

**ESPECTRO ENERGÉTICO DE DOS ELECTRONES CONFINADOS EN UN
PUNTO CUÁNTICO: MÉTODO DE GALERKIN.**

Alfredo Blanco Serrano

Universidad Industrial De Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2013

**ESPECTRO ENERGÉTICO DE DOS ELECTRONES CONFINADOS EN UN
PUNTO CUÁNTICO: MÉTODO DE GALERKIN.**

Alfredo Blanco Serrano

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Físico.

Director

Iliá Mikhailov

Ph.D en Ciencias Físicas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2013

Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios, quien me ha dado la curiosidad necesaria para aprender y resolver grandes misterios de nuestro entorno.

A mis padres Sara Serrano Rueda y Enrique Blanco peñuela, quienes con su paciencia y enseñanza hoy puedo decir que mi camino es gracias a ellos.

A mi hermana Olga Lucia Blanco Serrano quien con su ejemplo y ayuda han dado forma a mi sueño hoy.

A la gran cantidad de personas que he conocido durante la carrera, que de alguna forma han contribuido a mi formación no solo académica si no como persona y lograr sentirme orgulloso de ser una persona formada integralmente, Gracias:

Fabio Alexis Prieto Zúñiga, Edwin David Rico, Edgar Alexander Bautista Meza, Laura Lara Ortiz, Carolina Mendoza Lura, Martha Isabel Jerez, Luz Dary Morantes, Rafael Gelvez, Edder Estrada, Jossimar Navarro Pitre, Johana Rojas, Laura Chaparro, María Fernanda Jiménez, Laura Becerra, Anyela Becerra Téllez, Tatiana parra, Gerson Marín, Jennifer Ospina, Néstor Granados, Fernando Corzo, Viviana Téllez, Stepfany Chacón, Ramón Espinoza y Consuelo Ochoa cisneros.

AGRADECIMIENTOS

El Autor Ofrece sus Agradecimientos:

Al P.h. D Ilia D. Mikhailov por su orientación no solo académica si no personal para la realización de este trabajo.

Al grupo de investigación, física computacional y materia condensada (FICOMACO) de la Universidad Industrial de Santander.

Al P.h. D Yeinzon Rodríguez García quien con su dedicación en la docencia logro gran parte de mi formación.

A la escuela de física de la Universidad Industrial de Santander, su personal administrativo especialmente a su secretaria Edilia Quintero Ortiz Por su comprensión y ayuda incondicional.

Al grupo de planta de profesores de la escuela de física por ayudar a mi formación profesional.

RESUMEN

TÍTULO: Espectro energético de dos electrones confinados en un punto cuántico: Método de Galerkin.

AUTOR: Alfredo Blanco Serrano**

PALABRAS CLAVES: Punto cuántico, Aproximación adiabática, Confinamiento Parabólico, Método de Galerkin.

Se pretende estudiar el espectro energético de dos electrones confinados en un punto cuántico de forma lenticular, en el cual la ecuación de Schrödinger correspondiente es completamente separable. Se demostrara que al aplicar la aproximación adiabática en los puntos cuánticos actuales, con una altura mucho menor que su dimensión lateral, el análisis se reduce a un problema bidimensional para dos partículas sometidas a un campo central con potencial parabólico. Este último problema se resuelve en forma exacta y por esta razón el modelo lenticular considerado puede utilizarse como un patrón de prueba para verificar la eficiencia de diferentes métodos aproximados.

En la calidad de comparar un método aproximado con esta solución exacta, en esta tesis se considera el método de Galerkin, que tiene una gama de aplicaciones más amplia, permitiéndole analizar problemas similares para puntos cuánticos con morfologías más complejas, cuya solución exacta es imposible encontrar. Con este fin se realizó el cálculo por ambos métodos de los niveles energéticos del sistema, en función de la intensidad del campo magnético aplicado lo largo del eje de simetría, tamaño lateral y altura del punto cuántico. Se demostró que los resultados del cálculo dejan de discernir cada vez menos a medida que el tamaño lateral del punto cuántico se incrementa.

*Proyecto De Grado

** Facultad: Ciencias

Escuela: Física

Director: Ilia Davidovich Mikhailov

Abstract

**Title: Energy spectrum of two electrons confined quantum dot:
Galerkin method**

Author: Alfredo Blanco Serrano**

Key Words: Quantum dot, Adiabatic approximation, Confining parabolic, Galerkin method.

Be pretend study, the energy spectrum of two electrons confined in lens shaped quantum dot, in which corresponding Schrödinger equation is completely separable. It will demonstrate that applying the adiabatic approximation in current quantum dots with a height more than smaller than its lateral dimension, the analysis is reduced to a two-dimensional problem for two particles subjected to a central field with parabolic potential. This problem is solved in an exact way and for this reason the lens-like model considered can be used as a test pattern to verify the efficiency of different approximate methods.

To compare an approximate method with this exact solution, in this thesis is considered the Galerkin method, which has a wider range of applications, allowing to analyze problems related to quantum dots with more complex morphologies, whose exact solution is impossible to find. For this purpose the calculation was performed by both methods of energy levels of the system, depending on the intensity of the applied magnetic field along the axis of symmetry, lateral size and height of the quantum dot. It showed that the calculation results stop to discern increasingly when the lateral size of the quantum dot increases.

*Thesis Project

** Facultad: Ciencias

Escuela: Física

Director: Ilia Davidovich Mikhailov

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	11
Capítulo 1.....	13
Marco Teórico.....	13
Capítulo 2.....	15
Modelo Matemático.....	15
2.1 Hamiltoniano de dos electrones.....	16
2.2 Aproximación adiabática (AA).....	17
Capítulo 3.....	20
Teoría.....	20
3.1 separación de variables para el modelo de confinamiento parabólico.....	20
3.2 Método De Barrido Trigonométrico.....	22
3.3 Método de solución de Galerkin.....	22
Capítulo 4.....	25
Resultados y Discusión.....	25
CONCLUSIONES.....	29
Apéndice A.....	30
MÉTODO DE GALERKIN.....	30
REFERENCIAS.....	32

LISTA DE FIGURAS

CAPITULO 1

Fig 1.1 Punto cuántico lenticular.....11

CAPITULO 2

Fig 2.1 Punto cuántico lenticular con dos electrones y un campo magnético en dirección axial.....13

Fig. 2.2: (a) Potencial de confinamiento parabólico para punto cuántico lenticular. (b) Potencial de confinamiento parabólico para tres radios diferentes.....17

CAPITULO 3

Fig 3.3: Vista superior esquemática de un punto cuántico con dos electrones con morfología lenticular bajo la aproximación de electrones rígidos $\rho_1 = -\rho_2$ 21

CAPITULO 4

Fig. 4.1 A la izquierda se presenta las gráficas halladas mediante el método de barrido trigonométrico para tres radios diferentes con altura constante de 2nm. A la derecha graficas obtenidas con iguales condiciones mediante el método de Galerkin.....24

Fig. 4.2. Curvas de Densidades de los Estados para dos electrones confinados en puntos cuánticos de radio (a) 100nm, (b) 150nm, (c) 250nm y (d) 400nm.. Líneas continuas corresponden a los resultados obtenidos mediante barrido trigonométrico y las punteadas por el método de Galerkin.....26

Fig. 4.3 Curvas de densidad de estados de dos electrones confinados en puntos cuánticos de radios (a) 30nm y (b) 400nm para diferentes intensidades de campo magnético externo.....26

INTRODUCCIÓN

Cuando se manipula la materia a escala tan pequeña como la del orden de los nanómetros, se habla de nanotecnología, que está conformada por un conjunto de ciencias y técnicas para la formación de diferentes tipos de estructuras en las que a esta escala presentan nuevas propiedades físicas. En 1959 el físico y premio nobel Richard Feynman en una conferencia dada en la institución tecnológica de California, dio los primeros pasos para pensar en la manipulación de la materia átomo por átomo, convirtiéndose así en uno de los primeros inicios de la nanotecnología [1].

En 1981 Gerd Binnig y Heinrich Rohrer crearon el microscopio de efecto túnel un instrumento para observar imágenes a nivel atómico y también para poder manipular átomos, dando así una herramienta para la nanotecnología. Gracias a esto y al microscopio de fuerza atómica en 1986 fue posible crear sistemas compuestos con propiedades novedosas muy diferentes a la de cada una de sus componentes en bloque, logrando obtener sistemas nanométricos artificiales donde se observan efectos de confinamiento, en dos dimensiones espaciales (Pozos cuánticos), en una (como alambres y tubos) o en las cero dimensiones (puntos cuánticos)[2].

Las nanoestructuras se construyen de dos formas: “Top down” (de arriba hacia abajo) y “bottom up” (de abajo hacia arriba), siendo más común en la física de estado sólido la metodología de abajo hacia arriba que consiste en la manipulación de átomo por átomo hasta formar las estructuras donde los portadores de carga son confinados en sus dimensiones espaciales. La deposición de capas de semiconductores de composición variable permite formar las diferentes estructuras tales como superredes (múltiples capas alternas de semiconductores con diferentes composiciones), obteniendo nuevos efectos radicalmente distintos y no vistos en los materiales homogéneos en bloque.

Entre todos los diferentes tipos de estas heteroestructuras el mayor interés para los investigadores está en los puntos cuánticos, donde portadores de carga sufren un confinamiento máximo. Los puntos cuánticos son similares a átomos artificiales contenidos en substratos semiconductores o aislantes, conteniendo un número de electrones que pueden variar en una forma controlada. Al igual que en los átomos los electrones en los puntos cuánticos están sometidos a potenciales creados por saltos en las posiciones del piso de banda de conducción (“band-offset”) o por campos externos aplicados. Pero su mayor diferencia con los átomos, es la interacción entre electrones a través de campos coulombianos más

débiles, comparados con un átomo debido a un fuerte apantallamiento producido por la red cristalina.

En la actualidad existen diferentes técnicas para la fabricación de puntos cuánticos, entre ellas tenemos: litografía, epitaxia de haces moleculares y métodos coloidales [2,3]. El uso adecuado de estas técnicas permite variar en una forma controlada las características de los puntos cuánticos, como juntas bien definidas, simetrías, homogeneidad en la estructura interna, morfología, separación entre puntos vecinos,...etc.

El mecanismo más avanzado y económico para la construcción de los puntos cuánticos, es el método por epitaxia de haces moleculares (MBE, "molecular beam epitaxy") en el modo de crecimiento de Stranski-Krastanov [2]. Las heterojuntas fabricadas mediante esta técnica forman un conjunto de puntos cuánticos, con dimensiones del orden de varias decenas de nanómetros en dirección lateral y dos a cuatro nanómetros en la dirección transversal que crecen simultáneamente sobre un sustrato bajo unas condiciones específicas y por esto son llamados autoensamblados (ver figura 1.1). Por esta razón estas estructuras se consideran como casi bidimensionales en las que los portadores de carga (electrones y huecos) están confinados fuertemente en dirección transversal y en un nivel más bajo en la dirección lateral. Esta peculiaridad estructural del sistema conlleva a una correlación muy fuerte entre portadores de carga y propiedades específicas que pueden modificarse en forma controlada al variar la morfología del punto cuántico.

Por esta razón en las últimas décadas, los investigadores publicaron una gran cantidad de trabajos, dedicados al estudio de sistemas de pocas partículas, confinadas en puntos cuánticos autoensamblados. En una gran parte de estos trabajos, se estudian sistemas de dos electrones confinados en un punto cuántico con confinamiento parabólico [4-17], para lo cual la ecuación de onda puede resolverse en forma exacta utilizando diferentes técnicas como: Expansión en series de Taylor, métodos de perturbación renormalizada, expansión $1/N$, Monte Carlo, barrido trigonométrico,...etc.

Sin embargo, el modelo de potencial de confinamiento parabólico es justificado solamente para unas morfologías especiales. En el caso contrario debe utilizarse algunos métodos aproximados. El modelo de confinamiento parabólico en este caso puede servir como patrón para verificar los límites de aplicación de un método aproximado.

Capítulo 1

Marco Teórico

Un punto cuántico autoensamblado de forma lenticular (Fig 1.1), es una película delgada de un semiconductor (InAs) con un grosor variable sometido a una matriz de material semiconductor (GaAs) y cuya morfología es similar a una lente. El grosor máximo en el tope de lente es del orden de 4nm, mientras que en la parte periférica (capa húmeda) es del orden de 2nm. Siendo de grosor tan pequeño el potencial de confinamiento en la dirección trasversal de la película varía desde 200meV en la parte más ancha de la película hasta 1000meV en la capa húmeda. Para la estructura lenticular, el espesor d depende solo de la distancia del eje de simetría y está definido por una función $h(\rho)$ la cual en los puntos cuánticos reales es solamente seccionalmente continua (ver Fig1.1), pero en nuestro análisis más adelante la aproximamos con una función sin discontinuidades.

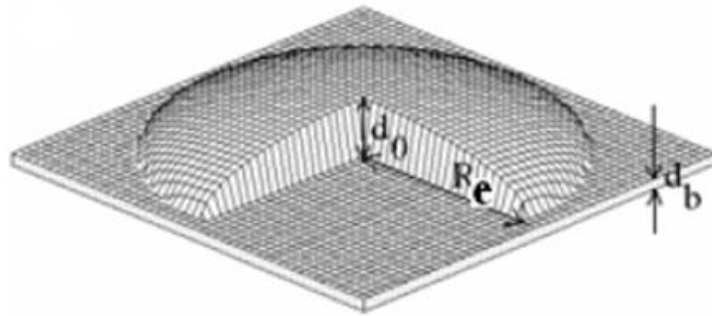


Fig 1.1 Punto cuántico lenticular

El potencial de confinamiento en la frontera entre el punto cuántico y la matriz sufre un salto. Para describir el movimiento de partículas en esta estructura comúnmente se utiliza la aproximación de masa efectiva [18] (AME), en la cual se desprecia el potencial periódico y las masas de partículas reales se remplazan por masas efectivas. Al eliminar las interacciones dadas por el potencial periódico de la red cristalina la masa efectiva se define como:

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1} \quad (1.1)$$

en donde m^* es la masa efectiva diferente de la masa real del electrón y $E(k)$ es la curva de dispersión. La masa efectiva refleja la influencia del potencial periódico

de la red sobre la dinámica de la partícula [19,20]. La diferencia entre masa real y efectiva se debe a la interacción del electrón con el campo periódico de la red y dado que dar un cálculo exacto de esto no es posible, al atribuir al electrón la masa efectiva se tiene en cuenta esta interacción.

Para hallar las funciones de onda de cada partícula en el estado estacionario hay que resolver la ecuación de Schrödinger, con un potencial de confinamiento discontinuo y tridimensional. El problema a pesar del uso de la aproximación de masa efectiva sigue siendo suficientemente complicado y se necesita aplicar otras aproximaciones para encontrar soluciones suficientemente sencillas. Con este fin comúnmente se utiliza la aproximación adiabática (AA) que permite reducir el problema 3D a otro similar en 2D teniendo en cuenta que el grosor de las películas que forman los puntos cuánticos es mucho menor que la dimensión lateral.

La ecuación de onda para dos electrones confinados en un punto cuántico con simetría axial tiene 6 variables, para reducir el número de variables recurrimos a la AA [21- 24], la cual tiene en cuenta la condición de películas delgadas ($d/R \ll 1.0$) siendo R el radio de la lente. Mediante esta aproximación se logra desacoplar el movimiento rápido a lo largo de la dirección z del movimiento lento en el plano de la película. El movimiento en la dirección z se reduce a dos ecuaciones de onda 1D, cada una para una partícula en un pozo cuántico de barrera infinita y cuyo ancho coincide con el grosor de la película. Las soluciones de estas ecuaciones se conocen de forma analítica y es por eso que solamente queda por analizar el movimiento en el plano de la película, que corresponde para dos electrones con la ecuación de Schrödinger de cuatro grados de libertad.

Finalmente en el marco de AA, el problema inicial se reduce al problema de dos electrones en el espacio bidimensional con el potencial de confinamiento dependiente de la morfología de la lente. Este potencial en la parte cercana al tope de la lente tiene forma parabólica y por eso comúnmente se utiliza una aproximación que reemplaza al potencial de confinamiento real en todas sus regiones por una superficie parabólica. La ventaja de esta aproximación para el problema de dos electrones consiste en que el Hamiltoniano correspondiente es separable (solamente son separables cuando el confinamiento es parabólico o tenemos un anillo cuántico 1D [22]).

Actualmente, existen una gran cantidad de publicaciones donde se analizan las propiedades de puntos cuánticos con dos electrones utilizando el modelo de confinamiento parabólico. Este modelo es justificado cuando el punto cuántico tiene morfología perfecta similar a una lente. En los casos cuando la morfología es

diferente y tiene bastantes imperfecciones se utilizan diferentes métodos para la obtención del espectro energético. Sin embargo, el modelo de confinamiento parabólico sigue siendo un punto de partida para analizar los diferentes tipos de estructuras. Una vez elaborado un nuevo método numérico para un punto cuántico, este puede aplicarse para el modelo de confinamiento parabólico y hallar los límites de aplicabilidad de este algoritmo.

En este proyecto se propone usar el método de Galerkin [25] para analizar el espectro energético de dos electrones confinados en un punto cuántico de forma arbitraria y así verificar la eficiencia y aplicabilidad del mismo. Como primer paso se propone comparar los resultados de aplicación de este método, con los resultados exactos para el sistema de dos electrones confinados en un punto cuántico con potencial de confinamiento parabólico.

Capítulo 2

Modelo Matemático

En este apartado se dará una descripción matemática, teniendo en cuenta las diferentes aproximaciones mostradas anteriormente, para el modelo de dos electrones en un punto cuántico lenticular en la presencia de un campo magnético uniforme en dirección axial. Para ello los puntos cuánticos autoensamblados realmente están formados de una película delgada, cuyo grosor varía desde 2nm en la parte exterior (capa húmeda), hasta 6nm en la parte interior del punto cuántico, formando de esta manera una morfología de tipo lenticular. Una imagen típica de puntos cuánticos se presenta en figura 2.1

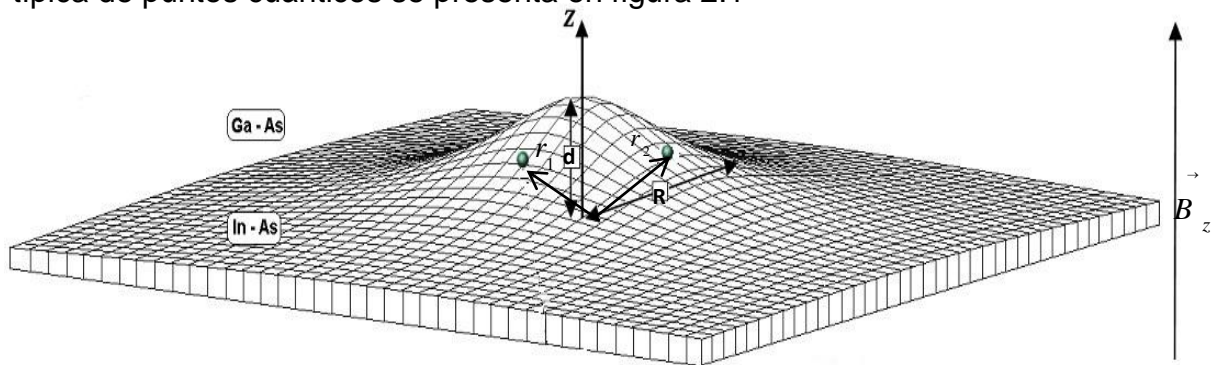


Fig 2.1: Punto cuántico lenticular con dos electrones en un campo magnético en dirección axial

Los electrones confinados dentro de esta película delgada (Fig2.1), se desplazan en una región prácticamente bidimensional, si se supone la barrera de potencial

fuera de la película suficientemente alta. A continuación consideramos un modelo simplificado, en el que el potencial de los electrones dentro de la película es cero y fuera de ella infinito. Además, para analizar la influencia del campo magnético sobre el espectro energético de dos electrones, consideramos en nuestro modelo un campo magnético homogéneo dirigido a lo largo del eje z (Ver Fig. 2.1)

2.1 Hamiltoniano de dos electrones

Consideramos dos electrones confinados dentro de una película delgada en presencia de campo magnético externo. Siendo $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ vectores de posición de los electrones 1 y 2 (Ver figura 2.1). El Hamiltoniano correspondiente en coordenadas cilíndricas tiene la siguiente forma:

$$H = \sum_{k=1}^2 \left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m_k^*} \nabla_k^2 + \frac{ie\hbar}{2m_k^*c} B \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{e^2 B^2 \rho_k^2}{8m_k^* c^2} + V(\mathbf{r}_k) \right] + \frac{e^2}{\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} \quad (2.1)$$

Los términos del Hamiltoniano desde la izquierda hacia derecha representan respectivamente las contribuciones de las energías: Cinemática, paramagnética, diamagnética y repulsión entre los dos electrones. En donde m^* es la masa efectiva del electrón, \mathbf{B} el campo magnético y $V(r_k)$ el potencial de confinamiento, igual a cero dentro de película delgada e infinito fuera de película delgada (ver ecuación 2.6).

Para reducir el número de parámetros en la expresión (2.1) utilizaremos unidades adimensionales que son el radio efectivo de Bohr, como unidad de longitud, Rydberg efectivo, como unidad de energía y como la unidad de fuerza del campo magnético el parámetro γ , definidos de la siguiente manera:

$$a_0^* = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{e^2 m^*}; \quad R_y^* = \frac{\hbar^2}{2m^* a_0^{*2}}; \quad \gamma = \frac{e\hbar B}{2m^* c R_y^*} \quad (2.2)$$

Usando las unidades (2.2) el Hamiltoniano (2.1) adquiere la forma adimensional:

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[-\nabla_k^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{4} \rho_k^2 \gamma^2 + V(\mathbf{r}_k) \right] + \frac{2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} \quad (2.3)$$

Hasta ahora el Hamiltoniano (2.3) tiene 6 coordenadas independientes y resolver la ecuación de onda correspondiente es un problema suficientemente complicado. Para reducir parcialmente el número de variables en adelante aplicaremos la

aproximación adiabática (AA) que nos permite eliminar para cada electrón un grado de libertad correspondiente al movimiento a lo largo del eje z.

2.2 Aproximación adiabática (AA)

Para ilustrar cuantitativamente la validez de AA para nuestro estudio, consideremos la estructura de una película delgada presentada esquemáticamente en la figura 2.1, con un espesor h variable que está definida a través de una función $h(\rho)$. Además teniendo en cuenta que en los puntos cuánticos autoensamblados fabricados hasta el momento, el grosor de película delgada (del orden 2-6nm) es mucho menor que el tamaño lateral del punto cuántico (del orden 20-100nm), el movimiento de los electrones en dirección trasversal es mucho más rápido que en dirección lateral. Esto nos permite desacoplar el Hamiltoniano (2.3) en la siguiente forma:

$$H = \sum_{k=1}^2 \left(H_k^{Rápido} + H_k^{Lento} \right) + \frac{2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|} \quad (2.4)$$

$$H_k^{Rápido} = -\frac{d^2}{dz^2} + V(\rho, z); \quad H_k^{Lento} = -\Delta_k^{2D} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{4} \rho_k^2 \gamma^2$$

Para tener la forma exacta del potencial de confinamiento $V(\rho, z)$, hay que definir el perfil de la película. En este trabajo consideramos una forma especial de punto cuántico con simetría axial, cuando la altura h de la película depende solamente de la distancia desde el eje de simetría, de la siguiente manera:

$$h(\rho) = \frac{d}{\sqrt{1 + \rho^2/R^2}} \quad (2.5)$$

Como se demostrara más adelante, bajo la aproximación adiabática y con esta forma de perfil de la película, nos conducirá a un potencial de confinamiento lateral de forma parabólica. Además, la formula (2.5) describe adecuadamente las morfologías reales de puntos cuánticos siendo d la altura del punto cuántico y R el radio. En nuestro modelo la forma analítica del potencial de confinamiento puede escribirse como:

$$V(z) = \begin{cases} 0 & 0 < z < h(\rho) \\ \infty & z < 0 \vee z > h(\rho) \end{cases} \quad (2.6)$$

Analizando el Hamiltoniano (2.4), es similar al Hamiltoniano de una molécula donde la parte rápida corresponde al movimiento de electrones y la parte lenta al de los núcleos, donde siguiendo el procedimiento estándar de AA, inicialmente se analiza el movimiento rápido congelando las coordenadas correspondientes a movimiento lento de los núcleos. De manera similar nosotros para el Hamiltoniano (2.4) inicialmente encontramos la solución de la ecuación de onda correspondiente al movimiento de electrones en la dirección de confinamiento z. Este problema es fácil de resolver usando soluciones bien conocidas para un pozo cuántico infinito de ancho $h(\rho)$ donde la función de onda y el espectro energético para el estado base es:

$$\phi(z_k) = \sqrt{\frac{2}{h(\rho_k)}} \text{sen} \left(\frac{\pi}{h(\rho_k)} z_k \right); k = 1, 2 \quad (2.7)$$

$$E_z(\rho_k) = \frac{\pi^2}{h^2(\rho_k)}; k = 1, 2 \quad (2.8)$$

Remplazando (2.5) en (2.8) y reescribiendo obtenemos el potencial de confinamiento parabólico que solo depende de la coordenada ρ al eje de simetría del punto cuántico.

$$V(\rho) = E_0 + \frac{k\rho^2}{2} \quad (2.9)$$

$$E_0 = \frac{\pi^2}{d^2}; k = \frac{2\pi^2}{d^2 R^2} \quad (2.10)$$

De esta manera el Hamiltoniano para el movimiento lento adquiere siguiente forma final:

$$H_k^{Lento} = -\Delta_k^{2D} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{1}{4} \rho_k^2 \gamma^2 + \frac{k\rho^2}{2} + E_0 + \frac{2}{|\rho_1 - \rho_2|} \quad (2.11)$$

Como se puede ver en (2.11), este Hamiltoniano consta de dos variables (ρ, φ) por cada electrón, por lo que tiene 4 coordenadas independientes y como lo demostraremos a continuación debido al potencial confinamiento parabólico (ver Grafica 2.2a) se convierte en un problema de variables separables.

Como parte del análisis del potencial de confinamiento parabólico (2.9) se ha graficado para un punto cuántico lenticular de altura definida $0.2 a_0^*$. En la gráfica 2.2a y se ha utilizado un radio de $10 a_0^*$. Se puede ver en líneas punteadas la aproximación al potencial de confinamiento tipo parabólico, además de su clara dependencia con la distancia al eje de simetría. En cambio para la gráfica 2.2b, se ve la diferencia en el comportamiento para tres radios distintos escogidos de forma arbitraria, siendo lógico un potencial más pronunciado para distancias más pequeñas (mayor confinamiento) y además valores más grandes para la energía.

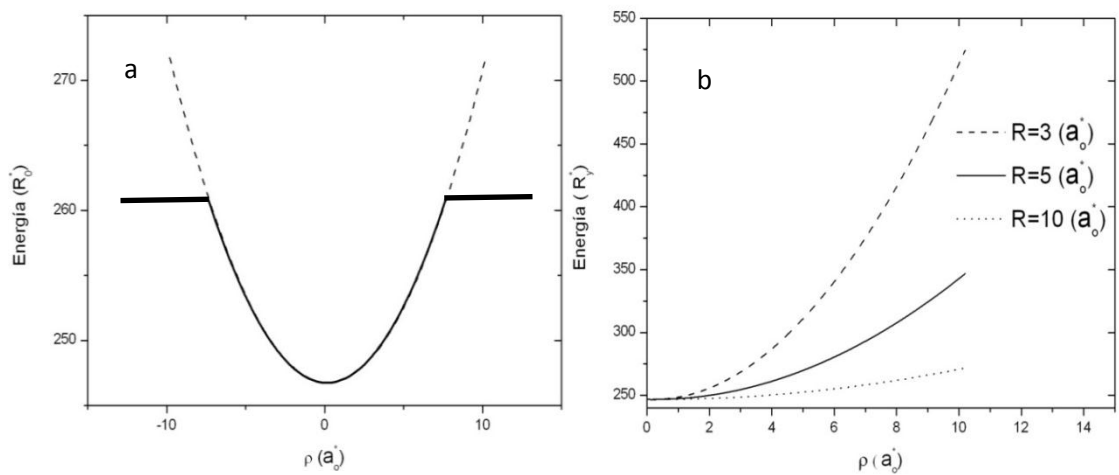


Fig. 2.2: (a) Potencial de confinamiento parabólico para punto cuántico lenticular. (b) Potencial de confinamiento parabólico para tres radios diferentes.

Esta forma de potencial parabólico nos da la posibilidad de resolver la ecuación de onda asociada al Hamiltoniano (2.11) usando el método de separación de variables, pero para los casos donde el potencial no está definido de forma parabólica se debe usar un método diferente que pueda resolver el sistema, es por eso que el método de Galerkin a continuación muestra las diferentes consideraciones a tener para resolver un sistema en donde no importa la forma del potencial de confinamiento y en el cual el Hamiltoniano no es separable permitiéndole así ser aplicado a una mayor cantidad de problemas.

Capítulo 3

Teoría

Como ya se mencionó en apartados anteriores, el Hamiltoniano (2.11) es separable, cuando se aproxima el potencial de confinamiento a uno tipo parabólico. En este capítulo se darán los detalles para la solución por medio del método de separación de variables, transformando nuestro Hamiltoniano en términos de las coordenadas de centro de masa (Problema de oscilador circular) y relativas. En las cuales se mostrara una breve explicación de su solución mediante el método de barrido trigonométrico. Al final se verá la solución de nuestro Hamiltoniano mediante el método de Galerkin teniendo en cuenta la consideración de electrones rígidos, formando así la base para nuestro análisis comparativo.

3.1 separación de variables para el modelo de confinamiento parabólico

En este apartado, se analizara el método de separación de variables y su aplicación a la ecuación de Schrödinger para el movimiento lento, dado en coordenadas cilíndricas.

Partiendo de la ecuación de Schrödinger uni-particular,

$$\left[-\Delta_{\mathbf{p}}^{2D} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\omega}^2}{2} \mathbf{p}^2 + E_0 + \frac{2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|} \right] \Psi(\mathbf{p}, \varphi) = E_{\rho, \varphi} \Psi(\mathbf{p}, \varphi) \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\omega}^2$ es la frecuencia ciclotronica y es mostrada en la ecuación (3.2), en la que se puede ver su dependencia con el campo magnético (γ^2), y las dimensiones físicas del punto cuántico dadas por la variable k y definidas con anterioridad en las ecuaciones (2.2) y (2.10).

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\gamma^2}{2} + k \quad (3.2)$$

En la ecuación de onda (3.1) puede separarse su movimiento usando coordenadas de centro de masa, $R = (r_1 + r_2)/2$, $\Theta = \varphi_1 + \varphi_2/2$ y relativas, $r = r_1 - r_2$, $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$. Obteniendo así las ecuaciones de onda para los movimientos con respecto a las coordenadas relativas y de centro de masa (ecuaciones 3.3).

$$H_R(R)\psi(R, \Theta) = \left[-\frac{1}{2} \Delta_R^{(2D)} + \tilde{\omega}^2 R^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial \Theta} \right] \psi(R, \Theta) = E_R \psi(R, \Theta) \quad (3.3)$$

$$H_r(r)\psi(r, \theta) = \left[-2\Delta_r^{(2D)} + \frac{\tilde{\omega}^2}{4} r^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \right] \psi(r, \theta) = E_r \psi(r, \theta)$$

Para la ecuación de onda asociada al centro de masa se puede llegar a tener soluciones analíticas debido a la ausencia del potencial coulombiano, obteniendo así la ecuación diferencial hipergeométrica confluyente llamada ecuación de kummer [27] cuyas soluciones son conocidas y por ende dándonos la contribución al espectro con respecto al centro de masas, mostrada a continuación:

$$E_R = \sqrt{2} \tilde{\omega} \left[|M_{CM}| + 1 + 2n_{CM} \right] + \gamma M_{CM} \quad (3.4)$$

$$M_{MC} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad n_{CM} = 0, 1, 2, \dots$$

Para la ecuación de onda respecto a las coordenadas relativas, la existencia del término que muestra la interacción coulombiana entre electrones, hace imposible encontrar una solución analítica y será mediante el método de barrido trigonométrico [28] como será resuelto.

La ecuación de Schrödinger para el movimiento relativo $H_r \phi(r) = E_r \phi(r)$, es simplificada por medio de la ecuación uniparamétrica $\phi(r) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} \chi(r)$, la cual nos da:

$$-\chi''(r) + V_{eff}^{m_r}(r, \gamma) \chi(r) = \frac{E_r}{2} \chi(r) \quad (3.5)$$

$$V_{eff}^{m_r}(r, \gamma) = \frac{m_r^2 - 1/4}{r^2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{8} r^2 + \frac{m_r \gamma}{2} + \frac{1}{r}$$

La ecuación diferencial (3.5) tiene las condiciones de frontera dadas por $\chi(0) = 0$ y $\chi(\infty) = \infty$, y será resuelta por el método de barrido trigonométrico explicado en la siguiente sección.

3.2 Método De Barrido Trigonométrico

El método de barrido trigonométrico consiste en el cambio del problema de contorno (3.5) por una ecuación diferencial de primer orden; obteniendo una ecuación trascendente para los niveles energéticos, aun para el caso de potenciales no convencionales. Utilizando coordenadas polares de Poincaré:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(r) &= A(r) \cos[\bar{\theta}(r)] \\ \bar{\chi}'(r) &= A(r) \operatorname{sen}[\bar{\theta}(r)]\end{aligned}\tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) y excluyendo de esta la función $A(r)$ después de una serie de transformaciones, obtenemos la siguiente ecuación de primer orden para la función $\bar{\theta}(r)$:

$$\bar{\theta}'(r) = -\operatorname{sen}^2[\bar{\theta}(r)] - \left[\frac{E_r}{2} - V_{\text{eff}}^{m_r}(r) \right] \cos^2[\bar{\theta}(r)]\tag{3.7}$$

Con las condiciones de frontera:

$$\chi(0) = 0 \Rightarrow \theta(0) = \frac{\pi}{2}\tag{3.8}$$

$$\chi(\infty) = 0 \Rightarrow \theta(\infty) = \frac{\pi}{2} - \pi n_r; \quad n_r = 1, 2, 3, \dots$$

Con lo anterior la ecuación diferencial de primer orden (3.7) puede resolverse numéricamente mediante diferentes métodos como por ejemplo, el Método de Runge Kutta, el cual será empleado en este trabajo. Para cada valor del parámetro E dado esta solución puede considerarse como una función de dos variables $\bar{\theta} = \bar{\theta}(r, E_r)$.

3.3 Método de solución de Galerkin

Los métodos de Galerkin son una clase de métodos para la conversión de un problema de contorno para un operador continuo (tal como una ecuación diferencial) a un problema de álgebra lineal. La base de este método

normalmente aplica algunas restricciones en el espacio de funciones completo, a un sub-espacio con un conjunto finito de funciones base. Además sugiere que todas las proyecciones de las discrepancias entre las partes derecha e izquierda de la ecuación diferencial sobre este sub-espacio sean iguales a cero. A menudo, cuando se refiere a un método de Galerkin, también se le da el nombre, junto con métodos de aproximación típicas utilizadas, como por ejemplo el método Bubnov-Galerkin (después de Ivan Bubnov), Petrov-Galerkin (después de que Alexander G. Petrov) o el método de Ritz-Galerkin.

En el área de análisis numérico, el método de Galerkin es un medio para proyectar un sistema de alta dimensión a un sistema de menor dimensión y su formulación abstracta es casi trivial [26]. La ventaja del método de Galerkin radica en que éste permite encontrar la solución de La ecuación de onda sin tener en cuenta la forma del potencial de confinamiento¹ y en consecuencia se puede resolver un problema para el cual el Hamiltoniano no es separable.

La ecuación de onda para dos electrones correspondiente al Hamiltoniano (2.11) tiene 4 variables y no es separable si el potencial de confinamiento no tiene un comportamiento parabólico o cuando la morfología de QD no es uniforme. Sin embargo, el problema puede ser simplificado cuando el tamaño de QD es muy grande y la configuración electrónica “se congela”, colocando a los electrones en los extremos opuestos de QD formando un cristal de Wigner, en el cual los vectores de posición de dos electrones satisfacen la condición $\rho_1 = -\rho_2$ (ver figura 3.3). Bajo esta condición el Hamiltoniano (2.11) vuelve a ser separable, las funciones de onda y el espectro energético pueden ser encontradas en una forma exacta.

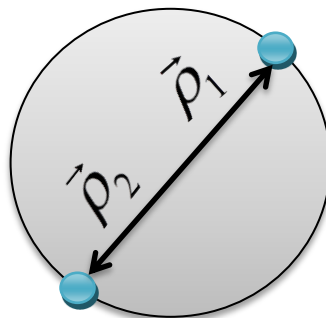


Fig 3.3 vista superior esquematizada de un punto cuántico con dos electrones con morfología lenticular bajo la aproximación de electrones rígidos $\rho_1 = -\rho_2$

Mediante la condición de electrones rígidos $|\rho_1| = -|\rho_2|$ es posible agregar una perturbación a nuestro Hamiltoniano como se muestra a continuación:

$$H = \sum_{k=1}^2 \left[-\Delta_k^{(2D)} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{\omega^2 \rho_k^2}{4} + \frac{1}{2\rho_k} + V_{\text{perturbado}} \right] \quad (3.9)$$

$$V_{\text{perturbado}} = \frac{2}{|\rho_1 - \rho_2|} - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{1}{2\rho_2}$$

Como se ve en (3.9), la perturbación se hace cero cuando se está cumpliendo el punto de congelamiento llamado también la transición de wigner. Para la solución de la ecuación de onda asociada al Hamiltoniano (3.9) se ha aplicado el método de Galerkin realizando un análisis mediante el álgebra de Dirac (Apéndice A), llegando así a la ecuación secular:

$$\sum_{k'=1}^N (\hat{H}_{k,k'} - E \delta_{k,k'}) C_{k'} = 0; k = 1, 2, \dots, N; \hat{H}_{k,k'} = \langle \psi_k^{(0)} | \hat{H} | \psi_{k'}^{(0)} \rangle \quad (3.10)$$

De esta manera el método de Galerkin permite reducir el problema de valores propios para una matriz de orden infinito a un problema similar para otra matriz de orden finito. La ecuación secular (3.10) del método de Galerkin se puede describir en una forma más conveniente, para su aplicación mediante métodos computacionales, quedando el Hamiltoniano del sistema así:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V; V = \hat{H} - \hat{H}_0 \Rightarrow \hat{H}_{k,k'} = E_k^{(0)} \delta_{k,k'} + V_{k,k'} \quad (3.11)$$

$$\sum_{k'=1}^N \left[V_{k,k'} - (E - E_k^{(0)}) \delta_{k,k'} \right] C_{k'} = 0; k = 1, 2, \dots, N; V_{k,k'} = \langle \psi_k^{(0)} | (\hat{H} - \hat{H}_0) | \psi_{k'}^{(0)} \rangle$$

A continuación se presenta el algoritmo general que realiza un procedimiento numérico, teniendo en cuenta el método de Galerkin para analizar las propiedades espectrales de un sistema de dos electrones en un punto cuántico lenticular.

- 1) Se resuelve $\hat{H}_0 | \psi_k^{(0)} \rangle = E_k^{(0)} | \psi_k^{(0)} \rangle$, conociendo que este problema de valores propios tiene solución por medio del método de separación de variables.
- 2) Mediante la subrutina ZEROIN y RKF encontramos el espectro para el paso 1.

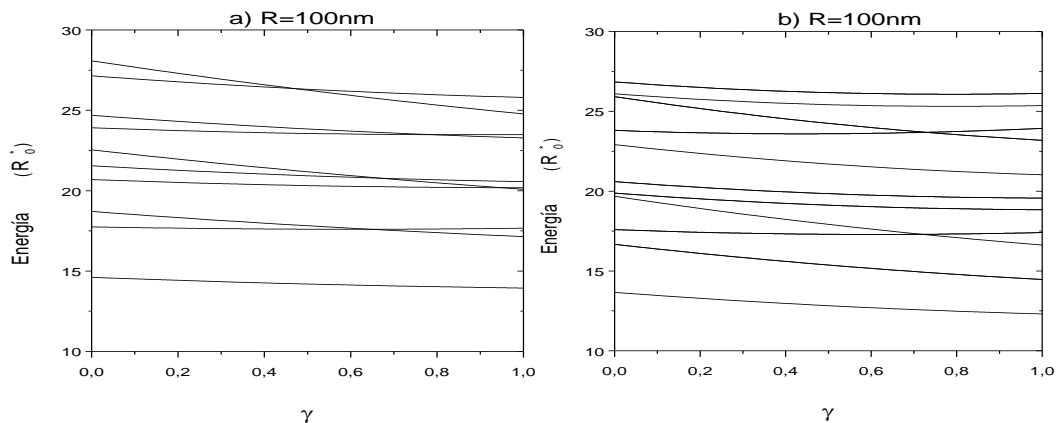
- 3) Se construye una tabla con los valores obtenidos y son comparados con los encontrados mediante el análisis anteriormente.
- 4) Se realizan diferentes gráficas para radios en el rango de 100nm a 400nm.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

A continuación se presentan los resultados del cálculo de los niveles energéticos, en función del campo magnético, obtenido por el método de Barrido trigonométrico y de Galerkin para diferentes radios de puntos cuánticos. Con el fin de observar las diferencias de los dos métodos a medida que el confinamiento lateral va disminuyendo, se muestran las gráficas de manera comparativa. Además, se presentaran los resultados para las curvas de las densidades de los estados de diferentes dimensiones de puntos cuánticos e intensidades de campo magnético externo.

En nuestros cálculos usamos unidades adimensionales típicas para la estructura InAs que corresponden a la distancia de un radio de Bohr efectivo, aproximadamente 10nm ($a_0^* \approx 10 \text{ nm}$) y la energía de unidades de Rydberg efectivo, alrededor 6meV ($R_0 \approx 6 \text{ meV}$). En los resultados presentados a continuación el grosor de los puntos cuánticos en todos los casos se consideró fijo e igual a 2nm, mientras que el radio del punto cuántico va cambiando en un rango de 100nm hasta 400nm. En la Fig.4.1 se presentan los resultados de cálculo para nueve niveles energéticos más bajos en función de campo magnético para tres diferentes radios. La parte izquierda de los gráficos corresponde a los resultados exactos obtenidos mediante el método de barrido trigonométrico, mientras que los gráficos en la parte derecha son las curvas obtenidas por el método de Galerkin.



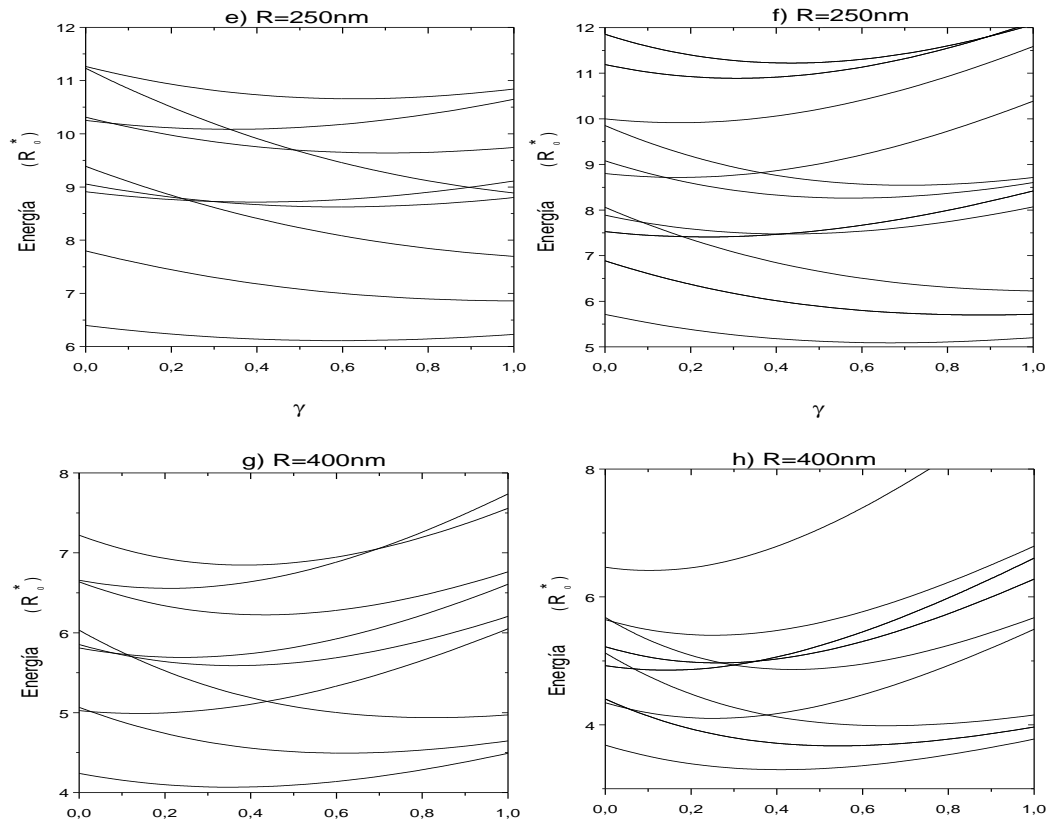


Fig: 4.1 A la izquierda se presenta las gráficas halladas mediante el método de barrido trigonométrico para tres radios diferentes con altura constante de $0.2\alpha_0^*$. A la derecha graficas obtenidas con iguales condiciones mediante el método de Galerkin

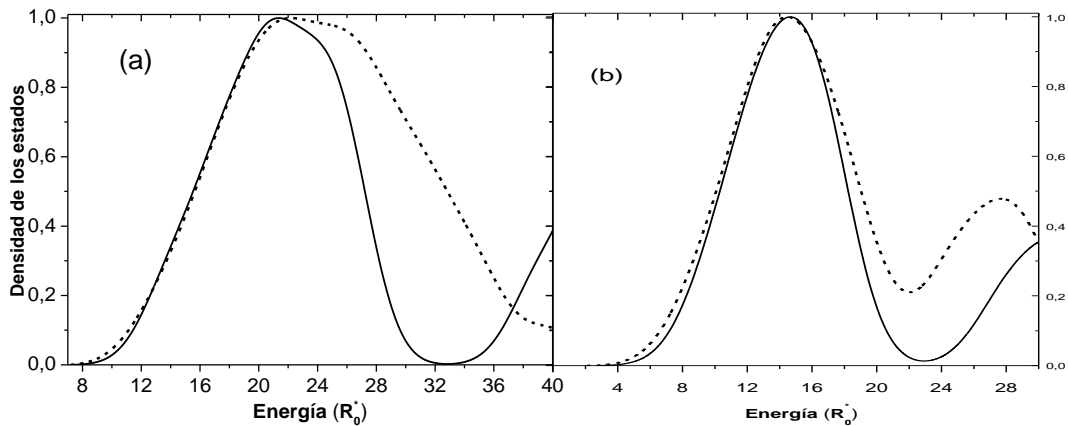
En general las gráficas mostradas (Fig 4.1) son similares con solo pequeñas diferencias, principalmente relacionadas con la subestimación del aporte de la energía potencial (repulsión entre dos electrones) en el método de Galerkin, por esta razón las curvas obtenidas por este método siempre son un poco inferiores. Pero en ambos casos se observa competencia entre los términos paramagnéticos y diamagnéticos, cuya dependencia paramagnética dependen del campo magnético en forma lineal (con una pendiente negativa), y el término diamagnético depende del campo magnético en forma cuadrática, por eso el aporte de este término en la energía total se incrementa significativamente cuando el radio del punto cuántico crece. Todo esto explica las modificaciones que sufren las curvas en la Fig. 4.1 cuando el radio crece. Se puede ver, que para los radios pequeños cuando domina el término paramagnético las dependencias son prácticamente lineales con una cantidad de intersecciones relativamente pequeña. A medida que el radio crece se cambian las curvaturas de las líneas aumentando el número de intersecciones entre ellas como resultado de la competencia entre los términos paramagnético y diamagnético.

Además, se puede ver que la diferencia entre las curvas obtenidas por ambos métodos, se hace menos significativa cuando el radio crece. Hay que anotar que el comportamiento de dos electrones relacionado con los efectos de correlación, depende fuertemente de la competencia entre los aportes de la energía cinética y la energía potencial. Cuando la energía cinética es dominante el movimiento de electrones es caótico, parecido a un gas. En el caso contrario las posiciones de electrones se congelan debido a una repulsión entre ellos dominante. Teniendo en cuenta, que la energía cinética de los electrones confinados dentro un punto cuántica de radio R es proporcional a $1/R^2$, mientras que la energía potencial es proporcional a $1/R$, se puede determinar cómo tratar el problema. Si el radio de un punto cuántico es pequeño, para la descripción del comportamiento de electrones es adecuado el modelo caótico y en caso contrario el modelo de un rotador rígido, que hemos utilizado como punto de partido en el método de Galerkin.

Adicionalmente, se ha calculado las curvas de la densidad de los estados (DOS) correspondientes a los niveles energéticos E_i obtenidos por dos diferentes métodos. El cálculo fue realizado usando la siguiente definición aproximada de la densidad de los estados:

$$\rho(E) = \sum_i \delta(E - E_i); \quad \delta(E - E_i) \approx \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(E - E_i)^2}{2s^2}\right] \quad (4.1)$$

Aquí s es el ancho natural de las líneas individuales, que en nuestro cálculo lo usamos como un parámetro de ajuste que determina el ancho de la distribución. Su valor se gradúa manualmente, con el fin de lograr un espectro similar al observado experimentalmente, dentro de la banda energética asociada a los diferentes grupos de estados.



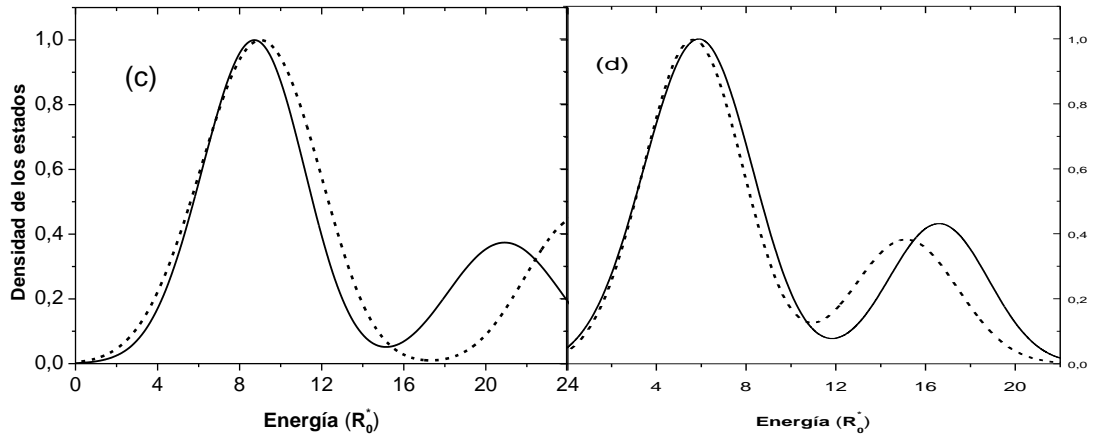


Fig: 4.2 Curvas de Densidad de los Estados para dos electrones confinados en puntos cuánticos de radio (a) 100nm, (b) 150nm, (c) 250nm y (d) 400nm. Líneas continuas corresponden a los resultados obtenidos mediante barrido trigonométrico y las punteadas por el método de Galerkin.

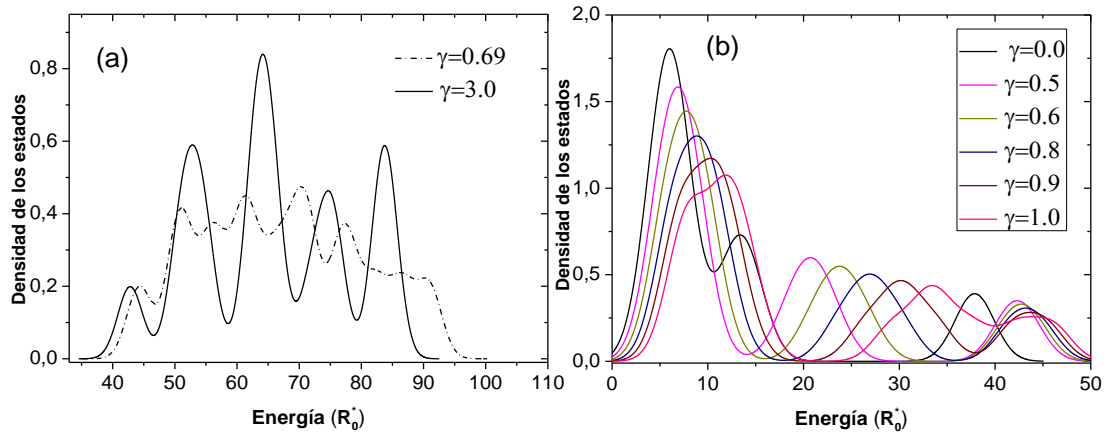


Fig 4.3: Curvas de densidad de estados de dos electrones confinados en puntos cuánticos de radios (a) 30nm y (b) 400nm para diferentes intensidades de campo magnético externo.

En la Fig. 4.2 se presentan las curvas de DOS para dos electrones confinados en puntos cuánticos de diferentes radios, calculados mediante dos técnicas. Se puede observar una gran similitud en las curvas obtenidas mediante los dos métodos, cuando el radio del punto cuántico crece.

Finalmente, en Fig. 4.3 se muestra las curvas para la DOS de dos electrones confinados en puntos cuánticos de radios de 30nm y 400nm[28,29] en presencia de campos magnéticos de diferentes intensidades. La relación que existe en la ocupación de los estados con respecto al crecimiento del campo magnético, se puede observar en las Fig 4.3a y Fig 4.3b, en la que a medida que el campo magnético va creciendo el nivel de ocupación de los estados disminuye y forma diferentes empaquetamientos energéticos. Esto se da debido al aumento de la fuerza externa ejercida por el campo sobre los portadores de carga aumentando por lo tanto las contribuciones diamagnéticas y paramagnéticas.

CONCLUSIONES

Se mostró que el modelo lenticular, describe la morfología de los puntos cuánticos fabricados en una forma adecuada y al mismo tiempo produce un potencial de confinamiento parabólico que simplifica esencialmente el análisis matemático del problema de dos partículas.

- ❖ Mediante diferentes aproximaciones se analizó el procedimiento de la separación de variables, donde este problema se redujo finalmente a una ecuación diferencial 1D que en la tesis se resuelve numéricamente por el método de barrido trigonométrico.
- ❖ Se calcularon los diferentes niveles energéticos, mediante el método de barrido trigonométrico, en función del campo magnético aplicado a lo largo de eje de simetría.
- ❖ Se propuso el camino alternativo para resolver el problema basados en el método de Galerkin usando como funciones base las soluciones exactas para el modelo del rotador rígido, en el cual se acepta la hipótesis que dos electrones están “congelados” en una configuración con posiciones de electrones diametralmente opuestas.
- ❖ El análisis de las soluciones halladas para puntos cuánticos de diferentes radios muestran la importancia de los efectos de correlación electrónica que se manifiesta en las múltiples intersecciones de las curvas de energía en función del radio y del campo magnético acompañado por reordenamiento de los niveles energéticos.
- ❖ Se realizó un análisis, comparando los resultados obtenidos por dos diferentes técnicas y se demostró que tanto las dependencias de las energías con la intensidad del campo magnético como las curvas de la densidad de los estados obtenidos por dos métodos, empiezan a tener similitud a medida que el tamaño radial del punto cuántico aumenta.

- ❖ El análisis presentado en esta tesis, mostro que el método de Galerkin se puede aplicar al estudio del espectro energético de dos electrones confinados en puntos cuánticos, con tamaños suficientemente grandes, cuando la energía de repulsión entre dos electrones es mucho más grande que su energía cinética.

Apéndice A

MÉTODO DE GALERKIN

En matemáticas, en el área de análisis numérico, el método de Galerkin¹ es un medio para la conversión de un problema de contorno para una ecuación diferencial a un problema de álgebra lineal ó proyectar un sistema de alta dimensión a un sistema de menor dimensión. El método propuesto por el matemático ruso Boris Galerkin se basa en una restricción de las posibles soluciones a un espacio más pequeño que el original y su formulación abstracta es casi trivial. Consideremos un problema de valores y funciones propias de un operador:

$$\hat{H} |\psi_k\rangle = E_k |\psi_k\rangle; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.1})$$

Suponemos que el problema (A.1) es suficientemente complicado para ser resuelto en una forma exacta. Sin embargo, existe otro problema con las mismas condiciones de frontera que es separable y cuyas soluciones exactas son conocidas:

$$\hat{H}_0 |\psi_k^{(0)}\rangle = E_k^{(0)} |\psi_k^{(0)}\rangle; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.2})$$

El conjunto de las funciones $|\psi_k^{(0)}\rangle; \quad k = 1, 2, 3, \dots$ forman una base completa y por eso la solución del problema (A.1) puede expresarse como una serie de Fourier generalizada:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot |\psi_k^{(0)}\rangle \quad (\text{A.3})$$

La representación (A.3) es exacta y al sustituir (A.3) en (A.1) se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de orden infinito respecto de las incógnitas C_k . Para simplificar el problema restringiremos el número de las funciones de base, es decir utilizaremos solamente una parte del espacio completo, su sub-espacio:

¹ Vidar Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, second edition, **Springer** (2006)

$$|\psi_A\rangle = \sum_{k=1}^N C_{k'} |\psi_{k'}^{(0)}\rangle \quad (\text{A.4})$$

Como la función (A.4) no es la solución exacta, esta no satisface la ecuación (A.1) y se analizar la siguiente discrepancia:

$$D |\psi_A\rangle = (\hat{H} - E) |\psi_A\rangle = \sum_{k=1}^N C_{k'} (\hat{H} - E) |\psi_{k'}^{(0)}\rangle \quad (\text{A.5})$$

Para un conjunto de funciones incompleto. Sin embargo, podemos al menos sugerir que esta discrepancia se anule en el sub-espacio escogido, es decir, que las proyecciones de esta discrepancia sobre los vectores de base del sub-espacio sean nulas:

$$\langle \psi_k^{(0)} | D |\psi_A\rangle = \langle \psi_k^{(0)} | (\hat{H} - E) |\psi_A\rangle = \sum_{k'=1}^N \langle \psi_k^{(0)} | (\hat{H} - E) |\psi_{k'}^{(0)}\rangle C_{k'} = 0; k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.6})$$

Este sistema de ecuaciones es similar a un problema de valores y vectores propios para una matriz de orden N :

$$\sum_{k'=1}^N (\hat{H}_{k,k'} - E \delta_{k,k'}) C_{k'} = 0; k = 1, 2, \dots, N; \hat{H}_{k,k'} = \langle \psi_k^{(0)} | \hat{H} | \psi_{k'}^{(0)} \rangle \quad (\text{A.7})$$

De esta manera el método de Galerkin permite reducir el problema de valores propios para una matriz de orden infinito a un problema similar para otra matriz de orden finito. La ecuación secular (A.7) del método de Galerkin se puede reescribir en una forma diferente al representar el Hamiltoniano del sistema en la forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V; V = \hat{H} - \hat{H}_0 \Rightarrow \hat{H}_{k,k'} = E_k^{(0)} \delta_{k,k'} + V_{k,k'}$$

$$\sum_{k'=1}^N [V_{k,k'} - (E - E_k^{(0)}) \delta_{k,k'}] C_{k'} = 0; k = 1, 2, \dots, N; V_{k,k'} = \langle \psi_k^{(0)} | (\hat{H} - \hat{H}_0) | \psi_{k'}^{(0)} \rangle \quad (\text{A.8})$$

REFERENCIAS

- [1]. Christopher Toumey, Reading Feynman Into Nanotechnology: A Text for a New Science, 2008, Techné 12:3, Pág.133-168.
- [2]. Máximo López-López, Víctor Hugo Méndez-García, Rev. Cinvestav, **27**, 44, (2008)
- [3]. A. Pulzara, E. Cruz-Hernández, J. Rojas Ramirez, M. Bernal, V.H. Méndez-García, y M. López López, Rev. Colombiana de Física, **40**, 183, (2008).
- [4]. G Lamouche and G Fishman, Rev. IOP, **10**, 7857, (1998)
- [5]. P.Bakchi, D.A. Broido, and K. Kempa, Rev. Phys. Rev. B, **42**, 7416, (1990)
- [6]. Steven E. Laux and Frack Stern, Rev. Phys. Rev. B, **42**, 5166, (1990)
- [7]. P. A. Maksym and Tapash Chakraborty, Rev. Phys. Rev Lett. **65**, 108 (1990)
- [8]. Vidar Gudmundsson, Rev. Phys. Rev. B, **43**, 12098, (1991)
- [9]. Jean-Jacques S. De Groote and J. E. M. Hornos, Rev. Phys. Rev. B, **46**, 12773, (1992)
- [10]. Daniela Pfannkuche, Vidar Gudmundsson, and Peter A. Maksym, Rev. Phys. Rev. B, **47**, 2244, (1993)
- [11]. S. Le Goff and B. Stébé, Rev. Phys. Rev. B, **47**, 1383, (1993)
- [12]. A. Matulis and F. M. Peeters, Rev. IOP, **6**, 7751, (1994)
- [13]. Mohammad El-Said, Rev. IOP, **10**, 1310, (1995)
- [14]. M. Abu Saa and M. El-Said, Rev. IOP, **12**, 309, (1996)
- [15]. O. Keller and T. Garm, Rev. Phys. Rev. B, **52**, 4670, (1996)
- [16]. F. M. Peeters and V. A. Schweigert, Rev. Phys. Rev. B, **53**, 1468, (1996)
- [17]. Yu.E. Lozovik, S.Yu. Volkov, M. Willander, Rev. Surface Science, **170**, 127, (2003)

- [18]. Laia Ginés Bartolomé, tesis de maestría Crecimiento por MBE de nanoestructuras semiconductoras III-V para tecnologías de información cuánticas. (2010)
- [19]. P. V. Pávlov, A. F. Jojlov, Mir, física del estado sólido, (1987)
- [20]. Charles Kittel, Introducción a la física del estado sólido, (2010)
- [21]. B. partoens, A. Matulis, F. Peeters, Phys. Rev. Lett. **59** 1617 (1999)
- [22]. M. Korkusinski and P. Hawrylak, Phys. Rev. B **63**. 196311 (2001)
- [23]. I.D. Mikhailov, J.H. Marin, and F. Garcia, Phys. Stat. Sol. (b) **242**, 1636(2005)
- [24]. J.H. Marin, F.J. Betancur, and I.D. Mikahailov, J. Phys.:Condens Matter **18**, 1005 (2005)
- [25]. Vidar Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, second edition, Springer (2006)
- [26]. Siegfried Flügge, Practical Quantum Mechanics, (1994)
- [27]. I.D. Mikhailov, F.J. Betancur, Phys. Stat. Sol. (b), **213**, 325 (1999)
- [28] P. Boonpeng, W. Jevasuwan, S. Suraprapapich, S. Ratanathamphan, S. Panyakeow, Microelectronic Engineering, **86**, 853 (2009)
- [29] N. W. Strom, Zh. M. Wang, J. H. Lee, Z. Y. AbuWaar, Yu. I. Mazur, G. J. Salamo, Nanoscale Res Lett, **2**, 112 (2007)