

FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE  
HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

DÚWAMG ALEXIS PRADA MARÍN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2012

FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE  
HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

DÚWAMG ALEXIS PRADA MARÍN

Tesis presentada como  
requisito para optar al título de  
*Magister en Matemáticas*

Dr. JAVIER E. CAMARGO GARCÍA.  
**Director**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2012

## AGRADECIMIENTOS

*A mis padres Francisco Prada y Yolanda Marín, a mi hermana Sylvia Camila Prada por ser mis maestros y amigos sinceros.*

*Al profesor Javier E. Camargo García, por su paciencia, por sus enseñanzas, por su amistad y por haberme mostrado el maravilloso mundo de la teoría de continuos y sus hiperespacios.*

*A Jenny Mayerly Gómez Cortés, por ser mi amiga incondicional y por su constante apoyo amoroso.*

*Al profesor Sergio Macías por evaluar mi trabajo, por sus consejos, por su amistad y por los momentos agradables que genera con su presencia.*

*Al grupo del seminario de topología: Michael Rincón, Rosana Martínez y Sergio Pérez, por sus valiosos aportes y su amistad sincera.*

*A mis amigos, Luis Gabriel Gómez, Francisco Gutiérrez, Arturo Castro y Javier Hernández.*

# Tabla de Contenido

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>13</b>
1.1. Continuos . . . . .	14
1.2. Funciones continuas . . . . .	23
1.3. Propiedad de arcoaproximación . . . . .	27
<b>2. HIPERESPACIOS DE CONTINUOS</b>	<b>34</b>
2.1. Hiperespacios . . . . .	34
2.1.1. Topología en hiperespacios . . . . .	35
2.1.2. Arcos en hiperespacios . . . . .	39
2.1.3. El hiperespacio $HS_n(X)$ . . . . .	46
2.2. Funciones inducidas en hiperespacios . . . . .	48
<b>3. FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE HIPERESPACIOS CONTINUOS</b>	<b>55</b>
3.1. Funciones confluentes . . . . .	55
3.2. Funciones confluentes entre espacios especiales . . . . .	59
3.3. Otras funciones inducidas confluentes . . . . .	62
<b>4. FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE HIPERESPACIOS</b>	<b>68</b>
4.1. Funciones semiconfluentes . . . . .	69

TABLA DE CONTENIDO	7
--------------------	---

---

4.2. Funciones débilmente confluentes . . . . .	73
4.3. Funciones pseudoconfluente . . . . .	75

<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>78</b>
---------------------	-----------

# Lista de Figuras

1.1.	$X = H \cup S^1$ . . . . .	14
1.2.	a. Curva sinusoidal del topólogo      b. Circulo de Varsovia . . . . .	15
1.3.	Construcción de una cadena simple que conecta a $a$ con $b$ . . . . .	19
1.4.	Circulo de Varsovia no es un continuo unicoherente . . . . .	23
1.5.	$g _L$ no es confluyente. . . . .	25
1.6.	$g \circ f$ no es semiconfluyente. . . . .	26
1.7.	Ejemplo de un dendroide suave . . . . .	29
1.8.	Ejemplo de un dendroide que no es suave . . . . .	30
3.1.	$f$ confluyente y $C_n(f)$ no confluyente para ninguna $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	56
4.1.	$f$ semiconfluyente y $C_n(f)$ no semiconfluyente para ninguna $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	70
4.2.	$f$ semiconfluyente, $Y$ localmente conexo y $C_n(f)$ no semiconfluyente para ninguna $n \geq 3$ . . . . .	72

**Título :** FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE HIPERESPACIOS DE CONTINUOS\*.

**Autor :** Prada Marín Dúwang Alexis \*\*.

**Palabras Claves :** continuo, hiperespacio, funciones confluentes.

**PALABRAS CLAVES:** continuo, hiperespacio, funciones confluentes.

**DESCRIPCIÓN:**

El estudio de las funciones continuas, en ciertas áreas de las matemáticas, es de gran importancia, pues son una herramienta que nos permite comparar las propiedades entre espacios. La métrica, la conexidad y la compacidad en un espacio no vacío, son propiedades muy estudiadas en topología, en particular, en la teoría de continuos e hiperespacios de continuos. En la actualidad un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. El profesor Januzs J. Charatonik observó que las funciones continuas, sobreyectivas y abiertas entre continuos tienen la propiedad que cada componente de la imagen inversa de un subcontinuo del recorrido es transformada bajo la función de manera sobreyectiva en el continuo. La clase de funciones continuas que tienen esta propiedad consiste de las llamadas funciones confluentes. Otras clases de funciones continuas entre continuos que han sido estudiadas son, por ejemplo, las funciones monótonas, semiconfluentes, débilmente confluentes, empalmantes y pseudo confluentes. A comienzos del siglo XX tiene sus inicios la teoría de hiperespacios. Dado un continuo  $X$ , un hiperespacio de este continuo es una familia de subconjuntos de  $X$  que satisfacen una propiedad particular, como ser cerrado no vacío, ser a la vez un continuo, tener cierta cantidad de elementos o cierta cantidad de componentes, entre otras. Los hiperespacios que presentan alguna de estas condiciones también son continuos. Además de estudiar las propiedades de los hiperespacios, también estudiamos funciones continuas entre ellos. Dada una función continua entre continuos, es posible definir funciones entre los hiperespacios de dichos continuos, llamadas funciones inducidas. El objetivo principal de esta tesis es estudiar las relaciones existentes entre las funciones entre continuos y las funciones inducidas, dadas por las clases de funciones continuas mencionadas con anterioridad.

---

\*Trabajo de postgrado.

\*\*Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Javier E. Camargo García (Director).

## ABSTRACT

**Title :** INDUCED MAPPINGS CONFLUENT BETWEEN HYPERSPACES OF CONTINUUM\*.

**Author :** Prada Marín Dúwang Alexis \*\*.

**Keywords :** continuum, hyperspace, confluent mapping.

**KEYWORDS:** continuum, hyperspace, confluent mapping.

**DESCRIPTION:**

The study of continuous functions, in some areas of mathematics, is of great importance; since they are a tool that allows us to compare properties among spaces. Metrizable, connectedness and compactness of a nonempty space are properties studied in topology, particularly, in continuum theory and hyperspaces of continua. Nowadays, a continuum is a nonempty compact, connected metric space. Professor Januzs J. Charatonik observed that open onto maps between continua have the property that each component of an inverse image of a subcontinuum of the range space is sent by the map onto that subcontinuum. The class of onto maps that have this property is of the so called confluent maps. Other classes of maps between continua that have been studied are, for example, monotone maps, semi-confluent maps, weakly confluent maps, joining maps and pseudo-confluent maps. Early in the 20th century hyperspace theory has its beginnings. Given a continuum  $X$ , a hyperspace of this continuum is a family of subsets of  $X$  that satisfy a particular property, for example, being nonempty and closed, being a continuum, having certain amount of elements or having certain amount of components, among others. Hyperspaces that have any of these properties are also continua. Besides studying hyperspaces, we also study maps between them. Given a map between continua, it is possible to define maps between the hyperspaces of those continua, called induced maps. The main purpose of this thesis is to study the existent relationships between the maps between continua and the induced maps, given by the classes of maps mentioned above.

---

\*Graduate Dissertation.

\*\*Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Javier E. Camargo García (Advisor).

# INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones continuas en ciertas áreas de las matemáticas, es de gran importancia, pues son una herramienta que nos permite comparar propiedades entre espacios.

Una rama de la topología, en la cual está basado este trabajo, es la teoría de continuos y sus hiperespacios. La definición original de continuo fue dada por G. Cantor en 1883. Actualmente un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Este trabajo está centrado en el estudio de las funciones continuas entre continuos.

En la década de los años 60, cuando el concepto de dendroide (ver Definición 1.42) fue introducido en el *seminario avanzado de topología*, dirigido por el profesor Knaster, se preguntó si la imagen continua de una función abierta de un dendroide es un dendroide. Janusz J. Charatonik da una respuesta afirmativa a esta pregunta. El profesor Charatonik observó que las funciones abiertas tienen la siguiente propiedad: cada componente de la imagen inversa de un subcontinuo del recorrido es transformada bajo la función, de manera sobreyectiva en el continuo. Las funciones que tienen esta propiedad son llamadas funciones *confluentes*.

El profesor T. Maćkowiak en el artículo “*Continuous mappings on continua*” [26], realizó un importante estudio sobre algunas clases especiales de funciones continuas, entre las cuales destacamos las monótonas, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, empalmantes y pseudoconfluentes.

A comienzos del siglo  $XX$ , con los trabajos de F. Hausdorff y de L. Vietoris nace la teoría de hiperespacios de continuos. Dado un continuo  $X$ , en este trabajo consideraremos los hiperespacios  $2^X$ ,  $C_n(X)$ ,  $F_n(X)$  y  $HS_n(X)$ , para  $n \in \mathbb{N}$  (ver Definiciones 2.1 y 2.36).

En el artículo “*induced mappings on hyperspaces*” [15], Hiroshi Hosokawa estudió una clase especial de funciones continuas entre hiperespacios. Dada una función  $f$  continua entre continuos, se definen las funciones  $2^f$ ,  $C_n(f)$ ,  $F_n(f)$  y  $HS_n(f)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , conocidas como las funciones inducidas entre hiperespacios (ver Definiciones 2.40, 2.42 y 2.53).

El problema general de nuestro trabajo es el siguiente: dada una clase de funciones  $\mathcal{A}$

entre continuos, analizamos las relaciones que hay entre las siguientes afirmaciones:

1.  $f \in \mathcal{A}$ ;
2.  $C_n(f) \in \mathcal{A}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $2^f \in \mathcal{A}$ ;

donde  $\mathcal{A}$  es la clase de funciones confluentes, semiconfluentes débilmente confluentes y pseudoconfluentes. Además, presentaremos algunas de las relaciones existentes entre estos tipos de funciones inducidas y las funciones inducidas  $F_n(f)$  y  $HS_n(f)$ .

Para el desarrollo del presente trabajo, hemos dividido el mismo en cuatro capítulos. El Capítulo 1, contiene los resultados básicos sobre la teoría de continuos que necesitaremos. Además, mostraremos las clases de funciones confluentes mencionadas y algunas propiedades que éstas satisfacen. Para finalizar el capítulo, introducimos la propiedad de arcoaproximación y, dos teoremas y un corolario que hacen parte de nuestro aporte a la teoría, que involucran esta propiedad. Estos resultados son importantes debido a que con ellos mostramos una clase especial de continuos, tal que las relaciones de las funciones inducidas se satisfacen bajo la confluencia, con  $n = 1$  y  $n = 2$ .

En el Capítulo 2 mostraremos los hiperespacios de un continuo. Además, probaremos que dichos hiperespacios son también continuos si el espacio original lo es. La métrica utilizada para estos hiperespacios es la de Hausdorff. Notaremos además, qué propiedades topológicas de conexidad local se preserva entre el espacio y sus hiperespacios. Para finalizar, enunciaremos las funciones inducidas entre hiperespacios, una propiedad que relaciona subcontinuos del recorrido y las funciones  $2^f$  y  $C_n(f)$  bajo la confluencia, y un resultado que hemos mejorado, el cual es utilizado para las pruebas de nuestro problema planteado.

Los Capítulos 3 y 4 están dedicados a mostrar las condiciones bajo las cuales se tiene la solución a nuestro problema. En el Capítulo 3 abordamos el problema tomando solo las funciones confluentes. Además, mostraremos algunos ejemplos donde la equivalencia no se satisface. En la Sección 3.2, damos condiciones adicionales, tales como la conexidad local y la propiedad de arcoaproximación, sobre los espacios e hiperespacios, de tal forma que se tenga la equivalencia de las afirmaciones del problema. Para concluir, en el Capítulo 4 se aborda el mismo problema planteado, utilizando las otras clases de funciones confluentes mencionadas. Sin embargo, las propiedades utilizadas en el Capítulo 3 para dotar a los espacios, no garantizan la equivalencia de las funciones.

En este trabajo, la mayoría de las pruebas que presentamos mantienen su idea general para dar crédito a los autores de las mismas.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

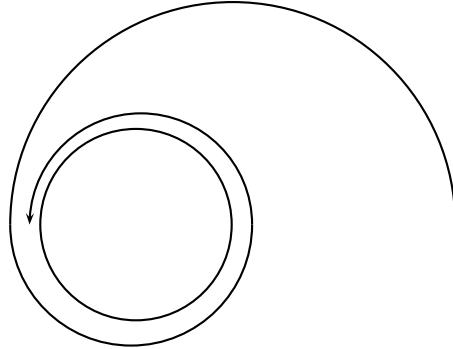
En este capítulo presentaremos las definiciones y los resultados básicos de la teoría de continuos y de las funciones confluentes, que son parte fundamental para el desarrollo de este trabajo. La compacidad y conexidad, son las propiedades topológicas más estudiadas y relevantes en el estudio de la topología. La teoría de continuos, es una rama de la topología que estudia a profundidad espacios métricos, compactos y conexos.

Este capítulo lo dividimos en tres partes fundamentales. En las primeras páginas describimos propiedades, ejemplos y construcciones generales de la teoría de continuos. Más adelante, definiremos clases diferentes de funciones entre continuos, estudiando algunas relaciones y propiedades. Finalmente, presentaremos algunos resultados sobre la propiedad de arcoaproximación, estudiada por Włodzimierz J. Charatonik en “*Arc approximation property and confluence of induced mappings*” [9].

Para el desarrollo del presente trabajo denotaremos por  $\mathbb{N}$ , al conjunto de los números naturales, y denotaremos por  $\mathbb{C}$ , al conjunto de los números complejos. Dados dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio  $X$ , utilizaremos  $A \setminus B$  para referirnos a la diferencia entre  $A$  y  $B$ , además, por  $A \subsetneq B$  entenderemos la contención propia de  $A$  en  $B$ . Para un espacio topológico  $X$  y un subconjunto  $Z$  de  $X$ , la clausura de  $Z$  en  $X$  la denotaremos por  $Cl_X(Z)$ , el interior de  $Z$  en  $X$  por  $Int_X(Z)$  y la frontera de  $Z$  en  $X$  por  $Fr_X(Z)$ .

En muchos de nuestros ejemplos utilizaremos el término *rayo* para denotar un espacio homeomorfo al intervalo  $[0, \infty)$ . Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, utilizaremos la notación  $B_d(x, r)$  para referirnos a la bola abierta con centro en el un punto  $x \in X$  de radio  $r$ . Notaremos por  $\overline{ab}$ , a la combinación convexa en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , con puntos extremos  $a$  y  $b$ .

Dados dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , una función continua  $f: X \rightarrow Y$  y un subespacio  $Z$  de  $X$ , denotaremos por  $f|_Z$ , a la restricción de la función  $f$  al subespacio  $Z$ .

Figura 1.1:  $X = H \cup S^1$ 


---

## 1.1. Continuos

---

Empezaremos esta sección definiendo lo que será un continuo. Mostraremos algunos ejemplos que nos serán de utilidad más adelante. Presentaremos algunas propiedades como conexidad local, conexidad en pequeño, unicoherencia e irreducibilidad. También, enunciaremos y demostraremos resultados importantes como la intersección anidada de continuos, el teorema del cable cortado, el teorema de golpes en la frontera, entre otros.

**Definición 1.1.** Un *continuo* es un espacio métrico conexo, compacto y diferente de vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Los ejemplos más sencillos de continuos son el intervalo cerrado  $[0, 1]$  y el espacio  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . En adelante un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$  y una *curva cerrada simple* es cualquier espacio homeomorfo a  $S^1$ .

A continuación presentamos ejemplos de continuos que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $X = H \cup S^1$  donde  $H = \{\frac{t+1}{t}(\cos(t), \sen(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 1\}$ . Observemos que  $H$  es un rayo convergente a  $S^1$ , como mostramos en la Figura 1.1. De esta forma  $X$  es un subconjunto compacto y conexo de  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $X$  es un continuo.

**Ejemplo 1.3.** Sea  $Z = Cl_{\mathbb{R}^2}(W)$ , donde  $W = \{(x, \sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1\}$ . De manera similar al ejemplo anterior,  $Z$  es un continuo que es la clausura de un rayo. El continuo  $Z$ , que representamos en la Figura 1.2, es conocido como *la curva sinusoidal del topólogo*.

Sea  $Y = Z \cup L$  donde,  $Z$  es la curva sinusoidal del topólogo y  $L$  es un arco que une los puntos  $(0, -1)$  y  $(1, \sen(1))$  de tal forma que  $X \cap Z = \{(0, -1), (1, \sen(1))\}$ . Es claro



Figura 1.2: a. Curva sinusoidal del topólogo b. Circulo de Varsovia

que  $Y$  es un continuo y es llamado *círculo de Varsovia*.

A continuación mostraremos una manera de construir continuos. Primero, necesitamos garantizar que la intersección encajada de compactos no vacíos, es no vacía. La prueba la tomamos de [27, Proposición 1.7].

**Proposición 1.4.** Sean  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de espacios métricos compactos tales que  $X_{n+1} \subset X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ . Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X_1$  tal que  $X \subset U$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_i \subset U$  para todo  $i \geq N$ . En particular, si cada  $X_i \neq \emptyset$ , entonces  $X \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , donde  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de espacios métricos  $X_{n+1} \subset X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $U$  abierto de  $X_1$ , tal que  $X \subset U$ . Supongamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $x_n \in X_n \setminus U$ . Dado que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1 \setminus U$  y  $X_1 \setminus U$  es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a algún punto  $p \in X_1 \setminus U$ . Como  $x_n \in X_k$ , para toda  $n \geq k$ ,  $p \in X_k$  para toda  $k$ . Así,  $p \in X$ , lo cual contradice que  $X \subset U$ . Por lo tanto, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_n \subset U$ , para toda  $n \geq N$ .

Finalmente, si  $X = \emptyset$ , entonces podemos tomar  $U = \emptyset$ . Pero esto implica que  $X_i = \emptyset$ , para cada  $i \geq N$ , contradiciendo nuestra hipótesis. Con lo que concluimos que  $X \neq \emptyset$ . ■

Una de las técnicas importantes para realizar construcciones de ejemplos de continuos interesantes es la utilización de las intersecciones anidadas. La base teórica para estas construcciones es dada en el siguiente teorema cuya prueba original fue realizada por P. Painlevé en 1902, según [11, pág. 226].

**Teorema 1.5.** Sean  $Z$  un espacio métrico compacto y  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de subcontinuos de  $Z$  tales que  $X_{n+1} \subset X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , entonces  $X$  es un subcontinuo de  $Z$ .

*Demostración.* Sea  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , donde  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico compacto  $Z$ , tales que  $X_{n+1} \subset X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente  $X$  es un subconjunto cerrado no vacío de  $Z$ , es decir,  $X$  es compacto y diferente del vacío, por la Proposición 1.4.

Ahora supongamos que  $X$  no es conexo. Entonces, como  $X$  es cerrado, existen dos subconjuntos cerrados no vacíos, disyuntos  $A$  y  $B$  de  $Z$ , tales que  $X = A \cup B$ . Como  $Z$  es normal, existen dos abiertos disyuntos  $U$  y  $V$  tales que  $A \subset U$  y  $B \subset V$ . Así,  $X \subset U \cup V$ . Como  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_n \subset U \cup V$  para toda  $n \geq N$ , por la Proposición 1.4. Dado que  $X_n$  es conexo por hipótesis,  $X_n \subset U$  o  $X_n \subset V$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $X_n \subset U$ , para toda  $n \geq N$ . Así,  $X \subset U$  y  $B = \emptyset$ , lo que contradice que  $B$  es un subconjunto cerrado no vacío de  $Z$ . Luego,  $X$  es conexo. Por lo tanto,  $X$  es un subcontinuo de  $Z$ . ■

Algunos ejemplos de continuos donde se usa la técnica de las intersecciones anidadas se pueden encontrar en [27, Capítulo 1].

El siguiente lema está tomado de [23, Lema 1.7.18], y muestra otra forma de construir subcontinuos propios de un continuo dado.

**Lema 1.6.** *Sean  $X$  un continuo y  $A$  subcontinuo de  $X$  tal que  $X \setminus A$  no es conexo. Si  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos no vacíos y disyuntos de  $X$  tales que  $X \setminus A = U \cup V$ , entonces  $A \cup U$  y  $A \cup V$  son subcontinuos de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $X \setminus A$  no es conexo. Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos no vacíos y disyuntos de  $X$  tales que  $X \setminus A = U \cup V$ . Dado  $X \setminus (A \cup U) = V$ , tenemos que  $A \cup U$  es cerrado y, por tanto, compacto. Similarmente  $A \cup V$  es compacto.

Veamos que  $A \cup U$  es conexo. Supongamos que  $A \cup U$  no es conexo. Entonces, como  $A \cup U$  es cerrado en  $X$ , existen dos subconjuntos cerrados disyuntos no vacíos  $K$  y  $L$  de  $X$  tales que  $A \cup U = K \cup L$ . Dado que  $A$  es conexo, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $A \subset K$ . Luego,  $L \subset U$ . Por lo tanto,  $L \cap Cl_X(V) = \emptyset$ . Así,  $X = L \cup (K \cup Cl_X(V))$ , donde  $L$  y  $K \cup Cl_X(V)$  son subconjuntos cerrados disyuntos no vacíos de  $X$ , lo cual contradice la conexidad de  $X$ . Por lo tanto  $A \cup U$  es conexo. De manera similar se tiene que  $A \cup V$  es conexo. ■

La siguiente definición es muy conocida en topología y determina una clase amplia y estudiada de espacios.

**Definición 1.7.** Sea  $X$  un continuo. Diremos que  $X$  es *localmente conexo en un punto  $x$  de  $X$* , si  $X$  tiene una base local de abiertos conexos en el punto  $x$ . Diremos que  $X$  es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Continuos como el arco, la curva cerrada simple, cualquier producto de arcos o circunferencias, son ejemplos típicos de continuos localmente conexos.

El siguiente resultado es conocido en topología como el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński, cuya prueba se encuentra en [17, Teorema 2, pág. 256].

**Teorema 1.8.** *Si  $X$  es un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a.  $X$  es una imagen continua del intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

- b.  $X$  es la unión de un número finito de continuos de diámetro menor que  $\epsilon$ , fijando cualquier  $\epsilon > 0$ .
- c.  $X$  es localmente conexo.

Los continuos que presentamos en los Ejemplos 1.2 y 1.3, son ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Con el siguiente teorema mostramos otra caracterización de los continuos localmente conexos. La demostración puede consultarse en [14, Teorema 3.2].

**Teorema 1.9.** *Un continuo  $X$  es localmente conexo si y sólo si cada componente de un abierto de  $X$  es abierta en  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $U$  un abierto de  $X$ ,  $C$  una componente de  $U$  y  $x \in C$ . Como  $X$  es localmente conexo, existe un abierto conexo  $V$  en  $X$ , tal que  $x \in V \subset U$ . Así,  $x \in V$  y  $V \subset C$ , pues  $C$  es una componente. Así,  $C$  es abierta en  $X$ .

Ahora veamos que si toda componente de un abierto es abierta, entonces el espacio es localmente conexo. Sean  $x \in X$ ,  $U_x$  una vecindad abierta de  $x$  y  $V_x$  la componente de  $U_x$  que contiene a  $x$ . Como toda componente es abierta, tenemos que  $X$  es localmente conexo. ■

A continuación mostraremos una propiedad muy similar a la conexidad local, pero más general, en el sentido que nos permite considerar bases locales de vecindades conexas no necesariamente abiertas.

**Definición 1.10.** Un continuo  $X$  se dice *conexo en pequeño en  $x$* , si para cada abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U$ , existe un conjunto conexo  $V$  en  $X$  tal que  $x \in \text{Int}_X(V) \subset V \subset U$ . Además, diremos que  $X$  es *conexo en pequeño*, si  $X$  es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Claramente todo espacio localmente conexo es conexo en pequeño. Existe un ejemplo en el cual la conexidad en pequeño en un punto, no implica la conexidad local de ese mismo punto [23, Ejemplo 1.7.7.]. Sin embargo, si la conexidad en pequeño se satisface en cada uno de los puntos, entonces el espacio es localmente conexo, como mostramos a continuación. [27, Ejercicio 5.22b].

**Proposición 1.11.** *Un continuo  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $X$  es conexo en pequeño.*

*Demostración.* Si  $X$  es localmente conexo se sigue de la definición que  $X$  es conexo en pequeño. Ahora probemos que si  $X$  es conexo en pequeño entonces  $X$  es localmente conexo. Sea  $U$  un conjunto abierto de  $X$ ,  $x \in U$  y  $C$  la componente de  $U$  tal que  $x \in C$ . Veamos que  $C$  es abierto en  $X$ . Sea  $y \in C$ . Como  $C \subset U$ , entonces  $y \in U$ . Así, existe un conjunto conexo  $V$  de  $X$  tal que  $y \in \text{Int}_X(V) \subset V \subset U$ , pues  $X$  es conexo en pequeño. Luego, tenemos

que  $y \in C \cap V$ . Como  $C$  es la componente de  $U$  que tiene a  $y$  y  $V$  es conexo,  $V \subset C$ . Así,  $y \in \text{Int}_X(V) \subset \text{Int}_X(C)$ . Luego  $C$  es abierto y, por tanto,  $X$  es localmente conexo, por el Teorema 1.9. ■

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 1.8. La prueba del resultado este puede consultarse en [27, Teorema 8.10].

**Teorema 1.12.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces para cada  $\epsilon > 0$ ,  $X$  es la unión de un número finito de continuos localmente conexos de diámetro menor que  $\epsilon$ .*

*Demostración.* Sean  $X$  localmente conexo y  $\epsilon > 0$ . Por el Teorema 1.8, existe una función sobreyectiva  $f : [0, 1] \rightarrow X$ . Como  $f$  es uniformemente continua, existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y$  en  $[0, 1]$  con  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ . Sea  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ , una partición de  $[0, 1]$  tal que  $|t_{i-1} - t_i| < \delta$ . Note que  $\text{diám}(f([t_i, t_{i+1}])) < \epsilon$ . Además,  $\bigcup_{i=1}^{n-1} f([t_i, t_{i+1}]) = X$ , por [17, Teorema 5, Sección 2, pág. 257]. ■

El siguiente resultado es una herramienta útil, pues dado un continuo podemos garantizar la existencia de una sucesión encajada de continuos localmente conexos cuya intersección es el continuo dado. La demostración del siguiente teorema la tomamos de [17, Teorema 1, pág. 260].

**Teorema 1.13.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $L$  un subconjunto cerrado de  $X$ , entonces existe una sucesión de subconjuntos de  $X$  cerrados localmente conexos  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que:*

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_{n+1} \subset L_n$ ;
2.  $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$

*Demostración.* Sea  $A_1 = X$ . Note que  $L \subset A_1$ . Como  $A_1$  es localmente conexo existen  $\{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1k_1}\}$  tales que  $A_1 = A_{11} \cup A_{12} \cup \dots \cup A_{1k_1}$ , donde cada  $A_{1i}$  es un subcontinuo localmente conexo y  $\text{diám}(A_{1i}) < \frac{1}{2}$ , por el Teorema 1.12. Notemos que  $L = A_1 \cap L = \bigcup_{i=1}^{k_1} (A_{1i} \cap L)$ . Sea  $A_2 = \bigcup \{A_{1i} : A_{1i} \cap L \neq \emptyset, i \in \{1, 2, \dots, k_1\}\}$ . Note que  $A_2$  es una unión de continuos localmente conexos. Luego  $A_2$  es localmente conexo, por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230]. Así, tenemos que  $L \subset A_2 \subset A_1$  y  $D(A_2, L) = \sup_{a \in A_2} \{\inf_{l \in L} \{d(a, l)\}\} < \frac{1}{2}$ . Supongamos que hemos definido  $A_n$  para un  $n \in \mathbb{N}$ , y definamos  $A_{n+1}$ . Como  $A_n$  es localmente conexo existen  $\{A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nk_n}\}$  tales que  $A_n = A_{n1} \cup A_{n2} \cup \dots \cup A_{nk_n}$ , donde  $A_{ni}$  es un subcontinuo localmente conexo y  $\text{diám}(A_{ni}) < \frac{1}{n+1}$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k_n\}$ , por el Teorema 1.12. Ahora,  $L = A_n \cap L = \bigcup_{i=1}^{k_n} (A_{ni} \cap L)$ . Sea  $A_{n+1} = \bigcup \{A_{ni} : A_{ni} \cap L \neq \emptyset, i \in \{1, 2, \dots, k_n\}\}$ . Claramente,  $A_{n+1}$  es un subcontinuo localmente conexo de  $X$ ,  $L \subset A_{n+1} \subset A_n$  y  $D(A_{n+1}, L) = \sup_{a \in A_{n+1}} \{\inf_{l \in L} \{d(a, l)\}\} < \frac{1}{n+1}$ . Así, hemos definido una sucesión de subconjuntos de  $X$  cerrados localmente conexos tales que  $A_{n+1} \subset A_n$ .

Veamos ahora que  $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Dado que  $L \subset A_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $L \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Ahora, tomemos  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  y veamos que  $x \in L$ . Como  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $x \in A_1$ , entonces existe  $l_1 \in L$ , tal que  $d(x, l_1) < 1$ . También tenemos que  $x \in A_2$ , luego existe  $l_2 \in L$  tal que  $d(x, l_2) < \frac{1}{2}$ . De lo anterior podemos garantizar que existe una sucesión  $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $L$ , que converge a  $x$ . Así, tenemos que  $x \in L$ , ya que  $L$  es compacto. ■

La noción de cadena simple, que definimos a continuación, es importante para el estudio de resultados relacionados con la conexidad, como veremos más adelante.

**Definición 1.14.** Una familia  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de subconjuntos de un espacio métrico  $X$  es una *cadena simple* en  $X$  si se tiene que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$  si y sólo si  $|j - k| \leq 1$ . A cada  $U_k$  se le llama un *eslabón* de la cadena simple. Se dice que una cadena simple  $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  *conecta a los puntos  $a$  y  $b$*  en  $X$ , si  $a \in U_1$  y  $b \in U_n$ .

Con el siguiente resultado podemos construir cadenas simples a partir de una familia de conjuntos abiertos en un espacio métrico conexo. La prueba de este resultado es tomada de [14, Teorema 3-4].

**Teorema 1.15.** *Sea  $X$  un espacio métrico y conexo. Si  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una cubierta abierta de  $X$  y  $a, b \in X$  entonces existe una cadena simple que conecta a  $a$  con  $b$  cuyos eslabones son elementos de  $\mathcal{U}$ .*

*Demostración.* Sean  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta abierta de  $X$  y  $a \in X$ . Definamos  $D$  el conjunto de puntos  $x \in X$  tales que existe una cadena simple, con eslabones en  $\mathcal{U}$ , que conecta a  $a$  con  $x$ . Como  $a \in D$ ,  $D \neq \emptyset$ . Veamos que  $D$  es abierto y cerrado en  $X$ . Sea  $x \in D$ . Luego existe una cadena simple  $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ , con eslabones en  $\mathcal{U}$ , tal que  $a \in U_1$  y  $x \in U_n$ . Es claro que  $\mathcal{C}$  es una cadena simple que conecta a  $a$  con cualquier punto de  $U_n$ . Esto implica que  $U_n \subset D$  y así  $D$  es abierto. Probemos que  $D = Cl_X(D)$ . Sea  $x \in Cl_X(D) = D \cup Fr_X(D)$ . Supongamos que  $x \in Fr_X(D)$ . Como  $\mathcal{U}$  es una cubierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U$ . Como  $x \in Fr_X(D)$ , existe  $z \in D \cap U$ , por lo que existe una cadena simple  $\{V_1, \dots, V_m\}$ , con eslabones en  $\mathcal{U}$ , que conecta a  $a$  con  $z$ . Sea  $r = \min\{i \in \{1, \dots, m\} : U \cap V_i \neq \emptyset\}$ . Entonces  $\{V_1, \dots, V_r, U\}$  es una cadena simple que conecta  $a$  con  $x$  y por lo tanto,  $x \in D$ . De lo anterior,  $D$  es un subconjunto abierto y cerrado de  $X$ . Como  $X$  es conexo,  $D = X$ . Con lo que concluimos que cualquier par de puntos en  $X$ , se pueden unir mediante una cadena simple con eslabones en  $\mathcal{U}$ . ■

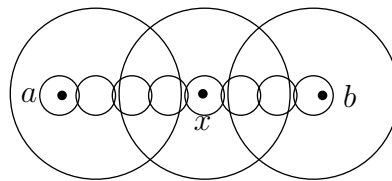


Figura 1.3: Construcción de una cadena simple que conecta a  $a$  con  $b$ .

El siguiente resultado muestra la relación entre la conexidad local y la conexidad por arcos en los continuos. La prueba de este resultado se encuentra en [27, Teorema 8.23].

**Teorema 1.16.** *Si  $X$  es un continuo no degenerado y localmente conexo, entonces  $X$  es arcoconexo.*

*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  puntos de  $X$ . Mostraremos que existe un arco en  $X$  que une a  $a$  con  $b$ . Dado que  $X$  es localmente conexo en cada punto, podemos definir  $\mathcal{C}_1 = \{U_{11}, \dots, U_{1n_1}\}$  como una cadena de subconjuntos abiertos conexos, que unen a  $a$  con  $b$ , donde cada  $U_{1i}$  tiene diámetro menor a 1, por el Teorema 1.15.

Como  $X$  es normal y localmente conexo, para cada  $z \in \bigcup_{j=1}^{n_1} U_{1j}$ , existe un abierto conexo  $V_z$  tal que  $\text{diám}(V_z) < \frac{1}{2}$  y  $z \in V_z \subset Cl_X(V_z) \subset U_{1k}$ , para cualquier  $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  donde  $z \in U_{1k}$ . Notemos que  $\bigcup_{j=1}^{n_1} U_{1j} = \bigcup_{z \in \bigcup_{j=1}^{n_1} U_{1j}} V_z$  y por tanto  $\{V_z : z \in \bigcup_{j=1}^{n_1} U_{1j}\}$  es una cubierta abierta de  $\bigcup_{j=1}^{n_1} U_{1j}$ . Así, existe una cadena simple  $\mathcal{C}_2 = \{U_{21}, \dots, U_{2n_2}\}$  con elementos de  $\{V_z\}$  que une a  $a$  con  $b$ , por el Teorema 1.15.

Entonces existe una cadena simple  $\mathcal{C}_2 = \{U_{21}, \dots, U_{2n_2}\}$  de abiertos conexos de diámetro menor a  $\frac{1}{2}$  uniendo a  $a$  con  $b$  y la clausura de cada elemento de la cadena  $\mathcal{C}_2$  está contenido en un elemento de la cadena  $\mathcal{C}_1$ , dentro de  $\mathcal{C}_1$ , por el Teorema 1.15. De manera inductiva construimos cadenas  $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \dots$  de abiertos conexos de  $a$  a  $b$  donde el diámetro de cada  $U_{ji}$  es menor a  $\frac{1}{j}$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ , y tales que la  $\bigcup_{j=1}^m Cl_X U_{mj} \subset \bigcup_{k=1}^{m_i} U_{ik}$  con  $m < i$ , por el [13, Corolario 6.1.16].

Sea  $K_j = Cl_X(U_{j1}) \cup Cl_X(U_{j2}) \cup \dots \cup Cl_X(U_{jn_j})$ . Note que para cada  $j$ ,  $K_j$  es un continuo que contiene a  $a$  y  $b$  y  $K_{j+1}$  está contenido en el interior de  $K_j$ . Sea  $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ . Luego  $K$  es un continuo que contiene a  $a$  y  $b$ , por el Teorema 1.5.

Note que cada punto de  $K$  es también un punto de  $\bigcap_{j=1}^{\infty} (U_{j1} \cup \dots \cup U_{jn_j})$ . Veamos que  $K$  es un arco. Sea  $x \in K \setminus \{a, b\}$ . Definamos  $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j \cap K)$  y  $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} (F_j \cap K)$ , donde  $P_j$  es la unión de los eslabones  $U_{ji}$  en  $\mathcal{C}_j$  que preceden a uno o dos eslabones en  $\mathcal{C}_j$  que contienen a  $x$ , y  $F_j$  es la unión de los eslabones  $U_{ji}$  en  $\mathcal{C}_j$  que son siguientes a uno o dos eslabones en  $\mathcal{C}_j$  que contienen a  $x$ . Es claro que  $P$  y  $F$  son subconjuntos abiertos disyuntos no vacíos de  $K$ . Así, el punto  $x$  desconecta a  $K$ , es decir,  $K \setminus \{x\} = P \cup F$ , por lo tanto, los únicos puntos que no desconectan a  $K$  son  $a$  y  $b$ , luego  $K$  es un arco, por el Teorema 6.17 de [27]. Por lo tanto,  $X$  es arcoconexo. ■

El Ejemplo 1.3, el círculo de Varsovia, es un ejemplo de un continuo que es arcoconexo pero no es localmente conexo.

**Definición 1.17.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\epsilon > 0$ . Un  $(d, \epsilon)$ -enlace es un conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$  tal que  $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Diremos que el  $(d, \epsilon)$ -enlace va de  $p$  a  $q$ , si  $x_1 = p$  y  $x_n = q$ .

El siguiente lema es el Ejercicio 4.22 de [27].

**Lema 1.18.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Para todo  $A \subset X$  y para todo  $\epsilon > 0$ , definimos*

$$\mathcal{C}(A, \epsilon) = \{x \in X \mid \text{existe un } (d, \epsilon)\text{-enlace de algún punto de } A \text{ a } x\}.$$

*Entonces  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es abierto y cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $A \subset X$  y  $\epsilon > 0$ . Note que si  $A = \emptyset$  entonces  $\mathcal{C}(A, \epsilon) = \emptyset$  y, por tanto,  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es abierto y cerrado de  $X$ . Así, supongamos que  $A \neq \emptyset$ .

Veamos que  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es abierto. Sea  $x \in \mathcal{C}(A, \epsilon)$ . Si  $y \in B(x, \epsilon)$ , entonces  $d(x, y) < \epsilon$ . Como  $x \in \mathcal{C}(A, \epsilon)$ , existe un  $(d, \epsilon)$ -enlace  $\{x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = a\}$  para algún  $a \in A$ . Así,  $\{y, x = x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = a\}$  es un  $(d, \epsilon)$ -enlace de  $y$  a  $a$ . Por lo tanto,  $y \in \mathcal{C}(A, \epsilon)$ . De lo anterior, tenemos que  $B(x, \epsilon) \subset \mathcal{C}(A, \epsilon)$  y  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es abierto.

Mostremos ahora que  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es cerrado. Si  $x \in Cl_X(\mathcal{C}(A, \epsilon))$ , entonces  $B(x, \epsilon) \cap \mathcal{C}(A, \epsilon) \neq \emptyset$ . Tomemos  $y \in B(x, \epsilon) \cap \mathcal{C}(A, \epsilon)$ . Así, existe una  $(d, \epsilon)$ -enlace  $\{y = x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}$  de  $y$  a algún  $b \in A$ . Por lo tanto,  $\{x, y = x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}$  es una  $(d, \epsilon)$ -enlace de  $x$  a  $b$ . Luego  $x \in \mathcal{C}(A, \epsilon)$ . Así,  $\mathcal{C}(A, \epsilon)$  es cerrado. ■

**Lema 1.19.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico compacto,  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Si no existe un subconjunto conexo de  $X$  que interseca a  $A$  y a  $B$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que no hay un  $(d, \delta)$ -enlace de ningún punto de  $A$  a ningún punto de  $B$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$  y supongamos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe una  $(d, \frac{1}{2^i})$ -enlace  $K_i$  de algún punto  $a_i \in A$  en algún punto  $b_i \in B$ . Observe que  $K_i$  es un conjunto finito y por tanto compacto en  $X$ , para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Es conocido que y como veremos en el Teorema 2.18, la colección de compactos no vacíos de  $X$  es compacto, entonces tenemos que existe un compacto  $K$  que es punto límite de la sucesión  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Así,  $K$  es conexo por [27, Lema 4.16]. Como cada  $K_i$  contiene puntos en  $A$  y en  $B$ , tenemos que  $K$  interseca simultáneamente a  $A$  y a  $B$  lo cual contradice la hipótesis del lema. Por lo tanto, existe  $\delta > 0$  tal que no existe un  $(d, \delta)$ -enlace que interseca a  $A$  y  $B$ . ■

Una consecuencia directa del Lema 1.19 es el Teorema del cable cortado [27, Teorema 5.2], el cual probamos a continuación.

**Teorema 1.20.** *(del cable cortado) Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de un espacio métrico compacto  $X$ . Si ningún subconjunto conexo de  $X$  interseca simultáneamente a  $A$  y  $B$ , entonces existen dos subconjuntos cerrados y disjuntos,  $X_1$  y  $X_2$ , de  $X$  tales que  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $A \subset X_1$  y  $B \subset X_2$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Como no existe un subconjunto conexo de  $X$  que interseca a  $A$  y a  $B$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que no hay un  $(d, \delta)$ -enlace de ningún punto de  $A$  a ningún punto de  $B$ , por el Lema 1.19. Sean  $X_1 = \mathcal{C}(A, \delta)$  y  $X_2 = X \setminus \mathcal{C}(A, \delta)$ . Así,  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  y  $X = X_1 \cup X_2$ . Por el Lema 1.18,  $X_1$  es un abierto y cerrado de  $X$ . Luego,  $X_2$  es un cerrado de  $X$ . Claramente  $A \subset X_1$  y además  $B \subset X_2$ , por el Lema 1.19. ■

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de golpes en la frontera, el cual es de gran utilidad en la teoría de continuos. La prueba de este la tomamos de [27, Teorema 5.4].

**Teorema 1.21** (*golpes en la frontera*). Sean  $X$  un continuo y  $U$  un subconjunto abierto propio no vacío de  $X$ . Si  $K$  es una componente de  $Cl_X(U)$ , entonces  $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $U$  un subconjunto abierto propio no vacío de  $X$  y  $K$  una componente  $Cl_X(U)$ . Supongamos que  $K \cap Fr_X(U) = \emptyset$ . Es claro que  $Cl_X(U)$  es un compacto métrico y,  $K$  y  $Fr_X(U)$  son cerrados no vacíos en  $Cl_X(U)$ . Además, notemos que no existe ningún conexo en  $Cl_X(U)$  que interseque a  $K$  y  $Fr_X(U)$ , pues  $K$  es una componente de  $Cl_X(U)$ . Luego existen dos cerrados  $A$  y  $B$  en  $Cl_X(U)$  tal que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $K \subset A$ ,  $Fr_X(U) \subset B$  y  $Cl_X(U) = A \cup B$ , por el Teorema 1.20.

Tomemos  $D = B \cup (X \setminus U)$ . Observemos que  $D$  es cerrado y que  $X = A \cup D$ , pues  $X = A \cup (B \cup (X \setminus U)) = (A \cup B) \cup (X \setminus U) = Cl_X(U) \cup (X \setminus U) = X$ . Ahora,  $A \cap D = A \cap (B \cup (X \setminus U)) = (A \cap B) \cup (A \cap (X \setminus U)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ . Así, podemos concluir que  $X$  no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$ . ■

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema de golpes en la frontera cuya prueba se encuentra en [27, Corolario 5.5].

**Corolario 1.22.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Si  $A$  es un subcontinuo de  $X$  y  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $A \subset U$ , entonces existe un subcontinuo  $B$  de  $X$  tal que  $A \subsetneq B \subset U$ .

*Demostración.* Sean  $A$  un subcontinuo de  $X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , tal que  $A \subset U$ . Como  $X$  es un espacio normal, existe un abierto  $W$  de  $X$  tal que  $A \subset W$  y  $Cl_X(W) \subset U$ . Sea  $B$  la componente de  $Cl_X(W)$  que contiene a  $A$ . Claramente,  $A \subset B$  y como  $Cl_X(W) \subset U$ ,  $B \subset U$ . Observemos que  $B \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$ , por el Teorema 1.21. Así,  $A \neq B$ . De esta manera queda probado el resultado. ■

La siguiente definición presenta un tipo especial de continuos, la cual relaciona puntos del continuo con sus subcontinuos propios.

**Definición 1.23.** Un continuo  $X$  es *irreducible entre dos de sus puntos* si no existe un subcontinuo propio de  $X$  que contenga a dichos puntos. Un continuo es *irreducible* si es irreducible entre dos de sus puntos.

El arco es un continuo irreducible. El continuo descrito en el Ejemplo 1.2 y la curva sinusoidal del topólogo, son ejemplos de continuos irreducibles. La curva cerrada simple es un ejemplo de un continuo que no es irreducible.

**Definición 1.24.** Sea  $X$  un continuo, diremos que  $X$  es *unicoherente* si siempre que  $X = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son subcontinuos de  $X$ , se tiene que  $A \cap B$  es conexo. Además, diremos que  $X$  es *hereditariamente unicoherente* si cualquier subcontinuo de  $X$  es unicoherente.

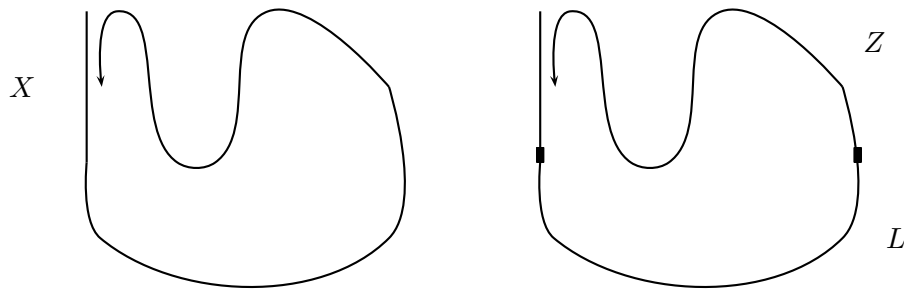


Figura 1.4: Circulo de Varsovia no es un continuo unicoherente

El arco y la curva sinusoidal del topólogo son ejemplos de continuos unicoherentes. El continuo descrito en el Ejemplo 1.2, es un continuo unicoherente que no es hereditariamente unicoherente.

**Ejemplo 1.25.** La curva cerrada simple y el continuo  $X$  conocido como el circulo de Varsovia no son unicoherentes. Por ejemplo, para el circulo de Varsovia, tomemos los subcontinuos la curva sinusoidal del topólogo  $Z$  y  $L$  el arco que une a los puntos  $(0,-1)$  y  $(1, \text{sen}(1))$ , como en el Ejemplo 1.3. Observe que  $Z \cap L = \{(0, -1), (1, \text{sen}(1))\}$ , el cual claramente no es conexo.

---

## 1.2. Funciones continuas

---

En diversas ramas de la matemática, por ejemplo en topología, es interesante estudiar las propiedades que caracterizan a los espacios y relacionarlos con otros espacios ya conocidos. Dichas relaciones son posibles gracias a la estructura topológica de los espacios y a las funciones continuas que, de esta forma, se convierten en una herramienta necesaria para el estudio de la topología.

En topología se utilizan los homeomorfismos para estudiar propiedades topológicas entre diversos espacios. Entre continuos, un homeomorfismo es una función biyectiva y continua. De las clases más importantes de funciones continuas que se definen en cursos de topología general son las funciones abiertas. Una función es abierta si la imagen de cualquier conjunto abierto del dominio es un conjunto abierto del recorrido.

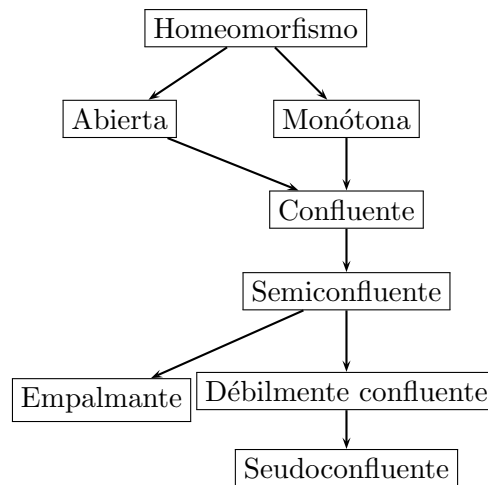
En el artículo “*Continuos mappings on continua*” [26], el profesor T. Maćkowiak estudió y recopiló diferentes clases de funciones entre continuos. Mostraremos algunas de estas clases, pues serán útiles en el desarrollo del presente trabajo.

**Definición 1.26.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva definida entre continuos. Diremos que  $f$  es:

1. *monótona* si para cualquier subcontinuo  $Q \subset Y$ ,  $f^{-1}(Q)$  es un continuo.

2. *confluente* si para todo subcontinuo  $Q \subset Y$  y  $K$  una componente de  $f^{-1}(Q)$ , tenemos que  $f(K) = Q$ .
3. *semiconfluente* si para todo subcontinuo  $Q \subset Y$  y para cualesquiera dos componentes  $C_1$  y  $C_2$  de  $f^{-1}(Q)$ , tenemos que  $f(C_1) \subset f(C_2)$  ó  $f(C_2) \subset f(C_1)$ .
4. *débilmente confluente* si para cualquier subcontinuo  $Q \subset Y$ , existe una componente  $C$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que  $f(C) = Q$ .
5. *seudoconfluente* si para cualquier subcontinuo irreducible  $Q \subset Y$ , existe una componente  $C$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que  $f(C) = Q$ .
6. *empalmante* si para cada subcontinuo  $Q \subset Y$  y para cualesquiera dos componentes  $C$  y  $D$  de  $f^{-1}(Q)$ , tenemos que  $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$ .

En el siguiente diagrama mostraremos las relaciones existentes entre estas clases de funciones definidas anteriormente. La mayoría de las implicaciones se siguen de la definición. Sin embargo, en [26, Sección 2] se pueden encontrar las pruebas, así como los ejemplos que muestran que las implicaciones faltantes no se satisfacen.



**Diagrama 1.2**

Con el siguiente ejemplo mostramos que la restricción de una función confluente no necesariamente es confluente.

**Ejemplo 1.27.** La función  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $g(t) = 1 - |2t - 1|$ . La función  $g$  es abierta y, por tanto, confluente. Sin embargo si hacemos una restricción al intervalo  $L = [0, \frac{3}{4}]$  y tomando el subcontinuo  $K = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  en el recorrido, tenemos que la componente  $N = [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$  de  $g^{-1}(K)$ , no satisface que  $g(N) = K$  y por tanto  $g|_L$  no es confluente. En la Figura 1.5 representamos esta situación.

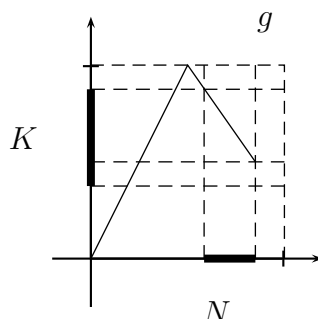


Figura 1.5:  $g|_L$  no es confluyente.

Con el siguiente resultado mostramos una condición suficiente para que la restricción de una función confluyente sea nuevamente confluyente.

**Teorema 1.28.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente entre continuos y  $K$  un subcontinuo de  $Y$ . Si  $L$  es una componente de  $f^{-1}(K)$  entonces  $f|_L: L \rightarrow K$  es confluyente.*

*Demostración.* Sean  $K$  un subcontinuo de  $Y$  y  $L$  una componente de  $f^{-1}(K)$ . Sean  $M$  un subcontinuo de  $K$  y  $N$  una componente de  $(f|_L)^{-1}(M)$ . Debemos ver que  $f|_L(N) = M$ . Para ver esto, basta probar que  $N$  es una componente de  $f^{-1}(M)$ . Supongamos que existe un subconjunto conexo  $N'$  de  $X$  tal que  $N \subset N' \subset f^{-1}(M)$ . Dado que  $(f|_L)^{-1}(M) = f^{-1}(M) \cap L$ , tenemos que  $N \cap L \subset N' \cap L \subset f^{-1}(M) \cap L$ , luego  $N \cap L = N \subset N' \cap L = N' \subset (f|_L)^{-1}(M)$ . Así, tenemos que  $N = N'$  pues  $N$  es una componente. Dado que  $f$  es confluyente, tenemos que  $f(N) = M$ , luego  $f|_L(N) = M$  y, por lo tanto,  $f|_L$  es confluyente.

■

Para el estudio de clases de funciones entre continuos, existen propiedades de carácter algebraico tal como la propiedad de composición que definimos a continuación.

**Definición 1.29.** Sea  $\mathcal{A}$  una clase de funciones entre continuos. Diremos que  $\mathcal{A}$  tiene la *propiedad de composición* si para cualesquiera dos funciones  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  que están en  $\mathcal{A}$ , tenemos que  $g \circ f$  pertenece a  $\mathcal{A}$ .

**Observación 1.30.** *De las clase de funciones que presentamos en la Definición 1.26, las monótonas, las confluentes, débilmente confluentes y pseudoconfluentes, tienen la propiedad de composición [26, Sección 5].*

En el siguiente ejemplo mostramos que la clase de funciones semiconfluentes y empalmantes no tienen la propiedad de composición.

**Ejemplo 1.31.** *Existen funciones  $f$  semiconfluyente y  $g$  abierta (por lo tanto  $f$  es empalmante, y  $g$  es semiconfluyente y empalmante), tales que  $f \circ g$  no es empalmante (por lo tanto no es semiconfluyente).*

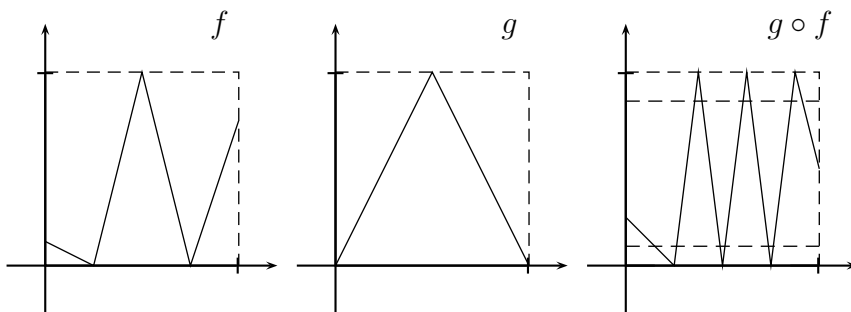


Figura 1.6:  $g \circ f$  no es semiconfluente.

Definamos las funciones  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , por:

$$g(t) = 1 - |2t - 1| \quad \text{y}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{t}{2}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ 1 - |4t - 2|, & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ 3t - \frac{9}{4}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sea  $K = [\frac{1}{8}, \frac{3}{4}]$  un subcontinuo de  $[0, 1]$ . Note que los intervalos  $N = [0, \frac{1}{8}]$  y  $M = [\frac{7}{8}, 1]$  son componentes de  $(g \circ f)^{-1}(K)$ . Es fácil ver que,  $(g \circ f)(N) = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$  y  $(g \circ f)(M) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ . Luego  $(g \circ f)(N) \cap (g \circ f)(M) = \emptyset$ . Así,  $g \circ f$  no es ni empalmante y, por tanto,  $g \circ f$  no es semiconfluente.

Note que en el Ejemplo 1.31 la función  $g$  es una función abierta y, por tanto, confluente. Con la siguiente proposición mostramos que si  $g$  es una función monótona, entonces la composición  $g \circ f$  resulta semiconfluente.

**Proposición 1.32.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  funciones continuas entre continuos. Si  $f$  es semiconfluente y  $g$  es monótona entonces  $g \circ f$  es semiconfluente.

*Demostración.* Sean  $Q$  un subcontinuo de  $Z$ ,  $D$  y  $E$  componentes de  $(g \circ f)^{-1}(Q) = f^{-1}(g^{-1}(Q))$ . Como  $g$  es monótona,  $g^{-1}(Q)$  es un subcontinuo de  $Y$ . Luego  $f(E) \subset f(D)$  o  $f(E) \subset f(D)$ , pues  $f$  es semiconfluente. Por lo tanto,  $g(f(E)) \subset g(f(D))$  o  $g(f(E)) \subset g(f(D))$  y  $g \circ f$  es semiconfluente. ■

Aunque no lo hicimos, podemos asegurar que la Proposición 1.32, también es válida para las funciones empalmantes.

Con la propiedad de composición observamos que dadas dos funciones de una misma clase, la composición de las mismas está en la misma clase, excepto para las clases de funciones semiconfluentes y empalmantes. De igual manera, podríamos hacernos la pregunta inversa; ¿Dada una función compuesta en una clase de funciones, entonces dichas funciones pertenecen a la misma clase a la cual pertenece la función compuesta? Una respuesta parcial a esta pregunta se conoce como la propiedad del factor y puede consultarse en [26, Sección 5].

**Definición 1.33.** Sea  $\mathcal{A}$  una clase de funciones entre continuos. Diremos que  $\mathcal{A}$  tiene la *propiedad del factor* si siempre que  $g \circ f$  está en  $\mathcal{A}$ , entonces  $g$  también está en  $\mathcal{A}$ .

**Observación 1.34.** De las clases de funciones que presentamos, las monótonas, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes y pseudoconfluentes, tienen la propiedad del factor [26, Sección 5], es decir, todas las clases de funciones que mostramos en la Definición 1.26, tienen la propiedad del factor.

La siguiente proposición establece una relación entre el número de componentes de la imagen inversa de un subcontinuo del recorrido y la imagen inversa de un punto de dicho subcontinuo bajo una función confluyente. La prueba de esta proposición se encuentra en [9, Proposición 4.8].

**Proposición 1.35.** Sean  $L$  un subcontinuo de  $Y$  y  $y \in L$ . Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función confluyente entre continuos, entonces el número de componentes de  $f^{-1}(L)$  es menor o igual que el número de componentes de  $f^{-1}(y)$ .

*Demostración.* Note que es suficiente probar que cada componente de  $f^{-1}(L)$  contiene al menos una componente de  $f^{-1}(y)$ . Sea  $D$  componente de  $f^{-1}(L)$ . Como  $f$  es confluyente, entonces  $f(D) = L$ . Dado que  $y \in L$ , existe un  $x \in D$ , tal que  $f(x) = y$ . Sea  $C$  componente de  $f^{-1}(y)$  tal que  $x \in C$ . Por lo tanto,  $C \subset D$ . ■

---

## 1.3. Propiedad de arcoaproximación

---

La propiedad de arcoaproximación fue definida por W.J. Charatonik en el artículo “Arc approximation property and confluence of induced mappings” [9]. En esta sección mostraremos resultados importantes que involucran la propiedad de arcoaproximación de algunos continuos y las funciones confluentes.

Las siguientes definiciones nos serán de gran utilidad puesto que nos permiten observar la convergencia de cualquier sucesión de subconjuntos de un espacio topológico.

**Definición 1.36.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Definimos:

1.  $\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i = \{x \in X : U \text{ abierto de } X, x \in U, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } A_i \cap U \neq \emptyset, \text{ para } n \geq N\}$ .
2.  $\limsup_{i \rightarrow \infty} A_i = \{x \in X : U \text{ abierto de } X, x \in U, \text{ se tiene que } A_i \cap U \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de } \text{índices}\}$ .

**Definición 1.37.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$  y  $A \subset X$ . Diremos que  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  converge a  $A$ , denotada por  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$ , siempre que  $\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i = A = \limsup_{i \rightarrow \infty} A_i$ .

**Definición 1.38.** Sean  $K$  un subcontinuo de un continuo  $X$  y un punto  $p \in K$ . Diremos que  $K$  es *arcoaproximado en el punto  $p$*  si existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos  $K_n$  de  $X$  tales que  $p \in K_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ . Un subcontinuo  $K$  de un continuo  $X$  se dice *arcoaproximado* siempre que sea arcoaproximado en cada punto de  $K$ . Un continuo  $X$  se dice que tiene la *propiedad de arcoaproximación* siempre que cada subcontinuo de  $X$  es arcoaproximado.

**Ejemplo 1.39.** El arco y la curva cerrada simple, son ejemplos de continuos que tienen la propiedad de arcoaproximación. El continuo  $X$  definido en el Ejemplo 1.2 no tiene la propiedad de arcoaproximación, pues tomando un punto sobre la curva cerrada simple y un subcontinuo  $K$  tal que  $K$  es homeomorfo a  $X$ , tendremos que  $K$  no es arcoaproximado en dicho punto y, por tanto, el continuo  $X$  no tiene la propiedad de arcoaproximación.

El siguiente resultado muestra que la propiedad de arcoaproximación de un continuo permanece invariante bajo funciones débilmente confluentes [9, Teorema 3.5].

**Teorema 1.40.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Si  $X$  es un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación y  $f: X \rightarrow Y$  una función débilmente confluyente entonces  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación.

*Demostración.* Sean  $L$  un subcontinuo de  $Y$  y  $q \in L$ . Como  $f$  es débilmente confluyente, existen un subcontinuo  $K$  de  $X$  tal que  $f(K) = L$  y un punto  $p$  de  $K$  con  $f(p) = q$ . Como  $X$  tiene la propiedad de arcoaproximación, existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que  $p \in K_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$ . Entonces  $f(K_n)$  son subcontinuos arcoconexos de  $Y$  que contienen a  $q$  convergen a  $L$  por la continuidad de  $f$ . Por tanto,  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación. ■

El siguiente teorema nos permitirá generalizar algunos resultados presentados para los continuos localmente conexos. [9, Proposición 3.6].

**Teorema 1.41.** Todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de arcoaproximación.

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo localmente conexo,  $K$  un subcontinuo de  $X$  y  $p \in K$ . Entonces existe una sucesión  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subcontinuos localmente conexos de  $X$ , tal que  $K \subset L_n$ ,  $L_{n+1} \subset L_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$ , por el Teorema 1.13. Como  $L_n$  es localmente conexo,  $L_n$  es arcoconexo, por el Teorema 1.16. Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = K$ , por el Ejercicio 4.16 [16]. Por lo tanto,  $X$  tiene la propiedad de arcoaproximación. ■

**Definición 1.42.** Un  $\lambda$ -*dendroide* es un continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible. Un continuo  $X$  se dice *dendroide* si  $X$  es arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Un dendroide  $X$  se dice *suave en un punto*  $p$  de  $X$  si para toda sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $X$ , que converge a un punto  $a_0 \in X$ , entonces la sucesión de arcos  $\overline{pa_n}$  converge al arco  $\overline{pa}$ . Un dendroide se dice *suave* si es suave en algún punto  $p$  de  $X$ . Un continuo  $X$  es una *dendrita* si  $X$  es un dendroide localmente conexo.

El continuo llamado la curva sinusoidal del topólogo, definido en el Ejemplo 1.3, es un ejemplo de un  $\lambda$ -dendroide que no es arcoconexo. A continuación mostramos ejemplos de dendroides, dendroides suaves y dendritas.

**Ejemplo 1.43.** *Existe un continuo que es un dendroide suave y no es una dendrita.*

Sean  $a = (-1, 0)$ ,  $b = (0, 0)$  y  $q_n = (0, \frac{1}{n})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $X = \overline{ab} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{aq_n}$  (ver Figura 1.6).

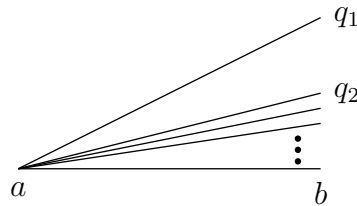


Figura 1.7: Ejemplo de un dendroide suave

Es fácil ver que  $X$  es un continuo. Además, notemos que  $X$  es un continuo hereditariamente unicoherente y arcoconexo, por tanto, un dendroide. Por otra parte,  $X$  satisface la condición de ser un dendroide suave en el punto  $(0, 0)$ . Note que para cada punto  $(t, 0)$  con  $t \in (0, 1]$ , el continuo  $X$  no es localmente en el punto  $(t, 0)$ . De lo anterior,  $X$  no es una dendrita.

En el Ejercicio 10.58.a de [27], se pide probar que todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide. Así, tenemos que todo dendroide es hereditariamente arcoconexo. Sea  $x \in X$  y  $K \subset X$  con  $x \in K$ . Observe que como  $K$  es arcoconexo, podemos tomar la sucesión constante  $K_n = K$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$  y  $x \in K_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Así, todo dendroide tiene la propiedad de arcoaproximación. De lo anterior, no es difícil ver que todo dendroide tiene la propiedad de arcoaproximación.

El continuo  $X$  descrito en el Ejemplo 1.43, es un ejemplo de un dendroide y por tanto, tiene la propiedad de arcoaproximación y no es localmente conexo, este continuo es conocido como el *abanico armónico*.

**Ejemplo 1.44.** *Existe un dendroide que no es suave.*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $L_n$  el segmento de la recta que une los puntos  $q'_n = (0, \frac{-1}{n})$  y  $p_n = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{n})$  y  $C_n$  el semicírculo que une los puntos  $q_n = (0, \frac{1}{n})$  y  $q'_n(0, \frac{-1}{n})$ . Definimos  $A^* = A \cup (\bigcup L_n) \cup (\bigcup C_n)$ , donde  $A$  es el abanico armónico (ver Ejemplo 1.43). Sean  $p, a$  y una sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  en  $A^*$ , tales que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ , como mostramos en la Figura 1.8. Es fácil ver que la sucesión de arcos  $\overline{ap_n}$  no converge al arco  $\overline{ap}$ . Por lo tanto  $A^*$  no es suave en el punto  $a$ . Mediante un argumento similar podemos mostrar que  $A^*$  no es suave en ningún punto  $a$ .

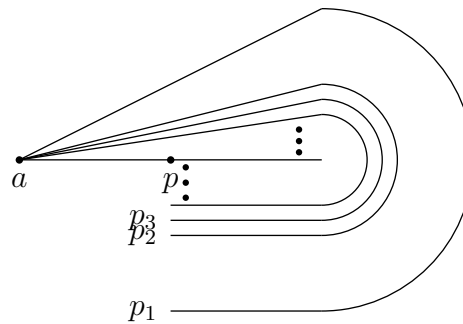


Figura 1.8: Ejemplo de un dendroide que no es suave

**Definición** 1.45. Sean  $X$  un dendroide y  $p \in X$ . Diremos que  $p$  es un punto final de  $X$ , si  $p$  es un punto de no corte de ningún arco que lo contenga. Diremos que un continuo  $X$  es un *árbol* si  $X$  es una dendrita cuyo conjunto de puntos finales es finito.

**Definición** 1.46. Sean  $X$  un continuo y  $Y$  un subcontinuo de  $X$ . Una función  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y \subset X$  se dice una *retracción* si  $f|_Y: Y \rightarrow Y$  es la identidad.

Del Teorema 2.31 tenemos el siguiente resultado aplicado a los dendroides. Omitiremos la prueba, puesto que la misma utiliza condiciones y propiedades que no serán de utilidad para el desarrollo del presente trabajo. El resultado es el Teorema 3.56 de [9].

**Teorema** 1.47. Sean  $X$  un dendroide suave en un punto  $v \in X$  y  $p$  un punto arbitrario de  $X$ . Entonces existen una sucesión de árboles  $X_n \subset X_{n+1} \subset X$ , con  $v, p \in X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y una sucesión de retracciones  $r_n: X \rightarrow X_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = x$ , para cada punto  $x \in X$ .

A continuación, usando las funciones confluentes, mostraremos una condición para que un continuo que tiene la propiedad de arcoaproximación sea localmente conexo.

**Teorema** 1.48. Sea  $X$  un continuo tal que  $X = Z \cup (\bigcup_{j=1}^n R_j)$  donde:

1.  $Z$  es un continuo localmente conexo y  $R_j$  es un rayo, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
2.  $R_i \cap Z = \emptyset$  y  $Cl_X(R_i) \setminus R_i \subset Z$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3.  $R_i \cap R_l = \emptyset$  siempre que  $i \neq l$ .

Sea  $Y$  un continuo. Si  $f: X \rightarrow Y$  es confluyente y  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces  $Y$  es localmente conexo.

*Demostración.* Sea  $X = Z \cup (\bigcup_{j=1}^n R_j)$ , donde  $Z$  es un subconjunto localmente conexo y  $R_j$  es un rayo para toda  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , que satisfacen las condiciones del teorema. Como  $Z$  es localmente conexo,  $f(Z)$  es localmente conexo en  $Y$ , por el Teorema 1.8. Sea  $L$  la componente de  $f^{-1}(f(Z))$  tal que  $Z \subset L$ . Supongamos primero que  $Z \subsetneq L$  y consideremos los siguientes casos:

1.  $L \cap R_j \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dado que  $R_i \cap R_l = \emptyset$  cuando  $l \neq i$ , entonces  $Cl_X(X \setminus L)$  es una unión finita de arcos. Digamos que  $Cl_X(X \setminus L) = \bigcup_{i=1}^k \alpha_i$ , donde cada  $\alpha_i$  es un arco para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Entonces  $f(Cl_X(X \setminus L)) = f(\bigcup \alpha_i) = \bigcup f(\alpha_i)$ . Así,  $f(\alpha_i)$  es localmente conexo, por el Teorema 1.8. Además,  $\bigcup f(\alpha_i)$  es localmente conexo, por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230]. Con lo que tenemos que  $f(Cl_X(X \setminus L))$  es localmente conexo.

Así,  $Y = f(L) \cup f(Cl_X(X \setminus L))$ , donde  $f(L)$  y  $f(Cl_X(X \setminus L))$  son localmente conexos. Por lo que tenemos que  $Y$  es localmente conexo, por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230].

2.  $L \cap R_j = \emptyset$  para alguna  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Definamos  $M = L \cup (\cup \{R_l : L \cap R_l \neq \emptyset\})$ . Del caso anterior, tenemos que  $f(M)$  es localmente conexo. Sea  $J = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : R_i \cap L = \emptyset\}$ .

Es claro que  $X = M \cup (\bigcup_{i \in J} R_i)$ . Sea  $N$  la componente de  $f^{-1}(f(M))$ , tal que  $M \subset N$ . Si  $M \subsetneq N$ , entonces  $N \cap R_i \neq \emptyset$  para algún  $i \in J$ . Si  $N \cap R_i \neq \emptyset$ , para toda  $i \in J$ , entonces como  $f(N)$  es localmente conexo, por el caso anterior  $Y$  es localmente conexo.

Si existe un  $j \in J$  tal que  $N \cap R_j = \emptyset$ , repitiendo el proceso anterior, podemos decir que  $X = N \cup (\bigcup_{j \in J'} R_j)$  donde  $J' = \{1, 2, \dots, n\} : N \cap R_i = \emptyset\}$ . Claramente,  $N$  es componente de  $f^{-1}(f(N)) = f^{-1}(f(M))$ . Por lo tanto podemos suponer que  $N = M$ .

Si  $f(M) = f(N) = Y$ , entonces  $Y$  es localmente conexo. Supongamos que  $f(N) \subsetneq Y$ . Así, existe  $f(x_0) \in Y \setminus f(N)$ . Como  $Y$  es un espacio normal, existe un abierto  $U$  de  $Y$  tal que  $f(x_0) \in U$  y  $U \cap f(N) = \emptyset$ . Sean  $W$  un subcontinuo de  $Y$  y  $a \in N$  tales que  $\{f(a), f(x_0)\} \subset W \subset Y$ . Note que  $W \cap U \neq \emptyset$ . Como  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación en  $f(a)$ , existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f(a) \in K_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = W$ . Así, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K_n \cap U \neq \emptyset$ , para toda  $n \geq n_0$ . Sea  $x' \in X \setminus N$  tal que  $f(x') = y_0$  con  $y_0 \in K_{n_0} \cap U$ . Sea  $\alpha$  un arco en  $K_{n_0}$  de  $f(a)$  a  $y_0$ . Sea  $B$  la componente de  $f^{-1}(\alpha)$  que contiene a  $a$ . Dado que  $f$  es confluyente tenemos que  $f(B) = \alpha$ . Sean  $C = \alpha \cup f(N)$  un continuo de  $Y$  y  $A$  la componente de  $f^{-1}(C)$  que contiene a  $a$  y a  $x'$ . Note que  $C$  es un continuo localmente conexo, por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230] y así,  $f(A)$  es localmente conexo. Como  $y_0 \in \alpha \cap U$  y  $U \cap f(N) = \emptyset$ , tenemos que  $N \subsetneq A$ . Luego  $A \cap R_i \neq \emptyset$ , para algún  $i \in J$ . Repitiendo este proceso, podemos argumentar que  $f(X) = Y$  es localmente conexo.

Finalmente observemos que si  $Z = L$ , repetimos el argumento utilizado en el caso 2 para concluir que  $Y$  es localmente conexo. ■

En el siguiente resultado mostramos una relación entre la compactación de un rayo con residuo un arco y los continuos conocidos como dendritas, bajo una función confluyente.

**Corolario 1.49.** *Sean  $X, Y$  continuos y  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente donde  $X$  es la compactación de un rayo  $R$  con residuo un arco  $A$ . Si  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces  $Y$  es una dendrita.*

*Demostración.* Sea  $X$  la compactación de un rayo  $R$  con residuo un arco  $A$ . Como  $A$  es localmente conexo, entonces  $Y$  es localmente conexo, por el Teorema 1.48. Además, dado que  $X$  es un  $\lambda$ -dendroide y  $f$  es confluyente, tenemos que  $Y$  es  $\lambda$ -dendroide, por [26, 7.24]. De lo anterior,  $Y$  es hereditariamente unicoherente y localmente conexo, es decir,  $Y$  es una dendrita. ■

**Teorema 1.50.** *Sean  $X_1 = A_1 \cup R_1$  y  $X_2 = A_2 \cup R_2$  tales que  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , donde  $X_i$  es la compactación de un rayo  $R_i$  con residuo un continuo localmente conexo  $A_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Además, sea  $x_i$  punto final del rayo  $R_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $f: X \rightarrow Y$  es confluyente entre continuos donde  $X = (X_1 \cup X_2)/\{x_1, x_2\}$  y  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces  $Y$  es localmente conexo.*

*Demostración.* Sea  $X = (X_1 \cup X_2)/\{x_1, x_2\}$  donde  $X_1 = A_1 \cup R_1$  y  $X_2 = A_2 \cup R_2$ . Como  $A_1$  y  $A_2$  son localmente conexos entonces  $A_1 \cup A_2$  es localmente conexo. Tenemos entonces que  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  es localmente conexo en  $Y$ , por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230]. Sean  $L_1$  y  $L_2$  las componentes de  $f^{-1}(f(A_1))$  y  $f^{-1}(f(A_2))$  tales que  $A_1 \subset L_1$  y  $A_2 \subset L_2$ . Observe que  $f(L_1)$  y  $f(L_2)$  son localmente conexos. Tenemos los siguientes casos:

1.  $A_1 \subsetneq L_1$  y  $A_2 \subsetneq L_2$ . Si  $X \setminus (L_1 \cup L_2) = \emptyset$ , entonces  $Y = f(L_1) \cup f(L_2)$ , de lo cual, tenemos que  $Y$  es localmente conexo. Ahora si  $X \setminus (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$ , entonces tenemos que  $Cl_X(X \setminus (L_1 \cup L_2))$  es un arco. Sea  $\alpha$  dicho arco. Por el Teorema 1.8,  $f(\alpha)$  es localmente conexo. Dado que  $f$  es sobreyectiva tenemos que  $Y = f(L_1) \cup f(L_2) \cup f(\alpha)$ . Así  $Y$  es localmente conexo, por [17, Teorema 5, Sección 2, pág. 257].
2.  $A_1 \subsetneq L_1$  y  $A_2 = L_2$  ó  $A_1 = L_1$  y  $A_2 \subsetneq L_2$ . Asumamos que  $A_1 \subsetneq L_1$  y  $A_2 = L_2$ . Supongamos que  $Y \setminus f(L_1 \cup L_2) = \emptyset$ . Como  $L_1$  es componente de  $f^{-1}(A_1)$  y  $f$  es una función confluyente, entonces  $f(L_1) = f(A_1)$  es localmente conexo, por [17, Teorema 5, Sección 2, pág. 257]. Por otra parte, como  $L_2 = A_2$  y  $A_2$  es localmente conexo, entonces  $f(L_2)$  es localmente conexo, por [17, Teorema 5, Sección 2, pág. 257]. Así, tenemos que  $Y = f(L_1 \cup L_2) = f(L_1) \cup f(L_2)$  es localmente conexo, por [17, Teorema 1, Sección 2, pág. 230]. Supongamos ahora que  $Y \setminus f(L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$ . Sea  $f(x_0) \in Y \setminus f(L_1 \cup L_2)$ . Por la normalidad de  $Y$ , existe un  $U$  abierto de  $Y$  tal que  $f(x_0) \in U$  y  $U \cap f(L_1 \cup L_2) = \emptyset$ . Sean  $a \in A_2$  y  $W$  un subcontinuo de  $Y$  tales que  $\{f(a), f(x_0)\} \subset W \subset Y$ ,  $W \cap U \neq \emptyset$ . Como  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación en  $f(a)$ , existe una sucesión de subcontinuos

arcoconexos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $Y$  tal que  $f(a) \in K_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = W$ . Así,  $K_n \cap U \neq \emptyset$  para toda  $n \geq n_0$ . Note que,  $K_{n_0} \cap U \neq \emptyset$ . Por otra parte,  $L_1 \cup L_2 \subsetneq X$ , de lo contrario, tendríamos que  $L_2 \subsetneq L_1$ , lo cual contradice que  $f$  sea una función confluyente. Así, existe  $x' \in X \setminus (L_1 \cup L_2)$  tal que  $f(x') = y_0$  y  $y_0 \in K_{n_0}$ . Definamos un arco  $\alpha$  en  $K_{n_0}$  que une los puntos  $f(a)$  con  $y_0$ . Sea  $B$  la componente de  $f^{-1}(\alpha)$  que contiene a  $a$ . Como  $f$  es confluyente,  $f(B) = \alpha$ . Sea  $w_0 \in B \cap f^{-1}(f(x'))$ . De lo anterior,  $f(w_0) = f(x') \in f(B)$  y  $A_2 \cap f^{-1}(f(x')) = \emptyset$ . Así,  $A_2 \subsetneq B$ , y obtenemos nuevamente el caso anterior, luego  $Y$  es localmente conexo. De la misma forma obtenemos que  $Y$  es localmente conexo cuando  $A_1 = L_1$  y  $A_2 \subsetneq L_2$ .

3.  $A_1 = L_1$  y  $A_2 = L_2$ . Utilizamos el argumento de la parte 2. fijando una de las dos condiciones y variando la otra, es sencillo concluir que  $Y$  es localmente conexo.

■

# CAPÍTULO 2

## HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

El estudio de los hiperespacios de continuos tiene su inicio a principios del siglo  $XX$  con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. En el presente capítulo mostraremos una topología para estos hiperespacios, llamada topología de Vietoris, además, probaremos que dicha topología es equivalente a la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Presentaremos propiedades importantes como la arcoconexidad de estos hiperespacios que fueron probadas por K. Borsuk y S. Mazurkiewicz en 1931 [11, pág. 259]. También mostraremos la equivalencia con la propiedad de conexidad local entre el espacio original y sus hiperespacios, esta propiedad fue estudiada por L. Vietoris y T. Wazewski en el año 1923 [11, pág. 259]. Esta condición de la conexidad local será de gran utilidad para el desarrollo de los objetivos planteados para este trabajo.

Además, estudiamos algunos resultados relacionados con la propiedad de arcoaproximación en hiperespacios de continuos. Para finalizar el capítulo, daremos definiciones, propiedades y ejemplos sobre las funciones inducidas de una función dada.

---

### 2.1. Hiperespacios

---

Dado un continuo podemos definir un hiperespacio utilizando elementos de su conjunto de partes que satisfacen alguna condición.

A continuación definiremos los hiperespacios de un continuo  $X$  que serán objeto de estudio en el presente trabajo.

**Definición 2.1.** Dado un continuo  $X$ , definimos:

1.  $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y diferente del vacío}\};$
2.  $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \text{ donde } n \in \mathbb{N};$

3.  $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ .

**Observación 2.2.** Para  $n = 1$  denotaremos por  $C_1(X)$  por  $C(X)$ . Note que  $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un subcontinuo de } X\}$ .

Dado un continuo  $X$ , en la siguiente sección demostraremos que  $2^X$  es un continuo y que los espacios  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$  son subcontinuos de  $2^X$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.1.1. Topología en hiperespacios

Sean  $X$  un continuo,  $A$  un subconjunto cerrado no vacío de  $X$  y  $\epsilon > 0$ . La bola abierta en  $X$  con centro  $A$  y radio  $\epsilon$ , que denotamos por  $N_d(A, \epsilon)$ , está definida por:

$$N_d(A, \epsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in A, d(x, a) < \epsilon\}.$$

Note que si  $A = \{a\}$ , entonces  $N_d(A, \epsilon) = B_d(a, \epsilon)$ . Una métrica que podemos definir en hiperespacios de continuos es la métrica de Hausdorff que definimos a continuación.

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un continuo. Definimos la función  $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$  como:

$$H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}.$$

A la función  $H$  se le conoce como la *métrica de Hausdorff*.

A continuación veremos que la función  $H$  descrita en la Definición 2.3, es realmente una métrica para el hiperespacio  $2^X$ .

**Teorema 2.4.** Sea  $X$  un continuo con métrica  $d$ , entonces  $(2^X, H)$  es un espacio métrico.

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  en  $2^X$ . Supongamos que  $A = B$ . Así,  $A \subset N_d(B, r)$  y  $B \subset N_d(A, r)$  para todo  $r > 0$ . Por lo tanto,  $H(A, B) = 0$ . Recíprocamente, tomemos  $H(A, B) = 0$ . Supongamos que existe  $b \in B \setminus A$ . Sea  $s = \min\{d(a, b) : a \in A\}$ . Como  $A$  es cerrado y  $b \notin A$ ,  $s > 0$ . Notemos que  $A \not\subset N_d(B, \frac{s}{2})$ . Así,  $H(A, B) \geq \frac{s}{2} > 0$ . Con lo que contradecimos que  $H(A, B) = 0$ . Por lo tanto,  $B \subset A$ . De la misma forma, vemos que  $A \subset B$  y, por consiguiente,  $A = B$ .

Por definición, es inmediato verificar la simetría de  $H$ ; es decir,  $H(A, B) = H(B, A)$ , para cualesquiera  $A$  y  $B$  en  $2^X$ .

Ahora veamos que  $H$  satisface la desigualdad triangular. Sean  $A, B$  y  $C$  en  $2^X$ . Veamos que  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$ . Sean  $\epsilon > 0$  y  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ . De la definición de  $H$  tenemos que:

1.  $A \subset N_d(B, H(A, B) + \delta)$ ;

$$2. B \subset N_d(C, H(B, C) + \delta).$$

Sea  $a \in A$ . Observemos que, por la condición 1., existe  $b \in B$  tal que  $d(a, b) < H(A, B) + \delta$ . Además, existe un  $c \in C$  tal que  $d(b, c) < H(B, C) + \delta$ , por 2. Como  $d$  es una métrica, entonces  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < H(A, B) + H(B, C) + \epsilon$ . Dado que  $a$  es un punto arbitrario de  $A$ , tenemos que:

$$A \subset N_d(C, H(A, B) + H(B, C) + \epsilon) \quad (2.1)$$

y, bajo el mismo argumento, mostramos que:

$$C \subset N_d(A, H(A, B) + H(B, C) + \epsilon). \quad (2.2)$$

Así, tenemos que  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C) + \epsilon$ , por (2.1) y (2.2). Como  $\epsilon$  fue arbitrario, podemos asegurar que  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$ . Por lo tanto,  $H$  satisface la desigualdad triangular y define una métrica para el hiperespacio  $2^X$ . ■

Para un continuo  $X$ , la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre  $2^X$  se puede describir mediante los abiertos de  $X$ , como mostraremos más adelante.

Dado un subconjunto  $A$  no vacío de un continuo  $X$  definimos:

- $\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$ ;
- $\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$ ;

Con el siguiente resultado podemos construir subconjuntos abiertos y cerrados del hiperespacio  $2^X$  a partir de subconjuntos de  $X$ .

**Lema 2.5.** *Sean  $X$  un continuo y  $U$  un subconjunto no vacío de  $X$ , entonces:*

1. *Si  $U$  es abierto entonces  $\Gamma(U)$  y  $\Lambda(U)$  son abiertos de la topología inducida por la métrica de Hausdorff en  $2^X$ .*
2. *Si  $E$  es cerrado entonces  $\Gamma(E)$  y  $\Lambda(E)$  son cerrados de la topología inducida por la métrica de Hausdorff en  $2^X$ .*

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo y  $U$  un abierto de  $X$ . Veamos primero que  $\Gamma(U)$  es abierto en  $2^X$ . Sea  $B \in \Gamma(U)$ . Como  $B \subset U$ , no es difícil ver que existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $N_d(B, \epsilon) \subset U$ . Sea  $C \in B_H(B, \epsilon)$ . Por definición, sabemos que  $C \subset N_d(B, \epsilon)$  y, como  $N_d(B, \epsilon) \subset U$  tenemos que  $C \subset U$ . Así,  $C \in \Gamma(U)$  y  $B_H(B, \epsilon) \subset \Gamma(U)$ . Hemos probado que  $\Gamma(U)$  es abierto en  $2^X$ .

Ahora veamos que  $\Lambda(U)$  es abierto en  $2^X$ . Sean  $B \in \Lambda(U)$  y  $x \in B \cap U$ . Como  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B_d(x, \epsilon) \subset U$ . Mostremos que

$B_H(B, \epsilon) \subset \Lambda(U)$ . Sea  $C \in B_H(B, \epsilon)$ . Claramente,  $B \subset N_d(C, \epsilon)$ . Dado que  $x \in B$ , existe  $y \in C$  tal que  $d(x, y) < \epsilon$ , es decir,  $y \in B_d(x, \epsilon) \subset U$ . Luego  $y \in C \cap U$  y entonces  $C \cap U \neq \emptyset$ . Tenemos que  $B_H(B, \epsilon) \subset \Lambda(U)$  y, por tanto,  $\Lambda(U)$  es abierto en  $2^X$ .

Probemos ahora la segunda parte del Lema. Sea  $U$  un subconjunto cerrado de  $X$ , veamos que  $\Gamma(U)$  es cerrado en  $2^X$ . Supongamos que existe un  $B \in \overline{\Gamma(U)}$  tal que  $B \notin \Gamma(U)$ . Es decir,  $B \not\subset U$ . Sea  $b \in B \setminus U$  tal que  $d(U, b) > 0$ , por la compacidad de  $U$ . Sea  $\epsilon = d(U, b)$ . Como  $B \in \overline{\Gamma(U)}$ , tenemos que  $B_H(B, \epsilon) \cap \Gamma(U) \neq \emptyset$ . Sea  $C \in B_H(B, \epsilon) \cap \Gamma(U) \neq \emptyset$ . Así,  $H(B, C) < \epsilon$  y  $C \subset U$ . Luego  $B \subset N_d(C, \epsilon)$ . Como  $b \in B$ , existe un  $c \in C$  tal que  $d(b, c) < \epsilon$  y  $c \in U$ . Así,  $d(U, b) \leq d(b, c)$  y  $d(U, b) < \epsilon$ , lo cual contradice lo supuesto. Por lo tanto,  $\overline{\Gamma(U)} \subset \Gamma(U)$  y así,  $\Gamma(U)$  es cerrado.

Por otra parte, probemos que  $\Lambda(U)$  es cerrado en  $2^X$  donde  $U$  es un subconjunto cerrado de  $X$ . Dado que  $U$  es un subconjunto cerrado de  $2^X$ ,  $X \setminus U$  es un subconjunto abierto de  $2^X$ , de lo cual tenemos que  $\Gamma(X \setminus U)$  es un subconjunto abierto de  $2^X$ , por la primera parte del lema. Note que  $\Lambda(U) = 2^X \setminus \Gamma(X \setminus U)$  es un subconjunto cerrado de  $2^X$ . ■

Sean  $X$  un continuo y  $U_1, U_2, \dots, U_n$  subconjuntos de  $X$ . Definimos:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

**Observación 2.6.** Note que dados un continuo  $X$  y subconjuntos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

1.  $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \Gamma(\cup_{i=1}^n U_i) \cap (\cap_{i=1}^n \Lambda(U_i))$ ;
2. para cada subconjunto  $A$  no vacío de  $X$ ,  $\Gamma(A) = \langle A \rangle$ ;
3. para cada subconjunto  $A$  no vacío de  $X$ ,  $\Lambda(A) = \langle A, X \rangle$ .

Con el siguiente resultado construimos una topología para el hiperespacio  $2^X$  usando los abiertos de  $X$ .

**Teorema 2.7.** Sean  $X$  y  $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es abierto en } X, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es base para alguna topología del hiperespacio  $2^X$ .

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo y  $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es abierto en } X, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ . Note que  $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$ . Así,  $2^X = \bigcup \mathcal{B}$ .

Sean  $\mathcal{D} = \langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle$  y  $\mathcal{E} = \langle W_1, W_2, \dots, W_l \rangle$  en  $\mathcal{B}$  tales que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ . Sean  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$  y  $W = \bigcup_{i=1}^l W_i$ . No es difícil ver que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \langle U_1, \dots, U_{k+l} \rangle$ , donde  $U_i = V \cap W_i$  para  $1 \leq i \leq l$  y  $U_i = W \cap V_{i-l}$  para  $l+1 \leq i \leq k+l$ . Así,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} \in \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}$  es una base. ■

**Definición 2.8.** La topología generada por la base  $\mathcal{B}$  definida en el teorema anterior, la denotaremos por  $\tau_v$ , y es conocida como *topología de Vietoris*.

A continuación describimos una subbase de la topología  $\tau_v$  del hiperespacio  $2^X$  [27, Teorema 4.5]. La demostración es inmediata usando la Observación 2.6 parte 1.

**Teorema 2.9.** *Sea  $X$  un continuo. El conjunto  $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U \text{ es un abierto en } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es abierto en } X\}$  es una subbase para la topología de Vietoris.*

La proposición siguiente es conocida en la teoría de continuos y relaciona la métrica de Hausdorff con la topología de Vietoris, la demostración que presentamos la tomamos de [16, Teorema 3.2].

**Proposición 2.10.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces en  $2^X$  la topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff son equivalentes.*

*Demostración.* Denotemos por  $\tau_H$  la topología generada por la métrica de Hausdorff. Veamos que  $\tau_v = \tau_H$ .

Probemos primero que  $\tau_v \subset \tau_H$ . Sea  $U \in \tau_v$ . Como  $X \in \tau_H$ , supongamos que  $U \neq X$ . Sean  $A \in \langle U \rangle$  y  $\epsilon = \inf\{d(a, x) : a \in A \text{ y } x \in X \setminus U\}$ . Como  $A$  y  $X \setminus U$  son compactos disyuntos, tenemos que  $\epsilon > 0$ . Sea  $B \in B_H(A, \epsilon)$ . Así,  $B \subset N_d(A, \epsilon)$  y  $N_d(A, \epsilon) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ . Luego  $B \subset U$  y  $B \in \langle U \rangle$ . Con lo que concluimos que  $\langle U \rangle \in \tau_H$ . Del Lema 2.5 y del Teorema 2.9 se sigue que  $\tau_v \subset \tau_H$ .

Ahora veamos que  $\langle U, X \rangle \in \tau_H$ . Sea  $A \in \langle U, X \rangle$ . Por definición  $A \cap U \neq \emptyset$ . Sea  $p \in A \cap U$ . Como  $p \in U$  y  $U \in \tau_H$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $N_d(\{p\}, \delta) \subset U$ . Probemos que  $B_H(A, \delta) \subset \langle U, X \rangle$ . Sea  $B \in B_H(A, \delta)$ . Así,  $H(A, B) < \delta$  y  $A \subset N_d(B, \delta)$ . Dado que  $p \in A$ , existe un  $b \in B$  tal que  $d(b, p) < \delta$ . De lo que se sigue que  $b \in U$ . De esta forma  $B \cap U \neq \emptyset$  y  $B \in \langle U, X \rangle$ . Esto prueba que  $B_H(A, \delta) \subset \langle U, X \rangle$ . Así,  $\langle U, X \rangle \in \tau_H$  y  $\tau_v \subset \tau_H$ .

Veamos ahora que  $\tau_H \subset \tau_v$ . Probaremos que para cada bola abierta  $B_H(A, r)$  existe una cantidad finita de abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$  tales que  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset B_H(A, r)$ .

Sean  $A \in 2^X$  y  $r > 0$ . Como  $A$  es compacto y  $A \neq \emptyset$ , no es difícil construir abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$  tales que:

1.  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ ;
2.  $A \cap U_i \neq \emptyset$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\text{diám}(U_i) < r$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

Así, tenemos de 1. y 2. que  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ . Veamos que  $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset B_H(A, r)$ . Sea  $K \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ . Luego  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$  y  $K \cap U_i \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $\text{diám}(U_i) < r$  para cada  $i$ , tenemos que  $A \subset N_d(K, r)$  y  $K \subset N_d(A, r)$ . Así,  $H(A, K) < r$  y  $K \in B_H(A, r)$ . Por lo que concluimos que  $\tau_H \subset \tau_v$ . De lo anterior tenemos que  $\tau_H$  y  $\tau_v$  son topologías equivalentes para  $2^X$ . ■

Una prueba del lema siguiente puede consultarse en [13, Teorema 8.1.8].

**Lema 2.11** (Alexander). *Un espacio  $X$  es compacto si y sólo si cualquier cubierta con elementos de una subbase de  $X$  tiene una subcubierta finita.*

Con el siguiente resultado mostramos que el espacio  $2^X$  es un compacto. La prueba que presentamos la tomamos de [27, Teorema 4.13].

**Teorema 2.12.** *Si  $X$  es un espacio compacto entonces  $2^X$  es compacto.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{S}$  la subbase definida en el Teorema 2.9. Sea  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$  tal que  $2^X = \bigcup \mathcal{P}$  donde  $\mathcal{P} = \{\Gamma(U_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{\Lambda(V_\beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$ . Consideremos los dos siguientes casos:

1.  $2^X = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \Lambda(V_\beta)$ . Si  $x \in X$ , entonces  $\{x\} \in \Lambda(V_{\beta_0})$  para algún  $\beta_0 \in \beta$ . Así,  $\{x\} \subset V_{\beta_0}$  y  $X = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} V_\beta$ . Como  $X$  es compacto, existe  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathcal{B}$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^n V_{\beta_i}$ . No es difícil ver que  $2^X = \bigcup_{i=1}^n \Lambda(V_{\beta_i})$ .
2.  $2^X \neq \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \Lambda(V_\beta)$ . Así, existe  $B \in 2^X$  tal que  $B \cap V_\beta = \emptyset$ , para todo  $\beta \in \mathcal{B}$ . Sea  $Y = X \setminus \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} V_\beta$ . Como  $Y \in 2^X$  y  $\mathcal{P}$  es una cubierta de  $2^X$ , existe  $\alpha_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $Y \in \Gamma(U_{\alpha_0})$ . Observemos que  $2^X = \Gamma(U_{\alpha_0}) \cup \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \Lambda(V_\beta)$ . Además notemos que  $X = U_{\alpha_0} \cup (\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} V_\beta)$ . Como  $X$  es compacto, existe  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathcal{B}$  tal que  $X = U_{\alpha_0} \cup V_{\beta_1} \cup \dots \cup V_{\beta_n}$ . Note que como  $\bigcup_{i=1}^n \Lambda(V_{\beta_i})$  no cubre a  $X$ , la cubierta finita debe contener el abierto  $U_{\alpha_0}$ . Finalmente es fácil ver que  $2^X = \Gamma(U_{\alpha_0}) \cup (\bigcup_{i=1}^n \Lambda(V_{\beta_i}))$ .

En cualquier caso tenemos que  $2^X$  es compacto, por el Lema 2.11. ■

**Teorema 2.13.** *Si  $X$  es un continuo entonces  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$  son compactos, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in 2^X \setminus C_n(X)$ . Como  $A \notin C_n(X)$ , existen  $A_1, A_2, \dots, A_m$  componentes de  $A$ , con  $m > n$ , tales que  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ . Como  $X$  es normal, existen  $U_1, U_2, \dots, U_m$  abiertos disjuntos dos a dos de  $X$  tales que  $A_i \subset U_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Es claro que  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle$  y  $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle \cap C_n(X) = \emptyset$ . Así,  $C_n(X)$  es cerrado en  $2^X$  y por tanto, compacto.

Con el mismo argumento podemos probar que  $F_n(X)$  es compacto. ■

### 2.1.2. Arcos en hiperespacios

**Definición 2.14.** Sean  $X$  un continuo y  $A, B \in 2^X$  tales que  $A \subsetneq B$ . Una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$  es un *arco de orden* de  $A$  a  $B$  en  $2^X$  si cumple:

1.  $\alpha(0) = A$  y  $\alpha(1) = B$ ;
2. Si  $t, s \in [0, 1]$  son tales que  $t < s$ , entonces  $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$ .

El siguiente resultado es de gran importancia debido que garantiza la existencia de arcos de orden en hiperespacios. Una prueba de este puede consultarse en [28, Teorema 1.8].

**Teorema 2.15.** *Sean  $X$  un continuo,  $A$  y  $B \in 2^X$  tales que  $A \subsetneq B$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Existe un arco de orden de  $A$  a  $B$  en  $2^X$ ;
2. para cada componente  $C$  de  $B$ ,  $C \cap A \neq \emptyset$ .

**Observación 2.16.** *Es importante tener en cuenta que si  $A$  y  $B$  son puntos de  $C_n(X)$  y existe un arco de orden de  $A$  a  $B$ , entonces este arco está contenido en  $C_n(X)$ . Esta afirmación es consecuencia de la Definición 2.14 y del Teorema 2.15.*

Como consecuencia del Teorema 2.15 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.17.** *Si  $X$  es un continuo, entonces  $2^X$  es arcoconexo.*

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo y  $A \in 2^X$  tal que  $A \neq X$ . Entonces existe un arco de  $A$  a  $X$  en  $2^X$ , por el Teorema 2.15. Así, cada elemento de  $2^X \setminus \{X\}$ , se puede conectar mediante un arco con  $X$ . Por lo tanto,  $2^X$  es arcoconexo. ■

El siguiente resultado es uno de los más importantes de la presente sección.

**Teorema 2.18.** *Dado un continuo  $X$ , el hiperespacio  $2^X$  es un continuo.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo. Entonces  $2^X$  es un espacio métrico y compacto, por los Teoremas 2.4 y 2.12. Además, por el Teorema 2.17, tenemos que  $2^X$  es conexo. Por lo tanto,  $2^X$  es un continuo. ■

Dado un continuo  $X$ , como el conjunto  $C_n(X)$  es un subespacio de  $2^X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos como resultado el siguiente corolario.

**Corolario 2.19.** *Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . El hiperespacio  $C_n(X)$  es un continuo.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo. Sabemos que  $C_n(X)$  es un subespacio compacto del espacio métrico  $2^X$ , por el Teorema 2.13. Luego, sólo nos resta probar que  $C_n(X)$  es conexo. Sea  $A$  en  $C_n(X)$  tal que  $A \neq X$ . Entonces existe un arco de orden de  $A$  a  $X$  en  $C_n(X)$ , por el Teorema 2.15 y la Observación 2.16. Así, cada elemento de  $C_n(X) \setminus \{X\}$ , se puede conectar mediante un arco con  $X$ . Luego  $C_n(X)$  es arcoconexo. Así,  $C_n(X)$  es conexo. Por lo tanto,  $C_n(X)$  es un continuo. ■

Tal como hemos mostrado, dado un continuo  $X$  podemos definir la familia de sus subconjuntos cerrados no vacíos, es decir  $2^X$ . De igual manera dado que  $2^X$  es un continuo, la familia de sus subconjuntos cerrados no vacíos la denotaremos por  $2^{2^X}$ , el cual es un continuo con la topología inducida por la métrica de Hausdorff dada para  $2^X$ .

**Definición 2.20.** Sea  $X$  un continuo. Denotaremos por  $2^{2^X}$  al hiperespacio de  $2^X$  definido como  $2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado en } 2^X \text{ y } \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ . La *bola abierta* en  $2^X$  con centro en  $\mathcal{A}$  y radio  $\epsilon > 0$ , donde  $\mathcal{A}$  es un subconjunto de  $2^X$ , la denotamos por  $N_H(\mathcal{A}, \epsilon)$  y está definida como  $N_H(\mathcal{A}, \epsilon) = \{A \in 2^X : \text{existe } B \in \mathcal{A}, H(B, A) < \epsilon\}$ . La métrica de Hausdorff definida para  $2^{2^X}$  la denotaremos por  $\mathbf{H}$ . Así,  $\mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\epsilon > 0 : \mathcal{A} \subset N_H(\mathcal{B}, \epsilon), \text{ y } \mathcal{B} \subset N_H(\mathcal{A}, \epsilon)\}$ .

Dado un continuo  $X$ , definiremos a continuación una función entre los hiperespacios  $2^{2^X}$  y  $2^X$  conocida como la *función unión*.

**Definición 2.21.** Sea  $X$  un continuo. Sea  $\bigcup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$  la función *unión* definida por  $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$  para cada  $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ .

**Observación 2.22.** Note que dados un continuo  $X$  y un subconjunto cerrado y no vacío  $\mathcal{A}$  de  $2^X$  tenemos que  $\bigcup \mathcal{A}$  es diferente de vacío. Sea  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $\bigcup \mathcal{A}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Entonces existe  $A_n \in \mathcal{A}$  tal que  $x_n \in A_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathcal{A}$  es compacto, existe una subsucesión  $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A$  para algún  $A \in \mathcal{A}$ . Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$  y  $x_{n_k} \in A_{n_k}$ ,  $x \in A$ . Lo cual implica que  $\bigcup \mathcal{A}$  es cerrado en  $X$ . Por lo tanto  $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$ . Así, tenemos que la función unión está bien definida.

La demostración del siguiente resultado la tomamos de [28, Lema 1.48].

**Teorema 2.23.** *Dado un continuo  $X$ , la función unión  $\bigcup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$  es continua.*

*Demostración.* Para probar que la función unión es continua, probaremos que la función es uniformemente continua. Sea  $X$  un continuo,  $H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  para cualesquiera  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $2^{2^X}$ . Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$  y  $\epsilon > 0$  dado, tales que  $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$ . Luego,  $\mathcal{A} \subset N_H(\mathcal{B}, \epsilon)$  y  $\mathcal{B} \subset N_H(\mathcal{A}, \epsilon)$ . Tenemos que si  $a \in \bigcup \mathcal{A}$ , entonces existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $a \in A$ . Así, existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $H(A, B) < \epsilon$ . Luego, existe un  $b \in B$  tal que  $d(a, b) < \epsilon$ . Tenemos que  $a \in N_d(\bigcup \mathcal{B}, \epsilon)$  y así,  $\bigcup \mathcal{A} \subset N_d(\bigcup \mathcal{B}, \epsilon)$ . Análogamente probamos que  $\bigcup \mathcal{B} \subset N_d(\bigcup \mathcal{A}, \epsilon)$ . Entonces tenemos  $H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) < \epsilon$  y como  $\epsilon$  fue arbitrario, tenemos que  $H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . ■

El siguiente lema nos será de mucha utilidad en este trabajo, la demostración que mostramos a continuación fue tomada de [15, Lema 3.1].

**Lema 2.24.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $\mathcal{A}$  es un subcontinuo de  $2^X$  y  $A \in \mathcal{A}$ , entonces cada componente de  $\bigcup \mathcal{A}$  interseca a  $A$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{A}$  un subcontinuo de  $2^X$  y  $A \in \mathcal{A}$ . Sabemos que  $\bigcup \mathcal{A}$  es compacto y que  $A \subset \bigcup \mathcal{A}$ . Supongamos que existe una componente  $C$  de  $\bigcup \mathcal{A}$  tal que  $C \cap A = \emptyset$ . Entonces  $\bigcup \mathcal{A} = D \cup E$ , donde  $D$  y  $E$  son cerrados disyuntos en  $X$ , tales que  $A \subset D$  y  $C \subset E$ , por el Teorema 1.20. Si definimos  $\mathcal{D} = \langle D \rangle \cap \mathcal{A}$  y  $\mathcal{E} = \langle E, X \rangle \cap \mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  son cerrados disyuntos en  $2^X$ , por el Lema 2.5, y  $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ , lo cual contradice la conexidad de  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto, cada componente de  $\bigcup \mathcal{A}$  interseca a  $A$ . ■

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del Lema 2.24.

**Corolario 2.25.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo de  $2^X$  y  $\mathcal{K} \cap C_n(X) \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup \mathcal{K} \in C_n(X)$ . En particular, si  $\mathcal{A}$  es un subcontinuo de  $C(X)$  entonces  $\bigcup \mathcal{A}$  es un subcontinuo de  $X$ .

Con la siguiente proposición mostramos la conexidad de un subconjunto particular de  $2^X$ . La prueba la tomamos de [1, Proposición 1.49].

**Proposición 2.26.** Sean  $X$  un continuo y  $K_1, K_2, \dots, K_n$  subcontinuos de  $X$ . Entonces  $\langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$  es un subconjunto arcoconexo de  $2^X$ .

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo y  $K_1, K_2, \dots, K_n$  subcontinuos de  $X$ . Note que si  $K_i$  es un punto para cada  $1 \leq i \leq n$ , tenemos que  $\langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle = \bigcup_{i=1}^n K_i$  es degenerado en  $2^X$ . Supongamos que algún  $K_i$  no es degenerado. Entonces  $\langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$  es un subconjunto no degenerado de  $2^X$  y  $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$ . Sea  $K \in \langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle \setminus \{\bigcup_{i=1}^n K_i\}$ , entonces  $K \subsetneq \bigcup_{i=1}^n K_i$ . Como  $K \cap K_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se tiene que cada componente de  $\bigcup_{i=1}^n K_i$  intersecta a  $K$ . Entonces existe un arco de orden  $\alpha$  en  $2^X$  de  $K$  a  $\bigcup_{i=1}^n K_i$ , por el Teorema 2.15. Así,  $\alpha \subset \langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$ . Por lo tanto, todo elemento de  $K \in \langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle \setminus \{\bigcup_{i=1}^n K_i\}$ , se puede unir mediante un arco con  $\bigcup_{i=1}^n K_i$ . Luego tenemos que  $\langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$  es arcoconexo en  $2^X$ . ■

Con el siguiente teorema mostramos las relaciones existentes entre la conexidad local de un continuo y sus hiperespacios. La prueba de este resultado esta tomada de [1, Teorema 1.53] y [23, Teorema 6.1.4].

**Teorema 2.27.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1.  $X$  es localmente conexo;
2.  $C_n(X)$  es localmente conexo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $2^X$  es localmente conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es localmente conexo y probemos que  $2^X$  también lo es. Para ver esto, basta probar que  $2^X$  es conexo en pequeño, por la Proposición 1.11. Sean  $A \in 2^X$  y  $\mathcal{U}$  un abierto en  $2^X$  tal que  $A \in \mathcal{U}$ . Entonces existen subconjuntos abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  en  $X$  tales que  $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$ , por el Teorema 2.7. Sea  $x \in A$ . Luego existe un  $U_k$  con  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $x \in U_k$ . Como  $X$  es un espacio normal, tenemos que existe un  $V_k$  abierto de  $X$ , tal que  $x \in V_k \subset Cl_X(V_k) \subset U_k$ . Como  $A$  es compacto, existen además abiertos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  en  $X$  tales que  $A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$  y  $Cl_X(V_i) \subset U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea  $a \in A$ . Entonces  $a \in V_j$ , para alguna  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sea  $C_a$  la componente de  $V_j$  tal que  $a \in C_a$ . Así,  $A \subset \bigcup \{C_a \mid a \in A\}$ . Tenemos que  $C_a$  es abierto en  $X$  para cada  $a \in A$ , por el Teorema 1.9. Como  $A$  es compacto, entonces existen  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ,

tales que  $A \subset \bigcup_{i=1}^m C_{a_i}$ . Note que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $C_{a_i} \subset Cl_X(C_{a_i}) \subset U_j$ , para alguna  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Además, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tenemos que  $A \cap V_i \neq \emptyset$ . Sean  $x_i \in A \cap V_i$  y  $C_{x_i}$  la componente de  $V_i$ , tales que  $x_i \in C_{x_i}$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Note que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $C_{x_i} \subset Cl_X(C_{x_i}) \subset U_i$ .

Definamos  $J_i = \{k \in \{1, 2, \dots, m\} \mid C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}$  y sea  $W_i = C_{x_i} \cup (\bigcup_{k \in J_i} C_{a_k})$ . Tenemos que  $W_i$  es conexo y abierto en  $X$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Así,  $\langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle$  es un abierto en  $2^X$ , y  $A \in \langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle$ . Luego,  $A \in \langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle \subset \langle Cl_X(W_1), Cl_X(W_2), \dots, Cl_X(W_n) \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ .

Note que la componente  $C_{x_i}$  es no degenerada. Así,  $Cl_X(W_i)$  es un subcontinuo no degenerado para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Tenemos que  $\langle Cl_X(W_1), Cl_X(W_2), \dots, Cl_X(W_n) \rangle$  es un conjunto conexo, por la Proposición 2.26, tal que  $A \in Int_{2^X} \langle Cl_X(W_1), Cl_X(W_2), \dots, Cl_X(W_n) \rangle \subset \mathcal{U}$  y  $\langle Cl_X(W_1), Cl_X(W_2), \dots, Cl_X(W_n) \rangle \subset \mathcal{U}$ . Esto prueba que  $2^X$  es conexo en pequeño.

Ahora probemos que si  $2^X$  es localmente conexo entonces  $X$  es localmente conexo. Sean  $p \in X$  y  $U$  un abierto en  $X$  tal que  $p \in U$ . Tenemos que  $\{p\} \in \langle U \rangle$ . Notemos que  $\langle U \rangle$  es un abierto en  $2^X$ . Sea  $\mathcal{W}$  un conjunto abierto en  $2^X$  tal que  $\{p\} \in \mathcal{W} \subset Cl_{2^X}(\mathcal{W}) \subset \langle U \rangle$ . Como  $2^X$  es localmente conexo, existe un conjunto conexo y abierto  $\mathcal{V}$  en  $2^X$  tal que  $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ . Así, existen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  conjuntos abiertos en  $X$ , por el Teorema 2.7, tales que  $\{p\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$ . Entonces existen conjuntos abiertos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  en  $X$  tales que  $\{p\} \in \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$  y  $Cl_X(V_i) \subset U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , por la normalidad de  $X$ . Así,  $\bigcup_{i=1}^n Cl_X(V_i) \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ . Como  $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{V} \subset Cl_{2^X}(\mathcal{V}) \subset \langle U \rangle$ , se tiene que  $\bigcup_{i=1}^n Cl_X(V_i) \subset \bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{V}) \subset U$ . Dado que  $\{p\} \in Cl_{2^X}(\mathcal{V}) \cap C(X)$ ,  $Cl_{2^X}(\mathcal{V}) \cap C(X) \neq \emptyset$ . Como  $Cl_{2^X}(\mathcal{V})$  es un subcontinuo de  $2^X$ , entonces  $\bigcup Cl_{2^X}(\mathcal{V})$  es un subcontinuo de  $X$ , por el Corolario 2.25. Tomemos  $V = \bigcup Cl_{2^X} \mathcal{V}$ . Por lo tanto, tenemos que  $p \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset V \subset U$ . Como  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces  $p \in Int_X(V) \subset V \subset U$ . Luego  $X$  es conexo en pequeño y, por la Proposición 1.11, tenemos que  $X$  es localmente conexo. Por lo tanto, tenemos que  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $2^X$  es localmente conexo.

Por otra parte, sea  $X$  un continuo localmente conexo. Tenemos que  $C_n(X)$  es un retracto absoluto, por [28, Teorema 10.8]. Por lo tanto  $C_n(X)$  es localmente conexo para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos ahora que  $C_n(X)$  es localmente conexo, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , y veamos que  $X$  es localmente conexo. Sean  $x \in X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $x \in U$ . Como  $C_n(X)$  es localmente conexo para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un subconjunto abierto conexo  $\mathcal{V}$  de  $C_n(X)$ , tal que  $\{x\} \in \mathcal{V} \subset Cl_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \langle U \rangle \cap C_n(X)$ . Sea  $\langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle \cap C_n(X)$  un abierto básico de  $C_n(X)$  tal que  $\{x\} \in \langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle \cap C_n(X) \subset \mathcal{V}$ . Definamos  $V = \bigcap_{i=1}^k V_i$ . Sea  $y \in V$ , entonces  $y \in \bigcup Cl_{C_n(X)}(\mathcal{V})$ . Como  $\{x\} \in Cl_{C_n(X)}(\mathcal{V})$ , tenemos que  $\bigcup Cl_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \in C(X)$ , por el Corolario 2.25. Así,  $x$  y  $y$  pertenecen a  $\bigcup Cl_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset U$ . Por lo tanto,  $X$  es conexo en pequeño en  $x$ . Como la elección de  $x$  fue arbitraria, entonces  $X$  es localmente conexo. ■

A continuación, mostraremos que dados un continuo  $X$  y un entero positivo  $n$ , entonces el hiperespacio  $F_n(X)$  es nuevamente un continuo. Para esto, Borsuk y Ulam en [2, pág. 877], definieron  $\chi: X^n \rightarrow F_n(X)$  por  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Además, demostraron que  $\chi$  es una función continua y sobreyectiva (una prueba de esto se puede ver en [23, Lema 1.8.6]). De lo anterior, es inmediata la prueba del siguiente resultado.

**Teorema 2.28.** *Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $F_n(X)$  es un continuo.*

El siguiente resultado nos muestra la relación entre la conexidad local de  $X$  y su hiperespacio  $F_n(X)$ . La prueba que presentamos puede consultarse en [20, Lema 2].

**Teorema 2.29.** *Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $F_n(X)$  es localmente conexo.*

*Demostración.* Sean  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  es localmente conexo, entonces fácilmente se sigue que  $F_n(X)$  es localmente conexo, pues  $X^n$  es localmente conexo y  $F_n(X)$  es la imagen continua de  $X^n$ , por el Teorema 1.8.

Veamos ahora que si  $F_n(X)$  es localmente conexo entonces  $X$  también lo es. Sean  $x_0 \in X$  y  $U$  un abierto de  $X$  tal que  $x_0 \in U$ . Como  $F_n(X)$  es localmente conexo, existe un abierto conexo  $\mathcal{W}$  de  $F_n(X)$  tal que  $\{x_0\} \in \mathcal{W} \subset Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W}) \subset \langle U \rangle \cap F_n(X)$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $B_H(\{x_0\}, \epsilon)$  en  $F_n(X)$ , tal que  $B_H(\{x_0\}, \epsilon) \cap F_1(X) \subset \mathcal{W} \cap F_1(X)$ .

Dado que  $Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W})$  es un subcontinuo de  $2^X$  y  $Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W}) \cap C(X) \neq \emptyset$ , tenemos que  $\cup Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W})$  es un subcontinuo de  $X$ , por Corolario 2.25. De otra manera, dado que  $Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W}) \subset \langle U \rangle \cap F_n(X)$ , tenemos que  $\cup Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W}) \subset U$ . Sea  $x \in B_d(x_0, \epsilon)$ , entonces  $\{x\} \in B_H(\{x_0\}, \epsilon) \cap F_1(X) \subset \mathcal{W} \cap F_1(X)$ . Luego,  $x \in \cup Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W})$ . Además,  $B_d(x_0, \epsilon) \subset \cup Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W})$ , donde  $\cup Cl_{F_n(X)}(\mathcal{W})$  es una vecindad conexa de  $x_0$  contenida en  $U$ . Así,  $X$  es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo, por la Proposición 1.11. ■

Como mencionamos en el Teorema 1.41 todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de arcoaproximación, luego del Teorema 2.27 es natural la siguiente pregunta planteada como el Problema 3.23 de [9]. Es importante resaltar que no conocemos ninguna respuesta parcial de esta pregunta.

**Pregunta 2.30.** *Dado un continuo  $X$ , cuáles implicaciones se tienen entre los siguientes tres enunciados:*

1.  $X$  tiene la propiedad de arcoaproximación;
2.  $2^X$  tiene la propiedad de arcoaproximación;
3.  $C_n(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación, para  $n \in \mathbb{N}$ .

Con el siguiente resultado mostramos una condición para que el hiperespacio de subcontinuos  $C(X)$  tenga la propiedad de arcoaproximación. La prueba de este resultado está tomada de [9, Teorema 3.48].

**Teorema 2.31.** *Sea  $X$  un continuo tal que para cada punto  $p \in X$  existen una sucesión de subcontinuos  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ , con  $X_n \subset X$ , y una sucesión de retracciones  $r_n : X \rightarrow X_n$  tales que:*

1.  $p \in X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = x$ , para cada  $x \in X$ ;
3.  $C(X_n)$  tiene la propiedad de arcoaproximación para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Entonces  $C(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación.*

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo,  $\mathcal{K}$  un subcontinuo de  $C(X)$  y  $K \in \mathcal{K}$ . Tomemos  $p \in K$ . Entonces existen una sucesión de subcontinuos  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  de  $X$  y una sucesión de retracciones  $r_n : X \rightarrow X_n$  que satisfacen 1., 2. y 3. Veamos que existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos en  $C(X)$  tales que contienen a  $K$  y se aproximan a  $\mathcal{K}$ . Definamos  $K_n = r_n(K)$  y  $\mathcal{K}_n = C(r_n)(\mathcal{K})$ , donde  $C(r_n)$  es la función inducida por  $r_n$  (ver Definición 2.42), para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $C(X_n)$  tiene la propiedad de arcoaproximación para toda  $n \in \mathbb{N}$ , existe una sucesión de subcontinuos arcoconexos  $\{\mathcal{L}_{n,m}\}_{m=1}^\infty$  en  $C(X_n)$  que contienen a  $K_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n,m} = \mathcal{K}_n$ . Entonces de 2. tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$ .

Como  $p \in K_n \cap K \neq \emptyset$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n \cap K \neq \emptyset$ , entonces existen un arco de orden de  $K_n$  a  $K_n \cup K$  y un arco de orden de  $K$  a  $K_n \cup K$ . Así, definimos un arco  $\mathcal{E}_n$  en  $C(X_n)$  de  $K_n$  a  $K$ . Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n = \{K\}$ , por 2. Entonces para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{N}$ , la unión  $\mathcal{L}_{n,m} \cup \mathcal{E}_n$  es un continuo arcoconexo que contiene a  $K$ . Como  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n,m} = \mathcal{K}_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n = \{K\}$ , tenemos que  $\mathcal{K}$  es arcoaproximado en  $K$ . Así,  $C(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación. ■

El siguiente resultado es el Corolario 3.58 de [9].

**Teorema 2.32.** Si  $X$  es un dendroide suave, entonces  $C(X)$  tiene la propiedad de arco aproximación.

*Demostración.* Sea  $X$  un dendroide suave en  $v$ , para algún  $v \in X$ . Sea  $p$  un punto arbitrario de  $X$ . Así, existen una sucesión de árboles  $X_n \subset X_{n+1} \subset X$ , con  $v, p \in X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y una sucesión de retracciones  $r_n : X \rightarrow X_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = x$ , para cada punto  $x \in X$ , por el Teorema 1.47. Como cada  $X_n$  es localmente conexo, tenemos que  $C(X_n)$  es localmente conexo, por el Teorema 2.27. Así,  $C_n(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación, por el Teorema 1.41. Luego se satisfacen las condiciones del Teorema 2.31 y, por tanto,  $C(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación. ■

**Pregunta 2.33.** Sean  $X$  un dendroide suave y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $C_n(X)$  tiene la propiedad de arcoaproximación.

### 2.1.3. El hiperespacio $HS_n(X)$

A continuación definiremos una clase de funciones llamadas funciones de Whitney. Este tipo de funciones son una herramienta de gran utilidad para el estudio de los hiperespacios ya que de alguna manera nos permite comparar los elementos de un hiperespacio.

**Definición 2.34.** Sea  $X$  un continuo. Una *función de Whitney* para  $2^X$  (respectivamente, para  $C_n(X)$ ), es una función continua  $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$  (respectivamente,  $\mu : C_n(X) \rightarrow [0, 1]$ ) tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada  $A, B \in 2^X$  (respectivamente  $A, B \in C_n(X)$ ), donde  $A \subsetneq B$ , tenemos que  $\mu(A) < \mu(B)$ .
2.  $\mu(A) = 0$  si y sólo si  $A \in F_1(X)$ .

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [16, Teorema 13.4].

**Teorema 2.35.** Si  $X$  es un continuo y  $\mathcal{H}$  un elemento de  $\{2^X, C_n(X)\}$ , entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio  $\mathcal{H}$  de  $X$ .

En el artículo “*On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua*” [21], el profesor Sergio Macías define y estudia propiedades del  *$n$ -ésimo hiperespacio de suspensión* de un continuo  $X$ , que denota por  $HS_n(X)$ , y definimos a continuación.

**Definición 2.36.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el  *$n$ -ésimo hiperespacio de suspensión* de  $X$ , que denotaremos por  $HS_n(X)$ , como el espacio:

$$HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X),$$

con la topología cociente. Denotaremos  $HS(X)$  en lugar de  $HS_1(X)$ .

Dado un continuo  $X$ , denotamos la función cociente  $q_X^n : C_n(X) \rightarrow HS_n(X)$  y  $F_X^n$  al punto  $q_X^n(F_n(X))$  en  $HS_n(X)$ . Observemos que como  $F_n(X)$  es cerrado en  $C_n(X)$ , tenemos que  $HS_n(X)$  es un continuo para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por [27, Teorema 5.1].

La siguiente observación simple nos será de gran utilidad en las pruebas donde involucramos el hiperespacio  $HS_n(X)$ .

**Observación 2.37.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la función  $q_X^n|_{C_n(X) \setminus F_n(X)}$  es un homeomorfismo entre  $C_n(X) \setminus F_n(X)$  y  $HS_n(X) \setminus \{F_X^n\}$ .

A continuación, enunciaremos algunos resultados relacionados con la conexidad local de  $HS_n(X)$ . La primera parte del siguiente resultado es el Ejercicio 1.208.2 de [28], el resto de la prueba la tomamos de [21, Teorema 5.1].

**Lema 2.38.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $C_n(X) \setminus F_n(X)$  es localmente conexo, entonces  $X$  es localmente conexo.

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo. Veamos primero que si  $C(X) \setminus F_1(X)$  es localmente conexo, entonces  $X$  es localmente conexo. Sea  $x \in X$ . Mostremos que  $X$  es conexo en pequeño en  $x$ . Sea  $U$  un abierto de  $X$  tal que  $x \in U$ . Como  $X$  es normal, existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subset Cl_X(V) \subset U$ . Por el Corolario 1.22, existe un subcontinuo  $W$  de  $X$  tal que  $x \in W \subset V$  y  $W \neq \{x\}$ . Note que  $W \in (C(X) \setminus F_1(X)) \cap \langle V \rangle$ . Sea  $\mathcal{B} = (C(X) \setminus F_1(X)) \cap \langle V \rangle$ . Así, tenemos que  $\mathcal{B}$  es un subconjunto abierto de  $C(X) \setminus F_1(X)$  que contiene a  $W$ . Dado que  $C(X) \setminus F_1(X)$  es localmente conexo, existe un abierto conexo  $\mathcal{V}$  de  $C(X) \setminus F_1(X)$  tal que  $W \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ . Como  $\mathcal{V}$  es conexo en  $C(X) \setminus F_1(X)$ , tenemos que  $\mathcal{V}$  es conexo en  $C(X)$ . Así,  $Cl_{C(X)}(\mathcal{V})$  es un subcontinuo de  $C(X)$ . Luego,  $\bigcup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}) = D$ , es un subcontinuo de  $X$ , por el Corolario 2.25. Como  $\mathcal{V} \subset \langle Cl_X(V) \rangle$ , tenemos que  $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}) \subset \langle Cl_X(V) \rangle$ . Así,  $D = \bigcup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}) \subset Cl_X(V) \subset U$ . Note que  $x \in D$ . Veamos que  $x \in Int_X(D)$ . Dado que  $\mathcal{V}$  es un abierto en  $C(X) \setminus F_1(X)$ ,  $\mathcal{V}$  es un abierto en  $C(X)$ . Luego existen abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  en  $X$  tales que  $W \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{V} \subset Cl_{C(X)}(\mathcal{V})$ , por el Teorema 2.7. Así,  $W \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \subset D$ . Luego,  $x \in \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Por lo tanto,  $x \in Int_X(D)$ . Como la elección de  $x$  fue arbitraria, tenemos que  $X$  es conexo en pequeño.

Ahora, veamos el caso para  $n \geq 2$ . Sean  $x$  un punto de  $X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  tales que  $x \in U$ . Así, existe un subcontinuo no degenerado  $A$  en  $X$  tal que  $x \in A \subset U$ , por el Corolario 1.22. Note que  $A \in \langle U \rangle \setminus F_n(X)$ . Como  $C_n(X) \setminus F_n(X)$  es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo  $\mathcal{W}$  de  $C_n(X) \setminus F_n(X)$  tal que  $A \in \mathcal{W} \subset Cl_{C_n(X)}(\mathcal{W}) \subset \langle U \rangle \setminus F_n(X)$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $B_H(A, \epsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$ . Sea  $K = \bigcup Cl_{C_n(X)}(\mathcal{W})$ . Note que  $K$  es un subcontinuo de  $X$ , por el Corolario 2.25. Sea  $y \in B_d(x, \epsilon)$ . Note que  $A \cup \{y\} \in B_H(A, \epsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$  y  $y \in K$ . Entonces  $x \in Int_X(K) \subset U$ . Luego tenemos que  $X$  es conexo en pequeño en  $x$ . Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo por la Proposición 1.11. ■

Una pregunta natural es saber qué relación existe entre la conexidad local del continuo  $X$  y la conexidad local del  $n$ -ésimo hiperespacio de suspensión de  $X$ . El siguiente resultado nos da respuesta a lo anterior [21, Teorema 5.2].

**Teorema 2.39.** *Un continuo  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $HS_n(X)$  es localmente conexo para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo localmente conexo, entonces tenemos que  $C_n(X)$  es localmente conexo para toda  $n \in \mathbb{N}$ , por el Teorema 2.27. Como  $HS_n(X) = q_X^n(C_n(X))$ , y  $q_X^n$  es continua, entonces  $HS_n(X)$  es localmente conexo.

Veamos ahora que si  $HS_n(X)$  es localmente conexo, entonces  $X$  también lo es. Tenemos que  $HS_n(X)$  es localmente conexo, entonces el conjunto abierto  $HS_n(X) \setminus \{F_X^n\}$  es localmente conexo, por [17, Teorema 3, pág. 230]. Como  $HS_n(X) \setminus \{F_X^n\}$  es homeomorfo a  $C_n(X) \setminus F_n(X)$ , por la Observación 2.37, tenemos que  $C_n(X) \setminus F_n(X)$  es localmente conexo. Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo, por Lema 2.38. ■

## 2.2. Funciones inducidas en hiperespacios

Dada una función  $f: X \rightarrow Y$  continua entre continuos, podemos inducir funciones entre los hiperespacios  $2^X$  y  $2^Y$ ,  $C_n(X)$  y  $C_n(Y)$ ,  $F_n(X)$  y  $F_n(Y)$ , y  $HS_n(X)$  y  $HS_n(Y)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En esta sección presentamos las propiedades y resultados de las funciones inducidas que denotaremos por  $2^f$ ,  $C_n(f)$ ,  $F_n(f)$  y  $HS_n(f)$ .

**Definición 2.40.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Definimos  $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ , la función inducida entre los hiperespacios  $2^X$  y  $2^Y$ , por  $2^f(A) = f(A)$  para cada  $A \in 2^X$ .

A continuación mostraremos la continuidad de  $2^f$ . La prueba de este resultado la tomamos de [1, Teorema 3.2].

**Teorema 2.41.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva entre continuos. Entonces  $2^f$  es continua y sobreyectiva.

*Demostración.* Veamos que  $2^f$  es continua. Como  $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U \text{ es un abierto en } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es abierto en } X\}$  es subbase para la topología de Vietoris del hiperespacio  $2^Y$ , por el Teorema 2.9, es suficiente probar que  $(2^f)^{-1}(\Gamma(U))$  y  $(2^f)^{-1}(\Lambda(U))$  son abiertos en  $2^X$  para cualquier abierto  $U$  de  $Y$ .

Sea  $U$  subconjunto abierto de  $Y$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Sea  $A \in (2^f)^{-1}(\Gamma(U))$ . Así,  $2^f(A) = f(A) \in \Gamma(U)$ . Luego  $f(A) \subset U$  y  $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U)$ . Como  $A \subset f^{-1}(f(A))$ ,  $A \subset f^{-1}(U)$ . Luego  $A \in \Gamma(f^{-1}(U))$ . Recíprocamente, sea  $B \in \Gamma(f^{-1}(U))$ . Por definición,  $B \subset f^{-1}(U)$ . Así,  $f(B) \subset f(f^{-1}(U)) = U$ . Entonces  $f(B) = 2^f(B) \in \Gamma(U)$  y  $B \in (2^f)^{-1}(\Gamma(U))$ . Por lo tanto, tenemos que  $(2^f)^{-1}(\Gamma(U)) = \Gamma(f^{-1}(U))$ .

Con un argumento similar, es sencillo probar que  $(2^f)^{-1}(\Lambda(U)) = \Lambda(f^{-1}(U))$ , para cualquier abierto  $U$  de  $X$ . Por tanto,  $2^f$  es continua. Finalmente, sea  $B \in 2^Y$ . Es claro que  $f^{-1}(B) \in 2^X$  y  $2^f(f^{-1}(B)) = B$ . Luego  $2^f$  es sobreyectiva. ■

**Definición 2.42.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ , la función inducida entre los  $n$ -ésimos hiperespacios  $C_n(X)$  y  $C_n(Y)$ , por  $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$  y  $F_n(f): F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  la función inducida entre los  $n$ -ésimos productos simétricos  $F_n(X)$  y  $F_n(Y)$ , por  $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$ .

De la continuidad de  $f$  se sigue fácilmente que las funciones  $C_n(f)$  y  $F_n(f)$  están bien definidas. Como  $2^f$  es continua, obtenemos que  $C_n(f)$  y  $F_n(f)$  son continuas, respectivamente. Como  $f$  es sobreyectiva, tenemos que  $F_n(f)$  es una función sobreyectiva. La función  $C_n(f)$  no es necesariamente sobreyectiva, aunque la función  $f$  sea sobreyectiva. Si  $n = 1$ , escribiremos  $C(f)$  en lugar de  $C_1(f)$ .

**Ejemplo 2.43.** Existe una función continua  $f$  definida entre continuos, tal que la función  $C_n(f)$  no es sobreyectiva, para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$  definida por  $f(x) = e^{2\pi xi}$ , para  $x \in [0, 1]$ . Tomemos  $B = \{e^{2\pi xi} \in S^1 : \frac{-1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}\}$ . Sean  $A_1 = [0, \frac{1}{4}]$  y  $A_2 = [\frac{3}{4}, 1]$ . Claramente,  $B \in C(S^1)$  y  $f^{-1}(B) = A_1 \cup A_2$ . Notemos que  $f(A_1) \neq B$  y  $f(A_2) \neq B$ , luego no existe un subcontinuo  $D$  de  $[0, 1]$  tal que  $f(D) = B$ . Así,  $C(f)$  no es sobreyectiva. Además, usando este mismo argumento, podemos mostrar que  $C_n(f)$  tampoco es sobreyectiva, para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ .

A continuación, mostraremos una condición para que la función inducida  $C_n(f)$  sea sobreyectiva. Este resultado es la Proposición 1. de [7].

**Proposición 2.44.** *Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $C_n(f)$  es sobreyectiva si y sólo si  $f$  es débilmente confluyente.*

*Demostración.* Primero supongamos que  $C_n(f)$  es sobreyectiva y probemos que  $f$  es débilmente confluyente. Sean  $K$  un subcontinuo propio de  $Y$  y  $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$  un conjunto de puntos distintos de  $Y \setminus K$ . Tenemos que  $K \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \in C_n(Y) \setminus C_{n-1}(Y)$ . Como  $C_n(f)$  es sobreyectiva y dado que  $C_n(f)(C_{n-1}(X)) \subset C_{n-1}(Y)$ , existe un elemento  $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$  tal que  $C_n(f)(A) = K \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ , luego existe una componente  $A_0$  de  $A$  tal que  $f(A_0) = K$ . Así,  $f$  es débilmente confluyente.

Veamos ahora que si  $f$  es débilmente confluyente entonces  $C_n(f)$  es sobreyectiva. Sea  $B \in C_n(Y)$ . Definamos  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ , donde cada  $B_i$  es una componente de  $B$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  y alguna  $k \leq n$ . Como  $f$  es débilmente confluyente, existe un subcontinuo  $A_i$  de  $X$  tal que  $f(A_i) = B_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Si  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , entonces  $A \in C_n(X)$  y es claro que  $C_n(f)(A) = B$ . Por lo tanto,  $C_n(f)$  es sobreyectiva. ■

La siguiente proposición será de gran utilidad para nuestros resultados que presentaremos más adelante.

**Proposición 2.45.** *Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $K$  un subcontinuo de  $Y$ . Entonces  $L$  es una componente de  $f^{-1}(K)$  si y sólo si  $2^L$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$ .*

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos,  $K$  un subcontinuo de  $Y$  y  $L$  una componente de  $f^{-1}(K)$ . Note que  $2^L$  es un continuo y  $2^f(2^L) \subset 2^K$ . Sea  $\mathcal{L}$  la componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$  tal que  $2^L \subset \mathcal{L}$ .

Como  $L \in \mathcal{L}$ ,  $\bigcup \mathcal{L}$  es un subcontinuo de  $X$ , por el Corolario 2.25. Si  $x \in \bigcup \mathcal{L}$ , existe un  $L_0 \in \mathcal{L}$  tal que  $x \in L_0$ . Dado que  $(2^f)(\mathcal{L}) \subset 2^K$ , tenemos que  $f(L_0) \subset K$  y  $f(x) \in K$ . Como  $x$  fue arbitrario,  $f(\bigcup \mathcal{L}) \subset K$ . Además,  $L \subset \bigcup \mathcal{L}$  y  $L$  es una componente, entonces  $L = \bigcup \mathcal{L}$ . Notemos que  $\mathcal{L} \subset 2^L$ , pues, si  $A \in \mathcal{L}$ , entonces  $A \subset \bigcup \mathcal{L} = L$  y, de esta forma,  $A \in 2^L$ . Por lo tanto,  $2^L = \mathcal{L}$ .

Veamos ahora que si  $2^K$  es un subcontinuo de  $2^Y$  y  $2^L$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$  entonces  $L$  es una componente de  $f^{-1}(K)$ . Como  $L \in 2^L$  y  $(2^f)(2^L) \subset 2^K$ ,  $f(L) \subset K$ . Sea  $M$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $L \subset M$  y  $f(M) \subset K$ . Tenemos entonces que  $2^L \subset 2^M$

y  $(2^f)(2^M) \subset 2^K$ . Observemos que claramente  $2^M$  es un subcontinuo de  $2^X$ . Como  $2^L$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$ ,  $2^L = 2^M$ . Notemos que si existe  $x \in M \setminus L$ , entonces  $\{x\} \in 2^M \setminus 2^L$ , pero esto contradice que  $2^L = 2^M$ . Así,  $M \subset L$  y, por lo tanto,  $L = M$ . Por lo que tenemos que  $L$  es una componente de  $f^{-1}(K)$ . ■

Con el mismo argumento podemos probar el siguiente corolario.

**Corolario 2.46.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $K$  es un subcontinuo de  $Y$ . Entonces  $L$  una componente de  $f^{-1}(K)$  si y sólo si  $C_n(L)$  es una componente de  $(C_n(f))^{-1}C_n(K)$ .*

El siguiente lema está tomado de cite[Lema 6.1, p. 245]Hosokawa y [18, Teorema 3.2].

**Lema 2.47.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente entre continuos.*

1. Si  $\mathcal{L}$  es un arco en  $2^Y$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ .
2. Si  $\mathcal{L}$  es un arco en  $C_n(Y)$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(C_n(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $C_n(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ , para  $n \in \{1, 2\}$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{L}$  un arco en  $2^Y$ ,  $\mathcal{K}$  una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$  y  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$  un homeomorfismo. Debemos probar que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . Dado que  $\mathcal{K}$  es componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , tenemos que  $2^f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$ . Como  $\mathcal{L}$  es un arco y, por tanto, un continuo irreducible entre sus puntos extremos, basta ver que  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$  pertenecen a  $2^f(\mathcal{K})$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\alpha(0) \in 2^f(\mathcal{K})$  y veamos que  $\alpha(1) \in 2^f(\mathcal{K})$ . Supongamos que  $\alpha(1) \notin 2^f(\mathcal{K})$ . Así, tenemos que  $(2^f)^{-1}(\alpha(1)) \cap \mathcal{K} = \emptyset$ , donde  $(2^f)^{-1}(\alpha(1))$  y  $\mathcal{K}$  son compactos de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Como  $\mathcal{K}$  es una componente, no existe un conjunto conexo  $\mathcal{C}$  en  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , tal que  $\mathcal{C} \cap (2^f)^{-1}(\alpha(1)) \neq \emptyset$  y que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ . Así, existen compactos disyuntos  $\mathcal{K}_0$  y  $\mathcal{K}_1$  tales que  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$  y  $(2^f)^{-1}(\alpha(1)) \subset \mathcal{K}_1$ , por el Teorema 1.20.

Sea  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in 2^f(\mathcal{K}_0)\}$ . Por la compacidad de  $\mathcal{K}_0$ , tenemos que  $\alpha(t_0) \in 2^f(\mathcal{K}_0)$  y, además, como  $\alpha(1) \notin 2^f(\mathcal{K}_0)$ ,  $t_0 < 1$ . De lo anterior, existe  $K \in \mathcal{K}_0$  tal que  $2^f(K) = \alpha(t_0)$ .

Sean  $M = \bigcup\{C : C \text{ es una componente de } f^{-1}(\alpha(t_0)) \text{ y } C \cap K \neq \emptyset\}$  y  $k \in K$ . Claramente,  $k \in f^{-1}(\alpha(t_0))$ . Sea  $C'$  la componente de  $f^{-1}(\alpha(t_0))$  tal que  $k \in C'$ . Luego, se tiene que  $K \subset M$  y  $M \neq \emptyset$ . No es difícil ver que  $M$  es un conjunto cerrado de  $X$ , luego  $M \in 2^X$ .

Dado que  $K \subset M$  y  $M \neq \emptyset$ , de la definición de  $M$ , tenemos que  $K \subsetneq M$  y como cada componente de  $M$  intersecta a  $K$ , existe un arco de orden  $\Gamma$  en  $2^X$  que une a  $K$  y  $M$ , por el Teorema 2.15, tal que  $\Gamma \subset (2^f)^{-1}(\alpha(t_0))$ . Dado que  $(2^f)^{-1}(\alpha(t_0)) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ ,  $K \in \mathcal{K}_0$  entonces  $\Gamma \subset \mathcal{K}_0$ .

Para cada  $t \in [t_0, 1]$ , definimos  $M_t = \bigcup\{D : D \text{ es una componente de } f^{-1}(\cup\alpha([t_0, t])) \text{ y } D \cap M \neq \emptyset\}$ .

Note que  $M_t \neq \emptyset$ , pues dado que  $M \neq \emptyset$ , elegimos una componente  $C$  de  $f^{-1}(\alpha(t_0))$  tal que  $C \cap K \neq \emptyset$ . Es claro que  $C \subset f^{-1}(\cup\alpha([t_0, t]))$  y como  $C$  es conexo, existe una componente  $D$  de  $f^{-1}(\cup\alpha([t_0, t]))$  tal que  $C \subset D$  con  $D \cap M \neq \emptyset$ , así,  $D \subset M_t$ . Además, para cada  $t \in [t_0, 1]$ , se tiene que  $M_t \in 2^X$ .

De la definición de  $M_t$ , fácilmente se verifica lo siguiente:

**Afirmación 2.48.** Para cualesquiera  $t, s \in [t_0, 1]$  tales que  $t \leq s$ , tenemos que  $M \subset M_t \subset M_s$ .

Por otra parte, notemos que para cada componente  $D$  de  $M_t$ , se tiene que  $f(D)$  es una componente de  $\cup\alpha([t_0, t])$ , donde  $t \in [t_0, 1]$ . Luego para cada  $t \in [t_0, 1]$ , definamos  $K_t = f^{-1}(\alpha(t)) \cap M_t$ . Además, para cada  $t \in [t_0, 1]$ , se tiene que  $K_t \in 2^X$  y para cada componente  $D$  de  $M_t$ , se tiene que  $D \cap K_t \neq \emptyset$ .

Sea  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión decreciente en  $(t_0, 1)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos  $K_{t_n} = f^{-1}(\alpha(t_n)) \cap M_{t_n}$ . Como  $f$  es confluyente, cada componente de  $M_{t_n}$  es enviada sobre una componente de  $\cup\alpha([t_0, t])$ . Así, tenemos que  $K_n \in (2^f)^{-1}(\alpha(t_n))$  y cada componente de  $M_{t_n}$  intersecta a  $K_n$ . Asumamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_0$ , para algún  $K_0 \in 2^X$ . De la Afirmación 2.48, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_{t_{n+1}} \subset M_{t_n}$ . Luego la sucesión  $\{M_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$ , por el Ejercicio 4.16 de [28]. Como  $K_{t_n} \subset M_{t_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $K_0 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n}$ . Además, se puede ver que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{t_n} = M$ . Cada componente de  $M$  intersecta a  $K_0$ . Así, existe un arco de orden de  $K_0$  a  $M$  cuya imagen está contenida en  $(2^f)^{-1}(\alpha(t_0))$ . Luego  $K_0 \in \mathcal{K}_0$ . Como cada  $K_{t_n} \in \mathcal{K}_1$ , entonces  $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Así, tenemos que  $\alpha(1) \in 2^f(\mathcal{K})$ . Por lo tanto  $2^f(K) = \mathcal{L}$ .

Veamos ahora que  $C_2(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . Sean  $\mathcal{L}$  un arco en  $C_2(Y)$ ,  $\mathcal{K}$  una componente de  $(C_2(f))^{-1}(\mathcal{L})$  y  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$  un homeomorfismo. Debemos probar que  $C_2(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . Dado que  $\mathcal{K}$  es componente de  $(C_2(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , tenemos que  $C_2(f)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$ . Como  $\mathcal{L}$  es un arco y, por tanto, un continuo irreducible entre sus puntos extremos, basta ver que  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$  pertenecen a  $C_2(f)(\mathcal{K})$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\alpha(0) \in C_2(f)(\mathcal{K})$  y veamos que  $\alpha(1) \in C_2(f)(\mathcal{K})$ . Supongamos que  $\alpha(1) \notin C_2(f)(\mathcal{K})$ . Así, tenemos que  $(C_2(f))^{-1}(\alpha(1)) \cap \mathcal{K} = \emptyset$ , donde  $(C_2(f))^{-1}(\alpha(1))$  y  $\mathcal{K}$  son compactos de  $(C_2(f))^{-1}(\mathcal{L})$ . Como  $\mathcal{K}$  es una componente, no existe un conjunto conexo  $\mathcal{C}$  en  $(C_2(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , tal que  $\mathcal{C} \cap (C_2(f))^{-1}(\alpha(1)) \neq \emptyset$  y que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ . Así, existen compactos disyuntos  $\mathcal{K}_0$  y  $\mathcal{K}_1$  tales que  $(C_2(f))^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$  y  $(C_2(f))^{-1}(\alpha(1)) \subset \mathcal{K}_1$ , por el Teorema 1.20.

Sea  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in C_2(f)(\mathcal{K}_0)\}$ . Por la compacidad de  $\mathcal{K}_0$ , tenemos que  $\alpha(t_0) \in C_2(f)(\mathcal{K}_0)$  y, además, como  $\alpha(1) \notin C_2(f)(\mathcal{K}_0)$ ,  $t_0 < 1$ . De lo anterior, existe  $K \in \mathcal{K}_0$  tal que  $C_2(f)(K) = \alpha(t_0)$ . Para cada  $t \in [t_0, 1]$ , podemos encontrar  $K_t \in C_2(X)$  tal que  $C_2(f)(K_t) = \alpha(t)$ . De lo anterior tenemos los siguientes dos casos:

1.  $K$  es conexo. Note que  $\alpha(t_0)$  es conexo. Definamos  $M$  la componente de  $f^{-1}(\alpha(t_0))$  que contiene a  $K$  y  $M_t$  la componente de  $f^{-1}(\cup\alpha([t_0, t]))$  que contiene a  $M$ . Como  $\alpha(t_0)$  es conexo,  $\cup\alpha([t_0, t])$  es conexo, por [28, Lema 1.49]. Dado que  $\alpha(t) \subset \cup\alpha([t_0, t])$

y que  $f$  es confluyente,  $f(M_t) = \bigcup \alpha([t_0, t])$ , por lo que existe  $K_t \in C_2(X)$  tal que  $K_t \subset M_t$ . Así,  $C_2(f)(K_t) = \alpha(t)$ .

2.  $K$  es desconexo. Note que  $\bigcup \alpha([t_0, t]) \in C_2(Y)$ , por [19, Lema 7.2]. Sean  $M = \bigcup \{C : C \text{ es una componente de } f^{-1}(\alpha(t_0)) \text{ y } C \cap K \neq \emptyset\}$  y  $k \in K$ . Claramente,  $k \in f^{-1}(\alpha(t_0))$ . Sea  $C'$  la componente de  $f^{-1}(\alpha(t_0))$  tal que  $k \in C'$ . Luego, se tiene que  $K \subset M$  y  $M \neq \emptyset$ . No es difícil ver que  $M$  es un conjunto cerrado de  $X$ , luego  $M \in C_2(X)$ .

Dado que  $K \subset M$  y  $M \neq \emptyset$ , de la definición de  $M$ , tenemos que  $K \subsetneq M$  y como cada componente de  $M$  interseca a  $K$ , existe un arco de orden  $\Gamma$  en  $C_2(X)$  que une a  $K$  y  $M$ , por el Teorema 2.15, tal que  $\Gamma \subset (C_2(f))^{-1}(\alpha(t_0))$ . Dado que  $(C_2(f))^{-1}(\alpha(t_0)) \subset (C_2(f))^{-1}(\mathcal{L})$ ,  $K \in \mathcal{K}_0$  entonces  $\Gamma \subset \mathcal{K}_0$ .

Para cada  $t \in [t_0, 1]$ , definimos  $M_t = \bigcup \{D : D \text{ es una componente de } f^{-1}(\bigcup \alpha([t_0, t])) \text{ y } D \cap M \neq \emptyset\}$ .

Note que  $M_t \neq \emptyset$ , pues dado que  $M \neq \emptyset$ , elegimos una componente  $C$  de  $f^{-1}(\alpha(t_0))$  tal que  $C \cap K \neq \emptyset$ . Es claro que  $C \subset f^{-1}(\bigcup \alpha([t_0, t]))$  y como  $C$  es conexo, existe una componente  $D$  de  $f^{-1}(\bigcup \alpha([t_0, t]))$  tal que  $C \subset D$  con  $D \cap M \neq \emptyset$ , así,  $D \subset M_t$ . Además, para cada  $t \in [t_0, 1]$ , se tiene que  $M_t \in C_2(X)$ .

De la definición de  $M_t$ , fácilmente se verifica lo siguiente:

**Afirmación 2.49.** Para cualesquiera  $t, s \in [t_0, 1]$  tales que  $t \leq s$ , tenemos que  $M \subset M_t \subset M_s$ .

Por otra parte, notemos que para cada componente  $D$  de  $M_t$ , se tiene que  $f(D)$  es una componente de  $\bigcup \alpha([t_0, t])$ , donde  $t \in [t_0, 1]$ . Luego para cada  $t \in [t_0, 1]$ , definamos  $K_t = f^{-1}(\alpha(t)) \cap M_t$ . Además, para cada  $t \in [t_0, 1]$ , se tiene que  $K_t \in C_2(X)$  y para cada componente  $D$  de  $M_t$ , se tiene que  $D \cap K_t \neq \emptyset$ .

Sea  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión decreciente en  $(t_0, 1)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos  $K_{t_n} = f^{-1}(\alpha(t_n)) \cap M_{t_n}$ . Como  $f$  es confluyente, cada componente de  $M_{t_n}$  es enviada sobre una componente de  $\bigcup \alpha([t_0, t])$ . Así, tenemos que  $K_n \in (C_2(f))^{-1}(\alpha(t_n))$  y cada componente de  $M_{t_n}$  interseca a  $K_n$ . Asumamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_0$ , para algún  $K_0 \in C_2(X)$ . De la Afirmación 2.49, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_{t_{n+1}} \subset M_{t_n}$ . Luego la sucesión  $\{M_{t_n}\}_{n=1}^\infty$  converge a  $\bigcap_{n=1}^\infty M_{t_n}$ , por el Ejercicio 4.16 de [28]. Como  $K_{t_n} \subset M_{t_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $K_0 \subset \bigcap_{n=1}^\infty M_{t_n}$ . Además, se puede ver que  $\bigcap_{n=1}^\infty M_{t_n} = M$ . Cada componente de  $M$  interseca a  $K_0$ . Así, existe un arco de orden de  $K_0$  a  $M$  cuya imagen está contenida en  $(C_2(f))^{-1}(\alpha(t_0))$ . Luego  $K_0 \in \mathcal{K}_0$ . Como cada  $K_{t_n} \in \mathcal{K}_1$ , entonces  $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Así, tenemos que  $\alpha(1) \in C_2(f)(\mathcal{K})$ . Por lo tanto  $C_2(f)(K) = \mathcal{L}$ .

De manera similar se puede probar que si  $\mathcal{L}$  es un arco en  $C_n(Y)$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(C_n(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $C_n(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$  con  $n \in \{1, 2\}$ . ■

**Comentario 2.50.** Más adelante en el Ejemplo 3.11 del Capítulo 3, mostraremos que la condición anterior no se satisface para  $n \geq 3$ .

**Corolario 2.51.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente entre continuos.*

1. Si  $\mathcal{L}$  es un subcontinuo arcoconexo en  $2^Y$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ .
2. Si  $\mathcal{L}$  es un subcontinuo arcoconexo en  $C_n(Y)$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(C_n(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $C_n(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ , para  $n \in \{1, 2\}$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{L}$  un subcontinuo arcoconexo de  $2^Y$  y  $\mathcal{K}$  una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Veamos que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ .

Sea  $K \in \mathcal{K}$ , entonces  $f(K) \in \mathcal{L}$ . Tomemos  $L \in \mathcal{L} \setminus \{f(K)\}$ . Como  $\mathcal{L}$  es arcoconexo, existe un arco  $\alpha$  en  $\mathcal{L}$ , cuyos extremos son  $L$  y  $f(K)$ .

Note que  $K \in (2^f)^{-1}(\alpha)$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente de  $(2^f)^{-1}(\alpha)$  tal que  $K \in \mathcal{C}$ . Como  $(2^f)^{-1}(\alpha) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , entonces  $\mathcal{C}$  es un conexo en  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Dado que  $\mathcal{K}$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$  y  $\mathcal{K} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ , tenemos que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ . Así,  $2^f(\mathcal{C}) = \alpha$ , por el Lema 2.47 y  $2^f(\mathcal{C}) \subset 2^f(\mathcal{K})$ . De manera que  $L \in 2^f(\mathcal{K})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L} \subset 2^f(\mathcal{K})$ . Como  $2^f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$ , se tiene que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ .

De manera similar se puede probar que si  $\mathcal{L}$  es un subcontinuo arcoconexo en  $C_n(Y)$ , entonces para cada componente  $\mathcal{K}$  de  $(C_n(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , se tiene que  $C_n(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . ■

Como mostramos anteriormente en este capítulo, la función unión (Definición 2.21) está bien definida y es continua del espacio  $2^{2^X}$  al espacio  $2^X$ . Como  $C(C_n(X))$  es un subespacio de  $2^{2^X}$ , podemos asegurar que la restricción es nuevamente una función continua. Por otra parte, tenemos que esta restricción está bien definida, pues dado  $\mathcal{A}$  en  $C(C_n(X))$ ,  $\bigcup \mathcal{A}$  tiene a lo más  $n$  componentes, por el Corolario 2.25. Así, si  $Z$  es un continuo, denotaremos por  $\cup_Z$  la función unión definida de  $C(C_n(Z))$  en  $C_n(Z)$ .

El siguiente resultado es la Proposición 3.1 de [4].

**Proposición 2.52.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc}
 C(C_n(X)) & \xrightarrow{C(C_n(f))} & C(C_n(Y)) \\
 \cup_X \downarrow & & \downarrow \cup_Y \\
 C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(Y)
 \end{array}$$

*es conmutativo.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A} \in C(C_n(X))$ . Notemos que:

$$\cup_Y C(C_n(f))(\mathcal{A}) = \cup(C_n(f))(\mathcal{A}) = \cup\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}; \quad y$$

$$C_n(f)(\cup_X(\mathcal{A})) = C_n(f)(\cup\mathcal{A}) = f(\cup\mathcal{A}).$$

Es fácil ver que  $\cup\{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = f(\cup\mathcal{A})$ . Luego  $\cup_Y \circ C(C_n(f)) = C_n(f) \circ \cup_X$ . Por lo tanto, hemos demostrado que el diagrama conmuta. ■

La siguiente función inducida fue definida en [22, pág. 145].

**Definición 2.53.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $HS_n(f) : HS_n(X) \rightarrow HS_n(Y)$ , llamada *la función inducida entre los  $n$ -ésimos hiperespacios de suspensión  $HS_n(X)$  y  $HS_n(Y)$*  por:

$$HS_n(f)(A) = \begin{cases} q_Y^n(C_n(f)((q_X^n)^{-1}(A))), & \text{si } A \neq F_X^n; \\ F_Y^n, & \text{si } A = F_X^n. \end{cases}$$

La función  $HS_n(f)$  es continua por [10, Teorema 4.3, pág. 105]. Además, en el caso en el cual  $n = 1$ , denotaremos a  $HS_n(f)$  por  $HS(f)$ .

La forma en la cual fue definida esta función inducida  $HS_n(f)$  muestra que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(Y) \\ q_X^n \downarrow & & \downarrow q_Y^n \\ HS_n(X) & \xrightarrow{HS_n(f)} & HS_n(Y) \end{array}$$

# CAPÍTULO 3

## FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE HIPERESPACIOS CONTINUOS

En el presente capítulo mostraremos los resultados más importantes sobre las relaciones entre la confluencia de una función dada y la de sus funciones inducidas, construyendo ejemplos donde algunas relaciones no se satisfacen. Este tipo de relaciones fue estudiada inicialmente por Hiroshi Hosokawa en el artículo “*Induced mappings on hyperspaces*” [15]. Posteriormente, se han escrito algunos otros trabajos relacionados con este problema como en [4], [6], [9] y [22]. Además, en este capítulo presentamos condiciones adicionales como la conexidad local y la propiedad de arcoaproximación, condiciones que nos permitirán mostrar implicaciones que no se satisfacen en el caso general.

También, estudiaremos la confluencia en las funciones inducidas definidas entre los  $n$ -ésimos productos simétricos y los  $n$ -ésimos hiperespacios de suspensión que definimos en el Capítulo 2.

---

### 3.1. Funciones confluentes

---

En el artículo “*Confluent mappings and unicoherence of continua*” [6], el profesor J.J. Charatonik definió las funciones confluentes, mostrando que las propiedades hereditarias de unicoherencia y descomponibilidad de un continuo son invariantes bajo este tipo de funciones.

En “*Induced mappings on hyperspaces*” [15], H. Hosokawa y en “*Induced maps on  $n$ -fold hyperspaces*” [18], M. de J. López y S. Macías estudiaron las funciones confluentes

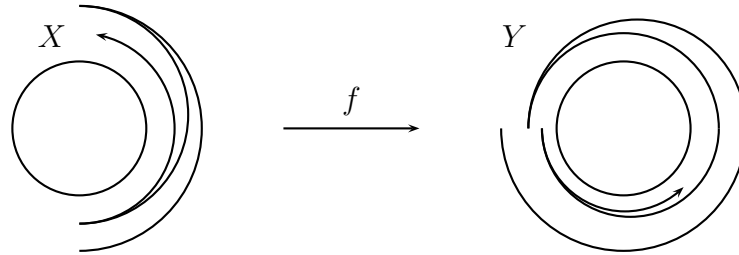


Figura 3.1:  $f$  confluyente y  $C_n(f)$  no confluyente para ninguna  $n \in \mathbb{N}$

y las relaciones con las funciones inducidas  $2^f$  y  $C_n(f)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Los resultados más importantes de estos trabajos los presentaremos a continuación.

El siguiente resultado se puede ver en [15, Teorema 6.3] y en [18, Teorema 3.6].

**Teorema 3.1.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces:*

1. Si  $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$  es confluyente, entonces  $f$  es confluyente.
2. Si  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  es confluyente para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es confluyente.

*Demostración.* Veamos que si  $2^f$  es confluyente entonces  $f$  es confluyente. Supongamos que  $f$  no es confluyente. Entonces existe un subcontinuo  $K$  de  $Y$  y una componente  $L$  de  $f^{-1}(K)$  tal que  $f(L) \subsetneq K$ . Sea  $y$  en  $K \setminus f(L)$ . Note que  $\{y\}$  pertenece a  $2^K$ . Tenemos que  $2^L$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$ , por la Proposición 2.45. Así,  $\{y\} \in 2^K \setminus 2^f(2^L)$ , por lo tanto  $2^f$  no es confluyente.

Con el mismo argumento es fácil probar que la confluencia de  $C_n(f)$  implica la confluencia de la función  $f$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Con el siguiente ejemplo mostramos que las implicaciones inversas dadas en el Teorema 3.1, no son ciertas. Este ejemplo se puede encontrar en [15, Ejemplo, pág. 247]. A continuación mostraremos solamente una idea global de la siguiente construcción.

**Ejemplo 3.2.** *Existe una función confluyente  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $C_n(f)$  no es confluyente para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sean  $S^1 = \{(1, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  $A_1 = \{(r, \theta) : \theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\frac{1}{1-r}), 1 < r \leq 1 + \frac{2}{\pi}\}$  y  $B_1 = \{(r, \theta) : \theta = \pi \operatorname{sen}(\frac{1}{1-r}), 1 \leq r \leq 1 + \frac{2}{\pi}\}$ , subespacios del plano cartesiano representados en coordenadas polares.

Consideremos los continuos  $X = S^1 \cup A_1$  y  $Y = S^1 \cup B_1$ . Definamos la función  $f: X \rightarrow Y$  dada por  $f(r, \theta) = (r, 2\theta)$ , para cada  $(r, \theta) \in X$  (ver Figura 3.1).

La función  $f$  es sobreyectiva y continua, pues  $f(S^1) = S^1$ ,  $f(A_1) = B_1$ . Como  $f|_{A_1}$  es un homeomorfismo en su imagen y  $f|_{S^1}$  es confluyente, es fácil ver que  $f$  es confluyente.

Veamos primero que la función  $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$  no es confluyente.

Para cada  $t \in [0, 1]$ , sean  $K_t = \{(1, \theta) : \frac{\pi}{2}(t-1) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}(2t-1)\}$ . Definamos  $\mathcal{K} = \{K_t : t \in [0, 1]\}$ . Claramente,  $\mathcal{K}$  es subconjunto de  $C(S^1)$ . No es difícil ver que  $\mathcal{K}$  es un arco en  $C(X)$ .

Sea  $g : S^1 \cup A_1 \rightarrow S^1$  la proyección natural definida por  $g(r, \theta) = (1, \theta)$ , para cada  $(r, \theta) \in S^1 \cup A_1$ . Claramente,  $g$  es continua y sobreyectiva. Sea  $C(g) : C(S^1 \cup A_1) \rightarrow C(S^1)$  la función inducida. Dado que  $\mathcal{K} \subset C(S^1)$ , tenemos que  $(C(g))^{-1}(\mathcal{K}) \subset C(S^1 \cup A_1)$ . Definamos  $\mathcal{M}_0 = (C(g))^{-1}(\mathcal{K})$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $g(K_t) = K_t$ , es decir,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_0$ . Note que  $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{M}_0$ , pues  $R = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r = 1 + 1/(\arcsen(\frac{2\theta}{\pi}) + \pi)\}$  es tal que  $f(R) = K_1$  y  $R \notin \mathcal{K}$ . Además, es importante tener en cuenta que  $C(S^1) \cap \mathcal{M}_0 = \mathcal{K}$ .

Sea  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \setminus \mathcal{K}$ . Observemos que  $\mathcal{K} \subset Cl_X(\mathcal{M})$ . Entonces tenemos que  $\mathcal{M} \cup \mathcal{K} \subset Cl_X(\mathcal{M})$ . Dado que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \setminus \mathcal{K}$ , tenemos que  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cup \mathcal{K}$ , luego  $\mathcal{M}_0 \subset Cl_X(\mathcal{M})$ . Por otra parte, como  $(C(g))^{-1}(\mathcal{K})$  es cerrado y  $\mathcal{M} \subset (C(g))^{-1}(\mathcal{K})$ , podemos decir que  $Cl_X(\mathcal{M}) \subset (C(g))^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_0$ . Así,  $Cl_X(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_0$ .

No es muy difícil demostrar que  $\mathcal{M}_0$  es un subcontinuo de  $C(X)$ . Por la continuidad de  $C(f)$ , tenemos que  $C(f)(\mathcal{M}_0)$  es un subcontinuo de  $C(Y)$ .

Definamos  $\mathcal{B} = C(f)(\mathcal{M}_0)$ . Note que  $(C(f))^{-1}(C(f)(\mathcal{K})) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L} = \{L_t : t \in [0, 1]\}$  y  $L_t = \{(1, \theta) : \frac{\pi}{2}(t+1) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}(2t+1)\}$ . Tampoco es difícil ver que  $\mathcal{L}$  también es un arco.

Por otra parte, tenemos que  $(C(f))^{-1}(C(f)(\mathcal{M}_0)) = (C(f))^{-1}(C(f)(\mathcal{M} \cup \mathcal{K})) = (C(f))^{-1}(C(f)(\mathcal{M})) \cup (C(f))^{-1}(C(f)(\mathcal{K})) = \mathcal{M} \cup (\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) = (\mathcal{M} \cup \mathcal{K}) \cup \mathcal{L} = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{L}$ .

De lo anterior,  $(C(f))^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{L}$ . Tenemos entonces que las componentes de  $(C(f))^{-1}(\mathcal{B})$  son  $\mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{L}$ . Sin embargo,  $C(f)(\mathcal{L}) \neq \mathcal{B}$ . Por lo tanto,  $C(f)$  no es confluyente. Finalmente, si  $n \geq 2$ , basta tomar el subcontinuo  $\mathcal{B}' = \{K \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} : K \in C(f)(\mathcal{M}_0)\}$ , donde  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  son puntos diferentes de  $Y$  tales que  $\{y_i\} \notin C(f)(\mathcal{M}_0)$  para ninguna  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Note que  $\mathcal{B}' \subset C_n(Y)$ . Sea  $P_i$  una componente de  $f^{-1}(y_i)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Así, existen dos componentes  $\mathcal{M}'_0 = \{L \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} P_i) : L \in \mathcal{M}_0\}$  y  $\mathcal{L}$  de  $C_n(f)^{-1}(\mathcal{B}')$  tales que  $C_n(f)(\mathcal{M}'_0) = \mathcal{B}'$  y  $C_n(f)(\mathcal{L}) \subsetneq \mathcal{B}'$ . Por lo tanto,  $C_n(f)$  no es confluyente. ■

Es posible probar que  $2^f$  no es confluyente cuando  $f$  es la función definida en el Ejemplo 3.2. Sin embargo, en [9] se muestra un ejemplo de una función  $f$  tal que  $C(f)$  es confluyente y  $2^f$  no lo es. Los detalles del ejemplo se pueden consultar en [9, Ejemplo 4.12].

**Ejemplo 3.3.** *Existe una función continua entre continuos  $f$ , tal que  $2^f$  ni  $C_n(f)$  son confluentes ninguna  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Sean  $H = \{(\frac{t+1}{t}\cos(t), \text{sen}(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 1\}$ ,  $S^1 = \{(1, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Definamos  $X = H \cup S^1$  (ver Ejemplo 1.2). Sea  $f: X \rightarrow Y$  definida por  $f(r, \theta) = (r, 2\theta)$ , donde  $Y = f(X)$ . La función  $f$  es confluyente. A continuación mostraremos que las funciones  $2^f$  ni  $C_n(f)$  son confluyentes para ninguna  $n \geq 2$ .

Notemos que  $f|_H$  es un homeomorfismo en su imagen. Además, si  $A$  es un subcontinuo propio de  $f(S^1)$ , entonces  $f^{-1}(A)$  tiene exactamente dos componentes, llamémoslas  $A_1$  y  $A_2$ , tales que  $f(A_1) = f(A_2) = A$ . Así, es sencillo ver que  $f$  es confluyente.

Veamos ahora que la función  $2^f$  no es confluyente. Sea  $F_1(Y) \subset 2^Y$ . Por la definición de  $f$ , no es difícil ver que  $(2^f)^{-1}(F_1(Y))$  tiene dos componentes,  $F_1(X)$  y  $M = \{z, -z : z \in S^1\}$ . Además, tenemos que  $(2^f)(M) = F_1(f(S^1)) \neq F_1(Y)$  y así,  $2^f$  no es una función confluyente. Observemos que  $F_1(X)$  y  $M$  son en realidad componentes de  $(C_n(f))^{-1}(F_1(Y))$  para cualquier  $n \geq 2$ . Así,  $C_n(f)$  no es confluyente para ninguna  $n \geq 2$ . ■

**Observación 3.4.** Note que el Ejemplo 3.3, también es un ejemplo en el cual la función  $C(f)$  es confluyente, mientras que la función  $2^f$  no es confluyente. En [9, Ejemplo 4.12] se pueden observar los detalles que muestran que la función  $C(f)$  es confluyente.

Con el siguiente resultado podemos mostrar muchos ejemplos de funciones confluyentes  $f$ , tales que  $C_n(f)$  no es confluyente, para ninguna  $n \geq 3$ . Este resultado se encuentra en [7, Teorema 18].

**Teorema 3.5.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \geq 3$ . Si  $C_n(f)$  es confluyente, entonces  $f$  es monótona.

*Demostración.* Sea  $n \geq 3$ . Supongamos que  $f$  no es monótona. Entonces existen puntos  $p$  y  $q$  en  $X$  tales que  $f(p) = f(q)$  con  $p$  y  $q$  en distintas componentes de  $f^{-1}(f(p))$ . Sean  $P$  y  $Q$  componentes de  $f^{-1}(f(p))$ , donde  $p \in P$  y  $q \in Q$ . Tomemos un punto  $r \in X$  tal que  $f(r) \neq f(p)$ . Sea  $R$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $r \in R$ ,  $f(R)$  no es degenerado,  $f(p)$  no está en  $f(R)$  y que  $R$  es una componente de  $f^{-1}(f(R))$ . Definimos el subcontinuo  $\mathcal{K}$  de  $C_n(Y)$  por:

$$\mathcal{K} = \{\{f(p)\} \cup K \mid K \in C_{n-1}(f(R))\}.$$

Observemos que  $P \cup Q \cup R \in C_n(X)$  y  $C_n(f)(P \cup Q \cup R) \in \mathcal{K}$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente de  $(C_n(f))^{-1}(\mathcal{K})$  que contiene a  $P \cup Q \cup R$ . Dado que  $\mathcal{C}$  es conexo, tenemos que  $\cup \mathcal{C}$  pertenece a  $C_n(X)$ , por Teorema 2.25. Denotemos  $Z = \cup \mathcal{C}$ . Como  $P \cup Q \cup R \in \mathcal{C}$ ,  $P \cup Q \cup R \subset Z$ . Veamos que  $P$  es una componente de  $Z$ . Sea  $P'$  la componente de  $Z$  que contiene a  $P$  y supongamos que  $P \neq P'$ . Dado que  $P$  es una componente de  $f^{-1}(f(p))$ , existe un punto  $z \in P'$  tal que  $f(z) \neq f(p)$ . Dado que  $f(P') \subset \{f(p)\} \cup f(R)$ , tenemos que  $f(z) \in f(R)$ . Como  $f(p) \in f(P')$ , concluimos que  $f(P')$  no es conexo, lo cual es una contradicción. Así,  $P$  es una componente de  $Z$ . De manera similar, mostramos que  $Q$  es una componente de  $Z$ .

De lo anterior, cada elemento de  $\mathcal{C}$  interseca a  $P$  y  $Q$  [8, Lema 7.2], y estos tienen a los más  $n - 2$  componentes intersecando a  $R$ . Entonces  $C_n(f)(\mathcal{C}) \subset \{\{f(p)\} \cup K \mid K \in C_{n-2}(f(R))\} \neq \mathcal{K}$ . Así,  $C_n(f)$  no es confluyente. ■

**Observación 3.6.** En el Ejemplo 3.3 mostramos una función  $f$  tal que  $C(f)$  es confluyente y  $C_n(f)$  no es confluyente para ninguna  $n \geq 2$ . Sin embargo, en la siguiente sección mostraremos que si agregamos una condición sobre el espacio recorrido, entonces podemos refinar aún más este resultado.

Concluimos esta sección planteando algunas preguntas. En la siguiente sección mostraremos que si tomamos la función  $f$  definida de  $[0, 1]$  a  $[0, 1]$  por  $f(t) = 1 - |2t - 1|$ , veremos que  $2^f$  es una función confluyente, sin embargo, por el Teorema 3.5,  $C_n(f)$  no es confluyente para ninguna  $n \geq 3$ . Así, tenemos la siguiente pregunta.

**Pregunta 3.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. ¿Si  $2^f$  es confluyente entonces  $C_n(f)$  es confluyente para  $n \in \{1, 2\}$ ?

En el Ejemplo 3.3 y de la Observación 3.4, mostramos una función confluyente tal que  $C(f)$  es confluyente y  $2^f$  no es confluyente. Además, sabemos que si  $C_n(f)$  es confluyente y  $n \geq 3$  entonces  $f$  es monótona. De esta forma,  $2^f$  es monótona por [15, Teorema 3.2] y, por tanto, confluyente. Así, sólo nos resta estudiar esta implicación cuando  $n = 2$ .

**Pregunta 3.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. ¿Si  $C_2(f)$  es confluyente entonces  $2^f$  es confluyente?

Dados dos enteros positivos  $m$  y  $n$ , es natural preguntarse las relaciones entre la confluencia de las funciones  $C_m(f)$  y  $C_n(f)$ . Del Teorema 3.5 y por [7, Teorema 4] tenemos que si  $n, m \geq 3$ , entonces  $C_n(f)$  es confluyente si y solamente si  $C_m(f)$  es confluyente. Además, en el Ejemplo 3.3 mostramos una función tal que  $C(f)$  es confluyente y  $C_2(f)$  no es confluyente. Así, tenemos la siguiente pregunta.

**Pregunta 3.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. ¿Si  $C_2(f)$  es confluyente entonces  $C(f)$  es confluyente?

---

## 3.2. Funciones confluentes entre espacios especiales

---

En esta sección mostramos condiciones sobre los espacios bajo las cuales es posible tener las implicaciones faltantes del Teorema 3.1. Usando el Corolario 2.51, presentaremos condiciones sobre el recorrido de la función para garantizar las equivalencias entre la confluencia de las funciones inducidas  $C_n(f)$  y  $2^f$ .

En el Ejemplo 3.2 observamos que la confluencia de una función  $f$  no implica la confluencia de la función  $C(f)$ . En particular, el recorrido de la función no es localmente conexo. Probaremos que si el recorrido es localmente conexo, las afirmaciones del Teorema 3.1 son equivalentes. El siguiente teorema hace parte de [15] y [18].

**Teorema 3.10.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función confluyente entre continuos y  $Y$  es localmente conexo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f: X \rightarrow Y$  es confluente;
2.  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  es confluente para  $n \in \{1, 2\}$ ;
3.  $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$  es confluente.

*Demostración.* Tenemos que si  $C_n(f)$  o  $2^f$  son funciones confluentes entonces  $f$  es confluente, por el Teorema 3.1.

Sean  $\mathcal{L}$  un subcontinuo de  $2^Y$  y  $\mathcal{K}$  una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Dado que  $Y$  es localmente conexo,  $2^Y$  es localmente conexo, por el Teorema 2.27. Como  $\mathcal{L}$  es un subconjunto cerrado de  $2^Y$ , existe una sucesión de subcontinuos localmente conexos  $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $2^Y$ , por el Teorema 1.13, tales que:

- a. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{L}_n$ ;
- b.  $\mathcal{L} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$ .

De (b),  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$  y  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_1)$ . Como  $\mathcal{K} \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ ,  $\mathcal{K} \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_1)$ . Dado que  $\mathcal{K}$  es conexo, tomemos  $\mathcal{K}_1$  la componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}_1)$  tal que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ .

Siguiendo el proceso de manera inductiva, obtenemos una sucesión de subcontinuos  $\{\mathcal{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $2^X$  tales que:

- i. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{K}_{n+1} \subset \mathcal{K}_n$ ;
- ii. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{K}_n$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$  y
- iii.  $\mathcal{K} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ .

De (b), es claro que  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$ . Si  $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ , entonces por (ii),  $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$ , así  $A \in (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Luego  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Dado que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$  es un subcontinuo, por el Teorema 1.5, y  $\mathcal{K}$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ , tenemos que  $\mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n$ .

Por (i.), es claro que  $2^f(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} 2^f(\mathcal{K}_n)$ . Tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}_n$  es un subcontinuo localmente conexo de  $2^Y$ , entonces  $\mathcal{L}_n$  es un subcontinuo arcoconexo de  $2^Y$ , por el Teorema 1.16. Dado que  $f$  es confluente, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^f(\mathcal{K}_n) = \mathcal{L}_n$ , por (ii) y el Corolario 2.51. Por lo tanto, tenemos que  $2^f(\mathcal{K}) = 2^f(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} 2^f(\mathcal{K}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$ , así  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ , luego  $2^f$  es confluente.

De manera análoga se demuestra que la confluencia de  $f$  implica la confluencia de  $C_n(f)$ , para  $n \in \{1, 2\}$ . ■

Con el siguiente ejemplo, observamos que si tomamos a  $C_n(Y)$  localmente conexo, existe una función  $f$  confluente tal que  $C_n(f)$  no es confluente para ningún  $n \geq 3$  y además la función inducida  $2^f$  es confluente.

**Ejemplo 3.11.** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(t) = |t|$ . Claramente  $f$  es confluyente pero no es monótona. Así,  $C_n(f)$  no es confluyente para ninguna  $n \geq 3$ , por el Teorema 3.5. Por otra parte,  $C(f)$ ,  $C_2(f)$  y  $2^f$  son confluyentes, por el Teorema 3.10.

A continuación mostraremos funciones confluyentes  $f$  particulares, tales que la función inducida  $C_n(f)$  es confluyente para  $n \in \{1, 2\}$ , y en las cuales, las condiciones dadas en el Teorema 1.48 brindan una solución parcial a una de las preguntas realizadas en este trabajo.

**Teorema 3.12.** Sean  $X, Y$  continuos y  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente. Si  $X = Z \cup (\bigcup_{j=1}^n R_j)$  es un continuo que satisface:

1.  $Z$  es localmente conexo y  $R_j$  es un rayo, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;
2.  $R_i \cap Z = \emptyset$  y  $Cl_X(R_i) \setminus R_i \subset Z$ ; para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;
3.  $R_i \cap R_l = \emptyset$  con  $i \neq l$ .

Si  $Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces  $2^f$  y  $C_n(f)$  son confluyentes para  $n \in \{1, 2\}$ .

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente, tal que  $X$  y  $Y$  satisfacen las condiciones dadas en las hipótesis del teorema. Observemos que  $Y$  es localmente conexo, por el Teorema 1.48. Así,  $2^f$  y  $C_n(f)$  son confluyentes para  $n \in \{1, 2\}$ , por el Teorema 3.10. ■

Con el siguiente resultado mostramos otra condición sobre el dominio de una función confluyente cuyo recorrido tiene la propiedad de arcoaproximación, para que las funciones inducidas  $2^f$  y  $C_n(f)$  sean confluyentes. De manera similar a como probamos el Teorema 3.12, tenemos el siguiente resultado por los Teoremas 1.50 y 3.10.

**Teorema 3.13.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función confluyente tal que  $Y$  es un continuo con la propiedad de arcoaproximación y  $X$  es el espacio cociente  $(X_1 \cup X_2)/\{x_1, x_2\}$ , donde  $X_i$  es la compactación de un rayo  $R_i$  con residuo localmente conexo, para  $i \in \{1, 2\}$ , y,  $x_1$  y  $x_2$  son los puntos finales de los rayos  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Entonces las funciones inducidas  $2^f$  y  $C_n(f)$  son confluyentes para  $n \in \{1, 2\}$ .

Como vimos en el Teorema 1.41, todo espacio localmente conexo tiene la propiedad de arcoaproximación. De esta manera podemos cambiar la condición de conexidad local de  $2^Y$  (respectivamente  $C_n(Y)$ , con  $n \in \{1, 2\}$ ) en el Teorema 3.10, por la propiedad de ser arcoaproximado. Así, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.14.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función confluyente entre continuos y  $2^Y$  (respectivamente,  $C_n(Y)$  con  $n \in \{1, 2\}$ ) tiene la propiedad de arcoaproximación, entonces  $2^f$  (respectivamente,  $C_n(f)$  con  $n \in \{1, 2\}$ ) es confluyente.

*Demostración.* Sean  $\mathcal{L}$  un subcontinuo de  $2^Y$  y  $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ . Dado que  $2^Y$  tiene la propiedad de arcoaproximación, existen continuos arcoconexos  $\mathcal{L}_n$  que contienen a  $f(K)$  tales que  $\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n$ . Sean  $\mathcal{K}_n$  las componentes de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$  que contiene a  $K$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $2^f(\mathcal{K}_n) = \mathcal{L}_n$ , por el Corolario 2.51. Como  $2^{2^X}$  es compacto, existe una subsucesión  $\{\mathcal{K}_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$  de  $\{\mathcal{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{n_i} = \mathcal{K}$ , para algún  $\mathcal{K} \subset 2^X$ . Entonces, se puede verificar que  $K$  pertenece a  $\mathcal{K}$  y  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . Por lo tanto,  $2^f$  es confluyente.

De la misma manera se realiza la prueba para  $C_n(f)$ . ■

---

### 3.3. Otras funciones inducidas confluentes

---

En esta sección mostraremos algunos resultados y propiedades importantes de la función inducida entre los  $n$ -ésimos hiperespacios de suspensión. Veamos primero algunos resultados relacionados con la confluencia de la función inducida definida entre productos simétricos.

La prueba del siguiente resultado la tomamos de [12, Teorema 2.12].

**Teorema 3.15.** *Si  $F_n(f) : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es confluyente para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  una función confluyente.*

*Demostración.* Sean  $B$  un subcontinuo de  $Y$  y  $D$  una componente de  $f^{-1}(B)$ . Probemos que  $f(D) = B$ . Tomemos  $F_1(B)$  subcontinuo de  $F_n(Y)$  y sea  $\mathcal{C}$  la componente de  $F_n(f)^{-1}(F_1(B))$  tal que  $F_1(D) \subset \mathcal{C}$ . Note que  $\cup \mathcal{C}$  es un subcontinuo de  $X$ , por Corolario 1.22. Sean  $x \in \cup \mathcal{C}$  y  $A \in \mathcal{C}$  tales que  $x \in A$ . Como  $F_n(f)(\mathcal{C}) \subset F_1(B)$ , podemos decir que existe  $y_0 \in Y$  tal que  $f(A) = \{y_0\}$ . Así,  $f(x) = y_0$ . Con lo anterior vemos que  $\cup \mathcal{C}$  es un subcontinuo contenido en  $f^{-1}(B)$  tal que  $D \subset \cup \mathcal{C}$ . Como  $D$  es componente,  $D = \cup \mathcal{C}$ . Finalmente, como  $F_n(f)$  es confluyente,  $F_n(f)(\mathcal{C}) = F_1(B)$ . Pero esto implica que  $f(\cup \mathcal{C}) = f(D) = B$ . Por lo tanto,  $f$  es confluyente. ■

Del Ejemplo 3.2 podemos observar que la confluencia de  $f$  no implica la confluencia de  $F_n(f) : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  cuando  $n = 2$ .

Dado que la definición de la función  $HS_n(f)$  está directamente relacionada con la función  $C_n(f)$ , tenemos el siguiente resultado. La prueba es tomada de [3, Teorema 2.9].

**Teorema 3.16.** *Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $C_n(f)$  es confluyente, entonces  $HS_n(f)$  es confluyente.*

*Demostración.* De la definición de  $HS_n(f)$ , sabemos que:

$$q_Y^n \circ C_n(f) = HS_n(f) \circ q_Y^n,$$

para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $q_Y^n$  es monótona,  $q_Y^n$  es confluente. Además tenemos que  $q_Y^n \circ C_n(f)$  es confluente, por la Observación 1.30. Así,  $HS_n(f) \circ q_Y^n$  es confluente, por lo tanto,  $HS_n(f)$  es confluente, por la Observación 1.34. ■

Aunque las funciones semiconfluentes las estudiaremos en el Capítulo 4, a continuación enunciaremos un resultado que involucra esta clase de funciones cuya prueba esta tomada de [3, Teorema 2.23].

**Teorema 3.17.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $C_n(f)$  es semiconfluente, entonces  $f$  es confluente.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es confluente. Entonces existen un subcontinuo no degenerado  $L$  de  $Y$ , por [9, Proposición 2.11] y una componente  $D$  de  $f^{-1}(L)$  tales que  $f(D)$  no es degenerado y  $f(D) \neq L$ .

Sea  $p \in L \setminus f(D)$ . Entonces existen un arco de orden  $\mathcal{L}_1$  en  $C(Y)$  de  $\{p\}$  a  $L$ , y un arco de orden  $\mathcal{L}_2$  en  $C(Y)$  de  $f(D)$  a  $L$ , por el Teorema 2.15. Denotemos  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup F_1(L)$  y definamos:

$$\mathcal{K} = \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}\} \quad (3.1)$$

donde  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  son puntos diferentes de  $Y \setminus L$ . Claramente,  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo de  $C_n(Y)$ .

Sea  $P_i$  una componente de  $f^{-1}(y_i)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  las componentes de  $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$  tales que  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup D \in \mathcal{D}$  y  $\{P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup P : P \in F_1(D)\} \subset \mathcal{E}$ .

Notemos que  $C_n(f)(\cup \mathcal{D}) \subset \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup L$ , por la Proposición 2.52. De lo anterior, podemos expresar a  $\cup \mathcal{D} = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{n-1} \cup E$ , donde  $Q_i$  es un subconjunto conexo de  $f^{-1}(y_i)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , y  $E \subset f^{-1}(L)$ .

Cada componente de  $\cup \mathcal{D}$  intersecciona a  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup D$ , por el Lema 2.24. Como  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  y  $D$  son componentes de  $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \dots, f^{-1}(y_{n-1})$  y  $f^{-1}(L)$ , respectivamente,  $Q_i \subset P_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , y  $E \subset D$ . Así,  $\cup \mathcal{D} = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup D$ .

Sea  $R \in \mathcal{D}$ . Entonces  $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{n-1} \cup D'$ , donde  $R_i \subset P_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , y  $D' \subset D$ . De lo anterior, tenemos que  $f(D') \subset L \setminus \{p\}$  y  $C_n(f)(R) \in \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2 \cup F_1(L)\}$ , por (3.1)

Notemos que  $\{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$  y  $\{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\}$  son subconjuntos cerrados de  $\mathcal{K}$  y:

$$\{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\} \cap \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\} = \emptyset \quad (3.2)$$

Como  $C_n(f)(\mathcal{D})$  es conexo y:

$$\{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup f(D) \in C_n(f)(\mathcal{D})\} \cap \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\},$$

tenemos que  $C_n(f)(R) \in \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$ . Con lo que concluimos que  $C_n(f)(D) \subset \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$ .

De manera similar probamos que:

$$C_n(f)(\mathcal{E}) \subset \{\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\}$$

Luego,  $C_n(f)(\mathcal{D}) \cap C_n(f)(\mathcal{E}) = \emptyset$ , por (3.2).

Así,  $C_n(f)(\mathcal{D}) \not\subseteq C_n(f)(\mathcal{E})$ . Luego  $C_n(f)$  no es empalmante y, por tanto,  $C_n(f)$  no es semiconfluente. ■

Del Teorema 3.17 y la definición de  $HS_n(f)$ , tenemos el siguiente resultado. [3, Teorema 2.25].

**Teorema 3.18.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $HS_n(f): HS_n(X) \rightarrow HS_n(Y)$  es confluente, entonces  $f$  es confluente.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es confluente. Entonces existen un subcontinuo no degenerado  $L$  de  $Y$ , por [9, Proposición 2.11] y una componente  $D$  de  $f^{-1}(L)$  tales que  $f(D)$  no es degenerado y  $f(D) \neq L$ .

Consideraremos dos casos:

1.  $n = 1$ . Sea  $p \in L \setminus f(D)$ . Entonces existen dos arcos de orden  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  en  $C(Y)$ , de  $f(D)$  a  $L$  y de  $\{p\}$  a  $L$ , respectivamente.

Sea  $\mu: C(L) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney, por el Teorema 2.35. Para cada  $t \in [0, \mu(f(D))]$ , definamos  $\{E_t\} = \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{R}_2$ . Tomemos  $0 < t_0 < \mu(f(D))$  tal que  $E_{t_0} \cap f(D) = \emptyset$ . Sea  $\mathcal{L}_2$  un arco de orden en  $C(Y)$ , de  $E_{t_0}$  a  $L$ . Definamos  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mu^{-1}(t_0)$ . Además  $\mu^{-1}(t_0)$  es un subcontinuo de  $C(L)$ , por [28, Teorema 14.2]. Notemos que  $\mathcal{L}_1 \cap \mu^{-1}(t_0) = \emptyset$  y  $\mathcal{L}_2 \cap \mu^{-1}(t_0) = \{E_{t_0}\}$ . Con esto,  $\mathcal{L}$  es un subcontinuo de  $C(Y)$ . Además, es importante que observemos que  $\mathcal{L} \cap F_1(Y) = \emptyset$ .

Como  $\mu(f(D)) > t_0$ , existe un subcontinuo  $D_0$  de  $D$  tal que  $\mu(f(D_0)) = t_0$ . Así,  $f(D_0) \subset L \setminus \{p\}$ . Sea  $\mathcal{D}$  la componente de  $C(f)^{-1}(\mathcal{L})$  tal que  $D \in \mathcal{D}$  y  $D_0 \in \mathcal{E}$ .

Probemos que  $C(f)(\mathcal{D}) = \{f(D)\}$ . Como  $D \subset \cup \mathcal{D}$  y cada componente de  $\cup \mathcal{D}$  interseca a  $D$ , por el Lema 2.24, tenemos que  $\cup \mathcal{D}$  es un continuo. Además, como  $D$  es una componente de  $f^{-1}(L)$ , tenemos que  $\cup \mathcal{D} = D$ .

Sea  $E \in \mathcal{D}$ . Entonces, por la definición de  $\mathcal{L}$ , tenemos la siguiente situación  $E \subset D$ ,  $f(E) = f(D)$  o  $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$ . Supongamos que  $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$ . Dado que  $C(f)(\mathcal{D})$  es conexo,  $f(D) \in C(f)(\mathcal{D})$  y  $E_{t_0}$  es un punto de corte de  $\mathcal{L}$ , aseguramos que  $E_{t_0} \in C(f)(\mathcal{D})$ . Pero esto es una contradicción, pues  $\cup \mathcal{D} = D$  y  $E_{t_0} \subset L \setminus f(D)$ . De lo anterior, tenemos que  $f(E) = f(D)$  y  $C(f)(\mathcal{D}) = \{f(D)\}$ . De manera similar,  $f(\cup \mathcal{E}) \subset \mathcal{L}$  y, como  $D_0 \subset \cup \mathcal{E}$ ,  $f(\cup \mathcal{E}) \subset f(D) \subset L \setminus E_{t_0}$ .

Ahora, sea  $E \in \mathcal{E}$ . Entonces  $f(E) \subset \mathcal{L}_1$  o  $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$ . Supongamos que  $f(E) \subset \mathcal{L}_1$ . Dado que  $D_0 \in \mathcal{E}$ , entonces  $C(f)(\mathcal{E}) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$ . De esta manera,  $E_{t_0} \in C(f)(\mathcal{E})$ , por la definición de  $\mathcal{L}$ , lo que contradice que  $f(\cup \mathcal{E}) \subset L \setminus E_{t_0}$ , por lo tanto,  $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$ . Por consiguiente,  $C(f)(\mathcal{E}) \subset \mu^{-1}(t_0)$ . Así,  $C(f)(\mathcal{D}) \subset \mathcal{L}$ ,  $q_X(\mathcal{D})$  es una componente de  $HS(f)(q_Y(\mathcal{L}))$ . Por lo que:

$$HS(f)(q_X(\mathcal{D})) \subset \mathcal{L}$$

lo cual implica que  $HS(f)$  no es confluyente.

2.  $n \geq 2$ . Sea  $p \in L \setminus f(D)$ . Entonces existen dos arcos de orden  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en  $C(Y)$ , de  $\{p\}$  a  $L$  y de  $f(D)$  a  $L$ , respectivamente, por el Teorema 2.15. Definamos  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup F_1(Y)$ . Sean  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  puntos diferentes de  $Y \setminus L$ . Existe un subcontinuo  $Q$  de  $Y$  tal que  $\{y_1\} \subsetneq Q \subset Y \setminus (L \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\})$ , por el Corolario 1.22. Definimos:

$$\mathcal{K} = \{Q \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}\}.$$

Claramente,  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo de  $C_n(Y)$ . Además,  $\mathcal{K} \cap F_n(Y) = \emptyset$ .

Como  $HS_n(f)$  es confluyente, tenemos que  $f$  es confluyente. Así, existe una componente  $R$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que  $f(R) = Q$ . Sea  $P_i$  una componente de  $f^{-1}(y_i)$  para  $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ . Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  las componentes de  $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$  tales que  $R \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup D \in \mathcal{D}$  y  $\{R \cup P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} \cup E : E \in F_1(D)\} \subset \mathcal{E}$ . Así, tenemos que  $C_n(f)(\mathcal{D}) \subsetneq \mathcal{K}$ . Notemos que,  $q_X^n(\mathcal{D})$  es una componente de  $HS_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$ . De lo que tenemos que:

$$HS_n(f)(q_X^n(\mathcal{D})) \subset \mathcal{K}$$

Por lo tanto,  $HS_n(f)$  no es confluyente.

De 1 y 2 queda completa la prueba. ■

La prueba del siguiente resultado la tomamos de [3, Teorema 2.33].

**Teorema 3.19.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \geq 3$ . Si  $HS_n(f)$  es confluyente entonces  $f$  es monótona.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es monótona. No es difícil ver que existe un subcontinuo no degenerado de  $Q$  de  $Y$  tal que  $f^{-1}(Q)$  no es conexo. Sean  $D$  y  $E$  componente distintas de  $f^{-1}(Q)$ . Sea  $p \in Y \setminus Q$ . Así, existe un subcontinuo  $P$  de  $Y$  tal que  $\{p\} \subsetneq P \subset Y \setminus Q$ , por el Corolario 1.22. Sea  $\mathcal{K} = \{A \cup Q : A \in C_{n-1}(P)\}$ . Note que  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo de  $C_n(Y)$ . Sea  $R$  una componente de  $f^{-1}(P)$ . Como  $HS_n(f)$  es confluyente,  $f$  es débilmente confluyente, por el Teorema 3.18. Luego  $f(R) = P$ . Sea  $\mathcal{D}$  una componente de  $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$  tal que  $D \cup E \cup R \in \mathcal{D}$ . Tenemos que  $\cup \mathcal{D} \in C_n(X)$ , por Teorema 2.25. Como  $D \cup E \cup R \subset \cup \mathcal{D}$ , existe una componente  $J$  de  $\cup \mathcal{D}$  tal que  $D \subset J$ . Así, tenemos que  $f(J) \subset P \cup Q$ , por la Proposición 2.52. Como  $f(J)$  es conexo y  $f(J) \cap Q \neq \emptyset$ , tenemos que  $f(J) \subset Q$ . Así,  $J = D$

pues,  $D$  es una componente de  $f^{-1}(Q)$ . Además,  $D$  es una componente de  $\cup \mathcal{D}$ . De manera similar podemos probar que  $E$  es una componente de  $\cup \mathcal{D}$ .

Si  $A \in \mathcal{D}$ , cada componente de  $\cup \mathcal{D}$  interseca a  $A$ , por el Lema 2.24. Así,  $f(A)$  tiene a lo más  $n - 2$  componentes en  $P$ ,  $C_n(f)(\mathcal{D}) \subset \{A \cup Q : A \in C_{n-2}(P)\}$  y  $C_n(f)(\mathcal{D}) \neq \mathcal{K}$ . Note que  $\mathcal{K} \cap F_n(Y) = \emptyset$ . Luego,  $q_X^n(\mathcal{D})$  es una componente de  $HS_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$  tal que  $HS_n(f)(q_X^n(\mathcal{D})) \neq q_Y^n(\mathcal{K})$ . Por lo tanto,  $HS_n(f)$  no es confluente. ■

Con el siguiente teorema resumimos las relaciones de confluencia existentes entre las funciones  $f$ ,  $HS_n(f)$ ,  $F_n(f)$ ,  $C_n(f)$  y  $2^f$ .

**Teorema 3.20.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces:*

1. Si  $F_n(f)$  es confluente, entonces  $f$  es confluente.
2. Si  $C_n(f)$  es confluente, entonces  $HS_n(f)$  es confluente.
3. Si  $HS_n(f)$  es confluente, entonces  $f$  es confluente.
4. Si  $2^f$  es confluente, entonces  $f$  es confluente.

Aunque las funciones monótonas no constituyen el tema de estudio principal de este trabajo, se conoce que las relaciones que hemos estado estudiando entre  $f$ ,  $C_n(f)$ ,  $2^f$  y  $HS_n(f)$  son equivalentes. Información sobre estas equivalencias se puede consultar en [15, Teorema 3.2] y [18, Teorema 6.3]. Este hecho y el Teorema 3.19 nos permite enunciar un resultado interesante y general donde involucramos las funciones confluentes.

**Teorema 3.21.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $f$  es monótona.
2.  $C_n(f)$  es monótona.
3.  $HS_n(f)$  es monótona.
4.  $C_n(f)$  es confluente, para  $n \geq 3$ .
5.  $HS_n(f)$  es confluente, para  $n \geq 3$ .
6.  $2^f$  es monótona.

*Demostración.* La equivalencia entre 1., 2., 3. y 6. se tiene de [15, Teorema 3.2] y de [18, Teorema 6.3]. Observe que 4 implica 5 por el Teorema 3.16. Además, tenemos que 5. implica 1., por el Teorema 3.19. De nuevo tenemos que, como toda función monótona es confluente, se sigue que 2. implica 4. Por lo tanto, se tiene la equivalencia de las anteriores proposiciones. ■

Del Teorema 3.21, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.22.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y enteros  $n, m \geq 3$ . Entonces la función inducida  $C_n(f)$  es confluyente si y sólo si  $C_m(f)$  es confluyente.*

# CAPÍTULO 4

## FUNCIONES INDUCIDAS CONFLUENTES ENTRE HIPERESPACIOS

De manera similar a como se estudiaron las relaciones entre la confluencia de una función dada y la confluencia de sus funciones inducidas, en el presente capítulo estudiaremos las mismas relaciones pero ahora con las clases de funciones: semiconfluentes, débilmente confluentes y pseudoconfluentes.

En el artículo “*Arc approximation property and confluence of induced mappings*” [9], el profesor W. J. Charatonik muestra que la propiedad de arcoaproximación en el hiperespacio del recorrido no garantiza la semiconfluencia, la confluencia débil ni la pseudoconfluencia de las funciones inducidas de una función  $f$  con la misma propiedad.

Por otra parte, podemos observar de estos mismos ejemplos que la condición de la conexidad local, utilizada en el capítulo anterior, tampoco garantiza la equivalencia entre las relaciones de la función  $f$  y sus funciones inducidas mostradas en el capítulo anterior.

El siguiente resultado es muy útil para las secciones siguientes, pues muestra la relación existente entre la función inducida de los  $n$ -ésimos hiperespacios y la función inducida de los  $n$ -ésimos hiperespacios de suspensión.

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [3, Teorema 2.9].

**Teorema 4.1.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{A}$  es alguna de las siguientes clases de funciones: confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, pseudoconfluentes, entonces tenemos que:*

$$\text{Si } C_n(f) \in \mathcal{A}, \text{ entonces } HS_n(f) \in \mathcal{A}$$

*Demostración.* De la definición de  $HS_n(f)$ , sabemos que:

$$q_Y^n \circ C_n(f) = HS_n(f) \circ q_Y^n,$$

para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $q_Y^n$  es monótona,  $q_Y^n$  es confluente. De esta forma tenemos que  $q_Y^n \circ C_n(f) \in \mathcal{A}$ , por la Observación 1.30. Así,  $HS_n(f) \circ q_Y^n \in \mathcal{A}$ , por lo tanto,  $HS_n(f) \in \mathcal{A}$ , por la Observación 1.34. ■

---

## 4.1. Funciones semiconfluente

---

Con el siguiente teorema mostramos las relaciones existentes entre las funciones inducidas y la semiconfluencia de una función. Este resultado es una consecuencia del Teorema 4.20 de [9].

**Teorema 4.2.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces tenemos que:*

1. *Si  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  es semiconfluente, entonces  $f$  es semiconfluente, para  $n \in \mathbb{N}$ .*
2. *Si  $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$  es semiconfluente, entonces  $f$  es semiconfluente.*

*Demostración.* Del Teorema 3.17, tenemos que si  $C_n(f)$  es semiconfluente, entonces  $f$  es confluente y, por tanto, semiconfluente.

Probemos ahora que si  $2^f$  es semiconfluente, entonces  $f$  es semiconfluente. Supongamos que  $f$  no es semiconfluente. Así, existen un subcontinuo  $K$  en  $Y$  y dos componentes  $A$  y  $B$  de  $f^{-1}(D)$ , tales que  $f(A) \not\subseteq f(B)$  y  $f(B) \not\subseteq f(A)$ . Tenemos que  $2^D$  es un subcontinuo de  $2^Y$  y  $2^A$  y  $2^B$  son componentes de  $(2^f)^{-1}(2^D)$ , por la Proposición 2.45. Como  $f(A) \not\subseteq f(B)$ , existen  $w \in f(A) \setminus f(B)$  y  $a \in A$  tales que  $f(a) = w$ . Note que  $\{a\} \in 2^A$ . Así,  $2^f(\{a\}) = \{f(a)\} \in 2^f(2^A)$ . Luego,  $\{f(a)\} \notin 2^f(2^B)$ . Por lo tanto,  $2^f(A) \not\subseteq 2^f(B)$ . De manera similar, probamos que  $2^f(B) \not\subseteq 2^f(A)$ . De lo cual concluimos que  $2^f$  no es semiconfluente. ■

En [9, Ejemplo 4.24] se muestra un ejemplo en el cual dada una función  $f$  confluente y, por tanto, semiconfluente, las funciones inducidas  $2^f$  y  $C(f)$  no son semiconfluente. A continuación mostraremos los detalles de dicho ejemplo.

**Ejemplo 4.3.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Existe una función confluente y, por tanto, semiconfluente  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $C_n(f)$  no es semiconfluente, para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* En el plano Euclidiano con coordenadas polares  $(r, \theta)$  definimos los siguientes conjuntos:

$$S^1 = \{(1, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$A_1 = \{(r, \theta) : \theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right), 1 < r \leq 1 + \frac{2}{\pi}\},$$

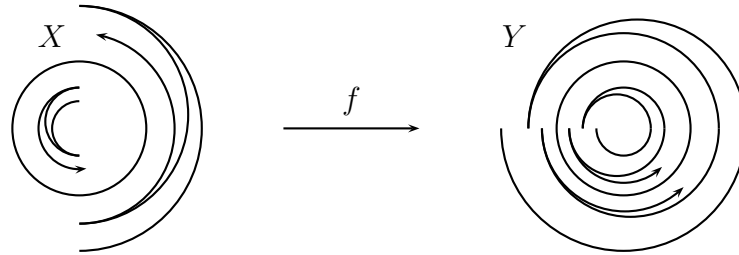


Figura 4.1:  $f$  semiconfluente y  $C_n(f)$  no semiconfluente para ninguna  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_2 &= \{(r, \theta) : \theta = \frac{\pi}{2}[2 + \text{sen}(\frac{1}{1-r})], 1 - \frac{2}{3\pi} \leq r < 1\}, \\ B_1 &= \{(r, \theta) : \theta = \pi \text{sen}(\frac{1}{1-r}), 1 < r \leq 1 + \frac{2}{\pi}\}, \\ B_2 &= \{(r, \theta) : \theta = \pi[2 + \text{sen}(\frac{1}{1-r})], 1 - \frac{2}{3\pi} \leq r \leq 1\}. \end{aligned}$$

En el Ejemplo 3.2 mostramos que la función  $f|_{S^1 \cup A_1}$  es confluyente para cada  $(r, \theta) \in S^1 \cup A_1$ . Si consideramos que  $f(A_2) = B_2$ , no es difícil ver que  $f$  definida sobre los continuos  $X = S^1 \cup A_1 \cup A_2$  y  $Y = S^1 \cup B_1 \cup B_2$ , también es confluyente y, así, semiconfluente según el Diagrama 1.2. Sin embargo, tenemos que la función inducida  $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$  no es semiconfluente, como veremos a continuación.

Sea  $\mathcal{K}$  tal como en el Ejemplo 3.2 y definamos  $\mathcal{L} = \{L_t : t \in [0, 1]\}$ , donde  $L_t = \{(1, \theta) : \frac{\pi}{2}(t+1) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}(2t+1)\}$ . Claramente,  $\mathcal{L}$  es subconjunto de  $C(S^1)$ .

De manera similar a como se mostró en el Ejemplo 3.2,  $\mathcal{K}$  es un arco en  $C(X)$  con punto inicial  $K_0$  y punto final  $K_1$ . También tenemos que  $\mathcal{L}$  es un arco en  $C(X)$  con punto inicial  $L_0$  y punto final  $L_1$ . Además, es fácil ver que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$  y  $C(f)(\mathcal{K}) = C(f)(\mathcal{L})$ .

Sean  $g : S^1 \cup A_1 \rightarrow S^1$  y  $h : S^1 \cup A_2 \rightarrow S^1$  las proyecciones definidas por  $g(r, \theta) = (1, \theta)$ , para cada  $(r, \theta) \in S^1 \cup A_1$ , y  $h(r, \theta) = (1, \theta)$ , para cada  $(r, \theta) \in S^1 \cup A_2$ . Claramente,  $g$  y  $h$  son continuas y sobreyectivas. Sea  $C(g) : C(S^1 \cup A_1) \rightarrow C(S^1)$  y  $C(h) : C(S^1 \cup A_2) \rightarrow C(S^1)$  las funciones inducidas. Dado que  $\mathcal{K} \subset C(S^1)$  y  $\mathcal{L} \subset C(S^1)$ , tenemos que  $(C(g))^{-1}(\mathcal{K}) \subset C(S^1 \cup A_1)$  y  $(C(g))^{-1}(\mathcal{L}) \subset C(S^1 \cup A_2)$ . Definamos  $\mathcal{M}_0 = (C(g))^{-1}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{N}_0 = (C(h))^{-1}(\mathcal{L})$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $g(K_t) = K_t$  y  $h(L_t) = L_t$ , es decir,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}_0$ . Además,  $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{N}_0$ , usando el mismo argumento del Ejemplo 3.2. Note que  $C(S^1) \cap \mathcal{M}_0 = \mathcal{K}$  y  $C(S^1) \cap \mathcal{N}_0 = \mathcal{L}$ .

Note que  $\mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{N}_0$  son subcontinuos de  $C(X)$ . Por la continuidad de  $C(f)$ , tenemos que  $C(f)(\mathcal{M}_0)$  y  $C(f)(\mathcal{N}_0)$  son subcontinuos de  $C(Y)$ . Además,  $C(f)(\mathcal{M}_0) \cap C(f)(\mathcal{N}_0) = C(f)(\mathcal{K})$ . Definamos:

$$\mathcal{B} = C(f)(\mathcal{M}_0) \cup C(f)(\mathcal{N}_0). \text{ Observemos que } \mathcal{B} \text{ es un subcontinuo de } C(Y).$$

Usando los argumentos del Ejemplo 3.2, es posible ver que  $\mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{N}_0$  son componentes

de  $C(f)^{-1}(\mathcal{B})$ ,  $C(f)(\mathcal{M}_0) \subsetneq C(f)(\mathcal{N}_0)$  y  $C(f)(\mathcal{N}_0) \subsetneq C(f)(\mathcal{M}_0) \neq \mathcal{B}$ . Por lo tanto,  $C(f)$  no es semiconfluente.

Sea  $\mathcal{B}' = \{K \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} : K \in C(f)(\mathcal{M}_0) \cup C(f)(\mathcal{N}_0)\}$ , donde  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  son puntos diferentes de  $Y$  tales que  $\{y_i\} \notin C(f)(\mathcal{M}_0) \cup C(f)(\mathcal{N}_0)$  para ninguna  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Note que  $\mathcal{B}' \subset C_n(Y)$ . Sea  $P_i$  una componente de  $f^{-1}(y_i)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Así, existen dos componentes  $\mathcal{M}'_0 = \{L \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} P_i) : L \in \mathcal{M}_0\}$  y  $\mathcal{N}'_0 = \{L \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} P_i) : L \in \mathcal{N}_0\}$  de  $C_n(f)^{-1}(\mathcal{B}')$  tales que  $C_n(f)(\mathcal{M}'_0) \subsetneq C_n(f)(\mathcal{N}_0)$  y  $C_n(f)(\mathcal{N}'_0) \subsetneq C_n(f)(\mathcal{M}_0)$ . Por lo tanto,  $C_n(f)$  no es semiconfluente. ■

Al igual que en el Teorema 3.10, podríamos pensar qué condiciones adicionales sobre los espacios se deben tener para que las proposiciones del Teorema 4.2 sean equivalentes. Una de dichas condiciones adicionales es la conexidad local en el recorrido. Con el siguiente ejemplo mostramos que dicha equivalencia no se satisface bajo esta condición.

**Ejemplo 4.4.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Existe un función semiconfluente  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  localmente conexo tal que  $C_n(f)$  y  $2^f$  no son semiconfluente.

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ -t + \frac{3}{2}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Note que  $f$  es una función semiconfluente. Veamos que  $C(f)$  no es semiconfluente. Sea  $\mathcal{L} = \{[0, \alpha] : \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\} \cup \{[\alpha, \frac{1}{2}] : 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\} \cup \{[\alpha, \frac{3}{4}] : 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\}$ . Note que  $\mathcal{L}$  es un arco en  $C([0, 1])$ . Si tomamos  $\mathcal{L}' = \{A \cup \{\frac{1}{4}\} : A \in \mathcal{L}\} \subset C_2(Y)$ , tenemos que  $C(f)^{-1}(\mathcal{L}')$  tiene como componentes a  $\mathcal{A} = \{[0, \beta] : \frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{3}{8}\} \cup \{[\beta, \frac{1}{4}] : 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}\} \cup \{[\beta, \frac{3}{8}] : 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}\}$ ,  $\mathcal{B} = \{1\}$  y  $\mathcal{C} = \{(\frac{3}{4}, 1)\}$ .

Así, tenemos que  $C(f)(\mathcal{B}) \not\subseteq C(f)(\mathcal{C})$  y  $C(f)(\mathcal{C}) \not\subseteq C(f)(\mathcal{B})$ . Por lo tanto,  $C(f)$  no es semiconfluente. Para el caso  $n \geq 2$ , note que  $C_n(f)$  no es semiconfluente. Supongamos que  $C_n(f)$  es semiconfluente, para  $n \geq 2$ . Por el Teorema 3.17, tentemos que  $f$  es confluyente, sin embargo, claramente la función definida es semiconfluente pero no confluyente, por tanto,  $C_n(f)$  no es semiconfluente, para  $n \geq 2$ . Para ver que  $2^f$  no es semiconfluente, basta tomar el continuo  $\mathcal{L}$  definido en este mismo ejemplo. Así, tenemos que  $2^f(\mathcal{B}) \not\subseteq 2^f(\mathcal{C})$  y  $2^f(\mathcal{C}) \not\subseteq 2^f(\mathcal{B})$ . Por lo tanto,  $2^f$  no es semiconfluente.

Con el siguiente ejemplo mostramos que para toda  $n \geq 3$ ,  $C_n(f)$  no es semiconfluente para una función  $f$  semiconfluente.

**Ejemplo 4.5.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Existe un función semiconfluente  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  localmente conexo tal que  $C_n(f)$  no es semiconfluente para ninguna  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función definida por:

$$f(t) = 1 - |2t - 1|.$$

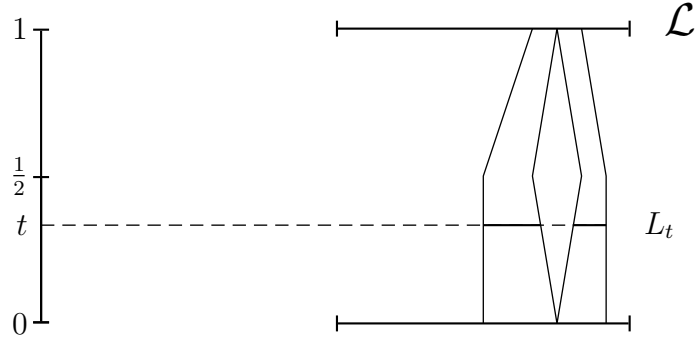


Figura 4.2:  $f$  semiconfluente,  $Y$  localmente conexo y  $C_n(f)$  no semiconfluente para ninguna  $n \geq 3$

Note que  $f$  es una función abierta y, por tanto, semiconfluente. Entonces tenemos que la función  $f$  es abierta y confluente. Definamos:

$$L_t = \begin{cases} A_t \cup B_t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ C_t \cup D_t, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

para cada  $t \in [0, 1]$ , donde  $A_t = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4} - \frac{t}{6}]$ ,  $B_t = [\frac{t}{6} + \frac{3}{4}, \frac{11}{12}]$ ,  $C_t = [\frac{t}{3} + \frac{1}{3}, \frac{t}{6} + \frac{7}{12}]$  y  $D_t = [\frac{11}{12} - \frac{t}{6}, 1 - \frac{t}{6}]$ .

Notemos que  $L_{\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$ ,  $L_0 = [\frac{1}{2}, \frac{11}{12}]$ ,  $L_1 = [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$ . Además, para cada  $t \in (0, 1)$ , tenemos que  $L_t \in C_2([0, 1]) \setminus C([0, 1])$ . Tomemos  $\mathcal{L} = \{L_t \mid t \in [0, 1]\}$ . En la Figura 4.2 representamos el arco  $\mathcal{L}$  en  $C_2([0, 1])$ . Definamos  $\mathcal{K} = \{L \cup \{0\} \mid L \in \mathcal{L}\}$ . Note que  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo de  $C_3([0, 1])$ . Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  las componentes de  $(C_3(f))^{-1}(\mathcal{K})$  tales que  $\{0, 1\} \cup [\frac{1}{4}, \frac{11}{24}] \in \mathcal{D}$  y  $\{0, 1\} \cup [\frac{1}{3}, \frac{5}{12}] \in \mathcal{E}$ . Observemos que  $C_3(f)(\mathcal{D}) = \{\{0\} \cup L_1\}$  y que  $C_3(f)(\mathcal{E}) = \{\{0\} \cup L_0\}$ . Así, tenemos que  $C_3(f)$  no es empalmante, por tanto,  $C_3(f)$  no es semiconfluente. De manera similar se puede ver que  $C_n(f)$  no es semiconfluente para ninguna  $n > 3$ . ■

Del Ejemplo 4.5, es natural realizarnos la siguiente pregunta que aún es un problema abierto.

**Pregunta 4.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. ¿Si  $f$  es semiconfluente, entonces  $C_2(f)$  es semiconfluente?

De lo anterior, también nos surge una pregunta que involucra a las funciones inducidas y los  $n$ -ésimos hiperespacios de continuos, dicha pregunta es la siguiente.

**Pregunta 4.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. ¿Si  $C(f)$  es semiconfluente, entonces  $C_2(f)$  es semiconfluente?

Una respuesta parcial a esta pregunta la daremos con el siguiente resultado.

**Lema 4.8.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $Y$  es localmente conexo entonces  $C(f)$  es semiconfluente si y sólo si  $C_2(f)$  es semiconfluente.*

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $Y$  localmente conexo. Sea  $n \in \{1, 2\}$ . Como  $C_n(f)$  es semiconfluente,  $f$  es confluente, por el Teorema 3.17. Así,  $f$ ,  $C(f)$  y  $C_2(f)$  son confluentes por el Teorema 3.10. De esta forma,  $C(f)$  y  $C_2(f)$  son semiconfluentes, con lo que tenemos la prueba de nuestro teorema. ■

Concluimos esta sección con el siguiente resultado. El cual se sigue fácilmente de los Teoremas 3.10, 3.16, 3.20, [4, Teorema 5.2] y Diagrama 1.2 que hemos desarrollado hasta el momento.

**Corolario 4.9.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos y  $Y$  localmente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1.  $C_n(f)$  es semiconfluente, para  $n \in \{1, 2\}$ .
2.  $HS_n(f)$  es semiconfluente, para  $n \in \{1, 2\}$ .
3.  $f$  es confluente.
4.  $C_n(f)$  es confluente, para  $n \in \{1, 2\}$ .
5.  $HS_n(f)$  es confluente, para  $n \in \{1, 2\}$ .

---

## 4.2. Funciones débilmente confluentes

---

En esta sección mostraremos, como en la sección anterior, las relaciones existentes entre una las funciones inducidas de una función  $f$  respecto a la confluencia débil.

**Teorema 4.10.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces:*

1. Si  $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  es débilmente confluente, entonces  $f$  es débilmente confluente, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ;
2. Si  $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$  es débilmente confluente, entonces  $f$  es débilmente confluente.

*Demostración.* Veamos que si  $2^f$  es débilmente confluente entonces  $f$  es débilmente confluente. Supongamos que  $f$  no es débilmente confluente. Entonces existe un subcontinuo  $K$  de  $Y$  tal que para toda componente  $L$  de  $f^{-1}(K)$ ,  $f(L) \subsetneq K$ . Sean  $L$  una componente de  $f^{-1}(K)$  y  $y \in K \setminus f(L)$ . Note que  $\{y\}$  pertenece a  $2^K$ . Tenemos que  $2^L$  es una componente de  $(2^f)^{-1}(2^K)$ , por la Proposición 2.45. Así,  $\{y\} \in 2^K \setminus 2^f(2^L)$  y  $2^f(2^L) \subsetneq 2^K$ . Como  $L$  fue una componente arbitraria de  $f^{-1}(K)$ , tenemos que  $2^f$  no es débilmente confluente. Si  $C_n(f)$  es débilmente confluente entonces, en particular, es sobreyectiva. Entonces, por [7, Proposición 1],  $f$  es débilmente confluente. ■

En el Ejemplo 4.3 pudimos observar que la semiconfluencia de  $f$  no implica la semiconfluencia de  $2^f$  ni la de  $C_n(f)$ , para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ . Basados en ese mismo ejemplo, podemos garantizar que la confluencia débil de  $f$  no implica la confluencia débil de  $2^f$  ni de  $C_n(f)$ , para ninguna  $n \in \mathbb{N}$ . Note que en el Ejemplo 4.3, tenemos que  $C(f)(\mathcal{M}_0) \neq \mathcal{B}$  y que  $C(f)(\mathcal{N}_0) \neq \mathcal{B}$ , para el continuo  $\mathcal{B}$  tomado en  $C(Y)$ . Por tanto, tenemos que  $C(f)$  no es débilmente confluyente. De la misma manera tomando el subcontinuo  $\mathcal{B}'$  del mismo ejemplo, podemos concluir que  $C_n(f)$  no es débilmente confluyente para ninguna  $n \geq 2$ .

Podríamos pensar en una condición adicional sobre los espacios para que las proposiciones del teorema anterior sean equivalentes. Sin embargo, la propiedad de la conexidad local no garantiza la equivalencia. En [9, ejemplo 6.6], se da un ejemplo de una función débilmente confluyente  $f$  con rango localmente conexo que no implica la confluencia de  $C(f)$  ni la de  $2^f$ , el cual mostramos a continuación.

**Ejemplo 4.11.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Existe una función  $f: X \rightarrow Y$  débilmente confluyente de un arco sobre un círculo tal que  $2^f$  ni  $C(f)$  son débilmente confluyentes.

Los puntos de  $S^1$  los denotamos en coordenadas polares de la forma  $(1, \theta)$ . Sea  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  definida por  $f(t) = (1, 4\pi t)$ .

Note que  $f$  es débilmente confluyente. Veamos que  $C(f)$  no es débilmente confluyente. Sean  $A(\phi) = \left\{ (1, \theta) : \theta \in \left[ t, \frac{13t+\pi}{12} \right] \right\} \subset S^1$  y  $\mathcal{L} = \{A(\phi) : \phi \in [-\pi, 5\pi]\} \subset C(S^1)$ .

Note que  $\mathcal{L}$  es un arco en  $C(S^1)$  y que  $f^{-1}(A(-\pi)) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$ . Entonces existen dos componentes  $\mathcal{A} = \{A_t : t \in [\frac{1}{4}, 1]\}$ , donde  $A_t = [\frac{1}{4}, t]$ , y  $\mathcal{B} = \{B_t : t \in [\frac{3}{4}, 1]\}$ , donde  $B_t = [\frac{3}{4}, t]$ , de  $(C(f))^{-1}(\mathcal{L})$ , tales que cada una de ellas contiene al punto  $A(-\pi)$ . Sin embargo,  $C(f)(\mathcal{A}) \neq \mathcal{L}$  y  $C(f)(\mathcal{B}) \neq \mathcal{L}$ .

Análogamente se puede ver que  $2^f$  no es débilmente confluyente, pues:

$$(2^f)^{-1}(A(-\pi)) = \left\{ \left\{ \frac{1}{4} \right\}, \left\{ \frac{3}{4} \right\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\} \right\},$$

luego existen tres componentes de  $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$  cuyas imágenes contienen al punto  $A(-\pi)$  y la imagen de ninguna de ellas bajo la función  $2^f$  no es  $\mathcal{L}$ .

Pensando en generalizar las preguntas que se encuentran en [9, Pregunta 6.12], para  $C_n(f)$  con  $n \in \mathbb{N}$ , y que aún son problemas abiertos, concluimos la presente sección, con la siguiente pregunta.

**Pregunta 4.12.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces ¿ $C_n(f)$  es débilmente confluyente, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , si y sólo si  $2^f$  es débilmente confluyente?

### 4.3. Funciones pseudoconfluente

En la presente sección mostraremos un resultado previo para mostrar las relaciones de la función  $f$  y las funciones inducidas  $C(f)$  y  $2^f$  bajo la pseudoconfluencia. Los ejemplos de las implicaciones que no se satisfacen, no se mostrarán en detalle debido a que los ejemplos que nos fueron útiles para las otras clases de funciones confluentes, nos sirven de manera similar. Además, el Ejemplo 4.11, mostrado en la sección anterior, es un ejemplo de una función  $f$  pseudoconfluente con recorrido localmente conexo, tal que las funciones inducidas no son pseudoconfluentes.

**Lema 4.13.** *Sean  $Y$  un continuo y  $\mu : 2^Y \rightarrow [0, \infty)$  una función de Whitney. Entonces existe un número  $t' > 0$ , tal que si  $\mu(B) < t'$  entonces  $\text{diám}(B) < t_0$ , para cada  $B \in 2^Y$  y  $t_0 > 0$ .*

*Demostración.* Supongamos lo contrario. Entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $B_n \in 2^Y$  tal que  $\mu(B_n) < \frac{1}{n}$  y  $\text{diám}(B_n) \geq t_0$ . Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0$ . Sea  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $2^Y$ . De la compacidad de  $2^Y$ , existe una subsucesión  $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  de  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_{n_k} = B$ . De la continuidad de  $\mu$ , notamos que  $\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_{n_k}) = 0$ . Así,  $B \in F_1(Y)$ , lo cual contradice el hecho que  $\text{diám}(B) \geq t_0$ . De esta manera concluimos el resultado. ■

El siguiente resultado muestra la relación entre la pseudoconfluencia de la función inducida  $2^f$ , implica la confluencia débil de la función  $f$ . La prueba de este resultado está tomada de [9, Teorema 7.2].

**Teorema 4.14.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si  $2^f$  es pseudoconfluente, entonces  $f$  es débilmente confluente.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es débilmente confluente. Luego existe un subcontinuo  $L \subset Y$  tal que para toda componente  $K$  de  $f^{-1}(L)$ , se tiene que  $f(K) \neq L$ . Definamos

$$t_0 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \inf \{H(f(K), L) : K \text{ es una componente de } f^{-1}(L)\},$$

donde  $H$  es la métrica de Hausdorff en  $2^Y$ . Probemos que  $t_0 > 0$ . Si  $t_0 = 0$  entonces existe una sucesión  $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$  de componentes de  $f^{-1}(L)$  tales que  $\lim_{i \rightarrow \infty} (f(K_i)) = L$ . Por lo tanto, existe una componente  $K_0$  de  $f^{-1}(L)$  tal que  $f(K_0) = L$ , pero esto no es posible por que  $f$  no es débilmente confluente, Por lo tanto,  $t_0 > 0$ .

Sea  $\mu : 2^Y \rightarrow [0, \infty)$  una función de Whitney. Del Lema 4.13 tenemos que existe un número  $t' > 0$ , tal que si  $\mu(B) < t'$ ,  $\text{diám}(B) < t_0$  para cada  $B \in 2^Y$  y  $t_0 > 0$ .

Sean  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  un subconjunto denso de  $L$  y  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión creciente de números que convergen a  $t'$ . Definamos para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a los subcontinuos  $L_n$  y  $L'_n$  de  $L$  tales que:

$$a_n \in L_n, L_n \subset L'_n, \mu(L_n) = t_n, \mu(L'_n) = t_{n+1}.$$

Así, existe un arco de orden en  $C(L) \subset C(Y)$  de  $L_n$  a  $L'_n$ , por el Teorema 2.15. Sea  $\mathcal{D}_n$  dicho arco en  $C(L)$ . Dado que  $\mu^{-1}(t_{n+1}) \cap C(L)$  es un nivel de Whitney en  $C(L)$ , por [28, Teorema 14.2], existe un continuo  $\mathcal{L}_n \subset \mu^{-1}(t_{n+1}) \cap C(L)$  irreducible entre  $L'_n$  y  $L_{n+1}$ , por [17, Teorema 1, pág. 192].

Luego  $\mathcal{L} = Cl_{2^Y} \{ \mathcal{L}_n \cup \mathcal{D}_n \mid n \in \mathbb{N} \}$  es un subcontinuo irreducible de  $C(L)$ . Dado que  $2^f$  es pseudoconfluente, existe un subcontinuo  $\mathcal{K} \subset 2^X$ , tal que  $2^f(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$ . Denotemos por  $K$  a una componente de  $f^{-1}(L)$  tal que  $K \cap (\cup \mathcal{K}) \neq \emptyset$ . Así, todo elemento de  $\mathcal{K}$  está en la misma componente de  $(2^f)^{-1}(L)$  y, del Lema 2.24, tenemos que

$$\text{si } A \in \mathcal{K} \text{ entonces } A \cap K \neq \emptyset, \text{ para cada } A \in 2^X. \quad (4.1)$$

Dado que  $H(f(K), L) \geq 2t_0$  y que  $\{a_1, a_2, \dots\}$  es denso, existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(f(p), a_m) > t_0 \text{ para cada punto } p \in K, \quad (4.2)$$

donde  $d$  denota la métrica en  $Y$ . Sea  $P$  un elemento de  $\mathcal{K}$  tal que  $f(P) = L_m$ . Así, tenemos que existe un punto  $x \in K \cap P$ , por (4.1). Como  $f(x)$  y  $a_m$  están en  $f(P)$ ,  $\mu(f(P)) \geq \mu(\{f(x), a_m\})$  y  $d(f(x), a_m) > t_0$ , por (4.2), tenemos que  $\mu(\{f(x), a_m\}) > t'$ . Así,  $\mu(f(P)) > t'$ , lo cual contradice el hecho que  $f(P) \in \mathcal{L}$ . Por lo tanto,  $f$  es débilmente confluente. ■

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 2.7 de [9] y de la Proposición 2.44.

**Corolario 4.15.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $C_n(f)$  es pseudoconfluente, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es débilmente confluente.*

*Demostración.* Como  $C_n(f)$  es una función pseudoconfluente,  $C_n(f)$  es sobreyectiva, por [9, Teorema 2.7]. Así, tenemos que  $f$  es débilmente confluente, por la Proposición 2.44. Por lo tanto,  $f$  es pseudoconfluente, por el Diagrama 1.2. ■

**Teorema 4.16.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces*

1. *Si  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  es pseudoconfluente, entonces  $f$  es pseudoconfluente, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ;*
2. *Si  $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$  es pseudoconfluente, entonces  $f$  es pseudoconfluente.*

*Demostración.* Veamos que si  $C_n(f)$  es pseudoconfluente, entonces  $f$  es pseudoconfluente. Dado que  $C_n(f)$  es pseudoconfluente, entonces  $C_n(f)$  es sobreyectiva y, de la Proposición 2.44, tenemos que  $f$  es débilmente confluente, luego  $f$  es pseudoconfluente por el Diagrama 1.2.

Del Teorema 4.14, tenemos que la pseudoconfluencia de  $2^f$  implica la confluencia débil de  $f$  y, del Diagrama 1.2, tenemos que  $f$  es pseudoconfluente. ■

---

Del Ejemplo 4.3, tenemos que la función  $f$  definida allí es pseudoconfluente. Los continuos  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  definidos en este ejemplo son irreducibles y fácilmente podemos ver que las funciones inducidas  $2^f$  y  $C_n(f)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , no son pseudoconfluente.

De igual manera podríamos, tal como en Teorema 3.10, pensar en colocar condiciones sobre los espacios de tal manera que las proposiciones dadas en el Teorema 4.16, sean equivalentes. Sin embargo, al igual que en el Ejemplo 4.11, la función  $f$  es también pseudoconfluente, donde  $Y$  es localmente conexo, y las funciones inducidas  $2^f$  y  $C(f)$  no son pseudoconfluente.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] BARRAGAN, F., *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de Puebla, Puebla, México, 2007.
- [2] BORSUK, K., ULAM, S., *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Soc., Vol 37, (1931), 875-882.
- [3] CAMARGO, J., *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., México, 2009.
- [4] CAMARGO, J., *Some relationships between induced mappings*, Topology Appl. 150, (2010), 2038-2047.
- [5] CAMARGO, J., MACIAS S., *On strongly freely decomposable and induced maps*, manuscrito.
- [6] CHARATONIK, J. J., *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math., 56, (1964), 213-220.
- [7] CHARATONIK, J. J., ILLANES, A., MACÍAS, S., *Induced mappings on the hyperspaces  $C_n(X)$  of a continuum  $X$* , Houston J. of Math, Vol 28, (2002), 781-805.
- [8] CHARATONIK, W. J., *Ri-Continua and hyperspaces*, Topology Appl. 23, (1986), 207-216.
- [9] CHARATONIK, W. J., *Arc approximation property and confluence of induced mappings*, Rocky Mountain J. of Math, Vol 28, N 1, (1998), 107-154.
- [10] DUGUNJI, J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966
- [11] ESCOBEDO, R., MACÍAS, S. Y MÉNDEZ, H., *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, serie textos N 31, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006

- [12] HIGUERA, G., *Funciones Inducidas en Productos Simétricos*, Tesis de Pre-grado, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., 2009.
- [13] HINRICHSEN, D., FERNANDEZ, J., FRAGUELA, A., ÁLVAREZ, A., *Topología General*, Aportaciones Matemáticas, serie textos N 22, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003
- [14] HOCKING, J. G., YOUNG G. S., *Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., (1961)
- [15] HOSOKAWA, H., *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., Vol 21, (1997), 239-250.
- [16] ILLANES, A., NADLER, Jr. S., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent advances*, Pure and Applied Mathematics, Vol 216, Marcel Dekker, New York, (1999).
- [17] KURATOWSKI, K., *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, (1968).
- [18] LÓPEZ M. de J., MACÍAS, S., *Induced maps on  $n$ -fold hyperspaces*, Houston J. Math, Vol 33, (2007), 1047-1057.
- [19] MACÍAS, S., *On the hyperspaces  $C_n(X)$  of a continuum  $X$* , Topology Appl., 109 (2001), 237-256
- [20] MACÍAS, S., *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 281-296
- [21] MACÍAS, S., *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), 125-138
- [22] MACÍAS, S., *Induced maps on  $n$ -fold hyperspace suspensions*, Topology Proc., 28 (2004), 143-152.
- [23] MACÍAS, S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapoure (2005).
- [24] MACÍAS, S., *On the  $n$ -fold hyperspace suspension on continua, II*, Glasnik Mat (61), 41 (2006), 335-343.
- [25] MACÍAS, S., *On the  $n$ -fold hyperspaces of continua, II*, Topology Proc., 38 (2011), 137-147.
- [26] MAĆKOWIAK, T., *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 158, (1979), 1-95.
- [27] NADLER Jr, S., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

- 
- [28] NADLER Jr, S., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N 33, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.