

Dinámica de jets relativistas extragalácticos con términos radiativos

Oswaldo Alonso Nieto Narváez

Trabajo de Investigación Presentado para Optar por el Título de Magister en Matemática Aplicada

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Doctor en Física

Codirector

Guillermo Alfonso González Villegas

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de física

Maestría en matemática aplicada

Bucaramanga

2020

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA RELATIVISTA CON TÉRMINOS RADIATIVOS	19
1.1. Descomposición 3 + 1	19
1.2. Campo de radiación	27
1.2.1. Tensor de presión de radiación	32
1.2.2. Tensor de Energía-Momento de Radiación y 4-vector fuerza	35
1.3. Ecuaciones de Euler Relativistas + Radiación en el Régimen Ópticamente Grueso	37
1.3.1. Ecuación de continuidad	40
1.3.2. Ecuaciones hidrodinámicas con términos radiativos	41
1.3.2.1. Evolución hidrodinámica	43
1.3.2.2. Evolución del campo de radiación	46
1.4. Formulación Conservativa	51
2. MÉTODOS NUMÉRICOS	55
2.1. Métodos de alta resolución para la captura de choques	55
2.2. Integrador numérico IMEX	59
2.3. Recuperación de variables	60

3. PRUEBAS NUMÉRICAS	64
3.1. Problemas de Riemann con Radiación	64
3.1.1. Prueba 1: Choque fuerte no relativista	67
3.1.2. Prueba 2: Choque fuerte ligeramente relativista	68
3.1.3. Prueba 3: Onda altamente relativista	69
3.1.4. prueba 4: Onda ligeramente relativista dominada por la presión de radiación	70
3.1.5. Prueba 5:	71
3.2. Acreción de Michel con Radiación	73
4. CONCLUSIONES	78
Referencias Bibliográficas	80
Apéndices	90

Lista de Figuras

- Figura 1. Representación de la foliación del espacio tiempo en la formulación $3 + 1$. Las hipersuperficies Σ son superficies de nivel de la función global t ($\nabla_{\mu}t$), donde n^{μ} es un vector normal a estas hipersuperficies $t = \text{constante}$. 21
- Figura 2. Teorema de Pitágoras en la descomposición espacio-tiemporal $3 + 1$. 27
- Figura 3. Representación geométrica de rayos que inciden de manera oblicua en un elemento de superficie. 28
- Figura 4. Esquema que representa el número de fotones que atraviesan el elemento de superficie dS en un intervalo de tiempo dt . Toda la radiación que incide en la superficie en el tiempo dt , estará contenida en el cilindro de altura cdt . 30
- Figura 5. Celda computacional $I_{i,j,k}$ vista en el plano x - y . 57
- Figura 6. Prueba 1: Problema de Riemann 1D correspondiente a un choque no relativista ($W = 1.0001$). En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución de $\Delta x = 0,05$ y factor de Courant $0,25$. 68

Figura 7. Prueba 2: Problema de Riemann 1D correspondiente a un choque ligeramente relativista ($W = 1.0029$). En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant $0,25$.

69

Figura 8. Prueba 3: Problema de Riemann correspondiente a una onda altamente relativista. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant $0,25$.

70

Figura 9. Prueba 4: Problema de Riemann correspondiente a una onda ligeramente relativista ($W = 1,60$) dominada por la presión de radiación. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant $0,1$.

71

Figura 10. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para una evolución en el tiempo $t = 15$, correspondiente a dos ondas de choque relativistas ($W = 1,60$) que se propagan en direcciones opuestas con parámetros: $x \in [-20, 20]$, $\Delta x = 0,0125$, y factor de Courant $0,05$.

72

Figura 11. En esta figura se presenta la tasa de masa acretada de un fluido perfecto para los valores de la constante de opacidad de dispersión de Thomson $\kappa^s = 0.1$, $\kappa^s = 0.4$ y $\kappa^s = 0.8$.

74

Figura 12. Esta gráfica presenta las simulación numérica de la acreción de Michel en coordenadas de Eddington-Finkelstein en el régimen estacionario. En orden descendente las curvas corresponden a la densidad de masa en reposo y la velocidad radial normalizada a c , como función de la coordenada radial normalizada al radio gravitacional r_g .

76

Figura 13. Esta gráfica presenta las simulación numérica de la acreción de Michel en coordenadas de Eddington-Finkelstein en el régimen estacionario. En orden descendente las curvas corresponden a la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación en unidades físicas, como función de la coordenada radial normalizada al radio gravitacional r_g (ver Apéndice 3).

77

Lista de Tablas

Tabla 1. Parámetros del tubo de choque. Esta tabla contiene los valores de las variables que definen los respectivos estados a izquierda y a derecha del problema de Riemann con radiación en una dimensión.

67

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista con términos radiativos en coordenadas cilíndricas en un espacio tiempo plano de Minkowski	90
Apéndice B. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista con términos radiativos en un espacio-tiempo curvo de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein	98
Apéndice C. Normalización de las unidades	107

Resumen

Título: DINÁMICA DE JETS RELATIVISTAS EXTRAGALÁCTICOS CON TÉRMINOS RADIATIVOS *

Autor: OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ. **

Palabras Clave: HIDRODINÁMICA RELATIVISTA, TÉRMINOS RADIATIVOS, JETS EXTRAGALCTICOS, MÉTODOS NUMÉRICOS.

Descripción: En este trabajo se presenta un estudio de la morfología de jets relativistas extragalácticos con radiación, a partir de la comparación de simulaciones hidrodinámicas en un espacio-tiempo plano con y sin términos radiativos. Para esto, se obtuvieron a partir de la conservación local de la masa y de la conservación local del tensor de energía momento, las ecuaciones de Euler relativistas de un fluido perfecto acoplado con el campo de radiación, en el marco de la descomposición $3 + 1$ del espacio-tiempo de la relatividad general. Se implementó un módulo numérico en el código *CAFE* que resuelve dichas ecuaciones, basado en el esquema numérico de alta resolución para la captura de choques, debido a que es común que aparezcan choques y discontinuidades en las variables de estado que definen el fluido. Por otra parte, con el fin de validar el módulo numérico implementado, se realizan una serie de pruebas numéricas las cuales consisten en diferentes problemas de Riemann relativistas con radiación en un espacio-tiempo de Minkowski, y la acreción de Michel esférica en la que se incluyen los términos radiativos.

* Trabajo de Investigación de Maestría en Matemática Aplicada.

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Guillermo Alfonso González Villegas, Ph.D.

Abstract

Title: DYNAMICS OF EXTRAGALACTIC RELATIVISTIC JETS WITH RADIATIVE TERMS *

Author: OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ. **

Keywords: RELATIVISTIC HYDRODINAMICS, RADIATIVE TERMS, EXTRAGALACTIC JETS, NUMERICAL METHODS.

Description: In this work, the morphology of extragalactic relativistic jets with radiation was studied, based on the comparison of hydrodynamic simulations in a flat space-time with and without radiative terms. For this, the relativistic Euler equations of a perfect fluid coupled with the radiation field were obtained from the local conservation of the mass and the local conservation of the energy tensor, applying the 3 + 1 decomposition of space-time in general relativity. A numerical module was implemented in the CAFE code that solves the relativistic Euler equations, based on the high resolution shock capturing methods numerical scheme, because it is common for shocks and discontinuities to appear in the state variables that define the fluid. On the other hand, in order to validate the code, a series of tests are carried out, these consist of different 1D relativistic Riemann problems with radiation, and the spherical Michel accretion in the optically thick regime approximation for the radiation field.

* MSc research in applied mathematics.

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Guillermo Alfonso González Villegas, Ph.D.

Introducción

Un jet se describe como un flujo continuo de partículas que son expulsadas por un AGN (núcleo activo de una galaxia por sus siglas en inglés). Este fenómeno fue observado por primera vez en la imagen óptica de la galaxia M87, el cual fue descrito por Curtis (1918) como un rayo curioso conectado con el núcleo. Luego en los años 50 el término jet fue utilizado por Baade and Minkowski (1954) para describir la eyección de materia desde la región interior de la galaxia, que para ese entonces, radio-observaciones de lóbulos gemelos en radio galaxias extendidas, mostraban más evidencias de jets altamente colimados. En un primer intento por explicar estas observaciones, Shklovskii (1953) propuso que las emisiones de radio observadas podrían ser debido a la radiación sincrotrónica de electrones, la cuál era soportada indirectamente por la medición de la polarización óptica del jet de la galaxia M87 (Baade, 1956). En los años 60 el término jet ya era de uso común, aún sin saber que éste involucraba un flujo continuo de materia. Con el fin de explicar teóricamente el jet de la galxia M87 y las fuentes de radio de doble lóbulo, Shklovskii (1963) propuso la acreción de plasma dentro del campo gravitacional del AGN, que es entonces calentado y colapsa a lo largo de un eje de preferencia, fluyendo hacia el medio intergaláctico. Por otro lado, Blandford and Rees (1974) y Scheuer (1974) proponen que el transporte de energía es en forma de un haz, donde la mayoría de la energía interna del plasma es transformada en energía cinética por un proceso de colimación y se recupera donde el haz interactúa con el medio externo. De esta manera, el fluido supersónico puede suministrar la energía requerida continuamente desde el núcleo a los lóbulos, permitiendo la reaceleración de las partículas. Posteriormente, con el aumento en la resolución

angular de los radio telescopios, fueron descubiertos puentes de radiación no térmica entre los núcleos y los lóbulos, estableciendo un enlace físico entre éstos. Esta teoría ha tomado fuerza, debido al soporte que ha dado la evidencia observacional con la llegada del radio telescopio VLA (Very Large Array) (Perley et al., 2009), el cual condujo al descubrimiento de una gran cantidad de jets en fuentes extragalácticas de gran poder (Kolokythas et al., 2015), estando de acuerdo con la teoría de haces mencionada con anterioridad.

Por otra parte, muchos de los problemas en astrofísica de altas energías, involucran flujos relativistas. Por esta razón, tener un entendimiento de dichos flujos es importante para la interpretación correcta de los fenómenos astrofísicos. Por ejemplo, los factores de Lorentz asociados al movimiento de ondas internas de choque, y a la estructura de los jets, producen movimientos superlumínicos aparentes observados en jets relativistas en microcuasares en la Galaxia (Mirabel and Rodríguez, 1999), así como en fuentes de radio extragalácticas asociadas con AGNs (Zensus, 1997). En algunas fuentes de radio extragalácticas muy potentes, las eyecciones provenientes de la maquinaria central del AGN producen jets con factores de Lorentz de 10 a 20, aunque recientemente se han reportado factores de Lorentz ≥ 150 , para el Blazar más energético conocido hasta ahora (Cabrera et al., 2013). Además, las descripciones relativistas son inevitables en otro tipo de situaciones de rápida expansión, tales como los estados primigenios de una explosión supernova (Burrows, 2000) y la producción de GRBs muy energéticos (Mészáros, 2002). Todos estos flujos relativistas son altamente no lineales y complejos, además que se asocian a factores de Lorentz muy grandes, por lo que a menudo, dichos procesos tienen que ser tratados de forma numérica. En experimentos numéricos que se han

realizado, se muestra que es posible lidiar con flujos asociados a factores de Lorentz incluso del orden de 1000 (Lora-Clavijo et al., 2015). La radiación también juega un papel muy importante cuando se quiere estudiar y comprender dichos flujos, ya que es un mecanismo de transporte de energía dominante. Por ejemplo, en flujos relativistas de materia que pueden ocurrir en un espacio tiempo casi plano (jets en fuentes de radio doble, o núcleos activos de galaxias AGNs), o en un espacio altamente curvo (acreción de materia en agujeros negros, colapso nuclear de supernovas, estallidos de rayos gamma (GRBs), entre otros) la radiación está acoplada fuertemente con la materia y abarca parte de la densidad de energía, presión y densidad de momento. Así, en cualquiera de estos casos, se debe considerar un formalismo relativista para tratar la transferencia de radiación a través del medio, por esta razón, un enfoque hidrodinámico relativista con radiación en el que las leyes de conservación de momento y energía para el campo de radiación puedan resolverse paralelamente con las del gas, es de gran importancia en las simulaciones numéricas de de tales sistemas.

El estudio de los sistemas astrofísicos ya mencionados ponen de manifiesto el reto de solucionar las ecuaciones que describen la dinámica de dichos escenarios astrofísicos. Dichas ecuaciones son no lineales, por lo tanto es imprescindible tratar estos problemas de forma numérica, por esta razón, en la actualidad es de gran importancia el desarrollo de códigos robustos que puedan implementar numéricamente la hidrodinámica, la magnetohidrodinámica y la radiación acopladas a un espacio-tiempo. Por ejemplo, Desde las primeras simulaciones numéricas dependientes del tiempo, reportadas por Van Putten (1993), Mar y Hughes et al. (2002), se han hecho simulaciones en dos y tres dimensiones,

en RHD, destacando su importancia en el entendimiento de los jets relativistas (Martí et al., 1997; Komissarov and Falle, 1998; Aloy et al., 1999; Rosen et al., 1999; Hughes et al., 2002; Mizuta et al., 2004). Las propiedades morfológicas y dinámicas de la propagación de estos jets, a través de un medio homogéneo en dos dimensiones fueron estudiadas por Martí et al. (1997), y por Aloy et al. (1999) en el caso de tres dimensiones. Komissarov and Falle (1998), investigaron los flujos a grandes escalas producidos por jets Newtonianos y relativistas en medios externos uniformes, usando estudios analíticos y numéricos. Hughes et al. (2002), desarrollaron un estudio en tres dimensiones de la deflexión de los jets relativistas debido a un gradiente de densidad oblicuo, generalizando los estudios analíticos y semianalíticos de Mendoza and Longair (2001). Mendoza et al. (2009), mostraron como explicar curvas de luz asociadas a destellos de rayos gamma largos (LGRB), utilizando un modelo balístico en el cual el flujo en la base del jet es inyectado de manera oscilatoria. Este modelo fue también contrastado con un modelo hidrodinámico numérico en 1D y se mostró que en el rango de validez del problema, los resultados analíticos simplificados eran coherentes. El modelo de Mendoza et al. (2009) ha sido recientemente puesto a prueba en la complicada curva de luz del Blazar *PKS1510 – 089*, mostrando satisfactoriamente un ajuste en los datos (Cabrera et al., 2013). El éxito obtenido para modelar curvas de luz mediante este procedimiento, tiene que ser tomado con cautela, pues el modelo de emisión radiativo de la superficie de trabajo tiene que expandirse de manera abrupta en el caso general, ya que ahora se cuenta con curvas de luz multifrecuencia.

Por otro lado, en cuanto a los términos radiativos y procesos de radiación, se han publicado artículos recientes que resaltan la importancia de incluir la radiación en las ecuaciones de la hidrodinámica y

magnetohidrodinámica relativista (Zanotti et al., 2011; Porth et al., 2011; Rivera-Paleo and Guzmán, 2016), ya que juegan un papel muy importante en eventos astrofísicos como lo es la acreción de materia en agujeros negros, la cual puede estar asociada con la producción de jets relativistas. Entre los trabajos que se han realizado en este campo, se encuentra el trabajo de Zanotti et al. (2011), en el cual se presentan simulaciones hidrodinámicas en el marco de la relatividad con radiación, donde se muestra la acreción de Bondi Hoyle de materia en un agujero negro en la aproximación ópticamente gruesa. En éste se obtiene que una vez que el sistema se relaja a un régimen dominado por la presión de radiación, las tasas de acreción se hacen aproximadamente dos órdenes de magnitud más pequeñas que en el caso puramente hidrodinámico. Por otra parte, Dibi et al. (2012) presentan simulaciones numéricas magnetohidrodinámicas en relatividad general (GRMHD), del flujo de acreción alrededor del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia, sagitario A* (Ghez et al., 2008; Hees et al., 2017), en la aproximación ópticamente delgada, que a diferencia del trabajo anterior, no se resuelven las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista con términos radiativos, si no que, consideran una función de enfriamiento asociada a los procesos radiativos Compton inverso y sincrotrón, encontrando que si el centro galáctico acreta por encima de una tasa de $10^{-8}M_{\odot}yr^{-1}$, pérdidas por radiación deben ser tenidas en cuenta como diferencias significantes que aparecen en la dinámica cuando se comparan simulaciones con y sin enfriamiento por radiación. Siguiendo esta línea (acreción de materia en agujeros negros), Fragile et al. (2012, 2014) con el fin de obtener simulaciones más realistas, implementan sobre un código magnetohidrodinámico en relatividad general, esquemas que permiten solucionar las ecuaciones de la RMHD con términos radiativos, obteniendo como resultados poder considerar temperaturas y tasas de acreción con órde-

nes de magnitud mayores a los artículos mencionados anteriormente. Así pues, este tipo de códigos permiten explorar problemas de interés astrofísico como lo son colapso de núcleos de supernova y GRBs, los cuales son aplicaciones de códigos relativistas magnetohidrodinámicos con radiación.

En este trabajo se compara la morfología con y sin términos radiativos, de jets relativistas extragalácticos en el régimen ópticamente grueso. Esto se hace en el marco de la relatividad especial, ya que se tiene en cuenta la propagación del jet lejos de la fuente que lo emite. Para esto, en las ecuaciones que modelan este fenómeno, se considera un espacio-tiempo de Minkowski, debido a que lejos de la fuente, tanto la evolución del espacio-tiempo como los efectos del campo gravitacional son despreciables. Para esto, el documento se divide de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presenta una descripción de la descomposición $3 + 1$ y de las cantidades físicas que definen el campo de radiación, así como también las ecuaciones de la hidrodinámica relativista con radiación en forma conservativa para un espacio-tiempo en general. El Capítulo 3 trata los métodos numéricos que se utilizan para la solución de dichas ecuaciones. En este se da una descripción del esquema numérico de alta resolución para la captura de choques, el integrador numérico en el tiempo Runge Kutta *IMEX* y la manera en que se reconstruyen las variables en las interceldas. En el capítulo 4, se muestran una serie de pruebas numéricas que validan el código cuando se tienen en cuenta los términos radiativos. Estas consisten en unos tubos de choques hidrodinámicos con radiación. En el Capítulo 5, se realiza el estudio de la morfología de jets relativistas hidrodinámicos con radiación, y se comparan los resultados obtenidos con las simulaciones hidrodinámicas. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

1. ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA RELATIVISTA CON TÉRMINOS RADIATIVOS

En este capítulo se sientan las bases para estudiar la evolución de un fluido acoplado con el campo de radiación en un espacio tiempo curvo fijo en el marco de la relatividad general, fundamentado en la formulación $3 + 1$ del espacio tiempo. Para esto, la primera parte se enfoca en la descripción general de la descomposición $3 + 1$ del espacio-tiempo, luego se introducen las cantidades físicas que definen el campo de radiación y finalmente se presentan las ecuaciones que describen a la hidrodinámica relativista (RHD por sus siglas en inglés) con radiación en forma conservativa, las cuales se obtienen de la conservación de la masa del fluido, y de la conservación local del tensor de energía-momento del sistema formado por el fluido y el campo de radiación. Es importante resaltar que las ecuaciones descritas en este capítulo son válidas en general para cualquier espacio-tiempo.

1.1. Descomposición $3 + 1$

A continuación se da una descripción de la descomposición $3 + 1$ del espacio tiempo, ya que las ecuaciones de la RHD están escritas en dicha formulación. La descomposición $3 + 1$ (York Jr, 1979) propuesta originalmente con el fin de evolucionar el campo gravitacional producido por una fuente en relatividad general, en la que se proponen las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy (Alcubierre, 2008; Baumgarte and Shapiro, 2010), consiste en dividir los roles del espacio y el tiempo de una manera clara, el cual permite tratar estas ecuaciones análogamente al trabajo que se hace en dinámica clásica, donde la evolución de un sistema está determinado únicamente por las condiciones iniciales del problema.

Primero se asume que el espacio-tiempo con métrica $g_{\alpha\beta}$ puede ser foliado en una familia de superficies 3-dimensionales tipo espacio Σ que no se intersectan entre si, que pueden ser consideradas como superficies de nivel de una función escalar t , interpretada como una función global del tiempo. La figura 1 es una representación de la foliación del espacio tiempo en la que \mathbf{n} es un vector normal unitario a las hipersuperficies, de esta manera a partir de t se definen las componentes del vector normal como

$$n^\mu = -\alpha g^{\mu\nu} \nabla_\nu t, \quad (1)$$

donde α es la función lapso y se define por medio de la expresión

$$\sqrt{-\nabla_\mu t \nabla^\mu t} = \frac{1}{\alpha}, \quad (2)$$

la cual resulta de la normalización del gradiente de la función t y el signo negativo indica que siempre n^μ está dirigido a lo largo de la dirección creciente del tiempo. Las componentes de la 1-forma asociada son $n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu$ y se cumple además que $n^\mu n_\mu = -1$, en consecuencia, el vector \mathbf{n} es un vector unitario tipo-tiempo, y puede entonces ser considerado como la 4-velocidad de un observador ‘normal’ cuya línea de mundo es siempre normal a las superficies espaciales Σ .

La métrica $g_{\mu\nu}$ induce una métrica espacial $\gamma_{\mu\nu}$ sobre las hipersuperficies 3-dimensionales Σ , y se

construye a partir del vector normal como

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_{\mu}n_{\nu}, \quad (3)$$

el cual permite medir distancias propias entre puntos que están sobre estas hipersuperficies, así $\gamma_{\mu\nu}$ es un tensor de proyección el cuál es completamente espacial.

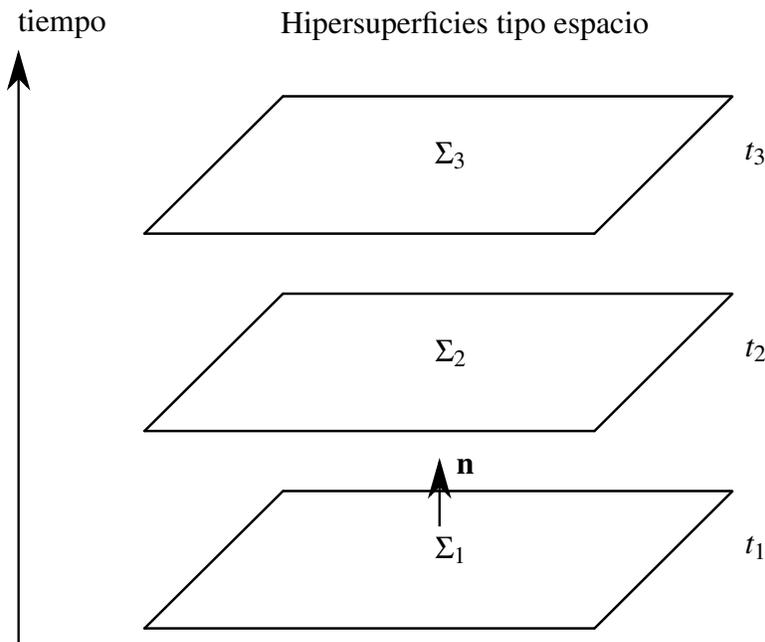


Figura 1. Representación de la foliación del espacio tiempo en la formulación 3 + 1. Las hipersuperficies Σ son superficies de nivel de la función global t ($\nabla_{\mu}t$), donde n^{μ} es un vector normal a estas hipersuperficies $t = \text{constante}$.

Ahora, para romper la estructura 4-dimensional se requiere descomponer las cantidades tensoriales en una parte totalmente espacial sobre las hipersuperficies Σ , y una parte tipo tiempo, que sea normal

a éstas. Para esto, (i) se define el operador proyección espacial

$$\gamma_{\nu}^{\mu} = g_{\nu}^{\mu} + n^{\mu}n_{\nu}, \quad (4)$$

que proyecta un tensor 4-dimensional en la superficie espacial (tensores de rango superior se proyectan contrayendo cada índice libre con un operador proyección), (ii) de manera análoga se define el operador proyección normal

$$N_{\nu}^{\mu} = -n^{\mu}n_{\nu}, \quad (5)$$

que como se mencionó, al combinar estos dos operadores un tensor puede descomponerse en sus partes espacial y temporal respectivamente.

Como ya se ha dicho, en la descomposición $3 + 1$ se definen todas las cantidades tensoriales de manera espacial, proyectando éstas sobre las hipersuperficies Σ . Ahora, lo que se quiere es que si se evoluciona en el tiempo los campos, estas cantidades espaciales sigan siendo espaciales, en otras palabras, si el vector \mathbf{n} está en la dirección en la que se quiere transportar los vectores, y lo que se desea es que todos estos vectores terminen en la siguiente hipersuperficie, la expresión

$$n^{\mu}\nabla_{\mu}t = \frac{1}{\alpha}, \quad (6)$$

que es el cambio de la función t en la dirección del vector normal n^{μ} , indica que los vectores no

terminarán en la siguiente hipersuperficie, ya que α en general es diferente en lugares diferentes; por consiguiente, una forma de arreglar esto, es considerar

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (7)$$

donde el vector desplazamiento β^μ mide la cantidad en el que las coordenadas espaciales son desplazadas en una superficie con respecto al vector normal (figura 2), mientras que la función lapso α mide cuánto tiempo propio transcurre entre superficies vecinas temporales en la dirección del vector normal. Ya que $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, t^μ conectará puntos con la mismas coordenadas espaciales entre superficies vecinas, esto implica entonces que todos los vectores infinitesimales $t^\mu dt$ y por lo tanto $\alpha n^\mu dt$ originados en una superficie espacial Σ_t terminarán sobre la superficie espacial Σ_{t+dt} . A la ecuación (7) se le llama comúnmente congruencia temporal, y es importante resaltar que observadores que están en “repose” con respecto a las superficies siguen la congruencia normal n^μ y son llamados observadores Eulerianos, mientras que los observadores que siguen la congruencia t^μ son llamados observadores coordinados.

Lo que sigue ahora es definir un sistema coordinado que se adapte de manera natural a la descomposición 3 + 1, para esto se escogen los vectores base e^μ , de manera que

$$n_\mu e^\mu_i = 0, \quad (8)$$

$$e^\mu_0 = t^\mu, \quad (9)$$

debido a la importancia que tiene la congruencia temporal t^μ descrita en el párrafo anterior. La condición $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ implica que

$$e_0^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (10)$$

mientras que la ecuación (8), indica que la única componente que no es cero en n_μ es la componente temporal, por lo tanto las componentes espaciales covariantes deben ser cero ($n_i = 0$). Además de la ecuación (8) se observa también que si se toma cualquier tensor espacial contravariante, sólo las componentes espaciales pueden ser diferentes de cero, entonces, la componente temporal tiene que ser cero, por ejemplo, se cumple que $n_\mu \beta^\mu = n_0 \beta^0 = 0$, en consecuencia

$$\beta^\mu = (0, \beta^i), \quad (11)$$

son las componentes del vector desplazamiento. Ahora, resolviendo la ecuación (7) para n^μ se obtienen las componentes contravariantes

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{\alpha} (t^\mu - \beta^\mu) \\ &= \frac{1}{\alpha} (1, -\beta^i), \end{aligned} \quad (12)$$

mientras que de la normalización $n^\mu n_\mu = -1$ se obtiene

$$\frac{1}{\alpha} n_0 = -1, \quad (13)$$

en consecuencia las componentes n_μ son

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (14)$$

Por último, de la expresión de la métrica espacial (3) se concluye que las componentes espaciales tienen que ser la mismas en esa expresión, es decir,

$$\gamma_{ij} = g_{ij}, \quad (15)$$

así la métrica sobre Σ es justamente la parte espacial de la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$. Ya que las componentes temporales de un tensor espacial contravariante son cero, entonces

$$g^{00} = \cancel{\gamma^{00}} - n^0 n^0 = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (16)$$

$$g^{i0} = \cancel{\gamma^{i0}} - n^i n^0 = -\frac{\beta^i}{\alpha^2} \quad (17)$$

$$g^{0j} = \cancel{\gamma^{0j}} - n^0 n^j = -\frac{\beta^j}{\alpha^2} \quad (18)$$

$$g^{ij} = \gamma^{ij} - n^i n^j = \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2}, \quad (19)$$

así, la métrica inversa queda de la forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^j/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde se cumple que $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$. Entonces, tanto γ^{ij} como γ_{ij} se usan para subir y bajar índices de tensores espaciales, de esta manera, invirtiendo (20) se encuentran las componentes de la métrica espacio-temporal, dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

donde $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ son las componentes covariantes del vector desplazamiento. Por último, el elemento de línea se construye por medio de la expresión $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ obteniéndose

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (22)$$

la cuál se conoce como la forma ADM de la métrica o forma 3 + 1 (Arnowitt et al., 2008). De la figura 2, este elemento de línea puede ser interpretado como el teorema de Pitágoras para el espacio-tiempo, es decir, $ds^2 = -(\text{tiempo propio entre hipersuperficies vecinas})^2 + (\text{distancia propia dentro de la hipersuperficie espacial})^2$, el cual permite interpretar la ecuación (22) como el intervalo invariante entre los puntos x^i y $x^i + dx^i$.

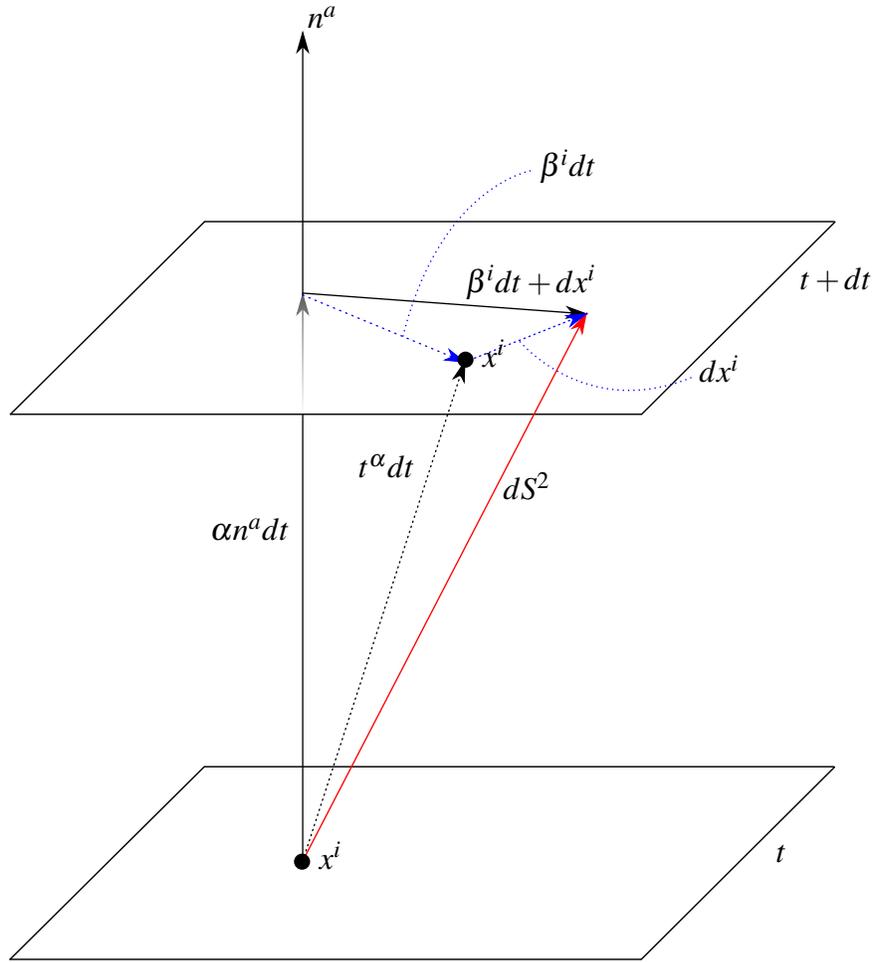


Figura 2. Teorema de Pitágoras en la descomposición espacio-tiemporal 3 + 1.

1.2. Campo de radiación

El campo de radiación se expresa como una función de la posición y del tiempo, que en determinado tiempo y espacio tiene una distribución tanto en ángulo como en frecuencia. Macroscópicamente este campo se describe completamente por la intensidad específica de radiación $I(\xi, t, \mathbf{n}, \nu)$, cuya definición se construye a partir de considerar la energía de radiación que transporta un rayo moviéndose en la dirección \mathbf{n} alrededor de un ángulo sólido $d\Omega$, a través de un elemento de superficie dS , en un tiempo diferencial dt (figura 3), es decir,

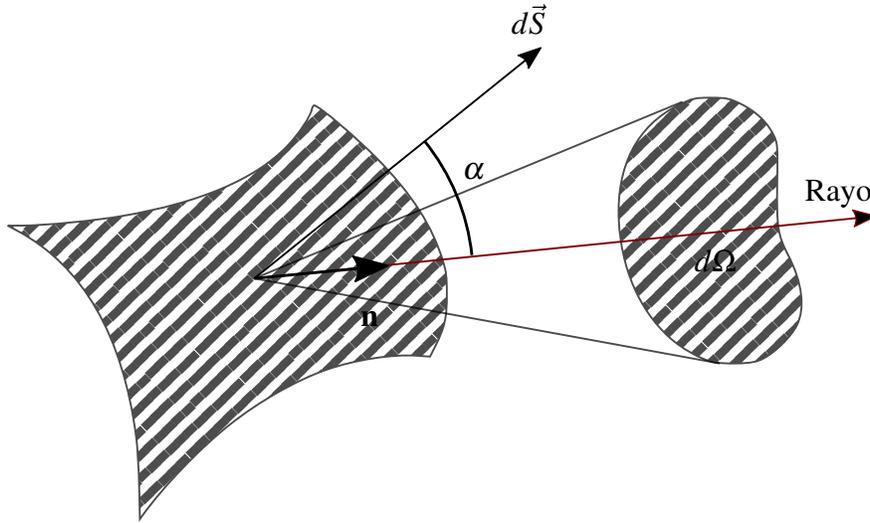


Figura 3. Representación geométrica de rayos que inciden de manera oblicua en un elemento de superficie.

$$d\varepsilon = I(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) dS \cos(\alpha) d\Omega d\nu dt, \quad (23)$$

donde ξ es el vector que especifica la locación de un punto en el espacio, y α es el ángulo entre la superficie dS y el vector \mathbf{n} . Las unidades de la intensidad son respectivamente $\text{ergs cm}^{-2} \text{str}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Desde un punto de vista microscópico el transporte de la radiación se da por fotones, por lo tanto, para redefinir la ecuación (23) se considera la densidad de número de fotones Ψ tal que

$$\Psi(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega d\nu, \quad (24)$$

es el número de fotones por unidad de volumen en (ξ, t) con frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$ desplazándose con velocidad c por dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ alrededor de la dirección \mathbf{n} en las que estos se propagan. De manera que, el número de fotones que atraviesan un elemento de superficie en un

intervalo de tiempo dt es (figura 4)

$$\Psi(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega d\nu c dt, \quad (25)$$

donde cada fotón tiene energía $h\nu$. De esta forma, la energía transportada por radiación desde el punto de vista microscópico se define ahora como

$$d\varepsilon = ch\nu\Psi dS \cos(\alpha) d\Omega d\nu dt, \quad (26)$$

que al compararse con la ecuación (23) se obtiene la intensidad específica

$$I(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) = ch\nu\Psi(\xi, t; \mathbf{n}, \nu), \quad (27)$$

la cual describe el campo de radiación de manera microscópica.

La densidad de energía de radiación monocromática a frecuencia ν ($\text{ergscm}^{-3}\text{Hz}^{-1}$), se define como la densidad del número de fotones con energía $h\nu$ a esa frecuencia, sumados sobre todos los ángulos sólidos, esto es

$$E_\nu = E(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) = h\nu \oint \Psi(\xi, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega. \quad (28)$$

Usando la ecuación (27) se tiene que

$$E_{\nu} = \frac{1}{c} \oint I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_{\nu}, \quad (29)$$

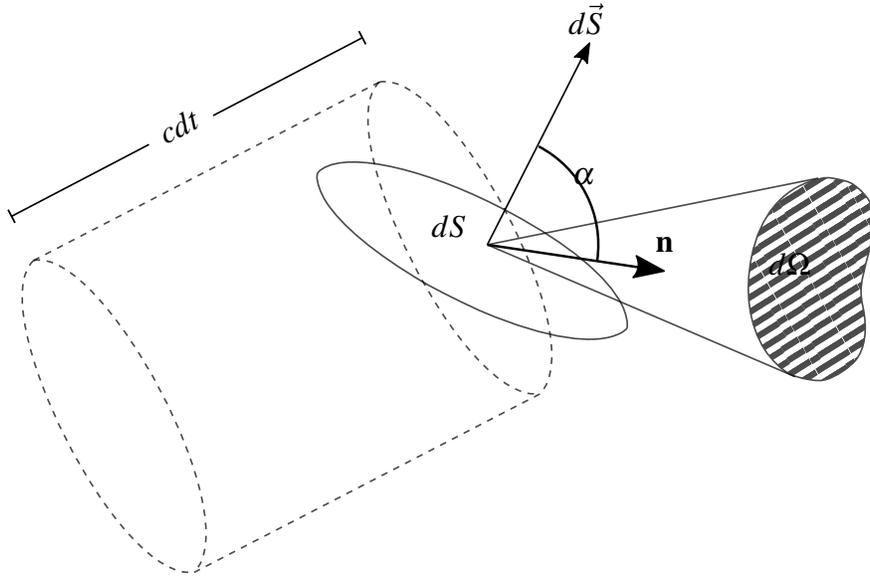


Figura 4. Esquema que representa el número de fotones que atraviesan el elemento de superficie dS en un intervalo de tiempo dt . Toda la radiación que incide en la superficie en el tiempo dt , estará contenida en el cilindro de altura cdt .

donde J_{ν} es el promedio de la intensidad específica sumada sobre todos los ángulos sólidos, es decir

$$J_{\nu} = J(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega. \quad (30)$$

Así, la densidad de energía total es la suma de la expresión anterior sobre todas las frecuencias

$$E = E(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_0^{\infty} E(\boldsymbol{\xi}, t; \nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} J(\boldsymbol{\xi}, t; \nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} J(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (31)$$

cuyas unidades son $ergs\ cm^{-3}$.

El flujo de radiación monocromático se define tal que es un vector cuyo producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es la tasa neta de flujo de energía radiante por unidad de frecuencia, a frecuencia ν , a través de $d\mathbf{S}$. Por lo tanto, la forma matemática se construye considerando el flujo neto de número de fotones que cruzan $d\mathbf{S}$ por unidad de tiempo y frecuencia sumados sobre todas las direcciones, esto se hace a partir de la ecuación (25) dando como resultado

$$N = \left(\oint \Psi(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) c n d\Omega \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que cada fotón tiene energía $h\nu$, la expresión anterior da como resultado el flujo de energía neto si se multiplica por este factor. Recordando la expresión (27), se observa entonces que

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, t; \nu) = \oint I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega, \quad (33)$$

que al igual que para la densidad de energía total, el flujo de radiación total se obtiene integrando sobre todas las frecuencias, es decir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_0^\infty \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, t; \nu) d\nu, \quad (34)$$

cuyas unidades son $ergs\ cm^{-2}s^{-1}$.

1.2.1. Tensor de presión de radiación. El tensor de esfuerzo de radiación o tensor de presión de radiación, P , se define tal que P^{ij} da la tasa neta de transporte por unidad de área de una superficie orientada perpendicular al j -ésimo eje coordenado de la i -ésima componente del momento. Entonces, considerando que el número de fotones con frecuencia ν se mueve en la dirección \mathbf{n}^j por unidad de área por unidad tiempo es $\Psi_\nu cn^j$, cada uno con momento $h\nu n^i/c$ en la dirección i -ésima, al sumar sobre todos los ángulos sólidos se obtiene el tensor de presión de radiación monocromático, dado por

$$\begin{aligned} P^{ij}(\boldsymbol{\xi}, t; \nu) &= \oint \Psi(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) \left(\frac{h\nu n^i}{c}\right) (cn^j) d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \oint I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) n^i n^j d\Omega, \end{aligned} \quad (35)$$

cuyas unidades son *dinas* $cm^{-2} Hz^{-1}$.

En el caso de estructuras en una dimensión y fluidos en geometría plana, donde se asume que el material es homogéneo en la dirección horizontal, con propiedades que varían sólo como funciones de z y t , la intensidad, por lo tanto, tiene simetría azimutal alrededor del vector unitario \mathbf{k} , y la distribución angular se describe completamente en términos del ángulo polar Θ , es decir $I = I(z, t; \mu, \nu)$, donde $\mu = \cos \Theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$. En consecuencia, en una atmósfera plana I es independiente de Φ , y notando que $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi = -d\mu d\Phi$, de las las ecuaciones (30, 33) se obtienen las

expresiones

$$J_v = J(z, t; v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, t; v) d\mu, \quad (36)$$

$$F_v = F(z, t; v) = 2\pi \int_{-1}^1 I(z, t; v) \mu d\mu, \quad (37)$$

$$H_v = H(z, t; v) = \frac{1}{4\pi} F(z, t; v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, t; v) \mu d\mu, \quad (38)$$

las cuales son la densidad media de energía, el flujo de radiación y el flujo promedio, donde las componentes F_x y F_y del flujo son cero debido a la simetría; por esta razón el flujo F_z dado por (37), es llamado el flujo. De igual manera, la ecuación (35) conduce a

$$P_v = \begin{pmatrix} P_v & 0 & 0 \\ 0 & P_v & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3P_v - E_v & 0 & 0 \\ 0 & 3P_v - E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

donde el P_v es un escalar definido por

$$P_v = \frac{4\pi}{c} K_v, \quad (40)$$

donde

$$K_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, t; \mu, v) \mu^2 d\mu. \quad (41)$$

En geometría plana, P^{11} , P^{22} y P^{33} en (39) representan las componentes P^{xx} , P^{yy} y P^{zz} respectivamente. Es importante resaltar que en la ecuación (39), el segundo término de la derecha de la igualdad no es necesariamente cero, y por lo tanto no se reduce a una presión hidrostática, esto se debe a que P_ν en general no es isótropo y por ende la distribución $I(\mu, \nu)$ tampoco lo es; el tensor de presión de radiación será isótropo para cualquier distribución del campo de radiación $I(\mu, \nu)$ que conduzca a $P_\nu = \frac{1}{3}E_\nu$. Por ejemplo, el caso en el que la radiación es isótropa (I es independiente de la distribución μ), de (36, 41) se obtiene $K_\nu = \frac{1}{3}J_\nu$, por lo tanto, de (40) y (28) se tiene que $P_\nu = \frac{1}{3}E_\nu$. En este caso,

$$P(\xi, t; \nu) = \begin{pmatrix} P_\nu & 0 & 0 \\ 0 & P_\nu & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Para dar una medida del grado de anisotropía del campo de radiación, es costumbre definir el cociente adimensional (Mihalas et al., 1986),

$$f_\nu = f(\xi, t; \nu) = \frac{P(\xi, t; \nu)}{J(\xi, t; \nu)} = \frac{K_\nu}{J_\nu}, \quad (43)$$

el cuál es conocido como el factor variable de Eddington, y es de gran importancia, debido que puede ser usado para cerrar el sistema de ecuaciones que gobiernan la dinámica del campo de radiación.

1.2.2. Tensor de Energía-Momento de Radiación y 4-vector fuerza. Siguiendo Mihalas et al. (1986) el tensor energía- momento de radiación se define como

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_0^\infty dv \oint I(\mathbf{n}, v) n^\alpha n^\beta d\Omega, \quad (44)$$

donde $n^\alpha = \frac{cp^\alpha}{h\nu}$, p^α es el 4-vector momento y h es la constante de Planck. Una forma equivalente de la ecuación (44) es

$$R = \begin{pmatrix} E & c^{-1}\mathbf{F} \\ c^{-1}\mathbf{F} & P \end{pmatrix}, \quad (45)$$

donde E , \mathbf{F} y P son la densidad de energía, el flujo, y el tensor de presión de radiación respectivamente.

Las ecuaciones dinámicas para el campo de radiación tienen la forma general (Mihalas et al., 1986)

$$R^{\alpha\beta}_{;\beta} = -G^\alpha, \quad (46)$$

donde el símbolo ($;$) indica la derivada covariante, y G^α es la densidad de fuerza de radiación actuando sobre el material. De esta manera, se interpreta físicamente la componente G^0 como c^{-1} veces la tasa neta de la densidad de energía radiativa que penetra en la materia, mientras que las componentes espaciales G^i es igual a la tasa neta de entrada de la densidad de momento.

Matemáticamente estas componentes se expresan como

$$G^0 = \frac{1}{c} \int_0^\infty dv \oint \left[\chi(\mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{n}, \nu) - \eta(\mathbf{n}, \nu) \right] d\Omega, \quad (47)$$

$$G^i = \frac{1}{c} \int_0^\infty dv \oint \left[\chi(\mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{n}, \nu) - \eta(\mathbf{n}, \nu) \right] n^i d\Omega, \quad (48)$$

donde, $\chi(\mathbf{n}, \nu) = \chi_\nu^a + \chi_\nu^s$ (los superíndices a y s denotan las opacidades de absorción y dispersión respectivamente) es el coeficiente de opacidad o extinción (conocido también como el coeficiente de absorción), el cuál describe la pérdida de energía cuando la radiación interactúa con el material. De manera formal, este coeficiente se define tal que un elemento de material de longitud dl y de sección transversal dS perpendicular a la dirección \mathbf{n} alrededor de un ángulo sólido $d\Omega$, en la que se propaga la radiación $I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu)$, remueve del rayo una cantidad de energía

$$d\varepsilon = \chi(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) dl dS d\Omega dv dt, \quad (49)$$

en un intervalo de tiempo dt , mientras que $\eta(\mathbf{n}, \nu) = \eta_\nu^a + \eta_\nu^s$ es el coeficiente de emisión (conocido también como emisividad) y se define tal que la cantidad de energía radiante liberada por un material de longitud dl y área transversal dS , en un ángulo sólido alrededor de la dirección \mathbf{n} , en intervalo de frecuencia $d\nu$ en un tiempo dt es

$$d\varepsilon = \eta(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{n}, \nu) I dl dS d\Omega dv dt. \quad (50)$$

Las unidades de χ_ν y η_ν son cm^{-1} y $ergs * cm^{-3} s^{-1} Hz^{-1}$ respectivamente, y se observa que las

ecuaciones (47, 48) son consistentes con las interpretaciones físicas mencionadas anteriormente.

1.3. Ecuaciones de Euler Relativistas + Radiación en el Régimen Ópticamente Grueso

Con el fin de obtener las ecuaciones que describen la evolución de un fluido relativista inmerso en un campo de radiación en relatividad general, primero se considera el tensor de energía momento total

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}, \quad (51)$$

donde el primer término de la derecha de la igualdad es el tensor de momento energía de un fluido perfecto, donde no se consideran efectos de viscosidad y transferencia de calor. Las componentes covariantes de dicho tensor están dadas por

$$T_m^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (52)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en reposo, p es la presión, u^μ la 4-velocidad del fluido y h la entalpía interna específica del fluido respectivamente. Esta última se define como

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho_0}, \quad (53)$$

en la que ε representa la energía interna específica de dicho fluido. El segundo término corresponde al tensor que describe el campo de radiación (44), en forma covariante éste es de la forma (Hsieh

and Spiegel, 1976)

$$R^{\mu\nu} = (E + P)u^\mu u^\nu + F^\mu u^\nu + F^\nu u^\mu + Pg^{\mu\nu}, \quad (54)$$

la cual se reduce a la ecuación (45) en el marco de referencia comóvil y las cantidades E y P , son la densidad de energía de radiación y la presión de radiación respectivamente. Es importante resaltar que adicionalmente se asume que la radiación es casi isótropa en el marco de referencia del fluido, es decir se adopta el factor de Eddington igual a $\frac{1}{3}$ tal que $P = \frac{1}{3}E$, pero se permiten valores pequeños para el flujo de radiación, con la restricción $\frac{F^i}{E} \ll 1$ (Farris et al., 2008; Zanotti et al., 2011; Fragile et al., 2012). Aquí se ha introducido el operador de proyección local espacial, $h^{\mu\nu}$, definido como

$$h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu, \quad (55)$$

el cual produce una proyección ortogonal a u^μ en el espacio tiempo, y el 4-vector flujo de radiación F^μ se define entonces por

$$F^\mu = h^\mu_\beta \int I_\nu N^\beta d\nu d\Omega, \quad (56)$$

que satisface la relación $F^\mu u_\mu = 0$.

Ahora, como segundo paso se define la base de vectores

$$\mathbf{e}_{(\mu)} = \{\mathbf{n}, \partial_i\}, \quad (57)$$

donde ∂_i son tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie Σ , definidos por

$$(\partial_j)_\mu = (\beta_j, \gamma_j), \quad (58)$$

siendo γ_j la métrica inducida sobre las superficies espaciales descrita en la sección anterior. De manera explícita las componentes de los vectores base en la ecuación (57) se escriben como

$$e_{(0)\zeta} = n_\zeta = \alpha(-1, 0) \quad (59)$$

$$e_{(j)\zeta} = \partial_{(j)\zeta} = (\beta_j, \gamma_j), \quad (60)$$

y de las ecuaciones (12, 14), el 4-vector velocidad u^μ se reescribe de la siguiente manera

$$u^0 = \frac{W}{\alpha}, \quad (61)$$

$$u^i = W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), \quad (62)$$

donde W es el factor de Lorentz, el cual se define

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_j v^i v^j}}, \quad (63)$$

las cantidades v^i son las componentes de la velocidad del fluido medidas por un observador Euleriano.

1.3.1. Ecuación de continuidad. Con las cantidades definidas en los párrafos anteriores, la primera ecuación de la hidrodinámica relativista con radiación (ecuación de continuidad), se obtiene de la conservación local de la densidad de materia

$$(\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (64)$$

en la que la notación $a^\mu_{;\mu}$ indica la derivada covariante del vector asociada a la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio tiempo. Dicha ecuación puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \rho_0 u^\mu)_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \rho_0 u^0)_{,0} + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \rho_0 u^i)_{,i}, \quad (65)$$

por otra parte, de la ecuación (22), se obtiene que

$$\sqrt{g} = \alpha \sqrt{\gamma}, \quad (66)$$

siendo g y γ los determinantes de las métricas $g_{\mu\nu}$ y γ_{ij} respectivamente. Al substituirse esta expresión en la ecuación (65) resulta la primera de las ecuaciones de Euler

$$(\sqrt{\gamma}\rho_0 W)_{,0} + \left(\alpha \sqrt{\gamma}\rho_0 W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right)_{,i} = 0. \quad (67)$$

1.3.2. Ecuaciones hidrodinámicas con términos radiativos. Las ecuaciones restantes provienen de la conservación local del tensor energía-momento total, la cual se expresa de la forma

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (68)$$

Como se mencionó antes, este tensor consta de dos cantidades tensoriales que describen la energía y el momento del fluido y del campo de radiación, en consecuencia, esta última ecuación puede ser escrita de la siguiente manera (Fragile et al., 2012)

$$T_m^{\mu\nu}_{;\mu} = G^\nu, \quad (69)$$

$$R^{\mu\nu}_{;\mu} = -G^\nu, \quad (70)$$

donde G^ν es el 4-vector densidad de fuerza radiativa definido por las ecuaciones (47, 48). Si se asume que (i) la dispersión es isotrópica y coherente, (ii) los coeficientes de emisividad térmica η_ν y el coeficiente de absorción χ_ν^a se relacionan por medio de la ley de Kirchhoff $\eta_\nu^a = B_\nu \chi_\nu^a$, donde B_ν es la intensidad en equilibrio térmico, (iii) los coeficientes de opacidad son independientes de la frecuencia, $\chi_\nu = \kappa\rho_0$, donde κ es la opacidad de cuerpo gris, las ecuaciones (47, 48) se reescriben

de la siguiente manera (Shapiro, 1996)

$$G^0 = \rho_0 \kappa^a (E - 4\pi B), \quad (71)$$

$$G^i = \rho_0 (\kappa^a + \kappa^s) F^i, \quad (72)$$

o en forma covariante como

$$G^\mu = \chi^a (E - a_{\text{R}} T^4) u^\mu + (\chi^a + \chi^s) F^\mu, \quad (73)$$

donde $a_{\text{R}} T^4 = 4\pi B$ es la intensidad de cuerpo negro en equilibrio integrada sobre todas las frecuencias, T es la temperatura del fluido y a_{R} es la constante de radiación.

Para obtener las ecuaciones que completan el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema, se considera la proyección de las ecuaciones (69) y (70) sobre la base Euleriana (57), es decir

$$(T_m^{\mu\nu} e_{(\sigma)\nu})_{;\mu} = G^\nu e_{(\sigma)\nu} + T_m^{\mu\nu} (e_{(\sigma)\nu})_{;\mu}, \quad (74)$$

$$(R^{\mu\nu} e_{(\sigma)\nu})_{;\mu} = -G^\nu e_{(\sigma)\nu} + R^{\mu\nu} (e_{(\sigma)\nu})_{;\mu}, \quad (75)$$

resultando un conjunto de ocho ecuaciones para las evoluciones de las variables hidrodinámicas y radiativas respectivamente.

1.3.2.1. Evolución hidrodinámica. La primera de estas ecuaciones corresponde al índice $\sigma = 0$ de la base Euleriana, que no es mas que la ecuación (59), en (74), por lo tanto se obtiene que

$$(T_m^{\mu\nu} e_{(0)\nu})_{;\mu} = G^\nu e_{(0)\nu} + T_m^{\mu\nu} (e_{(0)\nu})_{;\mu}, \quad (76)$$

el cual es la proyección de la conservación local del tensor energía momento en la dirección del vector normal a las hipersuperficies Σ . Análogo a lo que se hizo para obtener la ecuación de continuidad, primero se reescribe la expresión anterior como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T_m^{\mu\nu} n_\nu)_{;\mu} = G^\nu n_\nu + T_m^{\mu\nu} (n_\nu)_{;\mu}, \quad (77)$$

que expandiendo ahora la suma, primero sobre el índice μ y luego sobre el índice ν en el término de la izquierda, y reemplazando luego la ecuación (66), la ecuación anterior toma la forma

$$-(\alpha^2 \sqrt{\gamma} T_m^{00})_{;0} - (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T_m^{0i})_{;i} = \alpha \sqrt{\gamma} (T_m^{\mu\nu} (n_\nu)_{;\mu} + G^\nu n_\nu), \quad (78)$$

en la que ahora es posible reemplazar las componentes del tensor energía-momento (52) en términos de la velocidad medida por observadores normales o Eulerianos (ecuaciones 61, 62), es decir

$$T_m^{00} = \frac{\rho_0 h W^2 - p}{\alpha^2}, \quad (79)$$

$$T_m^{0i} = \frac{\rho_0 h W^2}{\alpha} \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \frac{\beta^i}{\alpha^2}, \quad (80)$$

en la expresión (78), con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
 -[\sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p)]_{,0} - \{\sqrt{\gamma}[\alpha \rho_0 h W^2 v^i - \beta^i(\rho_0 h W^2 - p)]\}_{,i} \\
 = \alpha \sqrt{\gamma} [G^{\nu} n_{\nu} + T_m^{\mu\nu} (n_{\nu})_{;\mu}].
 \end{aligned} \tag{81}$$

Finalmente, utilizando la ecuación (59) y la definición de la derivada covariante (Schutz, 2009), se reescribe de forma explícita el término $T_m^{\mu\nu} (n_{\nu})_{;\mu}$ como

$$\begin{aligned}
 T_m^{\mu\nu} (n_{\nu})_{;\mu} &= T_m^{\mu\nu} [(n_{\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} n_{\delta}] \\
 &= -T_m^{\mu 0} \alpha_{,\mu} + \alpha T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0,
 \end{aligned} \tag{82}$$

para así obtener la segunda de las ecuaciones de Euler relativista, cuya forma final es

$$\begin{aligned}
 [\sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p)]_{,0} + \{\sqrt{\gamma}[\alpha \rho_0 h W^2 v^i - \beta^i(\rho_0 h W^2 - p)]\}_{,i} \\
 = \sqrt{\gamma} (\alpha T_m^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 + \alpha^2 G^0).
 \end{aligned} \tag{83}$$

Las tres ecuaciones que siguen, se obtienen de la proyección de la conservación local del tensor energía momento a lo largo de las bases espaciales, es decir índice $\sigma = j$, con lo cual se reemplaza la ecuación (60) en (74) y se obtiene

$$(T_m^{\mu\nu} e_{(j)\nu})_{;\mu} = G^{\nu} e_{(j)\nu} + T_m^{\mu\nu} (e_{(j)\nu})_{;\mu}, \tag{84}$$

la cual se reescribe de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T_m^{\mu\nu} \partial_{(i)\nu})_{;\mu} = G^\nu \partial_{(i)\nu} + T_m^{\mu\nu} (\partial_{(i)\nu})_{;\mu}, \quad (85)$$

que al igual que antes, primero se realiza la suma sobre los respectivos índices μ y ν , para luego reemplazar la expresión (66) y así obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} [\alpha\sqrt{\gamma}(T_m^{00}\beta_i + T_m^{0j}\gamma_{ij})]_{,0} + [\alpha\sqrt{\gamma}(T_m^{k0}\beta_i + T_m^{kj}\gamma_{ij})]_{,k} \\ = \alpha\sqrt{\gamma}[G^\nu\partial_{(i)\nu} + T_m^{\mu\nu}(\partial_{(i)\nu})_{;\mu}]. \end{aligned} \quad (86)$$

Ahora, las componentes T^{kj} del tensor momento-energía en términos de la velocidad medida en el marco de referencia Euleriano son

$$T_m^{kj} = \rho_0 h W^2 \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) \left(v^j - \frac{\beta^j}{\alpha} \right) p \left(\gamma^{kj} - \frac{\beta^k \beta^j}{\alpha^2} \right), \quad (87)$$

que junto con las ecuaciones (79) y (80) y después de cierto cálculo algebraico la ecuación (86) toma la forma

$$\sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 v_i)_{,0} + \left\{ \alpha\sqrt{\gamma} \left[(\rho_0 h W^2 v_i) \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) + p \delta_i^k \right] \right\}_{,k} \quad (88)$$

$$= \alpha\sqrt{\gamma} [G^\nu \partial_{(i)\nu} + T_m^{\mu\nu} (\partial_{(i)\nu})_{;\mu}], \quad (89)$$

donde se utilizan las relaciones $v^j \gamma_{ij} = v_i$ y $\beta^j \gamma_{ij} = \beta_i$ para llegar a esta última ecuación. Finalmente

lo que resta es reescribir el término de la derivada covariante $T_m^{\mu\nu}(\partial_{(i)v})_{;\mu}$ en la parte derecha de la igualdad de la forma

$$T_m^{\mu\nu}(\partial_{(i)v})_{;\mu} = T_m^{\mu\nu} \left[(g_{iv})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} g_{i\delta} \right], \quad (90)$$

donde es claro que se cumple que $\partial_{(j)v} = (\beta_j, \gamma_j) = (g_{i0}, g_{ij})$; para así obtener la forma final de las ecuaciones de Euler hidrodinámicas restantes para un espacio tiempo curvo

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_i)_{,0} + \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[(\rho_0 h W^2 v_i) \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) + p \delta_i^k \right] \right\}_{,k} \\ & = \sqrt{\gamma} \left\{ \alpha G_i + \alpha T_m^{\mu\nu} \left[(g_{iv})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} g_{i\delta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (91)$$

1.3.2.2. Evolución del campo de radiación. Para completar el conjunto de ecuaciones de evolución, las cuatro ecuaciones restantes relacionadas con el campo de radiación, se obtienen de manera análoga a lo que ya se hizo en párrafos anteriores para las ecuaciones hidrodinámicas, es decir, se proyecta la ecuación (75) a lo largo de las direcciones normal y tangentes a las superficies $t = \text{constante}$. Por lo tanto, la proyección en la dirección normal que corresponde al índice $\sigma = 0$ de la base Euleriana conduce a la ecuación

$$(R^{\mu\nu} e_{(0)v})_{;\mu} = -G^v e_{(0)v} + R^{\mu\nu} (e_{(0)v})_{;\mu} \quad (92)$$

la cual se reescribe de manera análoga a (77) como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} R^{\mu\nu} n_\nu)_{;\mu} = -G^\nu n_\nu + R^{\mu\nu} (n_\nu)_{;\mu}, \quad (93)$$

donde al realizar de nuevo las sumas sobre los índices μ y ν y reemplazar (59) y (66) se obtiene

$$-(\alpha^2 \sqrt{\gamma} R^{00})_{;0} - (\alpha^2 \sqrt{\gamma} R^{0i})_{;i} = \alpha \sqrt{\gamma} (R^{\mu\nu} (n_\nu)_{;\mu} - G^\nu n_\nu). \quad (94)$$

En este punto, como se hizo con el tensor de energía momento, se expresan ahora las componentes R^{00} y R^{0i} del tensor de energía momento de radiación, en términos de la velocidad v^i medida por observadores Eulerianos, el vector desplazamiento β^i y la función lapso α , de esta manera de la ecuación (54) las componentes tienen la forma

$$R^{00} = \frac{4}{3} E \frac{W^2}{\alpha^2} + 2F^0 \frac{W}{\alpha} - \frac{E}{3\alpha^2} \quad (95)$$

$$,R^{0i} = \frac{4}{3} E \frac{W^2}{\alpha} \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + WF^0 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + F^i \frac{W}{\alpha} + \frac{1}{3} E \frac{\beta^i}{\alpha^2}. \quad (96)$$

Adicionalmente, en la sección 1.1 se hizo énfasis en que cualquier cuatro-vector, por ejemplo V^μ , puede ser proyectado como

$$V^\mu = \delta^\mu_\nu V^\nu = (\gamma^\mu_\nu - n^\mu n_\nu) V^\nu = \perp V^\mu - n^\mu n_\nu V^\nu, \quad (97)$$

donde $\perp V^\mu = \gamma^\mu_\nu V^\nu$ es la proyección espacial y $-n^\mu n_\nu V^\nu$ es la proyección normal a las hipersuperficies Σ respectivamente, y como resultado, la componente contravariante temporal de cualquier vector espacial V^μ , necesariamente tiene que ser nula $V^0 = 0$. Aplicando esto al 4-vector flujo de radiación F^μ , se puede demostrar que

$$F^\mu = f^\mu + \alpha F^0 n^\mu, \quad (98)$$

la cual, de la proyección espacial $f^\mu = \gamma^\mu_\nu F^\nu$ se define el flujo de radiación tres-dimensional medido por observadores Eulerianos como

$$f^i = F^i + \beta^i F^0, \quad (99)$$

donde de la condición de ortogonalidad $F^\mu u_\mu = 0$, F^0 es

$$F^0 = \frac{v_i F^i}{\alpha - \beta_i v^i} = \frac{v_i f^i}{\alpha}. \quad (100)$$

En consecuencia, reemplazando las ecuaciones (95) y (96) en (94), y usando la expresión (99), los

términos que involucran la derivada temporal y la derivada espacial, quedan de la forma

$$(\alpha^2 \sqrt{\gamma} R^{00})_{,0} = \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\frac{4}{3} EW^2 + 2\alpha WF^0 - \frac{1}{3} E \right] \right\}_{,0}, \quad (101)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2 \sqrt{\gamma} R^{0i})_{,i} &= \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\frac{4}{3} EW^2 v^i + W (\alpha F^0 v^i + f^i) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\gamma} \beta^i \left[\frac{4}{3} EW^2 + 2\alpha WF^0 - \frac{1}{3} E \right] \right\}_{,i}. \end{aligned} \quad (102)$$

Por último, usando la definición de la derivada covariante, el término de la fuente $R^{\mu\nu}(n_\nu)_{;\mu}$ en (94), se reescribe como

$$R^{\mu\nu}(n_\nu)_{;\mu} = -R^{\mu 0} \alpha_{,\mu} + \alpha R^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0, \quad (103)$$

de manera que la primera ecuación de evolución del campo de radiación es

$$\begin{aligned} &\left\{ \sqrt{\gamma} \left[\frac{4}{3} EW^2 + 2\alpha WF^0 - \frac{1}{3} E \right] \right\}_{,0} \\ &+ \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\frac{4}{3} EW^2 v^i + W (\alpha F^0 v^i + f^i) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\gamma} \beta^i \left[\frac{4}{3} EW^2 + 2\alpha WF^0 - \frac{1}{3} E \right] \right\}_{,i} \\ &= \sqrt{\gamma} \left(\alpha R^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 R^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 - \alpha^2 G^0 \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Por último, al igual que se hizo para la evolución hidrodinámica, las últimas tres ecuaciones se

obtienen cuando $\sigma = j$ en la ecuación (75). Por lo tanto, siguiendo el mismo proceso se llega a

$$\begin{aligned} [\alpha\sqrt{\gamma}(R^{00}\beta_i + R^{0j}\gamma_{ij})]_{,0} + [\alpha\sqrt{\gamma}(R^{k0}\beta_i + R^{kj}\gamma_{ij})]_{,k} \\ = \alpha\sqrt{\gamma}[-G^\nu\partial_{(i)\nu} + R^{\mu\nu}(\partial_{(i)\nu})_{;\mu}], \end{aligned} \quad (105)$$

donde la componente R^{kj} del tensor del campo de radiación (54) en términos de las cantidades ya mencionadas se escribe como

$$R^{kj} = \frac{4}{3}EW^2\left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha}\right)\left(v^j - \frac{\beta^j}{\alpha}\right) + WF^k\left(v^j - \frac{\beta^j}{\alpha}\right) \quad (106)$$

$$+ WF^j\left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha}\right) + \frac{1}{3}E\left(\gamma^{kj} - \frac{\beta^k\beta^j}{\alpha^2}\right). \quad (107)$$

Finalmente las ecuaciones que completan todo el conjunto de evolución del sistema se obtiene al reemplazar la ecuación anterior junto con (95), (96), (106) y (99) en la ecuación (105)

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\frac{4}{3}EW^2v_i + W(\alpha F^0v_i + f_i) \right] \right\}_{,0} \\ & + \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\alpha \left(\frac{4}{3}EW^2v^k v_i + W(v_i f^k + v^k f_i) + \frac{1}{3}E\delta_i^k \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta^k \left(\frac{4}{3}EW^2v_i + W(f_i + \alpha F^0v_i) \right) \right] \right\}_{,k} \\ & = \sqrt{\gamma} \left\{ -\alpha G_i + \alpha R^{\mu\nu} \left[(g_{i\nu})_{;\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{i\delta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (108)$$

donde el término fuente $R^{\mu\nu}(\partial_{(i)\nu})_{;\mu}$ se reescribió como en casos anteriores en términos de la

definición de la derivada covariante.

1.4. Formulación Conservativa

El sistema de ecuaciones de Euler relativista + radiación obtenido en la sección anterior (ecuaciones 67, 78, 91, 104 y 108), puede ser escrito de manera compacta como un sistema de ecuaciones conservativo de primer orden

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_i \mathbf{F}^i = \mathbf{S}, \quad (109)$$

donde \mathbf{U} es el vector que contiene las variables de estado a evolucionar, el cual se define como

$$\mathbf{U} = \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} D \\ U \\ S_k \\ U_{\text{R}} \\ S_{\text{R}k} \end{bmatrix}, \quad (110)$$

donde

$$D = \rho_0 W \quad (111)$$

$$U = \rho_0 h W^2 - p \quad (112)$$

$$S_k = \rho_0 h W^2 v_k \quad (113)$$

$$U_{\text{R}} = \frac{4}{3} E W^2 + 2 \alpha W F^0 - \frac{1}{3} E \quad (114)$$

$$\left(S_{\text{R}} \right)_k = \frac{4}{3} E W^2 v_k + W (\alpha F^0 v_k + f_k), \quad (115)$$

son las variables conservativas del sistema (109), y están dadas en términos del conjunto de las variables primitivas $(\rho_0, v_i, \varepsilon, p, E, F^k)$, se observa también que estas variables corresponden a los argumentos temporales de las ecuaciones (67), (78), (91), (104) y (108) respectivamente. Por otra parte, el vector de flujos \mathbf{F} se determina por el conjunto

$$\mathbf{F}^i = \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} \alpha v^i D - \beta^i D \\ \alpha S^i - \beta^i U \\ \alpha W_k^i - \beta^i S_k \\ \alpha \left(S_{\text{R}} \right)^i - \beta^i U_{\text{R}} \\ \alpha \left(R_{\text{R}} \right)_k^i - \beta_i \left(S_{\text{R}} \right)_k \end{bmatrix}, \quad (116)$$

donde las cantidades W_k^i y $\left(R_{\text{R}}\right)_k^i$ se definen como

$$W_k^i = \rho_0 h W^2 v^i v_k + p \delta_k^i = S_k v^i + p \delta_k^i \quad (117)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_k^i = \frac{4}{3} E W^2 v^i v_k + W (f^i v_k + f_k v^i) + \frac{1}{3} E \delta_k^i. \quad (118)$$

Finalmente, el vector \mathbf{S} son las fuentes dadas por

$$\mathbf{S} = \sqrt{\gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha T_m^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 + \alpha^2 G^0 \\ \alpha T_m^{\mu\nu} \left[(g_{i\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{i\delta} \right] + \alpha G_i \\ \alpha R^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 R^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 - \alpha^2 G^0 \\ \alpha R^{\mu\nu} \left[(g_{i\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{i\delta} \right] - \alpha G_i \end{bmatrix}, \quad (119)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel usuales (Schutz, 2009).

El sistema de ecuaciones (109) contiene un conjunto de cinco ecuaciones hidrodinámicas para las seis variables $(\rho_0, v_i, \varepsilon, p)$ hidrodinámicas primitivas, en consecuencia es necesario cerrar el sistema de ecuaciones; para esto se escoge la ecuación de estado (EOS) por sus siglas en inglés, de un gas ideal

$$p = (\Gamma - 1) \rho_0 \varepsilon, \quad (120)$$

la cual relaciona la presión p del fluido con la densidad de masa en reposo ρ_0 , y la energía específica ε , donde $\Gamma = C_p/C_v$ es el índice adiabático, C_p y C_v son el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante, respectivamente. Por otra parte, una cantidad que es importante cuando se relaizan simulaciones hidrodinámicas con o sin radiación, es la velocidad del sonido relativista, el cual para una función de estado general de la forma $p = p(\rho_0, \varepsilon)$ puede ser escrita de la siguiente manera (Font et al., 2000):

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\zeta}{h} + \frac{p}{\rho_0^2} \frac{\kappa}{h}, \quad (121)$$

donde

$$\zeta = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right|_\varepsilon, \quad \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \Big|_{\rho_0}, \quad (122)$$

y s es la entropía por partícula y ρ es la densidad total de energía en reposo, $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$. Aplicando estas definiciones al caso en el que la ecuación de estado es la de un gas ideal (120) se puede demostrar que la velocidad del sonido adquiere la forma,

$$c_s = \sqrt{\frac{p\Gamma(\Gamma - 1)}{p\Gamma + \rho_0(\Gamma - 1)}}. \quad (123)$$

2. MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1. Métodos de alta resolución para la captura de choques

El sistema descrito por las ecuaciones (68 - 70) no tiene una solución analítica general debido a su no linealidad. Por esta razón, es importante implementar métodos numéricos que resuelvan dichas ecuaciones en cada punto de la malla numérica espacio temporal, con el fin de obtener soluciones que describan el comportamiento del fluido. Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de la RHD con términos radiativos se pueden escribir en forma conservativa (109), la cual puede ser evolucionada en el tiempo por el método de líneas, en el que primero se discretizan las derivadas espaciales y el término correspondiente a las fuentes, con el fin de transformar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en cada punto de la malla numérica, para luego, poder resolverlas usando integradores numéricos, como por ejemplo el método de Runge-Kutta. Debido a la no linealidad de las ecuaciones, es común que se presenten discontinuidades en las variables de estado hidrodinámicas, por lo tanto, es necesario discretizar la ecuación (109) en su forma integral por medio del método de volúmenes finitos (Toro, 2013), el cual consiste en resolver el sistema de ecuaciones tipo conservación sobre un volumen o celda computacional $I_{i,j,k}^n$, de dimensiones espaciales $\Delta x \times \Delta Y \times \Delta z$ en un intervalo de tiempo Δt , donde n define el paso de tiempo y los subíndices i, j, k definen la posición espacial de la celda en las direcciones x, y y z respectivamente. En la figura 5, se muestra dicha celda numérica en el plano x - y con el fin de comprender lo mencionado anteriormente. Aplicando el método de volúmenes

finitos a la ecuación (109) en tres dimensiones se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_{i,j,k}}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}) - \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k}) \\ & - \frac{1}{\Delta z} (\mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}) + \mathbf{S}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (124)$$

donde $\mathbf{U}_{i,j,k}$ es el promedio espacial del vector de variables conservativas en la celda $I_{i,j,k}^n$, $\mathbf{S}_{i,j,k}$ es el promedio espacio temporal del vector de fuentes, y $\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}$, $\mathbf{G}_{i,j+1/2,k}$, y $\mathbf{H}_{i,j,k+1/2}$ son los promedios espacio temporales de los flujos en las interceldas en cada dirección espacial. En este punto, surge un problema importante, el cual, consiste en calcular los promedios temporales de los flujos en las interceldas, los cuales dependen tanto de las variables de estado (primitivas) como de las variables conservativas; para esto, existen métodos como lo son el método de Roe (Roe, 1981), el método HLLE (Harten et al., 1997; Einfeldt, 1988), el HLLC (Toro et al., 1994) entre otros. Sin embargo, uno de lo más utilizados es el resolvidor de Riemann aproximado HLLE, debido a que, solo requiere de los valores propios de la matriz Jacobiana. Con el fin de ilustrar esto de manera sencilla, se considera el caso en una dimensión en los que los flujos en las interceldas por medio del HLLE se calculan como

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^L - \lambda^- \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^R + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^R - \tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^L)}{\lambda^- - \lambda^+}, \quad (125)$$

donde $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^R$ y $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^L$ son los valores de las variables conservativas reconstruidas a la izquierda y a la derecha de la intercelda, $\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^L = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^L)$ λ^+ y λ^- son las velocidades

mínima y máxima de las señales las cuales se calculan como

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (126)$$

$$\lambda^- = \min(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (127)$$

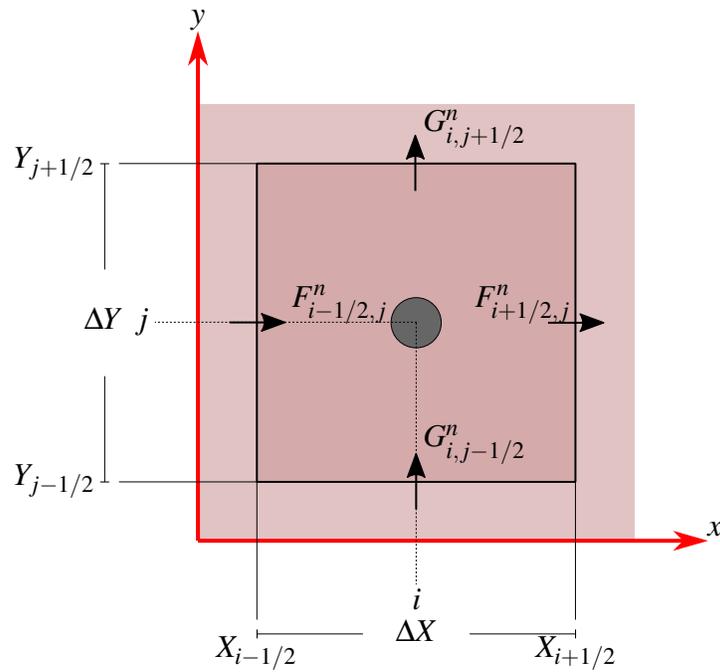


Figura 5. Celda computacional $I_{i,j,k}$ vista en el plano x - y .

donde $\lambda_{(i)}^R$ y $\lambda_{(i)}^L$ son los valores propios de la matriz característica $A_x = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$.

Finalmente, los valores $\tilde{\mathbf{U}}^{L,R}$ se reconstruyen utilizando limitadores lineales a trozos, como por

ejemplo la función MINMOD, definida de la siguiente manera

$$\text{MINMOD}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0, \\ a & \text{si } |a| < |b| \\ b & \text{si } |a| > |b| \end{cases}$$

con a y b reales. De esta manera, las expresiones

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^L = \mathbf{U}_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}(x_{i+1/2,j,k} - x_{i,j,k}), \quad (128)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j,k}^R = \mathbf{U}_{i+1,j,k} - \sigma_{i+1,j,k}(x_{i+1,j,k} - x_{i+1/2,j,k}), \quad (129)$$

son las variables conservativas reconstruidas a izquierda y derecha de la intercelda, donde

$$\sigma_{i,j,k} = \text{MINMOD}(m_{i-1/2,j,k}, m_{i+1/2,j,k}), \quad (130)$$

$$\sigma_{i+1,j,k} = \text{MINMOD}(m_{i+1/2,j,k}, m_{i+3/2,j,k}), \quad (131)$$

siendo $m_{i+1/2,j,k}$ la derivada de \mathbf{U} en dirección x , en la intercelda $x_{i+1/2,j,k}$, es decir,

$$m_{i+1/2,j,k} = \frac{\mathbf{U}_{i+1,j,k} - \mathbf{U}_{i,j,k}}{x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k}}. \quad (132)$$

Aplicando el mismo procedimiento, se pueden obtener los flujos $\mathbf{G}_{i,j+1/2,k}$ y $\mathbf{H}_{i,j,k+1/2}$ en las respectivas direcciones y y z . Finalmente, ya determinados los flujos, ecuación (125), es posible

obtener la evolución del sistema por medio de un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo los métodos **RK**, y así obtener las variables conservativas en cada punto de la malla numérica a cada paso del tiempo, quedando resuelto el sistema dado por (109) numéricamente.

2.2. Integrador numérico IMEX

Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista con radiación en su forma conservativa (109), tiene una característica relevante, éstas contienen fuentes para el campo de radiación que hacen que el sistema se vuelva rígido, dependiendo de las condiciones físicas que se consideren. Esto se debe a que los tiempos que determinan la dinámica de la radiación son distintos a los de la hidrodinámica, éstos suelen ser muy pequeños comparados con la escala temporal determinada por las velocidades características del sistema (Roedig et al., 2012; McKinney et al., 2014). Por lo tanto, para abordar este problema en este trabajo se emplea el esquema Runge-Kutta explícito-implícito de segundo orden o *IMEX* por sus siglas en inglés, el cual consiste en la aplicación de de una discretización implícita a los términos fuente y una explícita a los términos que no son rígidos. Cuando se aplica esto al sistema dado por (109), ésta toma la forma (Pareschi and Russo, 2005)

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^n - \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \partial_k \mathbf{F}(\mathbf{U}^j) + \Delta t \sum_{j=1}^v a_{ij} \mathbf{S}(\mathbf{U}^j) \quad (133)$$

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^n - \Delta t \sum_{i=1}^v \tilde{w}_i \partial_k \mathbf{F}(\mathbf{U}^i) + \Delta t \sum_{i=1}^v w_i \mathbf{S}(\mathbf{U}^i). \quad (134)$$

Los esquemas Runge-Kutta *IMEX* se representan en la notación de Butcher por una tabla doble de la siguiente manera

$$\begin{array}{c|c} \tilde{c} & \tilde{A} \\ \hline & \tilde{w}^T \end{array} \quad \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & w^T \end{array}$$

donde los elementos de las matrices $\tilde{A} = \tilde{a}_{ij}$ y $A = a_{ij}$ satisfacen las condiciones

$$\tilde{a}_{ij} = 0 \quad \text{para } j \geq i, \tag{135}$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } j > i, \tag{136}$$

lo cual garantiza que el esquema es explícito en **F** e implícito en **S** y los coeficientes \tilde{c} y c se definen por las relaciones

$$\tilde{c} = \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij}, \quad c = \sum_{j=1}^i a_{ij}. \tag{137}$$

2.3. Recuperación de variables

En el sistema de ecuaciones de Euler relativistas descrito en el capítulo anterior, se observa claramente que los flujos dependen tanto del conjunto de variables conservativas **U** como de las variables primitivas $w = [\rho_0, v^i, p, E, F^i]$, y además, también se observa de las ecuaciones (111- 115), que las variables conservativas están en términos de las primitivas. Por lo tanto se esperaría calcular el caso

opuesto, es decir, poder expresar las variables primitivas en términos de las variables conservativas, para así escribir los flujos en términos únicamente del conjunto de variables conservativas y poder integrar en el tiempo. Para expresar las variables primitivas se procede de la siguiente manera:

Primero, de las ecuaciones (111-113) se resuelven para dos de las variables primitivas

$$\rho_0 = \frac{D}{W} \quad (138)$$

$$v^2 = \frac{S^2}{(U + p)^2}, \quad (139)$$

mientras que la variable conservativa U se puede escribir como

$$U = \rho_0 \varepsilon W^2 + p(W^2 - 1) + DW, \quad (140)$$

donde se utilizó la ecuación (53). Para el caso de un gas ideal con ecuación de estado $p = (\Gamma - 1)\rho_0 \varepsilon$ la ecuación final para la presión es

$$p = \frac{(U + p(W^2 - 1) + DW)}{W^2} (\Gamma - 1), \quad (141)$$

donde $W = W(v(p))$. Esta última es una ecuación trascendental para la presión, la cual tiene que ser resuelta en cada punto del dominio numérico. Por lo tanto se tiene que recurrir a métodos numéricos que encuentran raíces de ecuaciones, por ejemplo el método de Newton-Raphson. Cuando se conoce la presión, se pueden calcular $v(p)$, y $W = W(v(p))$ y con esto se calcula de inmediato ρ_0 , esto demuestra que calcular la presión es bastante relevante en la implementación. Por último, las

variables primitivas restantes se obtienen de resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones dados por las ecuaciones (114, 115)

$$S_{\text{R}k} - \frac{4}{3}W^2v_k - W\left(\alpha F^0v_k + f_k\right) = 0, \quad (142)$$

$$U_{\text{R}} - \frac{E}{3}\left(4W^2 - 1\right) - 2W\alpha F^0 = 0. \quad (143)$$

De manera similar, bajo el mismo argumento ya expuesto anteriormente, el cual pone de manifiesto la importancia de obtener las variables primitivas como función de las variables conservativas, a continuación se reescribe el 4-vector densidad de fuerza radiativa dada por la expresión (73) en términos de las variables conservativas del campo de radiación. Para esto, se reescriben las ecuaciones (114) y (115) de manera que quede explícita la dependencia de la densidad de energía de radiación E y los flujos F^α en términos de U_{R} y $S_{\text{R}k}$ (Roedig et al., 2012) como

$$E = -3W^2\Sigma\left[2S_{\text{R}k}v^k + U_{\text{R}}\left(\frac{1}{W^2} - 2\right)\right], \quad (144)$$

$$F^0 = \frac{W}{\alpha}\Sigma\left[-4U_{\text{R}}\left(W^2 - 1\right) + \left(4W^2 - 1\right)S_{\text{R}k}v^k\right], \quad (145)$$

$$f_k = \frac{S_{\text{R}k}}{W} - \frac{4}{3}EWv_k - \alpha F^0v_k, \quad (146)$$

donde $\Sigma = 1/(1 + 2W^2)$. De esta manera, el 4-vector de densidad de fuerza de radiación se expresa finalmente de la forma

$$G^0 = -\frac{W}{\alpha} \left[\chi^a a_{\text{R}} T^4 + U_{\text{R}} \left(2\chi^s (1 - 3\Sigma) - \chi^a \right) + S_{\text{R}k} v^k \left(\chi^a + \chi^s (3\Sigma - 2) \right) \right], \quad (147)$$

$$\begin{aligned} G_i = & -\chi^a a_{\text{R}} T^4 v_i W + \frac{(\chi^a + \chi^s)}{W} S_{\text{R}i} + U_{\text{R}} W v_i \left[\chi^a (1 - 4\Sigma) + 2\chi^s (\Sigma - 1) \right] \\ & + S_{\text{R}k} v^k W v_i \left[\chi^a (2\Sigma - 1) + \chi^s (2 - \Sigma) \right], \end{aligned} \quad (148)$$

donde T es la temperatura del fluido y a_{R} es la constante de radiación. Así, Estas últimas dos ecuaciones evidencian claramente que G^α se expresa únicamente en términos de las variables conservativas de radiación.

3. PRUEBAS NUMÉRICAS

3.1. Problemas de Riemann con Radiación

A continuación se presenta una serie de pruebas numéricas propuestas inicialmente por Farris et al. (2008) y comúnmente usados por diferentes autores (Fragile et al., 2012; Zanotti et al., 2011; Sadowski et al., 2013) como una forma de validar los códigos con radiación. Estas pruebas conforman un conjunto de tubos de choque hidrodinámicos no lineales con radiación en una dimensión, los cuales consisten en un problema de Riemann, es decir, se considera un tubo lleno con gas, el cual es dividido en dos compartimientos que están separados por una membrana removible. Inicialmente se definen dos estados, uno a la derecha y otro a la izquierda de una discontinuidad situada en $x = 0$, y una vez se remueve la membrana, el sistema evoluciona en el tiempo hasta que se alcanza un estado estacionario. Los diferentes estados iniciales correspondientes a cada problema de Riemann se listan en la tabla ???. Aunque el flujo de radiación no se muestra en la tabla, este se escoge dos ordenes de magnitud menor que la densidad de energía de radiación, donde los valores de estas densidades de energía resultan de asumir equilibrio local térmico en ambas fronteras del dominio numérico $\pm L$, estableciendo diferentes valores de la constante de radiación a_r (Farris et al., 2008). La tabla ??? también contiene los valores de la opacidad térmica κ^a , asegurando que cada una de las pruebas se encuentra en la aproximación ópticamente gruesa, donde la opacidad térmica de dispersión κ^s es cero en todos los casos. Además, con el fin de probar la capacidad del código para tratar problemas en los que las ecuaciones tienen un grado alto de rigidez, se realiza también una prueba adicional propuesta por Roedig et al. (2012), donde se considera un valor grande para la

opacidad térmica. A diferencia de las demás pruebas, en esta última, el único estado que es diferente a izquierda y a derecha es la velocidad, mientras que los valores de los demás estados, tienen valores iguales en ambos lados.

El sistema de ecuaciones que se evoluciona en el tiempo está dado por

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_x = \mathbf{S}, \quad (149)$$

donde \mathbf{U} , \mathbf{F}_x y \mathbf{S} corresponden al vector de variables conservativas, el vector flujo en la dirección x y el vector de fuentes respectivamente, los cuales se expresan como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D = \rho_0 W \\ U = (\rho_0 + \frac{p\Gamma}{\Gamma-1})W^2 - p \\ S_x = (\rho_0 + \frac{p\Gamma}{\Gamma-1})W^2 v_x \\ U_{\text{R}} = \frac{4}{3}EW^2 + 2Wv_x F_x - \frac{1}{3}E \\ S_{\text{R}x} = \frac{4}{3}EW^2 v_x + WF_x(v_x^2 + 1), \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} Dv_x \\ S_x \\ S_x v_x + p \\ S_{\text{R}x} \\ \frac{4}{3}EW^2 v_x^2 + 2WF_x v_x + \frac{1}{3}E \end{pmatrix}, \quad (150)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_0 \\ G_x \\ -G_0 \\ -G_x \end{pmatrix}. \quad (151)$$

Los términos fuente y la relación entre las variables primitivas y conservativas se escriben de manera explícita como

$$\rho_0 = \frac{D}{W}, \quad (152)$$

$$v_x = \frac{S_x}{U + p}, \quad (153)$$

$$E = -\frac{3 \left[U_{\text{R}} \left(1 + v_x^2 \right) - 2 S_{\text{R}x} v_x \right]}{4W^2 \left(v_x^2 - 1 \right) + v_x^2 + 1}, \quad (154)$$

$$F_x = -\frac{4W^2 \left(S_{\text{R}x} - U_{\text{R}} v_r \right) - S_{\text{R}x}}{4W^3 \left(v_x^2 - 1 \right) + W \left(1 + v_x^2 \right)}, \quad (155)$$

$$G^t = -W \left\{ \chi^t a_{\text{R}} T^4 + U_{\text{R}} \left[2\chi^s \left(1 - \frac{3}{1+2W^2} \right) - \chi^t \right] + S_{\text{R}x} v_x \left[\chi^t + \chi^s \left(\frac{3}{1+2W^2} - 2 \right) \right] \right\}, \quad (156)$$

Tabla 1

Parámetros del tubo de choque. Esta tabla contiene los valores de las variables que definen los respectivos estados a izquierda y a derecha del problema de Riemann con radiación en una dimensión.

P	a_r	Γ	κ^a	ρ_{0L}	p_L	v_L^*	E_L	ρ_{0R}	p_R	v_R^*	E_R
1	$1.234 * 10^{10}$	5/3	0.4	1.0	$3.0 * 10^{-5}$	0.014998	$1.0 * 10^{-8}$	2.4	$1.61 * 10^{-4}$	6.249877	$2.51 * 10^{-7}$
2	$7.812 * 10^4$	5/3	0.2	1.0	$4.0 * 10^{-3}$	0.242535	$2.0 * 10^{-5}$	3.11	0.04512	0.080141	$3.46 * 10^{-3}$
3	$1.543 * 10^{-7}$	2	0.3	1.0	60.0	0.995037	2.0	8.0	$2.34 * 10^3$	0.780868	$1.14 * 10^3$
4	$1.388 * 10^8$	5/3	0.08	1.0	$6.0 * 10^{-3}$	0.567925	0.18	3.65	$3.59 * 10^{-2}$	0.185712	1.30
5	$1.543 * 10^{-7}$	2	1000	1.0	60.0	0.780868	2.0	1.0	60.0	0.739940	2.0

$$\begin{aligned}
 G_x = & -W\chi^t a_{\text{R}} T^4 v_x + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W} \right) S_{\text{R}x} \\
 & + WU_{\text{R}} v_x \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2} \right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1 \right) \right] \\
 & + WS_{\text{R}x} v_x^2 \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1 \right) + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2} \right) \right]. \quad (157)
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son el resultado de seguir un procedimiento similar al que se describe en el apéndice 1, para el espacio-tiempo dado por la métrica de Minkoswki $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ en una dimensión.

3.1.1. Prueba 1: Choque fuerte no relativista. Esta prueba consiste en un choque no relativista con factor de Lorentz $W = 1.0001$ ($v_{max} = 0.015 \ll 1$) y constante de opacidad térmica $\kappa^a = 0,4$. La figura 6 muestra los resultados de la simulación numérica para un tiempo $t = 4000$, en la que la densidad, la presión y la energía interna del fluido obedecen la ecuación de estado de un gas ideal con índice adiabático $\Gamma = 5/3$. En esta prueba se muestra la capacidad del código para modelar sistemas en los que los valores de la presión, la presión de radiación y la densidad

de energía de radiación son pequeños. Se observa que todos los perfiles obtenidos son continuos en el frente del choque (localizado en $x = 0$ aproximadamente), estando de acuerdo con los resultados obtenidos por Farris et al. (2008).

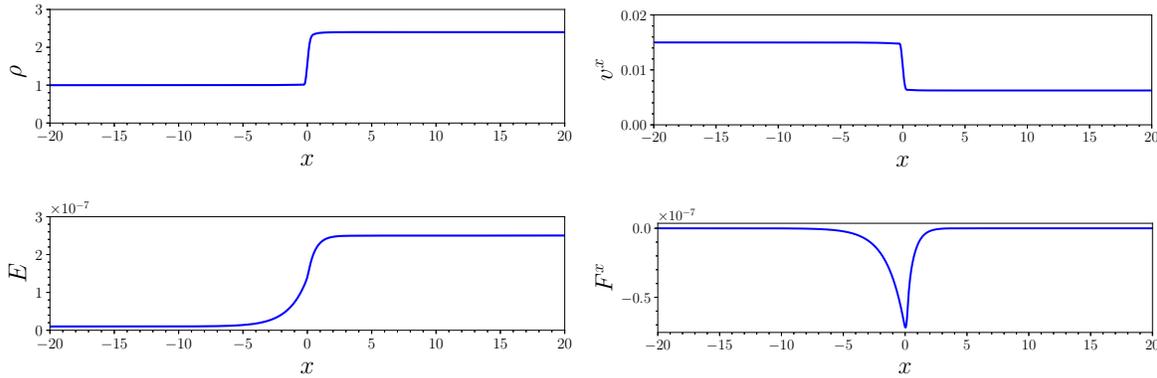


Figura 6. Prueba 1: Problema de Riemann 1D correspondiente a un choque no relativista ($W = 1.0001$). En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución de $\Delta x = 0,05$ y factor de Courant 0,25.

3.1.2. Prueba 2: Choque fuerte ligeramente relativista. La segunda prueba es un choque fuerte ligeramente relativista dominado por la presión, con factor de Lorentz $W = 1.0029$ ($v_{max} = 0.24$), y constante de opacidad térmica $\kappa^a = 0,2$. La figura (7) muestra la evolución de las variables de estado a un tiempo $t = 4000$. A diferencia de la prueba anterior, se observa que los perfiles correspondientes a la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación ya no son continuos en el frente del choque, esto muestra la capacidad que del código para tratar y retener la forma de la discontinuidad en el tiempo.

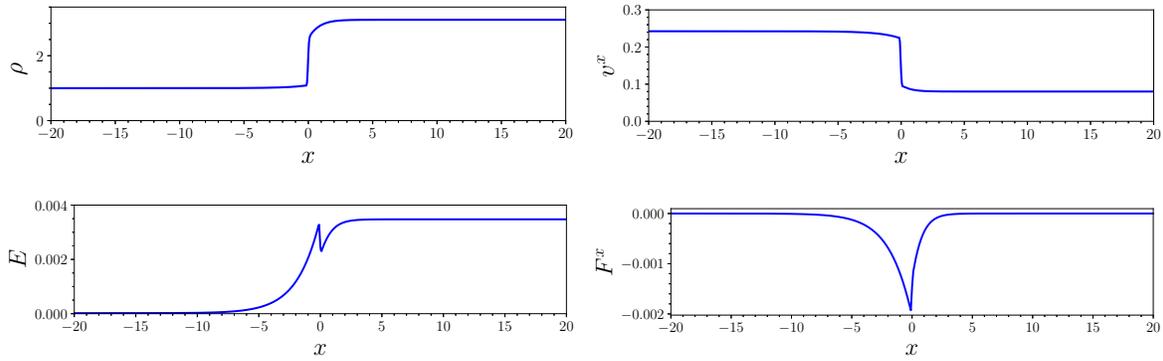


Figura 7. Prueba 2: Problema de Riemann 1D correspondiente a un choque ligeramente relativista ($W = 1.0029$). En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant $0,25$.

3.1.3. Prueba 3: Onda altamente relativista. En esta prueba se simula una onda altamente relativista, la cual es una configuración dominada por la presión con una constante de opacidad térmica $\kappa^a = 0,3$. En este caso el índice adiabático es $\Gamma = 2$, debido a que para alcanzar velocidades del sonido altamente relativistas ($c_s \rightarrow 1$) la ecuación de estado (120) impone la condición $\Gamma \geq 2$. La figura (8) muestra que los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y el flujo de radiación en $t = 4000$ son continuos. Por otra parte, a pesar de que el factor de Lorentz es de $W = 10,05$ y de que en la discontinuidad la diferencia de presión es de tres ordenes de magnitud, los metodos numéricos que se emplean son lo suficientemente robustos para capturar este tipo de choques y resolver problemas en los que las velocidades son relativistas ($v_{max} = 0,99$).

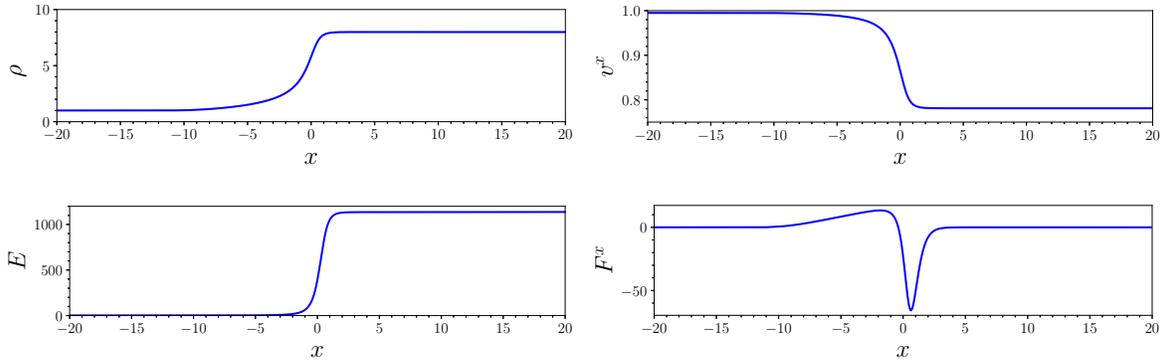


Figura 8. Prueba 3: Problema de Riemann correspondiente a una onda altamente relativista. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant $0,25$.

3.1.4. prueba 4: Onda ligeramente relativista dominada por la presión de radiación.

A diferencia de las anteriores, esta prueba muestra la capacidad que tiene el código para realizar simulaciones de problemas en los que la presión de radiación domina sobre la presión del gas ($P \gg p$). La figura 9, muestra las variables mencionadas anteriormente también a un tiempo $t = 4000$. Ésta consiste en una onda ligeramente relativista con factor de Lorentz $W = 1,60$ ($v_{max} = 0,56$) e índice adiabático $\Gamma = 5/3$. Se observa, que al igual que el caso anterior todos los perfiles son continuos cuando se alcanza el estado estacionario.

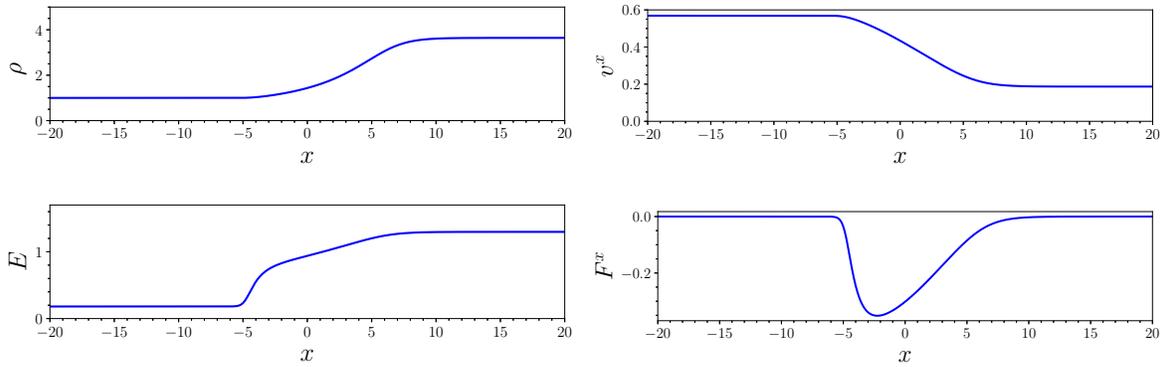


Figura 9. Prueba 4: Problema de Riemann correspondiente a una onda ligeramente relativista ($W = 1,60$) dominada por la presión de radiación. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el tiempo $t = 4000$. Los parámetros de la simulación son los siguientes: el dominio espacial es $x \in [-20, 20]$, con una resolución $\Delta x = 0,05$, y factor de Courant 0,1.

3.1.5. Prueba 5: . La prueba 5 es distinta a todas las pruebas descritas hasta ahora, ya que la conforma dos ondas de choque relativistas $W = 1,60$ ($v_{max} = 0,78$) que se propagan en direcciones opuestas para todos los perfiles que se muestran en la figura 10, y no se obtiene un estado estacionario como en los demás casos. A pesar de que las pruebas anteriores son un reto para el código en cuanto al tratamiento de discontinuidades y choques fuertes, no representan dificultad en los esquemas a cuanto la rigidez de los términos fuente en las ecuaciones, por esta razón, en ésta se elige un valor de la constante de opacidad térmica mucho más grande que las anteriores, $\kappa^a = 1000$, con el fin de mostrar que el código puede abordar con éxito este problema (Roedig et al., 2012).

Todas las simulaciones se hicieron en el código *CAFE* (Lora-Clavijo et al., 2015), un código tridimensional relativista-magnetohidrodinámico (MHD). Este código tiene una rutina hidrodinámica

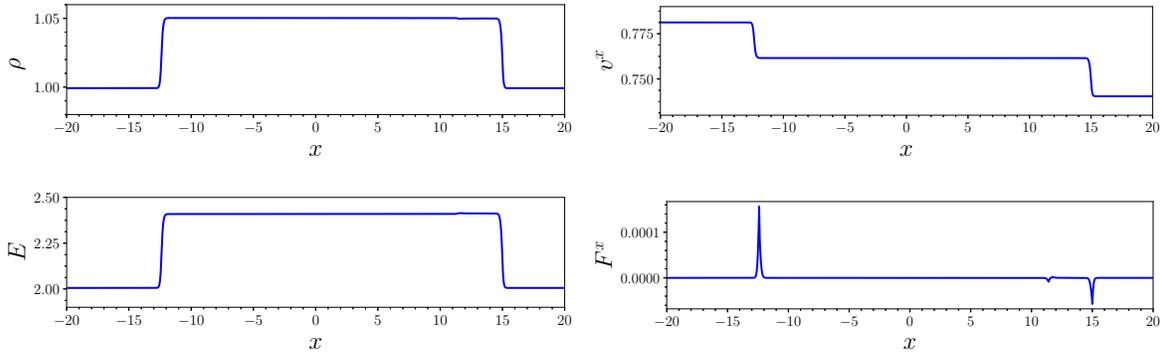


Figura 10. En esta figura se muestra los perfiles de densidad, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para una evolución en el tiempo $t = 15$, correspondiente a dos ondas de choque relativistas ($W = 1,60$) que se propagan en direcciones opuestas con parámetros: $x \in [-20, 20]$, $\Delta x = 0,0125$, y factor de Courant $0,05$.

(HD) que realiza a través de diferentes esquemas las soluciones numéricas de las ecuaciones en un espacio-tiempo curvo en simetría ecuatorial Cruz-Osorio et al. (2012) y simetría axial Lora-Clavijo and Guzmán (2013). Para esto, *CAFE* incluye varios reconstructores como son los métodos lineales por partes *MINMOD* y *MC* y otros de orden superior como el método parabólico *PPM* y el método polinomial *WENO5*, en combinación con el resolvidor aproximado de Riemann *HLLC*. Para la evolución en el tiempo, el código utiliza el método de líneas junto con integradores en el tiempo Runge Kutta predictor-corrector de tercer y cuarto orden, y realiza el cambio de variables primitivas en términos de variables conservativas a través del algoritmo híbrido de Newton Raphson y bisección, en cada paso de tiempo dentro del esquema de evolución. El dominio numérico espacial para todas las simulaciones es $x = [-20, 20]$, y la resolución utilizada fue $\Delta x = 0,05$, excepto para la última prueba, que se realizó con una resolución $\Delta x = 0,0125$. Para reconstruir las variables en las interceldas, se utilizó el limitador (MC) y un factor de Courant de $0,25$ para las pruebas (1 – 3),

0,1 para la prueba 4 y 0,05 para la prueba 5.

3.2. Acreción de Michel con Radiación

Con el fin de probar la capacidad del código y los métodos numéricos utilizados en un espacio tiempo curvo, se presenta a continuación una prueba en la que se compara la solución hidrodinámica obtenida por Michel (1972) en coordenadas de Eddington-Finkelstein (Papadopoulos, 1998), con y sin términos radiativos, donde se describe la acreción esférica de un fluido perfecto en tres dimensiones dentro de un agujero negro de Schwarzschild. Para esto, se obtuvieron las ecuaciones de Euler relativistas con radiación en tres dimensiones, en un espacio-tiempo curvo de Schwarzschild con simetría esférica en las coordenadas de Eddington-Finkelstein para un gas ideal con presión (ver Apéndice 2). La figura (11) muestra la tasa de masa acretada del fluido para los valores de la constante de opacidad de dispersión de Thomson $\kappa^s = 0.1$, $\kappa^s = 0.4$ y $\kappa^s = 0.8$, mientras que el valor de $\kappa^s = 0$ corresponde al caso puramente hidrodinámico. Se observa que la razón de masa acretada alcanza el régimen estacionario en todos los casos, y se observa también que a medida que los valores de la opacidad incrementan hay una disminución apreciable en los valores de la tasa de acreción. Es importante resaltar que en la simulación no se asume equilibrio local térmico entre el gas y la radiación, en lugar de esto, se considera el proceso de radiación térmica Bremsstrahlung, el cual tiene coeficiente de opacidad térmica $k^a = 1.7 \times 10^{25} T_k^{-7/2} \rho_{cgs} m_p^{-2} \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$, donde T_k es el perfil de temperatura del fluido en Kelvin, ρ_{cgs} es la densidad en g/cm^3 y m_p es la masa del protón en g.

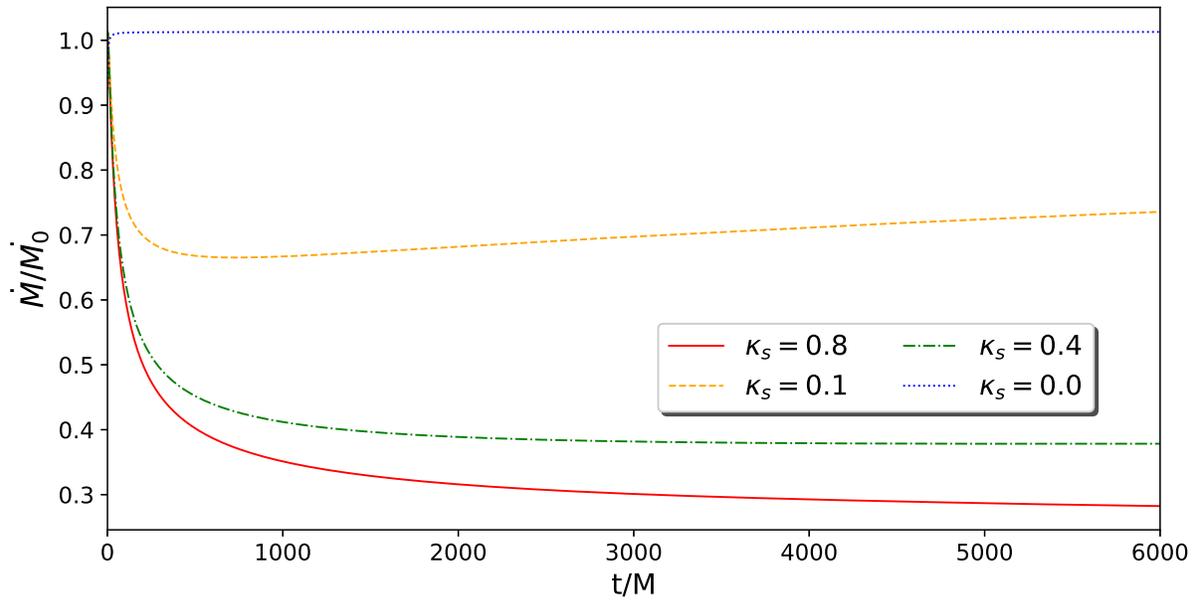


Figura 11. En esta figura se presenta la tasa de masa acreta de un fluido perfecto para los valores de la constante de opacidad de dispersión de Thomson $\kappa^s = 0.1$, $\kappa^s = 0.4$ y $\kappa^s = 0.8$.

Por otra parte, en las figuras 12 y 13 se compara el dato inicial con la simulación a un tiempo $t = 4000$ de los perfiles de la densidad de masa en reposo, velocidad radial, densidad de energía de radiación y flujo de radiación para el caso $\kappa = 0.8$. Cuando se tienen en cuenta los términos radiativos, en la figura se aprecia que a excepción del perfil de la densidad de masa en reposo, hay cambios apreciables en los demás perfiles en comparación con el dato inicial, la radiación ocasiona una disminución en el perfil de velocidad cerca del agujero negro, en contraste con los perfiles de densidad de energía de radiación y el flujo de radiación, en los que se presenta un incremento de tres órdenes de magnitud aproximadamente. Es importante resaltar que el sistema sigue estable mucho tiempo después, de esta manera también se prueba que el código es capaz de lidiar con problemas en espacio-tiempos curvos acoplados con el campo radiación.

El dato inicial de esta prueba es el conjunto de variables primitivas $w = [\rho_0, v^i, p, E_r, F_r^i]$, donde las componentes polar y azimutal del flujo y la velocidad son cero respectivamente ($v^i = [v^r, 0, 0], F_r^i = [F_r^r, 0, 0]$). La densidad de masa en reposo y la presión se relacionan por una EOS politrópica con índice adiabático $\Gamma = 4/3$. La solución de Michel proporciona las primeras tres variables, mientras que las variables de los términos radiativos se fijan teniendo en cuenta la aproximación ópticamente gruesa, de esta manera la densidad de energía de radiación se toma como $E^r = 3gp$, donde $g = P/p$ es la razón entre la presión de radiación y la presión del gas, mientras que el flujo de radiación se considera a ser dos órdenes de magnitud menor que la energía de radiación $F^r = 10^{-2}E^r$. Por otra parte, en todas las simulaciones el dominio numérico que se considera es $r \in [1.5, 1000]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ en unidades del radio gravitacional, y el número de puntos de la malla numérica $N_r = 1500$, $N_\theta = 50$ y $N_{phi} = 50$ con un factor de Courant de 0,25.

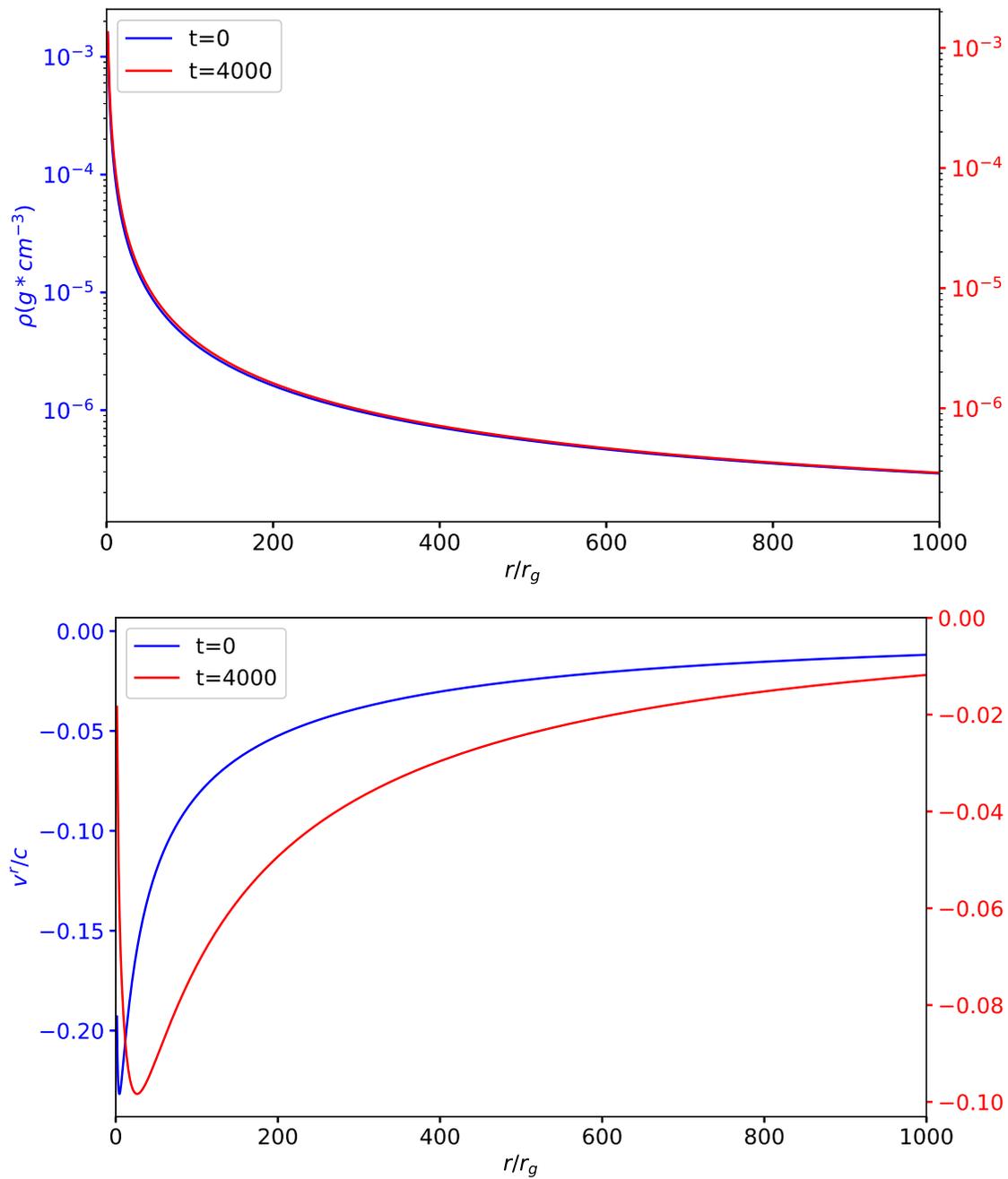


Figura 12. Esta gráfica presenta las simulación numérica de la acreción de Michel en coordenadas de Eddington-Finkelstein en el régimen estacionario. En orden descendente las curvas corresponden a la densidad de masa en reposo y la velocidad radial normalizada a c , como función de la coordenada radial normalizada al radio gravitacional r_g .

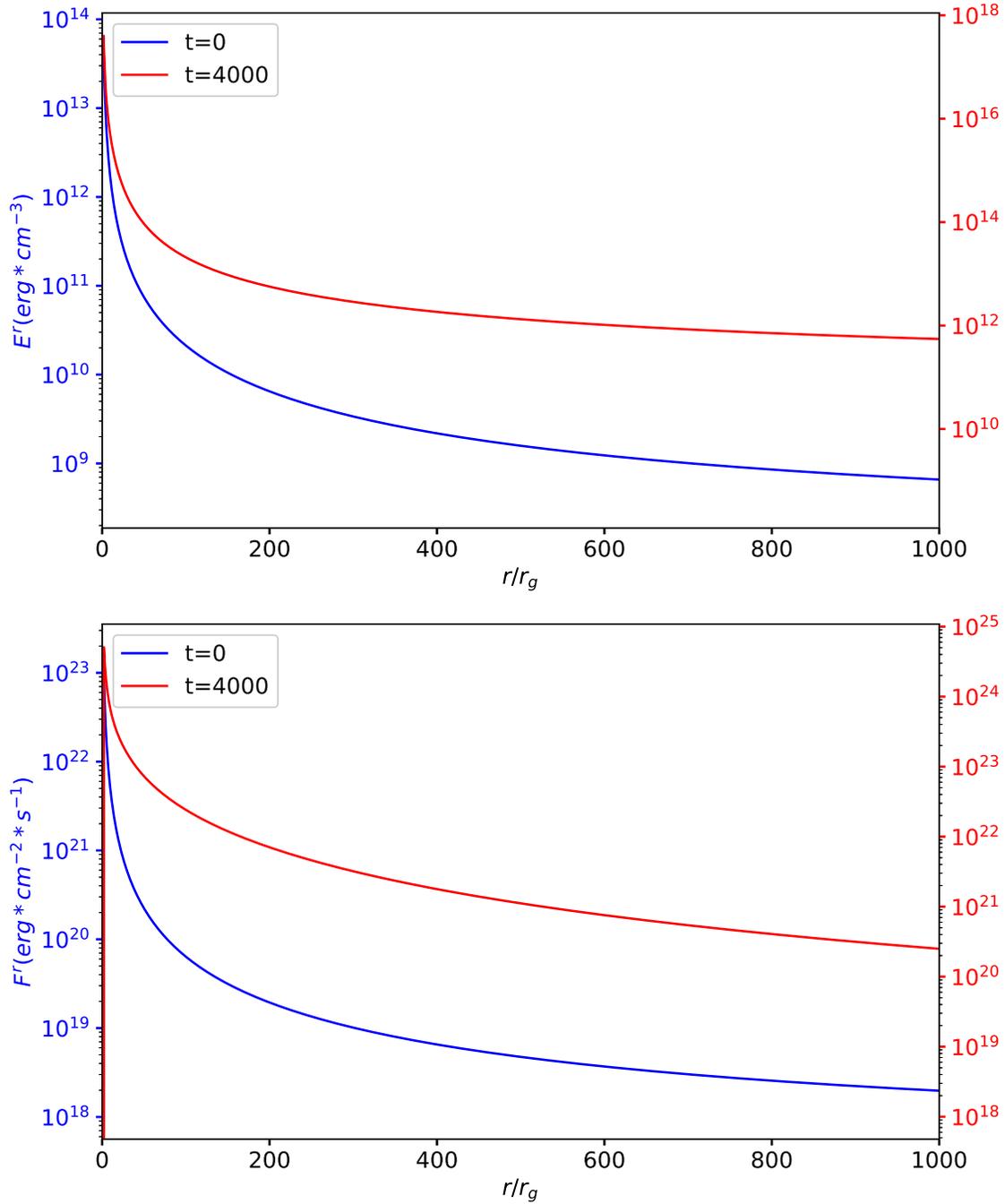


Figura 13. Esta gráfica presenta la simulación numérica de la acreción de Michel en coordenadas de Eddington-Finkelstein en el régimen estacionario. En orden descendente las curvas corresponden a la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación en unidades físicas, como función de la coordenada radial normalizada al radio gravitacional r_g (ver Apéndice 3).

4. JETS RELATIVISTAS

4.1. Morfología de jets relativistas

A continuación se muestran las características principales en la morfología de un jet, las cuales son las sugeridas por Müller (1998), estas son:

- Cavidad, comprende la región que está por dentro del arco de choque, que a su vez está dividida por:
 - Haz de materia o jet, cuya extensión es desde la zona de inyección de materia hasta la zona de interacción con el medio.
 - Choques internos, se generan al interior del jet.
 - Capullo, es la región inmediatamente después del jet, en la que se forma una mezcla de flujos en reversa de material del jet que es desviado por el choque entre la cabeza del jet y el material del medio.
 - Cascarón, es la parte externa de la cavidad, el cual se mueve penetrando el gas ambiente. Es una región de alta densidad.
 - Manchas o puntos calientes, son regiones de altas presión que por lo general aparecen detrás del disco de choque. Estas se deben al impacto del jet con el gas ambiente.

La figura ?? muestra de el esquema de la morfología que se espera de la simulación hidrodinámica de un jet en dos dimensiones.

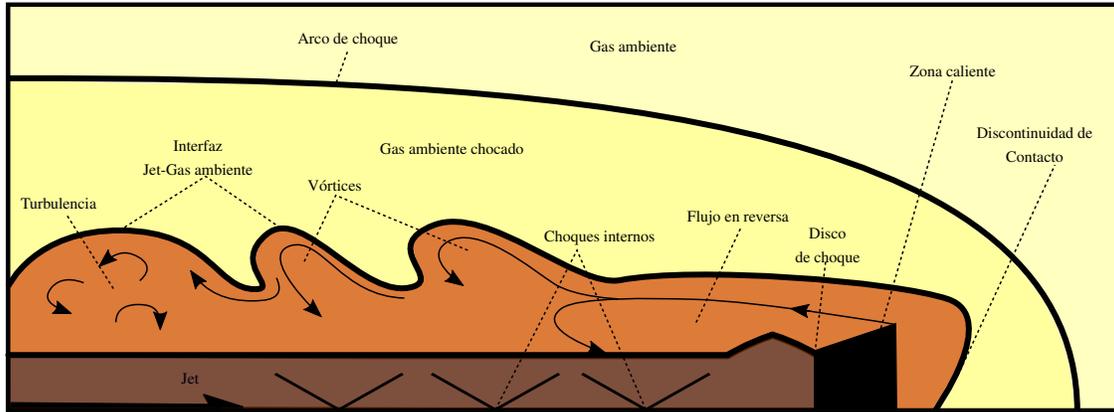


Figura 14. Esquema de la morfología de un jet en dos dimensiones (adaptada de figura de Müller (1998)). En la gráfica se muestran las diferentes regiones que componen la morfología de un jet.

4.2. Parametrización y configuración inicial de los jets

Antes de mostrar los resultados obtenidos, es útil fijar algunos parámetros independientes que se utilizan en las simulaciones numéricas y que caracterizan la dinámica del flujo:

- la razón entre la densidad del haz de fluido y el medio externo $\eta = \rho_b / \rho_m$.
- la razón entre la presión del haz que forma el fluido y el medio externo $K = p_b / p_m$.
- la velocidad del flujo del jet, v_b .
- El índice adiabático Γ , que se utiliza en la ecuación de estado.
- El número Mach del fluido, $M_b = v_b / c_s$, que en relatividad se expresa como $\mathcal{M}_b = M_b W_b / \sqrt{1 - c_s^2}$, donde c_s es la velocidad del sonido.
- La razón entre la presión del fluido y la presión de radiación $g = P / p$, donde P y p son la presión de radiación y la del fluido respectivamente.

Los jets que se estudian en este capítulo son producidos por la inyección de materia dentro del dominio numérico, es decir, a través de una boquilla de radio r_b , la cual se elige a ser $r_b = 0.7$. En particular, siguiendo el procedimiento propuesto en Gómez et al. (1997) se escogen para el estudio de la morfología dos modelos de jets relativistas con simetría axial, el modelo PM y el modelo OP , los cuales consisten en fijar las presiones hidrodinámicas iniciales en la frontera que separa el medio del haz mediante el parámetro K . El caso $K = 1$ corresponde al modelo PM en el cual la presión del jet y la presión del medio coinciden en la frontera, y en el caso $K = 1.5$ corresponde al modelo OP en el cual la presión del jet es mayor que la presión del medio en la frontera. La presión en la atmósfera está dada

$$p(z) = \frac{Pa}{[1 + (\frac{z}{z_c})^n]^{(m/n)}}, \quad (158)$$

cuya importancia radica en que se quiere generar un gradiente de presión lo suficientemente grande para inducir los ángulos de apertura observados en jets compactos (Gómez et al., 1997). En la ecuación, $z_c = 60r_b$ representa la escala de altura en la dirección axial, mientras que los parámetros $n = 1.5$ y $m = 2.3$ se escogen igual que en la referencia Gómez et al. (1997).

Por otra parte, se plantea variar el parámetro η , de manera que los valores que se escogen son $\eta = 0.5$, $\eta = 0.1$ y $\eta = 0.025$, dicho de otra manera, se plantea estudiar como cambia la morfología cuando el medio ambiente tiene una densidad 2, 10 y 40 veces mayor que la densidad del jet,

además de comparar también los resultados de las simulaciones hidrodinámicas con y sin radiación. La figura ??, muestra el dominio que se usa para dicho estudio. En ésta se observa la zona de inyección del jet en un color café oscuro, mientras que el medio se representa por la zona en color amarillo claro. También se muestran las condiciones de frontera que se implementan en los límites del dominio numérico. En todos los casos que se consideran a continuación, se toman los valores $r_{min} = 0$, $r_{max} = 15$, $z_{min} = 0$ y $z_{max} = 100$ para definir el dominio numérico en las simulaciones.

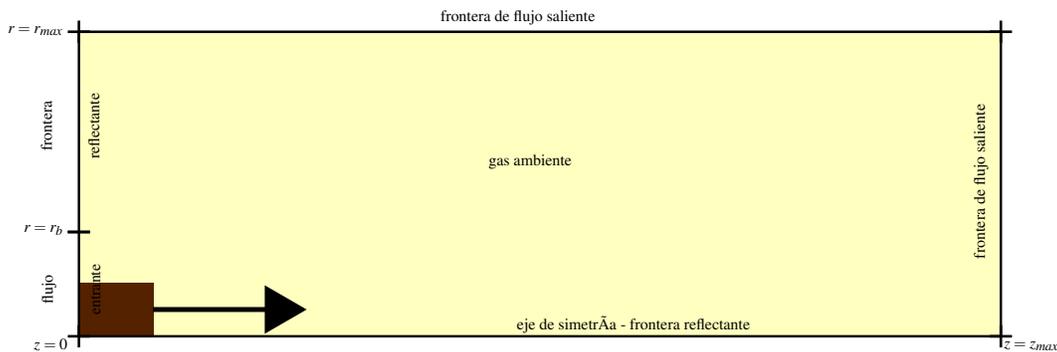


Figura 15. Dominio numérico y configuración inicial. En esta figura se muestra en color café la zona de inyección, mientras que en color amarillo se representa el medio, así como también las condiciones de frontera que se implementan.

4.3. Resultados: Morfología de Jets

Los valores de Γ , ρ_b , η , K , M_b , v_b , la constante de radiación a_r y la opacidad de dispersión κ^s que definen la configuración inicial para los respectivos modelos que se consideran en este trabajo, se resumen en la tablas ?? y ??. Como se mencionó previamente, las abreviaciones *PMH*, *PMR*, *OPH* y *OPR* corresponden a los modelos de presión igualada y sobrepresión hidrodinámicos con y sin radiación. Para todos los modelos con radiación, en la configuración inicial se definen la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación de igual manera como se hizo en la prueba de la acreción de Michel, es decir se considera el régimen ópticamente grueso de tal forma que $E = 3gp$, donde se

toma el valor $g = 1 * 10^{-2}$, mientras que el flujo se escoge como $F_z = 10^{-2}E$. A continuación se muestran los resultados obtenidos después de la evolución de las ecuaciones de la **RHD** del fluido (ver Apéndice 1).

Tabla 2

Tabla de parámetros. En esta tabla se muestran los parámetros de las configuraciones a tiempo inicial de los jets hidrodinámicos que se estudian en este trabajo

Modelo	Γ	ρ_b	η	K	M_b	v_b	Z_{max}
<i>PMH1</i>	4/3	1	0.5	1	3.21	0.99	100
<i>OPH1</i>	4/3	1	0.5	1.5	3.21	0.99	100
<i>PMH2</i>	4/3	1	0.1	1	3.21	0.99	100
<i>OPH2</i>	4/3	1	0.1	1.5	3.21	0.99	100
<i>PMH3</i>	4/3	1	0.025	1	3.21	0.99	100
<i>OPH3</i>	4/3	1	0.025	1.5	3.21	0.99	100

Tabla 3

Tabla de parámetros. En esta tabla se muestran los parámetros de las configuraciones a tiempo inicial de los jets hidrodinámicos con radiación que se estudian en este trabajo

Modelo	Γ	ρ_b	η	K	M_b	v_b	a_r	κ^s	Z_{max}
<i>PMR1</i>	4/3	1	0.5	1	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100
<i>OPR1</i>	4/3	1	0.5	1.5	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100
<i>PMR2</i>	4/3	1	0.1	1	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100
<i>OPR2</i>	4/3	1	0.1	1.5	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100
<i>PMR3</i>	4/3	1	0.025	1	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100
<i>OPR3</i>	4/3	1	0.025	1.5	3.21	0.99	$1.66 * 10^{21}$	3.16	100

4.3.1. $\eta = 0.5$. El primer caso corresponde a un medio interestelar cuya densidad es dos veces mayor que la densidad del fluido. La figura ?? muestra la evolución de los modelos *PM1*

con y sin radiación a un tiempo $t = 105$, para la configuración inicial dada en la tabla (??). En esta se puede apreciar el arco de choque, el capullo formado por la interacción del jet con el medio, y la discontinuidad de contacto para ambos casos (hidrodinámico y radiativo). Se observa además que la radiación tiene un efecto que suaviza la morfología en la región cercana de la interacción del jet con el medio, ya que el modelo hidrodinámico presenta en el capullo más dinámica en esta zona, se aprecia que el jet desvía mas material en el choque con el medio. La figura ?? muestra la evolución de los modelos *OP1* con y sin radiación, en esta la radiación tiene también un efecto sobre la zona de contacto, se puede ver que la cabeza del jet es más pequeña respecto al modelo hidrodinámico, y se generan más ondas de choque en el fluido. En la figura ?? se muestran los perfiles $1D$ de la densidad de masa en reposo, la presión, la velocidad, la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación en la dirección axial del jet a un tiempo $t = 107.42$. Los modelos de sobrepresión se mueven con más rapidez que los modelos de igual presión, y se puede notar una característica común para todos los modelos con radiación, estos presentan una densidad menor en el frente del choque respecto a los modelos puramente hidrodinámicos. Por otra parte, en los modelos de igual presión, el perfil de presión en el frente de choque es menor en el caso radiativo con respecto al hidrodinámico, en contraste con el modelo sobrepresionado, en el que el perfil es ligeramente mayor cuando hay radiación.

4.3.2. $\eta = 0.1$. Este caso corresponde al caso en el que la densidad del medio interestelar es 10 veces mayor que la densidad del jet. En las figuras ?? y ?? se muestra el resultado para la evolución a un tiempo $t = 111$, para los modelos hidrodinámicos con y sin radiación de presión igualada (*PM*) y sobrepresión (*OP*) respectivamente. A diferencia del caso anterior, todas las

simulaciones muestran que para este valor del parámetro η , el capullo y la zona de contacto entre el jet y el medio, en todas las simulaciones es más delgado, mostrando un jet más colimado y con poco flujo en reversa. Se aprecia también que la radiación suaviza la morfología en el frente del jet, por ejemplo, el flujo en reversa que se alcanza a notar en el modelo *PMH2*, desaparece en el modelo *PMR2*. La figura ?? muestra los perfiles 1D de la densidad de masa, presión, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación en el tiempo $t = 107$. En esta se obtiene un comportamiento similar al que se describió en el caso anterior respecto referente a la densidad y la presión en el frente del choque, y se observa también que la interacción del jet con un medio más denso produce unos perfiles de densidad de energía de radiación y flujo de radiación más grandes. Los valores de los parámetros iniciales para esta simulación se reportan en las tablas ?? y ??.

4.3.3. $\eta = 0.025$. Finalmente se considera la interacción de un jet con un medio interestelar 40 veces más denso, las simulaciones se reportan en las figuras ?? a ?? y (??) para los tiempos $t = 136$ y $t = 117.1$ respectivamente. En ellas se puede apreciar que el arco de choque para todos los modelos es más delgado que los casos estudiados anteriormente, además de presentar un capullo con una dinámica mayor, y se observa que el número de ondas de choques aumenta respecto a los valores del parámetro $\eta = 0.5$ y $\eta = 0.1$. Una característica que no aparece en los modelos anteriores, es la presencia de inestabilidades tipo Kevin Helmholtz en la cola del jet, siendo la región que rodea al jet más turbulenta. Por otra parte, la figura ?? muestra que en todos los modelos, el perfil de densidad de masa es mayor en los casos hidrodinámicos, mientras que los perfiles de presión son mayores en todos los modelos con radiación.

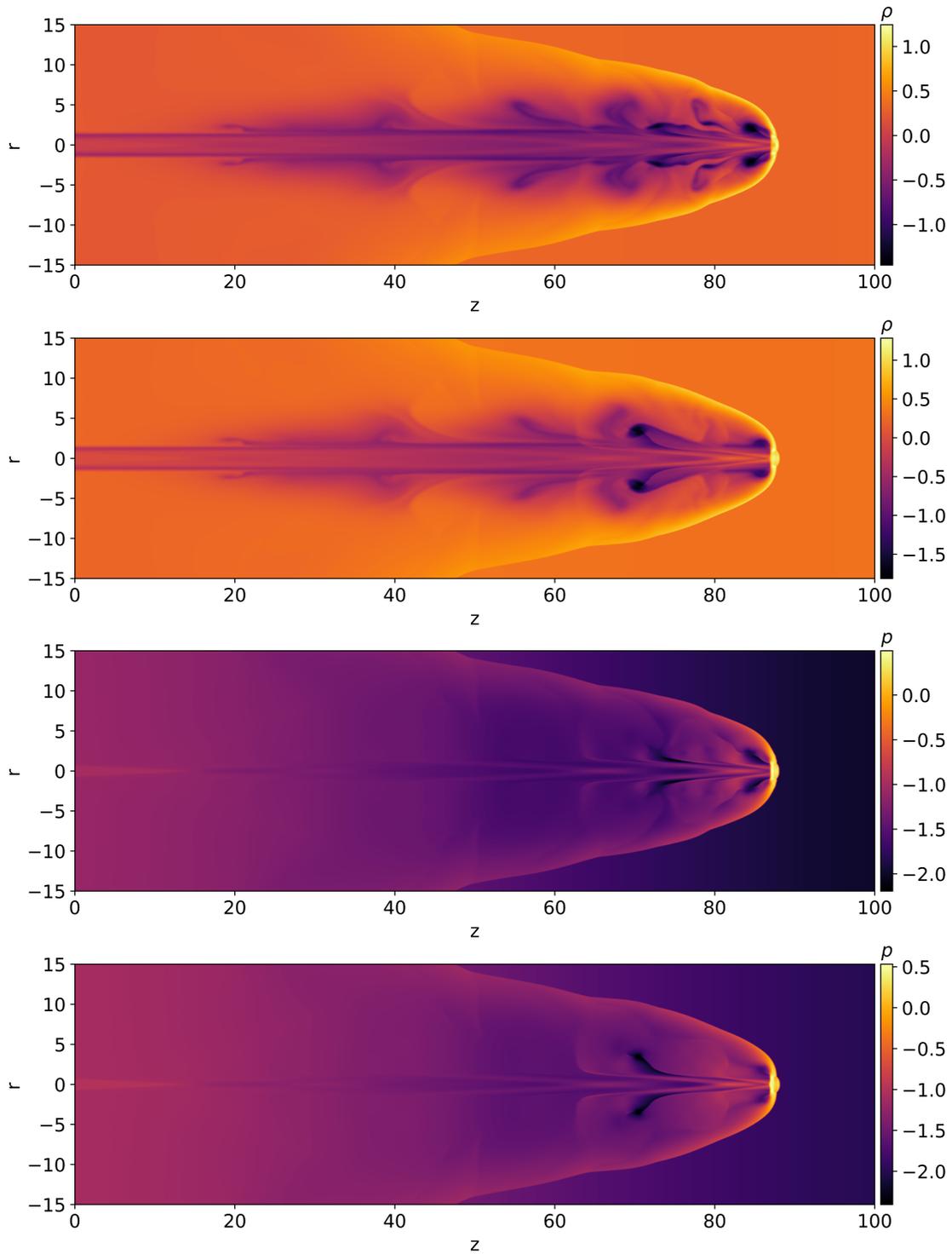


Figura 16. Modelos *PMH1* y *PMR1*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de presión igualada a un tiempo $t = 105$.

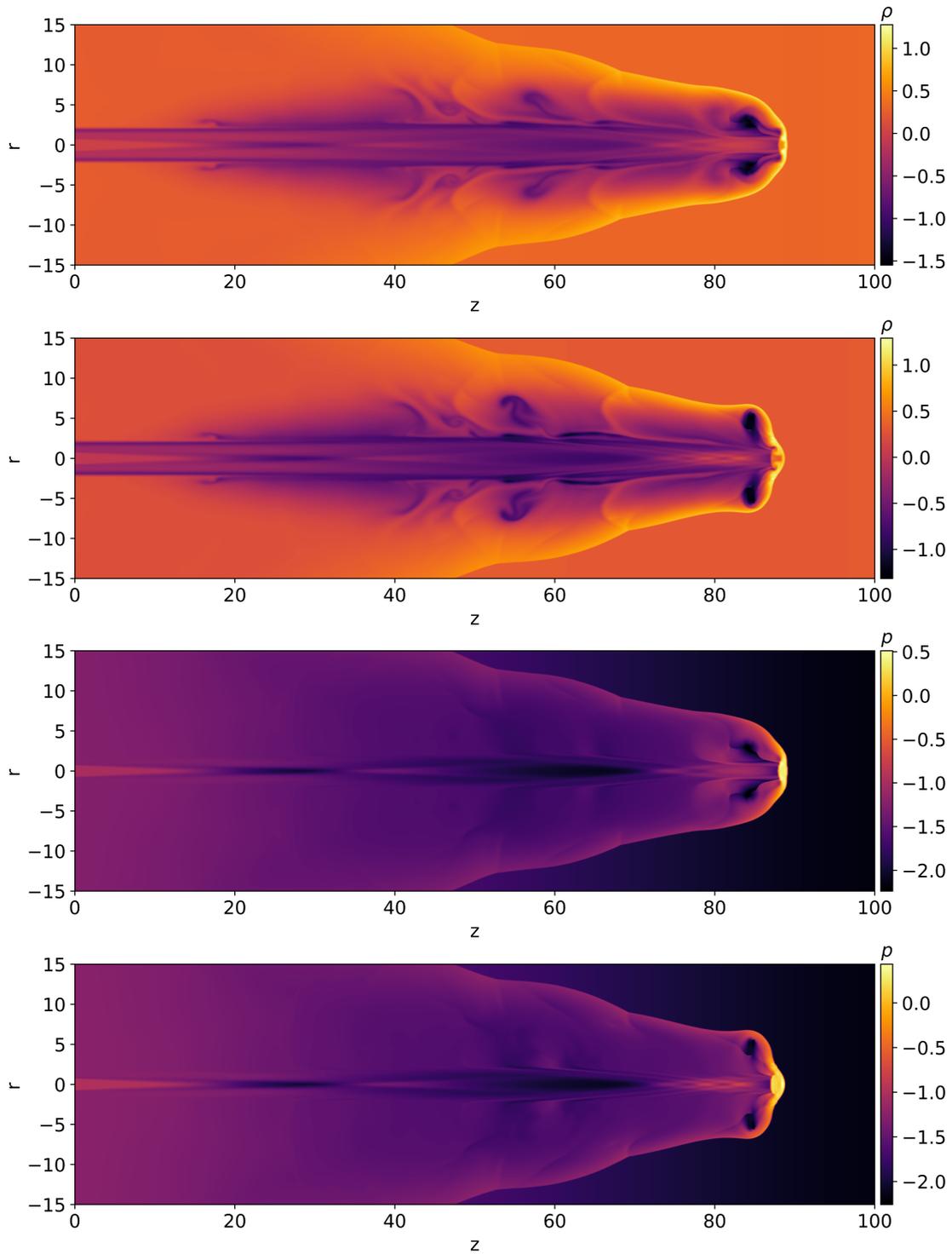


Figura 17. Modelos *PMH1* y *PMR1*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de sobrepresión ión a un tiempo $t = 105$.

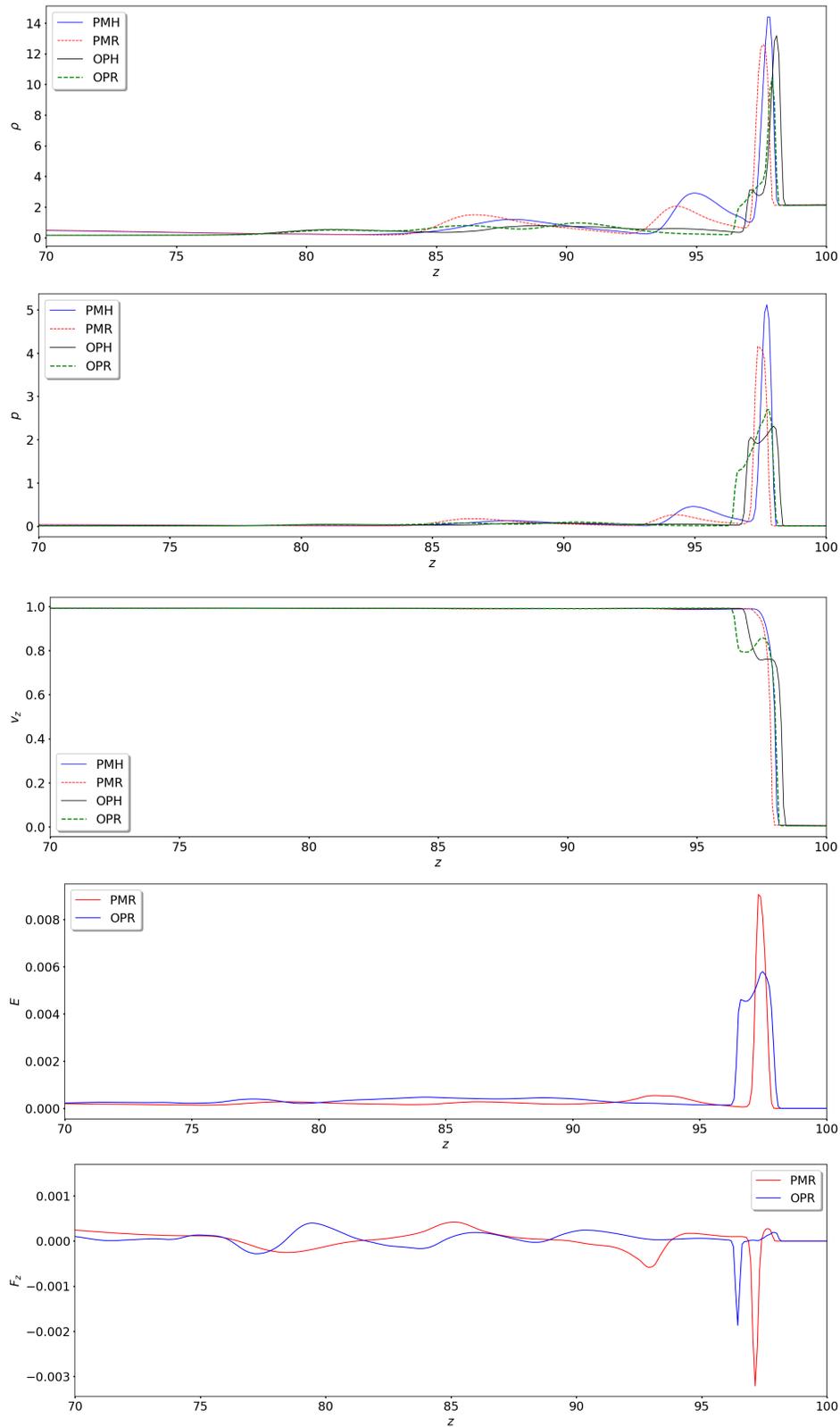


Figura 18. Perfiles 1D de las variables dinámicas del jet de los modelos *PM* y *OP*. En esta figura se muestran los perfiles de densidad de masa, presión, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación de los modelos *PMH*, *PMR*, *OPH* y *OPR* en un tiempo $t = 117.1$.

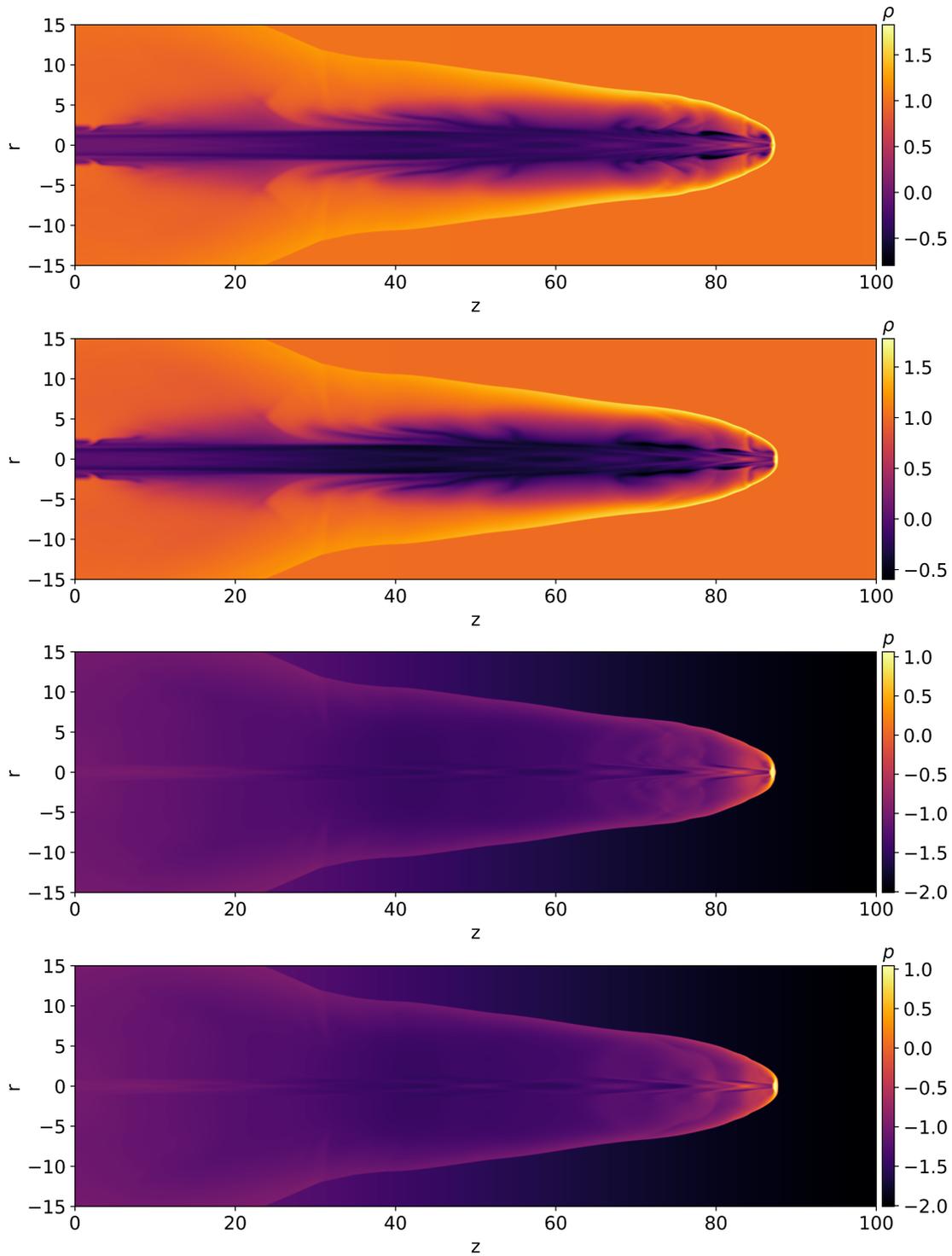


Figura 19. Modelos *PMH2* y *PMR2*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de presión igualada a un tiempo $t = 111$.

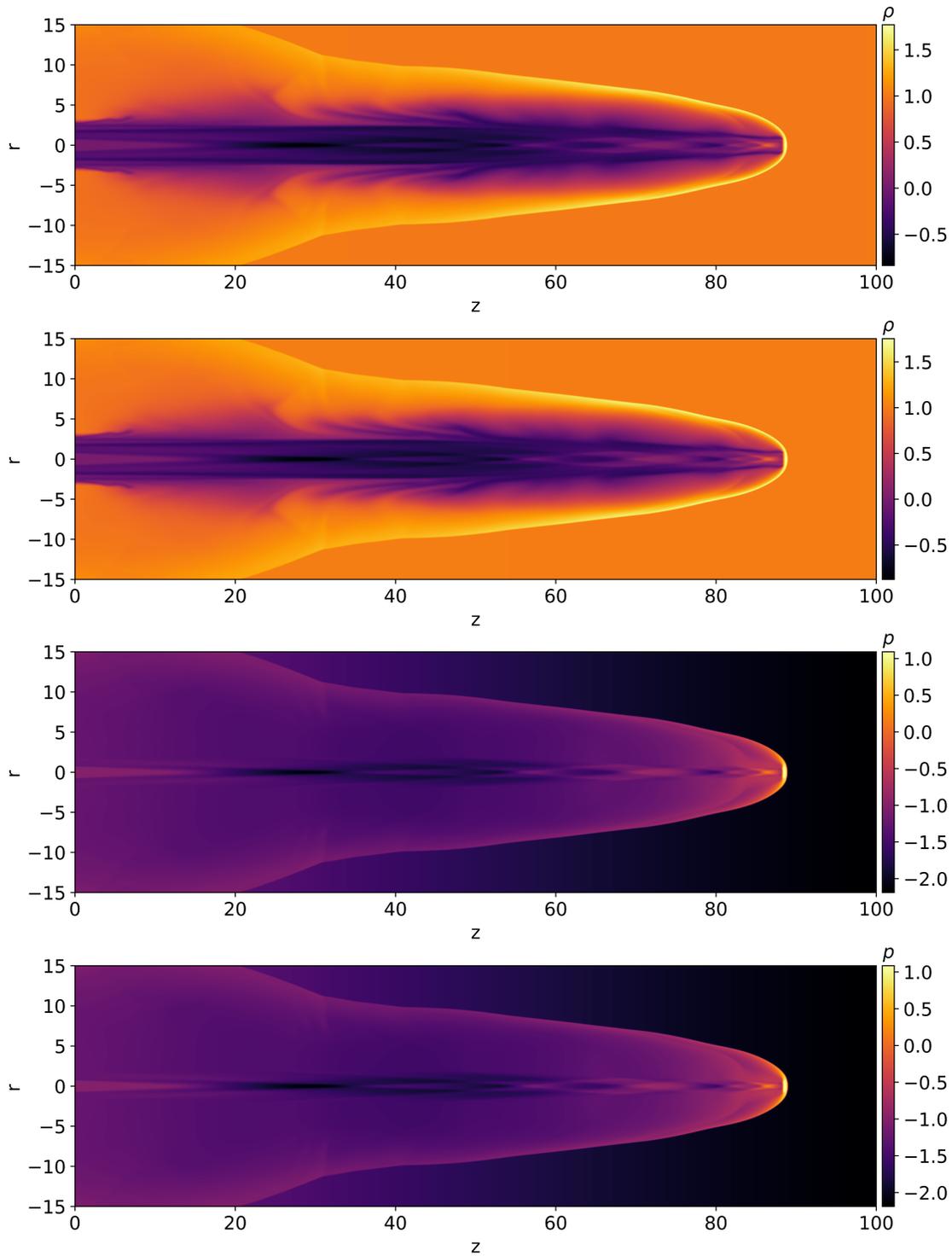


Figura 20. Modelos *PMH2* y *PMR2*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de sobrepresión a un tiempo $t = 111$.

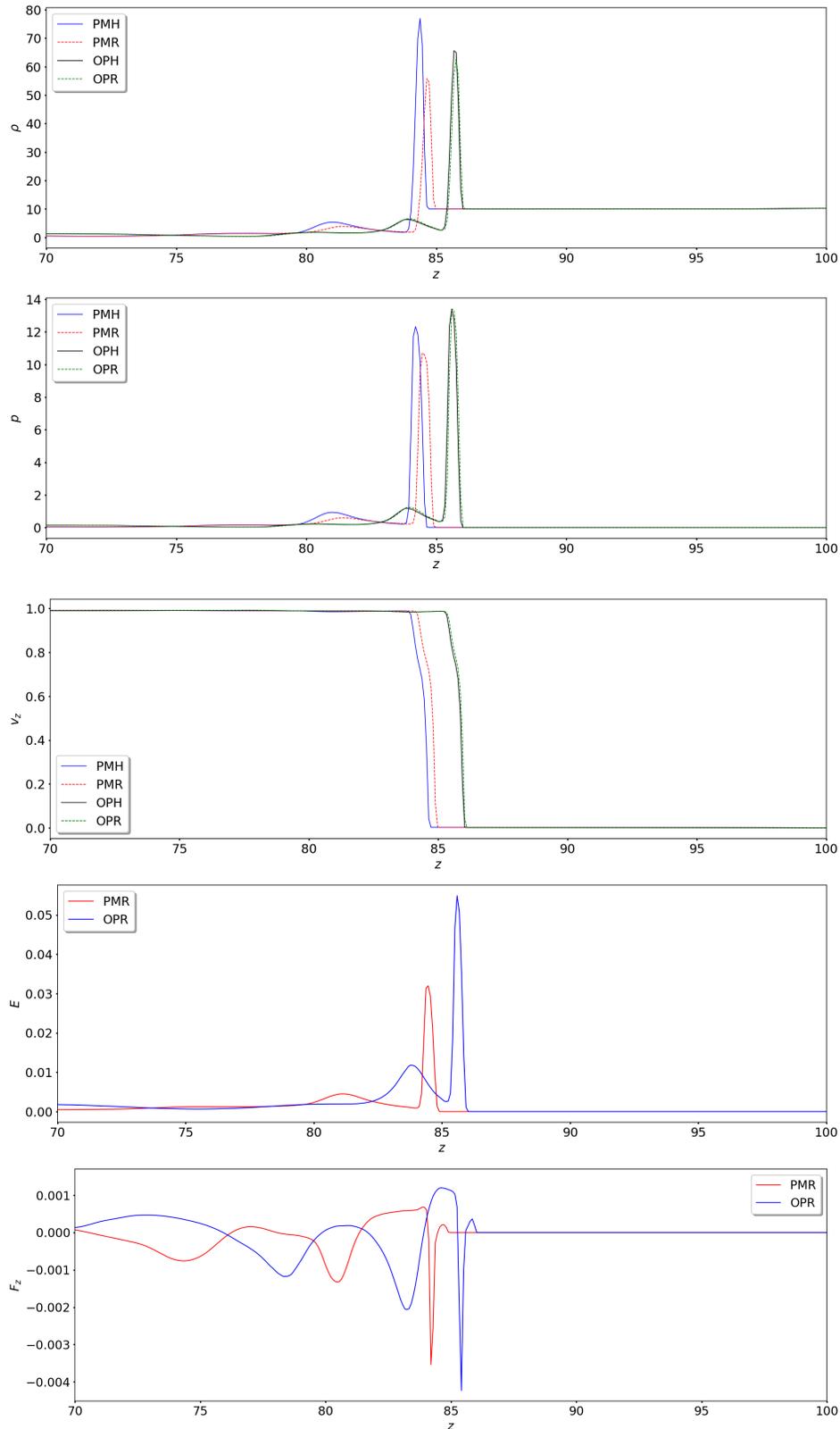


Figura 21. Perfiles 1D de las variables dinámicas del jet de los modelos *PM* y *OP*. En esta figura se muestran los perfiles de densidad de masa, presión, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación de los modelos *PMH*, *PMR*, *OPH* y *OPR* en un tiempo $t = 107.4$

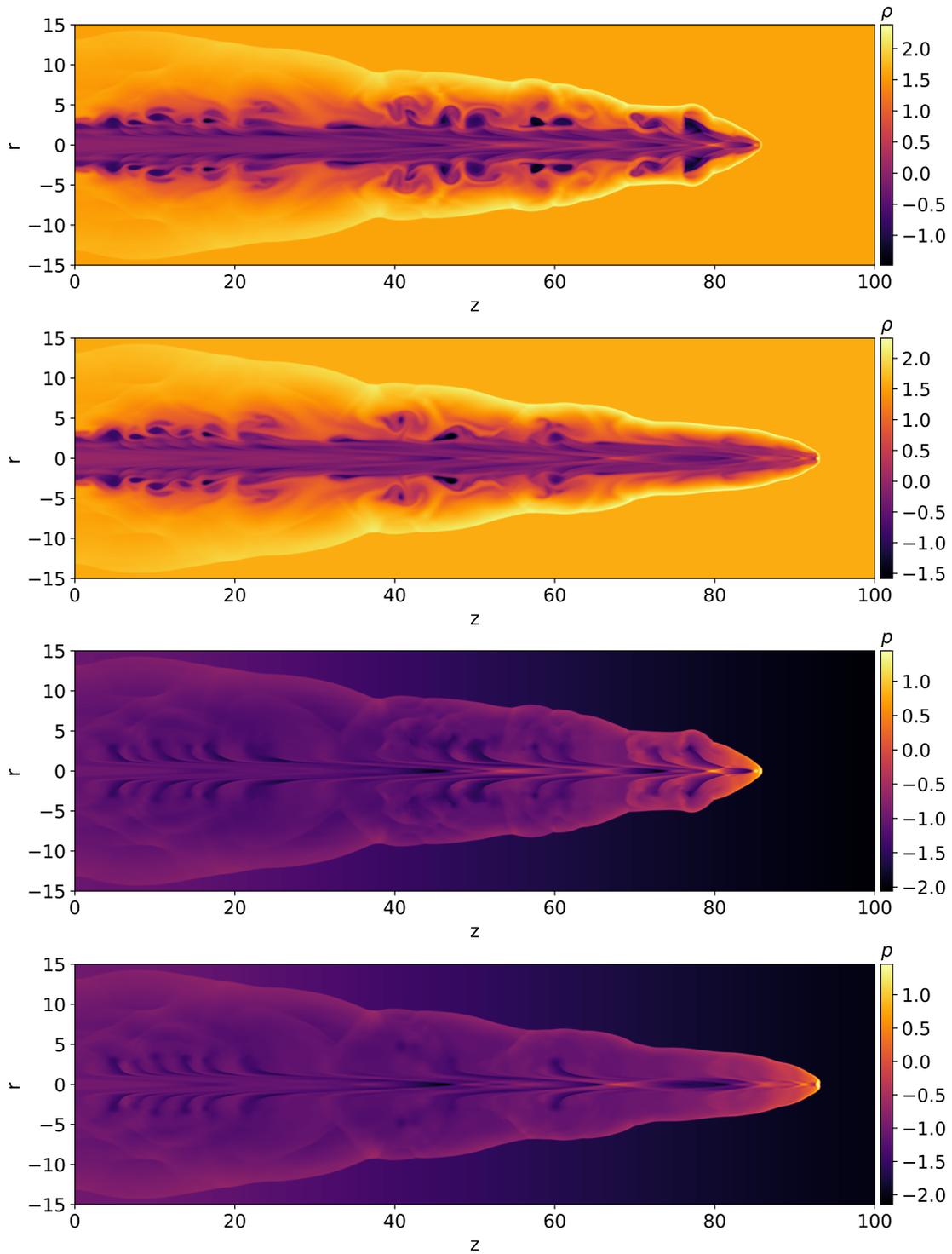


Figura 22. Modelos *PMH3* y *PMR3*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de presión igualada a un tiempo $t = 136$.

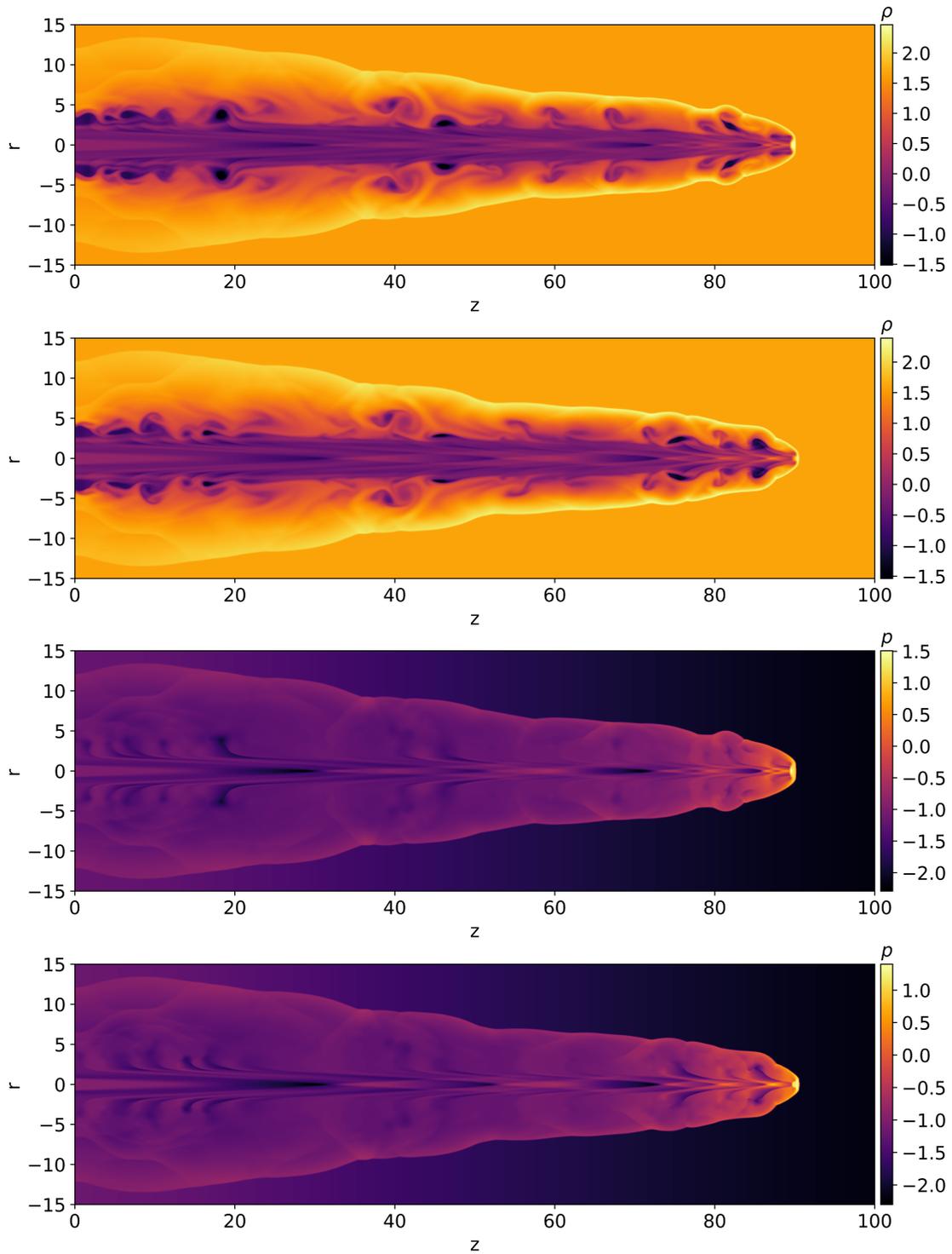


Figura 23. Modelos *PMH3* y *PMR3*. En esta figura se muestran en orden descendente el logaritmo de la densidad de masa en reposo $\log_{10}(\rho)$, el logaritmo de la presión $\log_{10}(p)$ de los modelos con y sin radiación, para el caso de sobrepresión a un tiempo $t = 136$.

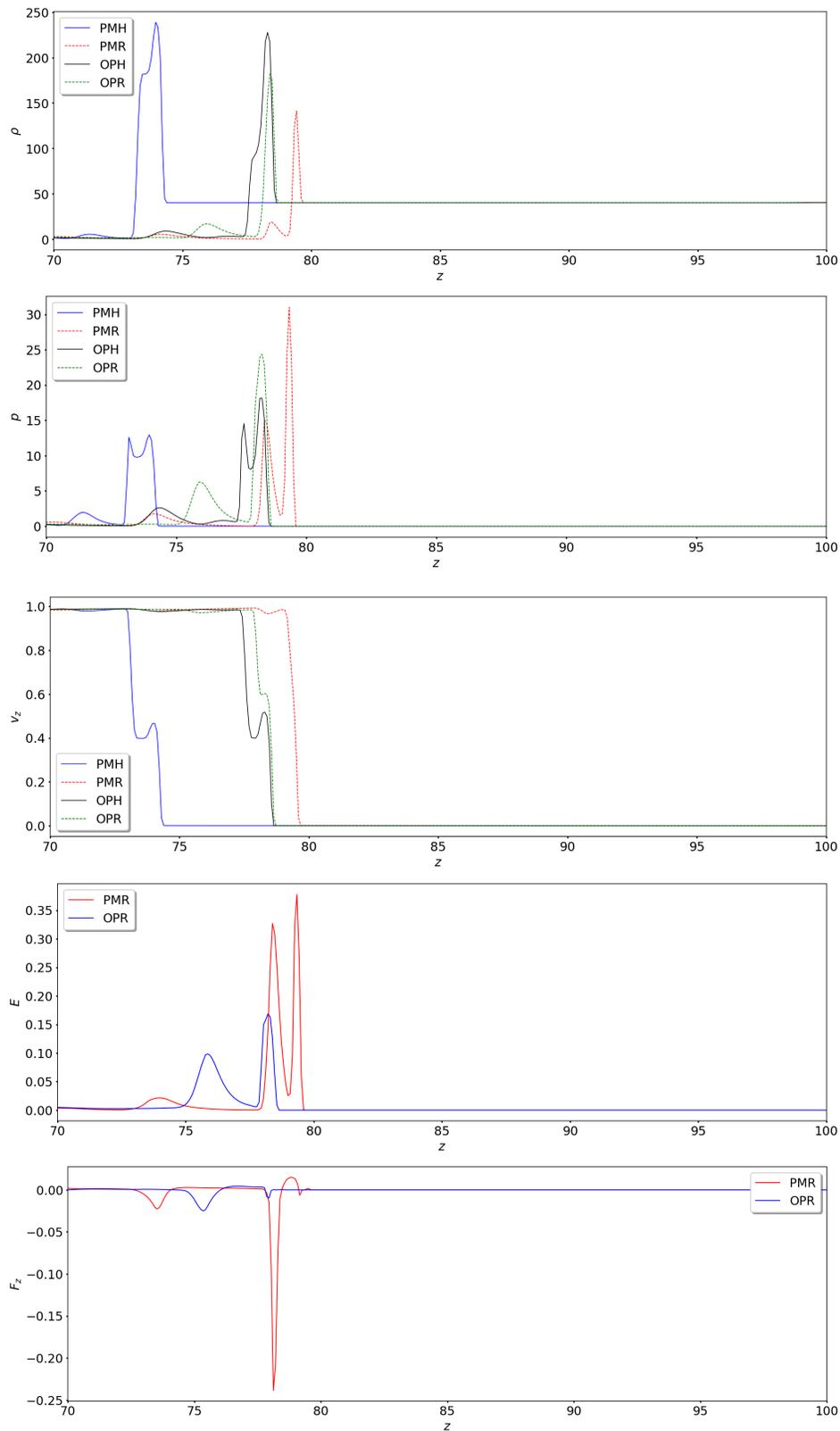


Figura 24. Perfiles 1D de las variables dinámicas del jet de los modelos *PM* y *OP*. En esta figura se muestran los perfiles de densidad de masa, presión, velocidad, densidad de energía de radiación y flujo de radiación de los modelos *PMH*, *PMR*, *OPH* y *OPR* en un tiempo $t = 117.1$

5. CONCLUSIONES

Se estudió de manera detallada las ecuaciones de la hidrodinámica relativista con términos radiativos, el cual se obtuvieron usando la formulación $3 + 1$ para el espacio-tiempo, siendo esta de gran importancia debido a la implementación numérica. Las ecuaciones se escribieron en un espacio tiempo general, de manera que puedan ser adaptadas más adelante a problemas más rigurosos en el ámbito de la astrofísica. Por otra parte, se obtuvieron las ecuaciones de la **RHD** con radiación en la aproximación ópticamente gruesa, en un espacio tiempo plano de Minkowski en simetría cilíndrica, y en un espacio-tiempo curvo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein en simetría esférica. Se estudiaron los métodos numéricos que se utilizan para resolver las ecuaciones de Euler relativistas, con el fin de estudiar escenarios en los que la solución de dichas ecuaciones jueguen un papel importante en la dinámica del sistema.

Se implementó en el código *CAFE* el módulo numérico en tres y dos dimensiones que resuelve las ecuaciones de Euler relativistas acopladas con el campo de radiación, basado en la técnica de alta resolución para la captura de choques. Además, para probar dicho módulo se realizaron diferentes pruebas numéricas $1D$, en las que se mostró la capacidad del código para tratar problemas con choques fuertes, velocidades relativistas, y problemas en los que la presión de radiación domina sobre la presión del gas. También se mostró que el código es capaz de lidiar con problemas en los que las ecuaciones se vuelven rígidas en los términos de fuente, siendo esto común cuando se evolucionan las ecuaciones del campo de radiación, debido a que las escalas temporales de la dinámica con

radiación son muy cortos con respecto a las escalas temporales de la hidrodinámica. Adicionalmente, se estudió la acreción de Michel con radiación en tres dimensiones en las coordenadas de Eddington Finkelstein en la aproximación ópticamente gruesa, obteniendo como resultado que la radiación debe ser tomada en cuenta cuando se modelan estos sistemas, debido a que ésta disminuye la tasa de acreción, y produce cambios apreciables en la velocidad del fluido, la densidad de energía de radiación y el flujo de radiación cerca del agujero negro. Los resultados de esta última simulación, prueban que para un tiempo considerable las variables ya mencionadas siguen estables, probando así la capacidad del código para abordar problemas $3D$ en un espacio-tiempo curvo.

Como aplicación del módulo numérico, se presentó el estudio de jets extragalácticos relativistas con radiación, en el que se consideró como primer paso hacia un estudio más complejo, la aproximación ópticamente gruesa. Se analizó la morfología de los modelos PM y OP cuando se tiene en cuenta la radiación, y se estudió los cambios presentes cuando se incluyen los términos radiativos respecto a simulaciones sólo hidrodinámicas bajo ciertos parámetros que definen las características principales de los Jets.

En el estudio que se hizo para estudiar la morfología de los jets, se obtuvo que cuando se tiene en cuenta los términos radiativos, la dinámica en el capullo del jet se suaviza. Se observó también que el perfil de densidad de masa y de presión a lo largo de la dirección axial, disminuyen cuando se tienen en cuenta tales términos, independientemente de si se considera un parámetro η diferente. Por otra parte, se concluye también que la variación del parámetro η , cambia bastante la morfología de los jets, produciendo incluso inestabilidades de Kevin Helmholtz.

Los resultados derivados del presente trabajo se listan a continuación:

- Ponencia:

Oswaldo A. Nieto., Fabio D. Lora Clavijo. "GRHD + Radiation in the optically thick regime." Latin American Regional IAU Meeting. Antofagasta-Chile, Nov. 3 – 9, 2019.

- Ponencia:

Oswaldo A. Nieto., Fabio D. Lora Clavijo. "Dinámica de jets extragalácticos con términos radiativos en un espacio tiempo plano de Minkowski". V congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica, Pereira, Colombia del 24 – 27 de Octubre del 2017.

Referencias Bibliográficas

. Hydrodynamical simulations of relativistic jets.

Alcubierre, M.

2008. *Introduction to 3+1 numerical relativity*, volume 140. Oxford University Press.

Aloy, M., J. M. Ibáñez, J. M. Martí, J.-L. Gómez, and E. Müller

1999. High-resolution three-dimensional simulations of relativistic jets. *ApJL*, 523(2):L125.

Arnowitt, R., S. Deser, and C. W. Misner

2008. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027.

Baade, W.

1956. Polarization in the jet of messier 87. *ApJ*, 123:550–551.

Baade, W. and R. Minkowski

1954. On the identification of radio sources. *ApJ*, 119:215.

Baumgarte, T. W. and S. L. Shapiro

2010. *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press.

Blandford, R. and M. Rees

1974. A twin-exhaust model for double radio sources. *MNRAS*, 169(3):395–415.

Burrows, A.

2000. Supernova explosions in the universe. *Nature*, 403(6771):727–733.

Cabrera, J., Y. Coronado, E. Benítez, S. Mendoza, D. Hiriart, and M. Sorcia

2013. A hydrodynamical model for the fermi-lat γ -ray light curve of blazar pks 1510- 089. *MNRAS*, 434(1):L6–L10.

Cruz-Osorio, A., F. D. Lora-Clavijo, and F. S. Guzmán

2012. Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates? *MNRAS*, 426:732–738.

Curtis, H. D.

1918. The planetary nebulae. *Publications of Lick Observatory*, 13:55–74.

Dibi, S., S. Drappeau, P. C. Fragile, S. Markoff, and J. Dexter

2012. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of accretion on to Sgr A*: how important are radiative losses? *MNRAS*, 426:1928–1939.

Einfeldt, B.

1988. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2):294–318.

Farris, B. D., T. K. Li, Y. T. Liu, and S. L. Shapiro

2008. Relativistic radiation magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: Numerical methods and tests. *PRD*, 78(2):024023.

Font, J. A., M. Miller, W.-M. Suen, and M. Tobias

2000. Three-dimensional numerical general relativistic hydrodynamics: Formulations, methods, and code tests. *PRD*, 61(4):044011.

Fragile, P. C., A. Gillespie, T. Monahan, M. Rodriguez, and P. Anninos

2012. Numerical Simulations of Optically Thick Accretion onto a Black Hole. I. Spherical Case. *ApJS*, 201:9.

Fragile, P. C., A. Olejar, and P. Anninos

2014. Numerical Simulations of Optically Thick Accretion onto a Black Hole. II. Rotating Flow. *ApJ*, 796:22.

Ghez, A. M., S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman

2008. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *ApJ*, 689:1044–1062.

Gómez, J., J. M. Martí, A. Marscher, J. M. Ibáñez, and A. Alberdi

1997. Hydrodynamical models of superluminal sources. *ApJL*, 482(1):L33.

Harten, A., P. D. Lax, and B. Van Leer

1997. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. In *Upwind and High-Resolution Schemes*, Pp. 53–79. Springer.

Hees, A. et al.

2017. Testing General Relativity with stellar orbits around the supermassive black hole in our Galactic center. *PRL*, 118(21):211101.

Hsieh, S.-H. and E. Spiegel

1976. The equations of photohydrodynamics. *ApJ*, 207:244–252.

Hughes, P. A., M. A. Miller, and G. C. Duncan

2002. Three-dimensional hydrodynamic simulations of relativistic extragalactic jets. *ApJ*, 572(2):713.

Kolokythas, K., E. O’Sullivan, S. Giacintucci, S. Raychaudhury, C. H. Ishwara-Chandra, D. M. Worrall, and M. Birkinshaw

2015. New insights into the evolution of the FR I radio galaxy 3C 270 (NGC 4261) from VLA and GMRT radio observations. *MNRAS*, 450:1732–1744.

Komissarov, S. and S. Falle

1998. The large-scale structure of fr-ii radio sources. *MNRAS*, 297(4):1087–1108.

Lora-Clavijo, F. D., A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán

2015. CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJS*, 218:24.

Lora-Clavijo, F. D. and F. S. Guzmán

2013. Axisymmetric Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole: shock cone vibrations. *MNRAS*, 429:3144–3154.

Martí, J. M., E. Müller, J. Font, J. M. Z. Ibáñez, and A. Marquina

1997. Morphology and dynamics of relativistic jets. *ApJ*, 479(1):151.

McKinney, J. C., A. Tchekhovskoy, A. Sadowski, and R. Narayan

2014. Three-dimensional general relativistic radiation magnetohydrodynamical simulation of super-eddington accretion, using a new code harmrad with m1 closure. *MNRAS*, 441(4):3177–3208.

Mendoza, S., J. Hidalgo, D. Olvera, and J. Cabrera

2009. Internal shocks in relativistic jets with time-dependent sources. *MNRAS*, 395(3):1403–1408.

Mendoza, S. and M. Longair

2001. Deflection of jets induced by jet–cloud and jet–galaxy interactions. *MNRAS*, 324(1):149–155.

Mészáros, P.

2002. Theories of gamma-ray bursts. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 40(1):137–169.

Michel, F. C.

1972. Accretion of matter by condensed objects. *Astrophysics and Space Science*, 15(1):153–160.

Mihalas, D., B. W. Mihalas, A. Fu, and W. D. Arnett

1986. Foundations of radiation hydrodynamics.

Mirabel, I. F. and L. F. Rodriguez

1999. Sources of relativistic jets in the galaxy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 37(1):409–443.

Mizuta, A., S. Yamada, and H. Takabe

2004. Propagation and dynamics of relativistic jets. *ApJ*, 606(2):804.

Müller, E.

1998. Simulation of astrophysical fluid flow. In *Computational methods for astrophysical fluid flow*, Pp. 343–494. Springer.

Papadopoulos, Philippos & Font, J. A.

1998. Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems. *PRD*, 58(2):024005.

Pareschi, L. and G. Russo

2005. Implicit–explicit runge–kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation. *Journal of Scientific computing*, 25(1):129–155.

Perley, R., P. Napier, J. Jackson, B. Butler, B. Carlson, D. Fort, P. Dewdney, B. Clark, R. Hayward, S. Durand, M. Revnell, and M. McKinnon

2009. The expanded very large array. *IEEE Proceedings*, 97:1448–1462.

Porth, O., C. Fendt, Z. Meliani, and B. Vaidya

2011. Synchrotron Radiation of Self-collimating Relativistic Magnetohydrodynamic Jets. *ApJ*, 737:42.

Rivera-Paleo, F. J. and F. S. Guzmán

2016. Modelling long GRBs using a single shock with relativistic radiation hydrodynamics. *MNRAS*, 459:2777–2786.

Roe, P. L.

1981. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 43:357–372.

Roedig, C., O. Zanotti, and D. Alic

2012. General relativistic radiation hydrodynamics of accretion flows - II. Treating stiff source terms and exploring physical limitations. *MNRAS*, 426:1613–1631.

Rosen, A., P. A. Hughes, G. C. Duncan, and P. E. Hardee

1999. A comparison of the morphology and stability of relativistic and nonrelativistic jets. *ApJ*, 516(2):729.

Sadowski, A., R. Narayan, A. Tchekhovskoy, and Y. Zhu

2013. Semi-implicit scheme for treating radiation under m1 closure in general relativistic conservative fluid dynamics codes. *MNRAS*, 429(4):3533–3550.

Scheuer, P.

1974. Models of extragalactic radio sources with a continuous energy supply from a central object. *MNRAS*, 166(3):513–528.

Schutz, B.

2009. *A first course in general relativity*. Cambridge university press.

Shapiro, S. L.

1996. Radiation from stellar collapse to a black hole. *ApJ*, 472(1):308.

Shklovskii, I.

1953. Nature of jets in radio galaxies. *Astronomicheskii Zhurnal*, 40:972.

Shklovskii, I.

1963. On the nature of radio galaxies. *Soviet Astronomy*, 6:465.

Toro, E. F.

2013. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*.

Springer Science & Business Media.

Toro, E. F., M. Spruce, and W. Speares

1994. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock waves*, 4(1):25–34.

Van Putten, M. H.

1993. A two-dimensional relativistic ($\gamma = 3.25$) jet simulation. *ApJ*, 408:L21–L23.

York Jr, J. W.

1979. Kinematics and dynamics of general relativity. *Sources of gravitational radiation*, Pp. 83–126.

Zanotti, O., C. Roedig, L. Rezzolla, and L. Del Zanna

2011. General relativistic radiation hydrodynamics of accretion flows–i. bondi–hoyle accretion. *MNRAS*, 417(4):2899–2915.

Zensus, J. A.

1997. Parsec-scale jets in extragalactic radio sources 1. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 35(1):607–636.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista con términos radiativos en coordenadas cilíndricas en un espacio tiempo plano de Minkowski

En este apéndice se presentan las ecuaciones de Euler relativistas en un espacio-tiempo plano de Minkowski, en el que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. La métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y su inversa $\eta^{\mu\nu}$ en las coordenadas cilíndricas $(r, \theta$ y $z)$ se definen como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (159)$$

por lo tanto, el elemento de línea (22) está dado por la expresión.

$$dS^2 = -dt^2 + dr^2 + rd\theta^2 + dz^2, \quad (160)$$

y el determinante de la métrica (66) en estas coordenadas es $\sqrt{g} = \alpha\sqrt{\gamma} = r$. La cuadrivelocidad en

términos de las velocidades medidas por observadores Eulerianos son

$$u^0 = W = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (161)$$

$$u_0 = \eta_{0\alpha} u^\alpha = -W, \quad (162)$$

$$u^i = u_i = Wv^i, \quad (163)$$

donde es claro que en el espacio de Minkowski $v^i = v_i$ ya que no es necesario hacer distinción entre las componentes covariantes y contravariantes de los vectores, y, v^2 es la magnitud del vector velocidad en este marco de referencia. De la definición de los símbolos de Christoffel (Schutz, 2009)

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial l} \right), \quad (164)$$

se obtiene que

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad (165)$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad (166)$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}. \quad (167)$$

Reemplazando estas definiciones en las ecuaciones (67), (78), (91), (104) y (108) en (109), la

ecuación conservativa general en dos dimensiones (r, z) es de la forma

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{r} \partial_r (r \mathbf{F}_r) + \partial_z (r \mathbf{F}_z) = r \mathbf{S}, \quad (168)$$

donde los vectores \mathbf{U} , \mathbf{F}^r , \mathbf{F}^z , y \mathbf{S} dados por

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D \\ U \\ S_r \\ S_z \\ U_{\text{R}z} \\ S_{\text{R}r} \\ S_{\text{R}z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} ,Dv_r \\ S_r \\ W_{rr} \\ W_{rz} \\ S_{\text{R}r} \\ R_{\text{R}rr} \\ R_{\text{R}rz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} Dv_z \\ S_z \\ W_{zr} \\ W_{zz} \\ S_{\text{R}z} \\ R_{\text{R}zr} \\ R_{\text{R}zz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_0 \\ \frac{p}{r} + G_r \\ G_z \\ -G_0 \\ \frac{E}{3r} - G_r \\ -G_z \end{pmatrix}, \quad (169)$$

son el vector de variables conservativas, los flujos en la dirección radial, los flujos en la dirección z y las fuentes respectivamente. Cada uno de los términos en los vectores \mathbf{U} y \mathbf{F}_i se obtienen de las

ecuaciones (111 a 118) como sigue

$$D = \rho_0 W, \quad (170)$$

$$U = \rho_0 h W^2 - p = \left(\rho_0 + \frac{p\Gamma}{\Gamma-1} W^2 \right) - p, \quad (171)$$

$$S_r = \rho_0 h W^2 v_r = \left(\rho_0 + \frac{p\Gamma}{\Gamma-1} W^2 \right) v_r, \quad (172)$$

$$S_z = \rho_0 h W^2 v_z = \left(\rho_0 + \frac{p\Gamma}{\Gamma-1} W^2 \right) v_z, \quad (173)$$

$$U_{\textcircled{R}} = \frac{4}{3} E W^2 + 2\alpha W F_t - \frac{1}{3} E, \quad (174)$$

$$S_{\textcircled{R}r} = \frac{4}{3} E W^2 v_r + W (\alpha F_t v_r + F_r), \quad (175)$$

$$S_{\textcircled{R}z} = \frac{4}{3} E W^2 v_z + W (\alpha F_t v_z + F_z), \quad (176)$$

$$(177)$$

$$W_{rr} = S_r v_r + p, \quad (178)$$

$$W_{rz} = S_z v_r, \quad (179)$$

$$W_{zr} = S_r v_z, \quad (180)$$

$$W_{zz} = S_z v_z + p \quad (181)$$

$$R_{\textcircled{R}rr} = \frac{4}{3} E v_r^2 W^2 + 2W F_r v_r + \frac{E}{3} = H_{\textcircled{R}rr} + \frac{E}{3}, \quad (182)$$

$$R_{\textcircled{R}rz} = \frac{4}{3} E W^2 v_r v_z + W (F_r v_z + F_z v_r), \quad (183)$$

$$R_{\textcircled{R}zr} = \frac{4}{3} E W^2 v_z v_r + W (F_z v_r + F_r v_z), \quad (184)$$

$$R_{\textcircled{R}zz} = \frac{4}{3} E v_z^2 W^2 + 2W F_z v_z + \frac{E}{3} = H_{\textcircled{R}zz} + \frac{E}{3}, \quad (185)$$

y los términos en \mathbf{S} se obtienen de realizar las sumas en la ecuación (119), dando como resultado

$$\alpha T_m^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 = 0, \quad (186)$$

$$\left\{ \alpha T_m^{\mu\nu} \left[(g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right] \right\} = \frac{p}{r}, \quad (187)$$

$$\left\{ \alpha T_m^{\mu\nu} \left[(g_{z\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{z\delta} \right] \right\} = 0, \quad (188)$$

$$\alpha R^{\mu 0} \alpha_{,\mu} - \alpha^2 R^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 = 0, \quad (189)$$

$$\alpha R^{\mu\nu} \left((g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right) = \frac{E}{3r}, \quad (190)$$

$$\alpha R^{\mu\nu} \left((g_{z\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{z\delta} \right) = 0, \quad (191)$$

donde en el espacio de Minkowski se cumple que $f_i = F_i$. Se observa que los términos p/r y $E/(3r)$ en las fuentes, son singulares en $r = 0$; sin embargo, con el fin de regularizar las ecuaciones en este punto, es posible separar los flujos, escogiendo de forma adecuada esta separación y así evitar la presencia de tales términos (???), es decir, la ecuación (167) se reescribe como

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{r} \partial_r (r \mathbf{F}_{r1}) + \partial_r \mathbf{F}_{r2} + \partial_z \mathbf{F}_z = \mathbf{S}, \quad (192)$$

sin embargo, la singularidad en $r = 0$ también afecta a los operadores derivadas en (167), el cual se evita sustituyendo $\frac{1}{r} \partial_r = 2 \partial_{r^2}$ para una función dada f , donde ahora la derivada es con respecto a r^2 . Aplicando esto al segundo término de la ecuación anterior se obtiene que

$$\partial_t \mathbf{U} + 2 \partial_{r^2} (r \mathbf{F}_{r1}) + \partial_r \mathbf{F}_{r2} + \partial_z \mathbf{F}_z = \mathbf{S}, \quad (193)$$

en la que los flujos y las fuentes ahora toman la forma

$$\mathbf{F}_{r1} = \begin{pmatrix} Dv_r \\ S_r \\ S_r v_r \\ S_z v_r \\ S_{(R)r} \\ H_{(R)rr} \\ R_{(R)rz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} Dv_r \\ S_z \\ S_r v_z \\ S_z v_z + p \\ S_{(R)z} \\ R_{(R)zr} \\ H_{(R)zz} + \frac{E}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ G^t \\ G_r \\ G_z \\ -G^t \\ -G_r \\ -G_z \end{pmatrix}, \quad (194)$$

y los términos en el vector fuente se definen explícitamente por las ecuaciones (147) y (148) como

$$G^t = -W \left\{ \chi^t a_{\text{R}} T^4 + U_{\text{R}} \left[2\chi^s \left(1 - \frac{3}{1+2W^2} \right) - \chi^t \right] + \left(S_{\text{R}r} v_r + S_{\text{R}z} v_z \right) \left[\chi^t + \chi^s \left(\frac{3}{1+2W^2} - 2 \right) \right] \right\}, \quad (195)$$

$$G_r = -W \chi^t a_{\text{R}} T^4 v_r + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W} \right) S_{\text{R}r}, \\ + W U_{\text{R}} v_r \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2} \right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1 \right) \right], \\ + W v_r \left(S_{\text{R}r} v_r + S_{\text{R}z} v_z \right) \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1 \right) + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2} \right) \right], \quad (196)$$

$$G_z = -W \chi^t a_{\text{R}} T^4 v_z + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W} \right) S_{\text{R}z}, \\ + W U_{\text{R}} v_z \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2} \right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1 \right) \right], \\ + W v_z \left(S_{\text{R}r} v_r + S_{\text{R}z} v_z \right) \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1 \right) + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2} \right) \right]. \quad (197)$$

Por último, las variables conservativas se recuperan como ya se describió en la sección (2.3), el

resultado es

$$\rho_0 = \frac{D}{W}, \quad (198)$$

$$v_r = \frac{S_r}{U+p}, \quad (199)$$

$$v_z = \frac{S_z}{U+p}, \quad (200)$$

$$E = -\frac{3\left[U_{\text{R}}\left(1+v_r^2+v_z^2\right)-2\left(S_{\text{R}r}v_r+S_{\text{R}z}v_z\right)\right]}{4W^2\left(v_r^2+v_z^2-1\right)+v_r^2+v_z^2+1}, \quad (201)$$

$$F_r = -\frac{4W^2\left(S_{\text{R}r}+S_{\text{R}z}v_rv_z-S_{\text{R}r}v_z^2-U_{\text{R}}v_r\right)-S_{\text{R}r}\left(1+v_z^2\right)+S_{\text{R}z}v_rv_z}{4W^3\left(v_r^2+v_z^2-1\right)+W\left(1+v_r^2+v_z^2\right)}, \quad (202)$$

$$F_z = -\frac{4W^2\left(S_{\text{R}z}+S_{\text{R}r}v_rv_z-S_{\text{R}z}v_r^2-U_{\text{R}}v_z\right)-S_{\text{R}z}\left(1+v_r^2\right)+S_{\text{R}r}v_rv_z}{4W^3\left(v_r^2+v_z^2-1\right)+W\left(1+v_r^2+v_z^2\right)}. \quad (203)$$

Apéndice B. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista con términos radiativos en un espacio-tiempo curvo de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein

En las coordenadas esféricas usuales (r, θ, ϕ) , la ecuación (109) es de la forma

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{\partial_r \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{F}^r + \partial_r \mathbf{F}^r + \frac{\partial_\theta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{F}^\theta + \partial_\theta \mathbf{F}^\theta + \partial_\phi \mathbf{F}^\phi = \mathbf{S}, \quad (204)$$

donde \mathbf{U} es el vector de las variables conservativas, mientras que \mathbf{F}^r , \mathbf{F}^θ y \mathbf{F}^ϕ son los vectores de los flujos en las direcciones radial, polar y azimutal respectivamente, dados en forma explícita como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D \\ U \\ S_r \\ S_\theta \\ S_\phi \\ U_{\text{R}} \\ \left(S_{\text{R}} \right)_r \\ \left(S_{\text{R}} \right)_\theta \\ \left(S_{\text{R}} \right)_\phi \end{pmatrix}, \quad (205)$$

$$\mathbf{F}^r = \alpha \begin{pmatrix} D(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) \\ U(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) + v^r p \\ S_r(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) + p \\ S_\theta(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) \\ S_\phi(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) \\ \left(S_{\text{R}}\right)^r - \frac{\beta^r}{\alpha} U_{\text{R}} \\ \left(R_{\text{R}}\right)^r_r - \frac{\beta^r}{\alpha} \left(S_{\text{R}}\right)^r_r \\ \left(R_{\text{R}}\right)^r_\theta - \frac{\beta^r}{\alpha} \left(S_{\text{R}}\right)^r_\theta \\ \left(R_{\text{R}}\right)^r_\phi - \frac{\beta^r}{\alpha} \left(S_{\text{R}}\right)^r_\phi \end{pmatrix}, \mathbf{F}^\theta = \alpha \begin{pmatrix} Dv^\theta \\ v^\theta(U+p) \\ S_r v^\theta \\ (S_\theta v^\theta + p) \\ S_\phi v^\theta \\ \left(S_{\text{R}}\right)^\theta \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\theta_r \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\theta_\theta \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\theta_\phi \end{pmatrix}, \mathbf{F}^\phi = \alpha \begin{pmatrix} Dv^\phi \\ v^\phi(U+p) \\ S_r v^\phi \\ S_\theta v^\phi \\ S_\phi v^\phi + p \\ \left(S_{\text{R}}\right)^\phi \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\phi_r \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\phi_\theta \\ \left(R_{\text{R}}\right)^\phi_\phi \end{pmatrix}, \quad (206)$$

donde los valores de las funciones α y β^i dependen del espacio-tiempo que se considere. Dicho esto, la métrica de Schwarzschild $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$ en las coordenadas de Eddington-Filkenstein están definidas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ \frac{2M}{r} & 1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (207)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2M}{r} & \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ \frac{2M}{r} & 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (208)$$

y el elemento de línea se define por la expresión

$$dS^2 = - \left(-1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (209)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es el ángulo sólido de la 2-esfera. Comparando ahora la ecuación del elemento de línea de la descomposición 3 + 1 (22) con la ecuación anterior, la función lapso, el vector desplazamiento y la métrica inducida asociados a esta descomposición son

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{2M+r}} \quad \beta_i = \left(\frac{2M}{r}, 0, 0 \right), \quad \beta^i = \left(\frac{2M}{r+2M}, 0, 0 \right), \quad (210)$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left(1 + \frac{2M}{r}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (211)$$

donde el subíndice i corre por las coordenadas esféricas, desde r hasta ϕ . Con estas definiciones, las ecuaciones (61, 62, 66) correspondientes a las componentes temporal y espacial de las velocidades

eulerianas y el determinante de la métrica respectivamente, se expresan ahora como

$$u^\mu = W \left(\frac{1}{\alpha}, v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}, v^\theta, v^\phi \right), \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\frac{r+2M}{r}} r^2 \sin \theta. \quad (212)$$

Con estos ingredientes, la ecuación (203) toma la forma

$$\partial_t \mathbf{U} + \left(\frac{2}{r} - \frac{M\alpha^2}{r^2} \right) \mathbf{F}^r + \partial_r \mathbf{F}^r + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \mathbf{F}^\theta + \partial_\theta \mathbf{F}^\theta + \partial_\phi \mathbf{F}^\phi = \mathbf{S}. \quad (213)$$

Los términos en el vector de variables conservativas y los vectores flujo (204, 205) se obtienen de reemplazar los flujos 3-dimensionales f^i dados por (99)

$$f^r = F^r + \beta^r F^0, \quad (214)$$

$$f^\theta = F^\theta, \quad (215)$$

$$f^\phi = F^\phi, \quad (216)$$

en (111 a 118), siendo estos

$$\left(S_{\text{R}}\right)_r = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{rr}v^r + W\gamma_{rr}[\alpha F^0v^r + (F^r + \beta^r F^0)], \quad (217)$$

$$\left(S_{\text{R}}\right)_\theta = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\theta\theta}v^\theta + W\gamma_{\theta\theta}(\alpha F^0v^\theta + F^\theta), \quad (218)$$

$$\left(S_{\text{R}}\right)_\phi = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\phi\phi}v^\phi + W\gamma_{\phi\phi}(\alpha F^0v^\phi + F^\phi), \quad (219)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_r^r = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{rr}v^r v^r + 2W\gamma_{rr}v^r(F^r + \beta^r F^0) + \frac{E}{3}, \quad (220)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_r^\theta = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{rr}v^\theta v^r + W\gamma_{rr}(F^\theta v^r + F^r v^\theta), \quad (221)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_r^\phi = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{rr}v^\phi v^r + W\gamma_{rr}(F^\phi v^r + F^r v^\phi), \quad (222)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\theta^r = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\theta\theta}v^r v^\theta + W\gamma_{\theta\theta}[(F^r + \beta^r F^0)v^\theta + F^\theta v^r], \quad (223)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\theta^\theta = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\theta\theta}v^\theta v^\theta + W\gamma_{\theta\theta}(F^\theta v^\theta + F^\theta v^\theta) + \frac{E}{3}, \quad (224)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\theta^\phi = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\theta\theta}v^\phi v^\theta W^2 + W\gamma_{\theta\theta}(F^\phi v^\theta + F^\theta v^\phi), \quad (225)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\phi^r = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\phi\phi}v^r v^\phi + W\gamma_{\phi\phi}[(F^r + \beta^r F^0)v^\phi + f^\phi v^r], \quad (226)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\phi^\theta = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\phi\phi}v^\theta v^\phi + W\gamma_{\phi\phi}(F^\theta v^\phi + F^\phi v^\theta), \quad (227)$$

$$\left(R_{\text{R}}\right)_\phi^\phi = \frac{4}{3}EW^2\gamma_{\phi\phi}v^\phi v^\phi + W\gamma_{\phi\phi}(F^\phi v^\phi + f^\phi v^\phi) + \frac{E}{3}. \quad (228)$$

Por otra parte, el vector de fuentes es

$$\mathbf{S} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ T_m^{r0} \alpha_{,r} - \alpha T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 + \alpha G^0 \\ T_m^{\mu\nu} \left((g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right) + G_r \\ T_m^{\mu\nu} \left((g_{\theta\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\theta\delta} \right) + G_\theta \\ T_m^{\mu\nu} \left((g_{\phi\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\phi\delta} \right) + G_\phi \\ R^{r0} \alpha_{,r} - \alpha R^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 - \alpha G^0 \\ R^{\mu\nu} \left((g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right) - G_r \\ R^{\mu\nu} \left((g_{\theta\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\theta\delta} \right) - G_\theta \\ R^{\mu\nu} \left((g_{\phi\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\phi g_{\theta\delta} \right) - G_\phi \end{pmatrix} . \quad (229)$$

Para expresar los términos de la fuente en función de las variables conservativas, se relizan las

siguientes sumas

$$T_m^{r0} \alpha_{,r} - \alpha T_m^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 = 2M\alpha(T_m^{\theta\theta} + T_m^{\phi\phi} \sin^2 \theta) + \frac{M\alpha^3 T_m^{tr}}{r^2} \quad (230)$$

$$- \frac{2M^2 \alpha T_m^{00}}{r^3} - \frac{2M\alpha(M+r)(T_m^{rr} + T_m^{tr})}{r^3},$$

$$T_m^{\mu\nu} \left[(g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right] = r(T_m^{\theta\theta} + T_m^{\phi\phi} \sin^2 \theta) - M \left(\frac{T_m^{00} + 2T_m^{tr} + T_m^{rr}}{r^2} \right), \quad (231)$$

$$\alpha T_m^{\mu\nu} \left[(g_{\theta\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\theta\delta} \right] = r^2 T_m^{\phi\phi} \cos \theta \sin \theta \quad (232)$$

$$T_m^{\mu\nu} \left[(g_{\phi\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\phi\delta} \right] = 0, \quad (233)$$

$$R^{r0} \alpha_{,r} - \alpha T_{\text{R}}^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 = 2M\alpha(R^{\theta\theta} + R^{\phi\phi} \sin^2 \theta) + \frac{M\alpha^3 T_{\text{R}}^{tr}}{r^2}, \quad (234)$$

$$- \frac{2M^2 \alpha R^{00}}{r^3} - \frac{2M\alpha(M+r)(R^{rr} + T_{\text{R}}^{tr})}{r^3},$$

$$\alpha R^{\mu\nu} \left((g_{r\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{r\delta} \right) = r(R^{\theta\theta} + R^{\phi\phi} \sin^2 \theta) - M \left(\frac{R^{00} + 2T_{\text{R}}^{tr} + R^{rr}}{r^2} \right), \quad (235)$$

$$\alpha R^{\mu\nu} \left((g_{\theta\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\theta\delta} \right) = r^2 R^{\phi\phi} \cos \theta \sin \theta, \quad (236)$$

$$\alpha R^{\mu\nu} \left((g_{\phi\nu})_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\phi\delta} \right) = 0, \quad (237)$$

donde las componentes de la 4 fuerza y los tensores de energía momento del fluido y del campo de radiación toman la forma

$$T_m^{00} = \frac{W^2 \left[\rho_0 + \left(\frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} \right) \right] - p}{\alpha^2}, \quad (238)$$

$$T_m^{rr} = W^2 \left(\rho_0 + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} \right) \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right)^2 + p \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (239)$$

$$T_m^{\theta\theta} = W^2 \left(\rho_0 + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} \right) (v^\theta)^2 + \frac{p}{r^2}, \quad (240)$$

$$T_m^{\phi\phi} = W^2 \left(\rho_0 + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} \right) (v^\phi)^2 + \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (241)$$

$$T_m^{tr} = \frac{W^2}{\alpha} \left(\rho_0 + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} \right) \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{\beta^r}{\alpha^2}, \quad (242)$$

$$R^{00} = \frac{E \left(4W^2 - 1 \right) + 6W\alpha F^0}{3\alpha^2}, \quad (243)$$

$$R^{rr} = \frac{E}{3} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + 2WF^r \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{4}{3}EW^2 \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right)^2, \quad (244)$$

$$R^{\theta\theta} = \frac{6WF^\theta v^\theta + E \left(\frac{1}{r^2} + 4W^2 (v^\theta)^2 \right)}{3}, \quad (245)$$

$$R^{\phi\phi} = \frac{6WF^\phi v^\phi + E \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} + 4W^2 (v^\phi)^2 \right)}{3}, \quad (246)$$

$$R^{tr} = \frac{3W\alpha^2 F^0 v^r + W\alpha \left(3F^r + 4WEv^r - 3\beta^r F^0 \right) + E \left(\beta^r - 4W^2 \beta^r \right)}{3\alpha^2}, \quad (247)$$

$$G^t = -\frac{W}{\alpha} \left\{ \chi^t a_{\text{R}} T_{fluid}^4 + U_{\text{R}} \left[2\chi^s \left(1 - \frac{3}{1+2W^2} \right) - \chi^t \right] \right. \\ \left. + \left(S_{\text{R}r} v^r + S_{\text{R}\theta} v^\theta + S_{\text{R}\phi} v^\phi \right) \left[\chi^t + \chi^s \left(\frac{3}{1+2W^2} - 2 \right) \right] \right\}, \quad (248)$$

$$G_r = -W\chi^t a_{\text{R}} T_{fluid}^4 \gamma_{rr} v^r + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W} \right) S_{\text{R}r} \\ + WU_{\text{R}} \gamma_{rr} v^r \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2} \right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1 \right) \right] \\ + W\gamma_{rr} v^r \left(S_{\text{R}r} v^r + S_{\text{R}\theta} v^\theta + S_{\text{R}\phi} v^\phi \right) \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1 \right) \right. \\ \left. + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2} \right) \right], \quad (249)$$

$$\begin{aligned}
 G_\theta = & -W\chi^t a_{\text{R}} T_{fluid}^4 \gamma_{\theta\theta} v^\theta + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W}\right) S_{\text{R}\theta} \\
 & + W U_{\text{R}} \gamma_{\theta\theta} v^\theta \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2}\right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1\right) \right] \\
 & + W \gamma_{\theta\theta} v^\theta \left(S_{\text{R}r} v^r + S_{\text{R}\theta} v^\theta + S_{\text{R}\phi} v^\phi \right) \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1\right) \right. \\
 & \left. + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2}\right) \right], \tag{250}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_\phi = & -W\chi^t a_{\text{R}} T_{fluid}^4 \gamma_{\phi\phi} v^\phi + \left(\frac{\chi^t + \chi^s}{W}\right) S_{\text{R}\phi} \\
 & + W U_{\text{R}} \gamma_{\phi\phi} v^\phi \left[\chi^t \left(1 - \frac{4}{1+2W^2}\right) + 2\chi^s \left(\frac{1}{1+2W^2} - 1\right) \right] \\
 & + W \gamma_{\phi\phi} v^\phi \left(S_{\text{R}r} v^r + S_{\text{R}\theta} v^\theta + S_{\text{R}\phi} v^\phi \right) \left[\chi^t \left(\frac{2}{1+2W^2} - 1\right) \right. \\
 & \left. + \chi^s \left(2 - \frac{1}{1+2W^2}\right) \right]. \tag{251}
 \end{aligned}$$

Apéndice C. Normalización de las unidades

Con el fin de normalizar las unidades de las constantes y de las variables físicas, se plantean las siguientes relaciones

$$c = 1, \quad GM = 1, \quad \frac{m_p}{k_b} = 1, \quad \dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{c^2} = 1, \quad (252)$$

donde c , G , m_p y k_b son la velocidad de la luz en el vacío, la constante gravitacional, la masa del protón y la constante de Boltzman respectivamente, mientras que L_{Edd} y \dot{M}_{Edd} son la luminosidad y la tasa de acreción de Eddington (?). El cual, permiten definir las unidades de normalización de la siguiente manera

$$d_{cod} = r_g, \quad (253)$$

$$t_{cod} = \frac{r_g}{c}, \quad (254)$$

$$m_{cod} = \frac{L_{Edd}}{c^2} t_{cod}, \quad (255)$$

$$T_{cod} = \frac{m_p}{k_b} c^2, \quad (256)$$

aquí d , t , m y T indican distancia, tiempo, masa y Temperatura, y $r_g = \frac{GM}{c^2}$ es el radio gravitacional, donde M la masa de la fuente.