EXTENSIONES DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS T_1

JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

EXTENSIONES DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS T_1

JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A mis padres y a mi hermano,
Este logro no habría sido posible sin su inquebrantable apoyo. Ustedes han sido mi fuente de inspiración y fortaleza.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer con este trabajo a mi familia, la cual siempre me ha apoyado y ha confiado en mi y por quienes he llegado hasta aquí. Al Dr. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de esta tesis por toda la ayuda proporcionada, el cual siempre ha estado disponible para cualquier duda que me ha surgido y por guiarme para poder decidir el mejor camino para el desarrollo de este trabajo. A mis compañeros de carrera, los cuales han hecho que mi trayectoria durante la misma haya sido de las mejores etapas de mi vida y sea inolvidable.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

pág.

RESUMEN

TÍTULO: EXTENSIONES DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS T_1 *

AUTOR: JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES **

PALABRAS CLAVE: *CTS*, EXTENSIÓN POLACA, CONJUNTO DE BOREL, ESTÁNDAR, BAIRE, CONTRACCIÓN TOPOLÓGICA.

DESCRIPCIÓN:

Un espacio topológico X es denominado *CTS* si X es compacto, T_1 y segundo numerable. En este trabajo nos enfocamos en estudiar resultados acerca de las *extensiones polacas* de estos espacios *CTS*. En específico, que todo espacio *CTS* admite una *extensión polaca* que preserva *Borelianos*, mostrando así que la σ-álgebra de Borel de los espacios CTS es *estándar*, es decir, isomorfa a la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco.

En esta tesis estudiamos además una caracterización de cuando un espacio *CTS* es *Baire*, y definiendo lo que es una *contracción topológica* se estudió un resultado análogo al teorema de punto de fijo de Banach en espacios compactos T_1.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: EXTENSIONS OF TOPOLOGICAL SPACES COMPACT T_1 *

AUTHOR: JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES **

KEYWORDS: *CTS*, POLISH EXTENSION, BOREL SET, STANDARD, BAIRE, TOPOLOGICAL CONTRACTION.

DESCRIPTION:

A topological space X is denoted *CTS* if X is compact, T_1 and second numerable. In this paper, we focus on studying results about the extensions of these *CTS*-spaces. In particular, every *CTS* space admits a Polish extension that preserves the Borel sets, thus showing that the Borel sigma algebra of *CTS* spaces is standard, i.e., isomorphic to the Borel sigma algebra of a Polish space.

In this thesis we further studied a characterization of when a *CTS*-space is *Baire*, and by defining what is a *topological contraction* a result analogous to the Banach fixed point theorem in compact T_1-spaces was studied.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Un espacio X es **compacto** si para cualquier cubierta abierta de conjuntos se tiene una subcubierta finita que también cubre todo el espacio. La noción de compacidad se originó a partir de dos enfoques principales: la compacidad secuencial y la compacidad por cubiertas abiertas. La compacidad secuencial establece que en un conjunto compacto siempre existe una subsucesión convergente para cualquier sucesión. Mientras tanto, la compacidad por cubiertas abiertas establece que cualquier cubierta abierta de un conjunto compacto tiene una subcubierta finita. La definición moderna de compacidad se basa en la compacidad por cubiertas, que se considera más general y útil que la compacidad secuencial. Esta definición fue introducida por Felix Hausdorff en 1914, aunque la idea de la compacidad por cubiertas se remonta a trabajos previos de otros matemáticos como Henri Lebesgue y Émile Borel. En resumen, la noción de compacidad se desarrolló a partir de la observación de ciertas propiedades de los conjuntos compactos, y se formalizó mediante la definición de la compacidad por cubiertas abiertas.

Se dice que un espacio X es $\mathbf{T_1}$, si para cada par de puntos distintos, cada uno tiene una vecindad abierta que no contiene al otro punto. También decimos que X es **segundo numerable** si existe una base numerable para la topología, es decir, existe un conjunto numerable de conjuntos abiertos tal que cualquier conjunto abierto del espacio puede ser expresado como una unión de elementos de la base.

Un espacio topológico X se dice que es **separable** si tiene un subconjunto denso numerable, y es llamado **completamente metrizable** si su topología es inducida por una métrica completa. Cuando X es separable y completamente metrizable, decimos que X es un espacio **polaco**.

Los **borelianos** de un espacio X son los conjuntos que pertenecen a la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología de X (véase 1.2.5). En este contexto, nos enfocaremos en estudiar las extensiones polacas de los espacios topológicos compactos, T_1 y segundo numerables, para los cuales se usará la abreviatura ***CTS***. Uno de los objetivos de este proyecto es mostrar que la σ-álgebra de Borel de los espacios *CTS* es estándar, es decir, isomorfa a la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco, siguiendo el artículo [1] publicado por M. Morayne y Ralowski.

A lo largo del trabajo realizado en la tesis surgieron preguntas cuyas respuestas no conocemos aún, una de ellas está relacionada con determinar específicamente cuál es el espacio polaco que refina a un *CTS* dado. De las demostraciones de los teoremas importantes (véase 2.2.1 y 2.3.2) sabemos que este espacio resultante es G_δ en el conjunto de Cantor, por lo que surge la pregunta, ¿cuáles G_δ de Cantor son extensiones de espacios *CTS*?

El segundo objetivo de esta tesis es estudiar el teorema de Baire y una analogía del teorema del punto fijo de Banach para los espacios *CTS*, siguiendo el artículo [2] publicado por M. Morayne y Ralowski.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el segundo capítulo se proporcionan los preliminares y la teoría necesaria de topología general para el desarrollo de la tesis. En el tercer capítulo se incluyen los teoremas y ejemplos más importantes de este trabajo, en particular los teoremas 2.2.1 y 2.3.2. Por último, se estudian aplicaciones y resultados interesantes de los espacios *CTS*, en particular, analizamos una condición necesaria y suficiente para que un espacio *CTS* sea un espacio Baire. Por último, trabajaremos con la noción contracción topológica en espacios no necesariamente métricos para mostrar un resultado análogo al teorema de punto fijo de Banach para los espacios compactos T_1.

En el transcurso de esta tesis, hemos decidido incorporar una sección dedicada a preguntas y comentarios. Esta tiene el propósito de complementar lo desarrollado a lo largo de nuestro trabajo y, al mismo tiempo, subrayar la idea de que aún quedan muchas cosas por estudiar con base en las extensiones de espacios *CTS*.

---

[1] M. Morayne y C. Ryll-Nardzewski. “Refinements of T1, compact and second countable topologies”. En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: `10.1016/0166-8641(94)90016-7`.

[2] M. Morayne y R. Ralowski. “The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in T1 compact spaces”. En: *Bulletin Des Sciences Mathématiques* 183 (2023). DOI: `10.1016/j.bulsci.2023.103231`.

1. Preliminares

En este capítulo recordamos algunos resultados de topología general que se usarán más adelante, la definición de espacio Baire y algunas otras definiciones importantes.

1.1. Topología General

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales (es decir, los enteros no negativos) y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dada por

$$f(A) = \chi_A.$$

Identificaremos a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ con el conjunto de Cantor ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) de tal forma que podemos ver a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como un espacio métrico compacto.

Definición 1.1.1. *Sean a, b subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, definamos la **vecindad de a y b** como* $V(a,b) = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\} \wedge b \subseteq \{m \in \mathbb{N} : x(m) = 0\}\}$.

Proposición 1.1.2. $\{V(a,b) : a, b \in Fin(\mathbb{N}) \wedge a \cap b = \emptyset\}$ *es una base para la topología producto de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Veamos primero que es una base para alguna topología que denotaremos por ρ.
Sea $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, es decir, x es una secuencia de ceros y unos. Definamos $A = \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\}$ y $B = \{m \in \mathbb{N} : x(m) = 0\}$ los cuales son disjuntos, tome $a \in Fin(A)$ y $b \in Fin(B)$, es inmediato que $x \in V(a,b)$. Sea $y \in V(a,b) \cap V(c,d)$, defina $a' = a \cap c$ y $b' = b \cap d$. Es fácil observar que $y \in V(a', b')$.

Probemos ahora que ρ es igual a la topología producto de Cantor.

Sea $V(a,b) = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\} \wedge b \subseteq \{m \in \mathbb{N} : x(m) = 0\}\}$, donde $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $b = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Note que

$$V(a,b) = \pi_{a_1}^{-1}\{1\} \cap \ldots \cap \pi_{a_n}^{-1}\{1\} \cap \pi_{b_1}^{-1}\{0\} \cap \ldots \cap \pi_{b_m}^{-1}\{0\},$$

así $\rho \subseteq \tau_p$.
Recíprocamente, sea $B = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j)$ donde U_j es abierto de $\{0,1\}$ y $J \in Fin(\mathbb{N})$. Entonces, B es un abierto básico de la topología producto. Sean $K = \{k \in J : U_k = \{0\}\}$,

$M = \{m \in J : U_m = \{1\}\}$, entonces

$$B = V(M, K)$$

Así $\tau_p \subseteq \rho$. $\square$

Corolario 1.1.3. *Una base para la topología de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ viene dada por*

$$\{\tilde{V}(a,b) = \{X \subseteq \mathbb{N} : a \subseteq X \wedge b \cap X = \emptyset\} : a, b \in Fin(\mathbb{N}) \wedge a \cap b = \emptyset\}$$

Proposición 1.1.4. *Si $X_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $(X_n) \to X$, y además si $a \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \in X$.*

Demostración. Sean $A, B \in Fin(\mathbb{N})$ disjuntos tal que $X \in \tilde{V}(A, B)$, es decir, $\exists N \in \mathbb{N}$ para el cual si $n \geq N$ se tiene que $X_n \in \tilde{V}(A, B)$. Esto implica que $A \subseteq X_n$ y $X_n \cap B = \emptyset$ para todo $n \geq N$. Veamos que $a \in X$. Si $a \notin X$, basta escoger $A, B \in Fin(\mathbb{N})$ tal que $X \in \tilde{V}(A, B)$ de tal manera que $a \notin A$, y $a \in B$, luego $X_n \notin \tilde{V}(A, B)$ pues $X_n \cap B \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción al hecho de que $(X_n) \to X$. $\square$

Sea $\mathcal{U}$ cualquier familia de subconjuntos de un conjunto X, entonces $\tau(\mathcal{U})$ denotará la topología generada por la subbase $\mathcal{U}$. Un refinamiento o extensión de una topología es cualquier topología más fina que $\tau(\mathcal{U})$.
El siguiente teorema se encuentra detallado en el teorema 6.58 del libro de topología Élder Camargo Javier y Villamizar. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020.

Teorema 1.1.5. *(Teorema de Alexander). Sea X un espacio topológico. Si existe una subbase S de X tal que toda cubierta con abiertos de S admite una subcubierta finita, entonces X es compacto.*

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio topológico, se dice que X es un espacio $\boldsymbol{T_0}$ si dados x y z en X con $x \neq z$, existe una vecindad de uno de ellos que no contiene al otro.*

Definición 1.1.7. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un espacio $\boldsymbol{T_1}$ si dados x y z en X con $x \neq z$, existen abiertos U, V con $x \in U$, $z \in V$ tales que $z \notin U$ y $x \notin V$.*

Teorema 1.1.8. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *es espacio* T_1;

(ii) $\{x\}$ *es cerrado de* X, *para cada* $x \in X$;

(iii) Si $A \subseteq X$, entonces $A = \bigcap\{U : U$ es abierto y $A \subseteq U\}$.

Demostración. *(i)* implica *(ii)* Supongamos primero que X es un espacio T_1. Sea $x \in X$. Probemos que $\{x\}$ es cerrado. Sea $y \in X \setminus \{x\}$. Como X es T_1, existe V abierto tal que $y \in V$ y $x \notin V$. Así, $V \subseteq X \setminus \{x\}$. Como y es un punto arbitrario de $X \setminus \{x\}$, $X \setminus \{x\}$ es abierto y por tanto $\{x\}$ es cerrado.

(ii) implica *(iii)* Sea $A \subseteq X$. Claramente, $A \subseteq \bigcap\{U : U$ es abierto y $A \subseteq U\}$. Ahora si $x \notin A$, entonces $X \setminus \{x\}$ es un abierto de X tal que $A \subseteq X \setminus \{x\}$. Así $x \notin \bigcap\{U : U$ es abierto y $A \subseteq U\}$ y por tanto, $\bigcap\{U : U$ es abierto y $A \subseteq U\} \subseteq A$. De lo que se sigue que $A = \bigcap\{U : U$ es abierto y $A \subseteq U\}$.

(iii) implica *(i)* Sean x y z en X dos puntos diferentes. Como $\{x\} = \bigcap\{U : U$ es abierto y $x \in U\}$, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $z \notin U$. De la misma forma se muestra que existe un abierto V de X tal que $z \in V$ y $x \notin V$. Así, X es T_1 y completamos la demostración. $\square$

Definición 1.1.9. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio de **Hausdorff** o T_2, si para cada $x,\ y$ puntos diferentes de X, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 1.1.10. *Un espacio topológico X es llamado **regular**, si dados un cerrado A en X y un punto $b \in X \setminus A$, existen abiertos disjuntos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $b \in V$. Diremos que X es un espacio $\boldsymbol{T_3}$, si X es regular y T_1.*

De la Definición tenemos que T_3 implica T_2.

Proposición 1.1.11. *Dado un espacio topológico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es regular.

(ii) Dados $x \in X$ y U abierto tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. *(i)* implica *(ii)* Supongamos primero que X es regular. Sean $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$. Entonces U^c es cerrado de X y $x \notin U^c$. Como X es regular, existen V y W abiertos disjuntos de X tales que $x \in V$ y $U^c \subseteq W$. Nótese que $\overline{V} \cap W = \emptyset$. De lo anterior, fácilmente se sigue que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(ii) implica *(i)* Sea A un cerrado de X y $x \notin A$, veamos que existen abiertos disjuntos $U,\ V$ tal que $A \subseteq U$ y $x \in V$. Como $x \in A^c$, por hipótesis existe V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A^c$, pues A^c es abierto. Note que $A \subseteq \overline{V}^c = U$ y que $U \cap V = \emptyset$.

□

Definición 1.1.12. *Un espacio topológico X es llamado **normal**, si dados dos cerrados disjuntos A y B, existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Si X es normal y T_1, diremos que X es un espacio $\boldsymbol{T_4}$.*

Observación 1.1.13. *De las definiciones se sigue que si un espacio es T_4 entonces es T_3, si es T_3 entonces es T_2, si es T_2 entonces es T_1 y si es T_1 entonces es T_0.*

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Proposición 1.1.14. *Todo espacio métrico es T_4 y por tanto, normal.*

Demostración. Sean A y B cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, existe $\epsilon_a > 0$ tal que $B(a;\epsilon_a) \cap B = \emptyset$. De la misma manera, para cada $b \in B$, existe $\epsilon_b > 0$ tal que $B(b;\epsilon_b) \cap A = \emptyset$. Sean $U = \bigcup_{a\in A} B(a;\frac{\epsilon_a}{2})$ y $V = \bigcup_{b\in B} B(b;\frac{\epsilon_b}{2})$. Es claro que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que existe $z \in U \cap V$. Entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $z \in B(a;\frac{\epsilon_a}{2}) \cap B(b;\frac{\epsilon_b}{2})$. Supongamos que $\epsilon_a < \epsilon_b$. Así, $d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b) < \frac{\epsilon_a}{2} + \frac{\epsilon_b}{2} < \epsilon_b$, es decir, $a \in B(b;\epsilon_b)$ y contradecimos que $B(b;\epsilon_b) \cap A = \emptyset$. De esto, $U \cap V = \emptyset$ y X es normal. Como todo espacio métrico es T_1 pues los singuletes son cerrados, X es T_4.

□

Proposición 1.1.15. *Los compactos en un espacio de Hausdorff son cerrados.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff y $K \subseteq X$ compacto. Hay que ver que si $x \in K^c$ entonces hay una vecindad V de x que no intercepta a K. Es decir, K^c es abierto. Como X es Hausdorff para cada $k \in K$ existen abiertos disjuntos U_k y V_k de X que contienen a k y a x respectivamente. Los abiertos U_k forman una cubierta abierta de K. Como K es compacto, hay una colección finita $\{U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_n}\}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$. Defina $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$, V es una vecindad de x y que no intercepta a K, ya que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i}^c \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i})^c = V^c$. $\square$

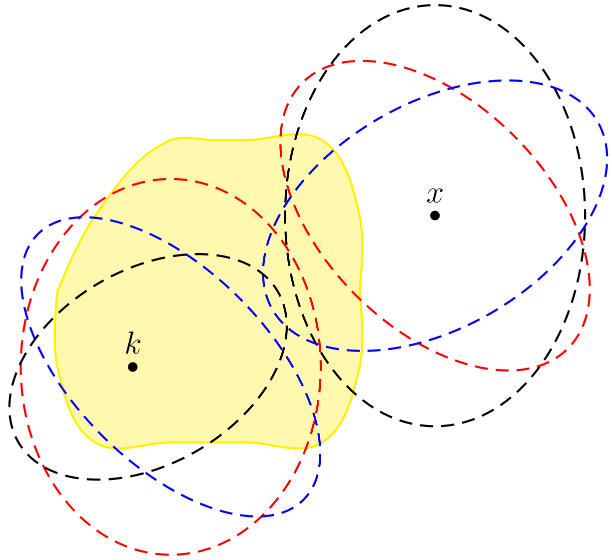

Figura 1.1: Breve descripción gráfica de la demostración.

Proposición 1.1.16. *Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es un compacto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y A un cerrado de X. Entonces para una cubierta abierta $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de A, tome $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{A^c\}$, la cual es una cubierta abierta de X, como X es compacto, existe una colección finita $\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}, A^c\}$ que cubre a X. Note que $\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ es una subcubierta finita de A. $\square$

Proposición 1.1.17. *Los espacios de Hausdorff compactos son normales.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Veamos primero que X es regular. Sea B un cerrado de X y x un punto de B^c. Entonces para cada $b \in B$ existen abiertos disjuntos U_b y V_b que contienen a b y x respectivamente. Como B es un cerrado en un compacto, B es compacto, y como los abiertos U_b forman una cubierta abierta de B hay una colección finita $\{U_{b_1}, U_{b_2}, \ldots, U_{b_n}\}$ que cubren a B. Entonces $U_{b_1} \cup U_{b_2} \cup \ldots \cup U_{b_n}$ y $V_{b_1} \cap V_{b_2} \cap \ldots \cap V_{b_n}$ son abiertos disjuntos que contienen a B y a x respectivamente.

Veamos ahora que X es normal. Sean C y D dos cerrados disjuntos en X. Como X es regular, para cada $d \in D$ existen abiertos disjuntos U_d y V_d que contienen a C y a d respectivamente. Como D es cerrado en X, entonces D es compacto, y como los abiertos V_d forman una cubierta abierta de D existe una colección finita $\{V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_n}\}$ que cubren a D. Entonces $U_{d_1} \cap U_{d_2} \cap \ldots \cap U_{d_n}$ y $V_{d_1} \cup V_{d_2} \cup \ldots \cup V_{d_n}$ son abiertos disjuntos que contienen a C y a D respectivamente.

$\square$

Definición 1.1.18. *Sea* $F = (F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *una familia de subconjuntos de X. Diremos que* F *tiene la propiedad de intersecciones finitas* ***(p.i.f.)****, si* $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ *para cada subconjunto finito* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$.

Proposición 1.1.19. [3] *Sea* X *un espacio topológico. Entonces,* X *es compacto si, y solo si, para cada familia de cerrados* $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *con la p.i.f, se tiene que* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

Demostración. Suponga que X es compacto. Sea $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de cerrados con la p.i.f. Supongamos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$. Nótese que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$ Así, $\{F_\lambda^c : \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta de X. Como X es compacto, existe $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$. tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^c$. De lo que sigue que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = \emptyset$, contradiciendo que $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tiene la p.i.f.

Probemos ahora que X es compacto, sea $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que para todo conjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}$, $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}^c \neq \emptyset$, es decir, $\{U_\alpha^c : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de X con la p.i.f. Luego por hipótesis $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha^c \neq \emptyset,$ pero esto contradice que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Así, existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}^c = \emptyset$ y en consecuencia X es compacto.

□

Un caso especial donde se aplica la Proposición 1.1.19 se presenta cuando consideramos una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados de un espacio compacto tal que $C_{n+1} \subseteq C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Proposición 1.1.20. *Sea* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión encajada* $(C_{n+1} \subseteq C_n)$ *de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo. Si diám*$(C_n) \to 0$ *entonces* $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos un punto $x_n \in C_n$. Como el diám$(C_N) \to 0$, para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que diám$(C_m) < \epsilon$ para todo $m \geq M$. Y dado que $x_i,\ x_j \in C_M$ para $i, j \geq M$, $d(x_i, x_j) < \epsilon$, es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio es completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto x. Ahora, para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_k, x_{k+1}, \dots)$ también converge a x. Por lo tanto $x \in \overline{C_k} = C_k$, es decir, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$, como se quería probar. De hecho dado que diám$(C_N) \to 0$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ solo contiene al punto x, ya que si $y \neq x$ está en $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$, $0 < d(x, y) \leq$diám(C_N), lo que es un absurdo. □

---

[3] James R Munkres. *Topología*. 2.ª ed. Pearson/Prentice-Hall, 2002.

La proposición que se presenta a continuación es importante para la comprensión de un ejemplo posterior, en específico el ejemplo 2.4.1. La idea de la demostración se ha tomado del artículo [4] publicado por David P. Bellamy.

Proposición 1.1.21. *Sea $X = (0, 1]$ con la topología usual, si Y es una compactificación Hausdorff de X, entonces $Y \setminus X$ (residuo) es conexo.*

Demostración. Sea $A_n = (0, \frac{1}{n}]$, entonces

$$Y \setminus X = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup (Y \setminus X)).$$

Afirmamos que $A_n \cup (Y \setminus X) = \overline{A_n}$. Lo supondremos y concluimos la demostración. Sabemos que $\overline{A_n}$ es conexo y además se tiene que

$$Y \setminus X = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup (Y \setminus X)) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}.$$

De donde $Y \setminus X$ es conexo por ser la intersección de una secuencia encajada de conjuntos compactos conexos.

Veamos entonces que $A_n \cup (Y \setminus X) = \overline{A_n}$. Para eso mostremos primero que $\overline{A_n} \subseteq A_n \cup (Y \setminus X)$. Dado que $(1/n, 1]$ es un conjunto abierto en X, esto implica que también es abierto en Y, luego $(1/n, 1]^c = A_n \cup (Y \setminus X)$ es cerrado, de ahí que $\overline{A_n} \subseteq A_n \cup (Y \setminus X)$, pues $\overline{A_n}$ es el cerrado más pequeño que contiene A_n.

Mostremos ahora la otra inclusión. Es claro que $A_n \subseteq \overline{A_n}$, veamos entonces que $(Y \setminus X) \subseteq \overline{A_n}$. Supongamos que existe $x \in Y \setminus X$ tal que $x \notin \overline{A_n}$, es decir, existe V abierto que contiene a x tal que $V \cap A_n = \emptyset$. Como X es denso en Y, se debe tener entonces que $V \cap (1/n, 1] \neq \emptyset$. Definiremos una red convergente a x. Para cada W abierto que contenga a x, sabemos que $W \cap V \cap (1/n, 1] \neq \emptyset$. Fijemos $x_W \in W \cap U \cap (1/n, 1]$. Sea

$$D_x = \{O \subseteq \tau : x \in O\}$$

equipado con el orden $U \leq V$ si y solo si $U \supseteq V$. Observe que $(D_x, \leq)$ es un conjunto dirigido. Definamos $e : D_x \to V$, como $e(W) = x_W$. No es difícil ver que $e \to x$. Como Y

[4] David P. Bellamy. “A non-metric indecomposable continuum”. En: *Duke Mathematical Journal* 38.1 (1971), págs. 15-20.

es Hausdorff y $[1/n, 1]$ es compacto de Y (por ser compacto en X), entonces $[1/n, 1]$ es cerrado en Y. Luego $x \in [1/n, 1]$, lo que contradice que $x \notin X$. De donde se debe tener que $x \in \overline{A_n}$.

$\square$

1.2. Espacios Polacos y conjuntos de Borel

Un espacio topológico X se dice **separable** si tiene un subconjunto denso numerable, y es llamado **completamente metrizable** si su topología es inducida por una métrica completa.

Definición 1.2.1. *Un espacio **polaco** es un espacio topológico separable y completamente metrizable.*

Ejemplo 1.2.2. *Cualquier espacio discreto numerable es polaco. En particular,* $\mathbb{N}$ *y* $\{0, 1\}$ *con la topología discreta son polacos.*

Ejemplo 1.2.3. *El producto de una cantidad numerable de espacios polacos es polaco. En particular,* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*, el cubo de Hilbert* $([0, 1]^{\mathbb{N}})$*, y el espacio de Cantor* $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *son polacos.*

Teorema 1.2.4. [5] *(Alexandrov) Todo subconjunto* G_δ *de un espacio polaco es polaco.*

Definición 1.2.5. *Un álgebra en un conjunto X es una colección* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *tal que*

(i) $X \in \mathcal{A}$*;*

(ii) Siempre que $A \in \mathcal{A}$ *también* $A^c \in \mathcal{A}$*; es decir,* $\mathcal{A}$ *es cerrado bajo la operación complemento; y*

(iii) $\mathcal{A}$ *es cerrado bajo uniones finitas.*

Note que $\emptyset \in \mathcal{A}$, si $\mathcal{A}$ es un álgebra. Un álgebra cerrada bajo uniones numerables es llamada una σ**-álgebra**.

---

[5] Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Springer-Verlag, 1998.

Ejemplo 1.2.6. *Sea X un conjunto infinito y*

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C \ o \ C^c \ es \ finito\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es un álgebra que no es una σ-álgebra.

Ejemplo 1.2.7. *Sea X un conjunto no numerable y*

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C \ o \ C^c \ es \ numerable\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra.

Definición 1.2.8. *Si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de un conjunto Ω, entonces la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, denotada por $\sigma(\mathcal{A})$, está definida como*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}(\mathcal{A})} \mathcal{F},$$

donde $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ y \ \mathcal{F}$ es una σ-álgebra en $\Omega\}$

Definición 1.2.9. *La σ-álgebra de Borel en un espacio topológico S se define como la $\sigma-$álgebra generada por la colección de conjuntos abiertos en S. Conjuntos de esta σ-álgebra son llamados conjuntos de borel. Denotaremos a la colección de borelianos como $\mathcal{B}(S, \tau)$.*

Un **espacio medible** es un par ordenado $(X, \mathcal{A})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra. Una función f de un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ a un espacio medible $(Y, \mathcal{C})$ es llamada medible si $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ para cada $C \in \mathcal{C}$. Un **isomorfismo** es una biyección bimedible. El caso particular que más nos interesa es cuando las σ-álgebras involucradas son las de los borelianos. En este caso diremos que $f : X \to Y$, con X y Y polacos, es Borel medible, si la preimagen de todo boreliano es boreliano.

Proposición 1.2.10. *Sea X un espacio topológico, y sea $Y \subseteq X$ con la topología que hereda de X, entonces $\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$.*

Demostración. Como $\{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$ contiene todos los abiertos de Y, y es $\sigma-$álgebra en Y, se sigue que $\mathcal{B}(Y) \subseteq \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$ pues $\mathcal{B}(Y)$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene todos los abiertos de Y.
Sea $i : Y \to X$ la función identidad, que claramente es continua, por lo tanto, $i^{-1}[A]$ es Borel de Y para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, y dado que $i^{-1}[A] = A \cap Y$ se tiene que $\{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\} \subseteq \mathcal{B}(Y)$.

□

Definición 1.2.11. *X tiene **estructura estándar de Borel** si la $\sigma-$álgebra de Borel de X es isomorfa a la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco.*

1.3. Conjuntos magros y propiedad de Baire

Definición 1.3.1. *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice **denso en ninguna parte**, si el interior de su clausura es vacío.*

Observación 1.3.2. *Si A es denso en ninguna parte en un espacio topológico X, entonces $\overline{A}$ es denso en ninguna parte.*

Definición 1.3.3. *Sea X un espacio topológico, y $A \subseteq X$.*

*(i) A es **magro** (primera categoría) si existe una colección $\{A_n : n \in \omega\}$ de densos en ninguna parte tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.*

*(ii) A es **comagro** (residual) si A^c es magro.*

*(iii) A es **no magro** (segunda categoría) si A no es magro.*

Definición 1.3.4. *Sea X un espacio topológico, un conjunto $A \subseteq X$ tiene la **propiedad de Baire** si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A\Delta U$ es magro.*

Ejemplo 1.3.5. *Todo abierto de un espacio topológico X tiene la propiedad de Baire, pues si U es abierto $U\Delta U = \emptyset$, y $\emptyset$ es magro.*

Teorema 1.3.6. [6] *Sea X un espacio topológico. La colección de todos los conjuntos de X con la propiedad de Baire es igual a la σ-álgebra que contiene a todos los abiertos y a todos los magros.*

Corolario 1.3.7. *Los borelianos de X tienen la propiedad de Baire.*

Definición 1.3.8. *Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X \times Y$. Definimos*

(i) $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\},$ para $x \in X$.

(ii) $A^y = \{x \in X : (x, y) \in A\},$ para $y \in Y$.

Lema 1.3.9. [6] *Sea X un espacio topológico y Y un espacio métrico separable, $A \subseteq X\times Y$. Si A es denso en ninguna parte, entonces $\{x \in X : A_x \; es\ denso\ en\ niguna\ parte\}$ es comagro.*

---

[6] C. A. Di Prisco y C. Uzcátegui Aylwin. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Primera edición. Ediciones Uniandes, 2020.

Corolario 1.3.10. [6] *Sean X y Y espacios métricos separables y $M \subseteq X \times Y$ magro. Entonces*

$$\{x \in X : M_x \text{ } es \text{ } magro\} \text{ } es \text{ } comagro.$$

Lema 1.3.11. [6] *Sean X y Y espacios métricos separables. $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Entonces $A \times B$ es magro si y solo si A es magro o B es magro.*

Proposición 1.3.12. *Sea X un espacio topológico y suponga que $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire. Entonces, o A es magro o existe un abierto no vacío U en el cual A es comagro.*

Teorema 1.3.13. [6]*(Teorema de Kuratowski-Ulam) Sean X y Y espacios métricos separables y $A \subseteq X \times Y$ con la propiedad de Baire.*

(i) $\{x \in X : A_x \text{ } tiene \text{ } la \text{ } propiedad \text{ } de \text{ } Baire\}$ *es comagro en X y* $\{y \in Y : A^y \text{ } tiene \text{ } la \text{ } la \text{ } propiedad \text{ } de \text{ } Baire\}$ *es comagro en Y.*

(ii) A *es magro si y solo si* $\{x \in X : A_x \text{ } es \text{ } magro\}$ *es comagro en X si y solo si* $\{y \in Y : A^y \text{ } es \text{ } magro\}$ *es comagro en Y.*

(iii) A *es comagro si y solo si* $\{x \in X : A_x \text{ } es \text{ } comagro\}$ *es comagro en X si y solo si* $\{y \in Y : A^y \text{ } es \text{ } comagro\}$ *es comagro en Y.*

1.4. Espacio Baire y teorema punto fijo de Banach

Un espacio topológico X es un **espacio Baire** si la intersección numerable de subconjuntos abiertos densos de X es un subconjunto denso de X. En esta sección mostraremos el teorema de categoría de Baire que afirma que todo espacio topológico completamente metrizable (o compacto Hausdorff) es un espacio Baire.

Proposición 1.4.1. *X es Baire si, y solo si la unión numerable de conjuntos cerrados de X, cada uno de ellos con interior vacío tiene interior vacío.*

Demostración. Suponga que X es Baire y sea $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de cerrados con interior vacío, veamos que $\bigcup F_n$ tiene interior vacío. Note que la colección $\{X \setminus F_n : n \in \mathbb{N}\}$, es una colección de abiertos densos de X, ya que $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus F_n^\circ = X$. Luego, por hipótesis, $\bigcap X \setminus F_n$ es denso, es decir, $\bigcup F_n$ tiene interior vacío.
La recíproca se prueba de forma análoga. □

Ejemplo 1.4.2. *El conjunto $\mathbb{N}$ con la topología de complementos finitos es un espacio que no es Baire.*

Ejemplo 1.4.3. *$\mathbb{Q}$ no es un espacio Baire. Cada $\{x\}$ en $\mathbb{Q}$ es cerrado y tiene interior vacío en $\mathbb{Q}$. Sea (q_n) una numeración de $\mathbb{Q}$. Entonces $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}) = int(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, el cual no es vacío.*

Teorema 1.4.4. ***(Teorema de la categoría de Baire)*** *Si X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo entonces X es un espacio Baire.*

Demostración. Dada una familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos, queremos probar que su unión $\bigcup A_n$ tiene también interior vacío en X. Así dado un abierto W_0 de X, debemos encontrar un punto $x \in W_0$ que no pertenezca a ninguno de los conjuntos A_n. Construiremos una familia $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos de X con las siguientes propiedades:

(i) $\overline{W_n} \cap A_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\overline{W_n} \subseteq W_{n-1}$.

(iii) diám(W_n)$< \frac{1}{n}$, en el caso que X sea métrico.

Supongamos que hemos definido una familia con esas propiedades y completemos la demostración. Afirmamos que la intersección $\bigcap \overline{W_n} \neq \emptyset$, de lo que se concluye el teorema pues $\bigcap \overline{W_n} \subseteq W_0$ y $\bigcap \overline{W_n} \cap (\bigcup A_n) = \emptyset$.

En efecto, $\bigcap \overline{W_n}$ no es vacía pues si X es Hausdorff compacto, la sucesión $(\overline{W_n})$ cumple la $p.i.f$, por lo cual $\bigcap \overline{W_n} \neq \emptyset$. En el caso de que X sea un espacio métrico completo usamos la proposición 1.1.20.

Para la construcción de cada W_n, consideremos el primer conjunto A_1. Por hipótesis, $W_0 \nsubseteq A_1$. Podemos elegir un punto $w \in W_0$ que no pertenezca a A_1. La regularidad de X, junto con el hecho de que A_1 es cerrado, nos permite escoger un entorno W_1 de w tal que

$$\overline{W_1} \cap A_1 = \emptyset,$$

$$\overline{W_1} \subseteq W_0.$$

Si X es un espacio métrico, escogemos W_1 satisfaciendo que su diámetro sea menor que 1.

En general, dado un conjunto abierto no vacío W_{n-1}, escogemos un punto de W_{n-1} que no esté en A_n, y entonces elegimos un abierto W_n de dicho punto, verificando que

$$\overline{W_n} \cap A_n = \emptyset,$$

$$\overline{W_n} \subseteq W_{n-1},$$

diám(W_n)$< \frac{1}{n}$, en el caso de que X sea métrico.

Hemos mostrado la existencia de la familia $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ y con esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Definición 1.4.5. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$. Diremos que f es una contracción de Lipschitz si existe $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que*

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

En tal caso la constante r se llama factor de contracción de f.

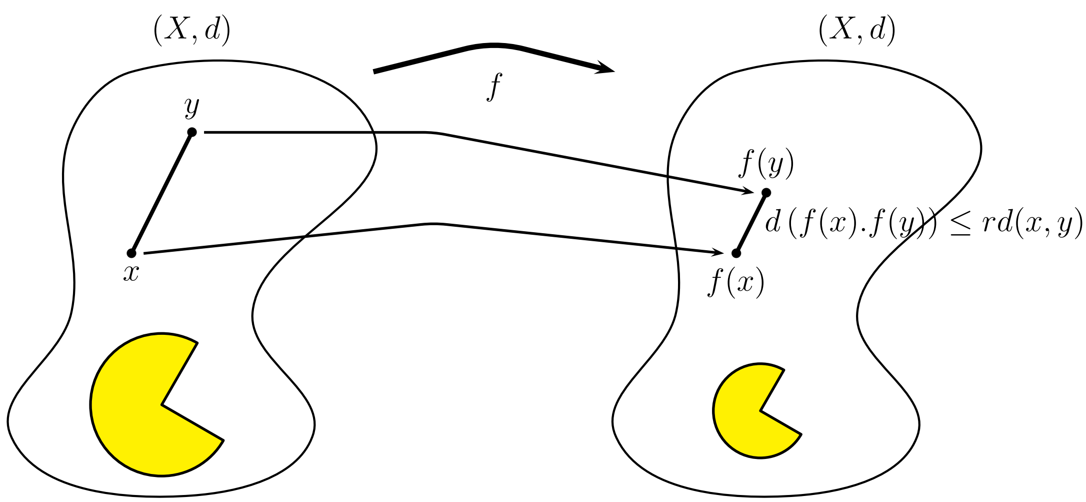

Figura 1.2: Definición de contracción.

De manera intuitiva, una contracción se puede describir como una función que opera de un espacio métrico en sí mismo, que “disminuye distancias”.

Ejemplo 1.4.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{5}x + 3.$

Teorema 1.4.7. ***(Teorema de punto fijo de Banach.)*** *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción de Lipschitz. Entonces f tiene un único punto fijo,* *es decir, existe un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Además, para cualquier $x \in X$ se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x) = p.$$

Demostración. Sea $x_0 \in X$ arbitrario, defina por recursión $x_n = f(x_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Para mostrar esto véase que $d(x_{n+1}, x_n) \leq r^n d(x_1, x_0)$, donde r es el factor de contracción de f. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
&\leq rd(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq r^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq r^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Tomemos $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq n$. Tenemos por la desigualdad triangular que:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq r^{m-1} d(x_1, x_0) + r^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + r^n d(x_1, x_0) \\
&= r^n d(x_1, x_0)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-n-1}) \\
&\leq r^n d(x_1, x_0) \sum_{i=1}^{\infty} r^i \\
&= r^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-r}.
\end{aligned}$$

Si $f(x_0) = x_0,$ no hay nada que mostrar. Suponga que $x_0 \neq x_1$. Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = 0$, tome N suficientemente grande tal que si $m \geq N$, $\frac{r^m}{1-r} < \frac{\epsilon}{d(x_1,x_0)}$.

Así si $m, n \geq N$

$$d(x_m, x_n) \leq r^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-r} < \frac{\epsilon}{d(x_1, x_0)} d(x_1, x_0) = \epsilon$$

Por lo tanto, (x_n) es de Cauchy. Como X es completo, $(x_n) \to p$, para algún $p \in X$.

Mostraremos que p es el punto fijo, es decir, $f(p) = p.$ En efecto, como f es continua (pues, toda contracción es continua), se tiene que $f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$.

Para mostrar que f tiene un único punto, suponga que q es otro punto fijo de f. Luego se tendría:

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq rd(p, q) < d(p, q),$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, existe un único punto fijo.

$\square$

2. Extensiones de espacios *CTS*

En este capítulo mostraremos los resultados fundamentales de esta tesis, que consisten en demostrar los teoremas de extensión aplicables a los espacios compactos, T_1, y segundo numerables (que abreviaremos con las siglas **CTS**). Para ello, comenzaremos estableciendo la definición de una familia hereditaria de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y explorando otras familias relacionadas con esta definición. Este enfoque nos permitirá demostrar que un espacio *CTS* es homeomorfo a algún espacio que se puede definir en función de una de estas familias. Posteriormente, se demostrará que este espacio admite un refinamiento polaco que preserva los conjuntos de Borel.

2.1. Caracterización de los espacios *CTS*

Definición 2.1.1. *Dada $\mathcal{F}$ una familia arbitraria de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, se dice que $\mathcal{F}$ es **hereditaria** con respecto a la inclusión, si satisface que para todo par de conjuntos F_1 y F_2 se cumple que*

$$(F_1 \subseteq F_2 \wedge F_2 \in \mathcal{F}) \implies F_1 \in \mathcal{F}.$$

Veamos dos ejemplos de familias hereditarias.

Ejemplo 2.1.2. $X = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq \text{mín}(A) + 1\}$.

Ejemplo 2.1.3. $X = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

A una familia $\mathcal{F}$ hereditaria se le asocian dos familias de subconjuntos $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$. La primera consiste en todos los conjuntos cuyos subconjuntos finitos están en $\mathcal{F}$ y la segunda consiste en aquellos elementos de $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ que son maximales con respecto a la inclusión. Más precisamente:

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\forall\, n \in \mathbb{N})\big[[1, n] \cap G \in \mathcal{F}\big]\} \tag{2.1}$$

y

$$\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}) = \{H \in \mathcal{G} : (\forall G \in \mathcal{G})[H \subseteq G \to H = G]\}. \tag{2.2}$$

Proposición 2.1.4. [1] *$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es la clausura de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (identificado con $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto).*

Demostración. Denote $\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$, note que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Sean $X \in \mathcal{G}$ y a, b conjuntos finitos tal que $X \in \tilde{V}(a, b)$, es decir, $a \subseteq X$ y $b \cap X = \emptyset$. Como $X \in \mathcal{G}$, $a \in \mathcal{F}$ por como se define a $\mathcal{G}$, de ahí que $\tilde{V}(a, b) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. □

Con base en las familias definidas anteriormente, considere también las familias

$$\mathcal{H}_n(\mathcal{F}) = \{H \in \mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}) : n \ \in \ H\} \tag{2.3}$$

y

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{H}_n(\mathcal{F}) : n \ \in \ \mathbb{N}\}. \tag{2.4}$$

Nota. Cuando no sea necesario no se especificará la familia hereditaria $\mathcal{F}$ para las familias $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$, $\mathcal{H}_n(\mathcal{F})$ y $\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

Definición 2.1.5. *Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es **compacta en el sentido de Marczewski (M-Compacta)** si para toda $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,*

$$\Big[(\forall n)\ (\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B})\ \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset\Big)\ \rightarrow \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset\Big].$$

Esto es, para toda subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ que tenga la propiedad de la intersección finita, $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Proposición 2.1.6. [1] *Si $\mathcal{F}$ es una familia hereditaria arbitraria de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ es M-compacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}' = \{\mathcal{H}_{n_1}, \mathcal{H}_{n_2}, \ldots\} \subseteq \mathcal{H}$ y asuma que $\mathcal{H}_{n_1} \cap \ldots \cap \mathcal{H}_{n_m} \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Tenemos que probar que $\bigcap \mathcal{H}' \neq \emptyset$. Escójase un elemento $H_m \in \mathcal{H}_{n_1} \cap \ldots \cap \mathcal{H}_{n_m}$.

Como $\mathcal{G}$ es cerrado en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, podemos encontrar una subsucesión $(H_{m_i})_i$ la cual es convergente para algún $G \in \mathcal{G}$. Tome ahora $H \in \mathcal{G}^{max}$ tal que $G \subseteq H$. Note que $\{n_1, n_2, \ldots\} \subseteq H$ por (1.1.4) y esto implica que $H \in \bigcap \mathcal{H}'$. □

Considere $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$ como espacio topológico tomando

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\} \tag{2.5}$$

como subbase. Se usará la notación $\tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})$ para denotar la topología generada por la subbase $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

La siguiente proposición no la tomamos de las referencias consultadas, y fue demostrada por la gran similitud que creíamos que tenia la definición de la M-compacidad con la compacidad.

Proposición 2.1.7. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{P}(X)$ y considere $S = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ que cumple que $X = \bigcup S$. Sea $\tau(S)$ la topología generada por S, entonces $(X, \tau(S))$ es compacto si, y solo si $\mathcal{A}$ es M-compacta.*

Demostración. Supongamos que A es M-compacta. Para ver que X es compacto, veamos que toda cubierta abierta de X admite una subcubierta abierta finita. Es suficiente probar esto para los abiertos subbásicos (por el Teorema 1.1.5). Sea $\{X \setminus \mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta de X.

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus \mathcal{A}_\lambda.$$

Suponga que para todo $J \in Fin(\mathbb{N})$ se tiene que $X \neq \bigcup_{i \in J} X \setminus \mathcal{A}_{\lambda_i}$, es decir $\bigcap_{i \in J} A_{\lambda_i} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ es M-compacta, y $\mathcal{B} = \{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{A}$ entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus \mathcal{A}_\lambda$. Por lo tanto $X = \bigcup_{i \in I} X \setminus \mathcal{A}_{\lambda_i}$, para algún $I \in Fin(\mathbb{N})$.

Supongamos que $(X, \tau(S))$ es compacto y veamos que $\mathcal{A}$ es M-compacta. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una subfamilia arbitraria, tal que para todo $J \in Fin(\mathbb{N})$ se tiene que $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, donde cada A_i está en $\mathcal{B}$. Como cada A_i es cerrado y la familia $\mathcal{B}$ cumple la $p.i.f$, entonces $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset$, mostrando así que $\mathcal{A}$ es $M - compacta$.

□

Teorema 2.1.8. [1] *Dada $\mathcal{F}$ una familia hereditaria arbitraria de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Entonces $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_\mathcal{F}))$ es un espacio CTS.*

Demostración. Como la subbase es numerable, entonces $\mathcal{G}^{max}$ es segundo numerable. Para ver que es T_1, sean $K_1, K_2 \in \mathcal{G}^{max}$ con $K_1 \neq K_2$. Como K_1 es maximal, existe $l \in K_1 \setminus K_2$, así $K_1 \in \mathcal{H}_l$ y $K_2 \notin \mathcal{H}_l$, es decir, $K_1 \notin \mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_l$ y $K_2 \in \mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_l$.

Para ver que es compacto, usamos el hecho de que $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ es $M\text{-}compacta$ y que la topología en $\mathcal{G}^{max}$ es la generada por la subbase $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ y finalmente por la proposición (2.1.7) $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_\mathcal{F}))$ es compacto.

□

2.2. Teorema de extensión de espacios *CTS*

Ya vimos que los espacios de la forma $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}))$, donde $\mathcal{F}$ es alguna familia hereditaria, son todos *CTS* (ver el Teorema 2.1.8). Ahora mostraremos que todo espacio *CTS* es homeomorfo a uno de ellos.

Teorema 2.2.1. ***(Morayne-Nardzewski, 1994).*** *Sea X un espacio topológico, si X es CTS entonces es homeomorfo a $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}))$ para alguna familia hereditaria $\mathcal{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una base numerable para X y defina

$$\mathcal{C} = \{U^c : U \in \mathcal{U}\}.$$

Sea $\{C_1, C_2, \ldots\}$ una enumeración de $\mathcal{C}$. Considere la siguiente familia

$$\mathcal{F} = \{J \in Fin(\mathbb{N}) : \bigcap \{C_n : n \in J\} \neq \emptyset\}. \tag{2.6}$$

Claramente $\mathcal{F}$ es hereditaria. Las familias $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}^{max}$ son definidas por (2.1) y (2.2). Sea $x \in X$, definamos

$$\phi(x) = \{n : x \in C_n\}.$$

Mostraremos que ϕ es un homeomorfismo entre X y $\mathcal{G}^{max}$.
Dado que X es T_1 y $\mathcal{U}$ es una base para X tenemos que $\bigcap\{C_n : n \in \phi(x)\} = \{x\}$. Para ver que $\phi(x) \in \mathcal{G}$, tome $J \subseteq \phi(x)$ finito, note que

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n \subseteq \bigcap_{j \in J} C_j,$$

de lo que se sigue que $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$. De esto obtenemos que $\phi(x) \in \mathcal{G}$. Para ver que $\phi(x)$ pertenece a $\mathcal{G}^{max}$, suponga que existe $G' \in \mathcal{G}$ que cumple que $\phi(x) \subseteq G'$, con $\phi(x) \neq G'$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ con $k \in G' \setminus \phi(x)$ de tal manera que $x \notin C_k$, pero

$$\bigcap_{m \in G'} C_m \subseteq \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n = \{x\},$$

lo que es una contradicción. Así, $\phi(x) \in G^{max}$. Esto muestra ϕ está bien definida.

Veamos que ϕ es inyectiva, para ello tome $x_1 \neq x_2$, como X es T_1 existen C_m y C_k tales que $x_1 \in C_m \setminus C_k$ y $x_2 \in C_k \setminus C_m$. Por tanto, $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.

Para mostrar que ϕ es sobreyectiva, tome $H \in \mathcal{G}^{max}$, por la definición de $\mathcal{G}$ tenemos que $\bigcap\{C_n : n \in A\} \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito A de H, de ahí que $\bigcap\{C_n : n \in H\} \neq \emptyset$ dado que X es compacto. Si x_1, $x_2 \in \bigcap\{C_n : n \in H\}$ y $x_1 \neq x_2$, entonces existe $C_m \in \mathcal{C}$ tal que $x_1 \in C_m$ y $x_2 \notin C_m$ pues X es T_1. Pero entonces, $H \cup \{m\} \in \mathcal{G}$ lo cual es una contradicción con la definición de $\mathcal{G}^{max}$. De lo cual $\bigcap\{C_n : n \in H\} = \{x\}$ para algún $x \in X$, lo que implica que $H \subseteq \phi(x)$, pero como ambos están en $\mathcal{G}^{max}$, $\phi(x) = H.$

De lo anterior se tiene que ϕ es una función biyectiva de X a $\mathcal{G}^{max}$. Para probar que ϕ es un homeomorfismo es suficiente notar que $\phi(C_n) = \mathcal{H}_n$, ya que esto muestra que ϕ y ϕ^{-1} son funciones cerradas. □

Observación 2.2.2. *Sea X un espacio CTS. El espacio $\mathcal{G}^{max}$ asociado a X en la demostración del teorema 2.2.1 es independiente de la familia $\mathcal{F}$ escogida a partir de la enumeración de los cerrados básicos. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una base numerable para X y defina*

$$\mathcal{C} = \{U^c : U \in \mathcal{U}\}.$$

Sean $\{C_1, C_2, \ldots\}$ y $\{D_1, D_2, \ldots\}$ dos enumeraciones distintas de $\mathcal{C}$. Considere las siguientes familias

$$\mathcal{F} = \{F \in Fin(\mathbb{N}) : \bigcap\{C_n : n \in F\} \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{J} = \{J \in Fin(\mathbb{N}) : \bigcap\{D_n : n \in J\} \neq \emptyset\}.$$

$\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{J})$ son los espacios asociados a estas familias. Por la demostración del teorema 2.2.1, son homeomorfos a X.

2.3. Extensiones Borel estándar

Utilizaremos la caracterización anterior de las topologías *CTS* para demostrar que toda topología *CTS* se puede extender a una polaca sin cambiar los conjuntos Borel.
En la prueba del segundo teorema importante de este capítulo, se usará el siguiente lema que demostraremos primero.

Lema 2.3.1. [1] *Sea X un espacio compacto metrizable y R una relación binaria en X. Si R es un subconjunto cerrado en X^2, entonces el conjunto de todos los elementos maximales (respecto de R) es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. El conjunto de elementos maximales es el siguiente:

$$M = \{x \in X : (\forall y)(x \neq y \implies (x, y) \notin R)\}$$

Ya que X es un espacio métrico compacto, este es segundo numerable. Sea $\mathcal{U} = \{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X.

Veamos que $x \notin M$ si, y solo si existen n, m y z tales que $x \in \overline{U_n}$, $z \in \overline{U_m}$ y $(x, z) \in R$, con $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$.

Si $x \notin M$, existe $z \in X$ tal que $x \neq z$ y $(x, z) \in R$. Como X es Hausdorff, existen abiertos U, V tales que $x \in U$ y $z \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Tome n, m en $\mathbb{N}$ de tal manera que $x \in \overline{U_n} \subseteq U$ y $z \in \overline{U_m} \subseteq V$, ya que X también es regular.
Recíprocamente, suponga que existen n, m y z tales que $x \in \overline{U_n}$, $z \in \overline{U_m}$ y $(x, z) \in R$, con $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$. Entonces, x no es maximal simplemente por definición.

Definamos

$$F_{n,m} = \{x \in X : \exists y(x \in \overline{U_n},\ y \in \overline{U_m}\ \wedge\ (x, y) \in R\ \wedge\ \overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset)\}.$$

Mostremos que los $F_{n,m}$ son cerrados. Sea

$$A_{n,m} = \{(x, y) \in X^2 : x \in \overline{U_n}, y \in \overline{U_m}\ \wedge (x, y) \in R\ \wedge\ \overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset\}.$$

Veamos que este conjunto es cerrado. Sea $x = (\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{A_{n,m}}$, entonces existe $(z_l) \to x$ donde $z_l = (x_l, y_l) \in A_{n,m}$. De ahí que $(x_l) \to \bar{x}$ y $(y_l) \to \bar{y}$. Como $(x_l) \to \bar{x}$, y $x_l \in \overline{U_n}$ para todo $l \in \mathbb{N}$, entonces $\bar{x} \in \overline{U_n}$. Análogamente $\bar{y} \in \overline{U_m}$.
Dado que R es cerrado y $z_l \in R$, se tiene que $x = (\bar{x}, \bar{y}) \in R$, luego $x = (\bar{x}, \bar{y}) \in A_{n,m}$.
Como $A_{n,m}$ es cerrado en un espacio compacto, $A_{n,m}$ es compacto. Luego su proyección en X es compacta, pero su proyección es precisamente $F_{n,m}$. Es decir, $F_{n,m}$ es cerrado.
Finalmente, observe que $M^c = \bigcup F_{n,m}$, es decir, M^c es F_σ, por lo tanto, M es G_δ.

□

Teorema 2.3.2. ***(Morayne-Nardzewski, 1994).*** *Si (X, τ) es un espacio CTS, entonces existe un refinamiento τ' tal que (X, τ') es polaco y los conjuntos de Borel generados por τ' son los mismos que los generados por τ.*

Demostración. En vista del teorema 2.2.1 es suficiente probar el resultado para cada espacio de la forma $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_\mathcal{F}))$ donde $\mathcal{F}$ es una familia hereditaria de conjuntos finitos. Sea $\mathcal{H}_n$ como fue definida en (2.3), entonces

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \in A\} \cap \mathcal{G}^{max}.$$

Observemos que $\mathcal{H}_n$ es cerrado y abierto de $\mathcal{G}^{max}$ con la topología heredada de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$ (donde ρ denota la topología producto). De ahí, esta topología extiende a $\tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})$. Lo que implica que

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \rho).$$

Como los conjuntos $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \in A\} \cap \mathcal{G}^{max}$ son básicos en $\mathcal{G}^{max}$ con la topología heredada y los $\mathcal{H}_n$ son cerrados en $\mathcal{G}^{max}$ con la topología $\tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})$, se tiene que $\rho \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}))$. Es decir,

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})).$$

Por lo tanto, $(\mathcal{G}^{max}, \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}))$ y $(\mathcal{G}^{max}, \rho)$ tienen los mismos borelianos.
Para finalizar la prueba, tenemos por el lema 2.3.1, que $\mathcal{G}^{max}$ es G_δ en el espacio Polaco $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$, y por consiguiente $(\mathcal{G}^{max}, \rho)$ es polaco (por el teorema 1.2.4). □

Usando los teoremas 2.2.1 y 2.3.2, obtenemos.

Corolario 2.3.3. [1] *Cada espacio CTS tiene estructura estándar de Borel.*

2.4. Ejemplos

El siguiente ejemplo muestra que no siempre se puede obtener una extensión Hausdorff y compacta de los espacios *CTS*.

Ejemplo 2.4.1. [1] *Construiremos un espacio CTS donde no todo compacto es cerrado y que no admite un refinamiento compacto y Hausdorff con los mismos borelianos.*
Fijemos $a, b \notin (0, 1]$, $a \neq b$. *Sea*

$$X = (0, 1] \cup \{a, b\}.$$

Definamos las vecindades básicas de a *como los conjuntos de la forma*

$$U_n = \{a\} \cup \bigcup_{i \geq n} (\frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i}),$$

con $n \in \mathbb{N}$. *Y las vecindades básicas de* b *como los conjuntos de la forma*

$$V_n = \{b\} \cup \bigcup_{i \geq n} (\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1}),$$

con $n \in \mathbb{N}$. *Los puntos de* $(0, 1]$ *tienen la base usual. Este espacio no es* T_2 *pero si es CTS.*

Para ver que X es compacto sea $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta de X. Escójanse λ_1 y λ_2 tales que $a \in A_{\lambda_1}$ y $b \in A_{\lambda_2}$. De la definición de los abiertos básicos, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$U_n = \{a\} \cup \bigcup_{i \geq n} \big(\frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i}\big) \subseteq A_{\lambda_1},$$

$$V_m = \{b\} \cup \bigcup_{i \geq m} \big(\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1}\big) \subseteq A_{\lambda_2}.$$

Sin pérdida de generalidad asuma $\frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2n}$. Existen $\lambda_3, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\left\{\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+4}, \ldots, \frac{1}{2m-2}\right\} \subseteq \bigcup_{i=3}^{k} A_{\lambda_i}.$$

De esto, no es difícil ver que

$$\big(0, \frac{1}{2n}\big) \cup \{a, b\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}.$$

Por otro lado, $[\frac{1}{2n}, 1]$ es compacto con la topología usual de $\mathbb{R}$, así existen $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_t$ que cumplen que

$$[1/2n, 1] \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{t} A_{\lambda_i},$$

por lo tanto

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} A_{\lambda_i},$$

es decir X es cubierto por una cantidad finita de elementos del cubrimiento inicial.
X es T_1 y segundo numerable por la forma como se definieron los abiertos básicos. No es T_2 pues no se pueden separar a los elementos a y b por abiertos disjuntos.

Como cualquier extensión compacta y Hausdorff de esta topología debe permanecer igual en $(0, 1]$, esta sería una compactificación de dos puntos de $(0, 1]$ y tal compactificación no existe, ya que el residuo de cualquier compactificación de $(0, 1]$ debe ser conexo, esto por la proposición 1.1.21.
El siguiente conjunto es un ejemplo de un compacto no cerrado en este espacio. Sea

$$M = \left\{\frac{4m-1}{4m(2m-1)} : m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{a\},$$

notemos que para cada $m > 1$ se cumple que

$$\frac{1}{2m+1} < \frac{1}{2m} < \frac{4m-1}{4m(2m-1)} < \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2m-2}.$$

De esto se deduce fácilmente que M es compacto por la manera como se definieron los abiertos básicos que contienen al punto a. Por otra parte, M no es cerrado pues $b \in \overline{M}$.

Proposición 2.4.2. [1] *Sea X el espacio descrito en el ejemplo 2.4.1. Si K es compacto y denso en X, entonces $K = X$.*

Demostración. Observe que $(0, 1]$ es abierto de X, luego $K \cap (0, 1]$ es denso en $(0, 1]$. Afirmamos que $(0, 1] \subseteq K$. En efecto, si no fuera así existe $y \in (0, 1] \setminus K$. Si $y = 1$ tomemos la cubierta $\mathcal{V}$ definida como sigue:

$$\mathcal{V} = \{(0, 1 - 1/m) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{U_2\} \cup \{V_2\}.$$

Es fácil ver que K es cubierto por la colección $\mathcal{V}$. Por la densidad de $K \cap (0, 1]$ en $(0, 1]$, el cubrimiento $\mathcal{V}$ no tendrá subcubrimiento finito.
Si $y < 1$ definiremos también un cubrimiento de K que no tiene subcubrimiento finito. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $y + \frac{1}{n} \leq 1$. Considere la cubierta $\mathcal{U}$ definida como sigue:

$$\mathcal{U} = \{(0, y)\} \cup \{(y + \frac{1}{m}, 1] : m \geq N\} \cup \{U_s\} \cup \{V_t\},$$

donde $\frac{1}{2s} < y$, $\frac{1}{2t-1} < y$ y U_s y V_t están definidos como en el ejemplo 2.4.1.

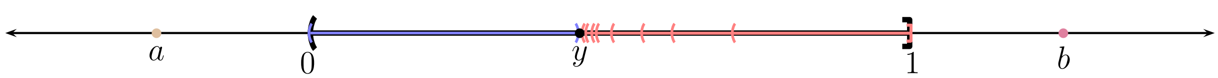

Figura 2.1: Representación del cubrimiento.

De la misma manera, K es cubierto por la colección $\mathcal{U}$ y por la densidad de $K \cap (0, 1]$ en $(0, 1]$, el cubrimiento $\mathcal{U}$ no tendrá subcubrimiento finito.
Veamos que $a, b \in K$. Supongamos por contradicción que no. Si K no contiene a ninguno de los puntos a, b, entonces $K = (0, 1]$, el cual no es compacto con la topología usual. Suponga ahora que solamente uno de los puntos a, b estén en K. Supongamos $K = (0, 1] \cup \{a\}$. Considere el cubrimiento $\mathcal{U}$ de K que consiste de los intervalos $\left(\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1}\right)$, $i \geq 1$, junto con el conjunto U_1 definido en el ejemplo 2.4.1 y el intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$. Entonces $\mathcal{U}$ no tiene un subcubrimiento finito. El caso en el que $K = (0, 1] \cup \{b\}$ se hace de manera análoga. De lo anterior se concluye que $K = X$. $\square$

A continuación se presenta un espacio descrito en [1] el cual no posee una extensión Hausdorff y σ-compacta con los mismos conjuntos de Borel.

Ejemplo 2.4.3. [1] *Sea (X, τ) un espacio CTS que no admite una extensión Hausdorff compacta. Asuma que (X, τ) tiene la propiedad de que X es el único compacto y denso en X. El espacio descrito en el ejemplo 2.4.1 tiene todas estas propiedades.*
Sea $Y = (X, \tau)^\omega$ equipado con la topología producto τ_p. Luego (Y, τ_p) es CTS, pues el producto de compactos es compacto por el teorema de Tychonoff. Tenemos que Y es T_1 y segundo numerable pues el producto numerable preserva esas propiedades.
Mostraremos que Y no posee una extensión Hausdorff y σ-compacta con los mismos conjuntos de Borel que (Y, τ_p).
Sea ρ un refinamiento de (X, τ) como el de la conclusión del teorema 2.3.2. Sea ρ' la topología producto en $(X, \rho)^\omega$. Note que (X^ω, ρ') es polaco y $\tau_p \subseteq \rho'$. Sea γ un refinamiento de τ_p que sea Hausdorff y que preserve los mismos conjuntos de Borel de (Y, τ_p). Mostraremos que γ no es σ-compacto. Para esto, afirmamos que cada conjunto γ-compacto, es ρ'-magro. Presumiremos que hemos demostrado esa afirmación y concluiremos con nuestro objetivo. En efecto, supongamos que $Y = \bigcup_{i=1}^n K_n$ donde cada K_n es γ-compacto. Por la afirmación, cada K_n es ρ'-magro, entonces $\bigcup_{i=1}^n K_n$ tiene interior vacío, pues (X, ρ') es un espacio Baire, lo que es una contradicción.

Ahora mostraremos lo prometido. Sea K un conjunto γ-compacto. Supongamos por contradicción que K es de segunda categoría en ρ'. Como K es cerrado en γ, es boreliano en ρ', pues $\mathcal{B}(X^\omega, \rho') = \mathcal{B}(X^\omega, \gamma)$, teniendo así la propiedad de Baire en ρ'.
Por la proposición 1.3.12, existen conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en ρ tal que el conjunto

$$K \cap ((\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i)),$$

donde $X_i = X$ para todo i, es comagro en el conjunto

$$(\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i)$$

con respecto a la topología ρ'. Como

$$(\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i) \approx X \times (\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i).$$

Sea f un homeomorfismo entre esos espacios y sea $\widehat{K} = f(K)$. Como f es un *homemorfismo, $\widehat{K}$ es comagro en*

$$X \times (\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i).$$

Por el ítem (iii) del teorema 1.3.13,

$$\{d \in (\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i) : \widehat{K}^d \textit{ es comagro en } X\}$$

es comagro en $(\prod_{i=1}^{n} U_i) \times (\prod_{i=1}^{\infty} X_i)$. Sea $e = (e_1, e_2, \cdots)$ tal que $\widehat{K}^e$ es comagro en X. Recordemos que

$$\widehat{K}^e = \{x \in X : (x, e_1, e_2 \ldots, e_n, \ldots) \in \widehat{K}\},$$

es decir, $\widehat{K}^e$ es comagro y además denso en X con la topología ρ (pues ρ es Baire). Esto implica que $\widehat{K}^e$ es también denso en X con la topología τ, dado que ρ es refinamiento de τ.
Mostraremos que $\widehat{K}^e = X$. Para esto, afirmamos que el siguiente conjunto

$$T = \{(x, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots) \in X^\omega : x \in X\}$$

es cerrado en $Y = X^\omega$ con la topología τ_p. Luego T es cerrado en la topología γ. Así, el conjunto $T \cap \widehat{K}$ es cerrado en $\widehat{K}$ con la topología heredada de γ. Dado que $\widehat{K}$ es γ-compacto, $T \cap \hat{K}$ es γ-compacto. Por lo tanto, $T \cap \widehat{K}$ es τ_p-compacto. Considere la función proyección $\pi_0 : (X^\omega, \gamma) \to (X, \tau)$ que es continua pues $\tau_p \subseteq \gamma$. Tenemos que $\widehat{K}^e = \pi_0(T \cap \hat{K})$ es τ-compacto. Así $\widehat{K}^e$ es compacto y denso en (X, τ), lo que implica que $\widehat{K}^e = X$ (por nuestra hipótesis sobre (X, τ)).
Sea γ' la topología cociente sobre X dada por $\pi_0 \restriction T \cap \widehat{K}$, es decir

$$\gamma' = \{V \subseteq X : \pi_0^{-1}(V) \cap (T \cap \hat{K}) \; es \; abierto \; en \; (T \cap \hat{K})\}.$$

Como $\pi_0 \restriction (T \cap \widehat{K})$ es $1-1$, entonces (X, γ') es compacto y T_2. También se tiene que $\tau \subseteq \gamma'$, pues si $V \in \tau$, entonces $\pi_0^{-1}(V) \in \tau_p$, lo que implica que $\pi_0^{-1}(V) \in \gamma$. Esto implica que γ' es un refinamiento Hausdorff y compacto de la topología τ, pero ese refinamiento no existe (por nuestra hipótesis).

2.5. Teorema de Baire

El teorema de categoría de Baire (ver Teorema 1.4.4) enuncia que todo espacio completamente metrizable o compacto Hausdorff es un espacio Baire. Sin embargo, no es cierto que todo CTS sea Baire (véase el ejemplo 2.5.3). Por lo cual resulta interesante caracterizar aquellos espacios topológicos **CTS** que son espacios de Baire. Esto lo hicieron M. Morayne y Ralowski en [2], caracterizando a los espacios *CTS* que son Baire como se muestra a continuación.

Teorema 2.5.1. ***(Morayne-Ralowski, 2023).*** *Sea X un espacio CTS. Entonces, X es un espacio Baire si y solo si cada subconjunto abierto no vacío de X contiene un subconjunto cerrado con interior no vacío.*

Para la demostración de este teorema hace falta el siguiente resultado.

Lema 2.5.2. [2] *Si X es un espacio CTS, entonces cada subconjunto cerrado de X es una intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir, G_δ.*

Demostración. Sea F un cerrado de X y $\mathcal{A}$ una base numerable para X. Escoja $y \in F^c$. Para cada $x \in F$ existe $U_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_x$ y $y \notin U_x$. Además, es claro que $F \subseteq \bigcup_{x\in F} U_x$. Por la compacidad existe una familia finita $\mathcal{A}_y = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Observe que

$$F = \bigcap_{y\in F^c} \big(\bigcup \mathcal{A}_y\big).$$

La prueba finaliza al notar que solo hay una cantidad numerable de familias $\mathcal{A}_y$. Por lo tanto, F es G_δ $\square$

Demostración. **(Teorema 2.5.1)**
En primer lugar, supongamos que cada abierto U de X contiene la clausura $\overline{V}$ de un abierto no vacío V. Mostraremos que X es Baire. Sea W un abierto no vacío de X y $F_1,\ F_2, \ldots$ cerrados de X con interior vacío. Queremos ver que la unión de los $F_i's$ no puede contener a W. Para ello construiremos una sucesión encajada de abiertos V_i tales que

$$V_{i+1} \subseteq \overline{V_{i+1}} \subseteq F_{i+1}^c \cap V_i. \tag{2.7}$$

Aplicando la hipótesis a $U = F_1^c \cap W$ encontramos un abierto no vacío $V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq F_1^c \cap W$. Suponga que para $n \geq 1$ hemos construido la sucesión de abiertos no vacíos $V_1,\ V_2, \ldots, V_n$ tales que cumplen (2.7). Usando nuevamente la hipótesis con $U = F_{n+1}^c \cap V_n$ encontramos un abierto no vacío $V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq F_{n+1}^c \cap V_n$. Con esto concluye la construcción de la sucesión $(V_n)_n$.

De la construcción es inmediato que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset$$

y por la compacidad de X junto con el hecho que $\overline{V_1} \subseteq W$, obtenemos que

$$W \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset.$$

De ahí

$$W \nsubseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

La otra implicación sigue del lema 2.5.2. Más precisamente, cada abierto no vacío U es la unión numerable de cerrados y, como X es Baire, uno de los cerrados debe tener interior no vacío. $\square$

Los espacios *CTS* de cierta manera son topológicamente cercanos a los espacios *Hausdorff*, pues como se mostró en el capítulo 2 una topología *CTS* puede extenderse a una topología de un espacio Polaco cuyos conjuntos de Borel son los mismos que en la topología original. Sin embargo, los siguientes dos ejemplos de espacios *CTS* que no son espacios Baire muestra una diferencia entre los casos T_1 y T_2, ya que todo espacio compacto T_2 es un espacio Baire.

Ejemplo 2.5.3. *Sea $Y = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Considere la topología generada por los conjuntos abiertos usuales contenidos en $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ junto con los conjuntos cofinitos que contienen a 1. Mostraremos a continuación que este espacio es CTS, pero no es Baire.*

Veamos que Y es compacto, para ello sea $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de Y. Luego existe λ_1 tal que $1 \in U \subseteq A_{\lambda_1}$ donde U es un abierto básico que contiene a 1. Por la definición de la topología, U^c es finito. Luego existen λ_i con $2 \leq i \leq n$ tales que

$$U^c = \bigcup_{i=2}^{n} A_{\lambda_i}.$$

Por lo tanto, $Y = U \cup U^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$, es decir, Y es compacto.

Ahora supongamos, por reducción al absurdo, que Y es Hausdorff. Sea $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ y $y = 1$, entonces existen abiertos A, B tal que $x \in A,\ 1 \in B$ con $A \cap B = \emptyset$. Por la manera *en que se definen las vecindades de 1, B^c es finito. Luego B^c tiene interior vacío, pero $x \in A \subseteq B^c$, lo que contradice que B^c tiene interior vacío. Así, Y no es Hausdorff.*

Veamos que Y es T_1. Sean x, $z \in Y$. Si ambos, x y z están en $[0,1) \cap \mathbb{Q}$, usando la topología usual de $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ podemos encontrar subconjuntos A y B de $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ disjuntos y abiertos que contienen a x y z respectivamente. En el otro caso, si $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ y $z = 1$, tómese $N \in \mathbb{N}$ tal que $U = [0, x + 1/N) \cap \mathbb{Q} \subseteq [0,1) \cap \mathbb{Q}$, y sea $V = ([0,x) \cup (x,1]) \cap \mathbb{Q}$. Entonces U y V son abiertos de Y tales que $x \notin V$ y $z \notin U$. Por lo tanto, Y es T_1. Es segundo numerable por como se definieron los abiertos básicos.

Veamos que Y no cumple la caracterización dada en el teorema 2.5.1. Sea U un abierto de Y que no contiene a 1, y $F \subseteq U$ cerrado, entonces $1 \in F^c$, es decir, F es finito, por lo cual F tiene interior vacío.

Ejemplo 2.5.4. *Considere al conjunto $\mathbb{N}$ con la topología de complementos finitos. Es inmediato que este espacio es T_1 y compacto. También como hay una cantidad numerable de abiertos es segundo numerable. Además, existe una cantidad numerable de abiertos densos cuya intersección es vacía, es decir, no es un espacio Baire. En efecto, considere $A_n = \{m : m \geq n\}$, cada uno de estos es abierto denso en $\mathbb{N}$, pero $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.*

Puede surgir la pregunta si la condición Baire impuesta a los espacios T_1 puede hacerlos espacios T_2, en otras palabras ¿puede que los espacios *CTS* que son Baire sean espacios T_2? La respuesta es negativa y a continuación se presenta un ejemplo de un espacio *CTS* que es Baire pero no T_2.

Ejemplo 2.5.5. [2] *Sea $X = [-1,1]$, donde los abiertos contenidos en $(-1,1)$ son los de la topología usual, y las vecindades básicas de -1 y 1 son, respectivamente, los conjuntos de la forma*

$$[-1,p) \cup (q,1), \quad \textit{o} \quad (-1,p) \cup (q,1],$$

donde $p < q$ son racionales del intervalo $(-1,1)$. El espacio X es segundo numerable, compacto y T_1, pero no es T_2 porque no se pueden separar a -1 y 1 por vecindades disjuntas.
Para ver que X es compacto sea $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X. Escójanse $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tales que A_{λ_1} y A_{λ_2} contengan a -1 y 1, respectivamente. De la definición de los abiertos básicos existen racionales p, p', q y q' en $(-1,1)$ tales que

$$[-1,p) \cup (q,1) \subseteq A_{\lambda_1}, (-1,p') \cup (q',1] \subseteq A_{\lambda_2}.$$

Tome $r = \max\{p, p'\}$ *y* $s = \min\{q, q'\}$*. No es difícil ver que*

$$[-1, r) \cup (s, 1] \subseteq A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2}.$$

Ahora $[r, s]$ *es un compacto usual en* $(-1, 1)$*, y como es cubierto por la colección* $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*, existe una cantidad finita* $\lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ *tales que* $[r, s] \subseteq \bigcup_{i=3}^{n} A_{\lambda_i}$*. Por lo tanto,* $X = [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$*, lo que finaliza la prueba de compacidad.*
Finalmente, observe que X *es segundo numerable y* T_1 *por la forma en que se escogieron los abiertos básicos.*
Para ver que X *es Baire usaremos el teorema 2.5.1. Veamos que todo abierto tiene un cerrado con interior no vacío. Sea* U *abierto de* X*. Asumamos primero que* $U \subseteq [-1, 1]$*, luego* U *contiene algún intervalo* $[p, q]$ *donde* p, q *son racionales del intervalo* $(-1, 1)$*. Notemos además que*

$$[p, q] = ([-1, p) \cup (q, 1])^c = \big(([-1, p) \cup (q, 1)) \cup ((-1, p) \cup (q, 1])\big)^c,$$

es decir, $[p, q]$ *es cerrado en* X *y tiene interior no vacío pues contiene el abierto* (p, q)*. Asumamos ahora que* U *es una vecindad básica de* -1*, de la definición es inmediato que* U *contiene a un cerrado* $[r, s]$*. Para el punto* 1 *el razonamiento es el mismo. Por lo tanto,* X *es Baire.*

El siguiente ejemplo muestra que la caracterización de los espacios *CTS* que son espacios Baire dado en el teorema 2.5.1, no se cumple si el espacio no es segundo numerable.

Ejemplo 2.5.6. [2] *Sea* $Y = [0, 1]$*. Considere la topología generada por los conjuntos abiertos usuales contenidos en* $[0, 1)$ *junto con los conjuntos cofinitos que contienen a* 1*. Mostraremos a continuación que este espacio es compacto,* T_1 *y Baire.*

Veamos que Y *es compacto, para ello sea* $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *una cubierta abierta de* Y*. Luego existe* λ_1 *tal que* $1 \in U \subseteq A_{\lambda_1}$ *donde* U *es un abierto básico que contiene a* 1*. Por la definición de la topología,* U^c *es finito. Luego existen* λ_i *con* $2 \leq i \leq n$ *tales que*

$$U^c = \bigcup_{i=2}^{n} A_{\lambda_i}.$$

Por lo tanto, $Y = U \cup U^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$*, es decir,* Y *es compacto.*

Ahora supongamos, por reducción al absurdo, que Y es Hausdorff. Sea $x \in [0,1)$ y $y = 1$, entonces existen abiertos A, B tal que $x \in A,\ 1 \in B$ con $A \cap B = \emptyset$. Por la manera en que se definen las vecindades de 1, B^c es finito. Luego B^c tiene interior vacío, pero $x \in A \subseteq B^c$, lo que contradice que B^c tiene interior vacío. Así, Y no es Hausdorff.
Veamos que Y es T_1. Sean $x, z \in Y$. Si ambos, x y z están en $[0,1)$, usando la topología usual de $[0,1)$ podemos encontrar subconjuntos de $[0,1)$ disjuntos y abiertos A y B que contienen a x y z respectivamente. En el otro caso, si $x \in [0,1)$ y $z = 1$, tómense $N \in \mathbb{N}$ tal que $U = [0, x + 1/N) \subseteq [0,1)$ y $V = [0,x) \cup (x,1]$. Entonces U y V son abiertos de Y tales que $x \notin V$ y $z \notin U$. Por lo tanto Y es T_1. No es segundo numerable pues la colección de abiertos básicos que contienen a 1 es no numerable.

Veamos que Y no cumple la caracterización dada en el teorema 2.5.1. Sea U un abierto de Y que no contiene a 1, y $F \subseteq U$ cerrado, entonces $1 \in F^c$, es decir, F es finito, por lo cual F tiene interior vacío.

Observemos que es Baire, para ello sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de abiertos densos en Y. Como $[0,1)$ es abierto en Y, entonces $\{A_n \cap [0,1) : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de abiertos densos en $[0,1)$, como $[0,1)$ es G_δ en $[0,1]$ con la topología usual, $[0,1) \subseteq Y$ es polaco, luego por el teorema 1.4.4 se tiene que $[0,1)$ es Baire, es decir, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap [0,1)$ es denso en $[0,1)$. Veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en Y. Si no lo es existe W abierto de 1 tal que $W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, es decir $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq W^c$, y por como se definieron las vecindades de 1 esto implica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es finito, lo cual es una contradicción al hecho de que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap [0,1)$ es denso en $[0,1)$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en Y.

2.6. Analogía del teorema de punto fijo de Banach

Sea X un conjunto cualquiera y $f : X \to X$. Denotamos por

$$f^n := f \circ \cdots \circ f : X \to X$$

la composición de f consigo misma iterada n veces. Sea X un espacio compacto T_1. Una función $f : X \to X$ se llama **contracción topológica** si f es una función cerrada y para cada dos puntos distintos $x, y \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n[X]$ está contenido en uno de los conjuntos $X \setminus \{x\}$ o $X \setminus \{y\}$.

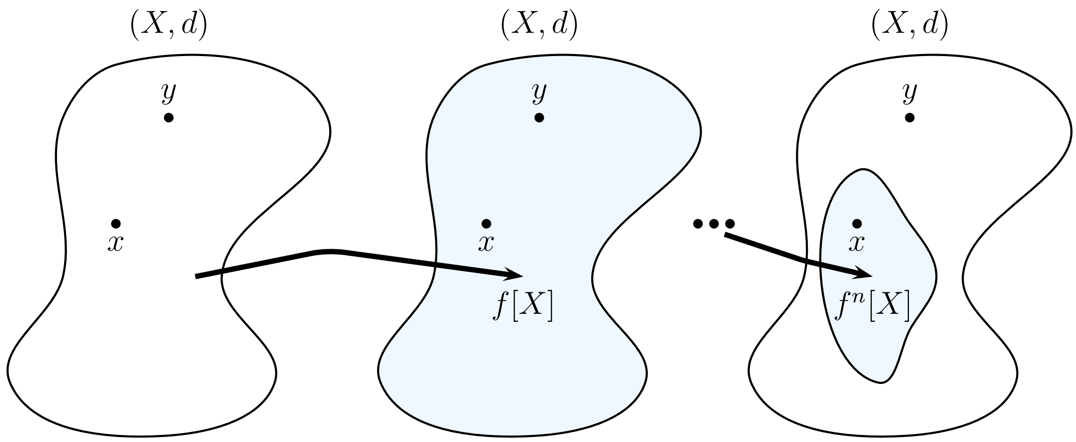

Figura 2.2: Definición de contracción topológica.

Notemos que no toda contracción topológica es Lipschitz, pues no toda contracción topológica es continua (toda contracción de Lipschitz es continua), para ello véase el ejemplo 2.6.4. Pero si el espacio métrico es compacto hay relación entre estas definiciones, la cual se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.6.1. *En un espacio métrico compacto toda contracción de Lipschitz es una contracción topológica.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico compacto, sin pérdida de generalidad, asuma que d es acotada por 1 y $f : X \to X$ una contracción de Lipschitz, es decir, existe $0 \leq r < 1$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

Claramente, toda contracción de Lipschitz es continua y como X es compacto, entonces f es una función cerrada; si $A \subseteq X$ cerrado, entonces A es compacto porque X es compacto, luego $f(A)$ es compacto, en particular $f(A)$ es cerrado.
Sean $x,\, y \in X$, queremos ver que existe $n \in N$ tal que $f^n[X]$ está contenido en uno de los conjuntos $X \setminus \{x\}$ o $X \setminus \{y\}$. Como $\{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$ es una cubierta abierta de X, por lema de Lebesgue, existe $\delta > 0$, tal que cada subconjunto de X de diámetro menor a δ, está contenido en algún miembro de la cubierta. Por la demostración del teorema de punto fijo de Banach (1.4.7), para todo $p,\, q \in X$, se tiene que

$$d(f^n(p), f^n(q)) \leq r^n d(p, q) \leq r^n.$$

Como $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$, $r^m < \frac{\delta}{2}$. Fijemos $z \in X$. Tenemos que

$$f^M[X] \subseteq B(f^M(z), \frac{\delta}{2}).$$

Como $B(f^M(z), \frac{\delta}{2})$ tiene diámetro menor que δ, entonces $f^M[X] \subseteq B(f^M(z), \frac{\delta}{2}) \subseteq X \setminus \{x\}$ o $f^M[X] \subseteq B(f^M(z), \frac{\delta}{2}) \subseteq Y \setminus \{y\}$. □

Un resultado clásico de Banach dice que los espacios métricos completos satisfacen el teorema del punto fijo para las contracciones de Lipschitz (véase el teorema 1.4.7). Para los espacios topológicos compactos T_1 se tiene una analogía.

Teorema 2.6.2. ***(Morayne-Ralowski, 2023).*** *Si X es un espacio compacto T_1, $f: X \to X$ es una contracción topológica, entonces existe un único punto fijo para f.*

Demostración. Sea

$$K := \bigcap_n f^n[X].$$

Veamos que $K \neq \emptyset$. En efecto, se tiene que

$$f[X] \supseteq f^2[X] \supseteq f^3[X] \supseteq \dots,$$

Como los conjuntos $f^n[X]$ son cerrados y X es un espacio compacto, entonces K no es vacío.
Veamos que K tiene un solo elemento. Asuma que $x,\ y \in K$ y $x \neq y$. Por la definición de K tenemos que $x,\ y \in f^n[X]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pero esto contradice el hecho de que f es contracción y que $f^n[X]$ está contenido en alguno de los conjuntos $X \setminus \{x\}$ o $X \setminus \{y\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
Sea x tal que $K = \bigcap\{f^n[X] : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$. Tenemos que x y $f(x) \in K$, luego $f(x) = x$. Si $f(z) = z$ para algún $z \in X$, entonces $z \in K$ y por lo tanto $z = x$. □

En el siguiente teorema se demostrará que otra condición, más natural e intuitiva, aparentemente más fuerte, define equivalentemente una contracción topológica.

Teorema 2.6.3. [2] *Sea X es un espacio compacto T_1. Entonces $f : X \to X$ es una contracción topológica si y solo si f es una función cerrada y para cada recubrimiento abierto $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X existen $\lambda_0 \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$f^n[X] \subseteq U_{\lambda_0}.$$

Demostración. La implicación de derecha a izquierda es evidente, pues los singuletes son cerrados y si $x \neq y$, la familia $\{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$ es una cubierta abierta de X.

Asuma ahora que f es una contracción topológica. Del teorema 2.6.2 existe un único punto fijo x_0 para f. Sea $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de X y tome U_{λ_0} tal que $x_0 \in U_{\lambda_0}$ para algún $\lambda_0 \in \Lambda$. Afirmamos que existe $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $f^n[X] \subseteq U_{\lambda_0}$. Si no sucediese eso, entonces como X es compacto se tendría que el conjunto $\bigcap\{f^n[X] : n \in \mathbb{N}\} \cap U^c_{\lambda_0}$ es no vacío. Pero esto es una contradicción, pues si $y \in \bigcap\{f^n[X] : n \in \mathbb{N}\} \cap U^c_{\lambda_0}$, entonces para ningún $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $f^n[X]$ está contenido en $X \setminus \{x_0\}$ ni en $X \setminus \{y\}$. Esto completa la prueba.

□

El siguiente ejemplo ilustra que las contracciones topológicas no siempre son continuas en espacios métricos compactos y esto hace que sea una noción más general que el de las contracciones Lipschitz.

Ejemplo 2.6.4. [2] *Sea $X = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 2, 3\}$ dotado de la métrica euclídea usual de la recta real. Para $x \in X$, defina $f : X \to \{2, 3\}$ de la siguiente manera:*

$$f(x) := \begin{cases} 2 \quad si \quad x = \frac{1}{n+1}, \text{ para algún } n, \\ \\ 3 \quad si \qquad\qquad x = 0, 2, 3. \end{cases}$$

La función f es una contracción topológica pues $f[A] \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$, para todo $A \subseteq X$ cerrado. Pero f no es continua dado que

$$f\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big) = f(0) = 3 \neq 2 = \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n+1}\Big).$$

Finalmente, el punto fijo de f es 3.

Ejemplo 2.6.5. *Sea X como en el ejemplo 2.5.5. Es decir, $X = [-1, 1]$, donde los abiertos contenidos en $(-1, 1)$ son los de la topología usual, y las vecindades básicas de -1 y 1 son, respectivamente, los conjuntos de la forma*

$$[-1, p) \cup (q, 1), \quad \text{o} \quad (-1, p) \cup (q, 1],$$

donde $p < q$ son racionales del intervalo $(-1, 1)$. Para $x \in X$, defina $f : X \to X$ de la siguiente manera

$$f(x) := x/2.$$

Sea $\mathcal{C} = \{U^c : U \ es \ abierto \ básico\}$. No es difícil ver por como se definió la función que $f[A]$ es cerrado para todo $A \in \mathcal{C}$. De ahí que f es cerrada. En efecto, si A es cerrado de X, $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ con $C_\lambda \in \mathcal{C}$, por la inyectividad de f se tiene que $f[A] = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f[C_\lambda]$.
Ahora verificamos la segunda condición. Sean dos puntos distintos $x, y \in X$ queremos ver que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n[X]$ está contenido en uno de los conjuntos $X \setminus \{x\}$ o $X \setminus \{y\}$. Esto se sigue de que $f^n[X] = [\frac{-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$. De donde f es contracción topológica.

Claramente el punto fijo de f es 0. Además, verificaremos que f es una contracción topológica con la caracterización del teorema 2.6.3. Sea $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un recubrimiento abierto de X. Afirmamos que existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ y $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^m[X] \subseteq U_{\lambda_0}$. En efecto, si escogemos $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $0 \in U_{\lambda_0}$ y escogemos $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq U_{\lambda_0}$, basta tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m[X] = [\frac{-1}{2^m}, \frac{1}{2^m}] \subseteq (-\epsilon, \epsilon) \subseteq U_{\lambda_0}$.

2.7. Preguntas y comentarios

¿Cómo se pueden obtener explícitamente las extensiones de espacios *CTS*? Los Teoremas 2.2.1 y 2.3.2 garantizan la existencia de estas extensiones, y sus demostraciones proporcionan una manera implícita de obtener la extensión polaca. En resumen, los espacios polacos que construimos son subconjuntos G_δ de $2^{\mathbb{N}}$. Sin embargo, no sabemos cuáles de ellos corresponden a extensiones de espacios *CTS*.
Por ejemplo, si comenzamos con un espacio métrico compacto esperábamos que fuese sencillo describir la extensión que produce la demostración de los teoremas 2.2.1 y 2.3.2; sin embargo, no fue así. Nos resultó difícil definir la familia hereditaria $\mathcal{F}$ asociada al espacio, para luego conseguir la extensión. Los siguientes ejemplos que se presentarán dan ejemplo de lo que pudimos hacer con las familias hereditarias para ciertos espacios que son en particular *CTS*.

Ejemplo 2.7.1. *Sea $X = [0,1]$ con la topología usual. Considere*

$$\mathcal{D} = \{[0, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\} \cup \{(\frac{m}{m+1}, 1] : m \in \mathbb{N}\}$$

una base numerable para X. Entonces,

$$\mathcal{D}^c = \{[\frac{1}{n+1}, 1] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[0,a] \cup [b,1] : a, b \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\} \cup \{[0, \frac{m}{m+1}] : m \in \mathbb{N}\}.$$

Si escogemos una enumeración de $\mathcal{D}^c$ de tal manera que $\{[\frac{1}{n+1}, 1] : n \in \mathbb{N}\}$ esté enumerado con el conjunto $A = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$, $\{[0,a] \cup [b,1] : a, b \in \mathbb{Q} \wedge 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$

con $B = \{3k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{[0, \frac{m}{m+1}] : m \in \mathbb{N}\}$ *con* $C = \{3k+2 : k \in \mathbb{N}\}$*. Entonces afirmamos que*

$$\mathcal{F} \supseteq Fin(A \cup B) \cup Fin(A \cup C) \cup Fin(B \cup C).$$

donde $\mathcal{F}$ *es la familia hereditaria asociada a* $\mathcal{D}$ *como en* (2.6)*.*

Ejemplo 2.7.2. *Sea* $Y = \omega + 1 = [0, \omega]$ *y considere la base numerable*

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \omega + 1\} \cup \{(\alpha, \rightarrow) : \alpha \in \omega + 1\} \cup \{(\leftarrow, \beta) : \beta \in \omega + 1\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{B}^c = \{[0, \alpha] \cup [\beta, \omega] : \alpha, \beta \in \omega + 1\} \cup \{[0, \alpha] : \alpha \in \omega + 1\} \cup \{[\beta, \omega] : \beta \in \omega + 1\}$$

Si escogemos una enumeración de $\mathcal{B}^c$ *de tal manera que* $\{[0, \alpha] : \alpha \in \omega + 1\}$ *esté enumerado con* $B = \{3k+1 : k \in \mathbb{N}\}$, $\{[\beta, \omega] : \beta \in \omega + 1\}$ *con* $C = \{3k+2 : k \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{[0, \alpha] \cup [\beta, \omega] : \alpha, \beta \in \omega + 1\}$ *esté enumerado con el conjunto* $A = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$*. Entonces afirmamos que*

$$\mathcal{F} \supseteq Fin(A \cup B) \cup Fin(A \cup C)$$

donde $\mathcal{F}$ *es la familia hereditaria asociada a* $\mathcal{B}$ *como en* (2.6)*.*

¿Cuándo un espacio CTS admite una extensión polaca que sea compacta (o localmente compacta)? O equivalentemente, ¿cuáles espacios polacos son extensiones de algún *CTS*?

Para la pregunta de cuando la extensión es localmente compacta se encontró una equivalencia en la literatura que se basa en el concepto de localmente cerrado.

Definición 2.7.3. *Un subconjunto* A *de un espacio topológico es* ***localmente cerrado*** *si para cada* $x \in A$ *existe una vecindad* V *de* x *tal que* $A \cap V$ *es cerrado en* V*.*

Teorema 2.7.4. *Sea* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es localmente cerrado en* X*.*

(ii) A *es la intersección de un abierto y un cerrado de X.*

(iii) A *es abierto en su clausura.*

Demostración. La demostración de estas equivalencias se puede encontrar en la proposición 5 del libro *General Topology* (N. Bourbaki, 1989, p. 38), en el capítulo 3, sección 3, [7]. $\square$

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en las proposiciones 12 y 13 del libro *General Topology* (N. Bourbaki, 1989, p. 90), en el capítulo 9, sección 7, [7].

Teorema 2.7.5. *Sea Y un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y sea $X \subseteq Y$, entonces, X es localmente compacto si y solo si es localmente cerrado.*

En vista del teorema anterior y de la demostración del teorema 2.3.2, la pregunta sobre cuando la extensión es localmente compacta se traduce en determinar cuándo $\mathcal{G}^{max}$ con la topología heredada de $P(\mathbb{N})$ es localmente cerrado.

2.7.1. Ejemplos de interés. A continuación mostramos algunas propiedades de la familia $\mathcal{G}^{max}$ con respecto a las familias hereditarias descritas en los ejemplos 2.1.2 y 2.1.3. Sin embargo, no sabemos describir el espacio $(\mathcal{G}^{max}, \rho)$ con más precisión. Es decir, ¿es $(\mathcal{G}^{max}, \rho)$ un espacio polaco conocido?

(a) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq \text{mín}(A) + 1\}$.

(i) Sea $G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $|G| = k$, entonces $G \in \mathcal{G}$ si, y solo si $\text{mín}(G) \geq k - 1$.

Demostración. La implicación de derecha a izquierda es directa pues si $D \subseteq G$, entonces $|D| \subseteq |G| \leq \text{mín}(G) + 1 \leq \text{mín}(D) + 1$.

Para la otra implicación supongamos que $\text{mín}(G) < k - 1$. Sea $t_0 = \text{mín}(G)$, y N suficientemente grande tal que $G \cap [1, N] = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}\}$. Luego $t_0 = \text{mín}(G \cap [1, N]) + 1 < k = |G \cap [1, N]|$, es decir $G \notin \mathcal{G}$. $\square$

De hecho no es difícil ver que la familia $\mathcal{G}$ no posee subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

(ii) Sea $G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $|G| = k$, entonces $G \in \mathcal{G}^{max}$ si, y solo si $\text{mín}(G) = k - 1$.

Demostración. Sea $G \in \mathcal{G}^{max}$, como $G \in \mathcal{G}$, entonces $\text{mín}(G) \geq k - 1$, si $\text{mín}(G) > k - 1$, es decir $\text{mín}(G) \geq k$, consideramos a $H = G \cup \{\text{máx}(G) + 1\}$, entonces $\text{mín}(H) = \text{mín}(G) \geq (k + 1) - 1$, es decir $H \in G$, pero eso contradice que $G \in \mathcal{G}^{max}$, pues $G \subseteq H$. Así $\text{mín}(G) = k - 1$.

[7] N. Bourbaki. *General Topology*. Chapters 1-4. Springer-Verlag, 1989.

Si $\min(G) = k-1$, por la proposición anterior $G \in \mathcal{G}$, supongamos que existe $H \in G$ tal que $G \subseteq H$, es decir, $|H| = l \geq k+1$ entonces por la proposición anterior $\min(H) \geq l-1 \geq k$, lo cual es una contradicción porque $k-1 = \min(G) \in H$. $\square$

Notemos entonces que

$$\mathcal{G}^{max} = \{K \subseteq Fin(\mathbb{N}) : (|K| = m \implies \min K = m-1)\}.$$

(iii) $\mathcal{G}^{max}$ es numerable.

(iv) $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}))$ no tiene puntos aislados.

Demostración. sea $H \in \mathcal{G}^{max}$, sea $U = \mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_{n_1} \cap \mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_{n_2} \cap \cdots \cap \mathcal{G}^{max} \setminus \mathcal{H}_{n_m}$ un abierto subbásico que contiene a H, es decir, $n_1, \ldots, n_m \notin H$. Defina $H' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \max\{a_k, n_1, n_2, \ldots, n_m\} + 1\}$ donde $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Note que H' está en U y $H' \in \mathcal{G}^{max}$.

$\square$

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define la siguiente familia hereditaria $\mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq n\}$, entonces las familias asociadas como en 2.1 y 2.2 son:

$$\mathcal{G}(J) = \mathcal{J}$$

$$\mathcal{G}^{max}(J) = \{\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} : |A| = n\}.$$

Bibliografía

Bellamy, David P. “A non-metric indecomposable continuum”. En: *Duke Mathematical Journal* 38.1 (1971), págs. 15-20 (vid. pág. 17).

Bourbaki, N. *General Topology*. Chapters 1-4. Springer-Verlag, 1989 (vid. pág. 47).

Camargo Javier y Villamizar, Élder. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020 (vid. pág. 12).

Morayne, M. y R. Ralowski. “The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in T1 compact spaces”. En: *Bulletin Des Sciences Mathématiques* 183 (2023). DOI: `10.1016/j.bulsci.2023.103231` (vid. págs. 10, 37, 39, 40, 43, 44).

Morayne, M. y C. Ryll-Nardzewski. “Refinements of T1, compact and second countable topologies”. En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: `10.1016/0166-8641(94)90016-7` (vid. págs. 10, 26-28, 30, 32, 34, 35).

Munkres, James R. *Topología*. 2.ª ed. Pearson/Prentice-Hall, 2002 (vid. pág. 16).

Prisco, C. A. Di y C. Uzcátegui Aylwin. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Primera edición. Ediciones Uniandes, 2020 (vid. págs. 20, 21).

Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Springer-Verlag, 1998 (vid. pág. 18).