interfaces abruptas y perfiles de potencial muy bien definidos. Este tipo de estructuras han sido de considerable atención tanto de físicos teóricos como de experimentalistas debido a los numerosos e interesantes fenómenos físicos que exhiben, lo cual hace preveer un gran campo de aplicación en dispositivos, los cuales incluyen detectores infrarrojos, diodos de tunelamiento resonante y transistores balísticos [6].

Al inicio de los años 80 Bastard [7] realizó el primer estudio teórico del espectro energético de impurezas donadoras hidrogenoides neutras ( $D^0$ ) en estructuras de GaAs-GaAlAs, donde se analizó la dependencia de la energía de enlace con el ancho del pozo y la posición de la impureza en la heteroestructura. Se ha encontrado que el campo eléctrico afecta la energía de enlace de la impureza (donadora) [8] y además rompe la simetría axial del estado fundamental para la impureza centrada [9]. Betancur y Mikhailov [10] utilizaron una función de prueba triparamétrica para estudiar el estado fundamental  $1s$  y el primer estado excitado  $2p$  de una  $D^0$  descentrada en un QW, para campos magnéticos diferentes. Posteriormente, se ha extendido el método para calcular la energía del estado fundamental de impurezas  $D^0$  en estructuras de dos pozos [11] y tres pozos [12] cuánticos acoplados, y el efecto del campo eléctrico [13].

Empleando una aproximación variacional-perturbativa Han y Hsieh [14] calcularon la energía de enlace de una  $D^0$  en un (QW) como función del campo eléctrico aplicado y la altura de la barrera de potencial. Con el mismo método Nicolescu [15] encontró que cuando se aplica a una heterojuntura un campo magnético en dirección axial y un campo eléctrico en dirección variable, los estados de los electrones y huecos tienen gran dependencia de las dimensiones de la heteroestructura y de la dirección relativa del campo eléctrico y el campo magnético. Yip and Kok [16], con una aproximación variacional perturbativa calcularon la energía de enlace para algunos estados de donadoras en un pozo cuántico. Mikhailov y colaboradores [17] redujeron el problema de las  $D^0$  y  $D^-$  centrada y descentrada en estados  $s$  en heteroestructuras semiconductoras en espacio efectivo isotrópico con dimensión fraccional variable mediante el principio variacional.

En la década pasada los pozos cuánticos dieléctricos han tenido una gran acogida por sus potenciales aplicaciones electro-ópticas, con campos eléctricos aplicados. Un pozo cuántico puede llamarse dieléctrico cuando la constante dieléctrica de la barrera del material es significativamente más pequeña que la del material del pozo. Los cálculos de la energía de enlace y sus variaciones con los campos aplicados son necesarios para obtener valores aproximados de la energía de transición óptica de donadoras y excitones en pozos cuánticos. Un acoplamiento de dos pozos cuánticos ha llamado la atención debido al elevado confinamiento del efecto stark en las transiciones excitónicas, lo cual permite fabricar dispositivos electro-ópticos más sensibles [18, 19, 20]. El elevado tu-

nelamiento de electrones y huecos a través de la barrera central en dirección opuesta, bajo un campo eléctrico constante puede incrementar drásticamente los cambios en la energía de transición electrónica comparada con la de un sólo pozo.

En este trabajo se estudia una estructura compuesta por dos pozos cuánticos acoplados, con un perfil de potencial rectangular, a la cual se le aplica un campo eléctrico  $F$  paralelo al eje de crecimiento de la heteroestructura, encontrándose efecto stark longitudinal. En el trabajo, se emplea un método elaborado por el grupo FICOMACO, de la escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander, con base en el principio variacional de Schrödinger y utilizando la técnica de derivación funcional, para calcular la energía de enlace, procedimiento conocido como método de dimensión fractal. La alta precisión del método para diferentes tipos de heteroestructuras con diferentes tipos de confinamiento, se puede ver en trabajos publicados [21], en los cuales se calculó la energía de enlace del estado base para excitones e impurezas donadoras  $D^0$  y  $D^-$ .

Cuando un electrón se somete a un campo eléctrico la expresión para la ecuación de Schrödinger tiene un término lineal, el cual expresa el corrimiento en la energía, y la función de onda propia generalmente se da en términos de las funciones de Airy. Los estudios teóricos respecto a la energía de impurezas donadoras en heteroestructuras, han sido tratados mediante el uso de diversos métodos, tales como: variacional [10, 23, 24], expansión en series [25], perturbaciones [26], dimensional fraccional [27], barrido trigonométrico [28] y el método de Montecarlo [29], obteniéndose buenos resultados.

En el año 2004 Duran [31], estudiante del grupo FICOMACO, realiza como proyecto de grado un estudio del efecto del campo eléctrico, sobre la energía de enlace del estado fundamental de una impureza donadora neutra en heteroestructuras de pozo cuántico (QW) y doble pozo cuántico (DQW) de  $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$ , para tres formas de potencial de confinamiento, con una solución numérica (barrido trigonométrico), en la región de aplicación del campo (el campo está sólo en los pozos) y analítica en las barreras externas (Miguel considera que los contactos de los electrodos están ubicados en las barreras y por eso el campo eléctrico no penetra a las barreras externas). Nuestro trabajo es para un perfil de potencial de confinamiento rectangular, para el cual calculamos la energía de enlace de la  $D^0$ , variando el ancho del pozo, ancho de la barrera central, intensidad del campo eléctrico aplicado y la posición de la impureza. La función de onda del electrón, es determinada en forma analítica, en la dirección de crecimiento de la heteroestructura, como una combinación de las funciones de Airy, estas funciones, presentan dificultad en su manejo ya que son muy oscilatorias, pero permiten estudiar el efecto del campo sobre toda la heteroestructura. Definimos valores de campos eléctricos medianos a los que se encuentran entre 10 y 100  $kv/cm$ , ya que en trabajos anteriores [32] asumen como campos débiles valores menores a 10  $kv/cm$  y campos fuertes a valores mayores e iguales a 100  $kv/cm$ .

## MODELO DE CONFINAMIENTO

Los sistemas de baja dimensionalidad son estructuras en donde los grados de libertad microscópicos están restringidos en una o más direcciones. En particular, en este trabajo se consideran sistemas semiconductores de baja dimensionalidad, en donde la limitación de los grados de libertad se da por la diferencia entre las brechas de energía de los semiconductores constituyentes.

Este estudio se enfoca en un sistema de doble pozo cuántico con capas alternadas de *GaAs* para los pozos y *GaAlAs* en las barreras, estas heteroestructuras son formadas mediante técnicas epitaxiales que depositan átomos en fase de vapor sobre un sustrato, lográndose el crecimiento de capas ultrafinas de diferentes materiales semiconductores (heteroestructuras) con anchos controlados e interfaces bien definidas. Así se logra construir heteroestructuras en donde un semiconductor con separación de bandas estrecha está rodeado por un material con bandas de separación mayor, formándose una superred, o un pozo cuántico (siglas del inglés Quantum Well, QW).

Las heterojunturas de *GaAs/(Ga,Al)As* (semiconductor III-V) son las más utilizadas en el estudio teórico y experimental de los sistemas semiconductores de baja dimensionalidad; esto se debe a que este material posee un conjunto de propiedades que permiten su modelamiento en forma sencilla (isotropía de masa efectiva del electrón, la brecha directa entre bandas de conducción y de valencia, etc.).

Los parámetros principales del material *GaAs* son: La constante de red  $a = 0,565368nm$ , constante dieléctrica  $\varepsilon = 12,53$  y masa efectiva del electrón  $m^* = 0,067m_0$ , donde  $m_0$  es la masa del electrón libre. Estos parámetros varían cuando en el material de *GaAs* se introducen los átomos de Al, pero los cambios son pequeños y por esta razón en éste trabajo no consideramos un modelo simplificado en el cual se desprecia la variación de

los parámetros de material al pasar desde el pozo a la barrera.

Cuando en la red cristalina de  $GaAs$  se introduce un átomo del grupo IV, de tal manera que este reemplace a un átomo de Ga, uno de los electrones de la impureza no participa en el enlace químico y queda casi libre en la banda de conducción para formar estados acoplados es decir, el átomo impureza aporta un electrón a la estructura de bandas por lo tanto se le da el de nombre de impureza donadora.

Esquemáticamente en este modelo se estudia la energía de enlace de una impureza donadora  $D^0$  confinada en un sistema de doble pozo cuántico en presencia de un campo eléctrico paralelo a la dirección de crecimiento, variando parámetros como ancho de los pozos, de la barrera, posición de la impureza y campo aplicado.

La impureza donadora se ha localizado en diferentes posiciones  $Z_i$ , dentro de la heteroestructura cuántica, los pozos son simétricos, y la barrera es finita, además teniendo en cuenta el confinamiento en la dirección de crecimiento de la heteroestructura, como se muestra en el siguiente esquema:

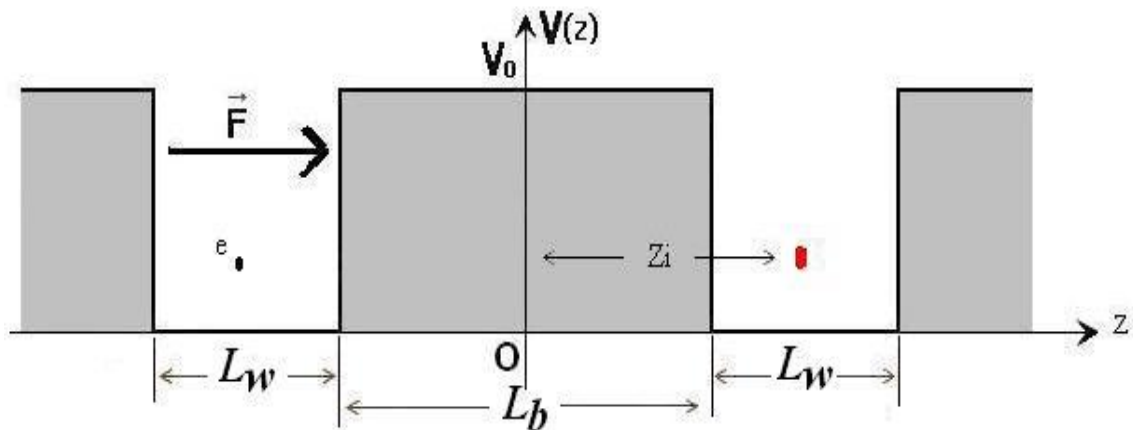


figura 3.1: Sistema de doble pozo cuántico con una impureza donadora  $D^0$  bajo la acción de un campo eléctrico externo uniforme perpendicular a las interfaces



# MODELO TEÓRICO

## 4.1 Aproximación de masa efectiva-AME

Debido a que impureza rompe la simetría traslacional del cristal, el problema de un electrón en un cristal es más complicado que en un cristal ideal, debido a que el electrón además de sentir el potencial cristalino siente el potencial de atracción que no tiene simetría alguna, haciendo imposible resolver la ecuación de Schrödinger de manera exacta. La aproximación utilizada comúnmente para resolver este tipo de problemas es la aproximación de masa efectiva (AME), la cual hace uso, de una banda de energía de forma parabólica en los semiconductores y que por tanto el portador en ella se comporta como un portador libre con masa efectiva. Esta aproximación, es muy útil para estudiar las propiedades de los electrones bajo cualquier perturbación externa débil. Como en el compuesto *GaAs* una de las ventajas es que su estructura de bandas es aproximadamente parabólica en el fondo de la banda, entonces su masa efectiva  $m^*$ , es aproximadamente isotrópica e independiente de la energía, esto significa que el efecto del potencial cristalino es cambiar la masa del electrón en el vacío por una masa efectiva.

La **AME** consiste en sustituir la masa del electrón libre por una masa efectiva  $m^*$  que contenga el efecto del potencial cristalino del semiconductor.

En este trabajo se tendrá en cuenta las características de *GaAs*, en los pozos con un potencial  $V = 0$ , rodeado de *GaAlAs*, para las barreras con un potencial  $V = V_0$ . Estos materiales tienen la gran ventaja de que su estructura de bandas es aproximadamente parabólica, por lo que la masa efectiva de los electrones en ellos se puede considerar isotrópica e independiente de la energía, razón por la cual se toma como constante en toda la estructura, al igual que la constante dieléctrica del material.

## 4.2 Método de dimensión fractal

El método de dimensión fractal es un método sencillo para el cálculo de la energía de enlace de impurezas en heteroestructuras con diferentes potenciales de confinamiento, diferentes posiciones de la impureza y en presencia de campos externos entre otros. La ecuación de onda para el estado base de una impureza, en un espacio anisotrópico, es reducida a una ecuación que tiene la forma de la ecuación del átomo de hidrógeno en un espacio efectivo isotrópico. Mikhailov y colaboradores [21] encontraron que el Jacobiano de la transformación, para la ecuación de onda renormalizada, está dado por la distribución radial de la densidad de carga correspondiente al estado base del electrón libre en la heteroestructura. Para dar una interpretación geométrica a este resultado se considera la densidad de carga como un objeto fractal y se analiza un sistema de cajas esféricas, con el centro en la posición de la donadora. Siguiendo el procedimiento de Mandelbrot [30], se define la dimensión de este objeto como un parámetro de escalamiento que relaciona la carga dentro de las cajas con su radio. El Jacobiano de volumen para el objeto, que determina la dimensión fractal, coincide con el Jacobiano de la ecuación de onda renormalizada, razón por la cual se llamó a este procedimiento variacional método de dimensión fractal. En este procedimiento la dimensión fractal depende de la geometría de la heteroestructura y de la distancia ion-electrón.

El método de la dimensión fractal propone una función de onda para la donadora como el producto entre la función para el electrón libre,  $\mathbf{f}_0$ , y una función envolvente  $\mathbf{G}(|\vec{r} - \vec{Z}_i|)$ , la cual posee simetría esférica, introducida para describir la modificación de la distribución de probabilidad electrónica, producida por la interacción de Coulomb, entre la impureza y el electrón. La función de onda para la donadora se expresa entonces como:

$$\psi_{D^0}(\vec{r}) = \mathbf{f}_0 \mathbf{G}(|\vec{r} - \vec{Z}_i|) \quad (4.1)$$

La función  $\mathbf{f}_0$  junto con la energía  $E_0$  se obtienen a partir de la solución del problema de valores propios para el electrón libre, dado por

$$\hat{H}_0 \mathbf{f}_0 = \mathbf{E}_0 \mathbf{f}_0 \quad (4.2)$$

Como esta es la función de onda y su energía del estado base de la partícula, se procede a resolver la ecuación de Schrödinger para el sistema en presencia de la donadora, la cual rompe con la simetría, por lo tanto no se puede resolver analíticamente. La ecuación de Schrödinger para el sistema con la impureza presente está dada por

$$\hat{H}_{D^0} \psi_{D^0} = E_{D^0} \psi_{D^0} \quad (4.3)$$

Siendo  $\hat{H}_{D^0}$  y  $E_{D^0}$  el Hamiltoniano del sistema con la donadora presente y la energía de la donadora, respectivamente. Utilizando la expresión para  $\psi_{D^0}(\vec{r})$  se obtiene

$$\hat{H}(\mathbf{f}_0 \mathbf{G}(|\vec{r} - \vec{Z}_i|)) = E_{D^0}(\mathbf{f}_0 \mathbf{G}(|\vec{r} - \vec{Z}_i|)) \quad (4.4)$$

El problema consiste ahora en encontrar la función de correlación que satisfaga el principio variacional de Schrödinger, con lo que se consigue una minimización de la energía para el sistema en su estado base.

### 4.3 Parámetros efectivos para GaAs/GaAlAs

El planteamiento teórico para una impureza donadora neutra en pozos cuánticos de GaAs/GaAlAs se ha hecho bajo la aproximación de masa efectiva, aproximación utilizada por primera vez en el trabajo de Bastard [7] para el estudio de una donadora en un pozo cuántico .

Los parámetros efectivos que se utilizan en este trabajo son los correspondientes a *GaAs*, ya que los parámetros para *GaAlAs* difieren muy poco de este

- $\mathbf{m}^* = 0,067\mathbf{m}_0$  : Masa Efectiva para el electrón en GaAs donde  $\mathbf{m}_0$  es la masa para el electrón libre.
- $\epsilon = 12,8$  : Permitividad eléctrica en GaAs para  $300^\circ\text{K}$
- $\mathbf{a} = 5,65\text{\AA}$  : constante de red **GaAs** – **Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As** a  $298^\circ\text{K}$
- $\mathbf{e} = 1,602 * 10^{-19}\text{C}$  : Carga del electrón
- Radio de Bohr efectivo

$$a_0^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} \quad (4.5)$$

- Rydberg efectivo

$$\frac{e^2}{2\epsilon a_0^{*2}} = \frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)\epsilon a_0^*} = Ry^* \quad (4.6)$$

Los valores para la masa efectiva y la constante dieléctrica en *GaAs* y *GaAlAs* se toman de el trabajo hecho por Miguel Ángel Durán [31], en el cálculo del efecto del campo eléctrico sobre el estado base de una donadora  $D^0$  en pozos cuánticos y dobles pozos cuánticos de *GaAs/Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As*. Los parámetros de Radio de Bohr efectivo ( $a_0^*$ ) y Rydberg efectivo ( $Ry^*$ ), se utilizan como unidades de longitud y de energía respectivamente para expresar el hamiltoniano del sistema en unidades adimensionales. Los valores calculados de estas unidades fueron,  $a_0^* = 9,84 \text{ nm}$  para el *GaAs* y  $a_0^* = 9,825 \text{ nm}$  en *GaAlAs* y para el Rydberg efectivo,  $Ry^* = 5,83 \text{ meV}$ .

El uso de las unidades efectivas tiene sus ventajas, pues permiten dejar al Hamiltoniano adimensional, lo cual es conveniente en la programación.

#### 4.4 Hamiltoniano para la impureza en unidades efectivas

El Hamiltoniano adimensional para el sistema de Doble pozo con una impureza donadora en presencia de un campo eléctrico es.

$$\tilde{H} = -\nabla^2 + D\tilde{Z} + \tilde{V}_{\tilde{Z}} - \frac{2\tau}{|\vec{r} - \vec{Z}_i|} \quad (4.7)$$

Los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{Z}_i$  representan la posición del electrón y la donadora respectivamente, con la  $D^0$  ubicada sobre el eje  $\mathbf{z}$  (eje de confinamiento).  $|\vec{r} - \vec{Z}_i|$  es la distancia entre la impureza y el electrón y  $V(Z)$  es el potencial de confinamiento en la dirección de crecimiento de la heteroestructura.

Se ha tomado  $\tau = 0$  para el sistema sin impureza y  $\tau = 1$ , para la interacción del electrón con el ion.

con

$$D = \frac{e * F * a_0^*}{Ry^*} = \frac{e * F * 10^{-6} \text{ cm}}{5,83 * 10^{-3} \text{ eV}} = 1,74825748 * 10^{-6} * F \left[ \frac{V}{m} \right] \quad (4.8)$$

$F$  es la intensidad de campo eléctrico paralelo al eje de confinamiento de la heteroestructura.

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico  $F$  está dado en unidades de  $\left[ \frac{V}{m} \right]$ ,  $D$  es el coeficiente adimensional para medir la intensidad del campo eléctrico, el cual se toma superior a  $8Kv/cm$ , ya que para valores menores a éste,  $D$  es una cantidad muy

pequeña y los argumentos de las funciones de Airy (en términos de las cuales se expresa la función de onda del electrón con campo eléctrico, 4.12) son valores con un orden que se encuentra fuera del rango ( $10^{-308} - 10^{308}$ ) manejado por los ordenadores presentes en nuestro grupo de investigación (FICOMACO).

#### 4.5 Ecuación de Schrödinger para el electrón ( $\tau = 0$ )

La ecuación 4.7 es:

$$H_0 = -\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + DZ + V_Z \quad (4.9)$$

Y la ecuación de Schrödinger para el electrón libre en la heteroestructura es la respectiva ecuación de valores propios:

$$H_0 \mathbf{f}_0(\vec{r}) = \mathbf{E}_0 \mathbf{f}_0(\vec{r}) \quad (4.10)$$

Para el estado fundamental del electron, tenemos en las direcciones  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  funciones de onda plana, la cual corresponde a una partícula libre y la solución es  $e^{ik_y Y}$  y  $e^{ik_x X}$ , respectivamente. En estas direcciones la acción del campo es nula y no se tiene potencial de confinamiento. En la dirección  $\mathbf{z}$ , la solución se expresa con una combinación de las funciones de Airy  $\mathbf{A}_i(z)$  y  $\mathbf{B}_i(z)$ .

La función de onda en el eje  $\mathbf{z}$  en forma explícita es de la forma:

$$\mathbf{g}(z) = \begin{cases} \alpha[\mathbf{B}_i(b) + \mathbf{iA}_i(b)] & ; & Z \leq (-\mathbf{L}_w - \frac{\mathbf{L}_b}{2}) \\ \beta\mathbf{A}_i(w) + \theta\mathbf{B}_i(w) & ; & (-\mathbf{L}_w - \frac{\mathbf{L}_b}{2}) < Z \leq (-\frac{\mathbf{L}_b}{2}) \\ \gamma\mathbf{A}_i(b) + \rho\mathbf{B}_i(b) & ; & (-\frac{\mathbf{L}_b}{2}) < Z \leq \frac{\mathbf{L}_b}{2} \\ \delta\mathbf{B}_i(w) + \kappa\mathbf{A}_i(w) & ; & \frac{\mathbf{L}_b}{2} < Z \leq (\mathbf{L}_w + \frac{\mathbf{L}_b}{2}) \\ \sigma\mathbf{A}_i(b) & ; & Z \geq \mathbf{L}_w + \frac{\mathbf{L}_b}{2} \end{cases} \quad (4.11)$$

donde,  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  y los argumentos para las funciones Airy,  $b$  en la barrera y  $w$  en los pozos.

$$b = \frac{\mathbf{D}*\mathbf{Z}-\mathbf{E}_0+\mathbf{V}_0}{\mathbf{D}^{\frac{2}{3}}} \quad w = \frac{\mathbf{D}*\mathbf{Z}-\mathbf{E}_0}{\mathbf{D}^{\frac{2}{3}}} \quad (4.12)$$

La función de onda para el electrón desacoplado es la siguiente expresión

$$\mathbf{f}_0(\vec{r}) = e^{ik_y Y} e^{ik_x X} \mathbf{g}(z) \quad (4.13)$$

Aplicando continuidad en la frontera, para la función y la derivada, se determina la energía para el estado base  $E_0$  del electrón, a partir del cálculo del determinante de la matriz siguiente 4.14, con la condición  $\det M = 0$ , el cual se resuelve con la ayuda del software MATEMÁTICA 5.2.

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i(b_{a1}) + i\mathbf{A}_i(b_{a1}) & -\mathbf{A}_i(w_{a1}) & -\mathbf{B}_i(w_{a1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}'_i(b_{a1}) + i\mathbf{A}'_i(b_{a1}) & -\mathbf{A}'_i(w_{a1}) & -\mathbf{B}'_i(w_{a1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_i(w_{a2}) & \mathbf{B}_i(w_{a2}) & -\mathbf{A}_i(b_{a2}) & -\mathbf{B}_i(b_{a2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}'_i(w_{a2}) & \mathbf{B}'_i(w_{a2}) & -\mathbf{A}'_i(b_{a2}) & -\mathbf{B}'_i(b_{a2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_i(b_{a3}) & \mathbf{B}_i(b_{a3}) & -\mathbf{B}_i(w_{a3}) & -\mathbf{A}_i(w_{a3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}'_i(b_{a3}) & \mathbf{B}'_i(b_{a3}) & -\mathbf{B}'_i(w_{a3}) & -\mathbf{A}'_i(w_{a3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_i(W_{a4}) & \mathbf{A}_i(W_{a4}) & \mathbf{A}_i(b_{a4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}'_i(w_{a4}) & \mathbf{A}'_i(w_{a4}) & \mathbf{A}'_i(b_{a4}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

donde,

$$b_{aj} = b(z = aj); \quad w_{aj} = w(z = aj); \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.15)$$

Con los argumentos 4.12, para las funciones Airy en 4.14, evaluados en los 4 puntos de frontera de los pozos, así:

$$a1 = -L_w - \frac{L_b}{2} \quad a2 = -\frac{L_b}{2} \quad a3 = \frac{L_b}{2} \quad a4 = L_w + \frac{L_b}{2} \quad (4.16)$$

donde  $L_w$  es el ancho de los pozos y  $L_b$  es el ancho de la barrera central.

La solución de la ecuación de Schrödinger para el electrón en el doble pozo para el primer nivel es una función de onda par y para el segundo nivel es una función impar, además en un sistema de doble pozo, los dos primeros niveles energéticos, están muy cercanos entre sí, por lo tanto la función de onda para el estado base es una combinación lineal de las funciones par e impar.

## 4.6 Ecuación de schrödinger para una $D^0$

La ecuación de Schrödinger para el sistema formulado en este trabajo es la respectiva ecuación de valores propios:

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (4.17)$$

En donde  $E$  es la energía del sistema en unidades adimensionales y  $\Psi(\vec{r})$ , es la función de onda sobre la cual actúa el hamiltoniano dado en la ecuación 4.7 y la respectiva ecuación de Schrödinger queda expresada como:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + DZ + V_Z - \frac{2\tau}{|\vec{r} - \vec{Z}_i|} \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (4.18)$$

Se propone una función de prueba de la forma:

$$\Psi(\vec{r}) = \mathbf{f}_0(z)\mathbf{G}(\tilde{r}) \quad (4.19)$$

$\mathbf{G}(\tilde{r})$  es la función envolvente (o función de correlación), que describe la modificación de probabilidad electrónica producida por la atracción Coulombiana, y que, depende solamente de la distancia electrón - ion  $\tilde{r} = |\vec{r} - \vec{Z}_i|$ .

En los cálculos de este trabajo  $\mathbf{f}_0(z)$  sólo corresponde a la función de onda par. El efecto del campo eléctrico es desplazar la función de distribución electrónica en dirección opuesta a la dirección del campo, por lo tanto para campos grandes la mayor probabilidad se concentrará en uno de los pozos y disminuirá de manera considerable en el otro pozo.

La ecuación 4.18 es:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + DZ + V_Z - \frac{2\tau}{|\tilde{r}|} \right] \mathbf{f}_0(z)\mathbf{G}(\tilde{r}) = \mathbf{E}\mathbf{f}_0(z)\mathbf{G}(\tilde{r}) \quad (4.20)$$

Expandiendo las dobles derivadas, de la siguiente forma

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{f}_0 \mathbf{G}}{\partial X^2} = -G \frac{\partial^2 \mathbf{f}_0}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial X} - \mathbf{f}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial X^2} \quad (4.21)$$

Y agrupando, se obtiene:

$$-2 \left( \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial Y} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Y} + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Z} \right) - \mathbf{f}_0 \nabla^2 \mathbf{G} - \frac{2}{|\tilde{r}|} \mathbf{f}_0 \mathbf{G} = \mathbf{E}_b \mathbf{f}_0 \mathbf{G} \quad (4.22)$$

Donde  $\mathbf{E}_b = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}$ , corresponde a la energía de la enlace de la donadora. La ecuación 4.22 se puede escribir de la siguiente forma

$$-\mathbf{f}_0 \nabla^2 \mathbf{G} - 2 \nabla \mathbf{f}_0 \cdot \nabla \mathbf{G} - \frac{2}{|\tilde{r}|} \mathbf{f}_0 \mathbf{G} = \mathbf{E}_b \mathbf{f}_0 \mathbf{G} \quad (4.23)$$

Como  $\mathbf{f}_0$  es una función compleja, entonces se tiene una ecuación similar a la ecuación 4.23, con su complejo conjugado  $\mathbf{f}_0^*$

$$-\mathbf{f}_0^* \nabla^2 \mathbf{G} - 2 \nabla \mathbf{f}_0^* \cdot \nabla \mathbf{G} - \frac{2}{|\tilde{r}|} \mathbf{f}_0^* \mathbf{G} = \mathbf{E}_b \mathbf{f}_0^* \mathbf{G} \quad (4.24)$$

Multiplicando la ecuación 4.23 por  $\mathbf{f}_0^*$  y la ecuación 4.24 por  $\mathbf{f}_0$  y al sumar las dos expresiones se obtiene la siguiente ecuación

$$-|\mathbf{f}_0|^2 \nabla^2 \mathbf{G} - \mathbf{f}_0^* \nabla \mathbf{f}_0 \nabla \mathbf{G} - \mathbf{f}_0 \nabla \mathbf{f}_0^* \nabla \mathbf{G} - \frac{2}{|\tilde{r}|} |\mathbf{f}_0|^2 \mathbf{G} = \mathbf{E}_b |\mathbf{f}_0|^2 \mathbf{G} \quad (4.25)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\nabla (|\mathbf{f}_0|^2 \nabla \mathbf{G}) = |\mathbf{f}_0|^2 \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{f}_0 \nabla \mathbf{f}_0^* \nabla \mathbf{G} + \mathbf{f}_0^* \nabla \mathbf{f}_0 \nabla \mathbf{G} \quad (4.26)$$

La ecuación se puede escribir como:

$$-\nabla (|\mathbf{f}_0|^2 \nabla \mathbf{G}) - \frac{2}{|\tilde{r}|} |\mathbf{f}_0|^2 \mathbf{G} = \mathbf{E}_b |\mathbf{f}_0|^2 \mathbf{G} \quad (4.27)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Schrödinger para una impureza donadora, por lo que se aplica el método de dimensión fractal.

## MÉTODO DE DIMENSIÓN FRACTAL PARA UNA $D^0$ CONFINADA

Partiendo del principio variacional de Schrödinger se deduce una ecuación diferencial para la función de correlación  $\mathbf{G}(\tilde{r})$ , según el principio variacional de Schrödinger el estado base de cualquier sistema cuántico debe corresponder al mínimo del siguiente funcional:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{G}] &= \langle \Psi | H - E | \Psi \rangle = \langle \mathbf{f}_0 \mathbf{G} | -\Delta + V(z) + DZ - \frac{2}{|\tilde{r}} - E | \mathbf{f}_0 \mathbf{G} \rangle \rightarrow \min; \\ \frac{\delta \mathbf{F}[\mathbf{G}]}{\delta \mathbf{G}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $\frac{\delta}{\delta \mathbf{G}}$  es la derivada funcional

La ecuación 5.1 explícitamente es:

$$\mathbf{F}[\mathbf{G}] = \int_0^\infty J(r) [(\nabla \mathbf{G})^2 - (E_b + \frac{2}{|\tilde{r}}) \mathbf{G}^2] dr \rightarrow \min; \quad \frac{\delta \mathbf{F}[\mathbf{G}]}{\delta \mathbf{G}} = 0 \quad (5.2)$$

y

$$J(r) = 2\pi r \int_{-r}^r [|\mathbf{f}_0(Z + Z_0)|^2] dZ \quad (5.3)$$

$J(r)$  está relacionado con la distribución de probabilidad radial de carga (probabilidad de encontrar un electrón no ligado dentro de un cascarón esférico de radio  $r$  y  $r+dr$ ) como se observa en la expresión 5.3.

Calculando la derivada funcional de 5.2 se puede obtener la ecuación de Euler - Lagrange para la función envolvente  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  que minimiza el funcional 5.2.

$$\frac{1}{J(r)} \frac{d}{dr} \left[ J(r) \frac{dG(r)}{dr} \right] + \left( E_b + \frac{2}{|r|} \right) G(r) = 0; \quad \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E} \quad (5.4)$$

La solución de la ecuación 5.4 define un valor aproximado de la energía de enlace de la donadora  $\mathbf{E}_b$ . La ecuación 5.4 se puede reescribir de la siguiente forma

$$G''(r) + W(r)G'(r) + \alpha(r)G(r) = 0; \quad W(r) = \frac{J'(r)}{J(r)}; \quad \alpha(r) = E_b + \frac{2}{|r|}; \quad (5.5)$$

$$0 < r < \infty$$

Como el comportamiento del jacobiano es:

$$J(r)_{r \rightarrow 0} \propto r^2 \quad y \quad J(r)_{r \rightarrow \infty} \propto r \quad (5.6)$$

entonces las condiciones de contorno para el problema de segundo orden 5.5 es

$$\frac{G'(0)}{G(0)} = -1 \quad y \quad G(\infty) = 0 \quad (5.7)$$

El problema de contorno 5.5 se puede reducir a un problema de Cauchy de primer orden, aplicando el método de Barrido Trigonométrico.

$$\Theta'(r) = -[\sin^2 \theta(r) + \alpha(r) \cos^2 \theta(r) + W(r) \sin \theta(r) \cos \theta(r)]; \quad (5.8)$$

$$\theta(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Con el siguiente cambio de variables

$$G(r) = A(r) \cos \theta(r) \quad y \quad G'(r) = A(r) \sin \theta(r) \Theta'(r) \quad (5.9)$$

Esta ecuación en su solución tiene como parámetro la energía; por lo tanto, este problema de Cauchy tiene solución para cada valor de energía,  $\mathbf{E}$ .

La ecuación trascendente para la energía es

$$\Theta(R_{max}, E) = -\frac{\Pi}{2} \quad (5.10)$$

Mediante un procedimiento estándar se puede obtener la función  $A(r)$  para solucionar la ecuación diferencial para la función envolvente  $G(r)$ .

$$A(r) = A(0)exp\left\{ \int_0^Z \left[ (1 - \alpha(x)) \sin \theta(x) \cos \theta(x) - W(x) \sin^2 \theta(x) \right] dx \right\} \quad (5.11)$$

El problema ha sido resuelto numéricamente utilizando el método de Rounge - Kutta, encontrando el valor de la función en el  $R_{max}$  para cada valor de energía, luego entre todas las soluciones se escoge sólo una cuya energía satisface la ecuación trascendente 5.10.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estos resultados se obtienen analítica y numéricamente mediante el método de dimensión fractal y barrido trigonométrico, y usando sistemas computacionales elaborados en lenguaje FORTRAN y MATHEMATICA.

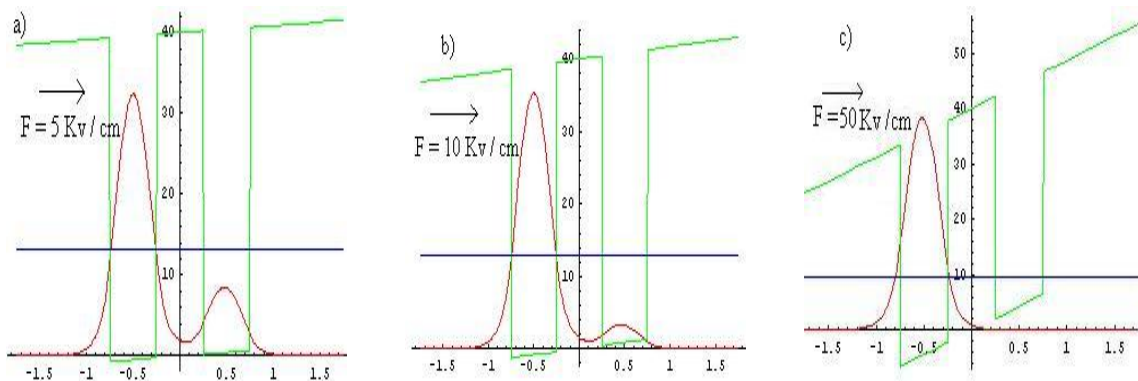


figura 6.1: *Distribución de la densidad de probabilidad para el electrón en el sistema de doble pozo con campo eléctrico aplicado. En el gráfico se muestra el nivel de energía del estado base y el perfil del potencial con tres valores diferentes de campo, con igual ancho para los pozos y la barrera central  $L_w = L_b = 0,5a_0^*$  y potencial  $V_0 = 40R_y^*$ .*

El campo eléctrico aplicado en el sistema produce un corrimiento lineal en la energía, y su influencia es notoria en el perfil del potencial como podemos apreciar en la gráfica 6, donde a medida que la intensidad del campo eléctrico  $F$  aplicado es mayor, la simetría se va perdiendo y la partícula se va confinando hacia el lado contrario del campo teniendo menos probabilidad de tunelar, como se puede ver en la curva de distribución de probabilidad que para un campo de  $F = 5Kv/cm$  la partícula tiene la posibilidad de encontrarse en el pozo derecho del sistema (ver gráfica 6 (a)) con un valor de energía

del estado base  $E_0 = 13,2895R_y^*$ , cuando el campo  $F = 10Kv/cm$  la partícula podría tunelar y difícilmente encontrarse en el pozo derecho del sistema (ver gráfica 6 (b))y la energía del estado base  $E_0 = 12,9756R_y^*$ , cuando el campo  $F = 50Kv/cm$  la posibilidad de que el electrón tunele la barrera es casi nula y encontrarlo en el pozo derecho es imposible, ver gráfica 6 (c) donde la energía para el estado base  $E_0 = 9,54911R_y^*$ .

Los valores de energía para el estado base disminuyen pero el nivel del potencial por el lado izquierdo del sistema disminuye mientras que por el lado derecho sube.

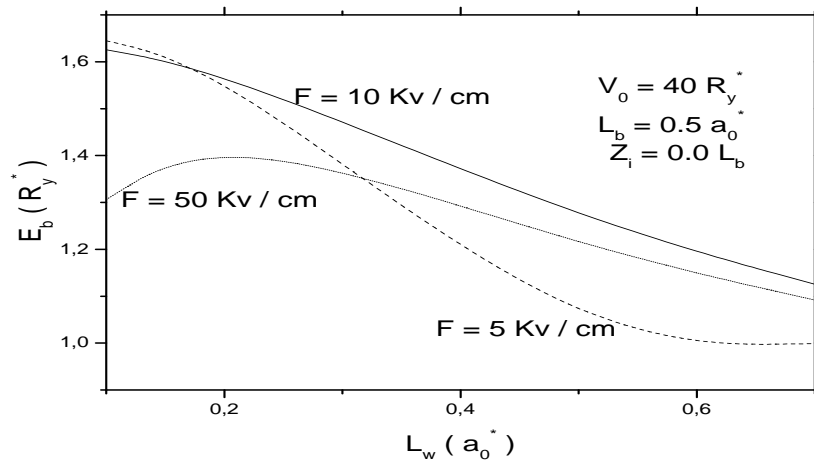


figura 6.2: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro de la barrera de ancho constante en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante.

Se muestra la energía de enlace como función del ancho del pozo para el estado base de una donadora neutra ubicada en el centro de la barrera, (fig 6.2), centro del pozo del lado derecho,(fig 6.3 y centro del pozo del lado izquierdo (fig 6.4), para tres valores de la intensidad de campo eléctrico  $F = 5, 10$  y  $50 Kv/cm$  aplicado, con ancho de la barrera interna fijo  $L_b = 0,5a_0^*$  y una altura de la barrera  $V_0 = 40R_y^*$ . Se observa que para pequeños anchos del pozo, la energía de enlace va aumentando a medida que el valor del campo es menor, y a su vez para una intensidad débil de campo eléctrico  $5Kv/cm$  la energía de enlace disminuye rápidamente hasta el punto en que el ancho del pozo alcanza el mismo valor del ancho de la barrera, y cuando su ancho es mayor la energía de enlace es casi constante; con una intensidad de  $10Kv/cm$  la energía de enlace decrece a razón casi constante y para una intensidad fuerte  $50Kv/cm$  la energía de enlace es creciente hasta alcanzar un máximo y luego decrece. Esto se debe al desbordamiento de la función de onda del electrón en el volumen del material semiconductor. Las tres curvas de energía de enlace decrecen monótonamente y se debe a que a medida que el ancho del pozo  $L_w$  crece la distancia de separación ion-electrón aumenta, disminuyendo

la interacción coulombiana y la energía de enlace.

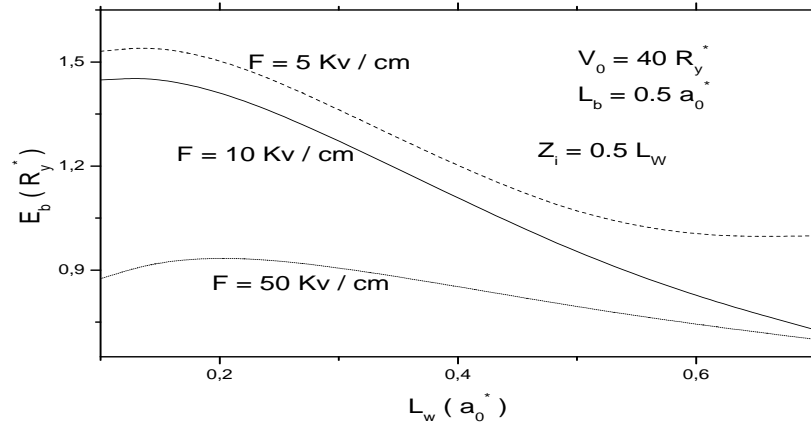


figura 6.3: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo derecho en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante.

La figura 6.3 muestra la energía de enlace cuando el  $D^0$  está en el centro del pozo derecho y está no se cruzan como sucede cuando la donadora está en el centro de la barrera (fig 6.2) debido a que en este caso la distancia promedio ión - electrón es mayor, también la razón del decrecimiento es menor en comparación a la anterior gráfica debido a que el electrón se separa por la acción del campo y a su vez al aumentar el ancho del pozo se aumenta la distancia promedio de separación ión-electrón, disminuyendo la interacción coulombiana y la energía de enlace.

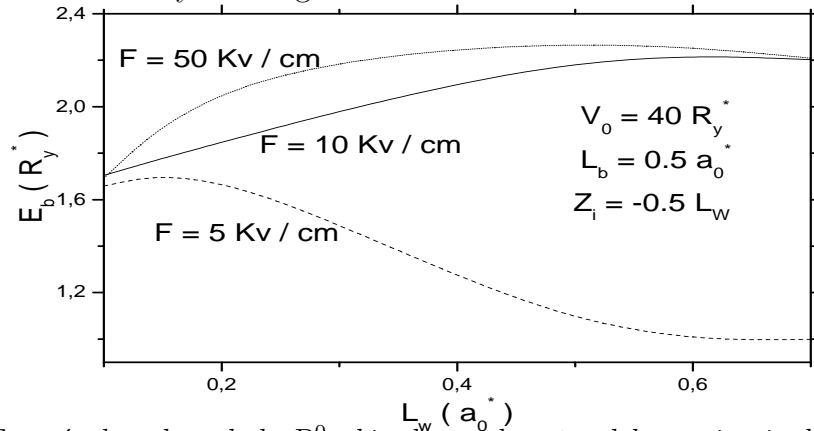


figura 6.4: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del ancho del pozo, para tres valores diferentes de campo y ancho de la barrera central constante.

La figura 6.4 muestra la energía de enlace para la donadora ubicada en el centro del pozo izquierdo, es claro que un campo de  $5 \text{ Kv/cm}$  no influye demasiado sobre ésta. Para los campos de  $10 \text{ Kv/cm}$  y de  $50 \text{ Kv/cm}$  la energía de enlace aumenta para pozos estrechos hasta un ancho ligeramente superior al ancho de la barrera donde empiezan a

decrecer muy suavemente, esto se debe a que el ancho del pozo va aumentando y por lo tanto la distancia ion-electrón aumenta entonces la energía coulombiana decrece, luego la energía de enlace disminuye.

Se muestran los resultados del cálculo de la energía de enlace como función del ancho de la barrera central para el estado base de una donadora neutra localizada en: el centro de la barrera, (fig 6.5), centro del pozo del lado derecho, (fig 6.6) y centro del pozo del lado izquierdo, (fig 6.7), con ancho de los pozos fijo  $L_w = 0,5 a_0^*$  para tres valores de la intensidad de campo eléctrico  $F = 5, 10 \text{ y } 50 \text{ Kv/cm}$  aplicado y una altura de la barrera  $V_0 = 40 R_y^*$ .

Cuando la barrera es cero los dos pozos en realidad son uno sólo por lo tanto el confinamiento del electrón es diferente al momento en que se empieza a colocar barrera central; es decir, el electrón está más confinado a medida que aumenta el ancho de la barrera, luego los niveles de energía del electrón suben, y la energía de enlace de la donadora aumenta.

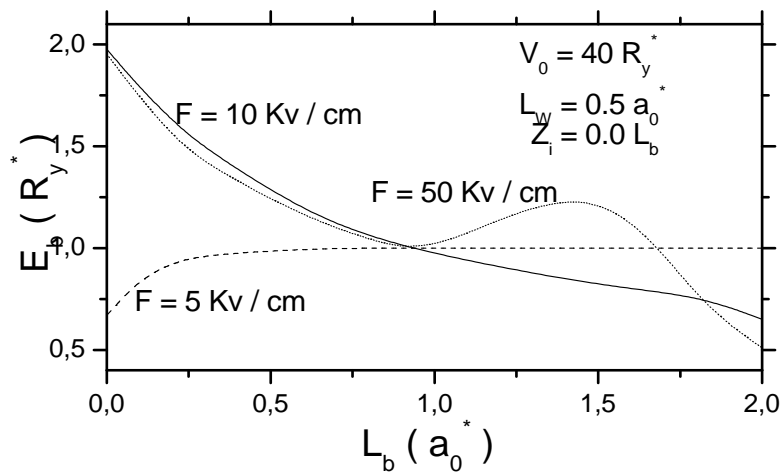


figura 6.5: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro de la barrera en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.

La figura 6.5 muestra la energía de enlace para la impureza ubicada en el centro de la barrera interna ( $Z_i = 0$ ), donde la energía de enlace para el campo débil  $5 \text{ Kv/cm}$  crece mientras el ancho de la barrera es menor que el ancho del pozo, y luego tiende a mantenerse con un valor aproximado de un Rydberg, esto sucede por que la acción del campo sobre el electrón es pequeña lo que implica que el tunelamiento hacia el lado izquierdo también lo sea, y la distancia promedio ion-electrón es pequeña, por lo tanto,

la interacción coulombiana es grande lo que conlleva a aumentar la energía de enlace  $E_b$ .

Para campos eléctricos de  $10Kv/cm$  y  $50Kv/cm$  la energía de enlace decrece monótonamente a medida que el ancho de la barrera crece, esto se debe a que la distancia promedio ion-electrón crece porque el campo eléctrico induce tunelamiento del electrón hacia la barrera izquierda de la heteroestructura y la posibilidad de tunelamiento hacia la barrera central disminuye a medida que ésta crece, luego la energía coulombiana disminuye y por lo tanto también lo hace la energía de enlace.

Pero para un campo de  $50Kv/cm$  en la curva hay mínimo y un máximo local, después de que el ancho de la barrera es el doble del ancho del pozo, esto corresponde al desbordamiento de la función de onda, que se espera en nuestro modelo de confinamiento con altura de barrera finita.

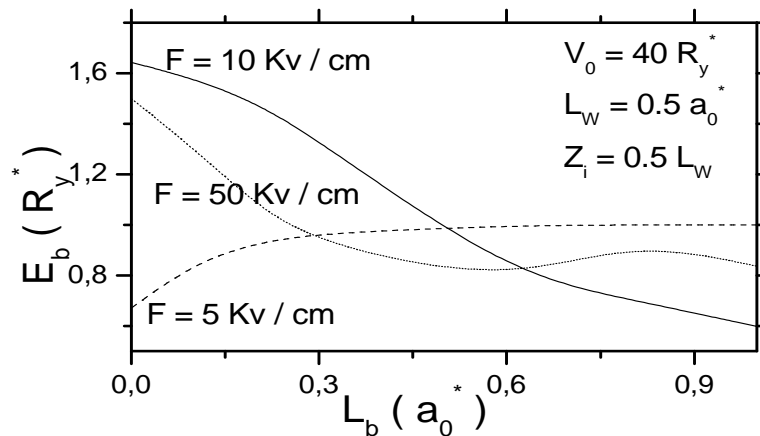


figura 6.6: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo derecho en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.

La figura 6.6 muestra la energía de enlace para la impureza ubicada en el centro del pozo derecho de la heteroestructura, se puede observar que el comportamiento de estas curvas es similar al comportamiento de las curvas de la figura 6.5 anterior, pero el valor de la energía de enlace es menor, lo cual se debe al aumento de la distancia de separación ion-electrón.

La figura 6.7 muestra la energía de enlace para la impureza ubicada en el centro del pozo izquierdo del semiconductor, en la cual se observa un crecimiento en las tres curvas para

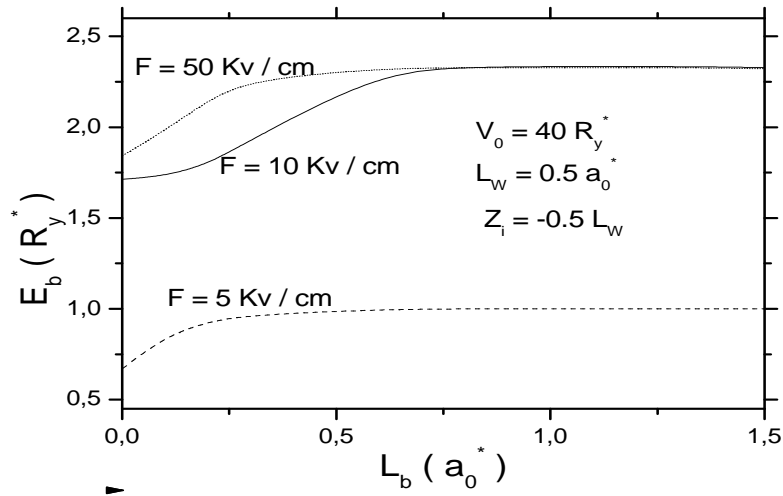


figura 6.7: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del ancho de la barrera central, para tres valores diferentes de campo y ancho del pozo constante.

anchos de la barrera menores que el ancho del pozo y luego sigue constante tendiendo a un valor de  $1,0R_Y^*$  para un campo eléctrico débil  $5Kv/cm$  y a  $2,3R_Y^*$  para los campos eléctricos de  $10Kv/cm$  y  $50Kv/cm$ , esto se debe a que la impureza se encuentra más cercana al electrón, por lo cual al aumentar el ancho de la barrera el electrón tiene menos posibilidad de tunelamiento y va a acercarse más a la donadora, por lo tanto la energía de enlace  $E_b$  aumenta. Cuando el ancho de la barrera es muy grande no produce cambio alguno en la energía de enlace  $E_b$  debido a que no va a variar la interacción coulombiana y el confinamiento en el pozo ya que las dos partículas se encuentran en el mismo pozo.

las siguientes tres figuras muestran los resultados del cálculo de la energía de enlace como una función de la intensidad del campo eléctrico aplicado para el estado base de una donadora neutra localizada en: el centro de la barrera, (fig 6.8), centro del pozo del lado derecho, (fig 6.9) y centro del pozo del lado izquierdo, (fig 6.10), una altura de la barrera  $V_0 = 40R_Y^*$ , con ancho de los pozos fijo  $L_w = 0,5 a_0^*$  en cada una de las gráficas hay tres casos de ancho de la barrera central: A) igual al ancho de los pozos; B) igual al doble del ancho de los pozos; C) igual a la mitad del ancho de los pozos. Los valores de intensidad de campo eléctrico aplicado son de  $8 Kv/cm$  en adelante ya que el argumento de las funciones de Airy toma valores que no son manejables para valores cercanos a cero, con los ordenadores de trabajo del grupo FICOMACO donde se desarrollo éste trabajo, como se puede ver en las ecuaciones 4.11, 4.12 y 4.8.

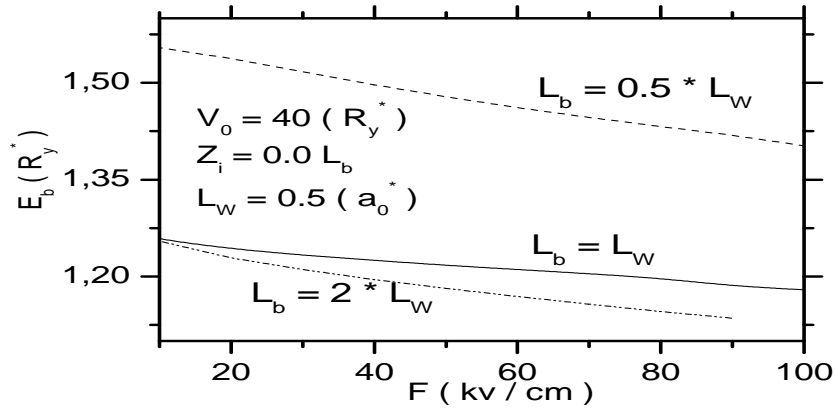


figura 6.8: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro de la barrera en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.

En la figura 6.8 la energía de enlace decrece monótonamente debido al desplazamiento de la distribución de probabilidad hacia el pozo de la izquierda, por efecto del campo eléctrico, como se puede apreciar en la figura 6 de la sección ??; sin embargo, cuando el ancho de la barrera es el doble o la mitad del ancho de los pozos, la razón de decrecimiento de la energía de enlace es mayor y esto se debe a que la separación electrón-impureza cambia a medida que cambia el ancho de la barrera, y a su vez cuando la barrera es la mitad del ancho de los pozos la energía de enlace es mayor por la misma razón; es decir, la interacción coulombiana en este caso es mayor a la de los otros dos casos. Para las curvas de energía de enlace  $E_b$  correspondientes a:  $L_b = L_w$  y  $L_b = 2L_w$  se cortan debido a que en el segundo caso la probabilidad de tunelamiento es mucho menor ya que el ancho de la barrera central es el doble del otro.

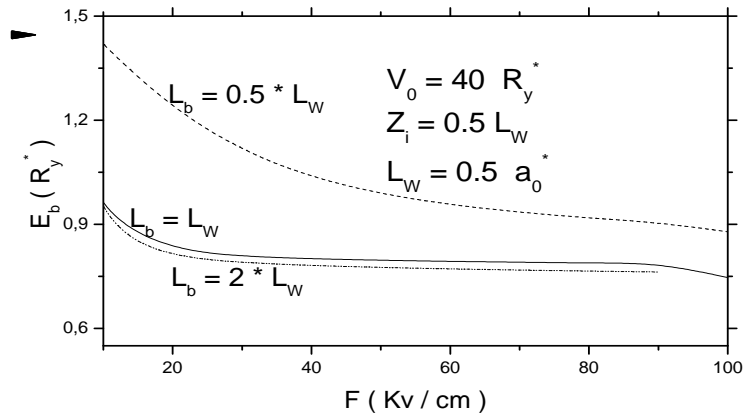


figura 6.9: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo derecho en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.

Cuando la donadora se encuentra localizada en el centro del pozo de la derecha, la energía de enlace  $E_b$  decrece a medida que la intensidad de campo eléctrico aumenta como se observa en la figura 6.9 ya que éste le imprime un desplazamiento a la distribución de probabilidad hacia el pozo de la izquierda (ver figura 6). Cuando el ancho de la barrera central es el mismo y el doble del ancho de los pozos respectivamente, la energía de enlace decrece rápidamente para valores de campo menores que  $20 \text{ Kv/cm}$  luego su comportamiento es casi constante, esto se debe a que para campos eléctricos mayores hay desbordamiento de la función de onda para el electrón, en el volumen del material semiconductor, lo que disminuye la probabilidad de tunelamiento hacia la barrera central y aumenta para la barrera del lado izquierdo. Para un ancho de la barrera central igual a la mitad del ancho de los pozos la energía de enlace decrece lentamente y es mayor a la de los otros dos casos debido a que la energía coulombiana es mayor, es decir, la separación electrón-impureza es más pequeña.

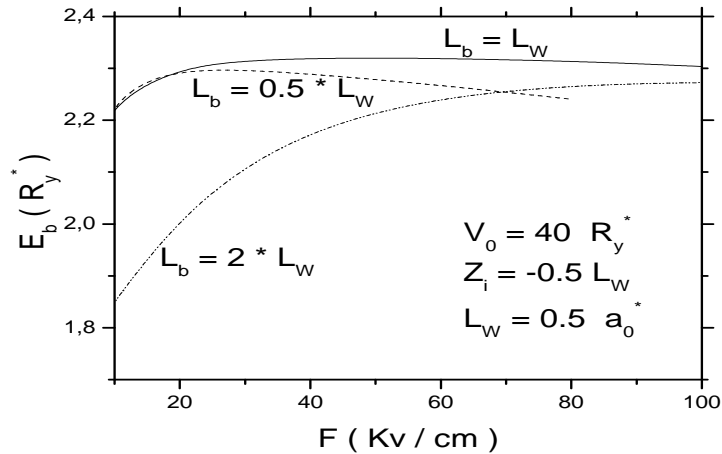


figura 6.10: Energía de enlace de la  $D^0$  ubicada en el centro del pozo izquierdo en función del campo eléctrico aplicado, para valores diferentes del ancho de la barrera y ancho del pozo constante.

Cuando la donadora se encuentra en el centro del pozo izquierdo, en la figura 6.10 se observa que la energía de enlace aumenta, porque el electrón tiende a localizarse en el mismo pozo de la donadora debido al campo eléctrico aplicado. La energía de enlace, para un ancho de la barrera igual al ancho de los pozos, toma un valor constante, en valores de campo mayores a  $20 \text{ Kv/cm}$  ya que la función de onda del electrón se desborda en el volumen del material semiconductor como efecto del campo eléctrico aplicado al sistema.

Para un ancho de la barrera igual a la mitad del ancho de los pozos, la energía de enlace crece rápidamente para campos menores de  $10 \text{ Kv/cm}$  mientras para campos mayores de  $20 \text{ Kv/cm}$  decrece lentamente debido a un efecto de localización que la barrera le da

a la función de onda, y además la barrera central es delgada, por lo tanto puede haber la posibilidad de tunelamiento. La curva de energía de enlace con ancho de la barrera igual al doble del ancho de los pozos, crece monótonamente debido a que la barrera es mayor ofreciendo más confinamiento al electrón en la vecindad de la  $D_0$  que en los casos anteriores.

La energía de enlace para el estado base de una donadora neutra como función de la posición de la impureza en la heteroestructura, bajo tres intensidades de campo eléctrico diferentes, una altura de la barrera  $V_0 = 40R_y^*$ , con ancho de los pozos igual al ancho de la barrera central  $L_W = L_b = 0,5 a_0^*$ .

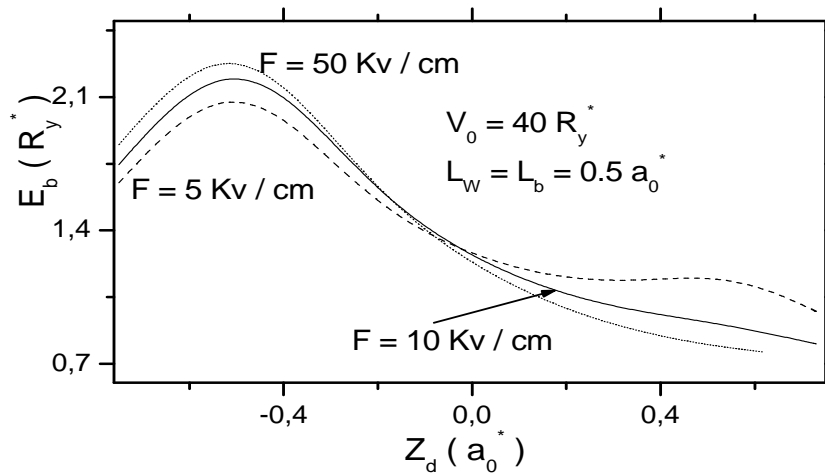


figura 6.11: Energía de enlace de la  $D^0$  variando su posición dentro de la heteroestructura, para  $L_b = L_W = 0,5 a_0^*$ .

Al variar la posición de la donadora se encuentra que las curvas de energía de enlace de la gráfica 6.11 tienen un máximo, cuando la impureza se encuentra en el pozo izquierdo y a su vez es mayor para el campo de  $50Kv/cm$ , luego la impureza se encuentra dentro de la barrera central donde las curvas se cruzan llegando a ser mayor la energía de enlace para el campo de  $5Kv/cm$ , cuando la impureza se encuentra en el pozo de la derecha, además la curva para un campo de  $5Kv/cm$  vuelve a presentar un máximo local debido a que el electrón puede tunelar y por lo tanto existe la probabilidad de encontrarlo en esta región. El aumento que se da en el pozo izquierdo es debido a que el campo eléctrico aplicado localiza la función de onda electrónica en la vecindad de la donadora, y además la distancia de separación ion-electrón es muy pequeña, a medida que la impureza se desplaza hacia la derecha la interacción coulombiana disminuye porque la distancia de separación ion-electrón aumenta, entonces la energía de enlace  $E_b$  disminuye.

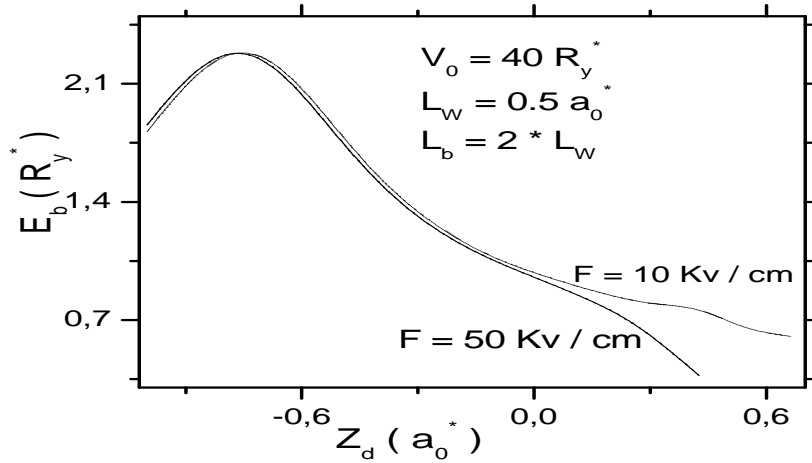


figura 6.12: Energía de enlace de la  $D^0$  variando su posición dentro de la heteroestructura, para  $L_b = 2L_W$ .

En la gráfica 6.12 el cruce de las curvas de energía de enlace para los dos campos de  $10Kv/cm$  y  $50Kv/cm$  respectivamente, que se muestran allí se encuentra aproximadamente en el centro del pozo de la izquierda, porque para posiciones de la impureza, menores a este punto de cruce la separación ion-electrón es muy pequeña, y luego empieza a darse una mayor separación, disminuyendo la energía de enlace, ya que estos valores de campo, tienden a desplazar la función de distribución electrónica, hacia la izquierda, además el ancho de la barrera central es mayor al ancho de los pozos, disminuyendo así la probabilidad de encontrar el electrón, en el pozo derecho.

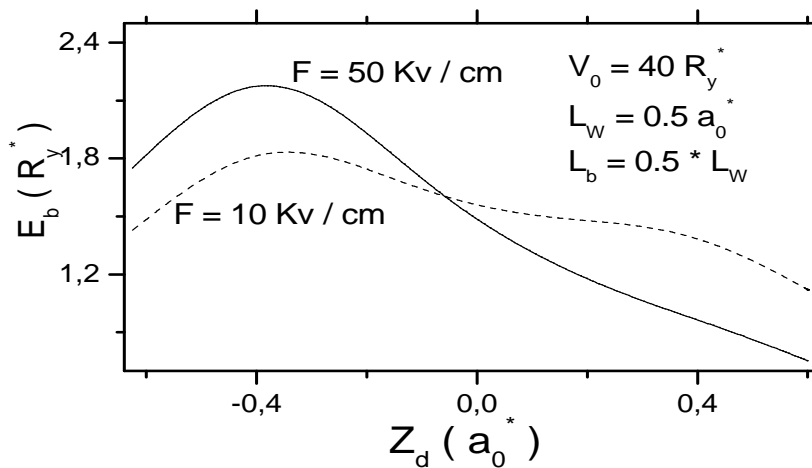


figura 6.13: Energía de enlace de la  $D^0$  variando su posición dentro de la heteroestructura, para  $L_b = 0,5L_W$ .

Los cálculos de la energía de enlace, para la donadora con un ancho de la barrera central igual a la mitad del ancho de los pozos, se muestran en la figura 6.13, con lo cual se puede apreciar, que el punto de cruce para estas curvas, es cuando la impureza se ubica en la barrera central, siendo la energía de enlace mayor para el campo eléctrico de  $50Kv/cm$  cuando la impureza se encuentra en la región del pozo de la izquierda, debido al desplazamiento de la función de onda para el electrón, por efecto del campo, se aumenta la energía de enlace. Cuando la impureza entra a la barrera, la energía de enlace es menor, ya que la probabilidad de encontrar el electrón en esta región disminuye con mayor razón para este campo que para el de  $10Kv/cm$ , aumentando la separación ion-electrón.

Comparando las tres gráficas 6.13, 6.12 y 6.11 encontramos que el efecto del campo eléctrico es similar en todas, y que el cambio de posición del punto de cruce de las curvas se debe a las dimensiones de la barrera respecto al pozo, esto se debe a que la función de onda electrónica puede estar en todo el sistema con una probabilidad mayor para los sistemas de barrera central delgada, mientras que para aquellos sistemas de barrera central ancha el tunelamiento es menor y por lo tanto la función de onda electrónica se confina hacía el pozo de incidencia del campo.

# CONCLUSIONES

A partir de los resultados, mostrados previamente, en este trabajo, podemos dar las siguientes conclusiones:

- Se obtuvo la solución al sistema de doble pozo, con campo eléctrico externo, para un electrón de forma exacta mediante una combinación de funciones de Airy.
- Se usó el método de dimensión fractal, como un procedimiento variacional simplificado para calcular la energía de enlace de una impureza donadora neutra confinada en una heteroestructura semiconductor formada por un doble pozo cuántico.
- El campo eléctrico uniforme, sobre una impureza donadora localizada en un sistema de doble pozo, produce un desplazamiento a la distribución de probabilidad electrónica hacia el lado de incidencia del campo eléctrico, disminuyendo la energía de enlace.
- Al variar la posición de la impureza se puede encontrar que el campo eléctrico, actúa sobre la distribución de la densidad de probabilidad para el electrón; por lo tanto, la variación que da a la energía de enlace, depende de la distancia promedio de interacción coulombiana, la cual varía de acuerdo a las dimensiones del sistema y de la posición de la impureza.
- Para un estudio posterior de este sistema, se debe tener en cuenta que en la heterojuntura de doble pozo cuántico (DQW) los dos primeros estados están muy cercanos (mezcla de las subbandas); es decir, la solución a la ecuación de Schrödinger para el electrón, debe estar dada por la combinación lineal de las funciones asociadas a dichos estados.

# APÉNDICE

## FUNCIONES DE AIRY

Las funciones de *Airy*  $Ai[z]$  y  $Bi[z]$  son dos soluciones independientes  $Ai[z]$  y  $Bi[z]$  para la ecuación diferencial  $y'' - xy = 0$ , ecuación que pertenece al tipo de Laplace, [33]. La función  $Ai[z] \rightarrow 0$  para valores grandes y positivos de  $z$ , mientras,  $Bi[z]$  crece indefinidamente. Las funciones Airy están relacionadas con las funciones de Bessel de orden  $\frac{1}{3}$ . Es fácil comprobar que la ecuación diferencial de segundo orden anterior tiene la solución:  $\sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$  donde  $Z_{\frac{1}{3}}(x)$  es una solución cualquiera de la ecuación de Bessel de orden  $\frac{1}{3}$ . Estas funciones y sus derivadas a menudo son usadas como la solución a problemas de valores de contorno de superficie, en teoría electromagnética y mecánica cuántica, un ejemplo sencillo es cuando se desea determinar la amplitud mecánico cuántico para una partícula en un potencial que incrementa linealmente de izquierda a derecha. La amplitud decae exponencialmente en la región inaccesible, hacia la derecha, como se aprecia en La gráfica 14.

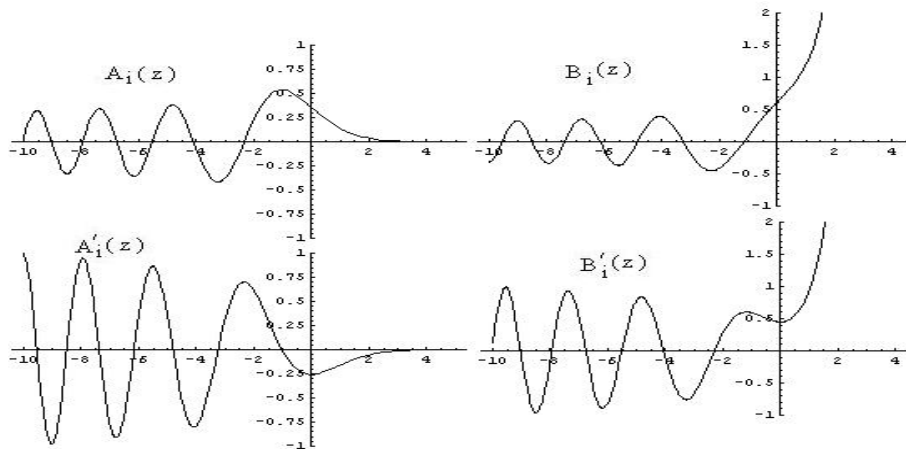


figura 14: Comportamiento de las funciones de Airy y sus derivadas

## REFERENCIAS

- [1] J. Cibert, P. M. Petroff, G. J. Dolan, S. J. Pearton, A. C. Gossard, and J. H. English, *Appl. Phys. Lett.* **49**, 1275 (1986).
- [2] John H. Davis, *The physics of low-dimensional semiconductors-an introduction*, Cambridge University Press. (1998), p. 80.
- [3] W. Hornischer, P. Grambow, T. Demel, E. Bauser, D. Heitmann, K. von Klitzing, and K. Ploog, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 2998 (1998).
- [4] G. Timp, *Nanotechnology* (Springer-Verlag, New York, 1999), S. Foford, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 2707 (2000).
- [5] N. N. Lendentsov, *Phys. Rev. B* **54**, 8743 (1996).
- [6] N. Raigoza, A.L. Morales, A. Montes, N. Porrás- Montenegro and C. A. Duque, *Phys. Rev. B* **69**, 045323 (2004).
- [7] G. Bastard, *Phys. Rev. B* **28**, 3241 (1983).
- [8] G. Bastard, *Phys. Rev. B* **24**, 4714 (1981).
- [9] A. Montes, C. A. Duque and Porrás Montenegro, *J. Phys. Condens. Matter* **10**, 5351 (1998).
- [10] F. J. Betancur and I. D. Mikhailov, *Phys. Rev. B* **51**, 4982 (1995).
- [11] Hao Chen and shixun Zhou, *Phys. Rev. B* **36**, 9561 (1987).
- [12] S. Chaudhuri, *Phys. Rev. B* **28**, 4480 (1983).
- [13] H. Sari, E. Kasapoglu, I. Sokmen, *Physica. B* **325**, (2003).
- [14] C. S. Han and Y. C. Hsieh, *Physica. B* **179**, 385 (2001).

- [15] E. C. Niculescu, Phys. Stat. Sol. (b) **226**, 355 (1992).
- [16] Y. T. Yip and W. C. Kok, Phys. Rev. B **59**, 15825 (1999).
- [17] I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. A. Escorcía, and J. Sierra Otega, Phys. stat. sol. (b) **234**, 590 (2002).
- [18] N. Debbar, S. hong, P. Bhattacharya and R. Sajai, J. Appl. Phys. **65**, 383 (1987).
- [19] D. A. B Miller, H. Haug and L. Banyai *In optical Switching in low-Dimensional Systems, edited*, Plenum, New york. (1998), p. 1 - 18.
- [20] M. O. Vassell, and J. Lee, Phys. Rev. B **44**, 3864 (1991).
- [21] I. D. Mikhailov and F. J. Betancur, Phys.Rev. (B)**67**; Phys.Stat.Sol. (B)**234**. 590 (2002); Phys.stat.Sol.(c)**0**,747-753 (2003).
- [22] I. D. Mikhailov, J.H. Marin and F. Garcia, Phys.stat. sol. (b)**242**, 1636 (2005).  
I. D. Mikhailov, J.H. Marin and F. Garcia, Phisica E. **23**, 102-107 (2004).
- [23] J. L. Zhu, Phys. Rev. B **39**, 8780 (1989).  
J. L. Zhu, J. J. Xong, and B. L. Gu, Phys. Rev. B **41**, 6001 (1990).
- [24] S. V. Branis, G. Li and K. K. Bajaj, Phys. Rev. B **47**, 15735(1992).
- [25] J. L. Zhu, J. H. Zhao, and J.J. Xiong, Phys. Rev. B **50**, 1832 (1994).
- [26] A. Gonzales and I. Mikhailov, Int. J. Mod. Phys. B
- [27] M. El-Said, Physica B **202**, 202 (1994).
- [28] F. J. Betancur, I. D. Mikhailov and L. E. Oliveira, J. Phys. D **31**, 3391 (1998).
- [29] T. Pang and S. G. Louie, Phys. Rev. Lett. **65**, 1635 (1990); S. G. Louie and T. Pang, in *New Horizon in Low- Dimensional Electron System*, edited by H. Aoki (Kluwer Academic, Dordrecht, 1992), p. 445.
- [30] B. B. Mandelbrot, *the Fractal Geometry of Nature* freeman, san francisco,(1982).
- [31] M. Angel Durán R, tesis Biblioteca UIS y grupo FICOMACO. *Efecto del campo eléctrico sobre el estado base de de una donadora en pozos cuanticos y dobles pozos cuanticos*, (2004)
- [32] G. Weber, Phys. Rev. B **41**, 10043 (1990).
- [33] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mecánica cuántica no - relativista* Reverte México, (1967), P. 688.