Comprensión del concepto de dependencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Trabajo de grado para Optar al título de Magister en Educación Matemática

Director:

Solange Roa Fuentes

Doctora en Matemática Educativa

Codirectora:

Dra. Darly Kú Euan

Doctora en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2020

Dedicatoria

A mis papás Rafael Enrique Ballesteros Tolosa y Olga María Gualdrón Rondón, y a mi hermano Rafael Enrique Ballesteros Gualdrón, que son el pilar de mi vida.

Agradecimientos

A mis padres, que son el motor de mi vida. Como hija suya solo deseo enorgullecerlos y darles felicidad.

A mi novio Omar, que siempre está acompañándome, apoyándome y haciéndome feliz.

A mi hermano Rafael, que ha estado conmigo desde pequeña y ha sido incondicional.

A mi directora Solange Roa Fuentes por su dedicación, apoyo y enseñanzas realizadas durante todo mi proceso de formación.

A mi codirectora Darly Kú por sus aportes y sugerencias realizadas al trabajo.

A mis evaluadores del trabajo Jenny Acevedo y Doris González por sus comentarios, sugerencias y correcciones realizados al trabajo.

A mis compañeros de maestría Alejandra, Alexander, Andrea, Brandon y Hellen por sus observaciones y sugerencias al proyecto durante nuestra formación académica.

Y finalmente a la Universidad Industrial de Santander por el apoyo económico durante estos dos años para poder desarrollar la maestría en investigación. También a la escuela de Matemáticas y a la división de relaciones exteriores por darme la oportunidad de presentar el trabajo de investigación en diferentes escenarios, la cual fue una oportunidad muy enriquecedora e inolvidable.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Comprensión del concepto de dependencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año*

Autor: Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón**

Palabras clave: Didáctica del álgebra, objetos concretos, Objetos abstractos, teoría APOE, dependencia lineal.

Descripción:

Se presenta una investigación que diseña una descomposición genética validada del concepto de dependencia lineal que parte de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos (numéricos, geométricos y algebraicos) para la construcción de Objetos abstractos (definiciones formales o esquemas) en estudiantes de primer año de universidad. Se fundamenta en la teoría APOE, en particular, resultados presentados en Arnon et al., (2014) que explican la aplicación de Acciones sobre objetos concretos para lograr Objetos abstractos. En álgebra lineal las representaciones geométricas son interpretadas como objetos concretos, que un individuo puede transformar de manera física o mental. Los antecedentes muestran la importancia de potenciar la construcción de relaciones entre diferentes interpretaciones de los Objetos matemáticos, para promover la comprensión en los estudiantes.

La validación de la descomposición genética se dio a partir de aplicar dos veces el ciclo metodologico propuesto por la teoría APOE. En el primer ciclo se buscó mostrar las estructuras y mecanismos mentales que evidencian los estudiantes para construir el concepto de dependencia lineal a partir de investigaciones realizadas anteriormente. En el segundo ciclo, en la fase del análisis teórico se utilizaron los resultados evidenciados en el primer ciclo y teniendo en cuenta la representación geométrica del concepto para diseñar la descomposición genética que finalmente fue utilizada para diseñar las actividades y analizar los datos.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora Solange Roa Fuentes. Coodirectora Darly Kú Euan.

Abstract

Title: Comprensión del concepto de dependencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año*

Author: Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón**

Key Words: Didactics of algebra, concrete objects, abstract Objects, APOS theory, linear dependence.

Description:

We present a research that designs a validated genetic decomposition of the concept of linear dependence that starts from the application of Actions on concrete objects (numerical, geometric and algebraic) for the construction of Abstract Objects (formal definitions or schemes) in first year university students. It is based on the APOS theory, in particular, results presented in Arnon et al., (2014) that explain the application of Actions on concrete objects to achieve Abstract Objects. In linear algebra, geometric representations are interpreted as concrete objects, which an individual can physically or mentally transform. The background shows the importance of encouraging the construction of relationships between different interpretations of Mathematical Objects, to promote understanding in students.

The validation of the genetic decomposition was given by applying twice the methodological cycle proposed by the APOS theory. In the first cycle, we sought to show the mental structures and mechanisms that students evidence in order to construct the concept of linear dependence based on previous research. In the second cycle, in the theoretical analysis phase, the results evidenced in the first cycle were used, taking into account the geometric representation of the concept to design the genetic decomposition that was finally used to design the activities and analyze the data.

---

* Trabajo

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Solange Roa Fuentes. Coodirector Darly Kú Euan.

Introducción

Actualmente en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se desarrollan 32 grupos de álgebra Lineal dirigidos por 23 profesores, que acompañan un aproximado de 1032 estudiantes, de los programas de licenciatura en matemáticas, matemáticas, física, ingeniería, entre otras. Los conceptos construidos en este curso básico (ver Anexo 1, programa del curso), fundamentan el desarrollo de diferentes aplicaciones para cada programa.

Por ejemplo, en el libro de Poole (2011), aparece una aplicación del álgebra lineal en el contexto de la Química. Este consiste en estudiar las características de las estructuras que puede formar el zinc mediante enlaces entre átomos, que se describe a partir de un sistema coordenado, en este caso es necesario elegir la base correcta, que simplifica un problema particular (medir las longitudes de los enlaces entre los átomos, los ángulos entre dichos enlaces, etcétera) (ver *Figura 1*).

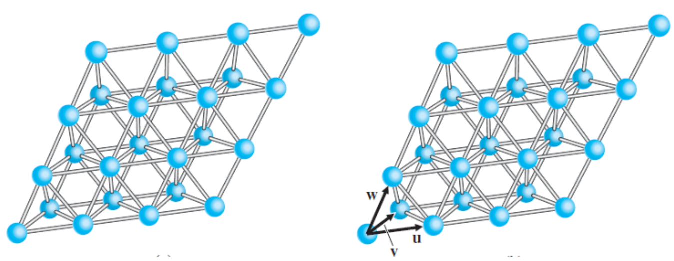


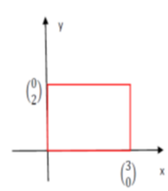
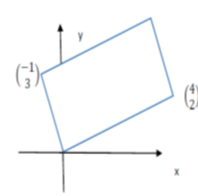
Figura 1. Aplicación del álgebra lineal (Poole, 2011, p.481)

Cada uno de los conceptos involucrados en el contexto descrito, requiere desde una representación diferente que los estudiantes construyan sus interpretaciones. En particular en Matemática Educativa se ha estudiado cómo las diversas interpretaciones de los objetos matemáticos aportan para la comprensión de los principales conceptos y resultados tratados en ella. Por ejemplo, una transformación lineal admite una representación funcional (función definida entre espacios vectoriales de dimensión finita, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), matricial (una matriz $A_f \in M_{m\times n}$) y geométrica (como resultado de la transformación de un vector o una región del plano $\mathbb{R}^2$ o el espacio $\mathbb{R}^3$). En la *Tabla 1* aparece un ejemplo específico para una transformación lineal de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Tabla 1

Diferentes representaciones de una transformación lineal

Pregunta: Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y suponga que $T\binom{0}{2} = \binom{-1}{3}$ y $T\binom{3}{0} = \binom{4}{2}$.

Representaciones	Ítems	Solución
Funcional	a) Encuentre $T\binom{x}{y}$	$T\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$
Matricial	b) Encuentre la matriz de la transformación A_T.	$A_T = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 \\ 2/3 & 3/2 \end{pmatrix}$
Geométrica	c) Todos los vectores $v = (x, y)$ en el rectángulo, tal que $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ se transforman en $A_T v$. ¿Cuál es la forma de la región transformada para todo $A_T v$?	 

Adaptación de lo presentado en González y Roa-Fuentes (2017)

González (2017) muestra que la representación geométrica de la transformación lineal ayuda al estudiante a la construcción del concepto, ya que dicha representación es un Objeto concreto para el estudiante, que puede manipular y le ofrece elementos para caracterizar algunas propiedades que pueden generalizarse al pasar a otra representación de la transformación lineal.

En particular este trabajo de investigación plantea que es fundamental analizar cómo los estudiantes de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander pueden transitar entre las diferentes representaciones de un objeto matemático para comprenderlo; por ejemplo, desde una representación funcional a una matricial, o de una funcional a una geométrica. De cada representación se propone que un estudiante puede construir una interpretación que va estar determinada por su experiencia con diferentes problemas relacionados con el concepto de dependencia lineal.

Por tanto, se propone el diseño de un modelo cognitivo bajo la perspectiva de la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), denominado *descomposición genética*, del concepto de dependencia lineal que señale las principales estructuras, mecanismos y sus relaciones a partir de las diferentes interpretaciones que son adordadas en un curso básico de álgebra lineal.

A continuación, se expone la organización de este documento. El capítulo 1 describe los trabajos desarrollados sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, particularmente relacionados con el concepto de dependencia lineal. Además, se hace énfasis en los conceptos abstractos en el álgebra lineal y su influencia de la geometría en los cursos de álgebra lineal.

El planteamiento del problema se ubica en el capítulo 2, que guía la investigación con base en la problemática que señalan algunos autores sobre la enseñanza del concepto de dependencia lineal. Además, se incluye un estudio realizado en la Universidad Industrial de Santander (Colombia) sobre el rendimiento de los estudiantes al solucionar problemas que implican el concepto de dependencia lineal. Con base en lo anterior se plantean los objetivos propuestos para la investigación.

En el capítulo 3 se describe el marco teórico utilizado, la teoría APOE y su paradigma de investigación que se basa en tres componentes: i) Análisis teórico; ii) Diseño e implementación de actividades; y iii) Recolección y análisis de datos.

El desarrollo de las componentes del Ciclo de investigación de APOE guía la ejecución de esta investigación; cada componente es descrita en el capítulo 4. La sección 4.1 presenta el análisis teórico que se fundamenta en: la revisión de libros de texto, el estudio de trabajos en Educación Matemática del concepto de dependencia lineal desde diferentes perspectivas y en particular desde la visión de APOE y por último en la experiencia docente de las autoras de esta investigación. La sección 4.2 se centra en la descripción del diseño e implementación de las actividades, que consiste en realizar dos implementaciones con estudiantes de álgebra lineal. Finalizando este capítulo, la sección 4.3, trata sobre la recolección y análisis de datos.

La primera aplicación del ciclo metodológico se presenta en el capítulo 5; su propósito es describir las estructuras y los mecanismos mentales que evidencian estudiantes de un curso de álgebra lineal a partir de dos descomposiciones genéticas propuestas por investigaciones anteriores. El análisis se centró en revisar los talleres y entrevistas semi-estructuradas que se diseñaron y se aplicaron con los estudiantes.

En el capítulo 6 se presenta un análisis de la segunda aplicación del ciclo metodológico del que surge el diseño de la descomposición genética del concepto de dependencia lineal. A partir de los resultados encontrados en el capítulo 5 y de un análisis teórico realizado en la sección 6.1, donde se hablan de las Acciones sobre objetos concretos para la construcción de Objetos abstractos.

Finalmente, en el capítulo 7 aparecen las conclusiones, como resultado de la sistematización de las reflexiones del trabajo de investigación. Se muestra una descomposición genética refinada del concepto de dependencia lineal, a partir de los resultados evidenciados en el capítulo anterior. Además, se mencionan recomendaciones didácticas y sugerencias para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

En este capítulo se realiza un reporte de los trabajos en Educación Matemática que se consideran relevantes por estar relacionados con algún aspecto de la presente investigación. Se describen las primeras investigaciones en didáctica del álgebra lineal (sección 1.1) e investigaciones relacionadas con la influencia de la geometría en el desarrollo de los cursos de álgebra lineal (sección 1.2).

1.1. Primeras investigaciones en didáctica del álgebra lineal

Los principales hallazgos publicados por Carlson, Johnson, Lay y Porter (1993) y Zazkis et al. (1996) muestran un primer acercamiento para contribuir a una mejora en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Cada grupo de investigadores con sus particulares posturas buscan definir los objetos concretos que un estudiante del curso de álgebra lineal puede considerar, para a partir de ello construir Objetos abstractos.

En particular, Johnson, Lay y Porter miembros del grupo *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG, por sus siglas en inglés) recomiendan en 1993 comenzar con un curso más concreto fundamentado en matrices y alejarse de la abstracción, por lo menos inicialmente. Dado, que desde su perspectiva, la dificultad que tienen los estudiantes con el curso se fundamenta en la comprensión de los conceptos y no en los algoritmos computacionales. Además, identifican que los conceptos que se trabajan en un curso de álgebra lineal tienen poca conexión con los conceptos que los estudiantes han trabajado previamente.

Por otro lado, Dubinsky (1997) realiza varias observaciones al trabajo planteado por Carlson, donde menciona que lo fundamental no es tener ideas de cómo ser concreto, sino sobre cómo hacer que los estudiantes pasen de lo concreto a lo abstracto. Por ejemplo, Dubinsky analiza un problema propuesto por Carlson, en el cual pide a los estudiantes que muestren que las matrices $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$ son conmutativas; donde A y B son matrices cuadradas de números reales. Respecto a este problema, Dubinsky señala dos tipos de dificultades:

1) Considerar una matriz de números como un solo objeto que puede ser manipulado como un número requiere un nivel de abstracción que muchos estudiantes no son capaces de lograr.
2) Ver un ejemplo de un conjunto con dos operaciones binarias que satisface una colección de axiomas (Dubinsky, 1997, p.7)

Además, Dubinsky (1997), resalta que pensar en la dependencia lineal en términos de los vectores fila o columna de una matriz, no hace el concepto más concreto y comprensible para los estudiantes. Ya que, para la mayoría de ellos, una fila o una columna se considera como una lista de números, que no se concibe fácilmente como un objeto en sí mismo que pueda estar en conjunto con otros objetos similares.

1.2. La influencia de la geometría en los cursos de álgebra lineal

Parraguez y Bozt (2012) analizan bajo la teoría de los modos de pensamiento, el razonamiento que muestran los estudiantes universitarios a partir de lo teórico o desde lo práctico al trabajar con los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y la solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Además, identifican las relaciones que se establecen entre dichos conceptos. Los autores utilizan para el análisis las respuestas de un cuestionario de 8 preguntas, obtenidas por 7 estudiantes de licenciatura en matemáticas y pedagogía en matemáticas que cursaban la asignatura de álgebra lineal en una universidad de Chile.

Dentro de las conclusiones obtenidas en este proyecto, Parraguez y Bozt (2012) encontraron que el modo de pensamiento que prevalece en los estudiantes es el Analítico-Aritmético (AA), ya que los estudiantes tienen una fuerte tendencia al modo AA para enfrentar los problemas, a pesar de que algunos problemas tengan un enfoque Sintético–Geométrico (SG) y Analítico-Estructural (AE). Por ejemplo, un estudiante al resolver la siguiente pregunta del cuestionario:

¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas? Justifique su respuesta.

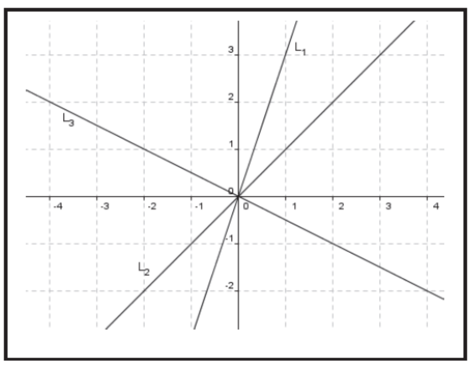


Figura 2. Problema de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Pregunta 4.b del cuestionario propuesto por Parraguez y Bozt (2012, p. 59)

La solución de uno de los estudiantes es determinar las ecuaciones de las rectas y resolver el sistema sustituyendo una de las variables en las otras ecuaciones. Así encuentra que $x = 0$ e $y = 0$ (ver *Figura 3)*. En el análisis de la respuesta de este estudiante Parraguez y Bozt (2012) concluyen que no tiene una concepción geométrica clara de solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que solo utiliza la gráfica para determinar las ecuaciones de las rectas.

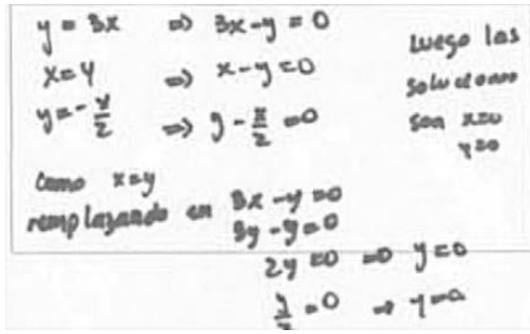


Figura 3. Respuesta del estudiante 4 al problema de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (Parraguez y Bozt, 2012, p.59)

Con base en lo anterior y las respuestas encontradas por otros estudiantes, Parraguez y Bozt (2012) concluyen que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades al trabajar en el modo Sintético–Geométrico (SG). Sin embargo, los estudiantes que sí lograron transitar entre los distintos modos de pensamiento (AA-SG-AE) evidenciaron formas de pensar más relacionadas con la definición formal del concepto.

Por su parte, Aydin (2014) analiza la comprensión que desarrollan 124 estudiantes de matemáticas, física y especializaciones de ingeniería, en una universidad de Turquía, sobre el concepto de dependencia lineal mediante la generación de ejemplos basados en la teoría APOE. Por ejemplo, en la pregunta 1.a del cuestionario se propone: "De un ejemplo de una matriz cuadrada A de 3×3, cuyas filas sean linealmente dependientes" (Aydin, 2014, p.818).

Algunas respuestas de los estudiantes se encuentran en la *Tabla 2*, allí se evidencia que reconocen la dependencia lineal entre tres vectores de diferentes formas:

1) Dos filas iguales: dos vectores que sean múltiplos.
2) Forma escalonada: llegar a una fila de ceros.
3) Combinación lineal: obtener un vector en términos de los otros dos.

Tabla 2

Método de los estudiantes para construir una matriz 3×3 *con filas linealmente dependientes*

Estrategias	*Significado de las estrategias*	*Ejemplos*
Filas iguales	Significa que dos filas de una matriz tienen las mismas entradas.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
Forma escalonada	Utilizando eliminación por Gauss para transformar la matriz en su forma escalonada.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ Forma escalonada: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Combinación lineal	Crear una nueva fila como la suma de las dos filas anteriores.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

Adaptación de Aydin (2014, p.821)

Aydin (2014) plantea que un estudiante que puede generar un ejemplo, acerca de cuándo un conjunto de vectores es linealmente dependiente o no, tiene una construcción abstracta del concepto. Sin embargo, los procedimientos que realizan los estudiantes son específicamente de forma matricial, algunos de ellos se muestran en la Tabla 2. Nosotras creemos que para que un estudiante pueda tener una construcción abstracta del concepto, debe estructurar diferentes interpretaciones de él, no solo se puede quedar con interpretaciones del concepto, porque puede que en efecto no la entienda, sino que esté aplicando un algoritmo de manera repetida.

Contrario al estudio realizado por Aydin (2014), Harel en 2017 encuentra que los estudiantes asocian el concepto de dependencia lineal con coeficientes y constantes proporcionales de dos ecuaciones. Por lo que concluían que las ecuaciones en dichas condiciones son "ecuaciones son linealmente dependientes"; en este caso no es claro si los estudiantes interpretan "las ecuaciones" como un conjunto de vectores. También se evidenció que los estudiantes no recordaban o no conocían la definición de independencia lineal en ningún otro contexto. Harel (2017) muestra que los estudiantes intentaban, sin éxito, recordar el procedimiento para determinar si un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente al formar una matriz A cuyas columnas cuyas columnas están determinadas por los vectores, y verificar si el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única.

Por tanto, Harel destaca que: "los estudiantes parecen haber retenido sobre el concepto de independencia lineal solo residuos de un procedimiento restringido a vectores en $\mathbb{R}^n$, probablemente como resultado de la atención inadecuada a la comprensión conceptual de un curso de álgebra lineal" (Harel, 2017, p.79). Como conclusión el autor menciona que los estudiantes pueden encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, pero no comprenden la relación con los conceptos de dependencia e independencia lineal entre vectores.

Saldanha (1995) propone tres formas diferentes de comprender los conceptos de dependencia e independencia lineal, en donde incluye un enfoque geométrico en una de ellas:

1) Se puede entender el concepto asociándolo con la definición formal:
   - Un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$ en un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sobre una campo $\boldsymbol{K}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow [c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0]$, donde $c_i \epsilon \boldsymbol{K}$.
   - Un conjunto de vectores es linealmente dependiente ⇔ no es linealmente independiente. (Saldanha, 1995, p. 31)
2) Se puede entender el concepto como una relación entre vectores en un conjunto:
   - Un conjunto de (dos o más) vectores $\{ v_1, \dots, v_k\}$ en un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es linealmente dependiente ⇔ uno de los vectores es expresando como una combinación lineal de los otros.
   - Un conjunto de vectores es linealmente independiente ⇔ ninguno de los vectores en el conjunto es expresado como una combinación lineal de otros. (Saldanha, 1995, p. 39-40)
3) Se puede tener una comprensión geométrica de los conceptos de dependencia e independencia lineal:
   - Dos vectores en el plano son linealmente dependientes ⇔ son colineales.

     Tres vectores en el espacio son linealmente dependientes ⇔ son coplanares.
   - Dos vectores en el plano son linealmente independientes ⇔ no tienen la misma dirección.

     Tres vectores en el espacio son linealmente independientes ⇔ no son coplanares. (Saldanha, 1995, p. 43-44)

4) Se puede ver mediante la introducción de ejemplos y problemas. (Saldanha, 1995, p.52)

Saldanha (1995) menciona que tener una comprensión del concepto de dependencia lineal a partir de las diferentes formas mencionadas, sería un logro, pero en general cree que la capacidad de coordinar y sintetizar todo este conocimiento es el camino para una comprensión más profunda de los conceptos.

Según Sierpinska (2000) el álgebra lineal puede ser vista como consecuencia de dos posturas: la primera que considera el rechazo del ingreso de los números a la geometría; y la segunda asociada a la Intuición geométrica. Es decir, por un lado, están los que rechazan la geometría en el álgebra lineal, ya que mencionan que es un obstáculo debido a que no todo en ella se puede interpretar de manera geométrica y por tanto causa dificultad para entender ideas abstractas. Por otro lado, están los que creen que la geometría ayuda a entender en un primer momento algunas ideas que se pueden ir desarrollando en el álgebra lineal, hasta lograr formas más abstractas.

Autores como Oropeza y Lezama (2007) desarrollan una serie de actividades tomando como base la geometría en un primer momento de manera exploratoria, con el fin de llevar a los estudiantes a la comprensión de ideas abstractas que no se pueden ejemplificar geométricamente. Por ejemplo los autores se centran en el hecho de que se puede establecer un isomorfismo, entre el conjunto de polinomios P_n con el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$: “Como $f: ax^2+bx+c \to [a,b,c]$ es lineal y biyectiva, se deduce que $f: P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es isomorfa y entonces se dice que los espacios vectoriales P_n y $\mathbb{R}^{n+1}$ son isomorfos” (Oropeza y Lezama, 2007, p.10). A partir de esto, analizan junto con los estudiantes, tres polinomios linealmente dependientes: $2x^2+x,\ x^2-4x, 8x^2-$

$7x$ que son equivalentes a los vectores $v_1 = [0, 1, -2], v_2 = [0, -4, 1]$ y $v_3 = [0, -7, 8]$ respectivamente. Resolviendo $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = \mathbf{0}$, se obtiene que $c_1 = \frac{25}{7}t$, $c_2 = \frac{-6}{7}t$ y $c_3 = t$, donde t es una variable libre que pertenece al conjunto de los números reales. En la *Figura 4* se puede observar que los vectores están contenidos en un mismo plano y por tanto en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes.

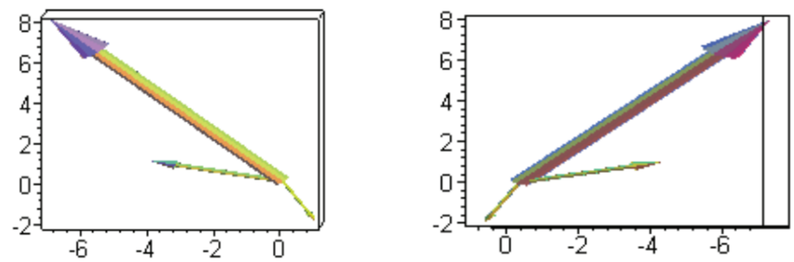


Figura 4. Tomado de Oropeza y Lezama (2007, p. 13).

Oropeza y Lezama (2007) resaltan que las observaciones anteriores ayudan a que los estudiantes identifiquen la equivalencia que se establece al hacer uso de un análisis polinomial con respecto a usar un análisis vectorial en tercera dimensión.

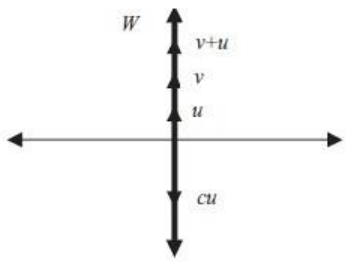
Por otro lado, Hillel (2000) plantea que los modos algebraicos, geométricos y abstractos coexisten y a veces son intercambiables, pero no equivalentes. El modo abstracto usa el lenguaje y los conceptos de la teoría (espacio vectorial, subespacio, dependencia lineal, etc.), mientras que el modo algebraico usa el lenguaje y conceptos de la teoría más específica de $\mathbb{R}^n$ (n-tuplas, matrices, rango, etc.). Finalmente, el modo geométrico usa el lenguaje y conceptos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (segmento de línea dirigida, puntos, planos, etc). Por ejemplo, un vector puede ser representado como una flecha en modo geométrico, como una fila o columna de números o símbolos en modo algebraico, y como un elemento de un espacio vectorial en el modo abstracto.

Así mismo, autores como Konyalioglu et al., (2011) mencionan que los orígenes del álgebra lineal parten de la geometría, especialmente con representaciones vectoriales. Por tanto, enfatizan que en la enseñanza del álgebra lineal deben estar involucradas nociones geométricas. En este sentido, proponen el uso de la visualización como un enfoque de enseñanza. Este enfoque, según la perspectiva de Konyalioglu et al., sustenta que las estructuras geométricas deben estar fuertemente apoyadas por estructuras algebraicas y abstractas. Por ejemplo, el problema que se propone a continuación admite en un primer momento una interpretación geométrica, para caracterizar el problema en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, luego admite una interpretación algebraica para generalizar en $\mathbb{R}^n$ y por último una interpretación abstracta para utilizar el resultado en el concepto de dependencia lineal como se muestra en la tabla 1.

Sea $W = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ ¿W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$?

Tabla 3

Interpretación geométrica, algebraica y abstracta

Geométrica	Algebraica	Abstracta
El subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores de la forma (0, y) como se muestra en la siguiente figura: 	Sea $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ elementos de W y $c \in \mathbb{R}$. Como u y v pertenecen a W se tiene que: $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$ $cu + v = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \ldots, cx_n + y_n)$ Donde: $cx_1 + y_1 = c0 + 0 = 0$ Luego, $cu + v \in W$. Así W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.	Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, y W es un subconjunto de W'. En este caso W' es linealmente dependiente? Cada subespacio de un espacio vectorial debe contener el elemento cero. Si W es un subespacio de un espacio vectorial, W contiene el elemento cero, y entonces, W' contiene el elemento cero. Si uno de los elementos en W' es el elemento cero, entonces el subconjunto W' es linealmente dependiente.

Síntesis sobre lo presentado en Konyalioglu et al., 2011

Finalmente, autores como Hernández y Ayala (2018) investigan sobre cómo extrapolar el significado de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en espacios euclidianos de dimensión mayor que tres, donde dan cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes para extrapolar conceptos como dependencia e independencia lineal a otros espacios vectoriales que no sean $\mathbb{R}^n$. Por tanto hacen falta más investigaciones que den cuenta sobre la importancia de la geometría en el álgebra lineal y cómo esta ayuda en la construcción de la comprensión de los conceptos que se trabajan en ella.

2. Problema de investigación

En este capítulo se habla sobre la dificultad que tienen los estudiantes para trabajar con el concepto de dependencia lineal y algunas investigaciones que aportan a la comprensión de dicho concepto (sección 2.1). También se presentan los resultados iniciales de un primer estudio sobre cómo se desarrolla el concepto por los profesores y estudiantes en la Universidad Industrial de Santander (UIS, Colombia) (sección 2.2).

2.1. Dificultades encontradas en la comprensión del concepto de dependencia lineal

Como se mencionó en el capítulo anterior, el concepto de dependencia lineal se considera como un objeto abstracto en la asignatura de álgebra lineal. Saldanha (1995) menciona que comprender el concepto de dependencia lineal a partir de diferentes enfoques es difícil para el estudiante y por eso no solo se necesita de actividades que motiven su aprendizaje sino también que promuevan acciones mentales que pueden potenciar su construcción.

Trigueros y Possani (2013) por ejemplo, mencionan que es un concepto nuevo que se ve en un primer curso de álgebra lineal, con el cual los estudiantes no se han encontrado en años anteriores; además indican que, a pesar de ello, el concepto de dependencia lineal es un concepto básico para entender temas más avanzados del álgebra lineal (Trigueros y Possani, 2013). Otros investigadores como Stewart y Thomas (2010) dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con el concepto de independencia lineal. Los resultados muestran que un énfasis en los procesos matriciales no ayuda al estudiante a entender el concepto, es decir, se necesita además reflexionar sobre ellos. Sobre el particular, Stewart y Thomas plantearon la siguiente pregunta a un grupo de estudiantes universitarios de segundo año en Nueva Zelanda, que participaban de un curso de matemática general que contenía 40% de álgebra y 60% de cálculo. "Sean $v_1 = (1, -2, -3)$, $v_2 = (-3, 5,7)$, $v_3 = (-4, 5, 6)$ y $H = \{v_1, v_2, v_3\}$. Tenga en cuenta que $v_3 = 5v_1+3v_2$, y que *gen* $\{v_1, v_2, v_3\}$ = *gen* $\{v_1, v_2\}$. Encuentre una base para el subespacio H" (Stewart y Thomas, 2010, p.177). Los autores encuentran dos tipos de respuestas:

1) Un estudiante usó la matriz reducida para intentar escribir una base a partir de ella, pero presenta $\{(1,0,0), (3,1,0)\}$ como respuesta.
2) Un estudiante identificó que v_1 y v_2 son linealmente independientes, luego una base para H puede ser $\{v_1, v_2\}$ o $\{v_2, v_3\}$ y $\{v_1, v_3\}$.

En la solución 1, se puede evidenciar que la falta de comprensión sobre el concepto de independencia lineal, no permitió identificar correctamente una base para H. Ya que para ser una base debe generar a todos los vectores del conjunto y los vectores deben ser linealmente independientes (solución 2).

Por otro lado, en un estudio realizado por Salgado (2015) con estudiantes de licenciatura en economía, que cursaban álgebra lineal en una universidad de México. La investigación realizada por Salgado se desarrolló durante ocho semestres con un promedio de 33 alumnos por cada semestre, los cuales se dividían en grupos de 3 o 4 alumnos cada uno. Los estudiantes hacían parte del programa de licenciatura en economía. A continuación, se presenta una de las actividades desarrolladas por uno de los grupos.

> Eres un joven viajero que deja su tierra natal por primera vez. Tus parientes quisieron ayudarte en tu viaje, así que antes de partir te dieron dos regalos. Te regalaron dos medios de

transporte: una patineta voladora y una alfombre mágica. Tus parientes te informaron que tanto la patineta como la alfombra tienen restricciones a las cuales deben someterse.

- Denotaremos el movimiento de la patineta con el vector $v_1 = (3, 1)$.

Con esto queremos decir que si la patineta avanza “hacia adelante” durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de 3 unidades hacia el este y 1 unidad hacia el norte a partir de su posición inicial.

- Denotaremos el movimiento de la alfombra mágica por el vector $v_2 = (1, 2)$.

Con esto queremos decir que si la alfombra mágica avanza “hacia adelante” durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de 1 unidad hacia el este y 2 unidades hacia el norte a partir de su posición inicial.

Parte IV:

- Ahora supón que tienes otros medios de transporte: una patineta $v_1 = (2, 3)$ y una alfombra $v_2 = (5, 0)$. ¿Puedes ir a los mismos lugares que con las patinetas y alfombras anteriores? Explica tu respuesta.
- Supón que tienes una patineta $v_1 = (2, 3)$ y una alfombra $v_2 = (6, 9)$. ¿Puedes ir a los mismos lugares que con las patinetas y alfombras anteriores? Explica tu respuesta.

Problema de las patinetas voladoras, parte IV (Salgado, 2015, p. 43-45)

En la *Figura 5* se puede observar que los estudiantes identifican que con los vectores $(2, 3)$ y $(5, 0)$ pueden llegar a cualquier lugar, ya que tomaron un vector arbitrario (x, y). Para el caso de los vectores $(2, 3)$ y $(6, 9)$ los estudiantes encontraron que no pueden llegar a todos los lugares, sino únicamente se pueden mover en una recta. Finalmente, los estudiantes concluyen que se pueden alcanzar todos los puntos si los vectores no son paralelos y si son paralelos solo permite llegar a lugares específicos (recta).

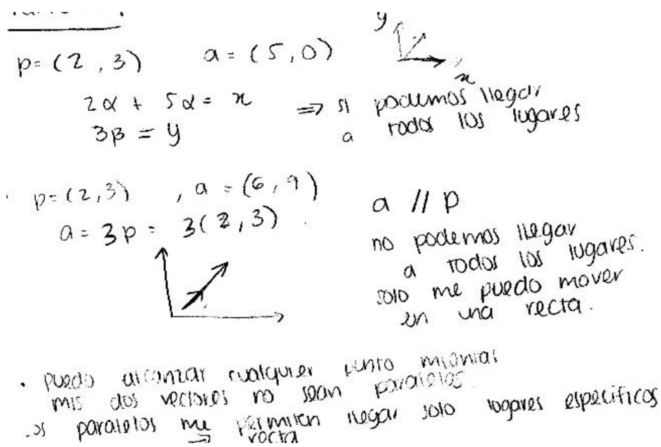


Figura 5. Solución del problema de las patinetas por un grupo de estudiantes (Salgado, 2015, p.107)

La investigadora concluye que el concepto de dependencia lineal es un concepto difícil de construir. Sin embargo, menciona que las actividades utilizando la teoría de modelos y modelización ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre la construcción del concepto, ya que abordan ideas tanto geométricas como algebraicas que les permiten a los estudiantes entender las definiciones formales cuando sean abordadas en la clase.

2.2. Estudio sobre cómo se aborda el concepto de dependencia lineal en la UIS

Particularmente, en la UIS se propone el concepto de independencia lineal en el programa de álgebra lineal I que ofrece la Escuela de Matemáticas (Anexo 1). En la organización de contenidos propuestos para desarrollar esta clase aparece como un tema requerido, es decir, como un tema que deben ver todos los estudiantes que matriculan la asignatura. En una encuesta que se realizó a los profesores de la UIS que estaban a cargo de los cursos de álgebra lineal I durante el primer semestre del año 2018, se encontró que 13 de los 17 profesores encuestados (76 %) desarrollan el concepto de independencia lineal, al cual, en promedio dedican 3 horas de las 64 horas totales que dictan en total del curso (*Figura 6*).

Figura 6. Resultados de encuesta de profesores en el primer semestre de 2018.

En este sentido, se puede evidenciar que, a pesar de ser un tema obligatorio en el plan de estudios, no es abordado por todos los profesores; se considera que es necesario profundizar sobre cuál es el trabajo que se desarrolla en el aula sobre el concepto, así como su relación con otros conceptos asociados con él, por ejemplo, el concepto de base.

En consecuencia, los resultados del examen PLUS [1] (*Figura 7*), muestran un bajo desempeño en los estudiantes que aprueban, ya que en general los temas que se proponen en dicho examen, no son revisados en su totalidad por todos los profesores. Una consecuencia de esto, podría basarse en las tres organizaciones diferentes que se proponen desde la coordinación de la asignatura para desarrollar el curso que ofrece la Escuela de Matemáticas.

[1] El examen PLUS, es un examen acumulativo de álgebra lineal que se realiza al final del curso, de forma opcional.

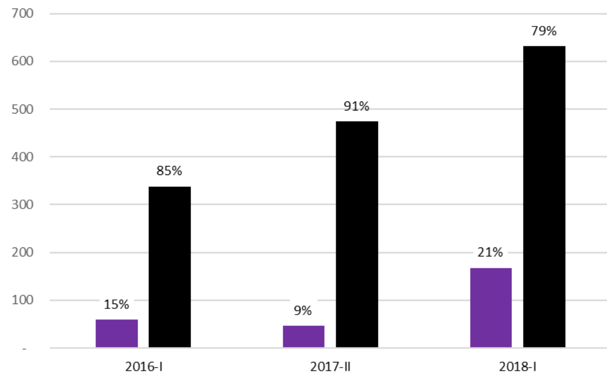


Figura 7. Resultados examen PLUS.

En la *Tabla 4*, se puede observar cómo están clasificadas las preguntas según los temas evaluados en el examen PLUS; durante el primer semestre del año 2016 (2016-I), en el segundo semestre del año 2017 (2017-II) y en el primer semestre del año 2018 (2018-I). En el examen de 2017-II se plantearon en total 15 preguntas y en los demás exámenes 20 preguntas.

Los conceptos de espacios vectoriales, combinación lineal, generado e independencia lineal, base y dimensión tienen un número considerable de preguntas en el año 2016-I.

Tabla 4

Clasificación de las preguntas del examen PLUS

Temas	2016-I	2017-II	2018-I
Números complejos, naturales e inducción, sumatoria. *	1, 2, 4	1, 4	1, 2, 13, 14
Sistemas de ecuaciones lineales	5.d, 12, 16	9, 13	4, 7
Matrices	7, 8	5, 8, 14, 15	3, 5, 8, 12, 15
Determinantes	15, 17		6, 17
Espacios vectoriales, combinación lineal, generado e independencia lineal, base y dimensión.	3, 5.a, 5.b, 5.c, 6, 9, 11, 13	2, 6, 7	9, 16
Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	10, 14, 18, 20	3, 10, 11	10, 11, 18, 20
Transformaciones lineales *	19	12	19
Total de preguntas	20	15	20

Construcción propia con base en síntesis de las respuestas del examen PLUS en los periodos 2016, 2017 y 2018 de la Escuela de Matemáticas UIS. Los asteriscos (*) en la primera y séptima fila, hacen referencia a temas no obligatorios dentro del curso.

En la tabla 5, se puede observar los diferentes tipos de respuesta que tiene el examen PLUS. Allí se puede identificar que dentro de los tres tipos de respuestas no es posible analizar con detalle los procedimientos realizados por los estudiantes.

Tabla 5

Tipos de preguntas del examen PLUS

Escrita	Selección múltiple	Falso o verdadero
Muestre la ecuación (cartesiana) del plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene los puntos $(1,1,0), (2,2,-1), (1,0,1)$	Los vectores $(3,3,-3), (0,0,0)$ y $(-2,-2,2)$ generan: a. Todo el espacio $\mathbb{R}^3$ b. El plano $x + y - 3z = 0$. c. La recta $\{t(1,1,-1) \mid t \text{ pertenece } \mathbb{R}\}$ d. Ninguna de las anteriores.	Sea $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y = \frac{z}{3}\right\}$. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. a. S es una recta que pasa por el origen. b. S es un subespacio vectorial de R^3 con dimensión 2. c. $S = \text{gen}\left\{\left(\frac{1}{2}, 1,3\right)\right\}$.

Clasificación realizada con base en las preguntas del examen PLUS del primer semestre del año 2016 de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

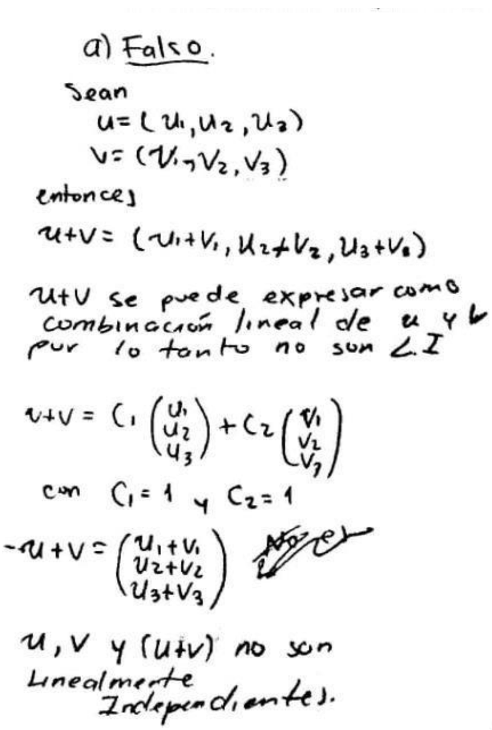
En la prueba PLUS realizada en el 2018-I, se incluyen dos problemas abiertos que fueron planteados a un grupo de 40 estudiantes, seleccionados de manera aleatoria. A continuación, aparecen las preguntas planteadas, seguidas de un análisis de los datos más destacados.

1. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. En el caso de que sea verdadera demuéstrela, en caso contrario muestre un contraejemplo. Si u y v son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ entonces los vectores u, v y $u + v$ son linealmente independientes.
2. Dé un ejemplo de una matriz cuadrada A de 3×3 cuyas filas sean linealmente dependientes.

Las preguntas de la prueba piloto, estaban basadas en el concepto de dependencia lineal y los resultados encontrados se clasificaron en tres diferentes interpretaciones. A continuación, se muestra el trabajo realizado por tres estudiantes.

Las soluciones propuestas por los estudiantes 1 y 2, que hacen parte de las interpretaciones formal y geométrico, están dadas con base en la pregunta 1.

a) Formal: En la *Figura 8* se puede observar que, a pesar de que el estudiante 1 identifica que el enunciado es falso, realiza un procedimiento de manera general, con justificaciones matemáticas.



a) Falso.

Sean

$u = (u_1, u_2, u_3)$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

entonces

$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

$u+v$ se puede expresar como combinación lineal de u y v por lo tanto no son L.I

$$u+v = c_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

con $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$

$$u+v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$$

u, v y $(u+v)$ no son Linealmente Independientes.

Figura 8. Solución estudiante 1.

b) Numérica: En la *Figura 9* se puede observar que el estudiante asigna valores a los vectores y halla el determinante de ellos, de donde concluye que como el determinante es igual a cero, los vectores son linealmente dependientes.

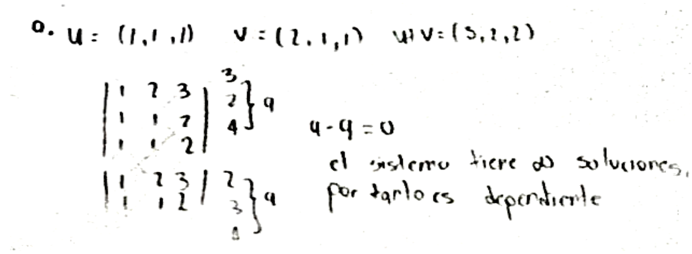


Figura 9. Solución estudiante 2.

c) Geométrica: Para analizar la solución geométrica propuesta por el estudiante 3, se tomó en cuenta la pregunta 2. En la *Figura 10*, se puede evidenciar como el estudiante 3, identifica que los tres vectores son linealmente dependientes, porque todos están sobre la misma recta.

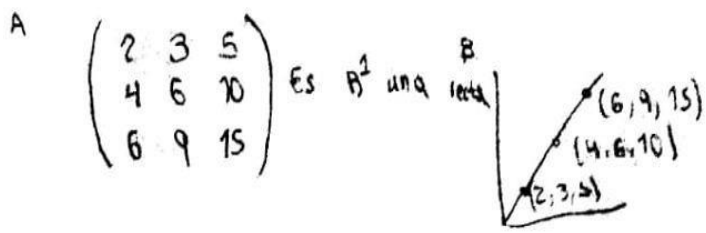


Figura 10. Solución estudiante 3.

En los procedimientos desarrollados por los estudiantes 1, 2 y 3, se puede evidenciar que los estudiantes utilizan diferentes representaciones (formal, numérica y geométrica) del concepto para interpretar un problema del concepto de dependencia lineal.

De acuerdo con todos los elementos expuestos en este capítulo a continuación se plantean las preguntas que guían esta investigación:

¿Qué estructuras y mecanismos mentales desarrollan estudiantes de álgebra lineal cuando abordan el concepto de dependencia lineal desde su representación numérica, geométrica, y algebraica?

¿Qué mecanismos mentales evidencian estudiantes de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander (Colombia) cuando estructuran el concepto de dependencia lineal desde de sus interpretaciones concretas y abstractas?

En este sentido la presente investigación tiene como objetivo general:

> Diseñar una descomposición genética validada del concepto de dependencia lineal que parta de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos para la construcción de Objetos abstractos.

Y por objetivos específicos:

i. Analizar la comprensión de los estudiantes del curso de álgebra lineal sobre el concepto de dependencia lineal a partir de la caracterización de los mecanismos mentales involucrados en la construcción de objetos concretos (algebraicos y geométricos) a Objetos abstractos (definición formal o esquema).

ii. Diseñar e implementar instrumentos de clase que promuevan la construcción del concepto de dependencia lineal a partir de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos en estudiantes de un curso básico de álgebra lineal.

3. Marco teórico: la teoría APOE

En este capítulo se revisan dos ejes centrales de la teoría APOE[2] (Arnon, et al., 2014), los cuales se utilizan para el desarrollo de la presente investigación. (i) Estructuras y mecanismos mentales y (ii) Ciclo de investigación.

3.1. Estructuras y mecanismos mentales

La construcción de un concepto matemático, según la teoría APOE, consiste en la construcción de estructuras mentales necesarias para comprender ese concepto. Cada estructura mental se construye a través de un mecanismo mental o también llamado *abstracción reflexiva*, según Piaget. En la tabla 4, se muestra cómo están clasificadas las estructuras y los mecanismos mentales.

Tabla 6
Estructuras y mecanimos mentales

Estructuras mentales	Mecanismos mentales
Acción	Interiorización
Proceso	Reversión
Objeto	Encapsulación
Esquema	Coordinación
	Inversión
	Des-encapsulación
	Generalización

Síntesis de Arnon, et al., 2014

[2] Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema).

A continuación, se describen las cuatro estructuras mentales y como están relacionadas con los mecanismos, descritos anteriormente.

(i) Acción: Se define como la transformación que se aplica a un Objeto, sin reflexionar sobre él. Dubinsky (1996) considera que la Acción que es realizada por un sujeto es externa a él. En este sentido, se puede considerar como una Acción, por ejemplo: una operación o un algoritmo matemático que se realiza de manera mecánica sin omitir pasos.

(ii) Proceso: Es una comprensión de las acciones aplicadas a un Objeto. En términos de Asiala et al., (1996) cuando se repite una Acción, y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada como un Proceso. En este sentido, se puede considerar que un estudiante ha construido un Proceso, cuando omite pasos al realizar un algoritmo o no necesita del algoritmo para inferir sobre el resultado de una operación, como consecuencia de una reflexión de sus procedimientos. Un Proceso puede ser revertido para construir otro Proceso.

También dos Procesos pueden ser coordinados respectivamente y este resultado encapsulado para formar un nuevo Objeto. Cuando un Proceso ha sido encapsulado en un Objeto, puede volver a des-encapsularse cuando sea necesario.

(iii) Objeto: Se define como una estructura estática que fue transformada (encapsulada) de una estructura dinámica *(*Proceso*)* sobre la que el estudiante puede aplicar nuevas Acciones.

(iv) Esquema: Se define como una colección de Acciones, Procesos y Objetos y otros Esquemas que utiliza un individuo para resolver determinado problema.

En la *Figura 11* se sintetiza lo mencionado anteriormente, donde a partir de un Objeto (por ejemplo, dos vectores en $\mathbb{R}^2$) sobre el cual se le aplican Acciones (hallar el determinante) que se pueden entender como transformaciones sobre el objeto, en las cuales no se reflexiona, es decir, como aplicar un algoritmo sin interpretar el resultado (en el caso del determinante) se puede, por medio de interiorizaciones acerca dichas Acciones, llegar a una estructura mental Proceso (en donde el estudiante relaciona que si el determinante es cero es porque los vectores son linealmente dependientes), el cual se puede ver como un Objeto dinámico que está en constante evolución, ya que se pueden generar nuevos Procesos por el mecanismo de *coordinación* y por medio del mecanismo de *encapsulación* puede ser transformado a una estructura mental Objeto, en donde ya se vuelve un objeto estático, el cual se puede utilizar para construir un nuevo concepto, como el concepto de base o transformación lineal.

El mecanismo de *desencapsulación* se utiliza cuando se necesita volver del Objeto al Proceso del cual dio origen.

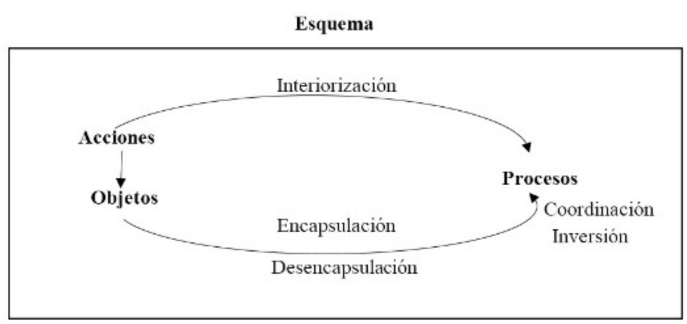


Figura 11. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et. al.,2014, p. 18).

El uso de la teoría APOE para la enseñanza de matemáticas en la escuela básica, se propone en Arnon et al. (2014). En donde se menciona que los conceptos que se trabajan en la universidad son generalmente construidos a partir de Acciones sobre Objetos abstractos, como muestra en la *Figura 6*. Sin embargo, los autores mencionan que, en la escuela básica, la construcción de

Objetos matemáticos se inicia mediante la aplicación de Acciones sobre objetos concretos, como se muestra en la *Figura 12*.

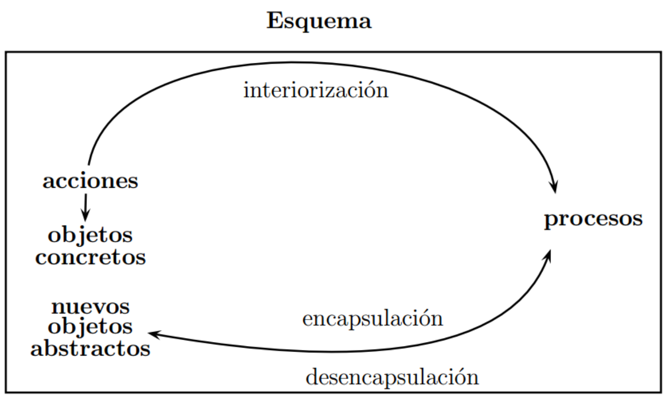


Figura 12. Construcción de Objetos abstractos a partir de acciones sobre objetos concretos (tomado de Arnon *et al.*, 2014: 154).

Lo que se hizo en esta investigación fue adaptar el modelo propuesto para la escuela básica (*Figura 12*) a la universidad. En el capítulo 6, definimos lo que entendemos por los objetos concretos y Objetos abstractos.

3.2. Descomposición genética

Una descomposición genética, se puede definir, como, una descripción de las estructuras y mecanismos mentales que un individuo realiza para la construcción de un concepto matemático. De esta forma, la descomposición genética debe ser probada experimentalmente para así dar validez a los resultados que describen las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante necesita para la construcción de un concepto matemático. En caso contrario, Asiala, et al., 1996 menciona que debe refinarse con base a los resultados obtenidos en la implementación de actividades.

Un ejemplo de la vida cotidiana que puede relacionarse con una descomposición genética, es cuando un estudiante realiza una Tarea específica, y es posible diferenciar tres características que se asocian con las estructuras mentales de una descomposición genética. Como se muestra en la Figura 13, el estudiante puede realizar la tarea correctamente, tener dificultades o fallar por completo, esto puede ser explicado a través de las estructuras y mecanismos que son descritos en una descomposición genética.

Figura 13. Interpretación de Arnon, et al., 2014.

Es importante mencionar que la descomposición genética no es única, es decir, no modela una sola forma en la que todos los estudiantes construyen un concepto matemático específico, pero sí proporciona un modelo teórico que puede ayudar a comprender las construcciones que aparecen en la mayoría de los estudiantes. Un ejemplo de ello se encuentra en Roa-Fuentes y Oktaç (2010)¸ en el cual se proponen dos descomposiciones genéticas preliminares que describen los posibles caminos para construir el concepto de transformación lineal: (i) Utilizando el mecanismo de interiorización: Como el concepto se debe enseñar y como aparece en los libros de texto; y, (ii)Utilizando el mecanismo de coordinación: Adaptando una sugerencia de la literatura (Dreyfus et al., 1999) donde se consideran las transformaciones no lineales antes de las transformaciones lineales.

3.3. Ciclo de investigación

La teoría APOE tiene un ciclo metodológico que se basa en tres componentes: (i) Análisis Teórico; (ii). Diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza; y, (iii). Observación, recolección y análisis de datos, como se muestra en la *Figura 14*:

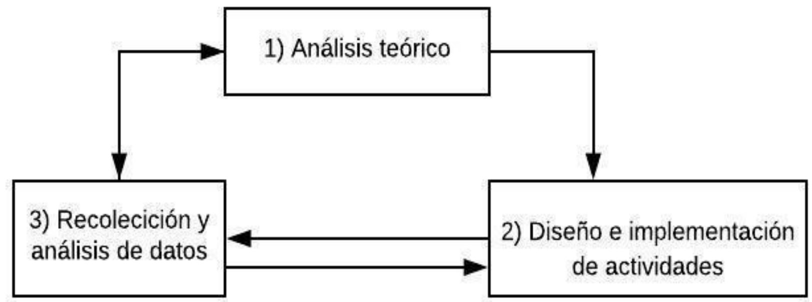


Figura 14. Adaptación (Arnon et. al.,2014, p. 94).

Donde las tres componentes están fuertemente relacionadas, ya que una depende de las otras, como se muestra a continuación.

3.3.1. Análisis teórico.

El análisis teórico se fundamenta en tres herramientas: (i) análisis de libros de textos; (ii) análisis de investigaciones relacionadas con el tema de interés; y (iii) experiencia de la práctica docente, esto con el fin de diseñar una descomposición genética del concepto en el cual se quiere trabajar. A continuación, se revisa cada uno de los ítems descritos.

(i) Análisis de libros de texto:

En esta componente se revisa cómo es abordado el concepto matemático desde diferentes libros de texto y se selecciona una o varias definiciones o formas, con las que se toman como fundamento para la construcción del concepto.

(ii) Análisis de investigaciones:

En esta componente, se realiza una revisión bibliográfica de descomposiciones genéticas anteriores que hayan abordado el concepto que se quiere trabajar o conceptos asociados a él. En donde dichas descomposiciones genéticas son tomadas como base o ayuda para el diseño de la descomposición genética. Además, se analizan investigaciones en Matemática Educativa que desde otras perspectivas teóricas han analizado el concepto de interés.

(iii) Experiencia de la práctica docente:

La experiencia de un profesor que ha trabajado el concepto matemático el cual se va a bordar es fundamental para la construcción del diseño de la descomposición genética, ya que no necesariamente como se plantea en los libros de texto se da el aprendizaje de los estudiantes. En esta componente toma importancia las experiencias de los investigadores como estudiantes y profesores de los conceptos de interés.

Finalmente, con base en el estudio y análisis de los elementos descritos se da el diseño de la descomposición genética, como resultado principal de Análisis Teórico que guía el diseño y la implementación de las actividades; segunda componente del ciclo de investigación que a continuación se describe.

3.3.2. Diseño e implementación de actividades. Para el desarrollo de las actividades que se implementan con base en algún concepto a trabajar, se debe partir de la descomposición genética de dicho concepto, que se realizó en la fase anterior, debido a que la descomposición genética es una guía para la elaboración de las actividades. Ya que, la descomposición genética es un modelo teórico que surge a partir de dar respuesta a preguntas como: ¿Cómo los estudiantes aprenden un concepto? y ¿Cuáles son las dificultades que afronta los estudiantes para aprender un concepto?, por tanto, es una orientación y guía para que el profesor diseñe las actividades e identifique cómo abordar las preguntas que llevaran a cabo los estudiantes.

3.3.3. Recolección y análisis de datos. La idea de realizar una descomposición genética de determinado concepto, es proporcionar estabilidad al momento de analizar los resultados, es decir, que a pesar de que los resultados sean revisados por personas diferentes arrojen datos similares. De esta forma, la descomposición genética es un soporte de validación de que el análisis de los datos se pueda generalizar, ya que da credibilidad a los datos encontrados (Arnon et al., 2014).

Finalmente, se puede concluir que el ciclo de investigación es periódico, ya que, inicialmente se propone una descomposición genética preliminar y de acuerdo con los resultados obtenidos, se opta por refinarla (mejorarla) si no se arrojan resultados similares y, si definitivamente los resultados no están relacionados con lo propuesto, se cambia totalmente la descomposición genética propuesta y por ende se deben cambiar las actividades propuestas hasta encontrar resultados acordes con lo propuesto en la descomposición genética. Para poder validarla, es decir, que se pueda implementar en la comunidad educativa, bien sea utilizada por otros investigadores o profesores en ejercicio. Esta validación hace énfasis en determinar las estructuras y mecanismos mentales que realmente evidencian los individuos cuando han construido un concepto matemático.

Es importante mencionar que los resultados odtenidos por los estuiantes son fundamentales para el investigador, ya que de acuerdo a estos resultados es que se valida o no la desomposición genética. Por tanto, dichos resultados no se desechan si no se tienen presente para la validación, el refinamiento o la nueva descomposición genética.

4. Diseño metodológico

Para cumplir con el objetivo propuesto en la investigación, se utiliza la metodología que proporciona la teoría APOE; como se mencionó en el capítulo anterior esta consta de tres fases: (i) Análisis teórico; (ii) Diseño e implementación de actividades; y (iii) Recolección y análisis de datos.

El ciclo se desarrolló dos veces en esta investigación, esto permite tener en cuenta las descomposiciones genéticas que fueron propuestas previamente en la Primera Aplicación. Una segunda Aplicación permite realizar adaptaciones más detalladas sobre cómo estudiantes universitarios de primer año logran construir el concepto de dependencia lineal a partir de sus interpretaciones concretas.

A continuación, se describe la forma como cada una de dichas componentes se desarrolla en la aplicación de cada ciclo.

4.1. Primera Aplicación del ciclo de investigación

4.1.1. Análisis teórico. El análisis teórico consiste en una revisión de libros de texto, análisis de investigaciones en didáctica de la matemática y la experiencia de la práctica docente de las investigadoras, en relación al concepto de dependencia lineal. Esto con el fin de estructurar una descomposición genética preliminar del concepto, que describa las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante necesita para comprender el concepto de dependencia lineal.

4.1.2. Diseño e implementación de actividades. El diseño de las actividades consistió en talleres y entrevistas semi-estructuradas con base en los trabajos realizados por Salgado (2015) y las descomposiciones genéticas de Trigueros y Possani (2013) y Mares (2015).

En este ciclo, la implementación de actividades se desarrolló con un grupo de 31 estudiantes de ingeniería industrial de primer semestre que se encuentran cursando álgebra lineal I, en la UIS durante el primer segundo semestre académico de 2018.

4.1.3. Recolección y análisis de datos. Como instrumentos de recolección de la información se tuvieron en cuenta: las hojas de trabajo (talleres) de los estudiantes y videograbaciones del desarrollo de los mismos; además del diseño y aplicación de una entrevista didáctica que fue videograbada y transcrita para un análisis más profundo. El análisis de los datos se basa en las dos descomposiciones genéticas propuestas por Trigueros y Possani (2013) y Salgado (2015).

4.2. Segunda Aplicación del Ciclo de investigación

4.2.1. Análisis teórico. El análisis teórico se realiza con base en los resultados encontrados en el primer ciclo de investigación y una descripción geométrica de cómo introducir el concepto de dependencia lineal a partir de diferentes trabajos desarrollados en la Didáctica del álgebra lineal. Esto con el fin de diseñar una descomposición genética que parta de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos para la construcción de Objetos abstractos.

4.2.2. Diseño e implementación de actividades. Las actividades fueron diseñadas o tomadas de la tesis de Salgado (2015), a partir de la descomposición genética que se propone.

En este ciclo, la implementación de las actividades se desarrolló con un grupo de 28 estudiantes de ingeniería electrónica de primer semestre que se encontraban cursando álgebra lineal I, en la UIS del primer periodo académico de 2019.

4.2.3. Recolección y análisis de datos. Como instrumentos de recolección de la información se tuvieron en cuenta: las hojas de trabajo (talleres) de los estudiantes y videograbaciones del desarrollo de los mismos; además del diseño y aplicación de una entrevista didáctica que fue videograbada y transcrita para un análisis más profundo. El estudio de la información recolectada se basa la descomposición genética propuesta, a través de la cual se buscó evidenciar las estructuras mentales que necesita un estudiante para construir el concepto de dependencia lineal. Esto permite validar el diseño de la descomposición genética propuesta.

Como se mencionó el ciclo de investigación se desarrolló dos veces. A continuación, se encuentra cada capítulo dividido en dos fases correspondientes a cada ciclo.

5. Primera Aplicación del Ciclo de Investigación

En este capítulo se describe ampliamente cada fase desarrollada en el ciclo metodológico: 5.1. análisis teórico; 5.2. Diseño e implementación de actividades; 5.3. Recolección y análisis de datos, correspondiente a la primera aplicación.

5.1. Análisis teórico

El análisis teórico consiste en la revisión de libros de texto de álgebra lineal e investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, relacionados con el tema de dependencia lineal.

5.1.1. Revisión de libros de texto. En los cursos de álgebra lineal I que ofrece la UIS, los profesores trabajan con diferentes libros de texto. Entre ellos: Introducción al álgebra lineal (Anton,1991), Cálculo (Apostol, 1998), álgebra lineal (Grossman, 1996), Aproximación al álgebra lineal: Un enfoque Geométrico (Isaacs y Sabogal, 2003) y álgebra lineal: Una introducción Moderna (Poole 2004).

A continuación (ver *Tabla 7*), se presenta la definición que tres libros de texto que se mencionaron anteriormente, dan al concepto de dependencia lineal.

Tabla 7

Definición del concepto de dependencia lineal desde dos interpretaciones

Tipo	Definición
(1) Concreta	Un conjunto de vectores $\{X_1, X_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (considerados como flechas que parten del origen) es linealmente dependiente si y sólo si X_1, X_2 son colineales. En caso contrario se dice que el conjunto de vectores en linealmente independiente. (Isaacs y Sabogal, 2005, p. 56)
(2) General en $\mathbb{R}^n$	Un conjunto finito de dos o más vectores $X_1, X_2, \dots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ se dice linealmente dependiente si alguno de ellos es combinación lineal de los otros. Caso contrario, cuando ninguno puede considerarse como combinación lineal del resto, decimos que los vectores $X_1, X_2, \dots, X_p$ son linealmente independientes. (Isaacs y Sabogal, 2005, p.56)
(3) Abstracta	Un conjunto de vectores v_1, v_2, ..., v_k es ***linealmente dependiente*** si existen escalares c_1, c_2, ..., c_k, al menos uno de los cuales no es cero, tales que $$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$$ Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se llama ***linealmente independiente***. (Poole, 2011, p.99)

Estas definiciones pueden asociarse a la visión de Saldanha (1995) quien hace referencia a tres tipos de definición. De tal manera que la primera puede considerarse como una definición concreta para el estudiante, ya que puede graficar los vectores y a partir de ahí determinar si son linealmente dependientes o no. Según esta definición es posible determinar que, si los vectores son colineales, entonces uno de ellos se puede ver como un múltiplo del otro y de esta forma la definición dos es una generalización de esas características que se encuentran en la definición uno. Ya que es posible concluir que en general un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores del conjunto se puede ver como combinación lineal de los demás vectores. Además, Saldanha (1995) menciona que la definición dos es una forma más natural de introducir el concepto, sin embargo, en la mayoría de los libros de texto se encuentra es la definición tres que él clasifica como una definición abstracta para el estudiante.

En esta investigación, se decidió tomar las definiciones presentadas en la Tabla 7 principalmente por tres razones: (i) los estudiantes que hacen parte de la población de estudio están familiarizados con dichos textos; (ii) la diferencia de enfoque: concreto (geométrico), general en $\mathbb{R}^n$ y abstracto; (iii) por las recomendaciones de Saldanha (1995) quien hace un análisis de las definiciones mostradas en los libros de texto de álgebra lineal.

5.1.2. Análisis de investigaciones en didáctica de las matemáticas desde la perspectiva de la Teoría APOE

Desde la didáctica de las matemáticas, particularmente en la didáctica del álgebra lineal, se han desarrollado diversas investigaciones que se fundamentan en la teoría APOE. Sin embargo, solo dos se centran en el diseño de una descomposición genética del concepto de dependencia lineal, estas son: i. Trigueros y Possani (2013) y ii. Mares (2016).

1) Trigueros y Possani (2013).

En el trabajo presentado por los autores se encuentra una descripción del diseño de la descomposición genética del concepto de dependencia lineal. Como puede verse en la *Figura 15*, la construcción del concepto de dependencia e independencia lineal se da a partir de conceptos construidos previamente: Un Esquema algebraico, que permite a los estudiantes utilizar operaciones algebraicas básicas, trabajar con el concepto de variable, además de identificar, establecer y trabajar con variables en un sistema de ecuaciones; Esquema vectorial para los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, en el cual los estudiantes estén familiarizados con sus representaciones gráficas y operaciones elementales como: suma de vectores y multiplicación por un escalar; Esquema de conjunto dado que se requiere que los estudiantes usen la notación de conjuntos y realicen acciones sobre conjuntos. Por ejemplo, al encontrar intersecciones o uniones entre conjuntos y estructurar la solución de un sistema de ecuaciones como conjunto.

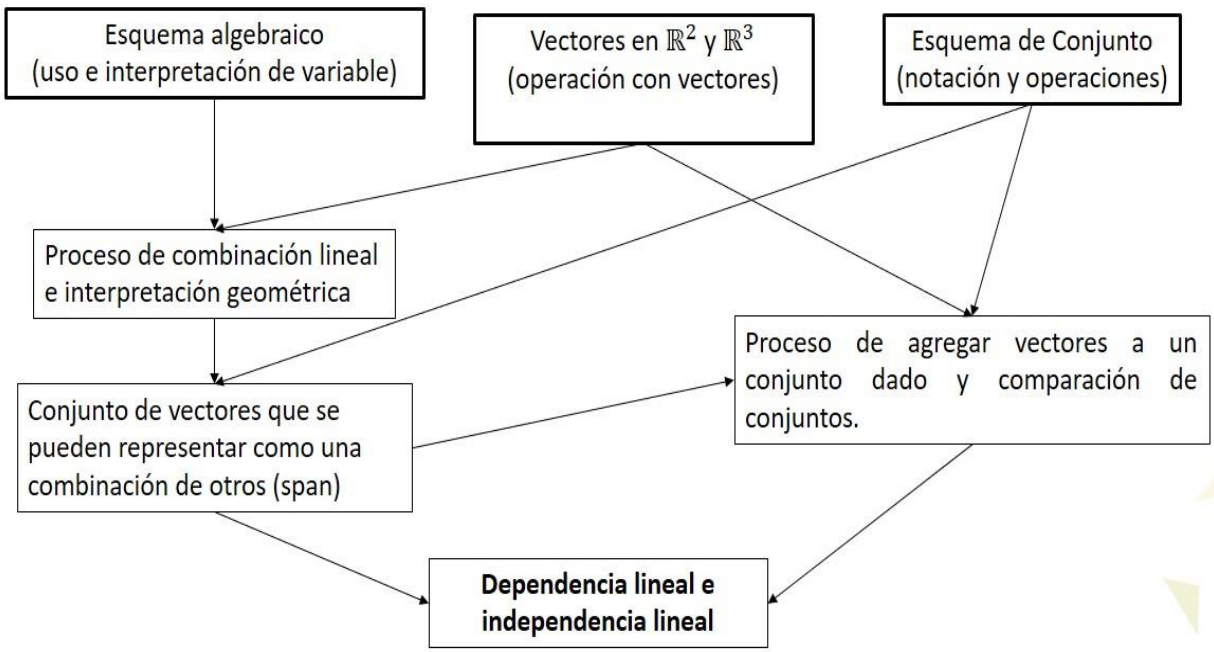


Figura 15. Descomposición genética de dependencia e independencia lineal (Trigueros y Possani, 2013, p. 1782).

A partir de lo mencionado anteriormente, los estudiantes pueden realizar Acciones entre vectores para formar combinaciones lineales de vectores dados y representarlos geométricamente cuando sea posible. Estas Acciones como se muestra en la *Figura 15* se interiorizan en un Proceso que permite la consideración de todas las posibles combinaciones lineales de esos vectores. Este Proceso se Coordina con el Esquema de conjunto para considerar el conjunto resultante de vectores y su representación geométrica. Estos Procesos pueden ser encapsulados como el Objeto de combinación lineal.

La Acción de encontrar una combinación lineal que resulte en un vector dado, en cualquier representación, está interiorizado y coordinado con el Esquema de conjunto para considerar un conjunto de combinaciones lineales que puedan representar un vector dado, incluyendo el vector cero. Este Proceso se Encapsula en el Objeto vector como combinación lineal.

Las Acciones necesarias para formar combinaciones lineales y hacerlas iguales a vectores desconocidos para encontrar el sistema de ecuaciones correspondiente y su conjunto de soluciones se interiorizan en el Proceso de considerar todos los vectores que se pueden obtener de las combinaciones lineales de todos los elementos de un conjunto. Este Proceso se coordina con el Proceso de agregar nuevos vectores al conjunto dado y comparar el conjunto de vectores resultante con el obtenido previamente, para interiorizar la dependencia lineal y la independencia lineal de un conjunto de vectores como Procesos.

Estos Procesos están encapsulados en el conjunto de vectores linealmente independiente “Objeto”. Los Procesos descritos anteriormente se pueden Coordinar en un Esquema que incluye conjuntos lineales dependientes e independientes de vectores (incluidos los vectores en espacios diferentes de $\mathbb{R}^n$) y al que se hace referencia como Esquema de independencia e independencia lineal. Con este Esquema los estudiantes son capaces de construir con base a nuevas actividades, otras nociones tales como espacio generado y base, que contribuyen aún más al desarrollo del Esquema de dependencia e independencia lineal.

2) Mares (2016).

La autora presenta una descomposición genética del concepto de dependencia lineal, a partir de la construcción del concepto de combinación lineal. Ella toma la descomposición genética propuesta por Parraguez (2011). Sin embargo, a diferencia de Parraguez, la autora realiza una descripción detallada de cómo se da el mecanismo de coordinación entre los procesos de suma de vectores de un espacio vectorial V y el de multiplicar escalares del Campo sobre el cual se define V y vectores en V.

De esta forma, menciona que para construir el concepto de dependencia lineal se debe partir de:

1) Esquema de espacio vectorial: que el estudiante reconozca varios ejemplos de espacios vectoriales, que sea capaz de trabajar con espacios vectoriales desconocidos, reconozca que le vector cero no siempre es n-ada de ceros, tenga buen manejo de las operaciones binarias en el espacio vectorial y campo, aunque no sean las tradicionales. (Mares, 2016, p.105-106)

2) Objeto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones: se necesita considerar el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, por tanto, es importante que el estudiante logre identificar la solución de un conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones y adicional a ello interpretar si son infinitas, porque pueden depender de un parámetro o si es única. (Mares, 2016, p.106)

3) Objeto de combinación lineal: se necesita aplicar Acciones sobre el Objeto de combinación lineal; por ejemplo, considerar que una misma combinación lineal puede tener diferentes conjuntos de soluciones y realizar comparaciones entre ellos. (Mares, 2016, p.106-107)

En este sentido, las autoras consideran que un estudiante se encuentra en una concepción Acción del concepto de dependencia lineal, cuando a partir de una concepción Proceso de combinación lineal pueden formar una combinación lineal que sea igual a cero de un conjunto de vectores específico y mediante una concepción Proceso de conjunto solución de una ecuación vectorial, encontrar soluciones particulares a dicho sistema, si encuentra que el sistema tiene única solución puede determinar que los vectores son linealmente independientes y si encuentra más de una solución puede determinar que los vectores son linealmente dependientes.

Una concepción Proceso se estructura mediante la coordinación de los procesos combinación lineal, vector cero (comprender que el vector cero de un espacio vectorial no necesariamente es la n-ada de ceros en $\mathbb{R}^n$) y conjunto solución de una ecuación, para así considerar todas las posibles soluciones a las ecuación vectorial $c_1v_1 + \cdots + c_pv_p = 0$ y determinar si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, esto es, si el sistema tiene infinitas soluciones o solución única, respectivamente. Las autoras mencionan que la encapsulación del Proceso, permite tener una estructura Objeto de conjunto de vectores linealmente dependiente, que se puede evidenciar cuando un estudiante puede preguntarse si las imágenes de un conjunto linealmente independientes bajo una transformación lineal, serán linealmente independientes. También un estudiante puede des-encapsular el Objeto para volver a los Procesos que le dieron origen.

A continuación, se consideran algunas actividades tomadas del trabajo de Salgado (2015), Hernández y Ayala (2018) y otras que se diseñaron con el fin de hacer una primera intervención en el aula. Esto con el objetivo de obtener información sobre cómo los estudiantes de un grupo regular de álgebra lineal, en el contexto en que se desarrolla esta investigación, dan cuenta de la construcción del concepto de dependencia lineal, insumo que resulta fundamental para el diseño de la descomposición genética hipotética.

5.2. Diseño e implementación de actividades

En esta sección se presenta la población y el número de estudiantes que participaron en la implementación de las actividades (sección 5.2.1). También se presenta un análisis de las tareas propuestas en el taller (sección 5.2.2), además de un análisis de la entrevista (sección 5.2.3).

5.2.1. Descripción de la población. Se realizó una intervención con estudiantes inscritos en un curso de álgebra lineal I de ingeniería industrial de la Universidad Industrial de Santander durante el segundo semestre del año 2018, entre los meses de agosto (2018) y abril (2019). Durante el semestre se desarrolló un taller (ver Anexo 2) de 36 preguntas en 4 sesiones durante 120 minutos aproximadamente cada una con 31 estudiantes matriculados en el curso; el trabajo se desarrolló en el horario de clase y en pequeños grupos (2 – 4 estudiantes). Durante el avance de los Talleres, los estudiantes estuvieron acompañados por dos profesores quienes respondían sus inquietudes y motivaban el trabajo.

Es importante aclarar que los estudiantes podían decidir qué problemas abordar y hacer uso de sus libros de texto, o buscar la información que consideraran en sus teléfonos celulares. Sin embargo, esto no intervino en sus respuestas, ya que a pesar que un estudiante tenga la definición del concepto en sus libros de texto, según la teoría APOE, no necesariamente el estudiante estará en una concepción Objeto del concepto y esto se pudo evidenciar en el análisis del trabajo realizado.

Adicionalmente se realizaron entrevistas semi-estructuradas a algunos estudiantes que se destacaron con sus respuestas durante el desarrollo de los talleres.

Las tareas propuestas en cada taller incluyen el concepto de dependencia lineal y conceptos relacionados con él como: solución de sistemas de ecuaciones lineales, vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, combinación lineal, el concepto de conjunto generador y espacio generado. De esta manera se busca determinar conexiones posibles entre las estructuras que un estudiante puede lograr al construir una concepción Proceso de dependencia lineal.

5.2.2. Análisis general de las tareas propuestas en el taller. Las preguntas del taller se clasificaron tomando en cuenta las estructuras y/o mecanismos mentales que los estudiantes podrían reflejar al abordarlas. A continuación, se muestra el análisis a priori de cada actividad de acuerdo con los elementos descritos en las descomposiciones genéticas anteriores (ver Tabla 8).

Tabla 8

Análisis a priori de las preguntas del taller 1

<table>
<tr><th>Estructura</th><th>(Preguntas del Taller 1) -</th></tr>
<tr><td>Acción</td><td>(1, 3,4, 7, 15, 16 y 22) Transformaciones puntuales que un estudiante puede aplicar:
un conjunto de vectores específico es linealmente dependiente si uno de los vectores se puede ver como múltiplo de otro u otros vectores.
si tiene un conjunto de vectores y un vector específico de dicho conjunto se puede ver como combinación lineal de los demás vectores entonces el conjunto de vectores es linealmente dependiente.</td></tr>
<tr><td>Proceso</td><td>(2, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 y 36) Las Acciones interiorizadas pueden sugerir la formulación de procdimiento basados en una de las siguientes relaciones dinámicas:
un conjunto de vectores es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores del conjunto se puede ver como combinación lineal de los demás.
un conjunto de vectores es linealmente dependiente si al hacer la combinación lineal de los vectores igualada al vector cero, el sistema tiene infinitas soluciones.
Si hay tres o más vectores en $\mathbb{R}^2$ al menos uno de ellos se puede ver como combinación lineal de los demás y por tanto los vectores son linealmente dependientes.
Si hay cuatro o más vectores en $\mathbb{R}^3$ al menos uno de ellos se puede ver como combinación lineal de los demás y por tanto los vectores son linealmente dependientes.
En las preguntas 13, 17 y 28 el estudiante debe tener presente las propiedades de un conjunto de vectores linealmente dependiente, para a partir de ahí construir ejemplos de vectores linealmente dependientes o independientes.</td></tr>
<tr><td>Objeto</td><td>(23) Como resultado de la encapsulación del proceso de dependencia lineal el estudiante puede aplicar Acciones sobre los conjuntos linealmente dependientes, para determinar si el conjunto resultante de la unión de conjuntos linealmente dependiente sigue siendo dependiente o no.</td></tr>
</table>

Por ejemplo, se considera que un estudiante evidencia una concepción Acción si identifica en la pregunta 1 que los vectores son linealmente dependientes ya que uno es múltiplo escalar del otro.

Pregunta 1: ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $v_1 = (1,2)$ y $v_2 = (2,4)$?

Si un estudiante estructura la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, determina que tiene infinitas soluciones y por tanto los vectores son linealmente dependientes entonces se considera que dicho estudiante puede haber estructurado una concepción Proceso del concepto.

En la pregunta 5 y 16 se considera que un estudiante evidencia una concepción Proceso si identifica mediante algún método de reducción que el sistema asociado tiene infinitas soluciones o solución única y por tanto los vectores son linealmente dependientes o independientes respectivamente.

Pregunta 5: ¿Los vectores $v_1= (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, -2, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 7)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

Pregunta 16: ¿Los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$, $v_2 = (-2, -1, -3)$ y $v_3 = (1, 4, 9)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

También, en la pregunta 16, un estudiante puede encontrar que los vectores v_1 y v_2 son múltiplos escalares entre ellos y por tanto son linealmente dependientes. Así el estudiante evidencia una concepción Acción del concepto.

Un ejemplo de un estudiante con una concepción Objeto se da en la pregunta 23:

> Pregunta 23: Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
>
> Sean los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 en $\mathbb{R}^n$. Si sabe que los conjuntos $\{\ v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{\ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independientes.

En este caso el estudiante necesita aplicar Acciones sobre los conjuntos linealmente independientes, para así determinar si el conjunto de los vectores es linealmente independiente o no.

5.2.3. Análisis a priori de la entrevista. La entrevista está compuesta de doce preguntas basadas en el análisis teórico. A continuación, se presenta el análisis a priori de cada una.

Después de analizar la respuesta de los estudiantes en las sesiones, se seleccionaron dos estudiantes para realizar una entrevista didáctica, que permitiera analizar las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes evidencian al construir el concepto de dependencia lineal.

Pregunta 1

> Dos vectores cualesquiera, no múltiplos en $\mathbb{R}^2$, diferentes del vector cero, ¿Tienen una combinación lineal o varias combinaciones lineales, cuyo resultado sea el vector cero? Justifique su respuesta.

En las preguntas 1 se espera que los estudiantes reflexionen sobre las actividades propuestas en el taller e identifiquen que si dos vectores no son múltiplos en $\mathbb{R}^2$ entonces son linealmente independientes y por tanto existe una única combinación lineal que da como resultado el vector cero y es que cada escalar sea cero. Con esta respuesta un estudiante evidencia una concepción Proceso.

Pregunta 2

> Dos vectores cualesquiera, múltiplos en $\mathbb{R}^2$, diferentes del vector cero, ¿Tienen una combinación lineal o varias combinaciones lineales, cuyo resultado sea el vector cero? Justifique su respuesta.

En las preguntas 2 se espera que los estudiantes identifiquen que si dos vectores son múltiplos en $\mathbb{R}^2$ entonces los vectores son linealmente dependientes, y por tanto, existen varias combinaciones lineales que den como resultado el vector cero. Con esta respuesta un estudiante evidencia una concepción Proceso.

Pregunta 3

> ¿Cuántas combinaciones lineales igualadas al vector cero determinan dos vectores (no múltiplos) de $\mathbb{R}^3$?

De manera similar, se espera que un estudiante con una concepción Proceso, identifique en la pregunta 3, que dos vectores no múltiplos en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes y por tanto, existen varias combinaciones lineales que den como resultado el vector cero.

Pregunta 4

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?

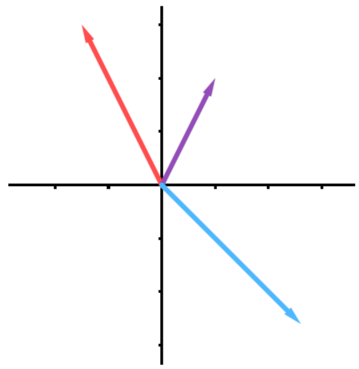


Figura 16. Pregunta 4 de la entrevista.

Pregunta 5

Y, ¿En este caso?

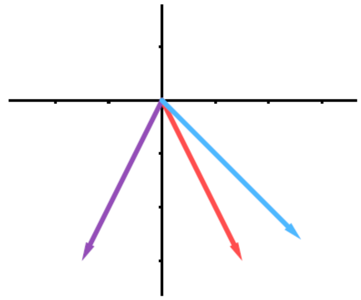


Figura 17. Pregunta 5 de la entrevista.

Pregunta 6

Y, ¿En este caso?

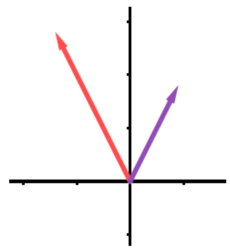


Figura 18. Pregunta 6 de la entrevista.

Las preguntas 4, 5, 6 están relacionadas, ya que al estudiante se le entrega la gráfica y a partir de lo que ve interpreta debe responder: ¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero? Para la pregunta 4 y 5 es importante que el estudiante identifique que no importa la dirección de los vectores, sino que dados siempre tres vectores en $\mathbb{R}^2$ necesariamente los vectores van a ser linealmente dependientes y por tanto existen infinitas combinaciones lineales que den como resultado el vector cero.

Para la pregunta 6, es similar el razonamiento de la pregunta 1, ya que los vectores no son múltiplos y por tanto son linealmente independientes. Así solo existe una combinación lineal que dé como resultado el vector cero. Con dichas respuestas, los estudiantes estarían en una concepción Proceso del concepto.

Pregunta 7

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?

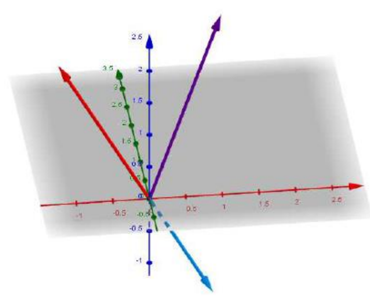


Figura 19. Pregunta 7 de la entrevista.

En la pregunta 7 se esperan que los estudiantes con una concepción Proceso identifiquen que como los vectores no están sobre el mismo plano, entonces los vectores son linealmente independientes y así solo hay una solución que dé como resultado el vector cero y es que los escalares sean cero.

Pregunta 8

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?

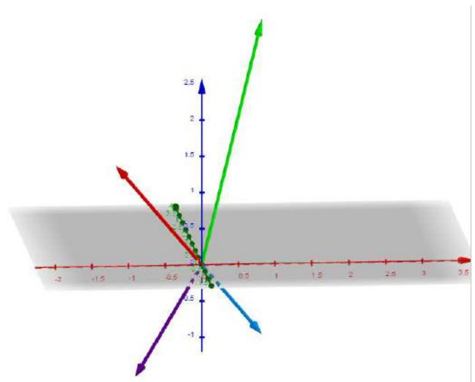


Figura 20. Pregunta 8 de la entrevista.

En la pregunta 8, se espera que los estudiantes con una concepción Proceso identifiquen que como hay cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces los vectores son linealmente dependientes y por tanto existe infinitas soluciones que den como resultado el vector cero.

Pregunta 9

¿Si $a\,(2,3,4)+b\,(-1,2,5)+c\,(2,1,0)=(0,0,0)$ entonces $a=b=c=0$ es la única solución?

En la pregunta 9 se espera que los estudiantes con una concepción Acción, respondan que como los vectores no son múltiplos, entonces son linealmente independientes y por tanto tiene única solución el sistema. Sin embargo, un estudiante con una concepción Proceso puede reflexionar sobre la combinación lineal que puede existir entre los vectores y resolver el sistema para encontrar cuántas soluciones tiene.

Pregunta 10

> ¿Cuál es el número máximo de vectores de $\mathbb{R}^2$ no múltiplos entre sí, cuya combinación lineal, igualada al vector cero, sea única? ¿Cuál es la respuesta de esta misma pregunta, si los vectores son de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

En la pregunta 10, se espera que los estudiantes reflexionen sobre la dimensión de un conjunto de vectores que es linealmente dependiente en un espacio vectorial. En el caso de $\mathbb{R}^2$ el máximo número de vectores que son linealmente independientes es dos y por tanto la combinación lineal de los vectores igualada al vector cero es única. Para el caso de $\mathbb{R}^3$ el máximo número de vectores es tres. Con estos argumentos un estudiante estaría en una concepción Proceso del concepto.

Si un estudiante no logra relacionar la combinación lineal de manera general con la dependencia e independencia lineal, dicho estudiante se encuentra en una concepción Acción del concepto.

Pregunta 11

> A un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ o de otro espacio de vectores, cuya combinación lineal igualada al vector cero, no es única, se dice que estos vectores forman un conjunto de vectores linealmente dependientes. De una definición de ese conjunto.

Pregunta 12

> A un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ o de otro espacio de vectores, cuya combinación lineal igualada al vector cero, es única, se dice que estos vectores

forman un conjunto de vectores linealmente independientes. De una definición de ese conjunto.

Finalmente, para las preguntas 11 y 12 se busca que los estudiantes describan lo que entienden por un conjunto de vectores linealmente dependiente e independiente, respectivamente.

5.3. Recolección y análisis de datos

En este capítulo se encuentra el análisis de las actividades (talleres y entrevista) realizadas por dos estudiantes que evidenciaron concepciones Acción y Proceso, respectivamente del concepto de dependencia lineal.

Las hojas de trabajo de los estudiantes fueron analizadas a la luz de los elementos descritos por Mares (2016). Como se mencionó anteriormente se decide tomar dos estudiantes a los cuales se les asignan nombres ficticios: Andrés y Paola.

5.3.1. Evidencias de las estructuras mentales

En el desarrollo de los talleres se evidenciaron las construcciones logradas sobre el concepto de dependencia lineal en los estudiantes. A continuación, se describe cada estructura tomando como fundamento la actividad desarrollada por Andrés y Paola.

Concepciones de Andrés sobre el concepto de dependencia lineal: Las concepciones de Andrés sobre el concepto de dependencia lineal inicialmente lo llevan a centrarse en determinar si un vector es múltiplo escalar del otro. Como se muestra a continuación, esto es consistente cuando cuenta con un conjunto formado solo por dos vectores. Pero no es suficiente para abordar situaciones que incluyen más vectores. En la pregunta 1 Andrés identifica que los vectores son linealmente dependientes porque $v_2 = 2v_1$, es decir, que son múltiplos (ver *Figura 21).*

> Pregunta 1: ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $v_1 = (1,2)$ y $v_2 = (2,4)$?

1) $V_1 = (1,2)$ y $V_2 = (2,4)$ Son linealmente dependientes porque $V_2 = (2,4)$ es múltiplo de $V_1 = (1.2)$, porque al multiplicar $V_1 = (1,2)$ por Un escalar 2 obtenemos $V_2 = (2,4)$

$V_2 = (2,4) = 2\ (1,2)$

Figura 21. Solución Andrés de la pregunta 1.

En este caso Andrés identifica el escalar que multiplica al vector v_1 para determinar su relación con v_2. Como se muestra a continuación, la Acción que realiza Andrés sobre el par de vectores, es una condición necesaria pero no suficiente para construir una estructura Acción de la dependencia lineal.

En la pregunta 16 que incluye 3 vectores, los argumentos de Andrés no le permiten resolver el problema de manera correcta.

> Pregunta 16: ¿Los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$, $v_2 = (-2, -1, -3)$ y $v_3 = (1, 4, 9)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

i) Los vectores V_1, V_2 y V_3 Son linealmente independientes porque ninguno es multiplo escalar del otro.

Figura 22. Solución Andrés de la pregunta 2.

Es importante mencionar que en esta pregunta Andrés determina que ningún vector es múltiplo escalar del otro, solo por exploración (ver *Figura 22*); esto, sin realizar ningún tipo de razonamiento diferente al argumento del múltiplo escalar. El trabajo de Andrés revela la necesidad de construir el concepto de dependencia lineal que le permita estructurar una concepción Acción de dependencia lineal.

Esto se evidencia con mayor profundidad cuando se plantea la siguiente pregunta durante la entrevista:

¿Si $a\ (2, 3, 4) + b\ (-1, 2, 5) + c\ (2, 1, 0) = (0, 0, 0)$ entonces $a = b = c = 0$ es la única solución?

> Andrés: Es única porque los vectores son linealmente independientes.
> Entrevistador: ¿Cómo así?
> Andrés: Si, como son linealmente independientes, pues no son múltiplos del otro, entonces no hay una combinación en donde los escalares sean distintos de cero.

En este caso, también se puede evidenciar que el estudiante no tiene una concepción Proceso de combinación lineal, ya que solo ve la dependencia lineal, únicamente cuando los vectores son múltiplos.

> Entrevistador: ¿Y cómo sabes que los vectores son linealmente independientes?
> Andrés: Porque no son múltiplos, porque no puedo formar el uno con el otro.

En la pregunta 10 del taller, se evidencia que el estudiante no tiene una concepción Proceso del concepto, que podría deberse a no haber construido el concepto de combinación lineal (ver *Figura 23).*

> Pregunta 10: Sean $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, -1, 0)$ y $v_3 = (4, 1, 1)$ vectores linealmente independientes. Diga sin hacer operaciones, si $v = (0, 0, 1)$

es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Si lo es, no es necesario dar la combinación lineal. Explique su respuesta.

Figura 23. Solución Andrés de la pregunta 2.

De acuerdo a Mares (2016) para construir el concepto de dependencia lineal, el estudiante necesita una concepción Objeto de combinación lineal. Sin embargo, en las actividades de Andrés encontramos que no tiene una concepción Objeto de combinación lineal, ya que según Parraguez (2011) un estudiante tiene una concepción Objeto de combinación lineal, cuando puede comparar el Objeto de combinación $c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$ con el Objeto v a través de la igualdad de vectores y la existencia de los escalares $c_1, \dots, c_n \in K$, resultando el Objeto de combinación lineal, que se lee v es combinación lineal de $u_1 \dots, u_n$ (Parraguez, 2011, p.267-268). La siguiente pregunta, es un ejemplo de lo mencionado anteriormente.

Pregunta 14: Abra el Act1.T4 en Geogebra y con base en ello conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Puede encontrar geométricamente, que la combinación lineal de estos vectores dé como resultado el vector cero? Justifique su respuesta.

b) ¿La combinación lineal de los vectores que da el vector cero, es única? Explique su respuesta; de ejemplos que la apoyen.

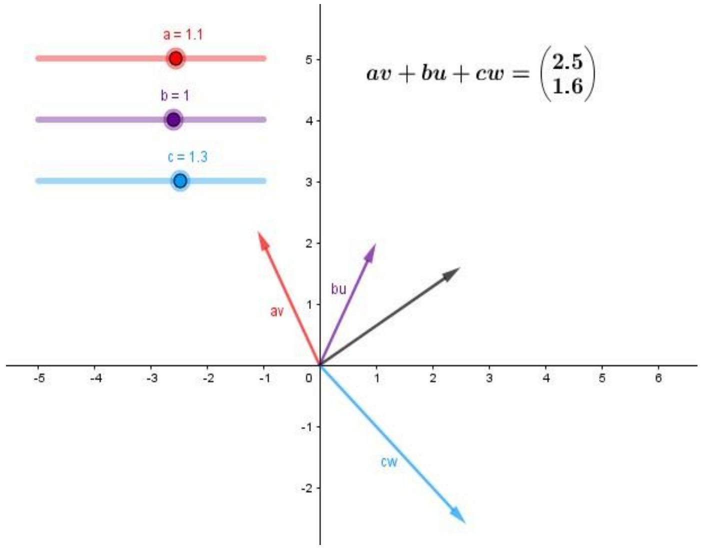


Figura 24. Actividad de Geogebra. Pregunta 5.

En la respuesta de Andrés (ver *Figura 25*) se puede observar que, para él, la única forma de que la combinación lineal de los tres vectores dé como resultado el vector cero, es que los escalares sean ceros, es decir, el estudiante solo está encontrando una solución. Sin embargo, el estudiante no tiene en cuenta que existen infinitas combinaciones lineales que den el vector cero, es decir la existencia de todos los escalares que permiten la igualdad entre el vector cero con la combinación lineal de los vectores v, u y w.

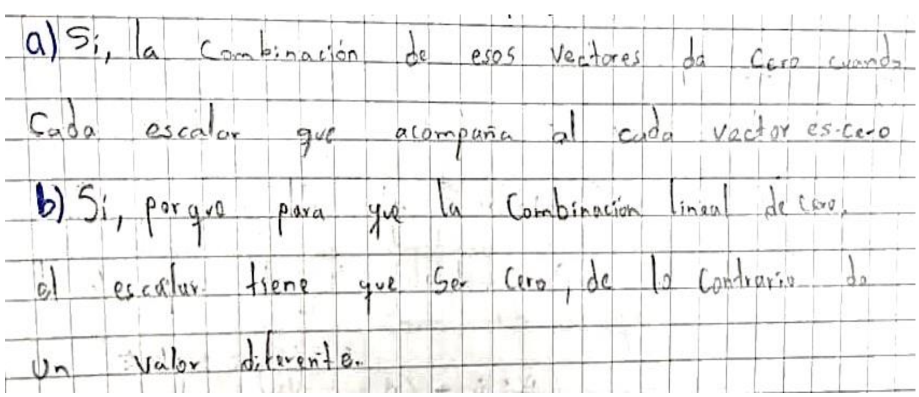

a) Si, la Combinación de esos Vectores da Cero cuando Cada escalar que acompaña al cada vector es cero
b) Si, porque para que la Combinación lineal de cero, el escalar tiene que Ser Cero, de lo Contrario da Un valor diferente.

Figura 25. Solución Andrés de la pregunta 3.

Finalmente se puede concluir que la falta de tener una concepción Objeto de combinación lineal, y la falta de una concepción Proceso de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales para determinar que existen diferentes conjuntos de soluciones de una misma combinación lineal, no permite que el estudiante evidencie una concepción Proceso del concepto de dependencia lineal.

De una concepción Acción a una concepción Proceso**:** en la pregunta 1 del taller Paola evidencia una estructura Acción, ya que encuentra que los vectores son múltiplos (ver *Figura 26)*.

Pregunta 1: ¿Los vectores $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (2, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes o independientes?

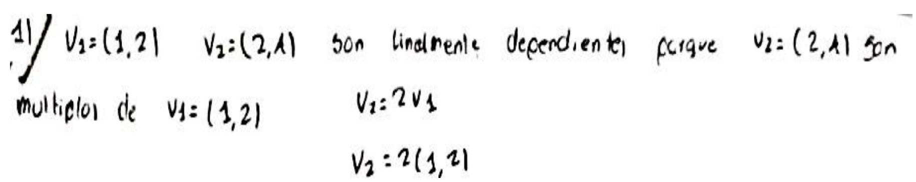


Figura 26. Solución Paola de la pregunta 1.

Paola extiende esta condición a vectores en $\mathbb{R}^3$, al responder la pregunta 16, ya que nuevamente menciona que los vectores son linealmente dependientes porque son múltiplos (ver *Figura 27).*

Pregunta 16: ¿Los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$, $v_2 = (-2, -1, -3)$ y $v_3 = (1, 4, 9)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

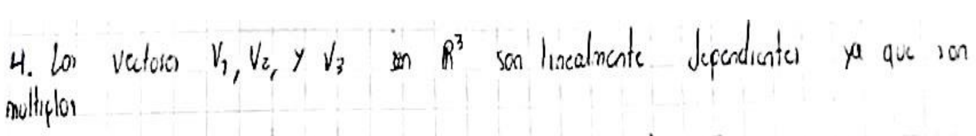


Figura 27. Solución Paola de la pregunta 2.

Para pasar de una concepción Acción a una concepción Proceso se necesita del mecanismo de *interiorización.* Este mecanismo se da mediante la reflexión de las Acciones que el estudiante está realizando. Por ejemplo, el estudiante da una evidencia de una concepción Proceso al contestar la siguiente pregunta en la entrevista:

> Entrevistador: ¿De cuántas formas puede ser expresado el vector cero como combinación lineal de dos vectores no múltiplos de $\mathbb{R}^3$?
>
> Paola: No entiendo.
>
> Entrevistador: Los vectores no son múltiplos entre sí.
>
> Paola: O sea son linealmente independientes.
>
> Entrevistador: si, ¿pueden ser muchas o puede ser solo una?
>
> Paola: una.

En el dialogo se puede evidenciar que el estudiante reconoce que, si los vectores son linealmente independientes, en este caso dos vectores cualesquiera que pertenecen a $\mathbb{R}^3$ entonces únicamente el sistema va a tener una solución, ya que uno de ellos no se puede ver en termino de otro.

Para asegurar que efectivamente Paola demuestra una concepción Proceso, se mostrara una parte de la entrevista, en donde ella reflexiona sobre la siguiente pregunta:

> Entrevistador: ¿De cuántas formas puede ser expresado el vector cero como combinación lineal de los vectores de la siguiente figura?

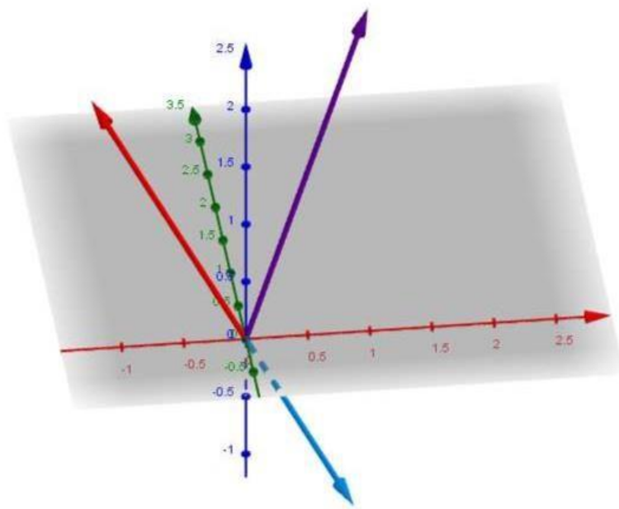


Figura 28. Pregunta 7 de la entrevista semi-estructurada.

En el primer momento del dialogo Paola menciona que los vectores deberían ser múltiplos, con lo que ella deduce que si los vectores son múltiplos necesariamente son linealmente dependientes y por tanto hay infinitas formas de combinarlos para que den el vector cero.

> Paola: Mmm…
> Entrevistador: ¿Puedes saber si existe una única o varias solamente mirando los tres vectores
> Paola: Mmm…
> Entrevistador: O ¿qué necesitas saber en $\mathbb{R}^3$ con tres vectores?
> Paola: Pues, deberían ser múltiplos.
> Entrevistador: ¿Si son múltiplos, entonces las soluciones son infinitas?
> Paola: Si.

Sin embargo, cuando se le pregunta por la otra posibilidad, que sean linealmente independientes, ella menciona que la solución es única, aunque para saber si son linealmente independientes se debe resolver el sistema y determinar si la solución es única.

> Entrevistador: ¿Y si son linealmente independientes entonces la solución es única?
> Paola: Si.

> Entrevistador: ¿Y ahí puedes saber si son linealmente independientes o son linealmente dependientes?
>
> Paola: Para saber que son dependientes que sean múltiplos… Para saber que son independientes seria hacer una matriz con los tres vectores y resolver…si al resolver eso y nos da la matriz identidad se podría decir que solo hay una solución.

Con lo anterior, Paola da evidencia de una concepción Proceso del concepto, ya que, mediante el mecanismo de coordinación, coordina los dos Procesos: combinación lineal y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. También identifica que no necesariamente los vectores que no son múltiplos son linealmente independientes, ya que ella encuentra que puede existir la forma de que ellos no sean múltiplos, pero exista una o infinitas combinaciones lineales entre ellos que den el vector cero, por esta razón es necesario resolver el sistema y determinar si la solución es única o no.

En la siguiente pregunta Paola, también da cuenta de una concepción Proceso.

> Entrevistador: ¿De cuántas formas puede ser expresado el vector cero como combinación lineal de los vectores de la siguiente figura?

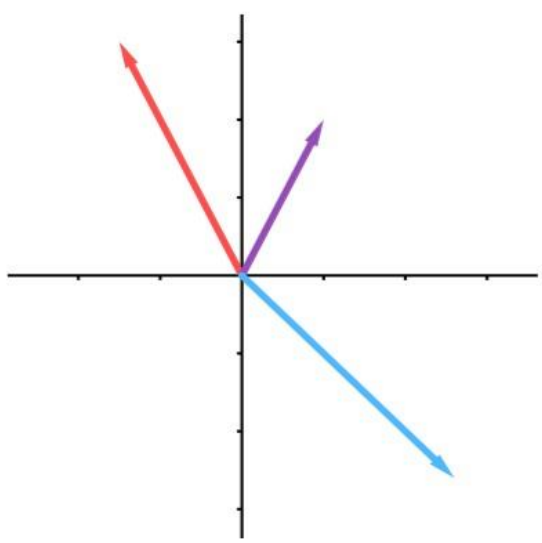


Figura 29. Pregunta 4 de la entrevista semi-estructurada.

Iniciando el dialogo se puede identificar la confusión que tuvo la estudiante, ya que mencionaba que era única la forma de ver tres vectores en $\mathbb{R}^2$ como combinación del vector cero.

> Paola: mmm…
>
> Entrevistador: Tienes tres vectores en $\mathbb{R}^2$.
>
> Paola: ¿Debo responder cuántas o cómo?
>
> Entrevistador: Si es única o son varias.
>
> Paola: Pues sería única, ya que como están en $\mathbb{R}^2$ y al haber tres vectores solo podría haber como una relación entre dos no más ¿no?, o sea si son independientes.

Sin embargo, el entrevistador menciona que si con tres vectores en $\mathbb{R}^2$, ¿solo se puede hacer una combinación lineal?, con lo cual la estudiante responde:

> Paola: Si son dependientes, sí. No, si son independientes sí. O sea, solo usted podría hacer una.
>
> Entrevistador: ¿Entonces ellos son independientes?
>
> Paola: Independientes… Dependientes.

En vista de la confusión de la estudiante, el entrevistaron pregunta que si los vectores son dependientes entonces ¿qué pasa? Con lo que Paola responde que entonces debe haber varias. Así, finalmente Paola reflexiona acerca de sus argumentos y concluye que:

> Entrevistador: Entonces ¿cambias la respuesta?
>
> Paola: Si, o sea puede haber varias combinaciones ya que están en $\mathbb{R}^2$ y pues son tres vectores entonces deberían ser dependientes.
>
> Entrevistador: Entonces, ¿cuántas combinaciones lineales podemos hacer con esos tres vectores que den el vector cero?
>
> Paola: Varias.

En el diálogo anterior se puede identificar que Paola da evidencia de una concepción Proceso del concepto, ya que identifica que, si tres vectores están en $\mathbb{R}^2$, necesariamente los vectores son linealmente dependientes y por tanto existen “varias” combinaciones lineales entre ellos que den el vector cero. En este caso Paola ya no está pensando en una combinación lineal particular de los vectores, porque con seguridad sabe que no es solo una, es decir, no necesita encontrar las combinaciones lineales para poder asegurar que son varias, sino que utiliza el hecho de que son tres vectores que están en $\mathbb{R}^2$ y puede generalizar esto.

Es importante concluir que en el trabajo realizado por Andrés se observa que no ha construido una concepción Objeto de combinación lineal, lo que hace que no pueda evidenciar una concepción Acción o Proceso del concepto de dependencia lineal. A diferencia de Andrés, Paola evidencia comprender el concepto de dependencia lineal desde diferentes formas lo que muestra que ha construido diferentes interpretaciones del concepto. Nos interesa resaltar que el objetivo en la investigación, no es describir por separado las Acciones y Procesos de manera geométrica, algebraica o numérica, sino buscar relaciones entre las interpretaciones que los estudiantes estructuran al dar solución a diferentes situaciones matemáticas.

6. Segunda Aplicación del Ciclo de Investigación

En este capítulo se describe ampliamente cada fase desarrollada en el ciclo metodológico: 6.1. análisis teórico; 6.2. Diseño e implementación de actividades; 6.3. Recolección y análisis de datos, correspondiente a la segunda aplicación. Esta aplicación toma como fundamento los principales aspectos evidenciados por los estudiantes en la primera aplicación, expuestos en el capítulo anterior.

6.1. Análisis teórico

En esta sección se propone un análisis de la relación entre la interpretación geométrica de un conjunto de vectores linealmente dependiente y los objetos concretos (sección 6.1.1.), para esto se presenta una descomposición genética para el concepto de dependencia lineal (sección 6.1.2.). Un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, puede definirse como vectores colineales (*Figura 30*), que están sobre una misma recta, o vectores coplanares, es decir que están sobre un mismo plano (*Figura 31*).

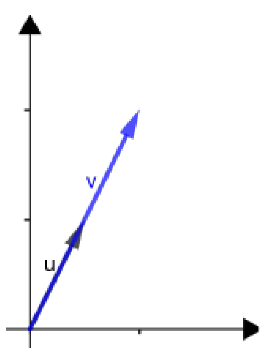


Figura 31. Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$.

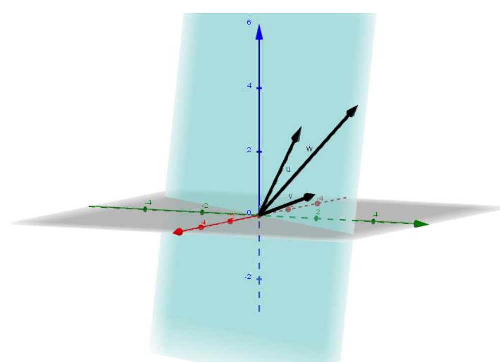


Figura 30. Tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

Hay que tener en cuenta que en el caso de que los vectores estén en $\mathbb{R}^n$ donde n sea mayor a tres, se vuelve difícil representarlos geométricamente. Autores como Trigueros y Possani (2013), Harel (2017) entre otros, mencionan sobre la dificultad que tiene la geometría para representar algunos Objetos del algebra lineal. Si un estudiante solo puede ver el concepto de dependencia lineal de forma geométrica, muy seguramente puede resolver problemas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pero si la dimensión cambia, posiblemente ya no pueda resolverlo. Por ejemplo, si le piden determinar si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente o no $\{(2,1,3,0),(0,1,2,3),(3,1,2,1),(5,2,5,1)\}$.

En particular en $\mathbb{R}^n$, una forma de definir si un conjunto finito de vectores es linealmente dependiente es:

> Un conjunto finito de dos o más vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ se dice linealmente dependiente si alguno de ellos es combinación lineal de los otros. Caso contrario, cuando ninguno puede considerarse como combinación lineal del resto, decimos que los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son linealmente independientes. (Isaacs y Sabogal, 2005, p.56).

En este caso el conjunto de vectores es linealmente dependiente ya que el vector $\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}$ se puede ver como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, como se muestra a continuación:

$$1\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\5\\1\end{pmatrix}$$

En general cuando el espacio vectorial cambia de $\mathbb{R}^n$ a otro, la definición anterior no es suficiente, por tanto se puede definir un conjunto de vectores linealmente dependiente de la siguiente forma:

> Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ es ***linealmente dependiente*** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, al menos uno de los cuales no es cero, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = 0$.

Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se llama ***linealmente independiente***". (Poole, 2011, p.99).

Arnon *et al*., 2014 define los objetos concretos como aquello que involucra el uso de objetos físicos reales o imaginarios, en esta investigación lo entendemos como la representación geométrica de un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que un estudiante puede manipular. A partir de la representación geométrica el estudiante puede inferir las características de la combinación lineal que está más relacionada con la construcción de Objetos abstractos del concepto.

En la siguiente sección se describe la descomposición genética hipotética, a partir de lo mencionado anteriormente.

6.1.1. Descomposición genética propuesta para el concepto de dependencia lineal

Con base en la primera Aplicación del Ciclo de Investigación descrito en el Capítulo 6, se formula un nuevo Análisis teórico que busca incluir aspectos relacionados con la aplicación de Acciones sobre objetos concretos (representaciones geométricas de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$). Además de algunas características importantes que los estudiantes evidenciaron al momento de construir el concepto de dependencia lineal. Con base en esto, consideramos que, si un estudiante ha construido un concepto matemático, si logra tener diferentes interpretaciones del mismo y relacionarlas entre sí para resolver diversas situaciones matemáticas que lo involucran.

En un análisis teórico de los conceptos de dependencia e independencia lineal que realizó Saldanha (1995) se evidencia que la noción de dependencia lineal surge a partir de la solución de los sistemas lineales, mediante la indeterminación de ecuaciones lineales. Por otra parte la noción de independencia lineal se presenta primero mediante una interpretación concreta en un contexto geométrico. Aunque el concepto de dependencia lineal surge primero que el concepto de independencia lineal, cuando se caracteriza el concepto de independencia lineal, es posible unificar algunos conceptos del álgebra lineal. Por ejemplo, que dos vectores que no son colineales pueden generar todo el plano y ahí surge el concepto de base y conjunto generador. También se puede definir geométricamente cuando dos o tres vectores son linealmente dependientes respectivamente:

> Dos vectores en el plano son linealmente dependientes si y solo si son colineales.
>
> Tres vectores en el espacio son linealmente dependientes si y solo si son coplanares.

Como se mencionó en el marco teórico, el Esquema es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que trae un individuo para desarrollar algún problema matemático. Para construir el Esquema de un conjunto de vectores linealmente dependiente hemos visto que la interpretación geométrica del concepto es de gran importancia, dado que dicha interpretación del Objeto matemático puede en un momento dado darle elementos a un individuo para comprender una situación aun cuando esta esté definida en términos de combinaciones lineales.

A partir de la representación geométrica el estudiante puede inferir las características de la combinación lineal que está más relacionada con la construcción de Objetos abstractos del concepto.

González y Roa-Fuentes (2017) mencionan que:

> la representación geométrica permite que el estudiante vea características de los objetos «físicos» un punto, una flecha o un polígono como representantes de los vectores de un espacio vectorial. Es decir, la representación geométrica le permite realizar acciones sobre

> objetos concretos que pueden ser interiorizadas en procesos que permiten la construcción de objetos abstractos. (González y Roa-Fuentes, 2017, p.99)

Con base en lo anterior, en la *Figura 32* mostramos un ejemplo de lo que entendemos por Acciones sobre objetos concretos y Procesos abstractos del concepto de dependencia lineal:

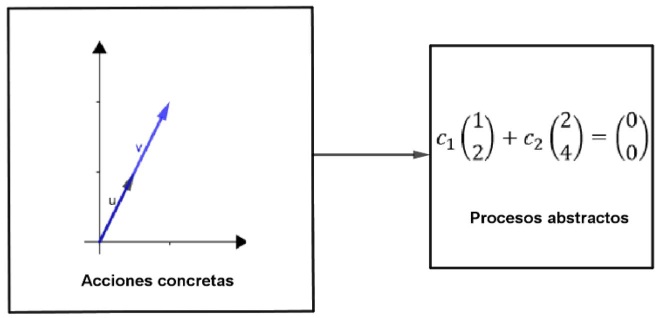


Figura 32. Transformación de Acciones concretas a Procesos abstractos

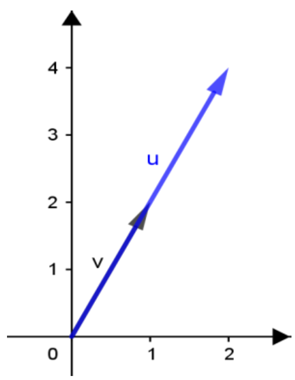
En nuestro caso, dado que tomamos las tres representaciones del Objeto: geométrica, numérica y algebraica estamos estableciendo relaciones entre ellas haciendo un ir y venir entre las diferentes estructuras de cada representación que buscamos conectar a través de la combinación lineal. Este ir y venir se determina por el tipo de problemas que un estudiante puede abordar en un curso básico de álgebra lineal y las relaciones que encuentre entres las tres representaciones del concepto.

Es aquí donde las características de las Acciones sobre los objetos concretos se transforman en Procesos que pueden dar lugar a un Objeto abstracto. La relación entre lo que es observable en la representación geométrica y las propiedades de la combinación lineal permite la evolución de las estructuras hasta ahora descritas.

Por ejemplo, para resolver la siguiente pregunta se pueden proponer tres formas de análisis diferentes:

Tabla 9

Ejemplo de interpretación geométrica, numérica y algebraica

¿Los vectores $u = (1,2)$ y $v = (2,4)$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes o independientes?		
 Son linealmente dependientes porque son colineales. Interpretación Geométrica	Los vectores son linealmente dependientes porque uno es múltiplo del otro. $(2,4) = 2(1,2)$ Interpretación Numérica	$c_1(1,2) + c_2(2,4) = 0$ $c_1 + 2c_2 = 0$ $2c_1 + 4c_2 = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & :0 \\ 2 & 4 & :0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$ El sistema tiene **infinitas soluciones**, luego los vectores son linealmente dependientes. Interpretación algebraica

Por tanto, a continuación, planteamos cuáles son las estructuras previas necesarias para que un estudiante construya el concepto de dependencia lineal:

1) *Objeto de combinación lineal*: el estudiante necesita aplicar Acciones sobre el Objeto de combinación lineal, cuando compara diferentes conjuntos de soluciones de una misma combinación lineal.
2) *Esquema de espacio vectorial para* $\mathbb{R}^n$*:* el estudiante necesita realizar operaciones entre vectores y también poder pasar de un espacio vectorial a otro(en este caso dentro de $\mathbb{R}^n$).
3) *Objeto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones*: el estudiante necesita considerar el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. En este caso el estudiante debe identificar si no hay solución, si es única o si son infinitas.

Partiendo de las estructuras previas, a continuación de caracterizan cuáles son las estructuras hipotéticas necesarias para construir el concepto de dependencia lineal.

Concepción Acción: diremos que un estudiante tiene una concepción Acción de un conjunto de vectores linealmente dependiente, cuando:

1) Tiene una concepción Proceso de combinación lineal, en donde puede ver un vector como combinación lineal de uno o más vectores. Tiene una concepción Esquema de espacio vectorial para $\mathbb{R}^n$, donde puede realizar operaciones entre vectores y pasar de un espacio vectorial a otro dentro de $\mathbb{R}^n$. Así el estudiante puede determinar que un conjunto de vectores es linealmente dependiente, porque uno de los vectores se puede ver como combinación lineal de uno o más vectores.

2) Tiene una concepción Esquema de espacio vectorial para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ porque puede graficar vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así el estudiante puede determinar que, si los vectores son colineales o coplanares (en el caso de que sean más de dos vectores), entonces son linealmente dependientes.

El siguiente problema puede dar cuenta de una concepción Acción:

> Grafique en Geogebra los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$. ¿Son linealmente dependientes o independientes? ¿Qué puede decir de esos vectores?

En este ejemplo, es posible que un estudiante identifique que $v_1 = -2v_2$ y por tanto los vectores son linealmente dependientes. También un estudiante, al graficar los vectores (ver *Figura 23*) puede determinar que son colineales y por tanto son linealmente dependientes.

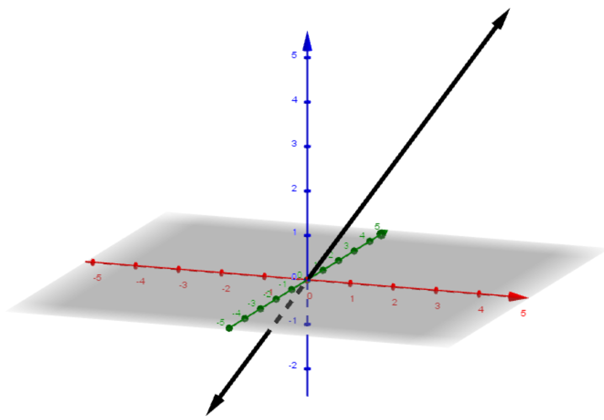


Figura 33. Ejemplo de dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$.

Mediante la reflexión de las Acciones descritas anteriormente, el estudiante puede interiorizar dichas Acciones para describir de manera general el comportamiento de los vectores, es decir qué relación existen entre las interpretaciones algebraicas, geométricas y numéricas de los vectores, que dan cuenta de las características que tiene un conjunto de vectores linealmente dependiente.

Concepción Proceso: Para tener una concepción Proceso del concepto de dependencia lineal, un estudiante necesita una concepción Proceso de combinación lineal, para poder ver un vector en términos de uno o más vectores. También debe tener una concepción Objeto de conjunto solución de una ecuación, para considerar el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Mediante el mecanismo de coordinación el estudiante puede determinar todas las soluciones de las combinaciones lineales que dan el vector cero. En este caso el estudiante puede identificar que si la solución no es única entonces el conjunto es linealmente dependiente.

A partir del siguiente ejemplo es posible evidenciar una concepción Proceso:

> Dado tres vectores u, v y w en $\mathbb{R}^2$, ¿Siempre es posible encontrar los números reales α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$?

Para resolver esta pregunta, es importante que el estudiante esté reflexionando sobre las Acciones realizadas. Dado que si su construcción se limita a una concepción Acción podría responder que siempre es posible encontrar los números reales α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$, ya que está viendo tres vectores en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, un estudiante con una concepción Proceso podría pensar en el caso de que u y v estén sobre una misma recta y w no pertenezca a esa recta, en ese caso no existen los números reales α y β, tal que w se pueda ver como combinación lineal de ellos (ver *Figura 34*).

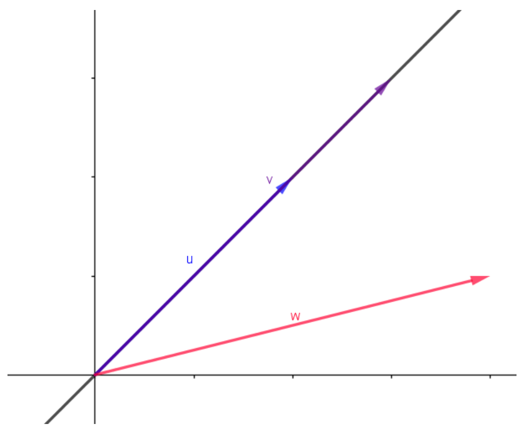


Figura 34. Ejemplo de una concepción Proceso.

Concepción Objeto: Un estudiante evidencia una concepción Objeto, cuando ha encapsulado el Proceso de dependencia lineal, es decir, cuando realiza Acciones sobre el Objeto de un conjunto de vectores linealmente dependiente. También un estudiante da evidencia de una concepción Objeto, cuando puede desencapsular el Objeto para volver al Proceso del cual dio origen.

El siguiente ejemplo permite evidenciar una concepción Objeto:

> ¿Cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente dependiente? ¿Por qué?

Un estudiante con una concepción Objeto, puede realizar el siguiente razonamiento: Escribir un conjunto de vectores que sea linealmente independiente $\mathrm{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ donde los vectores pertenecen a $\mathbb{R}^n$ y $m < n$. Así, al agregar el vector cero ($\mathbf{0}$) al conjunto A llamemos $\mathrm{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \mathbf{0}\}$ a ese nuevo conjunto. Puede suponer que el conjunto B es linealmente independiente, entonces se debe cumplir que la única forma de que la combinación lineal $\mathrm{c}_1 u_1 + \mathrm{c}_2 u_2 + \cdots + \mathrm{c}_\mathrm{m} u_m + \mathrm{c}_\mathrm{k}\mathbf{0}$ de el vector cero, es que los escalares $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_\mathrm{m}, \mathrm{c}_\mathrm{k}$ sean iguales y sean cero. Pero esto es falso, ya que se cumple que $0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_m + \mathrm{c}_\mathrm{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para $\mathrm{c}_\mathrm{k} \neq 0$.

Otro ejemplo de una concepción Objeto es el siguiente:

> Sea $\{\binom{0}{2}, \binom{3}{0}\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Determine si el conjunto sigue siendo linealmente independiente, bajo la transformación lineal
>
> $\mathrm{T}\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Un estudiante con una concepción Objeto puede resolver este tipo de problemas, ya que necesita aplicar Acciones sobre el conjunto de vectores linealmente independiente. En este caso, el conjunto sigue siendo linealmente independiente bajo la transformación lineal ($\left\{\binom{-1}{3}, \binom{4}{2}\right\}$.

La descomposición genética de un conjunto de vectores linealmente dependiente, descrita anteriormente, se sintetiza en la siguiente figura (ver *Figura 35*).

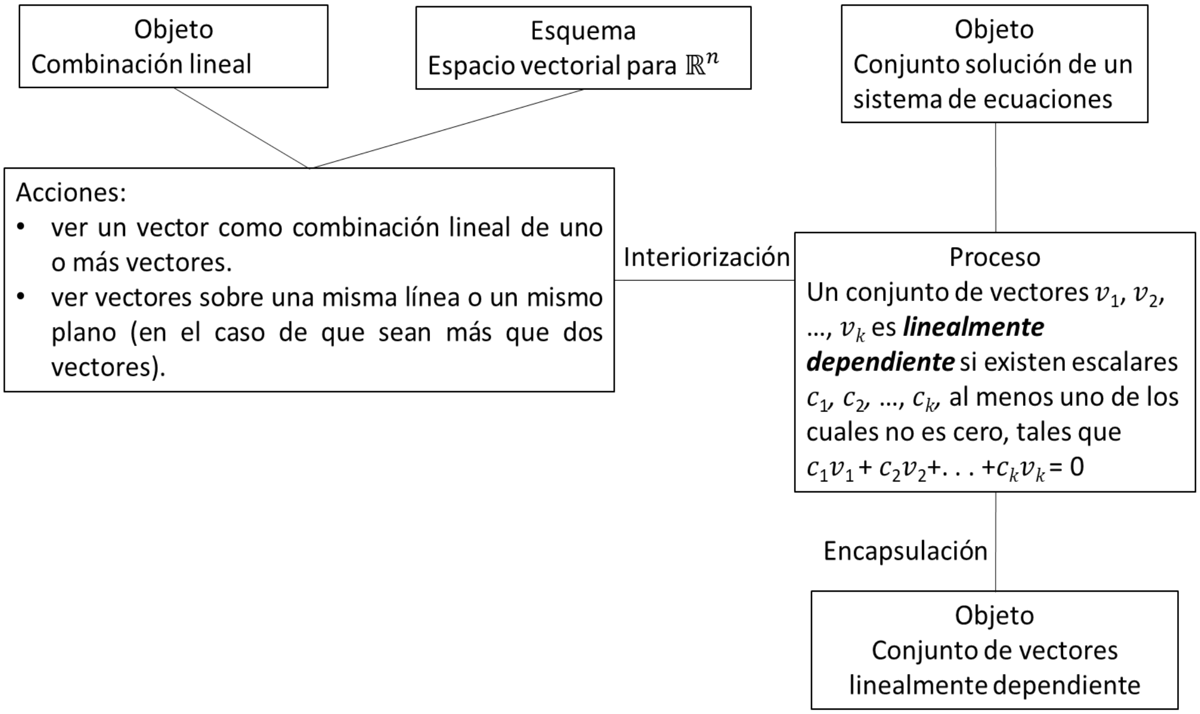


Figura 35. Descomposición genética de un conjunto de vectores linealmente dependiente.

6.2. Diseño e implementación de actividades

En esta sección se presenta la población y el número de estudiantes que participaron en la implementación de las actividades (sección 6.2.1). También se presenta un análisis de las tareas propuestas en el taller (sección 6.2.2), además de un análisis de la entrevista (sección 6.2.3).

6.2.1. Descripción de la población. Para validar el rediseño de la descomposición genética se realizaron 4 sesiones de clase donde se abordaron 17 problemas (Anexo 4); además se diseñó y realizó una entrevista semi-estructurada (Anexo 5) a algunos estudiantes que cursaban algebra lineal I en primer semestre de ingeniería electrónica. Los estudiantes se seleccionaron de manera aleatoria incluyendo estudiantes de promedio bajo, medio y alto.

Aunque las preguntas de los talleres que se aplicaron pueden no mencionar específicamente el concepto de dependencia lineal, la intención es identificar de qué manera los estudiantes los interpretan y dan solución. Es decir, la intención del taller es poner en juego los elementos teóricos para darles diferentes interpretaciones a partir de la reflexión que tenga cada estudiante.

6.2.2. Análisis general de las tareas propuestas en el taller. Las preguntas del taller se clasificaron tomando en cuenta las estructuras y/o mecanismos mentales que los estudiantes podrían reflejar al abordarlas. A continuación, se muestra el análisis a priori de cada actividad (ver Tabla 8) de acuerdo con los elementos descritos en el análisis teórico (sección 6.1).

Tabla 10

Análisis a priori de las preguntas del taller 2

Estructura	Preguntas del taller 2
Acción	En las preguntas 1, 8, 11 y 12 el estudiante debe tener presente que: • Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores se puede ver como múltiplo del otro. • Dado un conjunto de vectores, se dice que es linealmente dependiente, si se puede ver un vector como una combinación lineal especifica de los demás vectores. • Dos vectores en el plano son linealmente dependientes si y solo si son colineales. • Tres vectores en el espacio son linealmente dependientes si y solo si son coplanares.
Proceso	En las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 14 y 15, 16 y 17 el estudiante debe tener presente que: Un conjunto de vectores es linealmente dependiente, si al menos un vector del conjunto se puede ver como una combinación lineal del otro. Está definición puede ser como consecuencia de las Acciones realizadas e interiorizadas, por ejemplo, al tener tres vectores en $\mathbb{R}^2$, sin necesidad de que los vectores sean colineales, el estudiante puede deducir que son linealmente dependientes, porque al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.
Objeto	En la pregunta 9 se pide realizar Acciones sobre los conjuntos linealmente dependientes, para determinar si la unión de todos los conjuntos es linealmente dependiente o no.

Por ejemplo, se considera que un estudiante está en una concepción Acción si en la pregunta 11 del taller 2, identifica que los vectores son linealmente dependientes porque están sobre una misma recta.

> Grafique en Geogebra los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$. ¿Son linealmente dependientes o independientes? ¿Qué puede decir de esos vectores?

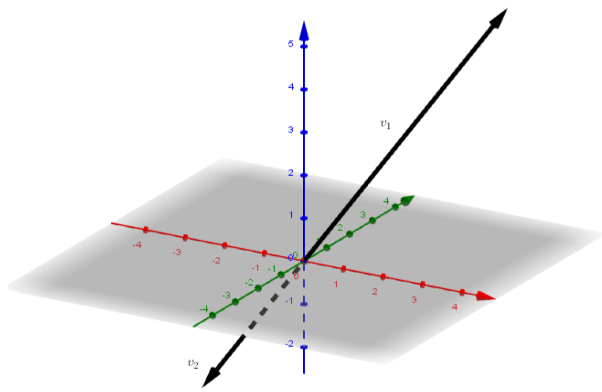


Figura 36. Gráfica de los vectores de la pregunta 11 del taller 2.

Un estudiante con una concepción Proceso del concepto en la pregunta 2 del taller 2, puede identificar por medio de la interiorización de Acciones que tres vectores que están sobre un mismo plano, necesariamente son linealmente dependientes y por tanto al menos uno de ellos se puede ver como combinación lineal de los demás.

> Abra el archivo Act.3 donde se muestran los vectores $u = (1, -1, 1), v = (2, 0, 2)$ y $w = (-1, 3, -1)$ que están sobre un mismo plano. ¿Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w = \alpha u + \beta v$?

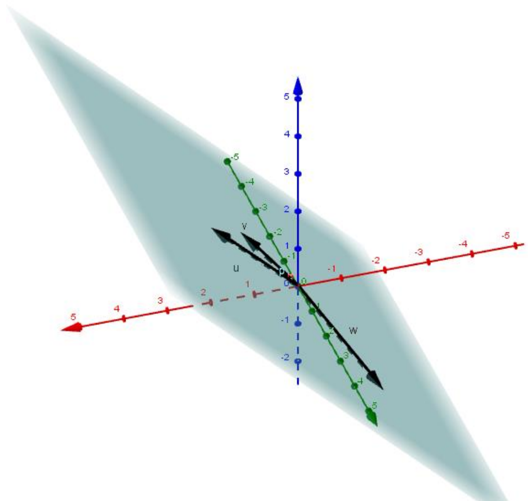


Figura 37. Gráfica de los vectores de la pregunta 2 del taller 2.

Además, para este caso, el estudiante puede identificar por medio de la gráfica *Figura 37* que ninguno de los vectores está sobre una misma recta, es decir, son linealmente independientes dos a dos. En particular los vectores u y v generan todo el plano en el que están los vectores $u = (1, -1, 1), v = (2, 0, 2)$ y $w = (-1, 3, -1)$. Así generan a todos los vectores que están en el, en particular al vector $w = (-1, 3, -1)$.

Con lo anterior se puede observar que cuando un estudiante está en una concepción Proceso del concepto de dependencia lineal, puede utilizar interpretaciones geométricas, algebraicas y numéricas que le dan herramientas para validar sus argumentos.

Un ejemplo de un estudiante con una concepción Objeto se da en la pregunta 9 del taller 2:

> Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
>
> Sean los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 en $\mathbb{R}^n$. Si sabe que los conjuntos $\{\ v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son linealmente

independientes, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independientes.

Porque el estudiante necesita aplicar Acciones sobre los conjuntos linealmente independientes, para así poder saber si el conjunto de los vectores es linealmente independiente.

6.2.3. Análisis a priori de la entrevista. La entrevista (ver anexo 5) está compuesta de ocho preguntas basadas en el análisis teórico. A continuación, se presenta el análisis a priori de cada una.

Los estudiantes seleccionados para realizar el taller fueron los mismos que se seleccionaron para realizar una entrevista didáctica, que permitiera analizar las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes evidencian al construir el concepto de dependencia lineal. Las preguntas de la entrevista se diseñaron con base en lo encontrado en las actividades realizadas por los estudiantes con el fin de refinar la descomposición genética propuesta.

Pregunta 1

1.1. Mencione cuando dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes.

1.2. Mencione cuando dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes.

1.3. ¿Son tres vectores en $\mathbb{R}^3$ siempre linealmente independientes?

En la pregunta 1 se espera que los estudiantes con una concepción Acción mencionen que los vectores son linealmente dependientes cuando son múltiplos, colineales o coplanares. Sin embargo, un estudiante con una concepción Proceso del concepto podría mencionar que cuando existen más de una o infinitas combinaciones lineales de los vectores igualada al vector cero.

Pregunta 2

5.1.Determine el conjunto generado por $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

5.2.Encuentre tres vectores que generen $\mathbb{R}^3$.

5.3.¿Es posible que cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ generen $\mathbb{R}^3$?

En la pegunta 2 se espera que un estudiante con una concepción Proceso del concepto, identifique que dos vectores que son linealmente independientes generan un

plano. También que tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ y que si a un conjunto de vectores que generan $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$se le agregan uno o más vectores igual el conjunto sigue generando $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Esto porque la combinación lineal de los vectores se sigue manteniendo.

Pregunta 3

Determine si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{pmatrix}\right\}$$

Determinando que el siguiente sistema tiene infinitas soluciones:

En la pregunta 3 se espera que un estudiante con una concepción Proceso del concepto, determine que los vectores son linealmente dependientes por medio de algún método de reducción.

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pregunta 4

Sea A una matriz de 3×3 y sean $v=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Suponga que $Av=-v$ y $Aw=2w$. Entonces encuentre el vector $A^5\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$.

En la pregunta 4, se espera que los estudiantes con una concepción Proceso del concepto determinen que los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes. También que los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ son linealmente independientes y por tanto el vector $\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$ se puede ver como combinación lineal de ellos.

$$3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$$

Multiplicado a ambos lados por A^5 y por propiedades se puede ver de la siguiente forma:

$$3A^5\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}-2A^5\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=A^5\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$$

Y por medio de propiedades encontrar la solución $A^5\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}-131\\58\\-189\end{pmatrix}$.

Pregunta 5

Sean $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\a\\5\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\4\\b\end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine una condición de los escalares a y b tal que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea linealmente dependiente.

En la pregunta 5 se espera que un estudiante con una concepción Proceso del concepto logre establecer las condiciones sobre a y b para que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea linealmente dependiente. Esto por medio de algún método de reducción encontrar que $b(a-2) = 20$.

Pregunta 6

¿Cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente dependiente? ¿Por qué?

En la pregunta 6 se espera que un estudiante con una concepción Objeto del concepto pueda identificar que cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente dependiente por medio de la des-encapsulación del Objeto encapsulado y encontrando las propiedades de un conjunto que es linealmente dependiente.

Esta prueba se hace por el método de contradicción, suponiendo que un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente independiente. Entonces la única forma de que la combinación lineal de los vectores de el vector cero es que todos los escalares sean cero, sin embargo, teniendo el vector cero se puede multiplicar por cualquier otro escalar y aun así sigue dando el vector cero, luego ese conjunto de vectores no es linealmente independiente.

Pregunta 7

> ¿Si se tiene una matriz A de 3×5 (3 filas y 5 columnas) entonces los vectores columna de la matriz son linealmente dependientes?

En la pregunta 7 se espera que un estudiante con una concepción Proceso del concepto pueda identificar que los vectores están en $\mathbb{R}^3$ y por tanto como son 5 vectores, necesariamente son linealmente dependientes.

Pregunta 8

> Escriba con sus palabras cuando un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

En la pregunta 8 se busca determinar cuál es la concepción del estudiante a partir de los argumentos de cómo interpreta un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^n$.

6.3. Recolección y análisis de datos, correspondiente a la segunda aplicación.

Las evidencias presentadas en este apartado incluyen el análisis del trabajo realizado por los estudiantes durante el desarrollo del taller y la entrevista realizada a 8 estudiantes. El análisis de los datos se presenta a partir de las estructuras que pueden evidenciarse en sus procedimientos. Por tanto, no se analiza cada estudiante, sino más bien, se da cuenta de las concepciones que lograron desarrollar a partir de su participación en esta investigación.

A cada estudiante se le llamo E1, E2, E3 y así sucesivamente.

Evidencia de una posible concepción Acción: La siguiente pregunta se le presentó en la entrevista a E1.

Entrevistador: Mencione cuando dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes.

E1: Cuando un vector es múltiplo del otro (ver *Figura 38*).

En la *Figura 38* E1 también da un ejemplo de dos vectores que son múltiplos $((1,2),(2,4))$, ya que menciona que si multiplica el primero por 2, obtiene el segundo vector.

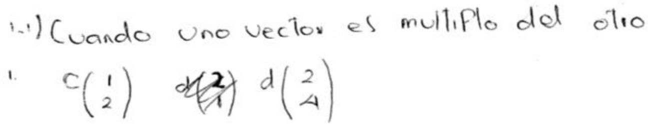


Figura 38. Solución de E1 en la entrevista.

Con lo anterior, se puede evidenciar que E1 puede determinar que dos vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$ cuando uno es múltiplo de otro. Sin embargo, en las actividades no evidencia una concepción Acción, ya que cuando la pregunta es mediante una representación geométrica E1 no es capaz de identificar si los vectores son linealmente dependientes o independientes. Por ejemplo, en la siguiente pregunta:

Grafique en Geogebra los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$. ¿Son linealmente dependientes o independientes? ¿Qué puede decir de esos vectores?

A pesar de que los vectores están sobre una misma recta, es decir son colineales (ver *Figura 39)*, E1 argumenta que son linealmente independientes porque no están en la misma dirección (ver *Figura 40*).

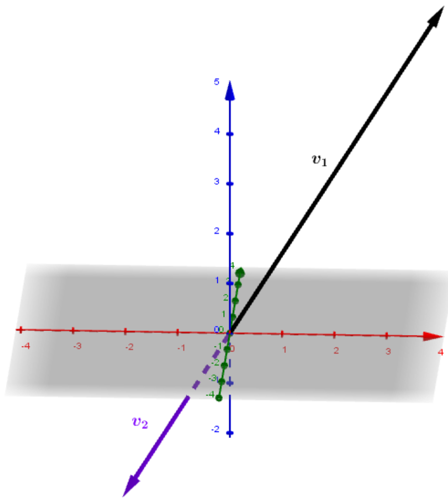


Figura 39. Representación de los vectores de la pregunta del taller.

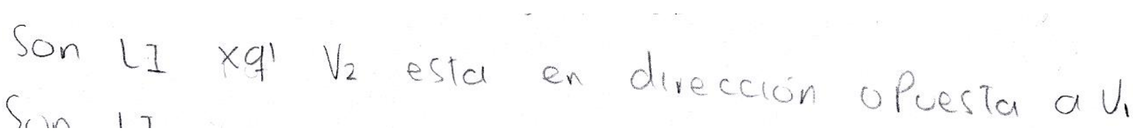


Figura 40. Solución de E1 en el taller.

Con lo anterior, se puede evidenciar que E1 no tiene diferentes interpretaciones del concepto.

La siguiente pregunta se le presentó en la entrevista a E1, con la intención de indagar sobre su concepción Proceso del concepto de dependencia lineal.

> Entrevistador: Si te preguntan si este conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, ¿qué dices?

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

E1: Así a ojo no sabría decirlo.

Entrevistador: Pero entonces puedes asegurar que, ¿son linealmente independientes?

E1: No.

Entrevistador: ¿Entonces que hace falta para determinar que los vectores sean linealmente dependientes o independientes?

E1: Nosotros hacíamos igualar los vectores a cero y hacer la escalonada (ver *Figura 41*).

En el dialogo anterior E1 muestra como un algoritmo que recuerda que vio en clase con el profesor, sin embargo, no es consciente de que sea correcto.

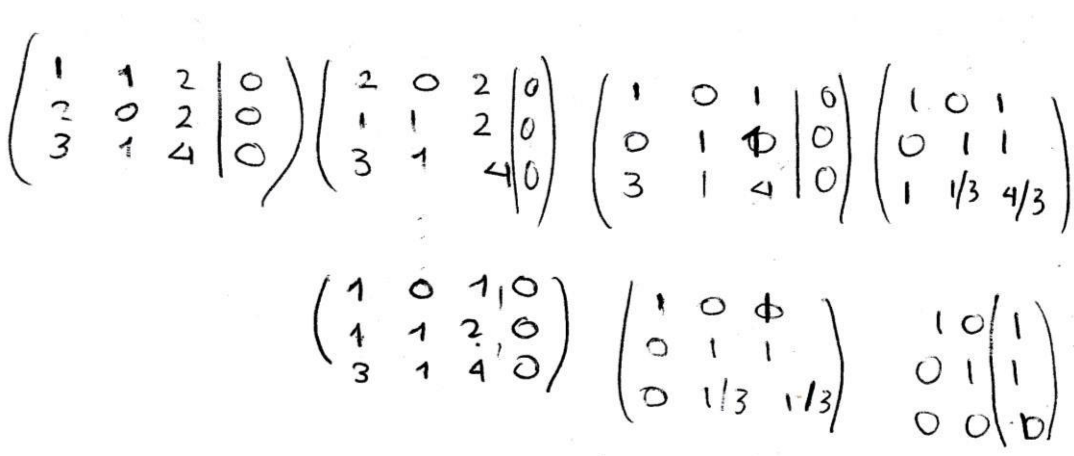


Figura 41. Solución de E1 en la entrevista.

Después de que el estudiante resuelve el sistema, no es capaz de interpretar el conjunto solución, ya que en este caso (*Figura 41*) da que el sistema tiene infinitas soluciones. Sin embargo, Camila no es capaz de relacionar dicha respuesta con la dependencia e independencia lineal de los vectores, ya que su concepción del concepto se queda en Acciones.

Con las evidencias de Camila, se puede dar cuenta que la construcción del concepto de dependencia lineal va de la mano con las diferentes representaciones del concepto, que el estudiante pueda tener. Es decir, consideramos que un estudiante que no tiene diferentes representaciones del concepto, no puede reflexionar sobre las Acciones que realiza y por tanto, no logra evolucionar a una concepción Proceso. En este sentido coincidimos con Hillel (2000) que menciona que todas las interpretaciones son importantes, pero ninguna sustituye a la otra, es decir, en este caso lo algebraico no va a sustituir a lo geométrico ni lo geométrico va a sustituir a lo algebraico.

Interiorización de Acciones: evidencia de Procesos

En la entrevista, cuando se le preguntó a E2, cuando dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, el menciona que cuando existe un valor múltiplo que le permite llegar de un valor a otro. Cuando el entrevistador le pide que dé un ejemplo, el estudiante grafica los vectores (*Figura 42*), luego el estudiante dice:

> E2: Sí, yo tengo un vector acá y el otro está acoplado ya sea por arriba o por abajo ya directamente son dependientes, pero si no está por ahí entonces serían linealmente independientes (ver *Figura 30*).
>
> Entrevistador: ¿Les puedes dar coordenadas a los vectores?
>
> E5: Si.

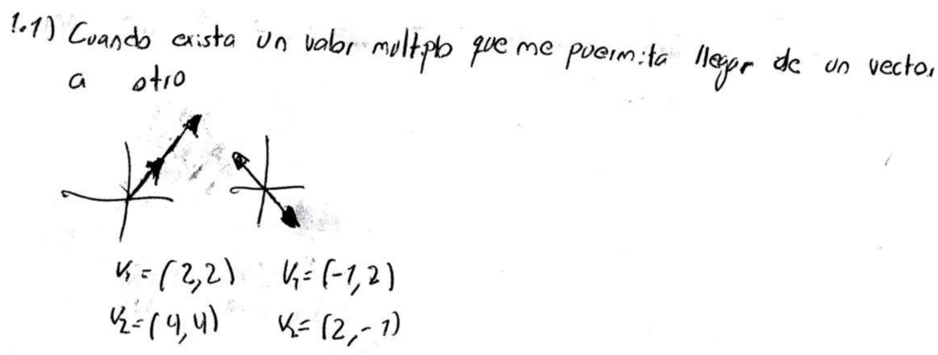


Figura 42. Ejemplo de E2 en la entrevista.

Aunque el estudiante da una explicación correcta de manera geométrica, cuando escribe los vectores algebraicamente tiene un error, ya que $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (2, -1)$ no son linealmente dependientes. Sin embargo, el estudiante se encuentra en una concepción Acción del concepto, ya que logra deducir cuando dos vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$ por medio de la colinealidad de los vectores y de manera algebraica.

La siguiente pregunta se le presentó a E2 en un taller:

3. ¿Los vectores u, v y w son linealmente dependientes o independientes?

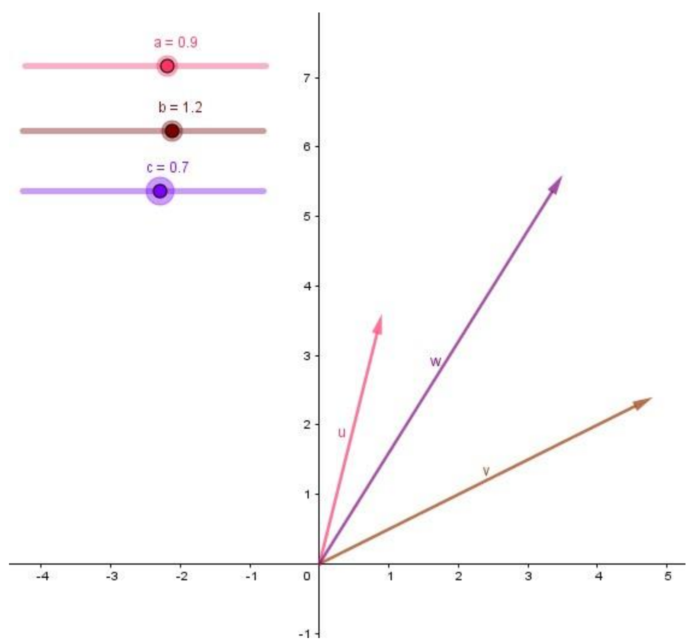


Figura 43. Pregunta 3 del taller 2.

En la solución de la pregunta 3 (ver *Figura 44*), Camilo muestra la relación entre la representación geométrica y algebraica del concepto, ya que determina por medio de una interpretación geométrica, que, si tiene 3 vectores en $\mathbb{R}^2$, necesariamente son linealmente dependientes, por medio de la interiorización de Acciones (actividades anteriores). De esta forma, tiene una concepción Proceso, ya que determina que si un conjunto de vectores es linealmente dependiente entonces al menos uno de ellos se puede ver como combinación lineal de los demás.

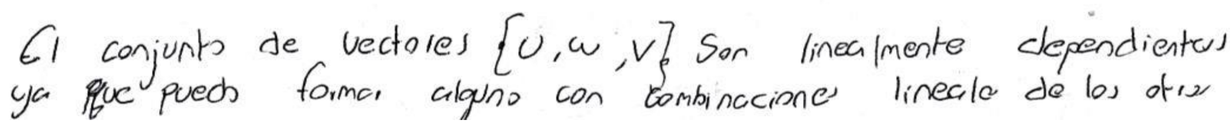

El conjunto de vectores $\{u, w, v\}$ son linealmente dependientes ya que puedo formar alguno con combinaciones lineale de los otros

Figura 44. Solución E2 de la pregunta 3.

Para esta misma pregunta otro estudiante (E3), da también evidencia de una concepción Proceso, ya que determina que los vectores son linealmente independientes, a partir de la interpretación geométrica (porque no son colineales) y por tanto forman una base y así pueden generar cualquier vector que pertenezca a $\mathbb{R}^2$, en particular pueden generar a w (ver *Figura 45*).

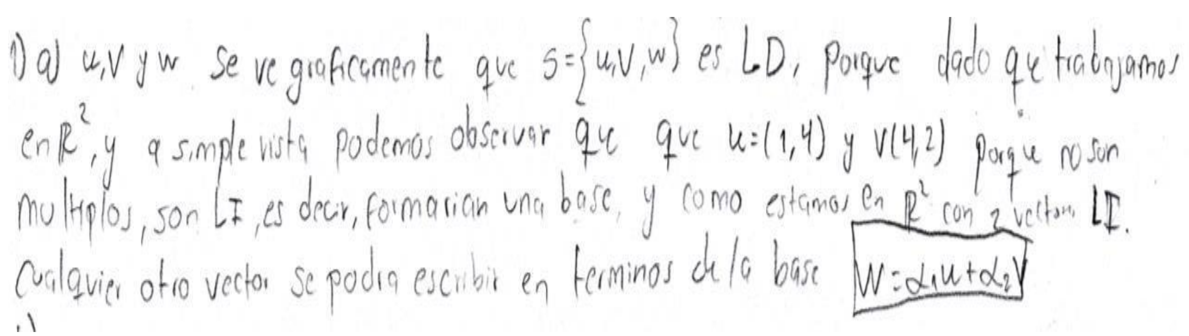

1) a) u, V y w Se ve graficamente que $S=\{u, V, w\}$ es LD, Porque dado que trabajamos en $\mathbb{R}^2$, y a simple vista podemos observar que que $u=(1,4)$ y $V(4,2)$ porque no son multiplos, son LI, es decir, formarian una base, y como estamos en $\mathbb{R}^2$ con 2 vectores LI. Cualquier otro vector se podria escribir en terminos de la base $\boxed{W=\alpha_1 u+\alpha_2 V}$

Figura 45. Solución E3 de la pregunta 3.

En la pregunta 4 E2 muestra nuevamente una evidencia de una concepción Proceso, a partir de la representación geométrica y algebraica del concepto.

4. Dado tres vectores u, v y w en $\mathbb{R}^2$, ¿Es siempre posible encontrar los números reales α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$?

En la *Figura 46* E2 menciona que no siempre se puede expresar w en términos de u y de v, ya que, si u y v son linealmente dependientes y w no pertenece a la recta generada por ellos dos, entonces el vector w no se podría ver como combinación lineal de u y v. También E2 menciona que, si u y v son vectores 0, entonces tampoco w se podría ver como combinación lineal de ellos dos. Así queda claro que E2 está evocando a partir de Acciones interiorizadas la definición de cuando un conjunto de vectores es linealmente dependiente.

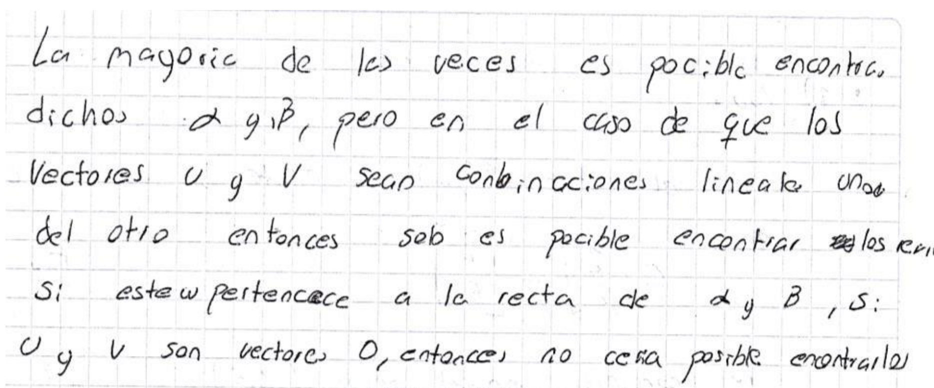

La mayoria de las veces es pocible encontrar
dichos α y β, pero en el caso de que los
Vectores U y V sean combinacciones lineales uno
del otro entonces sob es pocible encontrar los reales
si este w pertenece a la recta de α y β, si
U y V son vectores 0, entonces no cería posible encontrarlos

Figura 46. Solución de E2 de la pregunta 4.

Nuevamente E2 evidencia una concepción Proceso, ya que identifica que, si tiene tres vectores y dos de ellos generan un plano y el tercer vector no pertenece a dicho plano, entonces necesariamente los vectores son linealmente independientes, como se muestra en la siguiente pregunta:

Encuentre el plano generado por los vectores $(1, 0, 4)$ y $(0, 2, 5)$. ¿El vector $(1, 2, 0)$ pertenece a dicho plano? ¿Los vectores $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (0, 2, 5)$ y $v_3 = (1, 2, 0)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

En la solución de E2 (ver *Figura 47*) se observa que el reconoce implícitamente que, si dos vectores generan un plano, entonces ellos son linealmente independientes y si el tercer vector no está en dicho plano generado por los dos vectores anteriores, entonces los vectores son linealmente independientes porque con dos vectores que él tome, no se puede formar el tercer vector.

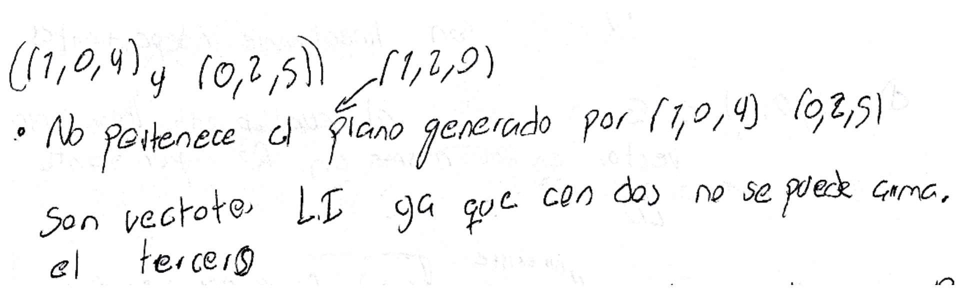


Figura 47. Solución de E2 de la pregunta 5.

En la pregunta 6 de la entrevista E2 da una evidencia de una concepción Proceso (*Figura 48*).

Diga si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\7\\11\end{pmatrix}\right\}$$

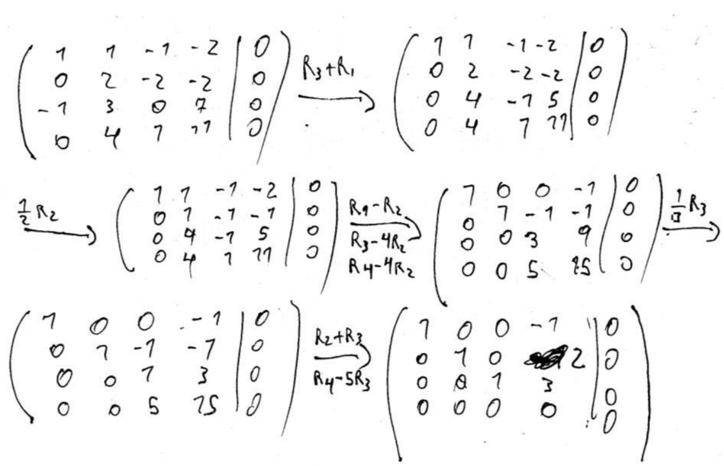


Figura 48. Solución E2 pregunta 6.

Después, empieza el siguiente dialogo:

Entrevistador: ¿Qué encontraste?

E2: Que el sistema tiene infinitas soluciones.

Entrevistador: ¿Y eso qué quiere decir?

E2: Que el conjunto no es linealmente independiente.

En la solución de E2 se puede ver un claro ejemplo de la reflexión de las Acciones que hace el estudiante, en este caso con una matriz y como transforma dicha manipulación a una interpretación de los conceptos de combinación lineal y dependencia lineal. En este caso E2 evidencia una concepción Proceso del concepto, ya que interioriza las Acciones que realiza para comprender la solución del problema.

Evidencia del mecanismo de reversión

En la siguiente pregunta del taller:

> Encuentre dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^6$ (explique por qué lo son) y encuentre un vector que esté en el espacio generado por ellos.

E2 da evidencia de realizar el mecanismo de reversión, ya que puede determinar un conjunto de vectores que sea linealmente dependiente, y construir un nuevo vector que dependa de los dos vectores del conjunto.

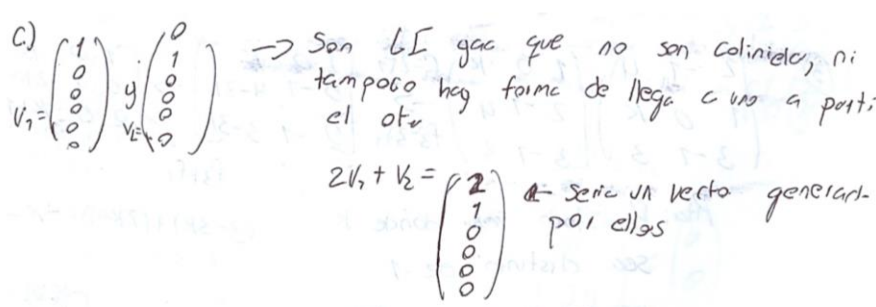


Figura 49. Solución de E2 pregunta 7.

Finalmente, consideramos que E2 tiene una concepción Proceso del concepto, ya que logra ver el concepto desde diferentes interpretaciones. También porque puede revertir el Proceso de dependencia lineal, como se mostró anteriormente. En general, consideramos que es importante que un estudiante pueda tener diferentes interpretaciones en la construcción de un Objeto matemático, ya que así puede mejorar su entendimiento respecto a este concepto.

Evidencia de des-encapsulación del Objeto

En la pregunta 7 de la entrevista, E4 muestra una concepción Objeto del concepto, ya que identifica cuando un conjunto de vectores es linealmente independiente y trabaja sobre este conjunto mediante el mecanismo de desencapsulación para volver a los procesos que le dieron origen.

> ¿Cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente dependiente? ¿Por qué?

En la *Figura 50* se puede observar que E4 escribe un conjunto de vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^n$, donde supone que un vector cualquiera del conjunto (v_k) es el vector cero.

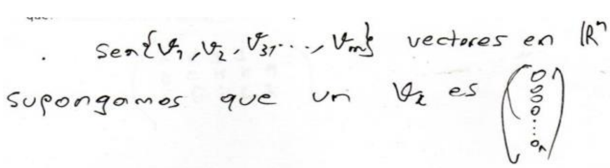


Figura 50. Solución E4 pregunta 7 de la entrevista parte 1.

Luego E4 menciona que, si el conjunto es linealmente independiente, es porque la única forma de que $C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + \cdots + C_mv_m$ de el vector cero, es que $C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_m = 0$ (ver *Figura 51*).

$$0 = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 \overset{5}{v_3} + \dots + C_K v_m$$

Figura 51. Solución E4 pregunta 7 de la entrevista parte 2.

Después E4 supone que v_1 va hacer el vector cero, entonces el menciona que el escalar de C_1 puede ser 5 y los demás escalares cero, y aun así sigue dando el vector cero, aunque no todos los escalares son iguales a cero, por tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente. Sin embargo, el entrevistador le pregunta:

> Entrevistador: ¿Solo se cumple cuando C_1=5?
>
> E4: No necesariamente.
>
> Entrevistador: Entonces, que condiciones debe cumplir.
>
> E4: Debe ser un escalar que sea diferente de cero.

$$0 = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 \overset{5}{v_3} + \dots + C_K v_m$$
$$0 = b v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_m$$
donde $b \neq 0$

Figura 52. Solución E4 pregunta 7 de la entrevista parte 3.

En la *Figura 52* se puede evidenciar que el estudiante después del dialogo anterior tacha el 5 que había escrito inicialmente y luego escribe un b. Es decir, el estudiante reconoce, que no se cumple solo para un caso particular, si no para cualquier número que sea diferente de cero.

7. Conclusiones

Para responder al objetivo de *Diseñar una descomposición genética validada del concepto de dependencia lineal que parta de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos para la construcción de Objetos abstractos* hemos considerado la descomposición genética de Mares (2016), en donde agregamos una descripción de lo que entendemos por Acciones concretas y Procesos abstractos a partir de Saldanha (1995). También en el análisis de datos del segundo ciclo metodológico se describe cómo estos Procesos geométricos se coordinan con los Procesos algebraicos.

La presentación de las conclusiones las realizamos en tres secciones; i) Reflexiones sobre los resultados encontrados en el primer y segundo siglo de implementación; ii) recomendaciones didácticas; iii) sugerencias para futuras investigaciones.

7.1. Reflexiones sobre los resultados encontrados en el primer y segundo ciclo de implementación

De acuerdo a Parraguez y Bozt (2012) y teniendo en cuenta las soluciones de los estudiantes (*Figura 12* y *Figura 14*) consideramos que un estudiante que solo tiene una concepción Acción del concepto de dependencia lineal puede llegar a concluir erróneamente que un conjunto de vectores es linealmente dependiente únicamente cuando son paralelos o uno es múltiplo escalar del otro.

En las soluciones de los estudiantes encontramos evidencias de que para dar solución a algunos problemas necesitaron relacionarlo con el concepto de base (*Figura 24*). Ya que hacen alusión a que si el conjunto es linealmente independiente puede generar todo el espacio y por lo tanto es una base; esto puede evidenciar que un estudiante puede construir una concepción Proceso del concepto de base a partir de una concepción Proceso de dependencia lineal y una concepción Proceso de conjunto generador. Esta evidencia general guarda concordancia con lo presentado Ku, Trigueros y Oktaç (2008).

Consideramos que un primer curso de álgebra lineal debeanalizar aspectos concretos tomando como referente la representación geométrica en los casos posibles; ya que interpretar un concepto abstracto de manera geométrica y algebraica ayuda al estudiante a comprender el concepto en cuestión, ya que le da herramientas para argumentar sus ideas, que posteriormente podrá generalizar.

A pesar que en la mayoría de los libros de texto que se trabajan en álgebra lineal se define la independencia lineal a partir de la dependencia lineal, creemos al igual que Mares (2016) que el tener la definición de dependencia lineal, no implica tener la definición de independencia lineal. Por tanto, se deben definir por separado, para que un estudiante puede comprender las características que diferencia un concepto del otro.

Los resultados de este trabajo muestran un claro ejemplo de que las descomposiciones genéticas que se proponen en la teoría APOE no son únicas y pueden ser mejoradas o rediseñadas para enriquecer la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que necesita un estudiante para construir un concepto matemático.

7.2. Descomposición genética refinada del concepto de dependencia lineal

En los datos obtenidos en las dos intervenciones con los estudiantes se encontraron evidencias que ayudan a refinar la descomposición genética propuesta para construir el concepto de dependencia lineal (ver *Figura 54*).

Como conocimientos previos para construir el concepto de dependencia lineal los estudiantes necesitan de:

- Una concepción Objeto de combinación lineal. Para esto Parraguez (2011) propone una descomposición genética que parte de la construcción del concepto de espacio vectorial donde un estudiante identifica que si toma dos vectores que pertenecen a un espacio vectorial U definido sobre un campo K, entonces la suma de dichos vectores también pertenece a U (Proceso). También si el estudiante toma un escalar en K y lo multiplica por un vector en U entonces dicho resultado está en U (Proceso) la coordinación de los dos Procesos mediante una sucesión finita de vectores es el Proceso de combinación lineal. La concepción Objeto de combinación lineal se da mediante la comparación del Objeto $c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$ con un vector v mediante la igualdad de vectores y la existencia de los escalares $c_1, \dots, c_n \in K$. En nuestro caso tomamos como espacio vectorial solamente $\mathbb{R}^n$ ya que los estudiantes en álgebra lineal I, no trabajan con otros espacios vectoriales (ver *Figura 53*).

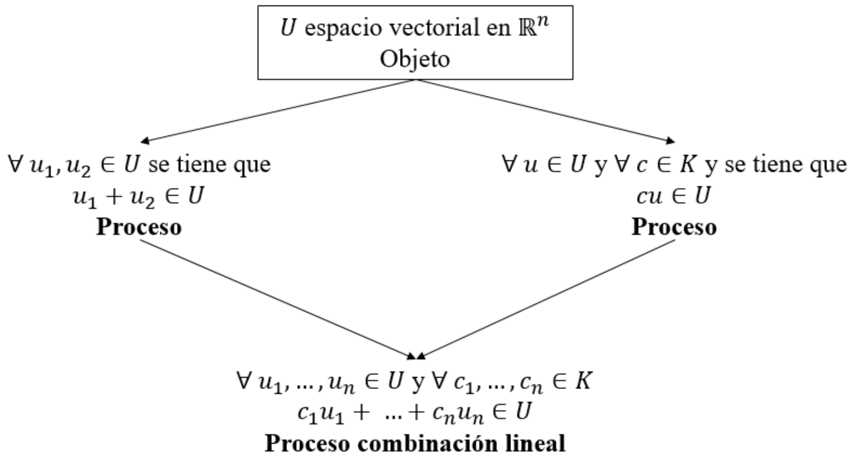


Figura 53. Adaptación de Parraguez (2011).

- Una concepción Esquema de espacio vectorial para $\mathbb{R}^n$: los estudiantes necesitan trabajar con diferentes espacios vectoriales, realizar operaciones binarias en el espacio vectorial y campo.

- Una concepción Objeto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones: los estudiantes necesitan considerar el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales e identificar si son infinitas, porque pueden depender de un parámetro o si es única.

De esta forma se considera que un estudiante con una concepción Acción del concepto de dependencia lineal puede determinar que un conjunto de vectores es linealmente dependiente por medio de dos representaciones (geométrica y algebraica):

- ver un vector como combinación lineal de uno o más vectores.
- ver vectores sobre una misma línea o un mismo plano (en el caso de que sean más que dos vectores).

A partir de la representación de un conjunto de vectores de forma geométrica o algebraica el estudiante puede reflexionar sobre las características que tienen, y así estructurar de manera general lo que tienen en común las diferentes representaciones del concepto, es decir tener una concepción Proceso del concepto:

> Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ es ***linealmente dependiente*** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, al menos uno de los cuales no es cero, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = 0$

También un estudiante evidencia una concepción Proceso mediante el mecanismo de reversión, ya que el estudiante invierte el Proceso. En este caso, cuando es capaz de construir un conjunto de vectores linealmente dependiente y argumentar por qué lo es, evocando la definición formal del concepto.

Una concepción Objeto se da mediante la encapsulación del Proceso, al aplicar Acciones sobre un conjunto de vectores linealmente dependientes y al poder des-encapsular el Objeto en el Proceso que dio origen.

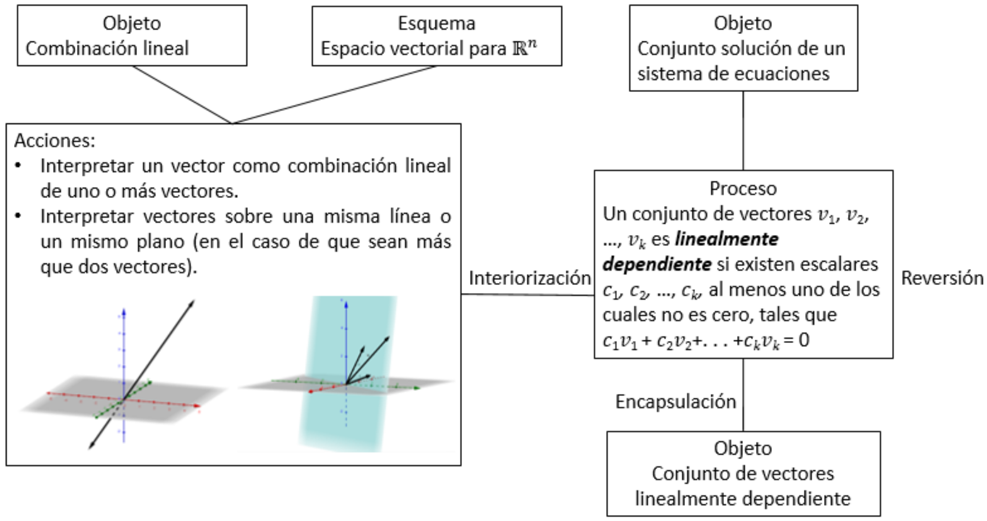


Figura 54. Descomposición genética refinada del concepto de dependencia lineal.

7.3. Recomendaciones didácticas

El rediseño de la descomposición genética propuesta en esta investigación es una herramienta para profesores de álgebra lineal, ya que sirve de guía para la enseñanza del concepto de dependencia lineal, teniendo en cuenta los pre saberes que necesitan los estudiantes para construir el concepto y que desde una interpretación geométrica han construido en otros escenarios. Además, dicho modelo cognitivo muestra de manera precisa un camino de construcción del concepto, ya que en la descomposición genética proponemos dos enfoques: algebraicos y geométricos. En este sentido, se vuelve indispensable realizar actividades que fomenten distintos tipos de Acciones y Procesos de forma tanto algebraica como geométrica.

7.4. Sugerencias para futuras investigaciones

El estudio de Esquema, en la teoría APOE no ha sido estudiado ampliamente y en esta investigación no se describieron estudiantes con dicha estructura por eso sería interesante revisar cómo se evidencia la estructura de Esquema en el concepto de dependencia lineal, teniendo en cuenta la descomposición genética que proponemos y también cómo este Esquema se relaciona con otros Esquemas como el de base, conjunto generador, entre otros.

También seria interesante aplicar la descomposición genética propuesta del concepto de dependencia lineal con espacios vectoriales diferentes de $\mathbb{R}^n$ para ver como evolucionan las estructuras y los mecanismos mentales en los estudiantes. Esto se podría hacer con estudiantes que tomen un segundo curso de álgebra lineal.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37-54.

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), 813-826.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. In *Forms of mathematical knowledge* (pp. 85-109). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA NOTES*, 85-106.

González, M. P., & Ortiz, J. B. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *7*(1), 49-72.

González D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, *35*(2), 0089-107.

González D. E. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69-95.

Hernández, J. G., & Ayala, J. Z. (2018). Dificultades Inherentes en el Aprendizaje de los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal De Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ Usando Software Dinámico. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, *2*(2), 20-30.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer, Dordrecht.

Isaacs, R., y Sabogal, S. (2005). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*. Ediciones UIS. Colombia.

Konyalioglu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 4040-4044.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación matemática*, *20*(2), 65-89.

Mares, C. (2016). *Aprendizaje de los conceptos de independencia y dependencia lineal desde la teoría APOE.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituo Politecnico Nacional. México.

Oropeza Legorreta, C., & Lezama Andalón, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *2*(1), 23-39.

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 263-271.

Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *7*(1).

Poole, D. (2011). Álgebra lineal. Una introducción Moderna (3º Ed.). México: Thomson.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, *10*(4), 15-32.

Saldanha, L. A. (1995). *The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysis and students' difficulties* (tesis de doctorado). Quebec, Canadá.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). *El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal* (tesis de doctorado). Tesis de doctorado no publicada. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2010). Student learning of basis, span and linear Independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173-188.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779-1792.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for research in Mathematics Education*, 435-457.

Apéndices

Apéndice A

Contenidos del curso de álgebra lineal I del programa de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander

---

Contenidos

---

1. Introducción*
   1.1. Naturales e inducción, sumatoria*.
   1.2. Números complejos*.
   1.3. Operaciones*.
   1.4. Campos finitos*.
2. Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^n$ (Ilustrar ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).
   2.1. Álgebra de vectores.
   2.2. Longitud y ángulo: producto punto.
   2.3. Rectas y planos.
   2.4. Proyección ortogonal sobre rectas y planos.
3. Sistemas de ecuaciones lineales
   3.1. Introducción: definición de ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales.
   3.2. Métodos directos (Gauss) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
   3.3. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales*.
4. Álgebra de matrices y determinantes
   4.1. Operaciones con matrices.
   4.2. Inversa de una matriz.
   4.3. Determinantes.
   4.4. Factorización LU*.
5. Subespacios vectoriales en Rn
   5.1. Definición y ejemplos.
   5.2. Espacio generado y espacio nulo.
   5.3. Dependencia e independencia lineal.
   5.4. Bases y dimensión.
   5.5. Subespacios afines*
   5.6. Transformaciones lineales y transformaciones afines*
6. Valores y vectores propios*
   6.1. Definiciones: valores y vectores propios y polinomio característico*.
   6.2. Espacios propios*.
   6.3. Matrices semejantes y diagonalización*.
   6.4. Aplicaciones*.
7. Ortogonalidad*
   7.1. Ortogonalidad en Rn *.

7.2. Bases ortogonales*.
7.3. Proceso de Gram-Schmidt y factorización QR*.
7.4. Diagonalización ortogonal*

Los asteriscos (*) en la primera y séptima fila, hacen referencia a temas no obligatorios dentro del curso.
Programa propuesto por la Escuela de Matemáticas de la UIS en el siguiente link: http://matematicas.uis.edu.co/sites/default/files/paginas/archivos/Programa%2B.pdf

Apéndice B
Taller 1

1. ¿Los vectores $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (2, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes o independientes?

2. ¿Los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-4, 1, 5)$ y $v_3 = (-5, 8, 19)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

3. ¿Los vectores $v_1 = (1, 2, 4)$, $v_2 = (2, -5, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

4. ¿Los vectores $v_1 = (2, -1, 0, 3)$, $v_2 = (-6, 3, 0, -9)$ en $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes o independientes?

5. ¿Los vectores $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, -2, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 7)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

6. Sin hacer operaciones diga si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes. Escriba con detalle su respuesta.

   a) $(2, 3, 5), (0, 0, 0), (1, 1, 8)$
   b) $(-2, 4, 6, 10), (3, -6, -9, -30)$
   c) $(1, 4), (3, -5), (2, 1)$
   d) $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$

7. ¿Si ninguno de los vectores v_1, v_2 y v_3 en $\mathbb{R}^3$ es múltiplo de alguno de los otros vectores, entonces v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes?

8. Justifique si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

   Si v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes, entonces v_1, v_2 y v_3 no están en $\mathbb{R}^2$.

9. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
   a) Las columnas de cualquier matriz $A_{4\times 5}$ son linealmente dependientes.
   b) Si v_1 y v_2 son linealmente independientes y v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes, entonces puedes afirmar que v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2.

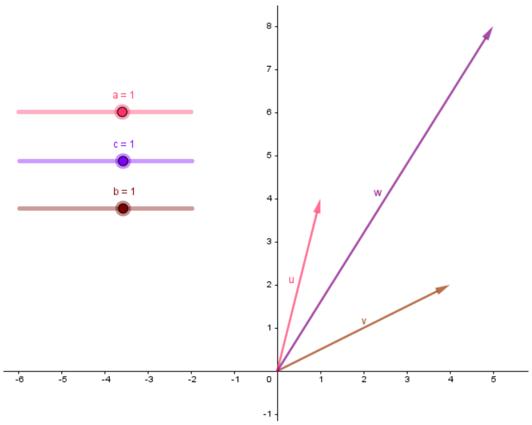
10. Sean $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, -1, 0)$ y $v_3 = (4, 1, 1)$ vectores linealmente independientes. Diga sin hacer operaciones, si $v = (0, 0, 1)$ es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Si lo es, no es necesario dar la combinación lineal. Explique su respuesta.

11. ¿En qué casos es posible que cuatro vectores generen $\mathbb{R}^5$? Justifique ampliamente su respuesta.

12. Sean $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (-2, 1, 7)$ y $v_3 = (h, -3, -5)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. ¿Para qué valores de h se encuentra v_3 en $gen\{v_1, v_2\}$?
    a) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores v_1, v_2 y v_3? ¿Qué generan?
    b) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores v_1 y v_2? ¿Qué generan?
    c) ¿Qué diferencia existe entre el $gen\{v_1, v_2, v_3\}$ y $gen\{v_1, v_2\}$?

13. Escriba dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^6$ (explique por qué lo son) y encuentre un vector que esté en el espacio generado por ellos.

14. Para las siguientes preguntas justifique ampliamente sus respuestas.
    a) Abra el archivo "Act.4". ¿Los vectores u, v y w son linealmente dependientes o independientes?



b) ¿Es posible construir con ayuda de Geogebra 3 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$? ¿Por qué?

c) ¿Es posible construir con ayuda de Geogebra 4 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$? ¿Por qué?

d) ¿Es posible construir con ayuda de Geogebra 2 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$? ¿Por qué?

15. ¿Los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

16. ¿Los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$ y $v_3 = (1, 4, 9)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

17. A partir de $v = (2, 1, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ construya un conjunto de 3 vectores linealmente dependientes, incluyendo el vector v.

18. A partir de $v = (2, 1, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ construya un conjunto de 4 vectores linealmente dependientes, incluyendo el vector v.

19. ¿Los vectores $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (0, 2, 5)$ y $v_3 = (1, 2, 0)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

20. Justifique si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Si v_1 y v_2 son linealmente independientes y v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes, entonces se puede afirmar que v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2.

21. Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$ vectores linealmente independientes. Diga sin hacer operaciones, si $v = (-1, 7, 4)$ es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Si lo es no es necesario dar la combinación lineal. Explique su respuesta.

22. Diga si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes y justifique ampliamente su respuesta.
   a) $(1, 2), (2, 3), (-5, 4)$
   b) $(36, 9, 6, 4), (12, 3, 2, 2)$
   c) $(0, 2, 3, 4), (3, 2, 0, 1)$
   d) $(1, 2, 3), (0, 0, 0), (-7, 2, 5)$

23. Diga si la siguiente afirmación es verdadero o falsa, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
   Sean los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 en $\mathbb{R}^n$. Si sabe que los conjuntos $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independiente.

24. ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $v_1 = (2, -3, 4)$, $v_2 = (4, 7, -6)$, $v_3 = (18, -11, 4)$ y $v_4 = (2, -7, 3)$? ¿Forman una base para $\mathbb{R}^3$?

25. Sean $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (1, 0, k)$ y $v_3 = (3, -1, 3)$. ¿Para qué valores de k los vectores v_1, v_2 y v_3 son una base $\mathbb{R}^3$? Explique su respuesta.

26. Sean $v_1 = (7, 4, -9, -5)$, $v_2 = (4, -7, 2, 5)$ y $v_3 = (1, -5, 3, 4)$. Si $v_1 - 3v_2 + 5v_3 = 0$. Encuentre una base para $H = gen\{v_1, v_2, v_3\}$.

27. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.

a) Sea $H = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para H.

b) El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ es base del espacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

28. Encuentre los vectores que se piden. Explique su respuesta.

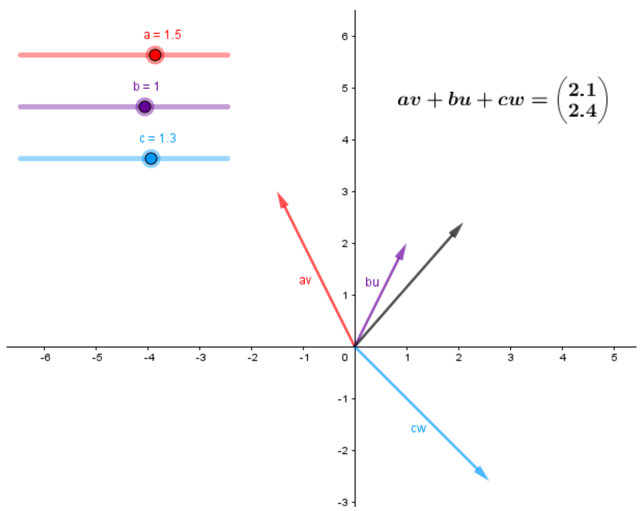
a) 5 vectores en $\mathbb{R}^4$ que sean una base para $\mathbb{R}^4$.

b) 4 vectores en $\mathbb{R}^5$ que sean una base para $\mathbb{R}^5$.

c) 2 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^6$ (explique por qué lo son) y encuentre un vector que esté en el espacio generado por ellos.

d) Escriba una base para $\mathbb{R}^7$ que incluya el vector cero.

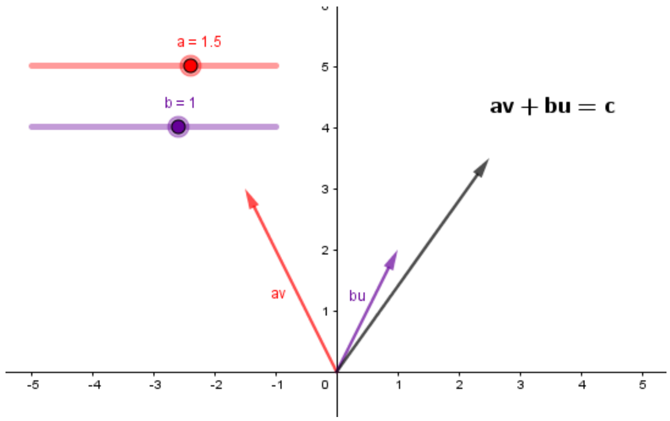
29. Abra el Act1.T4 en Geogebra y con base en ello conteste las siguientes preguntas.



a) ¿Puede encontrar geométricamente, que la combinación lineal de estos vectores dé como resultado el vector cero? Justifique su respuesta.

b) ¿La combinación lineal de los vectores que da el vector cero, es única? Explique su respuesta; dé ejemplos que la apoyen.

30. Abra el Act2.T4 en Geogebra y con base en ello conteste las siguientes preguntas.

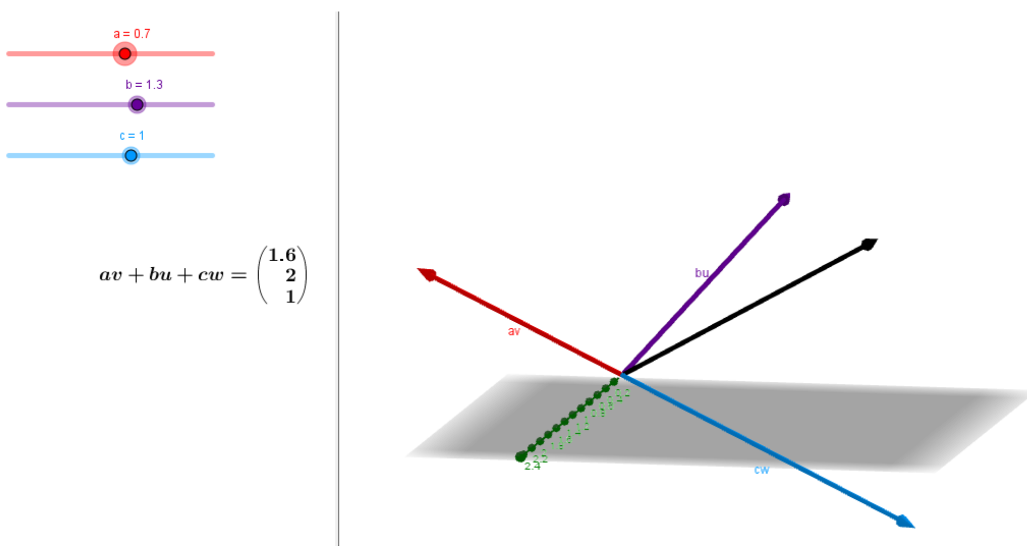


a) ¿Puede encontrar geométricamente, que la combinación lineal de estos vectores dé como resultado el vector cero? Justifique su respuesta.

b) ¿La combinación lineal de los vectores que da el vector cero, es única? Explique su respuesta; dé ejemplos que la apoyen.

31. Teniendo en cuenta las preguntas anteriores responda lo siguiente. ¿Cómo diferencia geométricamente, el caso en el que solo exista una combinación lineal, con el caso de que exista más de una combinación lineal, tal que en ambos casos el resultado es el vector cero?

32. Abra el Act3.T4 en Geogebra y con base en ello conteste las siguientes preguntas.



a) ¿Puede encontrar geométricamente, que la combinación lineal de estos vectores dé como resultado el vector cero? Justifique su respuesta.

b) ¿La combinación lineal de los vectores que da el vector cero, es única? Explique su respuesta; dé ejemplos que la apoyen.

33. ¿Si $a(2,3,4)+b(-1,2,5)+c(2,1,0)=(0,0,0)$ entonces $a=b=c=0$ es la única solución?

34. ¿Cuál es el número máximo de vectores de $\mathbb{R}^2$, no múltiplos entre sí, cuya combinación lineal igualada al vector cero, sea única? ¿Cuál es la respuesta de esta misma pregunta, si los vectores son de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

35. Tres vectores cualesquiera no múltiplos de $\mathbb{R}^3$, diferentes del vector cero, ¿Tienen una o varias combinaciones lineales cuyo resultado es el vector cero? ¿Cuál es su respuesta, si uno de los tres vectores es múltiplo de los otros dos? ¿Y si los tres vectores son múltiplos entre sí? Justifique su respuesta.

36. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.

a) ___Tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base.

b) ___Dos vectores linealmente dependientes generan $\mathbb{R}^2$

c) ___Cuatro vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ generan $\mathbb{R}^4$.

Apéndice C
Entrevista semi-estructurada del primer ciclo de investigación

Pregunta 1

Dos vectores cualesquiera, no múltiplos en $\mathbb{R}^2$, diferentes del vector cero, ¿Tienen una combinación lineal o varias combinaciones lineales, cuyo resultado sea el vector cero? Justifique su respuesta.

Pregunta 2

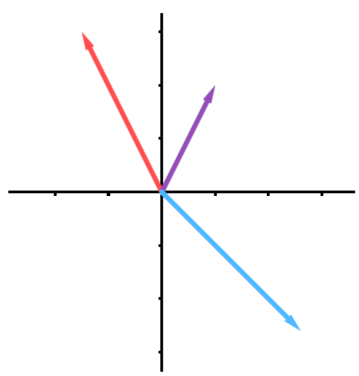
Dos vectores cualesquiera, múltiplos en $\mathbb{R}^2$, diferentes del vector cero, ¿Tienen una combinación lineal o varias combinaciones lineales, cuyo resultado sea el vector cero? Justifique su respuesta.

Pregunta 3

¿Cuántas combinaciones lineales igualadas al vector cero determinan dos vectores (no múltiplos) de $\mathbb{R}^3$?

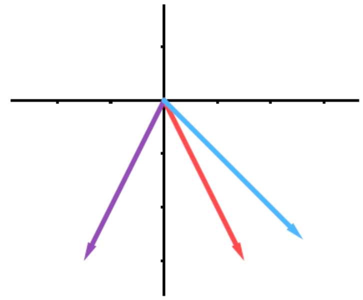
Pregunta 4

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?



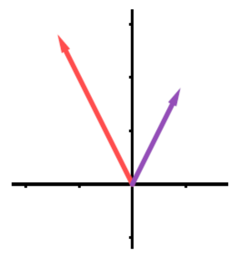
Pregunta 5

Y, ¿En este caso?



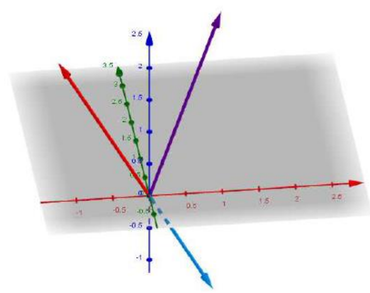
Pregunta 6

Y, ¿En este caso?



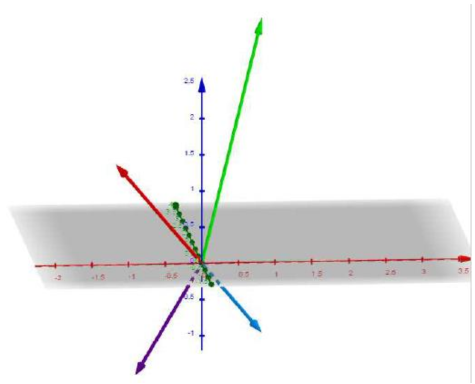
Pregunta 7

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?



Pregunta 8

¿Cuántas combinaciones lineales existen en la siguiente figura que den el vector cero?



Pregunta 9

¿Si $a\,(2,3,4) + b\,(-1,2,5) + c\,(2,1,0) = (0,0,0)$ entonces $a = b = c = 0$ es la única solución?

Pregunta 10

¿Cuál es el número máximo de vectores de $\mathbb{R}^2$ no múltiplos entre sí, cuya combinación lineal, igualada al vector cero, sea única? ¿Cuál es la respuesta de esta misma pregunta, si los vectores son de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

Pregunta 11

A un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ o de otro espacio de vectores, cuya combinación lineal igualada al vector cero, no es única, se dice que estos vectores forman un conjunto de vectores linealmente dependientes. De una definición de ese conjunto.

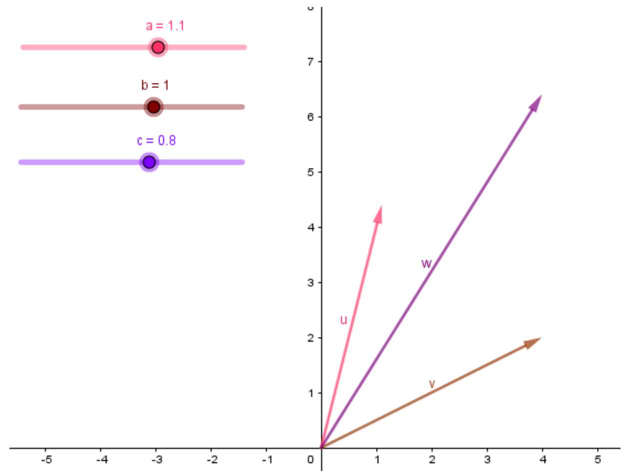
Pregunta 12

A un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ o de otro espacio de vectores, cuya combinación lineal igualada al vector cero, es única, se dice que estos vectores forman un conjunto de vectores linealmente independientes. De una definición de ese conjunto.

Apéndice D
Taller 2

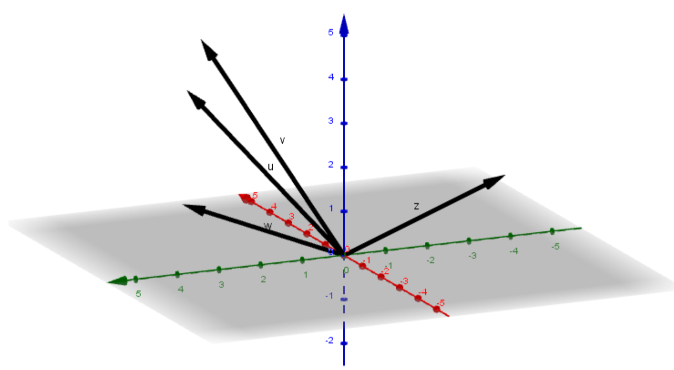
1. Para las siguientes preguntas justifique ampliamente sus respuestas.

a) Abra el archivo Act.1. ¿Los vectores u, v y w son linealmente dependientes o independientes?



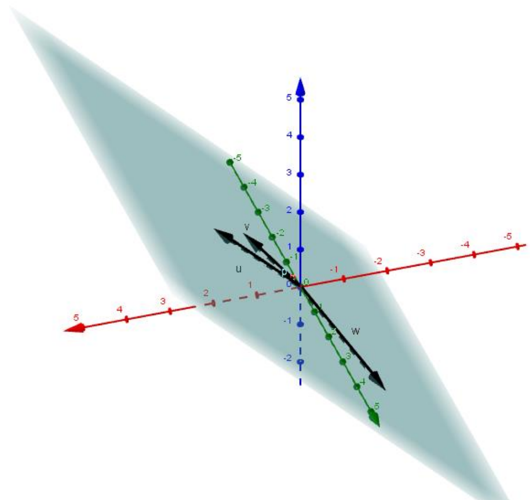
b) ¿Es posible construir con ayuda de Geogebra 3 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$? ¿Por qué?

c) Abra el archivo Act.2. ¿Los vectores u, v, w y z son linealmente dependientes o independientes?

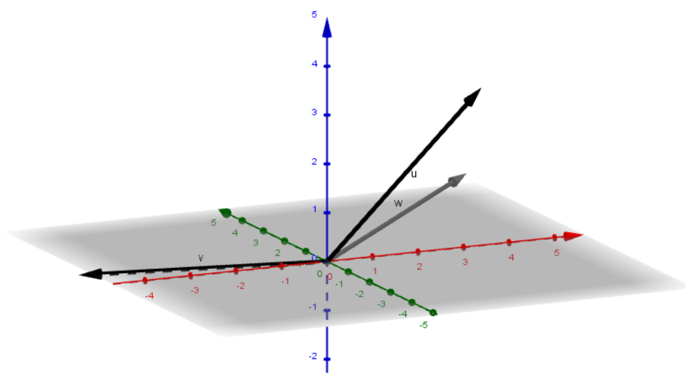


d) ¿Es posible construir con ayuda de Geogebra 4 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

2. Abra el archivo Act.3 donde se muestran los vectores $u = (1, -1, 1), v = (2, 0, 2)$ y $w = (-1, 3, -1)$ que están sobre un mismo plano. ¿Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w = \alpha u + \beta v$?



3. Abra el archivo Act.4 donde se muestran los vectores $u = (2, -3, 4), v = (-5, 1, 0)$ y $w = (4, 2, 1)$. Determine si dichos vectores están sobre un mismo plano con ayuda de Geogebra. ¿Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w = \alpha u + \beta v$?



4. Sea $z = 2x + 5y$

a) ¿Qué representa gráficamente?

b) ¿Cuántos vectores tiene una base para el conjunto de vectores de la forma $z = 2x + 5y$?

c) ¿Puede dar otra base de ese espacio?, si es así, ¿Cuál?

5. Dado tres vectores u, v y w en $\mathbb{R}^2$, ¿Es siempre posible encontrar los números reales α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$?

6. Dado tres vectores u, v y w en $\mathbb{R}^3$, ¿Es siempre posible encontrar los números reales α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$?

7. Encuentre dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^6$ (explique por qué lo son) y encuentre un vector que esté en el espacio generado por ellos.

8. Diga si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes y justifique ampliamente su respuesta.
   e) $(1, 2), (2, 3), (-5, 4)$
   f) $(36, 9, 6, 4), (12, 3, 2, 2)$
   g) $(0, 2, 3, 4), (3, 2, 0, 1)$
   h) $(1, 2, 3), (0, 0, 0), (-7, 2, 5)$

9. Diga si la siguiente afirmación es verdadero o falsa, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
   Sean los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 en $\mathbb{R}^n$. Si sabe que los conjuntos $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independiente.

10. A partir de $v = (2, 1, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ construya un conjunto de tres vectores linealmente dependientes, incluyendo el vector v.

11. Grafique en Geogebra los vectores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$. ¿Son linealmente dependientes o independientes? ¿Qué puede decir de esos vectores?

12. Dado los vectores anteriores $v_1 = (4, 2, 6)$ y $v_2 = (-2, -1, -3)$, grafique en Geogebra el vector $v_3 = (1, 4, 9)$. ¿Son linealmente dependientes o independientes?

13. Encuentre el plano generado por los vectores $(1,0,4)$ y $(0,2,5)$. ¿El vector $(1,2,0)$ pertenece a dicho plano? ¿Los vectores $(1,0,4)$, $(0,2,5)$ y $(1,2,0)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes?

14. Encuentre dos vectores que generen $\mathbb{R}^2$.
   a) ¿Existen otras parejas que también lo generen?
   b) ¿Son linealmente dependientes o independientes estas parejas de vectores?
   c) ¿Forman una base para $\mathbb{R}^2$? Si es así, ¿Cuál es su dimensión?

15. Encuentre tres vectores que generen $\mathbb{R}^2$.
   a) ¿Existen otros tres vectores que también lo generen?
   b) ¿Son linealmente dependientes o independientes estos tres vectores?
   c) ¿Se necesitan tres vectores para generar $\mathbb{R}^2$?
   d) ¿Forman una base?

16. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, en el caso de que sea verdadera demuestre y en caso contrario muestre un contraejemplo.
   a) Sea $H = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para H.
   b) El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ es base del espacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

17. Sean $v_1 = (2,-1,4)$, $v_2 = (1,0,k)$ y $v_3 = (3,-1,3)$. ¿Para qué valores de k los vectores v_1, v_2 y v_3 son una base $\mathbb{R}^3$? Explique su respuesta.

Apéndice E
Entrevista semi-estructurada del segundo ciclo de investigación

Pregunta 1

1.4. Mencione cuando dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes.

1.5. Mencione cuando dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes.

1.6. ¿Son tres vectores en $\mathbb{R}^3$ siempre linealmente independientes?

Pregunta 2

7.1. Determine el conjunto generado por $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

7.2. Encuentre tres vectores que generen $\mathbb{R}^3$.

7.3. ¿Es posible que cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ generen $\mathbb{R}^3$?

Pregunta 3

Determine si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}\right\}$$

Pregunta 4

Sea A una matriz de 3×3 y sean $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suponga que $Av = -v$ y $Aw = 2w$. Entonces encuentre el vector $A^5 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Pregunta 5

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ b \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine una condición de los escalares a y b tal que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea linealmente dependiente.

Pregunta 6

¿Cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector cero es linealmente dependiente? ¿Por qué?

Pregunta 7

¿Si se tiene una matriz A de 3×5 (3 filas y 5 columnas) entonces los vectores columna de la matriz son linealmente dependientes?

Pregunta 8

Escriba con sus palabras cuando un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.