CUATRO NOCIONES DE DERIVADA

ALEXANDER MÉNDEZ ESPINEL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS
BUCARAMANGA

2004

CUATRO NOCIONES DE DERIVADA

ALEXANDER MÉNDEZ ESPINEL

Monografía presentada como
requisito para optar al titulo
de *Licenciado en Matemáticas*

Sofía Pinzón Durán
Directora

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS

BUCARAMANGA
2004

Agradecimientos

- A Sofía Pinzón, porque gracias a sus orientaciones, sus ideas y su gran apoyo fue posible realizar este trabajo.
- A mis padres y hermanos por estar siempre conmigo.
- A Erika por su apoyo continuo y sus ingentes esfuerzos en procura de realizar un mejor trabajo.
- A todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para el desarrollo de este trabajo.

TITULO: CUATRO NOCIONES DE DERIVADA*

AUTOR: ALEXANDER MENDEZ ESPINEL**

PALABRAS CLAVES: Diferencial, Derivada, Gâteux, Fréchet, Carathédory, Hadamard.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo hacemos una revisión de la noción de derivada, por la cual presentamos las definiciones de derivada de Gâteaux, Fréchet, Caratheodory y Hadamard. En primer lugar presentamos en orden cronologico los comienzos y el desarrollo de la noción de diferencial. En el capítulo 2 tratará la derivada dereccional o derivada de Gâteux, para ello se tomará como punto de partida la variación de Gâteux o derivada débil. Se establece la equivalencia entre la derivada de Gâteux y la derivada usual; también se muestran algunos ejemplos que ilustran la razón de la debilidad de la variación de Gâteux y como derivar según esta definición.

En el capítulo 3 se presenta la derivada de Fréchet, o derivada total, con su respectiva extención a funciones vectoriales, se demuestra que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteux, pero la reciproca es falsa. En el capítulo 4 aparece la definición de derivada que dió Constantine Carathédory en su libro " Theory of a Complex Variable " y su correspondiente extensión a funciones vectoriales dada por Acosta y Delgado en [2]; además, se establece la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet y Carathédory.

En el capítulo 5 presentamos la derivada de Hadamard, se establecen resultados acerca de las derivadas de Gâteaux, Fréchet, Hadamard y la usual; se finaliza mostrando que las derivadas de Fréchet y Hadamard no son equivalentes cuando trabajamos en un espacio vectorial normado de dimensión finita.

* monografía.

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Directora: Sofia Pinzón.

TITLE: FOUR NOTIONS OF DERIVATE*

AUTHOR: ALEXANDER MENDEZ ESPINEL**

KEY WORDS: Differential, Derivate, Gâteux, Fréchet, Carathédory, Hadamard.

DESCRIPTION: In this work a review of derivative notion is presented, it provides the concepts of derivative given by Gâteaux, Fréchet, Carathédory and Hadamard. In the first chapter it shows in chronological order the beginnings and development of the notion of differential. Chapter two will be about directional derivative or Gâteux derivative, for that we will take the Gâteaux's variation or weak derivate as the starting point. It is stablished the equivalence between Gâteaux derivate and the usual derivate, also it will give some examples to illustrate the reason for the weakness of Gâteaux's variation and how to derivate according to this definition.

In chapter three it will be presented the Fréchet derivate or total derivate with its extension to vectorial funtions. It will be demostrated that a differentiateable function according to Fréchet is differentiateable according to Gâteaux too, but the reciprocal is false. In chapter four appeard the definition of derivative given by Constantine Carathedory in the book
" Theory of a Complex Variable " and its extension to vectorial functions given by Acosta and Delgado [2], also we presented the equivalence between the definition of derivative given by Fréchet and Carathédory.

In chapter five we discuse the Hadamard's derivatives and present some results about Gâteaux, Fréchet, Hadamard and the usual derivatives. We finish showing that Fréchet and Hadamard's derivatives are not equivalent when we work on an infinite normed space.

*monograph.
**Faculty of Sciences, School of Mathematics, Director: Sofia Pinzón.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

La derivación de funciones de variable real y a valores reales es uno de los primeros procesos fundamentales de la matemática. Recordemos que la derivada de una función f en un punto a de $\mathbb{R}$ está determinada por la existencia del límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

sin embargo, esta igualdad carece de sentido si analizamos funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. De hecho decimos que una función de este tipo es diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Observemos que para lograr esta noción más general de diferenciabilidad fue necesario expresar la definición inicial considerando las respectivas normas y la existencia de la aplicación lineal determinada.

Si analizamos detenidamente esta definición, podemos observar que aunque representa una extensión cómoda de la primera, nos limita a trabajar en espacios vectoriales normados.

De este modo se origina, la teoría de derivación en espacios normados, una importante generalización del cálculo diferencial clásico iniciado por Newton y leibnitz hacia finales del siglo XVII.

Los primeros trabajos que originan esta teoría fueron realizados en Francia en la década de 1920, con los matemáticos Gâteaux y Fréchet. Gâteaux dio la primera definición de diferencialidad de gran importancia para este nuevo Análisis. Desarrolló su concepto de derivada(derivada direccional) en 1922. No obstante fue, Fréchet quién en 1925 extendió el concepto de diferenciabilidad a espacios normados ampliando la noción dada por Gâteaux y demostrando que su definición conserva las propiedades esenciales de la definición del Análisis clásico.

El propósito de esta monografía es presentar una introducción a la teoría de derivación en espacios normados. Por tal fin se ha organizado el contenido en 5 Capítulos:

En el Capítulo 1 se da una pequeña reseña histórica de la derivada, en la que se resaltan los aspectos más importantes de su evolución histórica.

En el Capítulo 2 se da la definición de derivada direccional, se demuestran algunos teoremas importantes y muestra la relación que esta tiene con la derivada usual.

En el Capítulo 3 se trabaja con la noción de Fréchet y se demuestra la relación entre las nociones de Gâteaux y Fréchet.

En el Capítulo 4 se presenta otra noción de diferencial, la de Carathéodory para funciones de variable real y para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Con su correspondiente relación con la diferencial de Fréchet.

En el último Capítulo tratamos sobre la noción de diferenciabilidad según Hadamard, sus principales características y su relación con las dos primeras nociones de diferencial, Gâteaux y Fréchet.

Preliminares

El propósito de esta sección es presentar algunas nociones de Àlgebra Lineal y Anàlisis Funcional que constituyen el material básico para el estudio de las secciones posteriores.

Definición 1. *[8] La norma sobre un espacio vectorial (real o complejo) X es una función a valor real sobre X, cuyo valor en $x \in X$ es denotada por $\|x\|$, y satisface las siguientes propiedades*

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

donde x y y son vectores arbitrarios de X y α es cualquier escalar.

Una norma sobre X define una métrica d sobre X la cual está dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in X,$$

y es llamada la métrica inducida por la norma.
Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida sobre él. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo sobre la metrica definida por la norma).

Definición 2. *[8] Sean X y Y espacios de Banach. Un operador L sobre X con recorrido en Y es llamado:*

- *Aditivo, si* $L(x+y) = L(x) + L(y)$, *para todo* $x, y \in X$
- *Homogéneo, si* $L(\lambda x) = \lambda L(x)$, *para cualquier escalar* λ
- *Continuo en* $x \in E$, *si* $\|L(x_n) - L(x)\| \to 0$ *cuando* $\|x_n - x\| \to 0$
- *Acotado, si existe un número no negativo* M *tal que* $\|L(x)\| \leq M\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

L *es llamado lineal si es aditivo y homogéneo. Es bien conocido que un operador lineal es continuo en todo el espacio si y solo si es continuo en* $\odot$ *(modulo aditivo del espacio), y es acotado si y solo si es continuo.*

En el caso de que $Y = \mathbb{R}$ *el operador* L *recibe el nombre de funcional.*

Definición 3. *[8] Si* L *es un operador lineal acotado, entonces la norma de* L *esta definida por*

$$\|L\| = sup_{x \in X} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}, x \neq \odot \qquad (\odot \quad es \quad el \quad elemento \quad nulo)$$

Definición 4. *[17] Sean* X *y* Y *espacios de Banach. El operador* $F : W \in X \to Y$ *es llamado uniformemente continuo sobre* W *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|x' - x''\| < \delta \quad implica \quad \|F(x') - F(x'')\| < \epsilon,$$

para todo $x', x'' \in W$.

Proposición 1. *[12] Para un operador lineal* T *de* X *en* Y, *donde* X *y* Y *son espacios lineales normados, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. T *es continuo en algún* $x_0 \in X$.
2. T *es uniformemente continuo sobre* X.
3. T *es acotado.*

Definición 5. *[11] La norma* $\|\cdot\|'$ *es equivalente a la norma* $\|\cdot\|$ *sobre* X *si existen números positivos* m *y* M *tales que*

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|, \quad para \quad todo \quad x \in X.$$

Definición 6. *[8] Un espacio normado se dice de dimensión finita si existe un entero positivo* n *tal que* X *contiene un conjunto de* n *vectores linealmente independiente, en tanto que cualquier conjunto de* $n+1$ *vectores es linealmente dependiente.* n *es llamado la dimensión de* X. *Si* X *no es de dimensión finita, se dice de dimensión infinita.*

CAPÍTULO 1

Breve Reseña Histórica de la Derivada

La noción de diferencial fue inicialmente concebida por Newton y Leibnitz para funciones reales de variable real, basándose en resultados anteriores dados por matemáticos como Fermat, Descartes, y Barrow entre otros. Solamente a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX es que esta noción fue generalizada a funciones de varias variables. A continuación presentamos en orden cronologico los comienzos y el desarrollo de la noción de diferencial.

Durante el siglo XVII, el método que presentaba mayores perspectivas para la determinación de tangentes y normales era el dado por **R. Descartes(1569-1650)**, el cual era de carácter algebraico, aparece en el segundo libro de su *"Geometría"*.

Supongamos que trazamos una normal a una curva algebraica en el punto $P(x, f(x))$. La normal intercepta al eje de las abscisas en el punto de coordenadas $C(v, 0)$. La recta tangente es tomada como la recta que pasa por $(x, f(x))$ y es perpendicular a la recta normal. La familia de circunferencias concéntricas con centro en $(v, 0)$ contiene una circunferencia de radio $r = CP$, la cual tiene, con la curva, dos puntos comunes confundidos en uno, precisamente el punto P. (Figura 2.1)

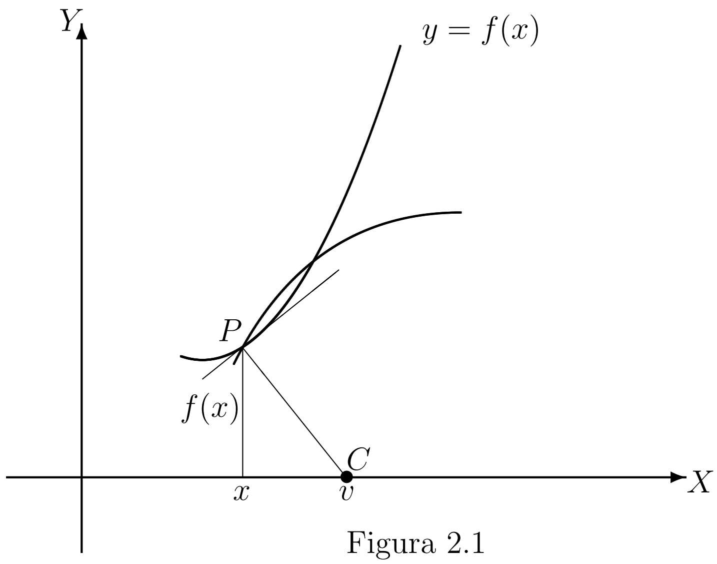

Figura 2.1

Esto significa que la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 = r^2, \tag{1.1}$$

tendrá la coordenada x de P como doble raíz. Ahora un polinomio que tenga doble raíz, digamos $x = e$, debe ser de la forma $(x - e)^2 Q(x)$. Descartes impone la condición de que la ecuación (1.1) tenga una raíz doble, es decir:

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = (x - e)^2 Q(x). \tag{1.2}$$

La comparación de los coeficientes de los términos con iguales exponentes da una ecuación con la cual se determina v en términos de la raíz $e = x$. La pendiente de la recta tangente a la curva en P es el inverso negativo de la pendiente $f(x)/(x - v)$ de la normal CP, es decir:

$$\frac{v - x}{f(x)}.$$

Ejemplo 1. *Calcular la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = \sqrt{kx}$ en cualquier punto.*

De la ecuación (1.1) tenemos:

$$kx - (v - x)^2 - r^2 = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado, por lo tanto el lado derecho de (1.2) debe ser un polinomio de grado 2, luego

$$kx - (v - x)^2 - r^2 = (x - e)^2.$$

igualando coeficientes de x resulta $k - 2v = -2e$, o $v = e + k/2$ sustituyendo $e = x$, tenemos $v - x = k/2$, y la pendiente de la recta tangente a la parábola en $(x, \sqrt{kx})$ es

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{k/2}{\sqrt{kx}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{x}}.$$

En el año 1638 **P. Fermat(1601-1665)** comunicó en carta a Descartes que había resuelto el problema de la determinación de los valores extremos de una función. Su método era como sigue: Construía la diferencia $f(A+E) - f(A)$, donde aparece E como factor, dividiendo por E, y finalmente cancelando cada término que aún contenía E como factor, obteniendo la cantidad

$$\left.\frac{f(A+E) - f(A)}{E}\right|_{E=0},$$

la cual sabemos que es llamada la derivada de f en A y es denotada por $f'(A)$. Lamentablemente Fermat no le puso ningún nombre, y no introdujo una notación en particular para esta, en cambio, utilizó el simbolismo algebraico difícil para la comprensión de Vieté. Si lo hubiera hecho el camino habría sido abierto para aplicaciones generales y él debería haber sido al menos un co-descubridor del cálculo diferencial. Fermat fué el primero a solucionar problemas de máximos y mínimos tomando en cuenta el comportamiento de una función cerca de sus valores extremos.

Ejemplo 2. *Subdividir un segmento de longitud B en dos segmentos A y $B - A$ de tal manera que el producto $A(B - A) = AB - A^2$ sea máximo.*

Primero sustituía A por $A + E$, entonces formaba una seudo-ecuación para después compararla con la ecuación original:

$$(A+E)B - (A+E)^2 = AB - EB - A^2 - 2AE - E^2 \sim AB - A^2$$

cancelando términos iguales y dividiendo por E, se obtiene

$$2A + E \sim B.$$

Finalmente se descartan los términos que aún contienen E, transformando su seudo-ecuación en una verdadera ecuación que proporciona el valor $A = B/2$, el cual hace que $AB - A^2$ sea máximo.

También está proximo al cálculo diferencial el método de Fermat de búsqueda de las tangentes a curvas algebraicas, para esto usaba un método similar al de las *seudo-ecuaciones.*

En un pequeño arco MN de una curva algebraica $f(x) = 0$ (Figura 2.2) por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo característico MNP. Los triángulos MNP y SMR son semejantes, luego: $SR = (MR.MP)/PN$

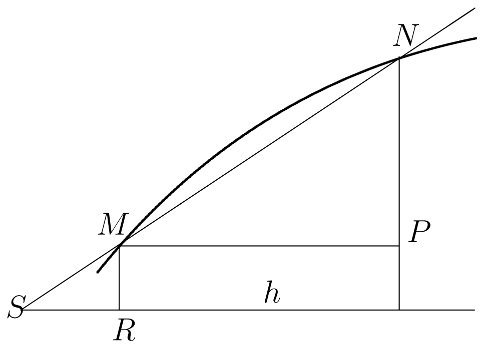

Figura 2.2

Tomando M muy cercano a N y utilizando simbología más usual para nosotros (Figura 2.3) tenemos:

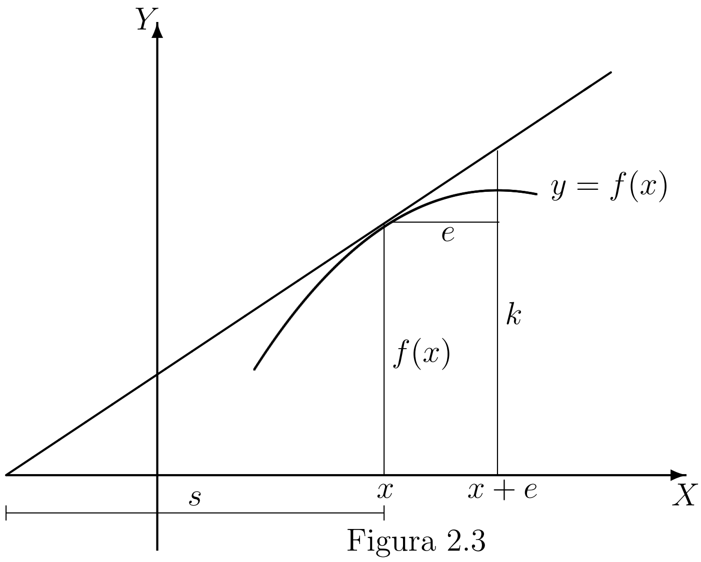

Figura 2.3

$$s \sim \frac{ef(x)}{k - f(x)}.$$

aproximando k a $f(x + e)$

$$s \sim \frac{ef(x)}{f(x + e) - f(x)}.$$

Luego dividía por e el numerador y el denominador(asumiendo que f sea un polinomio). Después de descartar en el denominador los términos que contienen e como factor, se obtiene la expresión para la subtangente. En términos modernos escribimos:

$$s \sim \frac{f(x)}{(f(x+e)-f(x))/e}$$

y al tomar el límite cuando $e \to 0$ obtenemos

$$s = \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1.3}$$

Dado que la pendiente de la recta tangente es $f(x)/s$, la ecuación (1.3) identifica la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = 0$ con la derivada $f'(x)$.

Ejemplo 3. *Calcular la pendiente de la recta tangente de la función $f(x) = x^2$ en cualquier punto utilizando el método de Fermat.*

De la ecuación (1.3) tenemos

$$s \sim \frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{x^2}{2x+e}.$$

haciendo $e = 0$ tenemos que $s = x/2$, entonces la pendiente de la recta tangente a la parabola $f(x) = x^2$ es:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2}{x/2} = 2x.$$

Todas las funciones de Fermat son algebraicas polinomiales. En los casos en que las funciones investigadas aparecían irracionalidades, se liberaba de ellas elevando a ambas partes de la ecuación a una potencia adecuada.

Isaac Barrow (1630-1677) también hizo contribuciones importantes a la teoría de diferenciación. Su trabajo matemático más importante es "*Geometrical Lectures*" que aparece en 1670, al año siguiente de su renuncia a la cátedra en Cambridge a favor de Newton. En éste trabajo se encuentra una aproximación cercana al proceso moderno de diferenciación, utilizando el llamado "triángulo diferencial" que se encuentra en los libros actuales, Barrow describe una aparente modificación del método que Fermat encontró para la construcción de rectas tangentes a curvas definidas implícitamente por $f(x, y) = 0$. Considerando el "arco infinitamente pequeño" MN de una curva (Figura 2.4), Él tomaba los puntos $M(x, y)$ y $N(x + e, y + a)$ y escribía:

$$f(x+e, y+a) = f(x, y) = 0, \tag{1.4}$$

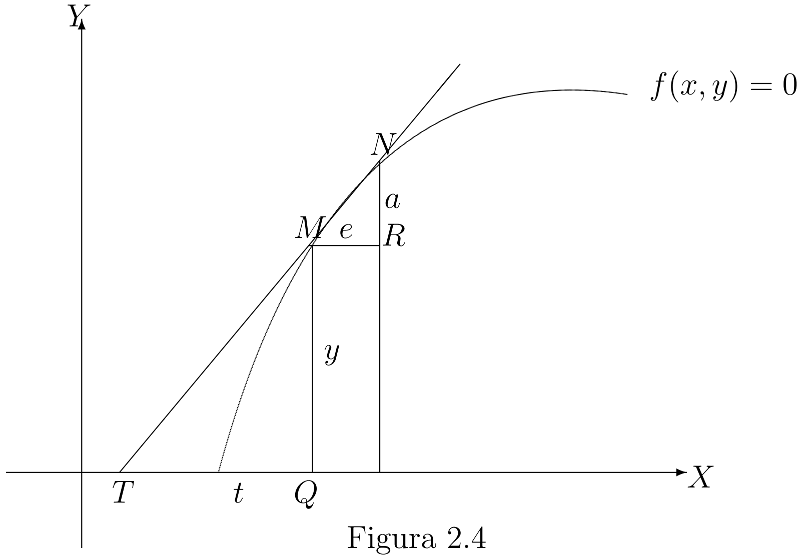

Figura 2.4

Después quitaba todos los términos que contenían potencias de a o e, o producto de estos. Finalmente ignoraba la distinción entre el “arco infinitamente pequeño” MN y el segmento recto MN y resolvía (1.4) por medio de los triángulos semejantes TQM y MRN para la pendiente $y/t = a/e$ de la recta tangente a M. Así Barrow emplea el concepto de *triángulo característico* (esencialmente la idea de la recta tangente como la posición limite de la recta secante cuando a y e se aproximan a cero).

Ejemplo 4. *Aplicar el método de Barrow para calcular la pendiente de la recta tangente a curva $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. (Folium de Descartes)*

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 - 3(x + e)(y + a) = x^3 + y^3 - 3xy$$
$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3ye - 3ae = 0,$$

eliminamos las potencias de a y e obtenemos:

$$3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0,$$

finalmente

$$m = \frac{a}{e} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Barrow aplica este método de construcción de tangentes a las curvas

$$
\begin{array}{ll}
x^2(x^2+y^2)=r^2y^2 & \text{Curva Kappa,}\\
x^3+y^3=r^3 & \text{Curva Lamé,}\\
x^3+y^3=rxy & \text{Curva La Galande,}\\
y=(r-x)\tan\dfrac{\pi x}{2r} & \text{Cuadratriz,}\\
y=r\tan\dfrac{\pi x}{2r} & \text{Curva tangente.}
\end{array}
$$

La razón a/e es en términos modernos dy/dx.

En 1666 **Isaac Newton (1642-1727)** organizó los resultados de sus investigaciones en el manuscrito "*The October 1966 Tract on Fluxions*". Newton estudió el problema de la tangente, utilizando el método de combinar las componentes de la velocidad en un punto en movimiento en un sistema conveniente de coordenadas. En su trabajo Newton considera una curva como el lugar geométrico generado por el movimiento continuo de un punto. Las coordenadas x y y del punto en movimiento son funciones del tiempo t, es decir, cantidades variables. Una cantidad variable es llamada "*fluente*", y su razón de cambio es la llamada "*fluxión*" del fluente.

Si un "*fluente*," tal como la ordenada del punto que genera la curva es representado por y, entonces la fluxión de este fluente es representado por $\dot{y}$, análogamente si el fluente es x, su fluxión es $\dot{x}$. En términos modernos las fluxiones $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las derivadas de x e y con respecto al tiempo t, es decir,

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt} \quad y \quad \dot{y}=\frac{dy}{dt},$$

y su razón es la derivada de y con respecto a x

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dx}.$$

Newton introduce otro concepto, "*el momento de un fluente*", este es el valor infinitamente pequeño con el que aumenta el fluente en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. El símbolo del momento de tiempo es "*o*", por consiguiente el momento del fluente x es dado por el producto $\dot{x}o$, esto es, el producto de la velocidad instantánea por el momento del tiempo. En esencia, el momento del fluente es su diferencial. En la teoría de las fluxiones se resuelven dos problemas principales, que formulados en términos matemáticos son:

1. Determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre las fluentes.
2. Determinación de la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones.

El primer problema llamado problema directo de la teoría de las fluxiones, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones. Newton introdujo una regla uniforme: el algoritmo de la diferenciación de funciones. Mostraremos como procedía Newton con un ejemplo. Se da la relación entre las fluentes: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Formemos la misma relación para los fluentes después de experimentar una variación instantánea, esto es, cuando en cada fluente se añade su momento:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0,$$

desarrollando según el teorema del binomio tenemos,

$$\begin{array}{l} x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + \\ axy - ax\dot{y}o + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - y^3o^3 \end{array} = 0,$$

usamos la condición $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; los miembros restantes los dividimos por o y eliminamos, como infinitesimales, todos aquellos términos en los cuales se conserva, después de esto, el momento infinitesimal de tiempo o. Obtenemos la relación entre las fluxiones:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Al tiempo con la teoría Newtoniana de las fluxiones, **G.M Leibnitz(1646-1716)** desarrolló un modo diferente de llegar al cálculo diferencial. Para la resolución de problemas sobre el trazado de tangentes a curvas dadas. Leibnitz utilizó el triángulo característico de Pascal. Con esto llego a la idea de sumar las diferencias dx y dy que generan los lados de dicho triángulo(ver Figura 2.5)

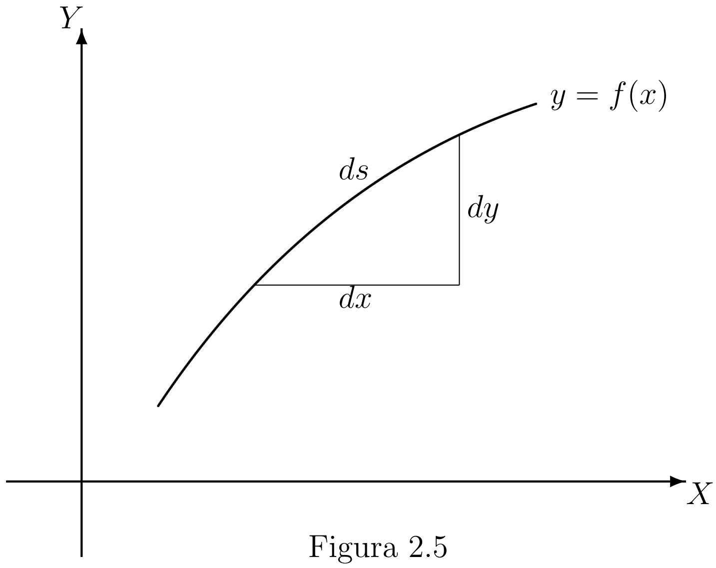

Figura 2.5

Aquí el diferencial dx se toma como una magnitud arbitraria, y el diferencial dy se define por la proporción

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

donde s es la subtangente a la curva en el punto (x, y). Leibnitz inicialmente interpretó los diferenciales como magnitudes proporcionales al incremento instantáneo de la magnitud; más tarde los definió como diferencias infinitesimales. Él designó estas diferencias infinitesimales con el símbolo "*d*" (abreviatura de la palabra differentia, o sea, diferencia).

Tanto Newton como Leibnitz llevaron a cabo un conjunto de intentos de explicar sus cálculos, sin lograrlo. Los más notables matemáticos, que se ocuparon a mediados del siglo XVIII del problema de la fundamentación del análisis infinitesimal, veían su objetivo, por ahora, sólo en la racionalización de sus fundamentos, en la eliminación de las lagunas y la falta de claridad. Entre los los numerosos esfuerzos de este período, se destacan las teorías de Euler y D'Alembert.

El sucesor de Leibnitz en el desarrollo del cálculo fue **L. Euler (1707-1783)**. Para Euler el cálculo diferencial de Leibnitz no debía tratarse como el cálculo de diferenciales en la eliminación de los infinitesimales. Según Euler el cálculo diferencial es un método de determinación de los incrementos esfumantes que son obtenidos de las funciones, cuando a sus argumentos se les da un incremento esfumante. Aquí el concepto fundamental no es el de diferencial, sino la derivada. Los infinitesimales o diferencias son ceros exactos. Las derivadas, por consiguiente tienen la forma $0/0$; se requiere solo aquel valor al cual se aproxima la razón entre las diferencias finitas $\Delta y = y_1 - y$ y $\Delta x = x_1 - x$, al ir disminuyéndolas cada uno hasta cero. La aproximación de Euler consiste en quitar todos los infinitesimales de mayor orden $(dx)^2$,$(dx)^3$,..., en una expansión apropiada del diferencial dy de una función y dada, por ejemplo, si $y = x^n$, entonces la expansión binomial da

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^n - x^n \\ &= (x^n + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \dots) - x^n \\ &= nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \dots \\ dy &= nx^{n-1}dx. \end{aligned}$$

La teoría de los ceros de Euler no pudo ser reconocida como satisfactoria. Ella solo enmascaraba los pasos reales al límite, los cuales se llevaban a cabo en la diferenciación de funciones.

La teoría de **J. D'Alambert (1717-1773)** surgió en el terreno de la reconsideración crítica de la herencia de Newton y Leibnitz. Esta reconsideración obligó a D'Alambert a dar preferencia al método de Newton. Esté método lo desarrolló dándole la forma al método de los límites. Consideró que una magnitud es el límite de otra, si la segunda puede estar más próxima a la primera que cualquier otra magnitud dada; además, la magnitud aproximante no puede nunca superar a la magnitud que se aproxima. De aquí se ve que las variables, según D'Alembert, son monótonas. Además, para evitar las operaciones con ceros, introdujo la exigencia de que los límites no coincidan con ningún valor de la variable. El cálculo de derivadas según D'Alambert consta de las siguientes operaciones: al argumento variable x se le da un incremento finito Δx; la función $y = f(x)$ recibe como consecuencia de esto un incremento finito Δy; se realiza la relación $\Delta y/\Delta x$ y se simplifica; finalmente se pone $\Delta x = 0$, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Semejante método se fundamenta de hecho en la suposición de que el desarrollo $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ en serie de potencias de Δx es ya conocido, lo que en esencia es equivalente a la afirmación de que se ha encontrado la derivada y a esta solo basta liberarla de lo circundante, según expresó K. Marx.

Hacia la segunda mitad del siglo XVIII apareció otra concepción para fundamentar el análisis, denominada algebraica. Su esencia consistía en situar en la base del análisis el concepto de derivada, cuya definición incluiría un método efectivo para su búsqueda, la cual no se apoyaría en los conceptos nebulosos del infinitesimales, límites, etc. Algunos de sus representantes son Lagrange, K. Marx, y Landen.

J. Landen, considero expresiones de la forma

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

El valor de tal expresión cuando $x = x_1$ lo denominó "valor especial" o "relación residual" e introdujo para este el símbolo $[x/y]$. La búsqueda del "valor especial"para las funciones algebraicas elementales se apoyaba en la evidencia del desarrollo de funciones en series. Sus métodos algebraicos eran adecuados realmente sólo para funciones polinomiales. La extensión de estos métodos, incluso a la clase de funciones analíticas está vinculada a dificultades que no se pudieron superar(extensión a las series infinitas de las propiedades de las sumas finitas, representación de funciones mediante serie de potencias, etc.)

Según **K. Marx (1818-1883)** la derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ se obtiene del modo siguiente: se forma(si esto es posible) una derivada "previa", esto es, la función

$$\Phi(x, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

El valor de esta función para $x = x_1$(si existe) es la derivada de la función dada. Marx buscó algoritmos que permitieran (en casos sencillos) encontrar directamente, según la expresión de la función, su derivada. Así para el caso de la función potencial $y = x^n$

$$\Phi(x, x_1) = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x x_1^{n-2} + \ldots + x^{n-2} x_1 + x^{n-1}.$$

que cuando $x = x_1$ da

$$f'(x) = n x^{n-1}.$$

A tal método de búsqueda directa de la derivada K. Marx lo llamó diferenciación algebraica. El término "algebraico" lo utilizó en el mismo sentido que muchos matemáticos del siglo XIX: no exige la noción de magnitud infinitesimal. Marx admite la transformación simbólica a la comúnmente aceptada en aquel tiempo. Designando

$$x_1 - x = \Delta x; \quad y_1 - y = \Delta y,$$

además $\Delta x \neq 0$, Marx obtenía para la derivada previa la expresión simbólica $\Delta y/\Delta x$. Correspondientemente la notación para la derivada $f'(x)$ será

$$\frac{dy}{dx}.$$

A esté ultimo símbolo Marx lo llamo "coeficiente diferencial simbólico".

El punto de partida de **Joseph. L. Lagrange(1736-1813)** fue el esfuerzo por demostrar el teorema de que cada función $y = f(x+h)$ se puede desarrollar en serie de potencias, casi en todas partes (posiblemente con excepción valores aislados del argumento),

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$$

Lagrange utilizó las series de potencias para la aproximación de funciones por polinomios, apoyándose en que para todos los h suficientemente pequeños cada término del desarrollo será mayor que la suma de los que lo siguen. Las derivadas sucesivas fueron definidas como los coeficientes de la potencias sucesivas de h con exactitud hasta de coeficientes numéricos correspondientes.

En 1821 **A. Cauchy (1789-1857)** construye el cálculo diferencial sobre la base de la teoría de los límites. Cauchy parte de la derivada como el límite de un coeficiente diferencial:

> "cuando una función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable x, y cuando se asigna a la variable un valor tal que dicho valor este entre los dos límites, entonces un incremento infinitamente pequeño asignado a la variable produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma. En consecuencia, si uno colocara $\Delta x = i$, los dos términos de la relación de los diferencias
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}, \tag{1.5}$$
>
> podrían ser cantidades infinitamente pequeñas. Pero aunque estos dos términos se aproximan indefinida y simultáneamente al límite cero, la razón misma puede converger a otro límite, negativo o positivo. Este límite, cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x; pero este varía en x. La forma de la nueva función, la cual se da como el límite de la razón (1.5) dependerá de la forma de la función propuesta $y = f(x)$ para indicar esta dependencia, a la nueva función se le da el nombre de "función derivada" y se denota por y' o $f'(x)$."

Para el cálculo diferencial de Cauchy es característica la aplicación sistemática del teorema del valor medio:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

El cálculo diferencial de Cauchy es muy parecido a la exposición habitual del cálculo actual.

Como conclusión de esta breve reseña histórica de la derivada, podemos darnos cuente que la derivada primero fue utilizada, luego descubierta y por último formalizada.

CAPÍTULO 2

Diferencial de Gâteaux

En este Capítulo trataremos nuestra primera noción de diferencial, la propuesta por Gâteaux que precisamente lleva su nombre. Comenzaremos con la definición de variación de Gâteaux, su interpretación geométrica, posteriormente se mostrarán algunos teoremas importantes como el del Valor Medio, también se darán las condiciones para pasar de la variación a la diferencial de Gâteaux. Por último se mostrarán algunos ejemplos de este diferencial.

Para funciones de varias variables la diferencial de Gâteaux comúnmente nombrada como G-diferencial, se conoce como la derivada direccional.

Definición 7. *[4] Sea f definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, y, tomando valores en $\mathbb{R}^m$, sea c un punto interior de A y u cualquier punto de $\mathbb{R}^n$. Un vector $L_u \in \mathbb{R}^m$ es llamado la derivada parcial de f en c con respecto a u, si para cada número $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga $0 < |t| < \delta(\epsilon)$ tenemos*

$$\left\| \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(u)\} - L_u \right\| < \epsilon.$$

En forma semejante se puede definir L_u tomando valores en $\mathbb{R}^m$, como el límite

$$L_u = Vf(c,u) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(c)\},$$

o como la derivada en $t = 0$ de la función F definida mediante $F(t) = f(c+tu)$, para $|t|$ suficientemente pequeño.

Esta definición es la misma que conocemos para funciones de una sola variable, salvo que en este caso la aproximación hacía el punto c la hacemos a través de la recta $c+tu$, la derivada así definida se interpreta como el vector velocidad de cambio de f en c según el vector u. (ver Figura 3.1)

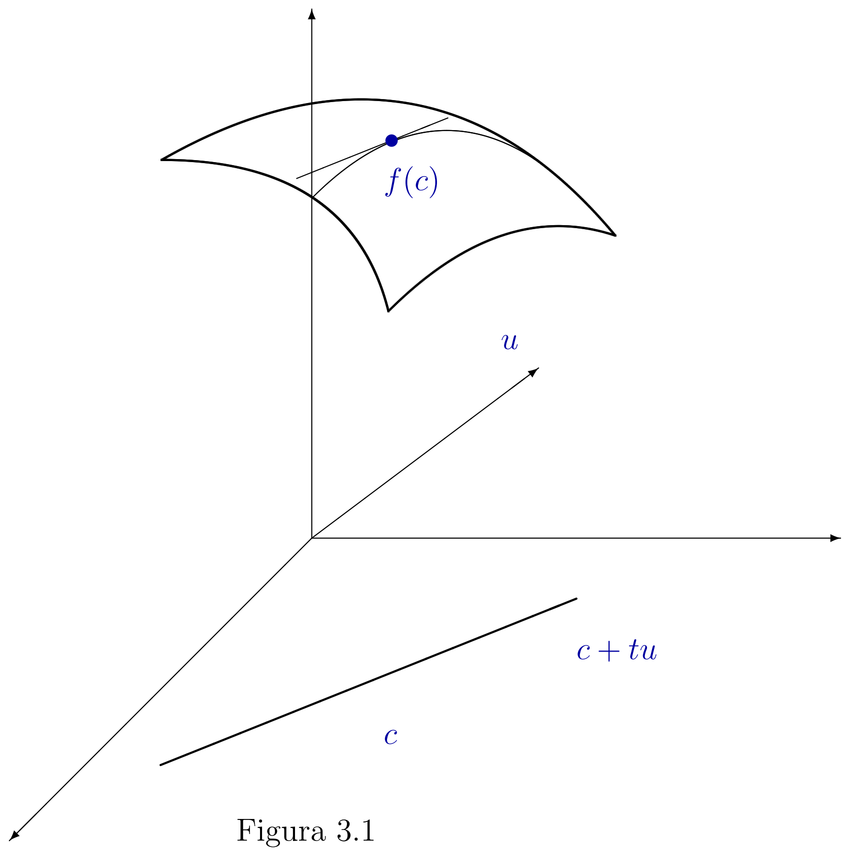

Figura 3.1

La definición de la variación de Gâteaux dada anteriormente por

$$VF(x_0, h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{F(x_0 + th) - F(x_0)\} \tag{2.1}$$

puede existir para algún h, pero falla para otros, sin embargo $VF(x_0, h)$ es homogénea en h de grado uno, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2. *[17] Sean X y Y espacios de Banach. $F : A \in X \to Y$, x_0 punto interior de A. Si $VF(x_0, h)$ existe para lagún $h \neq 0$ entonces $VF(x_0, \lambda h)$ existe para cada número real λ. Además*

$$VF(x_0, \lambda h) = \lambda VF(x_0, h).$$

Demostración. Sea $t\lambda = r$ tenemos:

$$\begin{aligned}
VF(x_0, \lambda h) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{F(x_0 + t(\lambda h)) - F(x_0)\} \\
&= \lim_{t\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\lambda t}\{F(x_0 + (t\lambda)h) - F(x_0)\} \\
&= \lambda \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\{F(x_0 + rh) - F(x_0)\} \\
&= \lambda VF(x_0, h).
\end{aligned}$$

■

La existencia de la variación de Gâteaux en $x_0 \in A$ provee una propiedad de aproximación local en el siguiente sentido:

Teorema 1. *[11] Sean X y Y espacios de Banach y una función $F : A \subseteq X \to Y$. Una condición necesaria y suficiente para que F tenga variación de Gâteaux en $x_0 \in A$ es que la siguiente representación se dé para cada $h \in X$ para la cual $x_0 + h \in A$*

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = H(x_0, h) + R(x_0, h), \tag{2.2}$$

donde la aplicación $h \to H(x_0, h)$ es homogénea de grado uno y

$$\lim_{t\to 0} \frac{R(x_0, th)}{t} = 0.$$

Tal representación es única y

$$VF(x_0, h) = H(x_0, h).$$

Demostración. 1. (a) Unicidad: Supongamos que para F, existen H, R y H', R', que satisfacen la representación, es decir:

$$\begin{aligned}
F(x_0 + h) - F(x_0) &= H(x_0, h) + R(x_0, h) \quad \text{y} \\
&= H'(x_0, h) + R'(x_0, h);
\end{aligned}$$

luego para $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
H(x_0, h) - H'(x_0, h) &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t}[H(x_0, h) - H'(x_0, h)] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[H(x_0, th) - H'(x_0, th)] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[R'(x_0, th) - R(x_0, th)] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{R'(x_0, th)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{R(x_0, th)}{t} = 0
\end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que tanto $H(x_0,h) = H'(x_0,h)$ como $R(x_0,h) = R'(x_0,h)$.
(b) Si $F(x_0+h) - F(x_0) = H(x_0,h) + R(x_0,h)$, entonces

$$\begin{aligned} VF(x_0,h) = \left.\frac{dF(x_0+\tau h)}{d\tau}\right|_{\tau=0} &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\{F(x_0+\tau h) - F(x_0)\} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\{H(x_0,\tau h) + R(x_0,\tau h)\} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1} H(x_0,\tau h) + \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1} R(x_0,\tau h) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\tau H(x_0,h) \\ &= \lim_{\tau\to 0} H(x_0,h) = H(x_0,h). \end{aligned}$$

Por consiguiente $VF(x_0,h) = H(x_0,h)$.
2. Si F tiene variación de Gâteaux, entonces la representación (2.2) se da. Si la variación de Gâteaux existe entonces

$$\tau^{-1}\{F(x_0+\tau k) - F(x_0)\} = VF(x_0,k) + \epsilon(x_0,\tau k),$$

con k un elemento en el espacio y $\epsilon(x_0,\tau k) \to 0$ cuando $\tau \to 0$. Haciendo $\tau k = h$, entonces

$$\tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} = VF\left(x_0, \frac{h}{\tau}\right) + \epsilon(x_0,h),$$

como $VF(x_0,h)$ es homogénea, se tiene

$$\begin{aligned} \tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} &= VF\left(x_0, \frac{h}{\tau}\right) + \epsilon(x_0,h) \\ \tau^{-1}\{F(x_0+h) - F(x_0)\} &= \tau^{-1}\{VF(x_0,h) + \tau\epsilon(x_0,h)\} \\ F(x_0+h) - F(x_0) &= VF(x_0,h) + \tau\epsilon(x_0,h) \end{aligned}$$

luego $H(x_0,h) = VF(x_0,h)$ y $R(x_0,h) = \tau\epsilon(x_0,h)$ y además

$$\frac{R(x_0,\tau h)}{\tau} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \to 0.$$

■

Proposición 3. *(**Valor medio de G-diferencial**)[12] Sean X y Y espacios lineales normados, x_0 y $x_0+h \in X$. Sea S un segmento de recta dirigido que tiene por extremos, x_0 y x_0+h. Sea $F : S \to Y$ una función continua tal que para todo $t \in (0,1), VF(x_0+th,h)$ existe. Entonces*

$$\|F(x_0+h) - F(x_0)\| \leq \sup_{0<t<1} \|VF(x_0+th,h)\|.$$

Demostración. Sea $\lambda \in (0,1)$. La aplicación

$$\phi : [\lambda, 1] \to Y, \quad \text{dada por} \quad \phi(t) = F(x_0 + th)$$

es continua, y para todo $t_0 \in [\lambda, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\phi'(t_{0^+}) &= \lim_{t \to t_{0^+}} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0 + t_0 h)}{t - t_0}, \quad \text{haciendo} \quad \epsilon = t - t_0 \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{F(x_0 + h(\epsilon + t_0)) - F(x_0 + t_0 h)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x_0 + t_0 h + h\epsilon) - F(x_0 + t_0 h)}{\epsilon} \\
&= VF(x_0 + t_0 h, h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto debemos mostrar que

$$\|\phi(1) - \phi(\lambda)\| \leq M(1 - \lambda) \quad \text{donde} \quad M = \sup_{0 < t_0 < 1} \|\phi'(t_{0^+})\|.$$

Sea $W = \{t \in [\lambda, 1] \,/\, \quad \|\phi(1) - \phi(\lambda)\| \leq (M + \epsilon)(s - \lambda), \text{ para todo } \quad s \in [\lambda, t]\}$.
Claramente W es de la forma $[\lambda, \alpha]$ para algún $\alpha \in [\lambda, 1]$. Probemos que $\alpha = 1$.
Si $\alpha < 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ y para todo $k, 0 \leq k < \delta$ entonces

$$\phi(\alpha + k) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha^+)k + k\rho(k) \quad \text{donde} \quad \|\rho(k)\| < \epsilon.$$

Por tanto, como $\alpha \in W$,

$$\begin{aligned}
\forall k, 0 \leq k < \delta \Longrightarrow \|\phi(\alpha + k) - \phi(\lambda)\| &\leq \|\phi(\alpha + k) - \phi(\alpha)\| + \|\phi(\alpha) - \phi(\lambda)\| \\
&\leq (M + \epsilon)k + (M + \epsilon)(\alpha - \lambda) \\
&= (M + \epsilon)((\alpha + k) - \lambda);
\end{aligned}$$

luego

$$\forall k, 0 \leq k < \delta, \text{entonces} \quad \alpha + k \in W,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, se tiene $\alpha = 1$, con esto hemos demostrado que para todo $\lambda \in (0,1)$

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0 + \lambda h)\| \leq \sup_{\lambda < t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\|,$$

luego

$$\begin{aligned}
\|F(x_0 + h) - F(x_0)\| &= \lim_{\lambda \to 0^+} \|F(x_0 + h) - F(x_0 + \lambda h)\| \\
&\leq \lim_{\lambda \to 0^+} \sup_{\lambda < t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\| \\
&\leq \sup_{\lambda < t < 1} \|VF(x_0 + th, h)\|.
\end{aligned}$$

■

La variación de Gâteaux también es conocida como diferencial débil, y su *debilidad* consiste en que ella no implica la continuidad o linealidad de la función en la dirección h. Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{2.3}$$

Es fácil ver que f tiene diferencial débil en $(0,0)$ y en la dirección de cualquier vector $A = (a,b)$. En efecto

$$F(t) = f((0,0) + t(a,b)) = f(ta,tb) = \frac{t^3ab^2}{t^2a^2 + t^4b^4}$$

Luego

$$F'(t) = \frac{a^3b^2 - ab^6t^2}{a^4 + 2a^2b^4t^2 + t^4b^8}$$
$$F'(0) = \frac{b^2}{a}.$$

es decir.

$$Vf[(0,0),A] = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Pero la función no es continua en $(0,0)$. En efecto, hacemos $x = y^2$ y observamos que $f(x,y) = \frac{1}{2}$, luego para puntos (x,y) próximos a $(0,0)$, no tenemos que $f(x,y)$ sea próximo a cero.

Definición 8. *[12] Si $VF(x_0,h)$ es lineal y continuo en h, esta es llamada la diferencial de Gâteaux de F en x_0 en dirección(o con incremento) h y se denota mediante $DF(x_0,h)$ o $DF(x_0)h$.*

Paul Lévy postuló la linealidad de la variación de Gâteaux en su libro "*Lecons d' Analyse Fonctionelle*" (1922) así que quizá $DF(x_0,h)$ podría llamarse la diferencial de Gâteaux-Lévy.

Se puede apuntar que si $VF(x_0,h)$ es aditiva, entonces $VF(x_0,h)$ es direccionalmente continua en h, es decir,

$$\lim_{\tau \to 0} VF(x_0, h + \tau k) = VF(x_0, h).$$

Si $\lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\|R(x_0,\tau h)\| = 0$ se da uniformemente sobre cada conjunto acotado entonces, por el teorema 1, F posee diferencial de Gâteaux $VF(x_0,h)$ en x_0. Así que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|\tau^{-1}[F(x_0+\tau h) - F(x_0)] - VF(x_0,h)\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|t\| < \delta.$$

Esto es,

$$F(x_0+\tau h) - F(x_0) = VF(x_0,\tau h) + R(x_0,\tau h),$$

donde, para $|\tau| < \delta$,

$$\frac{\|R(x_0,\tau h)\|}{\|\tau h\|} < \epsilon.$$

Sea $k = \tau h$; se tiene que $F(x_0+k) - F(x_0) = VF(x_0,k) + R(x_0,k)$, donde

$$\lim_{k\to 0} \frac{\|R(x_0,k)\|}{\|k\|} = 0;$$

por tanto, $VF(x_0,k) = DF(x_0,k)$.

Note que si F y G son diferenciables según Gâteaux en x_0, entonces $T = \alpha F + \beta G$, es también diferenciable según Gâteaux en x_0, para cualquier α, β reales, pero que la regla de la cadena para funciones G-diferenciables no se cumple. Veamos un ejemplo. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas mediante,

$$f(x) = (x, x^2) \quad y \quad g(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

Entonces $g \circ f(x) = g(x,x^2) = x$, f es F-diferenciable en $x = 0$, g tiene variación de Gâteaux en $(0,0)$ igual a cero, pero $(g \circ f)'(0) = 1$ y no cero.

Teorema 2. *[17] Suponga que las siguientes condiciones se satisfacen:*

- *La variación de Gâteaux $VF(x,h)$ de un operador F existe en alguna vecindad del punto x_0*
- *$VF(x,h)$ es continua en el punto x_0.*
- *$VF(x,h)$ es continua en h en el punto $h = \odot$.*

Entonces la variación de Gâteaux $VF(x,h)$ es un operador lineal en h, y $VF(x_0,h) = DF(x_0,h)$.

Demostración. (1). De la continuidad de $VF(x_0, h)$ en el punto $h = \odot$ se sigue la existencia de los números $m > 0$ y $M > 0$ tales que $\|h\| \leq m$ implica $\|VF(x_0, h)\| \leq M$. En razón a la homogeneidad en h del operador $VF(x_0, h)$, se sigue que, para un h arbitrario

$$\|VF(x_0, h)\| = \left\| \frac{\|h\|}{m} VF\left(x_0, \frac{mh}{\|h\|}\right) \right\| \leq \frac{M}{m}\|h\|,$$

es decir, $VF(x_0, h)$ es un operador acotado, por lo tanto es un operador continuo.
(2). Ahora comprobemos la linealidad en h de $VF(x_0, h)$. Sean h_1 y h_2 elementos con norma unitaria, arbitrarios en X y ϵ un real positivo arbitrario. De la definición de variación de Gâteaux, se tiene que

$$\begin{aligned} VF(x_0, h_1) &= \frac{1}{t}\{F(x_0 + th_1) - F(x_0)\} + \alpha_1 \\ VF(x_0, h_2) &= \frac{1}{t}\{F(x_0 + th_2) - F(x_0)\} + \alpha_2 \quad \text{y} \\ VF(x_0, h_1 + h_2) &= \frac{1}{t}\{F(x_0 + t(h_1 + h_2)) - F(x_0)\} + \alpha_3; \end{aligned}$$

Tómese $\|\alpha_i\| < \frac{1}{4}\epsilon, i = 1, 2, 3.$ luego se tiene que

$$\begin{aligned} &\|VF(x_0, h_1 + h_2) - VF(x_0, h_2) - VF(x_0, h_1)\| \\ &= \left\| \frac{1}{t}[F(x_0 + t(h_1 + h_2)) - F(x_0 + th_2) - F(x_0 + th_1) + F(x_0)] \right. \\ &\left. + (\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1) \right\| \\ &\leq \frac{1}{|t|}\|F(x_0 + t(h_1 + h_2)) - F(x_0 + th_2) - F(x_0 + th_1) + F(x_0)\| + \\ &\|\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1)\| \\ &\leq \frac{1}{|t|}\|F(x_0 + t(h_1 + h_2)) - F(x_0 + th_2) - F(x_0 + th_1) + F(x_0)\| + \frac{3}{4}\epsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplicando la fórmula de Lagrange

$$F(x + h) - F(x) = VF(x + \delta h, h), \; 0 < \delta < 1;$$

tenemos:

$$\begin{aligned} F(x_0 + th_1 + th_2) - F(x_0 + th_2) &= VF(x_0 + th_2 + \delta th_1, th_1) \\ F(x_0 + th_1) - F(x_0) &= VF(x_0 + \delta th_1, th_1). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}&\|F(x_0+t(h_1+h_2))-F(x_0+th_2)-F(x_0+th_1)+F(x_0)\|\\&=\|VF(x_0+th_2+\delta th_1,th_1)-VF(x_0+\delta th_1,th_1)\|\\&=|t|\|VF(x_0+th_2+\delta th_1,th_1)-VF(x_0+\delta th_1,th_1)\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|VF(x_0,h_1+h_2)-VF(x_0,h_1)-VF(x_0,h_2)\|\\&\leq\|VF(x_0+th_2+\delta th_1,th_1)-VF(x_0+\delta th_1,th_1)\|+\frac{3}{4}\epsilon.\end{aligned}$$

Dado que $VF(x_0,h)$ es continuo en x en el punto x_0, para una posible elección de δ se obtiene:

$$\|VF(x_0+th_2+\delta th_1,th_1)-VF(x_0+\delta th_1,th_1)\|<\frac{1}{4}\epsilon \tag{2.5}$$

juntando (2.4) y (2.5) obtenemos la desigualdad deseada

$$0\leq\|VF(x_0,h_1+h_2)-VF(x_0,h_1)-VF(x_0,h_2)\|<\epsilon;$$

dado que ϵ es un real positivo arbitrario, se tiene entonces la aditividad

$$VF(x_0,h_1+h_2)=VF(x_0,h_1)+VF(x_0,h_2).$$

■

Teorema 3. *[11] Una condición necesaria y suficiente para que $VF(x_0,h)$ sea lineal y continua en h es que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. A cada h corresponde un $\delta(h)$ tal que

   $$|t|\leq\delta \quad \text{implica} \quad \|F(x_0+th)-F(x_o)\|\leq M\|th\|$$

   donde M no depende de h.

2. $\Delta^2_{th_1,th_2}F(x_0)=o(t)$ donde

   $$\Delta^2_{h_1,h_2}F(x_0)=F(x_0+h_1+h_2)-F(x_0+h_1)-F(x_0+h_2)+F(x_0).$$

Demostración. Utilizando la condición (2) se tiene que si $o(t)=g(t)$ entonces

$$\lim_{t\to0}\frac{g(t)}{t}=0, \qquad \text{luego,} \qquad \lim_{t\to0}\frac{\Delta^2_{th_1,th_2}F(x_0)}{t}=0$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to 0} \frac{\Delta^2_{th_1,th_2} F(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th_1+th_2) - F(x_0+th_1) - F(x_0+th_2) + F(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+t(h_1+h_2)) - F(x_0)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th_1) - F(x_0)}{t} \\
&- \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th_2) - F(x_0)}{t}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+t(h_1+h_2)) - F(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th_1) - F(x_0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th_2) - F(x_0)}{t}
$$

$$
VF(x_0, h_1+h_2) = VF(x_0,h_1) + VF(x_0,h_2),
$$

y como ya se tiene que $VF(x_0,h)$ es homogénea de grado uno, se tiene la linealidad de la variación de Gâteaux.

2. $VF(x_0, \bullet)$ es continua en h. Se tiene que $|t| < \delta$ implica

$$
\|F(x_0+th) - F(x_0)\| \le M\|th\|.
$$

Luego,

$$
\left\|\frac{F(x_0+th) - F(x_0)}{t}\right\| \le M\|h\|,
$$

$$
\|VF(x_0,h)\| \le M\|h\| \text{ si } \quad h = h_0 - \delta k, \text{donde} \quad \delta \ \to 0,
$$

entonces

$$
\|VF(x_0, h_0 - \delta k)\| \le M\|h_0 - \delta k\|,
$$

$$
\|VF(x_0,h_0) - VF(x_0,\delta k)\| \le M\|h_0 - \delta k\|,
$$

si $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ entonces,

$$
\|VF(x_0,h_0) - VF(x_0,\delta k)\| \le M\frac{\epsilon}{M}
$$

Luego

$$
\|VF(x_0,h_0) - VF(x_0,\delta k)\| \le \epsilon.
$$

■

Un hecho importante de notar es que la noción de diferenciabilidad de Gâteaux se reduce para el caso de $X = \mathbb{R}$, a la noción de diferencialidad de funciones de una variable real:

Proposición 4. *[16] Sea $f : A \to Y, A \subseteq \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de A. Una función es diferenciable según Gâteaux en x_0 si y solo si es diferenciable en x_0 como función de variable real.*

Demostración. Como f es diferenciable según Gâteaux en x_0 entonces:

$$Df(x_0)1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \quad \text{existe} \quad \text{y}$$

$$Df(x_0)(-1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{-t} \quad \text{existe}$$

Además como $Df(x_0)$ es lineal, implica que

$$Df(x_0)(1) = -Df(x_0)(-1)$$

es decir, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \quad \text{existe}$$

luego f es diferenciable en x_0 como función de variable real.

Ahora la recíproca. Basta observar que existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = v \quad \text{con} \quad v \in \mathbb{R}, \quad \text{entonces} \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} = hv$$

luego $Df(x_0)h$ existe para todo $h \in \mathbb{R}$ y $Df(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}, Y)$. Luego f es diferenciable según Gâteaux en x_0. ■

Terminamos este Capítulo con algunos ejemplos de como se calcula el diferencial de Gâteaux.

Ejemplo 5. *Sea $f(x,y,z) = x^3y^2z + xyz$. Hallar $Df[(x,y,z),(a,b,c)]$.*

$$\begin{aligned} \textit{Sea} \quad F(t) &= f[(x,y,z)+t(a,b,c)] = f(x+ta, y+tb, z+tc) \\ &= (x+ta)^3(y+tb)^2(z+tc) + (x+ta)(y+tb)(z+tc). \end{aligned}$$

Entonces

$$F'(0) = bxz + 3ax^2y^2z + 2bx^3yz + ayz + cxy + cx^3y^2.$$

por lo tanto

$$Df[(x,y,z),(a,b,c)] = bxz + 3ax^2y^2z + 2bx^3yz + ayz + cxy + cx^3y^2.$$

Ejemplo 6. *Sea* $f(x,y,z) = \|x,y,z\|^3 = (\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2})^3$. *Hallar* $Df[(1,2,3),(3,4,5)]$.

$$\begin{aligned} Sea \quad F(t) &= f[(1,2,3)+t(3,4,5)] = h(1+3t, 2+4t, 3+5t) \\ &= (\sqrt{(1+3t)^2+(2+4t)^2+(3+5t)^2})^3. \end{aligned}$$

Un cálculo nos dice que

$$F'(0) = \left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t=0} = 6\sqrt{(14+52t+50t^2)}(13+25t)\Big|_{t=0} = 78\sqrt{14}.$$

Por tanto $Df[(1,2,3),(3,4,5)] = 78\sqrt{14}$.

CAPÍTULO 3

Diferencial de Fréchet

En este Capítulo abordaremos nuestra segunda noción de diferencial, la dada por Fréchet. Iniciaremos con una primera definición similar a la diferencial de Gâteaux dada en el Capítulo anterior, luego daremos una segunda definición equivalente a la primera pero de mucha más aplicación; también haremos algunos comentarios históricos. Dedicaremos un apartado especial para estudiar algunas proposiciones que establecen relaciones entre la diferencial de Gâteaux y Fréchet.

Sean X y Y espacios lineales normados y $\mathfrak{L}(x, y)$ el espacio de todos los operadores lineales continuos de X en Y con la norma usual.

Definición 9. *Una función $F : U \to Y$ donde U es un subconjunto abierto de X, se dice diferenciable según Fréchet en $x_0 \in U$ si existe un operador lineal continuo $L(x_0) : X \to Y$ tal que la siguiente representación se tiene para todo $h \in X$ con $x_0 + h \in U$,*

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + r(x_0, h). \tag{3.1}$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{3.2}$$

Históricamente varios matemáticos antes que Fréchet, también contribuyeron a la formulación de la diferencial de esta forma. Antes de finalizar el siglo XIX la noción de diferencial de una función de varias variables no había sido bien formulada, y se consideró solamente derivadas parciales. Stolz(1983), Pierpont(1905) y Young(1910) definieron el diferencial de una función de varias variables como sigue:

> "f es diferenciable en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *si* $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
> y
> $f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i$.
> donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $max(|h_1|, \ldots, |h_n|) \to 0, i = 1, \ldots, n$."

Como un paso para liberar esta definición del conjunto de coordenadas, Fréchet, quién fue alumno de Hadamard, reemplazó $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i$ en la anterior representación, mediante ϵD, donde D es la "distancia"entre $(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n)$ y $(x_1, \ldots, x_n)$.
Por "distancia", Fréchet usaba $D = max(|h_1|, \ldots, |h_n|)$, o

$$D = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}.$$

En 1911, Fréchet escribió:

> "El funcional U_A tiene una diferencial en el punto A_0, si existe un funcional $V_{\Delta A}$ que es lineal en ΔA y difiere del incremento del funcional U_A en A_0, en una cantidad que es infinitamente pequeña en comparación con la distancia entre los argumentos A_0 y $A_0 + \Delta A$."
> Fréchet obviamente tenía en mente la idea de distancia inducida por una norma.

En 1925, Fréchet llegó a una más precisa definición de diferencial que coincide con la definición 9.[1]

Definición 10. *[15] Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable según Fréchet(F-diferenciable) en a, si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que,*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x-a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

En la Definición 9, $L(x_0)h$ es llamado la variación de Fréchet (o F-variación) de F en x_0, y es denotada por $dF(x_0, h)$. La unicidad de la F-variación es un caso especial de la unicidad de la variación de Gâteaux en vista del Teorema 1) Escribiremos $df(x_0, h) = F'(x_0)h$. el operador $F'(x_0) \in \mathfrak{L}(x, y)$ es llamado la derivada de Fréchet de F en x_0. Si F tiene F-diferencial en cualquier $x \in W$, entonces la función $F' : W \to \mathfrak{L}(x, y)$ es llamada la derivada de Fréchet del operador F.

[1]En "La Notion de différentielle dans l´analyse générale,.Ann. École Norm. sup (3) 42 (1925 293-323.)

La definición de diferencial de Fréchet para una función f de X en Y, con X y Y espacios normados, está dada en términos de la normas de X y Y. Sin embargo, es evidente que la diferenciabilidad es invariante bajo normas equivalentes, así que si f es F-diferenciable en x_0 cuando los espacios lineales están normados por $\| \bullet \|_X$ y $\| \bullet \|_Y$ respectivamente, entonces f es también F-diferenciable en x_0 cuando los espacios X y Y están normados por $\|\bullet\|'_X$ y $\|\bullet\|'_Y$, las cuales son equivalentes a $\|\bullet\|_X$ y $\|\bullet\|_Y$ respectivamente. En el caso de espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes, así que la diferencial de un operador es independiente de la norma utilizada. Normas equivalentes inducen la misma topología, así que la diferenciabilidad depende solamente de la topología de X y Y en espacios de dimensión finita.

3.1. Gâteaux Vs Fréchet

Mostraremos aquí algunos resultados que relacionan las diferenciales de Gâteaux y Fréchet.

El primero es completamente obvio:

Proposición 5. *[16] Sean X y Y espacios normados, $U \subset X$ y $F : U \to Y$ un operador. Si F es Fréchet diferenciable en $x_0 \in U$ entonces F es Gâteaux diferenciable en x_0 y las diferenciales coinciden.*

Otra relación entre estas dos nociones es :

Proposición 6. *[16] Sean X, Y y Z espacios normados, $U \subset X$, $B \subset Y$ y los operadores $F : U \to Y$, $G : B \to Z$; sean además $x_0 \in intA$ y $F(x_0) \in intB$. Si F es Gâteaux diferenciable en x_0 y G es Fréchet diferenciable en $F(x_0)$ entonces $G \circ F$ es Gâteaux diferenciable en x_0 y $D(G \circ F)(x_0) = dG(f(x_0)).DF(x_0)$.*

Demostración. Sea $h \in X$ entonces

$$lim_{t\to 0^+} \frac{G(F(x_0 + th)) - G(F(x_0))}{t} =$$
$$lim_{t\to 0^+} \frac{G(F(x_0) + tVF(x_0, h) + t\gamma(x_0, h, t)) - G(F(x_0))}{t},$$

donde $lim_{t\to 0^+}\gamma(x_0, h, t) = 0$.

Así

$$
\begin{aligned}
& lim_{t\to 0^+}\frac{G(F(x_0+th))-G(F(x_0))}{t} = \\
& lim_{t\to 0^+}\frac{tdG(F(x_0))VF(x_0,h)+tdG(F(x_0))\gamma(x_0,h,t)}{t} = \\
& dG(F(x_0))VF(x_0,h).
\end{aligned}
$$

Luego la variación de Gâteaux de $G\circ F$ en x_0 existe en todas las direcciones y pertenece a $\mathfrak{L}(X,Z)$ pues $dG(F(x_0))DF(x_0)\in\mathfrak{L}(X,Z)$. ■

Teorema 4. *[11] Sean X y Y espacios normados, U un subconjunto de X, $F: X\to Y$ un operador. Si F tiene diferencial de Gâteaux $F'(x)$, la cual es continua en x en x_0, es decir, si la aplicación $F': U\to\mathfrak{L}(X,Y)$ es continua en x_0, entonces F es diferenciable según Fréchet en x_0.*

Demostración. Utilizando el hecho de que

$$\frac{dF(x_0+th)-F(x_0)}{dt}=VF(x_0+th,h)$$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$
\begin{aligned}
F(x_0+h)-F(x_0) &= \int_0^1 VF(x_0+th,h)dt \\
&= VF(x_0,h)+\int_0^1\{VF(x_0+th,h)-VF(x_0,h)\}\,dt,
\end{aligned}
$$

para todo $h\in X$ con $x_0+h\in U$. Pero

$$\frac{1}{\|h\|}\left\|\int_0^1\{VF(x_0+th,h)-VF(x_0,h)\}\,dt\right\|\leq\int_0^1\|F'(x_0+th)-F'(x_0)\|\,dt$$

y la parte derecha de la anterior desigualdad tiende a cero,cuando h tiende a cero. ■

Teorema 5. *[11] El operador F es F-diferenciable en x_0 si y solo si la representación (2.2) se da, donde $H(x_0,h)$ es continuo, lineal en h y*

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^{-1}\|R(x_0,\tau h)\|=0,$$

uniformemente con respecto a h sobre el conjunto $\|h\|=constante$.

Demostración. Sin perder la generalidad se puede mostrar para $\|h\| = 1$.

Si F es F-diferenciable en x_0, entonces,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(x_0,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea $h = \tau k$, donde $\|k\| = 1$; se tiene que

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}\|R(x_0,\tau k)\| = 0,$$

uniformemente sobre $\|k\| = 1$. ■

Veamos con un ejemplo que G-diferenciabilidad no implica F-diferenciabilidad.

Ejemplo 7. *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sea $a = (x,y)$ y $F(a) = f(x,y)$. Entonces para $h = (h_1.h_2) \neq (0,0)$,

$$VF(0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1,th_2)}{t} = \lim_{t=0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^5 h_1^4 + t^3 h_2^2} = \lim_{t=0} \frac{th_1 h_2}{t^2 h_1 + h_2^2} = 0.$$

si $h = (h_1,h_2) = (0,0)$, entonces en límite también es cero. Así $VF(0,h)$ existe y es obviamente continuo y lineal en 0.
Sin embargo en la representación (3.2),

$$r(0,h) = \frac{h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^2} \quad si \quad h \neq 0 \quad y$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(0,h)}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4+h_2^2)(h_1^2+h_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

no existe, y así F no es diferenciable según Fréchet en 0.

Observación 1. *Una función $f : A \to Y, A \subseteq \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0, punto interior de A, como función de variable real si y solo si f es diferenciable según Fréchet en x_0.*

CAPÍTULO 4

Diferencial según Carathéodory

En este Capítulo abordaremos la noción de diferencial propuesta por **Constantín Carathéodory (1873-1950).** Se destaca la generalización a espacios vectoriales de esta caracterización de diferenciabilidad, además se muestran la proposiciones que la relacionan con la diferencial de Fréchet. Esperamos que el lector aprecie la elegancia de las demostraciones en comparación con las dadas usualmente, es especial la de la regla de la cadena.

Recordemos la definición usual de diferenciabilidad. Sea f una función de valor real definida sobre $\mathbb{R}$ y a un número real. Decimos que f es diferenciable en a si el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

existe. Podemos decir esto de otra forma. Sea ϕ definida por

$$\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

O sea, f es diferenciable en a si y solo si ϕ tiene discontinuidad removible en a.
Esto motivó la siguiente caracterización de diferenciabilidad:

Definición 11. *[9] Sea f una función real definida en un intervalo abierto U, y a un punto en U. f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory si existe una función $\phi_f(x)$ continua en a, que satisface la relación*

$$f(x)-f(a) = \phi_f(x)(x-a), \quad \textit{para todo}\, x \in U. \tag{4.1}$$

El número $\phi_f(a)$ es la diferencial de Carathéodory de f en a.

Para simplificar la notación escribiremos $\phi(x)$ en lugar de $\phi_f(x)$. Geométricamente cuando $x \neq a$, $\phi(x)$ es la pendiente de la recta secante a través de $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$. Está definición alternativa hace énfasis en las pendientes de las rectas secantes, como una forma inicial de aproximarse a la recta tangente de una forma continua.
Esta definición puede usarse para funciones de variable compleja; de hecho es en este contexto que Carathéodory la introduce en [5].
Dos consecuencias de esta formulación son:

1. Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

2. Si f es diferenciable en a existe al menos una función ϕ que satisface la definición; además si $f'(a)$ existe, $f'(a) = \phi(a)$.

En el artículo [2], aparece la extensión que hacen los autores de la definición (4.1) a funciones vectoriales, como sigue:
Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y a un punto(o vector) de $\mathbb{R}^n$. Para dar una interpretación de la definición de diferencialidad según Carathéodory, identificaremos $f(x) - f(a)$ con un vector columna de $\mathbb{R}^m$ y $x - a$ con un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\phi(x)$ se puede considerar como una matriz real $m \times n$.

Definición 12. *[2] f es diferenciable en a (en el sentido de Carathéodory) si existe*

$$\phi : \mathbb{R}^n \to M_{m\times n} \quad \textit{continua} \quad \textit{en} \quad a,$$

tal que

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a). \tag{4.2}$$

Si $\phi(x)$ existe,

$$Df(a) = \phi(a) \in M_{m\times n}.$$

Veamos un ejemplo de como utilizar esta definición.

Ejemplo 8. *Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $F(x, y) = (x^2, y^2)$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calcular $F'(a, b)$ en el sentido de Carathéodory.*

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(a,b) &= (x^2, y^2) - (a^2, b^2) \\ &= (x^2 - a^2, y^2 - b^2) \\ &= ((x-a)(x+a), (y-b)(y+b)) \\ &= \begin{pmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

como $\quad \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{pmatrix}$ es continua en (a,b) entonces $F'(a,b) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$.

La noción de Carathéodory, como lo muestran Acosta y Delgado en [2], puede facilitar la demostración de algunas proposiciones que, con la noción dada por Fréchet, resultan extensas y engorrosas. A continuación presentamos algunas de las proposiciones demostradas por ellos, junto con otras que aparecen en [9].

Teorema 6 (regla de la cadena). *[2] Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Si f es C-diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, y g es C-diferenciable en $f(a) \in \mathbb{R}^m$ entonces $g \circ f$ es C-diferenciable en a y*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= \psi(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= \psi(f(x))\phi(x)(x-a), \end{aligned}$$

donde ϕ es la derivada de f en a y ψ es la derivada de g en $f(a)$. Dado que ψ y f son continuas [1] en a y ψ es continua en $f(a)$, tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a. Más aún

$$D(g \circ f)(a) = \psi(f(a))\phi(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

■

Teorema 7 (función inversa). *[9] Sea f una función continua y estrictamente monótona sobre un intervalo abierto I que contiene a c y supongamos que $f'(c)$ existe y $f'(c) \neq 0$. Entonces $g = f^{-1}$ es C-diferenciable en $d = f(c)$ y $g'(d) = [f'(c)]^{-1}$.*

[1]La continuidad de f se sigue de la definición (12)

Demostración. Tenemos que

$$f(x) - f(c) = \phi(x)(x - c) \quad \text{para todo}\, x \in I.$$

con ϕ continua en a y $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Sea V un intervalo abierto en el dominio de g. Entonces

$$y - d = f(g(y)) - d = f(g(y)) - f(c) = \phi[g(y)][g(y) - c] \quad \text{para todo}\, y \in V,$$

Así

$$[g(y) - c] = (1/\phi[g(y)])(y - d) \quad \text{para todo}\, y \in V.$$

puesto que g es continua, $\dfrac{1}{(\phi \circ g)}$ es continua también y se sigue el teorema. ∎

Teorema 8 (Linealidad). *[2] Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son C-diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ entonces $\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es también C-diferenciable en a y*

$$D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a).$$

Demostración. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C-diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, existen ϕ y ψ respectivamente, que satisfacen para f y g la condición de diferenciabilidad según Carathéodory, por tanto,

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha(f(x) - f(a)) + \beta(g(x) - g(a)) \\ &= \alpha\phi(x)(x - a) + \beta\psi(x)(x - a) \\ &= [\alpha\phi(x) + \beta\psi(x)](x - a);\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}D(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha\phi(a) + \beta\psi(a) \\ &= \alpha Df(a) + \beta Dg(a).\end{aligned}$$

∎

Teorema 9 (Regla del Producto y Potencia). *[9] S f y g son C-diferenciables en w y n es un número natural, entonces,*

1. $(fg)'(w) = f(w)g'(w) + f'(w)g(w)$

2. *La derivada de* $f(x) = x^n$ *en* w *es* $f'(w) = nw^{n-1}$.

Demostración. 1. Suponemos la existencia de ϕ, ψ continuas en w y definidas sobre intervalos abiertos UyV respectivamente, que contienen a w, tal que $f(x) - f(w) = \phi(x)(x - w)$ para todo $x \in U$, y $g(x) - g(w) = \psi(x)(x - w)$ para todo $x \in V$. Entonces: $\forall x \in U \cap V$,

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(w) &= f(x)g(x) - f(w)g(w) \\ &= f(x)g(x) - f(x)g(w) + f(x)g(w) - f(w)g(w) \\ &= f(x)[g(x) - g(w)] + [f(x) - f(w)]g(w) \\ &= f(x)\psi(x)(x - w) + \phi(x)(x - w)g(w) \\ &= [f(x)\psi(x) + \phi(x)g(w)](x - w)\end{aligned}$$

Luego,

$$(fg)'(w) = f(w)\psi(w) + \phi(w)g(w) = f(w)g'(w) + f'(w)g(w).$$

2. $x^n - w^n = [x^{n-1} + x^{n-2}w + x^{n-3}w^2 + \ldots + xw^{n-2} + w^{n-1}](x - w)$,
para todo x, luego $\phi(x) = x^{n-1} + x^{n-2}w + x^{n-3}w^2 + \ldots + xw^{n-2} + w^{n-1}$, es decir,

$$\phi(w) = f'(w) = nw^{n-1}.$$

■

Teorema 10 (valor extremo). *[9] Sea f una función de valor real definida sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f es C-diferenciable en $x_0 \in U$ y $f(x_0)$ es un valor extremo, entonces $Df(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \in U$ y es tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in U$, y que f es C-diferenciable en x_0; entonces existe una función continua ϕ en x_0 tal que

$$0 \leq f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0), \qquad \text{para todo } x \in U. \tag{4.3}$$

Fijemos h un punto en $\mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$ tan pequeño que cumple que $(x_0 + th) \in U$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Luego por 4.3 tenemos que

$$\begin{aligned}&0 \leq f(x_0 + th) - f(x_0) = \phi(x_0 + th)(x_0 + th - x_0); \\ &0 \leq \phi(x_0 + th)(x_0 + th - x_0), \quad \text{para todo}\, t \in (-\epsilon, \epsilon).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(x_0+th)h &\geq 0, \quad \text{para}\, t>0; \\ \phi(x_0+th)h &\leq 0, \quad \text{para}\, t<0; \end{aligned}$$

dado que ϕ es continua en x_0 se tiene que $\phi(x_0)h=0$, pero h es cualquier valor arbitrario; entonces; $\phi(x_0)=0$, es decir, $Df(x_0)=0$ ■

4.1. Fréchet Vs Carathéodory

Teorema 11. *[2] Cualquier función diferenciable según Fréchet (F-diferenciable) es diferenciable según Carathéodory(C-diferenciable) y viceversa.*

Demostración. 1. Si f es C-diferenciable entonces f es F-diferenciable.
Suponemos la existencia de ϕ, tenemos

$$\frac{\|f(x)-f(a)-\phi(a)(x-a)\|}{\|x-a\|}=\frac{\|[\phi(x)-\phi(a)](x-a)\|}{\|x-a\|}\leq\|\phi(x)-\phi(a)\|<\epsilon,$$

dado que ϕ es continua en a. Por lo tanto f es F-diferenciable.

2. Si f es F-diferenciable entonces f es C-diferenciable.
Se supone que existe λ y definimos $\phi:\mathbb{R}^n\to M_{n\times m}$ por

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-\lambda(x-a))\otimes(x-a)\}+\lambda, & x\neq a,\\ \lambda, & x=a.\end{cases}$$

donde $\otimes$ representa producto tensorial.[2] Entonces

$$\begin{aligned}\phi(x)(x-a)&=\frac{1}{\|x-a\|^2}\{(f(x)-f(a)-\lambda(x-a))\otimes(x-a)\}(x-a)+\lambda(x-a)\\ &=\langle x-a,x-a\rangle\frac{1}{\|x-a\|^2}\{f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\}+\lambda(x-a)\\ &=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

[2]Si $u\in\mathbb{R}^m$ y $v,w\in\mathbb{R}^n$ entonces $u\otimes v\in M_{m\otimes n}$ esta definida por

$$(u\otimes v)w=\langle v,w\rangle u.$$

Tenemos que probar la continuidad de ϕ en a. Pero

$$\|\phi(x) - \phi(a)\| \leq \frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x-a)\|}{\|x-a\|,}$$

dado que f satisface la definición de ser F-diferenciable se tiene la demostración. ■

Infortunadamente no se tiene la unicidad de ϕ en (4.2), como se puede ver a continuación.

Ejemplo 9. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$ y tome un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= (b,x)(x-a, y-b) \\ &= (y,a)(x-a, y-b). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi(x,y) = (b,x)$ y $\psi(x,y) = (y,a)$ son dos derivadas diferentes para f en (a,b). Sin embargo observe que $\phi(a,b) = \psi(a,b)$.

Teorema 12 (Unicidad). *[2] Si ϕ y ψ son dos funciones que satisface las condiciones dadas en la Definición 12 para f en a, entonces*

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Demostración. Supongamos que ϕ y ψ son dos funciones tales que $\varphi(a) = f'(a)$ y $\psi(a) = f'(a)$. Sea $\nu(x) = \phi(x) - \psi(x)$. Entonces

$$\eta(x)(x-a) = 0,$$

y además

$$\|\eta(a)(x-a)\| = \|(\eta(a) - \eta(x))(x-a)\| \leq \|\eta(a) - \eta(x)\|\|x-a\|$$

como η es continua en a, concluimos que $\eta(a) = 0$ y entonces que $\phi(a) = \psi(a)$. ■

CAPÍTULO 5

Diferencial según Hadamard

Definición 13. *Sean X y Y espacios vectoriales normados. Sea $f : A \to Y$, $A \subset X$ y x_0 un punto interior de A. Una función f se dice diferenciable según Hadamard (o H-diferenciable) si existe $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ tal que para toda $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to X$, $\phi(0) = x_0$ y ϕ F-diferenciable en* 0, *tenemos que $f \circ \phi$ (que está definida en una vecindad de cero) es diferenciable en* 0 *y*

$$(f \circ \phi)'(0) = T(\phi'(0)).$$

La transformación lineal $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ es llamada la diferencial de Hadamard de f en x_0 y es representada por $\delta f(x_0)$. La aplicación $x \to \delta f(x)$, cuyo dominio es el conjunto de los puntos interiores de A donde f es H-diferenciable, es llamada la *derivada de Hadamard de f.*

Teorema 13. *Sea $f : A \to Y, \quad A \subseteq X, \quad g : B \to Z, \quad B \subseteq Y$ y $\quad x_0$ es un punto interior de A tal que $f(x_0)$ es un punto interior de B. Si f es H-diferenciable en x_0 y g es H-diferenciable en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es H-diferenciable en x_0 y*

$$\delta(g \circ f)(x_0) = \delta g(f(x_0))\delta f(x_0).$$

Demostración. Sea $\phi(-\epsilon, \epsilon) \to X$ tal que $\phi(0) = x_0$ y ϕ diferenciable en 0, entonces $f \circ \phi : (-\epsilon, \epsilon) \to Y$ es diferenciable en 0 con $(f \circ \phi)(0) = f(x_0)$, entonces $g \circ f \circ \phi : (-\epsilon, \epsilon) \to Z$ es diferenciable en 0. Luego

$$(g \circ f \circ \phi)'(0) = \delta g(f(x_0))(f \circ \phi)'(0) = \delta g(f(x_0))\delta f(x_0)\phi'(0).$$

Como $\delta g(f(x_0))\delta f(x_0)\phi'(0) \in \mathfrak{L}(X,Y)$ tenemos que $g \circ f$ es H-diferenciable en x_0 y

$$\delta(g \circ f)(x_0) = \delta g(f(x_0))\delta f(x_0).$$

$\blacksquare$

Proposición 7. *Sea $f : A \in Y, \quad A \subseteq X, \quad x_0$ un punto interior de A, y $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo $h \in X$, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = Th,$$

   para cualesquiera sucesiones h_n que converge a h y t_n de números positivos que converge a cero;

2. *Para todo $h \in X$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = Th,$$

   para cualesquiera sucesiones h_n que converge a h y t_n de números no nulos que converge a cero;

3. *f es diferenciable según Hadamard en x_0 y $\delta f(x_0) = T$;*

4. *Para todo $E \subset X$, E compacto*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = Th \quad uniformemente \quad para \quad h \in E.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2).
Basta dividir $\mathbb{N}$ en dos subconjuntos: $\Gamma_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad t_n > 0\}$ y $\Gamma_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad t_n < 0\}$.
a) Si Γ_2 es finito, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = Th, \quad \text{por} \quad (1).$$

b) Si Γ_2 es infinito y Γ_1 es finito, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + (-t_n)(-h_n)) - f(x_0)}{(-t_n)} = -T(-h) = Th.$$

La penúltima igualdad ocurre porque $-t_n$ esta en la situación descrita en (a) y $-h_n \to -h$ cuando $n \to \infty$.
c) Si Γ_2 es infinito y Γ_1 es infinito entonces la sucesión t_n se divide en dos subsucesiones : $\{t_{n_i}\}$ de números positivos que convergen a cero y $\{t_{n_j}\}$ de números negativos que también convergen a cero. Es claro que

$$\lim_{n_i \to \infty} \frac{f(x_0 + t_{n_i} h_{n_i} - f(x_0)}{t_{n_i}} = Th$$

y

$$\lim_{n_j \to \infty} \frac{f(x_0 + t_{n_j} h_{n_j}) - f(x_0)}{t_{n_j}} = -T(-h) = Th$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n - f(x_0)}{t_n} = Th.$$

(2) $\Rightarrow$ (1).
Inmediato.
(2) $\Rightarrow$ (3)
sea $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ tal que $\phi(0) = x_0$ y ϕ diferenciable en 0. Debemos mostrar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\phi(t)) - f(\phi(0))}{t} = T\phi'(0).$$

Para esto basta mostrar que para toda sucesión $t_n \neq 0$ que converge a cero,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\phi(t_n)) - f(\phi(0))}{t_n} = T\phi'(0).$$

Sea $h_n = \dfrac{\phi(t_n) - \phi(0)}{t_n}$. Entonces $h_n \to \phi'(0)$, $\quad \phi(t_n) = \phi(0) + t_n h_n$, y como $\phi(0) = x_0$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\phi(t_n)) - f(\phi(0))}{t_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = T\phi'(0).$$

(3) $\Rightarrow$ (2).
Sea $h \in X$, $\quad h_n$ una sucesión que converge a h y t_n una sucesión de números no nulos que convergen a cero. Sea $\phi : \mathbb{R} \to X$ dada por $\phi(t) = x_0 + th$ con $t \neq t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\phi(t_n) = x_0 + t_n h_n$.
Es claro que $\phi(0) = x_0$, ϕ es diferenciable en cero y $\phi'(0) = h$. Así mismo existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq A$. Luego:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\phi(t)) - f(\phi(0))}{t} = T\phi'(0) = Th.$$

(2) $\Rightarrow$ (4)
Dado $E \subseteq X$, E compacto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$D : [(-\epsilon, \epsilon) - \{0\}] \times E \to Y \quad \text{dada por}$$
$$D(t,h) = \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \tag{5.1}$$

Está bien definida y

$$\lim_{t \to 0} D(t,h) = Th \quad \forall h \in X.$$

Debemos mostrar que el límite anterior es uniforme en relación a $h \in E$.
Supongamos que esto no ocurre, entonces existe una suceción t_n de números no nulos que convergen a cero, y una sucesión de vectores $h_n \in X$ y un número $\delta > 0$ tal que :

$$\|D(t_n, h_n) - Th_n\| > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además como E es compacto, alguna subsucesión h_{n_i} de h_n converge a un vector $h \in E$.
Como

$$\lim_{n_i \to \infty} D(t_{n_i}, h_{n_i}) = Th,$$

Tenemos

$$\|D(t_{n_i}, h_{n_i}) - Th_{n_i}\| \to \|Th - Th\| = 0.$$

Por esto es absurdo, luego queda demostrado que (2) $\Rightarrow$ (4).
(4) $\Rightarrow$ (2)
Sea $h \in X$, h_n una sucesión que converge a h y t_n una sucesión de números no nulos que convergen a cero.

Como $\{h_n \mid \quad n \in \mathbb{N}\} \cup \{h\}$ es compacto, podemos tomarlo como conjunto E. Usando la misma función D definida en (5.1), tenemos

$$\lim_{t \to 0} D(t,h) = Th \quad \text{uniformemente en relación a}\, h \in E,$$

así

$$\lim_{t \to 0} D(t,h_n) = Th_n \quad \text{uniformemente para}\, n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} D(t_n, h_n) = \lim_{n \to \infty} Th_n = Th,$$

es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = Th.$$

$\blacksquare$

¿Cuál es la relación entre las diferenciales de Gâteaux, Fréchet y Hadamard?, la respuesta a esta pregunta se dará en la siguiente sección.

5.1. Gâteux, Fréchet, y Hadamard

Teorema 14. *Sea $f : A \to Y$, $A \subseteq X$, x_0 un punto interior de A. Si f es H-diferenciable en x_0 entonces f es G-diferenciable en x_0.*

Demostración. Supongamos que f es H-diferenciable en x_0. Por la proposición (7), para cualesquiera sucesiones h_n que converge a h, y t_n de números no nulos que convergen a cero, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = Th, \quad \forall\, h \in X$$

donde T pertenece al espacio de los operadores lineales continuos. Es decir, existe $Vf(x_0, h)$, además es lineal y continua, es decir, f es G-diferenciable. ■

El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, G-diferenciabilidad no implica H-diferenciabilidad.

Como se mostró la función definida en el ejemplo (2.3) es G-diferenciable. Veamos que no es H-diferenciable; Definiendo $g(t) = (t, t^2)$, tenemos que $(f \circ g)(t) = t/2$, $(f \circ g)'(0) = 1/2$ mientras $T(g'(0)) = 0$. Luego f no es H-diferenciable en x_0.

Proposición 8. *Sea $f : A \to Y$, $A \subseteq X$, x_0 un punto interior de A. Si f es diferenciable según Fréchet en x_0 entonces f es diferenciable según Hadamard en x_0.*

Demostración. Sea $f'(x_0) \in \mathfrak{L}(X, Y)$ la derivada de Fréchet de f en x_0 y $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ una función continua tal que $\phi(0) = x_0$ y $\phi'(0)$ existe. Entonces

$$\{f(x_0 + h) - f(x_0)\} = f'(x_0)h + r(x_0, h), \quad \text{donde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0.$$

Sea $h = \phi(t) - \phi(0)$, luego

$$\frac{1}{t}\{f(\phi(t)) - f(\phi(0))\} = f'(x_0)\left[\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}\right] + \frac{1}{t} r(x_0, \phi(t) - \phi(0)),$$

Cuando $t \to 0$, $\quad \dfrac{\phi(t) - \phi(0)}{t} \to \phi'(0)$ y

$$\frac{1}{t} r(x_0, \phi(t) - \phi(0)) = \frac{r(x_0, \phi(t) - \phi(0)}{\|\phi(t) - \phi(0)\|} \cdot \frac{\|\phi(t) - \phi(0)\|}{t} \to 0.$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{1}{t} r(x_0, \phi(t) - \phi(0)) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

y así $(f \circ \phi)'(0)$ existe y $(f \circ \phi)'(0) = f'(x_0)\phi'(0)$, es decir, f es H-diferenciable en x_0. ■

Un resultado muy interesante es la equivalencia de la diferenciabilidad de Hadamard y fréchet en el caso que X sea un espacio vectorial normado, sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, de dimensión finita.

Proposición 9. *Sea $f : A \to Y, A \subseteq X, x_0$ un punto interior de A. Si X tiene dimensión finita entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *f es diferenciable según Fréchet en x_0,*
2. *f es diferenciable según Hadamard en x_0*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2).
Se obtiene por la proposición anterior.
(2) $\Rightarrow$ (1).
El resultado se obtiene a partir de la equivalencia de (3) y (4) en la proposición (7) y el hecho de que $B_{[x_0,r]} = \{x \in X| \quad \|x - a\| \leq r\}$ es un conjunto compacto. ■

La siguiente es una consecuencia inmediata del teorema 14, y las proposiciones 8 y 9.

Observación 2. *Sea $f : A \to Y$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de A. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es diferenciable según Fréchet en x_0*
2. *f es diferenciable según Hadamard en x_0*
3. *f es diferenciable según Gâteaux en x_0*

Si X en un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de dimensión infinita entonces la diferenciabilidad de Hadamard no implica diferenciabilidad de Fréchet como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10. *Si $dim X = \infty$, sea W_n una sucesión de vectores unitarios de X que no posee una subsucesión convergente. Sea c un vector unitario de Y. Definamos un aplicación $f : X \to Y$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{m} & si \ x = W_m/m, \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ 0 & si \ x \neq W_m/m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Afirmamos que f es diferenciable según Hadamard en cero y $\delta f(0) = 0$. Para ver esto consideremos $h \in X$, una sucesión de vectores h_n que converge a h y una sucesión de números positivos t_n que converge a cero. Debemos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0 + t_n h_n) - f(0)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n h_n)}{t_n} = 0.$$

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n > n_0$, $f(t_n h_n) = 0$ entonces obviamente, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n h_n)}{t_n} = 0$. Si no, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, existe $n_r > r$ tal que $f(t_{n_r} h_{n_r}) \neq 0$ tenemos entonces que:

$$\forall r \in \mathbb{N}, \exists\, m_r \in \mathbb{N} \,|\, t_{n_r} h_{n_r} = \frac{W_{m_r}}{m_r}$$

como $\lim_{r\to\infty} t_{n_r} h_{n_r} = 0$, tenemos $\lim_{n\to\infty} m_r = \infty$. Luego $W_{m_r} = m_r t_{n_r} h_{n_r}$.
Así mismo, si $h \neq 0$ tenemos

$$W_{m_r} = \frac{W_{m_r}}{\|W_{m_r}\|} = \frac{h_{n_r}}{\|h_{n_r}\|} \to \frac{h}{\|h\|}$$

cuando $r \to \infty$. Esto es absurdo pues W_n no tiene subsucesiones convergentes. Luego se debe cumplir que $h = 0$ y por tanto

$$\left\| \frac{f(t_{n_r} h_{n_r})}{t_{n_r}} \right\| = \left\| \frac{c}{t_{n_r} m_r} \right\| = \left\| \frac{W_{m_r}}{t_{n_r} m_r} \right\| = \|h_{n_r}\|.$$

entonces

$$\lim_{n_r\to\infty} \left\| \frac{f(t_{n_r} h_{n_r})}{t_{n_r}} \right\| = \lim_{n_r\to\infty} \|h_{n_r}\| = 0$$

por tanto

$$\lim_{n_r\to\infty} \frac{f(t_{n_r} h_{n_r})}{t_{n_r}} = 0.$$

Así mismo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n h_n)}{t_n} = 0.$$

Probamos entonces que f es diferenciable según Hadamard en cero y $\delta f(0) = 0$.

Ahora veamos que f no es diferenciable según Fréchet en cero. Si este fuera el caso por la proposición 8, tendríamos que $df(0) = 0$, lo que implicaría

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{\|h\|} = 0.$$

Pero esto es falso porque $\{W_m/m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero, y para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(W_m/m) - f(0)}{\|W_m/m\|} = m(f(W_m/m) - f(0)) = c.$$

Esto finaliza el ejemplo.

Note que si $f : A \to Y$ es diferenciable según Hadamard en x_0 punto interior de A, existe un único T $\in \mathfrak{L}(X, Y)$, tal que $\delta f(x_0) = T$. Además el concepto de función diferenciable según Hadamard en x_0 para el caso de que $X = \mathbb{R}$ coincide con el concepto de función diferenciable de variable real.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACOSTA E, *Differentiability in Topological Groups*. Reporte interno No. 39. Universidad Nacional de Colombia. Santafe de Bogotá, 1994.

[2] ACOSTA E. y DELGADO C, *Fréchet Vs Carathéodory*. En: American Mathematical Montly. Vol 101, No.2,4, april 1994.

[3] APOSTOL Tom, *Análisis Matemático*. Barcelona. Editorial Reverté, 1986.

[4] BARTLE Robert. G, *The Elements of Real Analysis*. Wiley International. second edition. 1964

[5] CARATHÉODORY Constantine, *Theory of Functions of a Complex Variable*. New York. Chelsea Publishing Company,1954.

[6] EVES Howard, *An introductory to the history of mathemathics*. New York. Holt,Rinehart and Winston, 1964.

[7] GIRALDO Carmen, *Desarrollo Historico de la Derivada: una propuesta metodológica*. Bucaramanga, 1994. Tesis de Pregrado. UIS.

[8] KREYSZIG Erwin, *Introductory Funtional Analysis with Applications*.Canada. Jhon Wiley & Sons, 1978.

[9] KUHN Stephen, *The Derivative á la Carathéodory*. En: American Mathematical Monthly. Vol. 98, No 1, January, (1991).

[10] EDWARDS Charles, *The Historical development of the Calculus.* New York. Springer-Verlag, 1973.

[11] NASHED M.Z. *Some Remarks on Variations and Diferentials.* En: American Mathematical Montly, Vol 73, 1996.

[12] PINZÓN Sofía. *Diferenciabilidad en* $\mathbb{R}^2$. Bucaramanga, 1994 Tesis de Maestría, UIS.

[13] PINZÓN Sofía y PAREDES Marlio. *La Derivada de Carathéodory en* $\mathbb{R}^2$ En: Revista Integración. Vol 17, No 2, julio-diciembre 1999.

[14] RÍBNIKOV K, *historia de las matemáticas.* URSS. Mir Moscu 1987.

[15] SPIVAK Michael, *Calculus On Manifolds:A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.* W.A.Benjamin, 1965.

[16] DE TADEU GUERREIRO Ramiro Affonso. *Sobre As Várias Noçoẽs de Diferenciabilidade*, Rio de Janeiro, 1982, Tesis de Maestría. Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

[17] VAINBERG M.M, *Variational Methods for the Study of Nonlinear operators.* San Francisco. Holden-Day, 1964.