Simplicidad de Anillo de Grupo Torcido

Edson Jair Suárez Porras

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director

PH.D. Héctor Edonis Pinedo Tapia

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A Dios y mi familia.

Agradecimientos

En primer lugar, doy las gracias a Dios por la vida que me ha dado y permitirme estar hoy en donde estoy. Le doy las gracias al profesor Héctor Pinedo, director de este trabajo de grado, quien ha tenido paciencia, dedicación, apoyo y me ha enseñado tantas cosas, no solo para el desarrollo de este trabajo, también para la vida.

Hay muchas personas que de una u otra manera han contribuido en el proceso y desarrollo de este trabajo, familia y amigos. En especial agradezco a mis primas Yerly y Tatiana, que sé que puedo contar con ellas para lo que necesite, a mi hermano, quien me apoya incondicionalmente y a mi novia, quien me motiva y ayuda para salir adelante dándolo todo.

Finalmente, pero no menos importante, agradezco a mis padres quienes me han brindado todo lo necesario y suficiente para poder salir adelante, no solamente como un profesional, sino también como una gran persona para esta sociedad, espero de alguna manera que se sientan orgullosos.

Tabla de Contenido

Resumen

Título: Simplicidad de anillo de grupo torcido. [1]

Autor: Edson Jair Suárez Porras [2]

Palabras Clave: Simplicidad, anillo de grupo torcido, álgebras de caminos de Leavitt, dinámicas topológicas.

Descripción: Tomando R_0 un anillo conmutativo, asociativo y con unidades locales, G un grupo y α una acción parcial de G en R_0. Se demostrará que R_0 es una subanillo conmutativa maximal del anillo de grupo torcido $R_0 \rtimes_\alpha G$ si, y solo si, R_0 tiene la propiedad de intersección de ideales en $R_0 \rtimes_\alpha G$, lo cual ayudará a encontrar un criterio de simplicidad de $R_0 \rtimes_\alpha G$ en términos de conmutatividad maximal y la G-simplicidad de R_0.

Además se enunciarán algunas aplicaciones importantes, tales como: una nueva demostración del criterio de simplicidad para las álgebras de caminos de Leavitt y se estudiará la dinámica topológica que surge de las acciones parciales sobre subconjuntos abierto-cerrados de un conjunto compacto.

---

[1] Tesis

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

Abstract

Title: Simplicity of skew group rings. [3]

Author: Edson Jair Suárez Porras [4]

Keywords: Simplicity, skew group rings, Leavitt path algebras, topological dynamics.

Description: Taking R_0 a commutative, associative ring with local units, G a group and α a partial action of G on R_0. It will be shown that R_0 is a maximal commutative subring of $R_0 \rtimes_\alpha G$ if, and only if, R_0 has the intersection property of ideals in $R_0 \rtimes_\alpha G$. Which will help to find a simplicity criterion of $R_0 \rtimes_\alpha G$ in terms of maximal commutativity and the G-simplicity of R_0.

In addition, some important applications will be stated, such as: a new proof of the simplicity criterion for Leavitt path algebras, and we will be study the topological dynamics arising from partial actions on clopen subsets of a compact.

---

[3] Tesis

[4] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

Introducción

Los anillos de grupo torcido en el contexto de acciones parciales surgieron como una generalización de los anillos de grupo torcido clásicos y como un análogo algebraico de los productos cruzados por acciones parciales en las C^*-álgebras. De la misma manera que los anillos de grupo torcido, los anillos de grupo torcido para acciones parciales proporcionan una manera de construir anillos no conmutativos, recientemente, las álgebras de caminos de Leavitt se han estado trabajando en el contexto de acciones parciales, indicando que la teoría de los anillos no conmutativos puede beneficiarse de la teoría de los anillos de grupo torcido en el contexto de acciones parciales. Sin embargo, en comparación con la teoría bien establecida de los anillos de grupo torcido clásicos, la teoría sobre estos nuevos anillos está todavía en su infancia, pues haciendo una revisión bibliográfica existen pocos trabajos y documentos relacionados con los anillos de grupo torcido en el contexto de acciones parciales, entre ellos se encuentran Beuter and Gonçalves (2018), Dokuchaev and Exel (2017) y Gonçalves et al. (2014).

El principal objetivo de este proyecto, es derivar las condiciones necesarias y suficientes para la simplicidad de los anillos de grupo torcido para acciones parciales. En general, esto sigue siendo un problema abierto, incluso para los anillos de grupo torcido. Öinert en Öinert (2014) trabaja sobre este problema para anillos de grupo torcido $R_0 \rtimes_\alpha G$, donde el grupo o el anillo es conmutativo. En este documento, se hablará de los anillos de grupo torcido $R_0 \rtimes_\alpha G$ en el contexto de acciones parciales, donde R_0 es un anillo conmutativo con unidades locales y α es una acción parcial sobre R_0. Más exactamente, se demostrará que $R_0 \rtimes_\alpha G$ es simple si, y solo si, R_0 es G-simple y es un subanillo conmutativo maximal de $R_0 \rtimes_\alpha G$. En particular, estos resultados pueden aplicarse a las álgebras de caminos de Leavitt, vistas como anillos de grupo torcido en el contexto parcial, y a los anillos de grupo torcido para acciones parciales asociados a la dinámica topológica parcial.

1. Preliminares

Este capítulo se enfocará en enunciar las definiciones y los resultados básicos que facilitará la comprensión de algunos apartados que se trabajan más adelante. También son fuente principal para demostrar los teoremas de interés en el presente trabajo. Para una mayor lectura de estos temas, ver Abrams et al. (2017), Dokuchaev and Exel (2005) y Tomforde (2007).

1.1. Acciones parciales

En esta sección se hablará sobre las acciones parciales que son una colección muy importante para la comprensión del trabajo y las construcciones finales o resultados que se obtuvieron.

Definición 1.1. *Sea G un grupo con elemento identidad e y X un conjunto. Una **acción parcial** α de G en X es una colección de subconjuntos $D_g \subseteq X$ $(g \in G)$ y biyecciones $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tal que:*

1. *$D_e = X$ y α_e es la función identidad de X;*
2. *$\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;*
3. *$\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ para cada $x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.*

Se denotará la acción parcial por $\alpha = (D_g, \alpha_g)_{g \in G}$.

Observación 1.2. *De la definición de acción parcial es importante tener en cuenta lo siguiente:*

I. *Las condiciones 2 y 3 implican que la función α_{gh} es una extensión de la función $\alpha_g \circ \alpha_h$.*

II. *Para cada $g \in G, \alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.*

III. *La condición* 2 *puede ser reemplazada por lo siguiente*

$$\alpha_h^{-1}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) = D_h{}^{-1} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}.$$

En efecto, por 2 *queda que* $\alpha_h^{-1}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, *recíprocamente, si se reemplaza* h *por* h^{-1} *y* g *por* gh *en* 2 *se obtiene que*

$$(\alpha_{h^{-1}})^{-1}\left(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}\right) \subseteq D_{\left(ghh^{-1}\right)^{-1}} \cap D_h = D_{g^{-1}} \cap D_h$$

así aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ *se consigue que* $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)$ *como se deseaba.*

Por esta observación, las condiciones $1,2$ y 3 de la definición anterior, son equivalentes a las siguientes:

1. $D_e = X$ y α_e es la función identidad de X;
2. $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$;
3. $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$ para cada $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

En el siguiente ejemplo se va a construir una acción parcial por medio de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Ejemplo 1.3. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Si* A *el* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con base los símbolos* $\{1,t,u,v\}$. *Se define el producto en* A *de la siguiente manera:*

$$u^2 = v^2 = t^2 = uv = vu = tu = ut = 0, \quad tv = vt = u \quad y \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

para todo a en A, este producto dota al conjunto A una estructura de $\mathbb{K}$-álgebra asociativa unitaria. Ahora, si se toma $G = \langle g : g^2 = 1 \rangle$ e I el ideal de A generado por v (dado que $tv = vt = u$ el ideal I es generado por u y por v, es decir $I = \langle u, v \rangle$), estableciendo $D_1 = A, \alpha_1 : A \to A, D_g = I$ y $\alpha_g : I \to I$ con $\alpha_g(u) = v$ y $\alpha_g(v) = u$ para todo $g \in G$, se obtiene una acción parcial $\alpha = (D_g, \alpha_g)_{g \in G}$.

Observación 1.4. *Se puede definir una acción parcial cuando el conjunto X es un álgebra, entonces una acción parcial de un grupo G en X, se verá como una acción parcial de G a X, viendo a X como conjunto, donde los D_g son ideales y los α_g son homomorfismo de anillos.*

Lema 1.5. *Sea G un grupo, $(D_g, \theta_g)_{g \in G}$ una acción parcial de G en un conjunto X y $F(X)$ la $\mathbb{K}$-álgebra de funciones de X en $\mathbb{K}$. Entonces la familia $(F(D_g), \alpha_g)_{g \in G}$ es una acción parcial de G en $F(X)$, tal que*

$$\alpha_g : F\left(D_{g^{-1}}\right) \to F\left(D_g\right)$$

$$f \mapsto f \circ \theta_{g^{-1}}$$

Donde $F(D_g) = \{f \in F(X) : f(x) = 0$ para todo $x \notin D_g\}$.

Demostración. Es claro que para cada $g \in G$, como $F(D_g)$ es un ideal de $F(X)$ y, por (Beuter and Gonçalves, 2016, Proposición 3.2, pág. 94), α_g es biyectiva. Solo resta probar que $(F(D_g), \alpha_g)_{g \in G}$ satisface las condiciones 1 a 3 de la Definición 1.1.

- $F(D_e) = F(X)$ y $\alpha_e = Id$.

  Dado que $(D_g, \theta_g)_{g \in G}$ es una acción parcial, luego $D_e = X$ y $\theta_e = Id$ lo cual implica que $F(D_e) = F(X)$ y $\alpha_e = Id$.

- $\alpha_g(F(D_{g^{-1}}) \cap F(D_h)) = F(D_g) \cap F(D_{gh})$.

  Primero se probará que $\alpha_g(F(D_{g^{-1}} \cap D_h)) = F(\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h))$. Para esto, sea $y = f \circ \theta_{g^{-1}}$, para algún $f \in F(D_{g^{-1}} \cap D_h)$. Ahora, si $x \notin \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ entonces $\theta_{g^{-1}}(x) \notin D_{g^{-1}} \cap D_h$ y así $f \circ \theta_{g^{-1}}(x) = 0$ y $y \in F(\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h))$.

  Por otro lado, si $f \in F(\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h))$ implica que $f \circ \theta_g \in F(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ y $\alpha_g(f \circ \theta_g) = f$ como se deseaba.

  Así, se puede ver que,

$$\begin{aligned}\alpha_g\left(F(D_{g^{-1}}) \cap F(D_h)\right) &= \alpha_g\left(F\left(D_{g^{-1}}\right) \cap F\left(D_h\right)\right) = \alpha_g\left(F\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)\right) \\ &= F\left(\theta_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)\right) = F\left(D_g \cap D_{gh}\right) \\ &= F\left(D_g\right) \cap F\left(D_{gh}\right).\end{aligned}$$

- $\alpha_g(\alpha_h(f)) = \alpha_{gh}(f)$ para todo $f \in F(D_{h^{-1}}) \cap F(D_{h^{-1}g^{-1}})$. Para ello, sea $f \in F(D_{h^{-1}}) \cap F(D_{h^{-1}g^{-1}}) = F(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}})$ y $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$. De lo anterior, se sigue,

$$\begin{aligned}\alpha_g\left(\alpha_h(f)\right)(x) &= \alpha_g\left(f \circ \theta_{h^{-1}}\right)(x) = f \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}}(x) \\ &= f\left(\theta_{h^{-1}}\left(\theta_{g^{-1}}(x)\right)\right) = f\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\right)(x) \\ &= \alpha_{gh}(f)(x).\end{aligned}$$

$\square$

1.2. Sobre anillos de grupo torcido

En la presente sección se puede encontrar información sobre los anillos de grupo torcido y enunciar resultados que ayudaran en demostrar los teoremas de simplicidad que son el principal interés de este trabajo.

Definición 1.6. *Dada una acción parcial α de un grupo G en un álgebra A, el **anillo de grupo torcido** $A \rtimes_\alpha G$ es el conjunto de todas las sumas formales*

$$\left\{ \sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g \right\},$$

donde los δ_g son símbolos. La adición es definida componente a componente y la multiplicación es determinada por

$$(a_g\delta_g)\cdot(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}.$$

Observación 1.7.

- *Primero, como se podrá observar en el Ejemplo 1.10 los anillos de grupo torcido no siempre serán asociativos.*
- *Si $A \rtimes_\alpha G$ es asociativo, entonces es un anillo G-graduado con la graduación dada por*

$$A \rtimes_\alpha G = \oplus_{g\in G}(A \rtimes_\alpha G)_g$$

donde $(A \rtimes_\alpha G)_g = A_g\delta_g$

Donde se entenderá por anillos G-graduado lo siguiente:

Definición 1.8. *Sea G un grupo multiplicativo con identidad $e \in G$. Un anillo asociativo con unidad R se dice G-**graduado**, si existe una familia $\{R_g\}_{g\in G}$ de subgrupos aditivos de R, tal que*

$$R = \oplus_{g\in G} R_g,$$

*y adicionalmente para cualesquiera $g, h \in G$ se satisface $R_g R_h \subseteq R_{gh}$. El subgrupo R_g es llamado la **componente homogénea** de R.*

Definición 1.9. *Sea I un ideal de un anillo R que es G graduado. Entonces I se dice un **ideal graduado**, si $I = \oplus_{g\in G}(I \cap R_g)$.*

Ejemplo 1.10. *La $\mathbb{K}$-álgebra del Ejemplo 1.3 no es asociativa. Pues, considere el elemento $x = t\delta_1 + u\delta_g$ para algún $g \in G$, calculando el producto xx obtenemos:*

$$\begin{aligned}
xx &= (t\delta_1 + u\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= (t\delta_1)(t\delta_1) + (t\delta_1)(u\delta_g) + (u\delta_g)(t\delta_1) + (u\delta_g)(u\delta_g) \\
&= t^2\delta_1 + \alpha_1(\alpha_1(t)u)\delta_g + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(u)t\right)\delta_g + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(u)u\right)\delta_1 \\
&= \alpha_1(tu)\delta_g + \alpha_g(vt)\delta_g + \alpha_g(vu)\delta_1 \\
&= \alpha_g(u)\delta_g = v\delta_g
\end{aligned}$$

Ahora, calculado $(xx)x$ y $x(xx)$

$$\begin{aligned}
(xx)x &= v\delta_g\left(t\delta_1+u\delta_g\right) & x(xx) &= \left(t\delta_1+u\delta_g\right)v\delta_g \\
&= \left(v\delta_g\right)\left(t\delta_1\right)+\left(v\delta_g\right)\left(u\delta_g\right) & &= \left(t\delta_1\right)\left(v\delta_g\right)+\left(u\delta_g\right)\left(v\delta_g\right) \\
&= \alpha_g\left(\alpha_{g-1}(v)t\right)\delta_1+\alpha_g\left(\alpha_{g-1}(v)u\right)\delta_1 & &= \alpha_1\left(\alpha_1(t)v\right)\delta_g+\alpha_g\left(\alpha_{g-1}(u)v\right)\delta_1 \\
&= \alpha_g(ut)\delta_1+\alpha_g\left(u^2\right)\delta_1 & &= tv\delta_g+\alpha_g\left(v^2\right)\delta_0 \\
&= 0 & &= u\delta_g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \rtimes_\alpha G$ no es asociativo.

Proposición 1.11. *Sea e el elemento neutro del grupo G y R un anillo G-graduado. Si X es un subconjunto de R_e, entonces el ideal a la izquierda generado por X de R, $I(X)$ es graduado.*

Demostración. Se debe probar que $I(X) \subseteq \sum_{g\in G}\left(I(X)\cap R_g\right)$, se tiene que

$$I(X) = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R \text{ y } x_i \in X \text{ para todo } i \in \{1,\cdots,n\}\right\}.$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in I(X)$, dado que $r_i \in R$ para cada i y R es G-graduado, se puede escribir $r_i = \sum_{g\in G} s_g$ donde $s_g \in R_g$ para cada $g \in G$, así $r_i x_i = \sum_{g\in G} s_g x_i$ donde $s_g x_i \in R_g R_e \subseteq R_g$. Por lo tanto, $r_i x_i \in \sum_{g\in G}\left(I\cap R_g\right)$, para todo $1 \le i \le n$, y de ahí que $x \in \sum_{g\in G}\left(I\cap R_g\right)$. $\square$

1.3. Grafos

Cuando se habla en el este trabajo sobre las álgebras de caminos de Leavitt, se refiere a ciertas propiedades que cumple un grafo. Para ello, esta sección se dedicará en introducir algunas notaciones y definiciones sobre estos.

Definición 1.12. *Un **grafo** es una cuádrupla $E = (E^0, E^1, r, s)$ dada por:*

I. *Un conjunto E^0 cuyos elementos son llamados **vértices**;*

II. *Un conjunto E^1 cuyos elementos son llamados **aristas**;*

III. *Dos funciones $r,s : E^1 \to E^0$.*

Observación 1.13. *Dada una arista e, se dirá que e comienza en el vértice $s(e)$ y termina en el vértice $r(e)$. Se indicara por $s(e) \xrightarrow{e} r(e)$.*

Definición 1.14. *Sea E un grafo:*

1. *Si $s^{-1}(v)$ es finito para todo $v \in E^0$, entonces el grafo E es de **filas finitas**.*
2. *Un vértice $v \in E^0$ es llamado **sumidero** si $s^{-1}(v) = \varnothing$, mientras que un vértice v para el cual $r^{-1}(v) = \varnothing$ es llamado **fuente**.*
3. *Un vértice que es sumidero y fuente al mismo tiempo es llamado **aislado**.*
4. *Un vértice v tal que $|s(v)|$ es infinito, es llamado un **emisor infinito**.*
5. *Si v es un sumidero o un emisor infinito, v es llamado un **vértice singular**, caso contrario v es un **vértice regular**.*

*El grafo E se dice **finito**, si E^0 y E^1 lo son.*

Definición 1.15. *Sea E un grafo, entonces:*

- *Un **camino** μ de un grafo E es una sucesión de aristas $\mu = e_1e_2\cdots e_n$ tales que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para $i = 1,2,...,n-1$. En este caso, $s(\mu) = s(e_1)$ es fuente de μ y $r(\mu) = r(e_n)$ es el rango de μ y $n = |\mu|$ es la **longitud** del camino μ.*

- *Dado* $\mu = e_1e_2e_3\cdots$ *un camino finito o infinito en un grafo E, se dice que* μ' *es un* ***subcamino inicial*** *de* μ *si existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mu' = e_1e_2\cdots e_n$.

Observación 1.16. *Considere a E un grafo, luego:*

1. *Los vértices de E serán considerados como caminos de longitud 0.*

2. *Se puede extender las funciones s y r a* E^0 *definiendo* $s(v) = r(v) = v$.

3. *Para cada* $n \geq 2$ *llamamos* E^n *al conjunto de todos los caminos en E de longitud n y definimos* $\mathrm{Path}(E) := \bigcup_{n\geq 0} E^n$ *al conjunto de todos los caminos en E.*

Definición 1.17. *Dado* $\mu = e_1e_2\cdots e_n$ *un camino de un grafo E con* $n \geq 1$ *:*

1. *Si* $v = s(\mu) = r(\mu)$, *entonces* μ *es llamado un* ***camino cerrado*** *basado en v;*

2. *Si* μ *es un camino cerrado basado en v y además* $s(e_j) \neq v$ *para todo* $j > 1$, *se dirá que* μ *es un* ***camino cerrado simple*** *basado en v;*

3. *Si* μ *es un camino cerrado simple basado en v tal que* $s(e_i) \neq s(e_j)$ *con* $i \neq j$, *entonces* μ *es llamado un* ***ciclo*** *basado en v;*

4. *Una* ***salida*** *para el camino* μ *es una arista e tal que* $s(e) = s(e_i)$ *para algún i y* $e \neq e_i$;

5. *Un ciclo de longitud 1 es llamado un* ***bucle****;*

6. *Un grafo E es llamado* ***acíclico*** *si E no tiene ningún camino cerrado basado en cualquier vértice de E.*

Definición 1.18. *Sea E un grafo:*

I. *El grafo E satisface la **condición** (K) si para cada $v \in E^0$ que se encuentra en un camino cerrado simple, existen al menos dos caminos cerrados simples distintos basados en v.*

II. *El grafo E satisface la **condición** (L) si cada ciclo en E tiene salida.*

A continuación un ejemplo, para entender esas definiciones.

Ejemplo 1.19. *Considere los siguientes grafos*

$$\textbf{\textit{A:}}\quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & \cdot \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \cdot \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

$$\textbf{\textit{B:}}\quad \begin{tikzcd} \cdot v_1 \arrow[loop above, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] & \cdot v_2 \arrow[r, "f_3"] & \cdot v_3 \arrow[r, "f_4"] & \cdot v_4 \cdots \end{tikzcd}$$

El grafo A cumple la condición (K), no tiene sumideros, es un grafo de filas finitas, finito, sin fuentes donde además cada vértice es un vértice regular y el grafo B cumple la condición (L), pues su único ciclo $\mu = f_1$ tiene salida $\rho = f_2$, es infinito y no tiene sumideros.

1.4. Sobre álgebras de caminos de Leavitt

Antes de mostrar la simplicidad del las álgebras de caminos de Leavitt, se enunciarán algunas definiciones y resultados que son necesarios para entender dichas álgebras.

Definición 1.20. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y E un grafo. El **álgebra de camino** $\mathbb{K}E$ se define como el $\mathbb{K}$-espacio vectorial con base* $\mathrm{Path}(E)$.

Se define el producto en $\mathbb{K}E$ como la concatenación de caminos (si es posible) y se extiende linealmente. Más precisamente, dados dos caminos $p = p_1 \cdots p_n$ y $q = q_1 \cdots q_m$ en $\mathbb{K}E$, se establece

$$p \cdot q = \begin{cases} p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m, & \text{si } r(p) = s(q) \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$s(e)e = er(e) = e$ para cualquier arista $e \in E^1$ y $ve = ev = 0$ para cualquier otro vértice $v \in E^0$. En particular, $vw = \delta_{v,w}v$, donde δ indica la función delta de Kronecker.

El producto en $\mathbb{K}E$ es asociativo, ya que la concatenación de caminos es asociativa, y es distributivo por definición de productos para combinaciones lineales arbitrarias. Se afirma que si el grafo es finito el elemento identidad de $\mathbb{K}E$ está dado por la suma de caminos de longitud cero, es decir, la suma de sus vértices

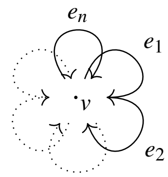
$$1_{\mathbb{K}E} = \sum_{v \in E^0} v.$$

En efecto, para cada camino $p \in E$ se obtiene,

$$p\left(\sum_{v \in E^0} v\right) = pr(p) = p = s(p)p = \left(\sum_{v \in E^0} v\right) p$$

y por la distributividad se sigue que $\alpha \left(\sum_{v \in E^0} v\right) = \left(\sum_{v \in E^0} v\right) \alpha = \alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{K}E$. Como se evidencia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.21. *Considere el grafo "la rosa de n pétalos", denotada por R_n que consiste en un único vértice y n bucle*



Se tiene un isomorfismo entre la $\mathbb{K}$-álgebra de camino $\mathbb{K}R_n$ y la $\mathbb{K}$-álgebra libre en n variables no conmutativas $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ que envía $e_i \longmapsto x_i$ para cada $i \in \{1,2,...,n\}$.

Ahora se podrá ver la relación que hay entre las álgebras de camino con las álgebras de camino de Leavitt. Pero antes de ver la relación, se darán algunas definiciones y ejemplos.

Definición 1.22. *Un anillo cumple la **propiedad IBN** (Invariant Basis Number) si dados enteros positivos m,n con la propiedad de que los R-módulos libres R^m y R^n son isomorfos, entonces $m = n$.*

Menos formalmente, se dice que un anillo satisface la condición IBN si cuales quiera dos bases de un R-módulo libre finitamente generado tienen el mismo tamaño.

Definición 1.23. *Dado un anillo fijo R sin la propiedad IBN. Sea $m \in \mathbb{N}$, el menor número con la propiedad de que $R^m \cong R^{m'}$ como R-módulos izquierdos, para algún $m' > m$. Para este m, sea n el mínimo de los m' que cumplen la propiedad. En este caso, se dice que R tiene un **módulo del tipo** (m,n).*

Ejemplo 1.24. *Sean R un anillo y M un R-módulo libre izquierdo con base infinita numerable $X = \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, y sea $S = \mathrm{End}_R(M)$ su anillo de endomorfismos. Considerando la estructura natural de S-módulo a izquierda sobre S. De ahí que S es libre con base $\{1_M\}$. Ahora se construye una base de S con dos elementos, lo cual dará contrario a la definición. Se definen las funciones $f,g : X \to M$*

por:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_n & si \quad i = 2n \\ 0 & si \quad i = 2n-1 \end{cases} \quad , \quad g(x_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 2n \\ x_n & si \quad i = 2n-1 \end{cases} .$$

Dado que M es un R-módulo libre, se puede extender linealmente tanto f como g a R-endomorfismos de M, los cuales se denotarán por $\bar{f}, \bar{g}$. $\{\bar{f}, \bar{g}\}$ es una base de S, pues:

a) El conjunto $\{\bar{f}, \bar{g}\}$ genera a S. Sea $h \in S$ y $t_1, t_2 : X \to M$ las funciones dadas por $t_1(x_i) = h(x_{2i})$ y $t_2(x_i) = h(x_{2i-1})$, para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, de igual forma se denota por $\overline{t_1}, \overline{t_2}$ a los R-endomorfismos de M asociados a t_1, t_2. Así se tiene que, $h = \overline{t_1}\bar{f} + \overline{t_2}\bar{g}$, pues si $i = 2n$

$$\begin{aligned}\left(\overline{t_1}\bar{f} + \overline{t_2}\bar{g}\right)(x_i) &= \overline{t_1}\left(\bar{f}(x_i)\right) + \overline{t_2}\left(\bar{g}(x_i)\right) \\ &= \overline{t_1}(x_n) + \overline{t_2}(0) \\ &= h(x_i)\end{aligned}$$

y si $i = 2n - 1$

$$\begin{aligned}\left(\overline{t_1}\bar{f} + \overline{t_2}\bar{g}\right)(x_i) &= \overline{t_1}\left(\bar{f}(x_i)\right) + \overline{t_2}\left(\bar{g}(x_i)\right) \\ &= \overline{t_1}(0) + \overline{t_2}(x_n) \\ &= h(x_i)\end{aligned}$$

b) El conjunto $\{\bar{f}, \bar{g}\}$ es linealmente independiente. Suponga que existen R-endomorfismos $h_1, h_2 \in S$ tales que $h_1\bar{f} + h_2\bar{g} = 0$, entonces para cada x_i se tiene que $\left(h_1\bar{f} + h_2\bar{g}\right)(x_i) = 0$, en particular,

$$\left(h_1\bar{f} + h_2\bar{g}\right)(x_{2i}) = h_1\left(\bar{f}(x_{2i})\right) = h_1(x_i) = 0$$

$$\left(h_1\bar{f} + h_2\bar{g}\right)(x_{2i-1}) = h_2\left(\bar{g}(x_{2i-1})\right) = h_2(x_i) = 0.$$

Por tanto, $\overline{h_1} = \overline{h_2} = 0$.

Lo anterior, indica que $S \cong S^2$. *Es decir, el anillo* $S = End_R(M)$ *tiene un módulo del tipo* $(1,2)$.

El siguiente es un resultado encontrado en Abrams et al. (2017) es muy importante en el estudio de los anillos sin la propiedad IBN, y servirá para definir las álgebras de caminos de Leavitt.

Teorema 1.25. *Para cada par de enteros positivos* $n > m$ *y un cuerpo* $\mathbb{K}$*, existe una* $\mathbb{K}$*-álgebra unitaria salvo isomorfismos denotada por* $L_K(m,n)$ *tal que:*

1. $L_K(m,n)$ *tiene un módulo del tipo* (m,n)*;*

2. *Para cada* $\mathbb{K}$*-álgebra A unitaria que tiene un módulo del tipo* (m,n)*, existe un* $\mathbb{K}$*-homomorfismo entre A y* $L_K(m,n)$ *que preserva unidad.*

El enfoque motivacional de las álgebras de camino de Leavitt, son los anillos R sin la propiedad IBN que tienen un módulo del tipo $(1,n)$ para algún $n > 1$. Vale la pena recordar que si ${}_RR \cong {}_RR^n$, entonces existen morfismos $\phi \in \mathrm{Hom}_R(R,R^n)$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R^n,R)$ tales que $\varphi \circ \phi = 1_R$ y $\phi \circ \varphi = 1_{R^n}$. Usando interpretación matricial, lo anterior nos dice que dichos morfismo existen, si y sólo si, existen R-vectores $1 \times n$ y $n \times 1$ para los cuales

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 1_R \quad y \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_R \end{pmatrix}.$$

Además, si se reformulará lo anterior, equivale a que existan $2n$ elementos $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ en R para los cuales,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R \quad y \quad y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n \tag{1}$$

En general, es posible construir una $\mathbb{K}$-álgebra A que contenga a los $2n$ elementos y se comporte como en (1). En efecto, sea

$$S = \mathbb{K}\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1 \cdots, Y_n \rangle,$$

la $\mathbb{K}$-álgebra asociativa libre en $2n$ variables no conmutativas, I el ideal de S generado por las relaciones

$$I = \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 1, Y_i X_j - \delta_{i,j} 1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle,$$

y sea $A = S/I$, entonces el conjunto $\left\{x_i = \overline{X_i}, y_i = \overline{Y_i} \mid 1 \leq i, j \leq n\right\}$ se comporta como en (1) y por tanto $A \cong A^n$.

Aunque se acaba de construir una $\mathbb{K}$-álgebra A tal que $A \cong A^n$ esto no garantiza que A tenga un módulo del tipo $(1, n)$ hasta que se garantice la minimalidad de n, pero Leavitt establece en Leavitt (1962) que de hecho, la $\mathbb{K}$-álgebra $L_K(1, n)$ es precisamente la $\mathbb{K}$-álgebra $A = S/I$. Esto permite establecer la siguiente definición.

Definición 1.26. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $n > 1$ un entero. Entonces la* ***$\mathbb{K}$-álgebra de Leavitt de tipo***

$(1,n)$ *denotado por* $L_K(1,n)$*, es la* $\mathbb{K}$*-álgebra*

$$\mathbb{K}\langle X_1,\cdots,X_n,Y_1\cdots,Y_n\rangle / \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i,j \leq n \right\rangle$$

Ahora se enunciará la definición de simplicidad en un anillo.

Definición 1.27. *Se dice que un anillo R es simple, si no tiene ideales propios bilaterales.*

Observación 1.28. *Un anillo conmutativo R es simple, si no tiene ideales propios.*

Teorema 1.29. *Para cada entero* $n > 1$*, y* $\mathbb{K}$ *un cuerpo.* $L_K(1,n)$ *es una* $\mathbb{K}$*-álgebra simple.*

Demostración. Se encuentra la prueba en Leavitt (1962). □

Ahora se mencionarán algunos conceptos y resultados básicos de las álgebras de camino de Leavitt. En adelante, $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo y R un anillo asociativo no necesariamente unitario.

Definición 1.30. *(Álgebras de camino de Leavitt) Sea E un grafo dirigido arbitrario y* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Se define el conjunto* $\left(E^1\right)^*$ *el cual consiste de los símbolos de la forma* $\left\{e^* \mid e \in E^1\right\}$*, estos elementos son llamados* ***aristas fantasmas****. El* ***álgebra de camino de Leavitt*** *de E con coeficientes en* $\mathbb{K}$*, denotada por* $L_K(E)$*, es la* $\mathbb{K}$*-álgebra asociativa libre generada por los conjuntos* $E^0 \cup E^1 \cup \left(E^1\right)^*$*, sujeta a las siguientes relaciones:*

I. $vv' = \delta_{v,v'}v$ *para todo* $v, v' \in E^0$*;*

II. $s(e)e = er(e) = e$ *para todo* $e \in E^1$*;*

III. $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$ *para todo* $e \in E^1$*;*

$CK1$. $e^*e' = \delta_{e,e'}r(e)$ para todo $e, e' \in E^1$;

$CK2$. $v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e)=v\}} ee^*$ para cada vértice regular $v \in E^0$.

En otras palabras, el álgebra de camino de Leavitt es la $\mathbb{K}$-álgebra asociativa libre generada por $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ cociente el ideal generado por las cinco relaciones mencionadas.

Observación 1.31. *De la definición anterior, note que,*

1. *Es posible extender la noción de arista fantasma a vértice fantasma donde $v^* = v$ para cada $v \in E^0$.*

2. *Existe una conexión entre la noción clásica de álgebras de caminos y la noción de álgebras de caminos de Leavitt, que se describió aquí. Como un breve recordatorio, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $G = (G^0, G^1)$ es un grafo dirigido, entonces la $\mathbb{K}$-álgebra de camino de G, denotada $\mathbb{K}G$, se define como la $\mathbb{K}$-álgebra asociativa libre generada como álgebra por el conjunto $G^0 \cup G^1$, con relaciones dadas por $CK1$ y $CK2$ de la definición 1.30. Equivalentemente, $\mathbb{K}G$ es la $\mathbb{K}$-álgebra que tiene $Path(G)$ como base, y en la que la multiplicación se define por la extensión $\mathbb{K}$-lineal de la concatenación de caminos, i.e., $p \cdot q = pq$ si $r(p) = s(q)$, 0 en otro caso.*

Ahora, se podrá ver la relación que hay entre las álgebras de caminos y las álgebras de caminos de Leavitt.

Observación 1.32. *Dado un grafo E, defina el grafo extendido de E como el grafo $\hat{E} = \left(E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s'\right)$, donde las funciones r' y s' son extensiones de las funciones r y s de la siguiente manera:*

$$r'|_{E^1} = r, \quad s'|_{E^1} = s, \quad r'(e^*) = s(e) \quad y \quad s'(e^*) = r(e) \text{ para todo } e \in E^1.$$

Entonces,

$$L_K(E) = \mathbb{K}\widehat{E}/\langle (CK1), (CK2) \rangle$$

donde $\mathbb{K}\widehat{E}$ *denota a la* $\mathbb{K}$*-álgebra de caminos del grafo* $\widehat{E}$*, y* $(CK1), (CK2)$ *se refieren a las relaciones de la definición 1.30.*

Definición 1.33. *Sean* A *un anillo y* $a \in A$*, decimos que* a *es un elemento idempotente de* A *si* $a \cdot a = a$*.*

El siguiente resultado será de gran utilidad para probar que existe homomorfismo entre las álgebras de camino de Leavitt y un anillo de grupo torcido deseado.

Proposición 1.34. *(Propiedad universal de* $L_K(E)$ *) Sea* E *un grafo y* A *una* $\mathbb{K}$*-álgebra la cual contiene un conjunto de idempotentes ortogonales* $\left\{a_v \mid v \in E^0\right\}$ *y conjuntos* $\left\{a_e \mid e \in E^1\right\}, \left\{b_e \mid e \in E^1\right\}$ *los cuales satisfacen*

1. $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ *y* $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$ *para todo* $e \in E^1$*;*
2. $b_f a_e = \delta_{e,f} a_{r(e)}$ *para todo* $e, f \in E^1$*;*
3. $a_v = \sum_{\left\{e \in E^1 \mid s(e) = v\right\}} a_e b_e$ *para cada vértice regular* $v \in E^0$*.*

Por las relaciones que definen a las álgebras de camino de Leavitt, existe un único homomorfismo de $\mathbb{K}$*-álgebras* $\varphi : L_K(E) \to A$ *tal que* $\varphi(v) = a_v, \varphi(e) = a_e$ *y* $\varphi(e^*) = b_e$ *para todo* $v \in E^0$ *y* $e \in E^1$

El siguiente ejemplo ayudara para entender como operamos en las álgebras de caminos de Leavitt.

Ejemplo 1.35. *Considerando el siguiente grafo:*

$$\hat{E}: \begin{tikzcd} \cdot v_1 \arrow[r, shift left, "e_1"] & \cdot v_2 \arrow[l, dotted, shift left, "e_1^*"] \arrow[loop above, "e_2"] \arrow[loop below, dotted, "e_2^*"] \arrow[r, shift left, "e_3"] & \cdot v_3 \arrow[l, dotted, shift left, "e_3^*"] \arrow[r, dotted, shift right, "(\infty)"'] & \cdot v_4 \arrow[l, shift right, "(\infty)"'] \end{tikzcd}$$

Se muestran algunos cálculos en $L_K(E)$ (en el grafo (∞) indica que del vértice v_4 al vértice v_3 salen un número infinito de aristas). Por la propiedad $(CK1)$ se tiene,

$$e_1^*e_1 = e_2^*e_2 = v_2, \quad y \quad e_3^*e_3 = v_3,$$

se puede observar que no se tiene la propiedad $CK2$ en el vértice v_4 pues es un emisor infinito, y tampoco en el vértice v_3 por ser un sumidero, mientras que por esa misma propiedad se sigue

$$v_2 = e_2e_2^* + e_3e_3^*, \quad y \quad e_1e_1^* = v_1.$$

Ahora, se enunciarán y demostrarán algunos lemas básicos respecto a los elementos del álgebra de caminos de Leavitt.

Lema 1.36. *Sea E un grafo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Path\,(E)$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

a) $\alpha^*\alpha = r(\alpha)$ *en* $L_K(E)$ *para todo* $\alpha \in \mathrm{Path}(E)$;

b) El producto de monomios en $L_K(E)$ se realiza de la siguiente manera

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\eta\delta^* & si \quad \gamma = \beta\eta \\ \alpha\lambda^*\delta^* & si \quad \beta = \gamma\lambda \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases},$$

c) *El álgebra de camino de Leavitt es generada como un K-espacio vectorial por el conjunto de monomios de la forma*

$$\{\alpha\beta^* \mid r(\alpha) = r(\beta)\}$$

Demostración. Considere E un grafo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \text{Path}\,(E)$.

a) La demostración de este ítem se llevará a cabo por medio de inducción sobre la longitud del camino α:

- Si $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha = \alpha_1$ es un camino con una sola arista y por la propiedad $(CK1)$ se tiene que $\alpha_1^*\alpha_1 = r(\alpha_1)$.
- Paso inductivo: Suponga que para todo camino de longitud $n-1$ se tiene que $\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = r(\alpha_{n-1})$. Sea α un camino de longitud n, luego,

$$\begin{aligned}
\alpha_n^*\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n &= \alpha_n^*\left(\alpha_{n-1}^* \cdots \alpha_1^*\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\right)\alpha_n \\
&= \alpha_n^* r(\alpha_{n-1})\,\alpha_n \quad \text{Por hipótesis de inducción} \\
&= \alpha_n^*\left(s(\alpha_n)\,\alpha_n\right) \quad \text{Por la Definición 1.15} \\
&= \alpha_n^*\alpha_n \quad \text{Por } (I) \\
&= r(\alpha_n) \quad \text{Por } (CK1).
\end{aligned}$$

Por lo anterior, se concluye el resultado.

b) Primero, suponga que $\gamma = \beta\eta$, en este caso se tiene que

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta) = \alpha\beta^*\beta\eta\delta^* = \alpha(\beta^*\beta)\eta\delta^* \underset{(1)}{=} \alpha r(\beta)\eta\delta^* \underset{(2)}{=} \alpha s(\eta)\eta\delta^* \underset{(3)}{=} \alpha\eta\delta^*,$$

Donde la igualdad (1) es consecuencia del ítem a de este lema, la igualdad (2) se da pues $\gamma = \beta\eta$ es un camino y la igualdad (3) por la propiedad $(CK1)$, con esto se termina el primer caso. Ahora, se asume que $\beta = \gamma\lambda$, se tiene entonces,

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \alpha(\gamma\lambda)^*\gamma\delta^* = \alpha\lambda^*(\gamma^*\gamma)\delta^* = \alpha\lambda^*\delta^*,$$

donde las igualdades de arriba se deducen de manera análoga al caso anterior. Finalmente, si no se tiene ninguno de los casos ya mencionados por la propiedad $CK1$, el producto debe ser nulo.

c) El ítem b, indica que

$$H = \langle\{\alpha\beta^* \mid r(\alpha) = r(\beta)\}\rangle$$

es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $L_K(E)$. Además, los generadores de $L_K(E)$ están en H pues $v = vv = vv^*$ por $CK2, e = er(e)^*$ por (I) y $e^* = r(e)e^*$, de ahí que $H = L_K(E)$.

□

Observación 1.37. *Sea $\mathbb{K}E$ el álgebra de caminos definida anteriormente, se define el grado de un camino $p \in E^n$ como $\mathrm{grad}(p) = |p| = n$ y $\mathbb{K}E^m = 0$, para $m < 0$, lo que da una $\mathbb{Z}$-graduación en $\mathbb{K}E$, pues si $q \in E^m$ se tiene que $pq = 0$ o $|pq| = m+n$, y en ambos casos $pq \in \mathbb{K}E^{m+n}$, es decir, $(\mathbb{K}E^n)(\mathbb{K}E^m) \subseteq \mathbb{K}E^{m+n}$. Así, por lo anterior,*

$$\mathbb{K}E = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{K}E^n.$$

Es decir, es un anillo $\mathbb{Z}$-graduado.

Definición 1.38. *Sea E un grafo arbitrario y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$, defina* $\operatorname{grad}(v) = 0, \operatorname{grad}(e) = 1$ *y* $\operatorname{grad}(e^*) = -1$. *Se extiende esta definición para cada monomio $kx_1 \cdots x_m$, con $k \in \mathbb{K}$ y $x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ como*

$$\operatorname{grad}(kx_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}(x_i)$$

La definición anterior induce una $\mathbb{Z}$-graduación en $\mathbb{K}\hat{E} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}\hat{E}^n$, donde $\mathbb{K}\hat{E}^n$ es el $\mathbb{K}$-subespacio generado por los caminos en $\hat{E}$, tales que $\operatorname{grad}(x_1 \cdots x_m) = n$, *es decir,*

$$\mathbb{K}\hat{E}^n = \left\langle x_1 \cdots x_m \mid x_i \in E^0 \cup E^1 \cup \left(E^1\right)^* \text{con} \operatorname{grad}(x_1 \cdots x_m) = n \right\rangle.$$

Observación 1.39. *Se tiene que un ideal G-graduado I, el anillo cociente $\bar{R} = R/I$ es graduado con la graduación definida por $(R/I)_g := R_g/(I \cap R_g)$. En efecto, como I es graduado, entonces $I = \oplus_{g\in G}(I \cap R_g)$ y $R = \oplus_{g\in G} R_g$, usando propiedades de sumas directa respecto al cociente se tiene la graduación que se buscaba.*

Se procede a definir una graduación en las álgebras de camino de Leavitt, la cual es llamada la $\mathbb{Z}$-graduación canónica.

Proposición 1.40. *Sea E un grafo y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces, $L_K(E)$ es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con la graduación de la Definición 1.38.*

Demostración. En efecto, se considera la $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathbb{K}\hat{E}$ y al ideal I generado por las relaciones $CK1$ y $CK2$, estas relaciones están en $\mathbb{K}\hat{E}^0$ pues $\operatorname{grad}(ee^*) = \operatorname{grad}(e^*e) = \operatorname{grad}(r(e)) = \operatorname{grad}(s(e)) = 0$ y por la Proposición 1.11, se tiene que I es $\mathbb{Z}-$ graduado, de lo anterior y por las Observaciones 1.32 y 1.39

$$L_K(E) = K\hat{E}/I,$$

es $\mathbb{Z}$-graduado. Finalmente, por el Lema 1.36 ítem c, se tiene que las componentes homogéneas del álgebra de camino de Leavitt en esta graduación son de la forma

$$(L_K(E))_n = \langle \{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \mathrm{Path}(E) \text{ y } |\gamma| - |\lambda| = n\} \rangle .$$

$\square$

El siguiente paso es estudiar las álgebras de caminos de Leavitt cuando son o no unitarias, pero tienen un conjunto de unidades locales.

Definición 1.41. *Sea R un anillo asociativo. Se dice que el anillo R tiene un* ***conjunto de unidades locales*** *F si F es un conjunto de idempotentes en R tal que para cualquier subconjunto finito $r_1, \cdots, r_n$ de R existe un $e \in F$ tal que $er_ie = r_i$ para todo $1 \leq i \leq n$*

Lema 1.42. *Sea E un grafo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $L_K(E)$ el álgebra de camino de Leavitt asociada al grafo E, entonces:*

1. *$L_K(E)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra unitaria si y sólo si E^0 es finito.*

2. *Si E^0 es infinito, entonces $L_K(E)$ es un álgebra con unidades locales.*

Demostración. 1. Suponga primero que $E^0 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es finito, considere $\sum_{i=1}^{n} v_i$ el objetivo es probar que la suma mencionada es el elemento neutro de $L_K(E)$. En efecto, en primer lugar se realizará el producto con los vértices, tome $v_j \in E^0$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} v_i v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} v_j v_i = v_j \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right). \qquad (1)$$

Ahora, se toma $e \in E^1$, luego

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) e = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) s(e)e = s(e)e = e, \qquad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) e^* = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) r(e)e^* = r(e)e^* = e^*, \quad (3)$$

donde las igualdades (2) y (3) se obtienen por (1), así se concluye que $\sum_{i=1}^{n} v_i$ es la unidad de $L_K(E)$, pues $L_K(E)$ es generada por $E^0 \cup E^1 \cup \left(E^1\right)^*$. Recíprocamente, se procede por contradicción a mostrar que E^0 es infinito y a es la unidad de $L_K(E)$, por el Lema 1.36 se puede escribir $a = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^*$ para $\alpha_i, \beta_i \in \text{Path}(E)$, y $k_i \in \mathbb{K}$, dados los vértices $v_i = r(\beta_i^*) = s(\beta_i)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, y puesto que E^0 es infinito se puede escoger un vértice tal que $v \notin \{v_1, \cdots, v_n\}$ luego

$$a \cdot v = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^* v = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^* s(\beta_i) v = 0$$

siendo esto una contradicción.

2. El conjunto de unidades locales es el conjunto de sumas finitas de vértices. Esto es cierto, puesto que, se considera un conjunto finito arbitrario $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ de elementos de $L_K(E)$, por el Lema 1.36 se puede escribir

$$a_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} k_{j_i} \alpha_{j_i} \beta_{j_i}^*,$$

donde cada $k_{j_i} \in \mathbb{K}$ y $\alpha_{j_i}, \beta_{j_i} \in \text{Path}(E)$ para todo $j_i \in \{1, \cdots, n_i\}$ y $i \in \{1, \cdots, n\}$, así considerando la suma finita de vértices

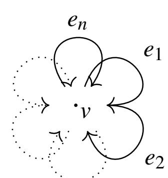
$$a = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_i}^{n_i} s\left(\alpha_{j_i}\right) + \sum_{j_i}^{n_i} s\left(\beta_{j_i}\right) \right),$$

realizando los respectivos cálculos $aa_ia = a_i$, con lo cual se finaliza el resultado.

$\square$

El siguiente ejemplo mostrará la relación entre las álgebras de Leavitt $L_K(1,n)$ y $L_K(E)$.

Ejemplo 1.43. *Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, $\mathbb{K}$ un cuerpo y R_n la rosa de n pétalos*



Entonces $L_K(1,n) \cong L_K\left(R_n\right)$. En efecto, recordando de la Definición 1.26 que

$$L_K(1,n) = K\left\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1 \cdots, Y_n \right\rangle / \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle,$$

y también que

$$L_K(E) = K\widehat{E}/\langle (IV), (V) \rangle,$$

así, se considera el homomorfismo que envía a X_i en e_i y a Y_i en e_i^* en consecuencia las relaciones

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1 \quad y \quad Y_iX_j - \delta_{i,j}1,$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$ *coinciden con las relaciones* (IV) *y* (V) *respectivamente, de ahí se obtiene el isomorfismo deseado.*

2. Anillos de grupo torcido

Este capítulo estará basado en la demostración de la simplicidad sobre los anillos de grupo torcido, lo cual será una gran base para las últimas dos secciones de este trabajo, ver Dokuchaev and Exel (2005) y Gonçalves et al. (2014).

2.1. El álgebra de los multiplicadores

En primer lugar, se enunciarán algunas definiciones y resultados los cuales ayudarán en demostrar la simplicidad de los anillos de grupo torcido.

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, A una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con elemento identidad e I un ideal de A. Tomando un elemento $x \in A$ y considere las multiplicaciones izquierda y derecha de I por $x : L_x : I \ni a \longmapsto xa \in I$, $R_x : I \ni a \longmapsto ax \in I$. Entonces $L = L_x$ y $R = R_x$ son transformaciones lineales de I, tales que se cumplan las siguientes propiedades, para todo $a, b \in I$:

I. $L(ab) = L(a)b$;

II. $R(ab) = aR(b)$;

III. $R(a)b = aL(b)$.

Estas propiedades son consecuencias obvias de la asociatividad de A.

Definición 2.1. *El álgebra de multiplicadores de un ideal I es el conjunto $M(I)$ de todos los pares ordenados (L,R), donde L y R son transformaciones lineales de I que satisfacen las propiedades $I-III$. Para $(L,R),(L',R') \in M(I)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se definen las operaciones:*

$$\alpha(L,R) = (\alpha L, \alpha R),$$

$$(L,R) + \left(L',R'\right) = \left(L+L',R+R'\right),$$

$$(L,R)\left(L',R'\right) = \left(L \circ L', R' \circ R\right).$$

*Se dice que L es un **multiplicador izquierdo** y R un **multiplicador derecho** de I.*

Se comprueba inmediatamente que $M(I)$ es un álgebra asociativa con elemento unidad (L_1,R_1), donde L_1 y R_1 son mapas de identidad (que en el caso de un ideal I en un álgebra unitaria A pueden considerarse multiplicaciones por el elemento unidad de A por la izquierda y por la derecha, respectivamente). Defina la función $\phi : I \to M(I)$ como $\phi(x) = (L_x, R_x), x \in I$. Este es un homomorfismo de álgebras, ya que es $\mathbb{K}$-lineal, más aún, $L_{xy} = L_x \circ L_y, R_{xy} = R_y \circ R_x$, lo cual da

$$\phi(xy) = (L_x \circ L_y, R_y \circ R_x) = \phi(x)\phi(y).$$

Definición 2.2. *Se dice que un álgebra I es **no degenerada** si la función $\phi : I \to M(I)$ mencionada anteriormente es inyectiva.*

Proposición 2.3. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *$\phi(I)$ es un ideal de $M(I)$;*

2. *$\phi : I \to M(I)$ es un isomorfismo, si y solo si, I es un álgebra unitaria.*

Demostración. 1. Tomando $x \in I$ y sea (L,R) un elemento arbitrario de $M(I)$. Entonces $(L_x,R_x)(L,R) = (L_x \circ L, R \circ R_x)$, y para $a \in I$ se tiene que $L_x(L(a)) = xL(a) = R(x)a = L_{R(x)}(a)$. Adicionalmente, $R(R_x(a)) = R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a)$. Así, $(L_x,R_x)(L,R) = \left(L_{R(x)}, R_{R(x)}\right) \in \phi(I)$, ya que $R(x) \in I$. Similarmente, $(L,R)(L_x,R_x) = \left(L_{L(x)}, R_{L(x)}\right) \in \phi(I)$.

2. Para probar que I es un álgebra unitaria, es trivial. Por otro lado se tiene que $\phi(1) \in \phi(I)$ es el elemento identidad de $M(I)$ y, en consecuencia, $\phi(I) = M(I)$. Obviamente, ϕ es inyectivo en este caso, y así $I \cong M(I)$.

□

Definición 2.4. *Un álgebra I es (L,R)-**asociativo** si dados dos multiplicadores (L,R) y (L',R') en $M(I)$, se tiene que $R' \circ L = L \circ R'$.*

El siguiente resultado enumera dos condiciones suficientes para la (L,R)-asociatividad.

Proposición 2.5. *El álgebra I es (L,R)-asociativo siempre que se cumpla una de las siguientes condiciones:*

1. *I es no degenerado, o*

2. *I es idempotente.*

Demostración. Sea $(L,R),(L',R') \in M(I)$. Tomando $a,b \in I$, se sigue que

$$R\left(L'(a)\right)b = L'(a)L(b) = L'(aL(b)) = L'(R(a)b) = L'(R(a))b.$$

Esto prueba que $R\left(L'(a)\right) - L'(R(a))$, se encuentra en el anulador izquierdo de I. De manera similar, se demuestra que $R\left(L'(a)\right) - L'(R(a))$ se encuentra en el anulador derecho de I también. Por lo tanto, suponiendo 1, se tiene que $R\left(L'(a)\right) = L'(R(a))$, para todo a en I.

Ahora se supone que $a_1, a_2 \in I$. Sea $a = a_1a_2$, note que

$$R\left(L'(a)\right) = R\left(L'\left(a_1a_2\right)\right) = R\left(L'\left(a_1\right)a_2\right) = L'\left(a_1\right)R\left(a_2\right)$$

$$= L'\left(a_1R\left(a_2\right)\right) = L'\left(R\left(a_1a_2\right)\right) = L'(R(a)).$$

Suponiendo 2, se tiene que cada elemento de I es suma de términos de la forma a_1a_2, concluyendo lo que se deseaba. □

2.2. Asociatividad del anillo de grupo torcido

En segundo lugar, se hablará de la asociatividad del anillo de grupo torcido, ya que esta es una propiedad importante tanto en los grupos como en los anillos. Para una lectura mas profunda de este tema se puede revisar Öinert (2009).

Teorema 2.6. *Si A es un álgebra y α es una acción parcial de un grupo G en A tal que $D_g (g \in G)$ es (L,R)-asociativo, entonces el anillo de grupo torcido $A \rtimes_\alpha G$ es asociativo.*

Demostración. Obviamente, $A \rtimes_\alpha G$ es asociativo, si y solo si,

$$(a\delta_h b\delta_g)\, c\delta_f = a\delta_h \left(b\delta_g c\delta_f\right). \tag{2}$$

Para arbitrarios $h,g,f \in G$ y $a \in D_h, b \in D_g, c \in D_f$. Primero, calcule el lado izquierdo de la igualdad anterior. Se tiene

$$(a\delta_h b\delta_g)\, c\delta_f = \alpha_h\left(\alpha_{h-1}(a)b\right)\delta_{hg} c\delta_f = \alpha_{hg}\left(\alpha_{hg}^{-1}\left(\alpha_h\left(\alpha_{h-1}(a)b\right)\right)c\right)\delta_{hgf}.$$

donde la segunda igualdad se obtiene gracias a 1.6. Se puede ver que $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g$ implica que

$$\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right) \in \alpha_h\left(D_{h^{-1}} \cap D_g\right) = D_h \cap D_{hg}.$$

Lo cual prueba que

$$\alpha_{hg}^{-1}\left(\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right)\right)=\alpha_{g^{-1}}\left(\alpha_{h^{-1}}\left(\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right)\right)\right)=\alpha_{g^{-1}}\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right).$$

Dado que este elemento pertenece a $D_{g^{-1}}\cap D_{g^{-1}h^{-1}}$, se aplica α_{hg}, y así

$$\left(a\delta_h b\delta_g\right)c\delta_f=\alpha_h\left(\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right)c\right)\right)\delta_{hgf}.$$

Comparando con

$$a\delta_h\left(b\delta_g c\delta_f\right)=a\delta_h\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right)\delta_{gf}=\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right)\right)\delta_{hgf},$$

y aplicando $\alpha_{h^{-1}}$, se concluye que (2) se mantiene, si y solo si, la igualdad

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}\left(\alpha_{h^{-1}}(a)b\right)c)=\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right),$$

es válida para todo $a\in D_h, b\in D_g, c\in D_f$. Porque $\alpha_{h^{-1}}: D_h\longrightarrow D_{h^{-1}}$ es un isomorfismo, $\alpha_{h^{-1}}(a)$ recorre sobre $D_{h^{-1}}$ y, consecuentemente, la condición anterior es equivalente a la siguiente:

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c)=a\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right), \tag{3}$$

para cada $a\in D_{h^{-1}}, b\in D_g, c\in D_f$. Si $h=f=1$, entonces $D_h=D_f=A$, y así $A\rtimes_\alpha G$ es asociativo, si y solo si, (3) se cumple para un arbitrario $g\in G, a, c\in A$ y $b\in D_g$. Esto equivale a decir que

$$\left(\alpha_g\circ R_c\circ\alpha_{g-1}\right)\circ L_a=L_a\circ\left(\alpha_g\circ R_c\circ\alpha_{g-1}\right) \tag{4}$$

es válido en D_g para cada $g\in G$ y todo $a, c\in A$.

Considere R_c como el multiplicador derecho de $D_{g^{-1}}$ y L_a como el multiplicador izquierdo de D_g.

Por la Proposición 2.7 de Dokuchaev and Exel (2005) se tiene que $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ es multiplicador derecho de D_g. Por tanto, si D_g es (L,R)-asociativo, entonces (4) es válido. □

Corolario 2.7. *Si α es una acción parcial de un grupo G en un álgebra A tal que cada $D_g(g \in G)$ es idempotente o degenerado, entonces el anillo de grupo torcido $A \rtimes_\alpha G$ es asociativo.*

Demostración. Esto se deduce directamente de la proposición 2.5 y del Teorema 2.6. □

Definición 2.8. *Se dice que un álgebra A es **fuertemente asociativa**, si para cualquier grupo G y una acción parcial arbitraria α de G en A el anillo de grupo torcido $A \rtimes_\alpha G$ es asociativo.*

Como ya se observó en el Ejemplo 1.10, no siempre el anillo de grupo torcido es asociativo. Denote por $T(n,\mathbb{K})$ las matrices nxn triangulares superiores sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 2.9. *El álgebra $A = T(n,\mathbb{K})$ es fuertemente asociativo, si y solo si, $n \leq 2$.*

Demostración. Si $n = 1$, entonces $A = \mathbb{K}$ es fuertemente asociativo. Si $n = 2$, entonces el único ideal no idempotente de A es el radical de Jacobson $J(A)$, que es de dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$. Así que todos los multiplicadores de $J(A)$ conmutan, y por tanto A es (L,R)-asociativo.

Suponga que $n \geq 3$ y sea $G = \langle g \rangle$ el grupo cíclico infinito. Denote por $e_{i,j}$ la matriz elemental $n \times n$ cuya única entrada no nula es igual a 1 en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna. Se considera $D_{g^{-1}} = e_{1,n-1}\mathbb{K} \oplus e_{1,n}\mathbb{K}, D_g = e_{1,n}\mathbb{K} \oplus e_{2,n}\mathbb{K}$ y $D_{g^m} = e_{1,n}\mathbb{K}$ para cada m con $|m| \geq 2$. Defina $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ por $\alpha_g(xe_{1,n-1} + ye_{1,n}) = ye_{1,n} + xe_{2,n}(x,y \in \mathbb{K})$, y para $m \geq 2$ sea $\alpha_{g^m} : D_{g^{-m}} = D_{g^m} \to D_{g^m}$ la función identidad. Una comprobación fácil muestra que se ha definido una acción parcial α de G en A. Note que,

$$(e_{1,1}\delta_1 \cdot e_{2,n}\delta_g)\, e_{n-1,n}\delta_1 = (e_{1,1} \cdot e_{2,n}\delta_g)\, e_{n-1,n}\delta_1 = 0,$$

como $e_{1,1} \cdot e_{2,n} = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} e_{1,1}\delta_1\,(e_{2,n}\delta_g \cdot e_{n-1,n}\delta_1) &= e_{1,1}\delta_1 \left(\alpha_g \left(\alpha_{g^{-1}}(e_{2,n})\, e_{n-1,n}\right)\delta_g\right) \\ &= e_{1,1}\delta_1\,(\alpha_g\,(e_{1,n-1} \cdot e_{n-1,n})\,\delta_g) = e_{1,1}\delta_1 \cdot \alpha_g\,(e_{1,n})\,\delta_g = e_{1,1}\delta_1 e_{1,n}\delta_g \\ &= (e_{1,1} \cdot e_{1,n})\,\delta_g = e_{1,n}\delta_g \neq 0, \end{aligned}$$

así $A \rtimes_\alpha G$ no es asociativo. □

2.3. Simplicidad de los anillos de grupo torcido

Finalmente, en esta sección se estudiará la simplicidad del anillo de grupo torcido, el cual es uno de los objetivos principales.

A lo largo de esta sección, suponga que R_0 es un anillo conmutativo y asociativo y que $\alpha = (R_t, \alpha_t)_{t \in G}$ es una acción parcial de un grupo G en el anillo R_0 tal que, para cada $t \in G$, el ideal R_t, visto como un anillo, tiene un conjunto de unidades locales. En particular, esto implica que R_t es un anillo idempotente, para cada $t \in G$, y así, por el Corolario 2.7, se tiene que el anillo de grupo torcido $R_0 \rtimes_\alpha G$ es asociativo.

Definición 2.10. *Un subanillo S de un anillo R se dice que tiene la* ***propiedad de intersección de ideales*** *en R, si $S \cap I \neq \{0\}$ para cada ideal no nulo I de R.*

Ejemplo 2.11. *Si R es un anillo de ideales principales, entonces todo ideal I de R cumple la propiedad de intersección de ideales.*

Definición 2.12. *Se considera el anillo de grupo torcido $A \rtimes_\alpha G$ de G en A, para alguna acción parcial α. Se dice que $a = \sum_{t\in G} a_t\delta_t \in A \rtimes_\alpha G$ es el* ***soporte*** *de a, que se denotara por $supp(a)$, es el conjunto finito $\{t \in G : a_t \neq 0\}$, y el* ***cardinal*** *del $supp(a)$ es denotado por $\#supp(a)$.*

Definición 2.13. *Sea A un anillo, se dice que $S \subsetneq A$ es un* ***subanillo conmutativa maximal****, si S es un subanillo conmutativa de A y además si M es otro subanillo conmutativo de A, y $S \subsetneq M$, entonces $M = A$.*
Equivalentemente, S es un ***subanillo conmutativo maximal*** *si vale que, $C_A(S) = S$, donde $C_A(S)$ es el centralizador del subconjunto S.*

Antes de mostrar la relación entre el subanillo conmutativo maximal de R_0 y la propiedad de intersección ideal de R_0 en $R_0 \rtimes_\alpha G$ se definen las siguientes funciones.

Definición 2.14. *Sea $A \rtimes_\alpha G$ el anillo de grupo torcido de G en A, para alguna acción parcial α.*

1. *Para $g \in G$, la* ***función proyección*** *sobre la coordenada g, $P_g : A \rtimes_\alpha G \to A$ es dado por $P_g(\sum_{t\in G} a_t\delta_t) = a_g$.*

2. *La* ***función aumento*** *$T : A \rtimes_\alpha G \to A$ definida por $T(\sum_{t\in G} a_t\delta_t) = \sum_{t\in G} a_t$*

La función aumento aparece en la teoría de anillos de grupo y sirve para construir el anillo de aumento, el cual es el kernel de dicha función.

Teorema 2.15. *Sea R_0 un anillo asociativo conmutativo, G un grupo y $\alpha = (R_t, \alpha_t)_{t\in G}$ una acción parcial tal que, para cada $t \in G$, R_t tiene un conjunto de unidades locales. Entonces $R_0\delta_0$ es un* *subanillo conmutativo maximal en $R_0 \rtimes_\alpha G$, si y solo si, $I \cap R_0\delta_0 \neq \{0\}$ para cada ideal no nulo I de $R_0 \rtimes_\alpha G$.*

Demostración. Primero, suponga que $R_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal en $R_0 \rtimes_\alpha G$ y sea I un ideal no nulo de $R_0 \rtimes_\alpha G$. Se quiere probar que $I \cap R_0\delta_0 \neq \{0\}$.

Sea $x = \sum_{t\in F} x_t\delta_t$ un elemento no nulo en I tal que $\#supp(x)$ es mínimo entre todos los elementos no nulos de I y sea asume que $x_t \neq 0$ para cada $t \in F \subseteq G$. Elija un $s \in F$, sea $e \in R_{s^{-1}}$ una unidad local para $\alpha_{s^{-1}}(x_s)$ y defina $y := x \cdot e\delta_{s^{-1}} \in I$. Ahora, se probará que $y \in R_0\delta_0$, pero primero note que $y \neq 0$ y $\#supp(y) \leq \#supp(x)$, dado que $x_s \neq 0$ y

$$y = x \cdot e\delta_{s^{-1}} = x_s\delta_s \cdot e\delta_{s^{-1}} + \sum_{t\in F\setminus\{s\}} x_t\delta_t \cdot e\delta_{s^{-1}} = x_s\delta_0 + \sum_{t\in F\setminus\{s\}} x_t\delta_t \cdot e\delta_{s^{-1}}.$$

Ahora, sea $a \in R_0$ y $z := a\delta_0 \cdot y - y \cdot a\delta_0 \in I$. Note que $\#supp(z) < \#supp(x)$, dado que $a\delta_0 \cdot x_s\delta_0 - x_s\delta_0 \cdot a\delta_0 = 0$ y así, por la minimalidad del $\#supp(x)$, se tiene que $z = 0$. Pero esto implica, $a\delta_0 \cdot y = y \cdot a\delta_0$ para todo $a \in R_0$ y así, ya que $R_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal, se tiene por la Definición 2.13 que $y \in R_0\delta_0$ y por tanto $I \cap R_0\delta_0 \neq \{0\}$.

Enseguida, se probará que si $R_0\delta_0$ no es un subanillo conmutativo maximal en $R_0 \rtimes_\alpha G$ entonces existe un ideal J no cero de $R_0 \rtimes_\alpha G$ tal que $J \cap R_0\delta_0 = \{0\}$.

Suponga que $R_0\delta_0$ no es un subanillo conmutativo maximal. Esto significa que existe un elemento $a = \sum_{t\in F} a_t\delta_t \in R_0 \rtimes_\alpha G \setminus R_0\delta_0$, tal que $a \cdot b\delta_0 = b\delta_0 \cdot a$ para todo $b \in R_0$, lo que equivale a $a_t\delta_t \cdot b\delta_0 = b\delta_0 \cdot a_t\delta_t$ para todo $t \in F$ y $b \in R_0$. Realizando las multiplicaciones en esta última ecuación se obtiene que $\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b)\delta_t = ba_t\delta_t$, para todo $t \in F$ y $b \in R_0$, por tanto

$$\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b) = ba_t = a_t b, \tag{5}$$

es válido para todo $t \in F$ y $b \in R_0$.

Ahora, fijando un $g \in F$ no identidad tal que $a_g \neq 0$ y sea J un ideal de $R_0 \rtimes_\alpha G$ generado por el elemento $a_g\delta_0 - a_g\delta_g$.

Note que cada elemento de J, es una suma finita de elementos de la forma $b_t\delta_t(a_g\delta_0 - a_g\delta_g)c_r\delta_r$, donde $b_t\delta_t, c_r\delta_r \in R_0 \rtimes_\alpha G$. Mas aún, $J \neq \{0\}$, dado que si e es una unidad local para a_g, entonces $e\delta_0(a_g\delta_0 - a_g\delta_g)e\delta_0$ es un elemento no nulo de J.

Se debe probar que J tiene intersección nula con $R_0\delta_0$ probando que $T(J) = 0$. En ese orden, note que para $b_t\delta_t, c_r\delta_r \in R_0 \rtimes_\alpha G$, se puede utilizar (5) para concluir que

$$\begin{aligned} b_t\delta_t\,(a_g\delta_0 - a_g\delta_g)\,c_r\delta_r &= b_t\delta_t \cdot a_g\delta_0 \cdot c_r\delta_r - b_t\delta_t \cdot a_g\delta_g \cdot c_r\delta_r \\ &= b_t\delta_t \cdot a_g c_r\delta_r - b_t\delta_t \cdot \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a_g)\,c_r\right)\delta_{gr} \\ &= b_t\delta_t \cdot a_g c_r\delta_r - b_t\delta_t \cdot a_g c_r\delta_{gr} = d\delta_{tr} - d\delta_{tgr}, \end{aligned}$$

donde $d = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)a_g c_r)$, y así $T(J) = 0$. Como la restricción de T a $R_0\delta_0$ es inyectiva se concluye que $J \cap R_0\delta_0 = \{0\}$. □

Observación 2.16. *Para este trabajo, es de interés la situación cuando cada ideal R_t, para $t \in G$, tiene un conjunto de unidades locales. Sin embargo, observe que cuando se trata del Teorema 2.15 esta suposición puede rebajarse. De hecho, basta con suponer que R_t es no degenerado para cada*

$t \in G$, en el sentido que para cada uno de los valores no nulos $a \in R_t$ existe algún $b \in R_t$, tal que $ab \neq 0$ o $ba \neq 0$. Si R_t es no degenerado para cada $t \in G$, entonces se puede adaptar fácilmente la prueba del Teorema 2.15, sustituyendo las unidades locales por los elementos que surgen de la no-degeneración de los ideales, para demostrar que la conmutatividad maximal de R_0 en $R_0 \rtimes_\alpha G$, implica que R_0 tiene la propiedad de intersección ideal (alternativamente uno puede darse cuenta de que la G-graduación en $R_0 \rtimes_\alpha G$ es no degenerado en el sentido de Definición 2 de Öinert and Lundström (2012)).

A la inversa, la no-degeneración de cada R_t para $t \in G$, garantiza que $R_0 \rtimes_\alpha G$ es asociativo, ver Corolario 3.2 de Dokuchaev and Exel (2005), y esto es todo lo que se necesita para demostrar que la propiedad de intersección ideal de R_0 en $R_0 \rtimes_\alpha G$ implica la conmutatividad maximal de R_0.

Definición 2.17. *Sean A un anillo y $\alpha = (D_g, \alpha_g)_{g\in G}$ una acción parcial de G en A, entonces*

- *Se dice que un ideal I de A es G-**invariante**, si $\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) \subseteq I$ es valido para todo $g \in G$.*
- *Si A y $\{0\}$ sin los únicos ideales G-invariantes de A, entonces se dice que A es G-**simple**.*

Observación 2.18. *Ahora, se puede demostrar el criterio de simplicidad para $R_0 \rtimes_\alpha G$, el cual funciona para una acción parcial arbitraria.*

Teorema 2.19. *Sea R_0 un anillo conmutativo asociativo, G un grupo y $\alpha = (R_t, \alpha_t)_{t\in G}$ una acción parcial tal que, para cada $t \in G$, R_t tiene un conjunto de unidades locales. Entonces, el anillo de grupo torcido $R_0 \rtimes_\alpha G$ es simple, si y solo si, R_0 es G-simple y $R_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal en $R_0 \rtimes_\alpha G$.*

Demostración. Para empezar, se supone que $R = R_0 \rtimes_\alpha G$ es simple. Por el Teorema 2.15 $R_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal. Falta probar que R_0 es G-simple.

Sea I un ideal G-invariante de R_0. Defina J como el conjunto de sumas finitas $\sum_{t\in G} a_t\delta_t$ tal que $a_t \in I \cap R_t$ para todo $t \in G$, así, $J = \{\sum_{t\in G} a_t\delta_t \in R : a_t \in I \cap R_t, t \in G\}$.

Note que J es un ideal no nulo de R. De hecho, si $a_r\delta_r \in R$ y $a_t \in I \cap R_t$ entonces $a_r\delta_r \cdot a_t\delta_t = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)\delta_{rt}$. Como I es G-invariante, $\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t) \in I$ y por la definición de acción parcial $\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t) \in R_{rt}$, así $a_r\delta_r \cdot a_t\delta_t \in J$. Similarmente, J es un ideal derecho de R y así, por la simplicidad de R obtenemos que $J = R$. Así, por la definición de $J, P_0(J) = I$ y por lo anterior, $P_0(J) = P_0(R) = R_0$. Así $I = R_0$, y por tanto R_0 es G-simple.

Suponga ahora que R_0 es G-simple y que $R_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal en R. Sea I un ideal no nulo de R. Por el Teorema 2.15, $I \cap R_0\delta_0 \neq \{0\}$. Sea $J = I \cap R_0\delta_0$ y note que $P_0(J)$ es un ideal no nulo de R_0. Ahora se mostrará que $P_0(J)$ es G-invariante.

Sea $a_t \in P_0(J) \cap R_t$, y se elije una unidad local e para a_t en R_t. Dado que $a_t\delta_0 \in J$, se tiene $\alpha_{t^{-1}}(e)\delta_{t^{-1}} \cdot a_t\delta_0 \cdot r\delta_t = \alpha_{t^{-1}}(a_t)\delta_0$ se encuentra en J, y así $\alpha_{t^{-1}}(a_t) \in P_0(J)$ y por tanto $P_0(J)$ es G-invariante.

Ahora, como R_0 es G-invariante se tiene que $P_0(J) = R_0$, y así $J = R_0\delta_0$. En particular, $R_0\delta_0 \subseteq I$. Tome $s \in G$, $a_s \in R_s$ y un arbitrario $a_s\delta_s \in R_0 \rtimes_\alpha G$. Entonces, tomando e una unidad local para $a_s \in R_s$, se obtiene que $a_s\delta_s = e\delta_0 \cdot a_s\delta_S \in I$. Esto prueba la igualdad $R_0 \rtimes_\alpha G = I$. $\square$

Ejemplo 2.20. *Sea $R_1 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo y e_1, e_2, e_3 son idempotentes centrales ortogonales de R_1. Sea C_4 el grupo cíclico de orden* 4 *con generador g y defina la acción parcial de C_4 en R_1 por $\alpha_1 = id_{R_1}$,*

$$\alpha_g : \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \to \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2, \quad \alpha_g(e_2) = e_1 \quad y \quad \alpha_g(e_3) = e_2$$

$$\alpha_{g^2} : \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3 \to \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3, \quad \alpha_{g^2}(e_1) = e_3 \quad y \quad \alpha_{g^2}(e_3) = e_1$$

$$\alpha_{g^3} : \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \to \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3, \quad \alpha_{g^3}(e_1) = e_2 \quad y \quad \alpha_{g^3}(e_2) = e_3.$$

Hay exactamente 6 *ideales propios no nulos de* R_1*, los cuales son*

$$\mathbb{K}e_1, \quad \mathbb{K}e_2, \quad \mathbb{K}e_3, \quad \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2, \quad \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3 \quad y \quad \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3,$$

ninguno de ellos es C_4*-invariante. Esto se puede comprobar fácilmente con la definición de* α*. Así,* R_1 *es* C_4*-simple. Más aún, el siguiente calculo revela que* $R_1\delta_1$ *es un subanillo conmutativo maximal en anillo de grupo torcido* $R_1 \rtimes_\alpha C_4$*.*

Sea $R = R_1 \rtimes_\alpha C_4$*, se debe probar que* $C_R(R_1\delta_1) = R_1\delta_1$*.*

- *Note que* $R_1\delta_1 \subseteq C_R(R_1\delta_1)$*.*

  Sean $x, y \in R_1\delta_1$*, entonces* $x = (k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1$ *y* $y = (k_1'e_1, k_2'e_2, k_3'e_3)\delta_1$*. Se debe probar que* $xy = yx$*.*

$$\begin{aligned} xy &= \alpha_1(\alpha_1(k_1e_1,k_2e_2,k_3e_3)(k_1'e_1,k_2'e_2,k_3'e_3))\delta_1 \\ &= \alpha_1((k_1e_1,k_2e_2,k_3e_3)(k_1'e_1,k_2'e_2,k_3'e_3))\delta_1 \\ &= \alpha_1(k_1k_1'e_1,k_2k_2'e_2,k_3k_3'e_3)\delta_1 \\ &= (k_1k_1'e_1,k_2k_2'e_2,k_3k_3'e_3)\delta_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} yx &= \alpha_1(\alpha_1(k_1'e_1,k_2'e_2,k_3'e_3)(k_1e_1,k_2e_2,k_3e_3))\delta_1 \\ &= \alpha_1((k_1'e_1,k_2'e_2,k_3'e_3)(k_1e_1,k_2e_2,k_3e_3))\delta_1 \\ &= \alpha_1(k_1'k_1e_1,k_2'k_2e_2,k_3'k_3e_3)\delta_1 \\ &= (k_1'k_1e_1,k_2'k_2e_2,k_3'k_3e_3) \end{aligned}$$

  Así $xy = yx$*.*

- *se verificará que* $C_R(R_1\delta_1) \subseteq R_1\delta_1$.

  Sea $x \in C_R(R_1\delta_1)$, *entonces* $x \in R_1 \rtimes_\alpha C_4$ *tal que* $xy = yx$, *para todo* $y \in R_1\delta_1$, *se necesita probar que* $x \in R_1\delta_1$.

  Note que $x = (k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1 + (k_1'e_1, k_2'e_2)\delta_g + (k_1''e_1, k_3''e_3)\delta_{g^2} + (k_2'''e_2, k_3'''e_3)\delta_{g^3}$.

  Entonces, se tiene que cada sumando de x conmuta con $y \in R_1\delta_1$. *Ya se probó que el primer termino x conmuta con dicho elemento, entonces vea qué pasa con el segundo.*

  Sea $y = (k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1$ *entonces, ya que:*

$$\begin{aligned}
(k_1'e_1, k_2'e_2)\delta_g(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1 &= \alpha_g(\alpha_{g^3}(k_1'e_1, k_2'e_2)(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3))\delta_g \\
&= \alpha_g((k_1'e_2, k_2'e_3)(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3))\delta_g \\
&= \alpha_g(k_1'k_2e_2, k_2'k_3e_3)\delta_g \\
&= (k_1'k_2e_1, k_2'k_3e_2)\delta_g
\end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned}
(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1(k_1'e_1, k_2'e_2)\delta_g &= \alpha_1(\alpha_1(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)(k_1'e_1, k_2'e_2))\delta_g \\
&= \alpha_1((k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)(k_1'e_1, k_2'e_2))\delta_g \\
&= \alpha_1(k_1k_1'e_1, k_2k_2'e_2, 0)\delta_g \\
&= (k_1k_1'e_1, k_2k_2'e_2, 0)\delta_g
\end{aligned}$$

  Entonces como $(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1(k_1'e_1, k_2'e_2)\delta_g = (k_1'e_1, k_2'e_2)\delta_g(k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1$, *se obtiene que* $k_1' = k_2' = 0$, *por tanto este sumando desaparece de x.*

  Realizando el mismo proceso para los demás términos se llega al mismo resultado, así $x = (k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3)\delta_1 \in R_1\delta_1$.

Por tanto, $C_R(R_1\delta_1) = R_1\delta_1$, como se quería probar.

Y así por el Teorema 2.15 se concluye que $R_0 \rtimes_\alpha C_4$ es simple.

3. Álgebras de camino de Leavitt

A lo largo de este capítulo se usaran los resultados en el capítulo 2 para las álgebras de camino de Leavitt. Pero antes de ello, se analizarán los artículos Abrams and Pino (2005) y Gonçalves and Royer (2014) para definir y demostrar algunos resultados.

3.1. Acción parcial en las álgebras de camino de Leavitt

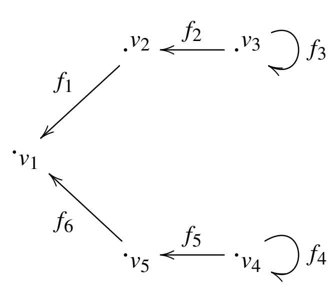
Esta sección se dedicara a la enunciación de definiciones importantes que ayudarán a ver la relación que hay entre las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido.

Considere a lo largo de este capítulo $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo dirigido, F un grupo libre generado por las aristas del grafo con elemento neutro $0 \in F$, W el conjunto de caminos finitos, W^∞ el conjunto de los caminos infinitos del grafo E, y $\mathbb{K}$ un cuerpo con unidad multiplicativa $1 \in \mathbb{K}$ y $0 \in \mathbb{K}$ denotará la identidad aditiva.

Considere el siguiente conjunto,

$$X = \{\alpha \in W | r(\alpha) \text{ es un sumidero}\} \cup \{v \in E^0 | v \text{ es un sumidero}\} \cup W^\infty.$$

Ejemplo 3.1. *Sea E el siguiente grafo,*



Note que el único sumidero de E es el vértice v_1 luego $v_1 \in X$, además todos los caminos que terminan en v_1 y por tanto en las aristas f_1 o f_6 también están en X, por ejemplo $f_1, f_2f_1, f_3 \cdots f_3f_2f_1 \in X$ y $f_6, f_5f_6, f_4 \cdots f_4f_5f_6 \in X$, finalmente en E existen sólo dos caminos infinitos que son $f_3f_3\cdots, f_4f_4\cdots$ los cuales están en X.

Se definirá ahora una acción parcial de F sobre X, para esto defina los subconjuntos X_g tales que $g \in F$.

Definición 3.2. *Dado que W es un subconjunto de F se definen dichos subconjuntos de la siguiente manera:*

a) $X_0 := X$;

b) $X_{f^{-1}} := \{\alpha \in X \mid s(\alpha) = r(f)\}$ *para todo* $f \in W$;

c) $X_e := \{\alpha \in X \mid e \text{ es un camino inicial de } \alpha\}$ *para todo* $e \in W$;

d) $X_{ef^{-1}} := \{\alpha \in X \mid e \text{ es un camino inicial de } \alpha\}$ *donde* $e, f \in W$ *y* ef^{-1} *está en su forma reducida con* $r(e) = r(f)$;

e) $X_g = \emptyset$ *para cualquier otro* $g \in F$.

Observación 3.3. *Note que:*

1. $r(f) \in X_{f^{-1}}$, *si y solo si,* $r(f)$ *es un sumidero.*

2. *Si* $r(f)$ *es un sumidero, entonces* $X_{f^{-1}} = \{r(f)\}$ *y* $X_f = \{f\}$.

Ejemplo 3.4. *Vea algunos X_g en el Ejemplo 3.1.*

$X_{f_3} = \{f_3 f_3 \cdots, f_3 f_2 f_1, f_3 f_3 f_2 f_1, \cdots\}, X_{f_4} = \{f_4 f_4 \cdots, f_4 f_5 f_6, f_4 f_4 f_5 f_6, \cdots\}$ *son conjuntos infinitos. Por otra parte, por la observación anterior, se tiene que* $X_{f_1} = \{f_1\}$, $X_{f_1^{-1}} = \{v_1\}$, *y finalmente, note que* $X_{f_5} = X_{f_2} = \emptyset$.

Para completar la acción parcial de F sobre X falta definir las funciones, lo cual se hará de la siguiente manera:

a) $\theta_0 : X_0 \to X_0$ es la función identidad;

b) Para $e \in W$, se define $\theta_e : X_{e^{-1}} \to X_e$ como $\theta_e(\alpha) = e\alpha$;

c) Para $f \in W$, se define $\theta_{f^{-1}} : X_f \to X_{f^{-1}}$ por $\theta_{f^{-1}}(\gamma) = \gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots$ si $r(f)$ no es un sumidero y $\theta_{f^{-1}}(f) = r(f)$ si $r(f)$ es un sumidero;

d) Para $e, f \in W$ con $r(e) = r(f)$ y ef^{-1} en su forma reducida, se define $\theta_{ef^{-1}} : X_{fe^{-1}} \to X_{ef^{-1}}$ como $\theta_{ef^{-1}}(\alpha) = e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots$, donde $|f|$ indica la longitud del camino f.

Note que las funciones anteriores son biyectivas:

a) θ_0 es biyectiva por definición.

b) θ_e está bien definida pues si $\alpha \in X_{e^{-1}}$ se tiene que $s(\alpha) = r(e)$, luego $e\alpha$ es un camino que inicia en α de ahí $e\alpha \in X_e$, además si $r(e)$ es un sumidero por la Observación 3.3, se sigue que $X_{e^{-1}} = \{r(e)\}$ y $X_e = \{e\}$, luego $\theta_e(r(e)) = er(e) = e$. Ahora, la biyectividad se sigue de que $\theta_{e^{-1}}$ es la inversa. En efecto, si $r(e)$ es un sumidero

$$\theta_e \circ \theta_{e^{-1}}(e) = \theta_e(r(e)) = er(e) = e \quad y \quad \theta_{e^{-1}\circ} \circ \theta_e(r(e))\theta_{e^{-1}}(e) = r(e),$$

y si $r(e)$ no es un sumidero

$$\theta_e \circ \theta_{e^{-1}}(\alpha) = \theta_e\left(\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots\right) = e\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots = \alpha \quad \text{y}$$

$$\theta_{e^{-1}} \circ \theta_e(\alpha) = \theta_{e^{-1}}(e\alpha) = \alpha,$$

teniendo en cuenta que $\theta_{e^{-1}}$ es la función que borra al subcamino inicial e.

c) $\theta_{f^{-1}}$ está bien definida, claramente si $r(f)$ es un sumidero, por la Observación 3.3 $X_f = \{f\}$ y $X_{f^{-1}} = \{r(f)\}$ así $\theta_{f^{-1}}(f) = r(f)$. Ahora bien, si $r(f)$ no es un sumidero y $\gamma \in X_f$ entonces $\gamma = f\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots$ así $\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots \in X_{f^{-1}}$, pues $r(f) = s\left(\gamma_{|f|+1}\gamma_{|f|+2}\cdots\right)$. Además, del ítem anterior $\theta_{f^{-1}}$ es biyectiva con inversa θ_f.

d) $\theta_{ef^{-1}}$ está bien definida, pues para cada $\alpha \in X_{fe^{-1}}$, se tiene que $f = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{|f|}$, y además $r(f) = r(e) = s\left(\alpha_{|f|+1}\right)$, así $e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots$ es un camino en $X_{ef^{-1}}$. Para terminar, esta función es biyectiva con inversa $\theta_{fe^{-1}}$, en efecto

$$\theta_{ef^{-1}} \circ \theta_{fe^{-1}}(\alpha) = \theta_{ef^{-1}}(e\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots) = f\alpha_{|f|+1}\alpha_{|f|+2}\cdots = \alpha \text{ y}$$

$$\theta_{fe^{-1}} \circ \theta_{ef^{-1}}(\alpha) = \theta_{fe^{-1}}(f\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots) = e\alpha_{|e|+1}\alpha_{|e|+2}\cdots = \alpha.$$

Ejemplo 3.5. *Si se considera el grafo del Ejemplo 3.1, se tiene que θ_{f_2} es la función definida por $\theta_{f_2}(f_1) = f_2f_1$, nótese además que parte de $X_{f_2^{-1}} := \{f_1\}$ y llega a $X_{f_2} := \{f_2f_1\}$.*

Para ver más detalles, el lector puede revisar Gonçalves and Royer (2014). Se ha conseguido una acción parcial a nivel de conjuntos, pero el objetivo es construir un anillo de grupo torcido, se puede usar el Lema 1.5 para construir la acción parcial $(F(X_g), \alpha_g)_{g\in F}$, a nivel de álgebras asociada a la acción parcial $(X_g, \theta_g)_{g\in F}$. Se podría pensar que el anillo de grupo torcido asociado a la acción parcial que se acaba de encontrar, es el apropiado para el isomorfismo que se desea, pero esto no es así, ya que este anillo es muy "grande".

El siguiente objetivo es hacerlo lo suficientemente pequeño para obtener un isomorfismo.

Luego, considerando los siguientes conjuntos $X_v = \{\alpha \in X | s(\alpha) = v\}$, para cada $v \in E^0$, los cuales también cumplen que $v \in X_v$, si y solo si, v es un sumidero, en ese caso además se tiene que $X_v = \{v\}$. Se estudiarán estos conjuntos con los conjuntos de acciones parciales en los siguientes resultados.

Lema 3.6. *Sean $\alpha, \beta \in W, \gamma, \delta \in W \cup \{0\}$ y $v \in E^0$. Entonces:*

1. $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha^{-1}} = X_{\beta^{-1}}, & \text{si } r(\alpha) = r(\beta) \\ \emptyset, & \text{en caso contrario} \end{cases}.$

2. $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_{\beta\gamma-1}, & \text{si } r(\alpha) = s(\beta) \\ \emptyset, & \text{en caso contrario} \end{cases}.$

3. $X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha\gamma^{-1}}, & \text{si } \alpha = \beta\zeta \text{ para algún } \zeta \in W \cup \{0\} \\ X_{\beta\delta^{-1}}, & \text{si } \beta = \alpha\zeta \text{ para algún } \zeta \in W \cup \{0\} \\ \emptyset, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}.$

   Aquí se asume que $r(\alpha) = r(\gamma)$ y $r(\beta) = r(\delta)$, pues de lo contrario $X_{\alpha\gamma^{-1}} = X_{\beta\delta^{-1}} = \emptyset$.

4. $X_\nu \cap X_{\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_\nu = X_{\gamma^{-1}}, & si\ r(\beta) = \nu \\ \emptyset, & en\ caso\ contrario \end{cases}$.

5. $X_\nu \cap X_{\alpha\gamma^{-1}} = \begin{cases} X_{\alpha\gamma^{-1}}, & si\ s(\alpha) = \nu \\ \emptyset, & en\ caso\ contrario \end{cases}$.

6. $X_\nu = \bigcup_{s(\alpha)=\nu} X_\alpha = \bigcup_{s(\alpha)=\nu} X_{\alpha\beta^{-1}}$.

Demostración. 1. Si $\eta \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}$, entonces por definición $s(\eta) = r(\alpha)$ y $s(\eta) = r(\beta)$, así que $r(\alpha) = r(\beta)$ o en caso contrario $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}} = \emptyset$.

2. Si $\eta \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma-1}$, entonces $s(\eta) = r(\alpha)$ y $\eta = \beta\iota$ para algún $\iota \in W$ de ahí que $r(\alpha) = s(\beta)$, en cuyo caso $X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = X_{\beta\gamma^{-1}}$, de lo contrario $X_{\alpha-1} \cap X_{\beta\gamma^{-1}} = \emptyset$.

3. Si $\eta \in X_{\alpha\gamma-1} \cap X_{\beta\delta^{-1}}$, entonces $\eta = \alpha\iota$ y $\eta = \beta\kappa$ para algunos $\iota, \kappa \in W$, con lo cual se tiene los siguientes casos:

   a) si $\alpha = \beta\zeta$ para algún $\zeta \in W$, por la Definición 3.2 $X_{\alpha\gamma-1} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = X_{\alpha\gamma^{-1}}$,

   b) si $\beta = \alpha\zeta$ para algún $\zeta \in W$ por la Definición 3.2 $X_{\alpha\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\delta^{-1}} = X_{\beta\delta^{-1}}$ y finalmente, en cualquier otro caso la intersección es vacía.

4. Si $\eta \in X_\nu \cap X_{\gamma^{-1}}$, entonces $s(\eta) = \nu$ y $s(\eta) = r(\gamma)$, así que si $\nu = r(\gamma)$ por definición $X_\nu = X_{\gamma^{-1}}$, en caso contrario $X_\nu \cap X_{\gamma^{-1}} = \emptyset$.

5. Si $\eta \in X_\nu \cap X_{\alpha\gamma^{-1}}$, entonces $s(\eta) = \nu$ y $\eta = \alpha\mu$ para algún $\mu \in W$, luego por definición $X_\nu \cap X_{\alpha\gamma^{-1}} = X_{\alpha\gamma^{-1}}$, de otro modo la intersección es vacía.

6. Esta igualdad se tiene de la definición.

□

Considerando ahora para cada $a \in F$ la función característica del conjunto X_a, la cual se denotará por 1_a y las funciones características de los conjuntos X_v denotadas por 1_v, las cuales ayudarán con la definición del anillo de grupo torcido deseado.

Lema 3.7. *Sean $(F(X_g), \alpha_g)_{g \in F}$ la acción parcial definida anteriormente y $c, d \in F$. Entonces:*

1. $\alpha_c(1_{c^{-1}} 1_d) = 1_c 1_{cd}$.

2. Para cada $a \in W$ y $b \in W \cup \{0\}$, se tiene que

$$\alpha_a(1_{a^{-1}} 1_v) = \begin{cases} 1_a & si\ r(a) = v \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \quad y \quad \alpha_{ab-1}(1_{ba-1} 1_v) = \begin{cases} 1_{ab-1} & si\ s(b) = v \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Demostración. 1. Para ver esta igualdad se analizaron los posibles casos:

- Si $c = \zeta\beta^{-1}$ y $d = \gamma\delta^{-1}$ son caminos tales que $r(\zeta) = r(\beta)$ y $r(\gamma) = r(\delta)$, suponiendo que $\gamma = \beta\lambda$ para algún $\lambda \in W \cup \{0\}$, entonces para $\eta \in X$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\alpha_c\left(1_{c^{-1}}1_d\right)(\eta) &= \alpha_{\zeta\beta^{-1}}\left(1_{\beta\zeta^{-1}}1_{\gamma\delta^{-1}}\right)(\eta) \\
&= \alpha_{\zeta\beta^{-1}}\left(1_{\beta\zeta^{-1}}\right)(\eta)\alpha_{\zeta\beta^{-1}}\left(1_{\gamma\delta^{-1}}\right)(\eta) \\
&= 1_{\beta\zeta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right)1_{\beta\lambda\delta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right) \\
&= 1_{\zeta\lambda}(\eta) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\
&= 1_{\zeta\beta^{-1}\beta\lambda\delta^{-1}}(\eta) \\
&= 1_{\zeta\beta^{-1}}(\eta)1_{\zeta\beta^{-1}\beta\lambda\delta^{-1}}(\eta) \\
&= 1_c(\eta)1_{cd}(\eta).
\end{aligned}
$$

Con lo que resta probar la igualdad $(*)$, asumiendo que $\eta = \zeta\lambda\rho$ para algún $\rho \in W \cup \{0\}$, en este caso $1_{\zeta\lambda}(\eta) = 1$ y del otro lado

$$1_{\beta\zeta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right)1_{\beta\lambda\delta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right) = 1_{\beta\zeta^{-1}}(\beta\lambda\rho)1_{\beta\lambda\delta^{-1}}(\beta\lambda\rho) = 1\cdot 1 = 1,$$

con lo cual se tiene $(*)$. Por otro parte, si $\zeta\lambda$ no es un camino inicial de η, entonces $1_{\zeta\lambda}(\eta) = 0$ y además

$$1_{\beta\zeta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right)1_{\beta\lambda\delta^{-1}}\left(\theta_{\beta\zeta^{-1}}(\eta)\right) = 0,$$

con lo cual se obtiene la igualdad $(*)$. Con un razonamiento similar se puede obtener la igualdad si $\beta = \gamma\lambda$.

- Si $c = \zeta$ y $d = \gamma^{-1}$. Sea $\eta \in X$, suponga que $\eta = \zeta\rho$ para algún $\rho \in W \cup \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_c\left(1_{c^{-1}}1_d\right)(\eta) &= \alpha_\zeta\left(1_{\zeta^{-1}}1_{\gamma^{-1}}\right)(\eta) \\
&= \alpha_\zeta\left(1_{\zeta^{-1}}\right)(\eta)\alpha_\zeta\left(1_{\gamma^{-1}}\right)(\eta) \\
&= 1_{\zeta^{-1}}\left(\theta_{\zeta^{-1}}(\eta)\right)1_{\gamma^{-1}}\left(\theta_{\zeta^{-1}}(\eta)\right) \\
&= 1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho),
\end{aligned}$$

donde se tienen dos casos posibles si $r(\zeta) = r(\gamma)$ entonces

$$1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho) = 1 \quad y \quad 1_\zeta(\eta)1_{\zeta\gamma^{-1}}(\eta) = 1_\zeta(\eta) = 1,$$

caso contrario,

$$1_{\zeta^{-1}}(\rho)1_{\gamma^{-1}}(\rho) = 0 \quad y \quad 1_\zeta(\eta)1_{\zeta\gamma^{-1}}(\eta) = 1_\zeta(\eta) = 0,$$

con lo cual se concluye la igualdad. Ahora, si ζ no es un camino inicial de η la igualdad, se obtiene pues es cero en ambos lados.

- Si $c = \zeta^{-1}$ y $d = \lambda^{-1}$. Sea $\eta \in X$, se asume que $s(\zeta) = r(\lambda)$ y $r(\zeta) = s(\eta)$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_c\left(1_{c^{-1}}1_d\right)(\eta) &= \alpha_{\zeta^{-1}}\left(1_\zeta 1_{1_{\lambda^{-1}}}\right)(\eta) \\
&= \alpha_{\zeta^{-1}}\left(1_\zeta(\eta)\right)\alpha_{\zeta^{-1}}\left(1_{\lambda^{-1}}(\eta)\right) \\
&= 1_\zeta\left(\theta_\zeta(\eta)\right)1_{\lambda^{-1}}\left(\theta_\zeta(\eta)\right) \\
&= 1_\zeta(\zeta\eta)1_{\lambda^{-1}}(\zeta\eta) \\
&= 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

y por el otro lado se tiene que

$$1_{\zeta^{-1}}1_{\zeta^{-1}\lambda^{-1}}(\eta) = 1_{\zeta^{-1}}1_{(\lambda\zeta)^{-1}}(\eta) = 1.$$

Además, la igualdad se mantiene si $s(\zeta) \neq r(\lambda)$ o $r(\zeta) \neq s(\eta)$, pues se tiene cero en ambos lados.

Los demás casos se deducen de manera similar y con los mismos argumentos anteriores.

2. Observando las dos igualdades, se inicia tomando $a \in W$ con $r(a) = v$, entonces para $\beta \in X$ se tiene por el Lema 1.5 que

$$\alpha_a (1_{a^{-1}} 1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}} 1_v (\theta_{a^{-1}}(\beta)),$$

si $\beta = ab$ para algún $b \in W$, entonces

$$\alpha_a (1_{a^{-1}} 1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}} 1_v (\theta_{a^{-1}}(\beta)) = 1_{a^{-1}} 1_v(b) = 1$$

y $1_a 1_{r(a)}(\beta) = 1$. Ahora, si a no es un camino inicial de β se obtiene $\alpha_a (1_{a^{-1}} 1_v)(\beta) = 1_a 1_{r(a)}(\beta) = 0$, así $\alpha_a (1_{a^{-1}} 1_v) = 1_a$. Por otra parte, si $r(a) \neq v$

$$\alpha_a (1_{a^{-1}} 1_v)(\beta) = 1_{a^{-1}} 1_v (\theta_{a^{-1}}(\beta)) = 0 = 1_a(\beta).$$

Verificando ahora la segunda igualdad de funciones, sean $a \in W$ y $b \in W \cup \{0\}$ con $s(b) = v$, se supone que para $\beta \in X$ de la forma $\beta = a\gamma$ para algún $\gamma \in W \cup \{0\}$, entonces

$$\alpha_{ab^{-1}} (1_{ba-1} 1_v)(\beta) = 1_{ba-1} 1_v (\theta_{ba-1}(\beta)) = 1_{ba^{-1}} 1_v(b\gamma) = 1,$$

y $1_{ab^{-1}}(\beta) = 1$. Ahora, si a no sea un camino inicial de β se tiene que

$$\alpha_{ab^{-1}} (1_{ba^{-1}} 1_v)(\beta) = 1_{ba-1} 1_v (\theta_{ba^{-1}}(\beta)) = 0,$$

con lo cual se logra afirmar que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba-1}1_v) = 1_{ab^{-1}} = 0$, concluyendo así que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba-1}1_v) = 1_{ab^{-1}}$, si $s(b) = v$, en caso contrario por el Lema anterior, $X_{ba-1} \cap v = \emptyset$, así que $\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = 0$, dando por terminada la prueba.

□

Ya se tiene lo que se buscaba para constituir la acción parcial esperada. Sea

$$D(X) = D_0 = \left\langle \left\{ 1_p \mid p \in F\backslash\{0\} \right\} \cup \left\{ 1_v \mid v \in E^0 \right\} \right\rangle,$$

donde $D(X)$ es generado $\mathbb{K}$-linealmente, y para cada $p \in F\backslash\{0\}$ se escoge a $D_p \subseteq F(X_p)$ como $D_p = \left\langle \left\{ 1_p 1_q \mid q \in F \right\} \right\rangle$. Ahora bien, como consecuencia del Lema 3.6 se obtiene que $D(X)$ y D_p son $\mathbb{K}$-álgebras y aún más D_p es un ideal de $D(X)$, para todo $p \in F$. Por otro lado, por el Lema 3.7 se tiene que $\alpha_p\left(1_{p-1}1_q\right) = 1_p 1_{pq}$ para cada $p, q \in F$, la restricción de $\alpha_p : D_{p^{-1}} \to D_p$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, con lo anterior, se forma una acción parcial de álgebras $\alpha = (D_p, \alpha_p)_{p \in F}$. Así el anillo de grupo torcido a considerar es $D(X) \rtimes_\alpha F$. Ahora, se mostrará que el anillo de grupo torcido anterior es isomorfo a el álgebra de camino de Leavitt del grafo E.

Observación 3.8. *La $\mathbb{K}$-álgebra $D(X)$ no es necesariamente unitaria, pero cada D_p es unitario donde la unidad es 1_p.*

3.2. Relación entre las álgebras de camino de Leavitt y los anillos de grupo torcido

Esta sección se enfocará en enunciar y demostrar resultados importantes que servirán en resolver nuestro problema de simplicidad sobre las álgebras de caminos de Leavitt.

Proposición 3.9. *Existe un $\mathbb{K}$-homomorfismo al que se denotará $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha F$, que envía $\varphi(e) = 1_e\delta_e, \varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ y $\varphi(v) = 1_v\delta_0$, para todo $v \in E^0$ y todo $e \in E^1$.*

Demostración. Se consideran los siguientes conjuntos $\left\{1_e\delta_e \mid e \in E^1\right\}, \{1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}\}$ y $\{1_v\delta_0 \mid v \in E^0\}$ en $D(X) \rtimes_\alpha F$, se probará que estos conjuntos satisfacen las relaciones de la Propiedad universal dada en la Proposición 1.34.

1. En primer lugar, note que $\left(1_{s(e)}\delta_0\right)(1_e\delta_e) = (1_e\delta_e)\left(1_{r(e)}\delta_0\right) = (1_e\delta_e)$. Teniendo en cuenta que α_0 es el morfismo identidad y haciendo uso del Lema 3.7 se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(1_{s(e)}\delta_0\right)(1_e\delta_e) &= \alpha_0\left(\alpha_0\left(1_{s(e)}\right)1_e\right)\delta_e \\ &= \alpha_0\left(1_{s(e)}1_e\right)\delta_e \\ &= 1_{s(e)}1_e\delta_e\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(1_e\delta_e)\left(1_{r(e)}\delta_0\right) &= \alpha_e\left(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{r(e)}\right)\delta_e \\ &= \alpha_e\left(1_{e^{-1}}1_{r(e)}\right)\delta_e \\ &= 1_e1_e\delta_e,\end{aligned}$$

dado que $X_{s(e)} \cap X_e = X_e$ y las funciones 1_p son idempotentes, se tiene que $1_{s(e)}1_e\delta_e = 1_e\delta_e$ y $1_e1_e\delta_e = 1_e\delta_e$, concluyendo así la igualdad. Seguidamente, se mostrará que $\left(1_{r(e)}\delta_0\right)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})\left(1_{r(e)}\delta_0\right) = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})$.

$$\begin{aligned}\left(1_{r(e)}\delta_0\right)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) &= \alpha_0\left(\alpha_0\left(1_{r(e)}\right)1_{e^{-1}}\right)\delta_{e^{-1}} \\ &= \alpha_0\left(1_{r(e)}1_{e^{-1}}\right)\delta_{e^{-1}} \\ &= 1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})\left(1_{s(e)}\delta_0\right) &= \alpha_{e^{-1}}\left(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_{s(e)}\right)\delta_{e^{-1}} \\ &= \alpha_{e^{-1}}\left(1_e1_{s(e)}\right)\delta_{e^{-1}} \\ &= 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}},\end{aligned}$$

y dado que $X_{r(e)} \cap X_{e^{-1}} = X_{e^{-1}}$, se concluye que $1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ y de ahí se obtiene la igualdad.

2. Sean $e, f \in E^1$, veamos que $\left(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}\right)(1_e\delta_e) = \delta_{e,f}1_{r(e)}\delta_0$ donde $\delta_{e,f}$ denota a la función delta de Kronecker. Asuma que $e \neq f$, en este caso

$$\begin{aligned}\left(1_{f^{-1}}\delta_{f-1}\right)(1_e\delta_e) &= \alpha_{f^{-1}}\left(\alpha_f\left(1_{f^{-1}}\right)1_e\right)\delta_{f-1_e}\\ &= \alpha_{f^{-1}}\left(1_f 1_e\right)\delta_{f^{-1}e},\end{aligned}$$

observe que $1_f 1_e = 0$ como $X_f \cap X_e = \emptyset$ de ahí que $\left(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}\right)(1_e\delta_e) = 0$. Se asumirá ahora que $e = f$, entonces

$$\begin{aligned}(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})(1_e\delta_e) &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_0\\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_e)\delta_0\\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e)\delta_0\\ &= 1_{e^{-1}}\delta_0,\end{aligned}$$

note que $X_{e^{-1}\cap} \cap X_{r(e)} = X_{r(e)}$, esto implica que $1_{e^{-1}} = 1_{r(e)}$, concluyendo que $\left(1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}\right)(1_e\delta_e) = \delta_{e,f}1_{r(e)}\delta_0$.

3. Finalmente, se verá que $1_v\delta_0 = \sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}}(1_e\delta_e)(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})$ para todo vértice regular v.

   Se tiene por el Lema 3.6 que $X_v = \cup_{\left\{e\in E^{-1}|s(e)=v\right\}}X_e$, luego

$$\sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}} 1_e = 1_v,$$

   entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}} (1_e\delta_e)\left(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}\right) &= \sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}} \alpha_e\left(\alpha_{e^{-1}}(1_e)\,1_{e^{-1}}\right)\delta_0 \\
&= \sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}} \alpha_e\left(1_{e^{-1}}\right)\delta_0 \\
&= \sum_{\left\{e\in E^1|s(e)=v\right\}} 1_e\delta_0 = 1_v\delta_0.
\end{aligned}$$

Con los casos anteriores, como consecuencia de la propiedad universal existe un único homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha F$ que envía $\varphi(e) = 1_e\delta_e$, $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ y $\varphi(v) = 1_v\delta_0$.

□

Antes de mostrar que el homomorfismo entre las álgebras de camino de Leavitt y el anillo de grupo torcido es biyectivo, se construirá una $\mathbb{Z}$-graduación en el anillo de grupo torcido. Dado $p \in F$, se define $|p| = m-n$, donde m es el número de elementos de E^1, y n el número de elementos inversos de E^1 que aparecen en p. Para cada $n \in \mathbb{Z}, A_n \subseteq D(X) \rtimes_\alpha F$ denotará al conjunto generado $\mathbb{K}$-linealmente por $\left\{a_p\delta_p | a_p \in D_p \text{ y } |p| = n\right\}$ el cual es un subgrupo aditivo de $D(X) \rtimes_\alpha F$, donde $D(X) \rtimes_\alpha F = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y $A_nA_m \subseteq A_{n+m}$ para cada $n,m \in \mathbb{Z}$, obteniendo así una $\mathbb{Z}$-graduación de $D(X) \rtimes_\alpha F$. Enseguida se enunciará un resultado que permite probar la inyectividad del homomorfismo.

Definición 3.10. *Para el álgebra de caminos de Leavitt $L_K(E)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen las siguientes subálgebras de $(L_K(E))_0$:*

$$G_n := \langle\{\alpha\beta^* : \alpha,\beta \in E^n, r(\alpha) = r(\beta)\}\rangle,$$

$$F_n := \langle \{\alpha\beta^* : \alpha,\beta \in E^k, r(\alpha) = r(\beta), 0 \le k \le n\}\rangle.$$

Observación 3.11. *Se sigue de la definición que $F_{n+1} = G_{n+1} + F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. También se puede observar que $F_n \subseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(L_K(E))_0 = \cup_{n=0}^{\infty} F_n$. Además, G_n es un ideal de la subálgebra F_n.*

Recuerde que $(L_K(E))_0 = \langle \{\gamma\lambda^* \mid \gamma,\lambda \in \mathrm{Path}(E) \text{ y } |\gamma| = |\lambda|\}\rangle$.

Lema 3.12. *Sea I un ideal graduado de $L_K(E)$. Entonces I es generado como ideal, por el conjunto $I_o := I \cap (L_K(E))_0$.*

Demostración. Sea $n > 0$. Se toma $x \in I_n := I \cap (L_K(E))_n$, y se puede escribir $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ donde $x_k \in (L_K(E))_0$ para todo k, $\alpha_k \in E^n$, y $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$. Entonces, para cualquier $1 \le i \le m$ se tiene que

$$x_i = \alpha_i^*(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k) = \alpha_i^* x \in I.$$

Así, $x_i \in I_0$ y $I_n = (L_K(E))_n I_0$. Similarmente, $I_{-n} = I_0(L_K(E))_{-n}$. Ya que I es un ideal graduado, $I = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, y I es generado por el ideal I_0. □

Lema 3.13. *Si A es un álgebra que también es un anillo con un conjunto de unidades locales, entonces I es un ideal del anillo R, si y sólo si, I es un ideal de álgebra A.*

Demostración. Si I es un ideal del álgebra, entonces I es trivialmente un ideal de anillo. Si I es un ideal de anillo, para demostrar que es un ideal de álgebra, basta con probar que I es cerrado bajo multiplicación escalar por elementos de $\mathbb{K}$. Sea $x \in I$ y $k \in \mathbb{K}$. Elija un idempotente $t \in R$ tal que $tx = x$. Puesto que I es un ideal de anillo, $kx = k(tx) = (kt)x \in I$. □

Lema 3.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\pi : F_{n+1} \to A$ un homomorfismo de anillos con la propiedad que $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$. Por otra parte, sean $\tilde{\pi} : F_{n+1}/G_{n+1} \to \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1})$ y $\bar{\pi} : F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \to \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1})$ los homomorfismos canónicos inducidos por π. Entonces, existe un isomorfismo $\phi : F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \to F_{n+1}/G_{n+1}$ y $\phi' : \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1}) \to \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1})$, haciendo el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & F_{n+1}/G_{n+1} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1}) \arrow[r, "\phi'"] & \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1}) \end{tikzcd}$$

Demostración. El homomorfismo $\phi : F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \to F_{n+1}/G_{n+1}$ se define por $\phi(x + (F_n \cap G_{n+1})) = x + G_{n+1}$. Dado que $F_n \cap G_{n+1} \subseteq G_{n+1}$, ϕ esta bien definida, se tiene que ϕ es inyectiva ya que si $\phi(x + (F_n \cap G_{n+1})) = 0 + G_{n+1}$, entonces $x \in G_{n+1}$ y como $x \in F_n$, se sigue que $x \in F_n \cap G_{n+1}$ y $x + (F_n \cap G_{n+1}) = 0 + (F_n \cap G_{n+1})$. Finalmente, ϕ es sobreyectiva porque $F_{n+1} = G_{n+1} + F_n$.

Ahora, $\phi' : \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1}) \to \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1})$ se define por $\phi'(x + \pi(F_n \cap G_{n+1})) = x + \pi(G_{n+1})$. Se sabe que $\pi(F_n \cap G_{n+1}) = \pi(F_n) \cap \pi(G_{n+1})$. Utilizando este hecho, un argumento como el del párrafo anterior muestra que ϕ' es un isomorfismo.

Además, es sencillo comprobar que el diagrama del lema conmuta. □

Teorema 3.15. *(Teorema de unicidad graduado) Sea E un grafo y $L_K(E)$ el álgebra de camino de Leavitt asociada a E con la $\mathbb{Z}$-graduación canónica. Si R es un anillo $\mathbb{Z}$-graduado y $\pi : L_K(E) \to R$ es un homomorfismo de anillos graduados con $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, entonces π es inyectivo.*

Demostración. Se sigue del Lema 3.12 que el ideal $Ker(\pi)$ es generado por el conjunto $(L_K(E))_0 \cap Ker(\pi)$. Por lo cual, es suficiente probar que la restricción $\pi|_{(L_K(E))_0} : (L_K(E))_0 \to R$ es inyectiva.

Además, dado que $(L_K(E))_0 = \cup_{n=0}^{\infty} F_n$, es suficiente probar que la restricción $\pi|_{F_n} : F_n \to R$ es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Se mostrará esto haciendo inducción en n.

- Si $n = 0$, entonces $F_0 = \langle \{v : v \in E^0\} \rangle$. se asume que $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k \in F_0$ y $\pi(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k) = 0$. Ya que los v_k son idempotentes mutuamente ortogonales, para cada $1 \le j \le m$ se tiene que,

$$\pi\left(\lambda_j v_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \pi\left(v_j\right)\pi\left(\lambda_k v_k\right) = \pi\left(v_j\right)\sum_{k=1}^{m} \pi\left(\lambda_k v_k\right) = \pi\left(v_j\right)\pi\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k\right) = 0.$$

  Luego $\lambda_j v_j \in I = Ker(\pi)$, y por el Lema 3.13 o bien $\lambda_j = 0$ o $v_j = \lambda_j^{-1}(\lambda_j v_j) \in I$. Dado que $\pi(v_j) \neq 0$ por hipótesis, se sigue que $v_j \notin I$ y así $\lambda_j = 0$. Como j fue arbitrario, se sigue que $\lambda_k = 0$, para todo k y $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0$. Por lo tanto $\pi|_{F_0}$ es inyectivo.

- Para el paso inductivo, suponga que $\pi|_{F_n} : F_n \to R$ es inyectivo. Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi|_{G_{n+1}}"] & F_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi|_{F_{n+1}}"] & F_{n+1}/G_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi(G_{n+1}) \arrow[r] & \pi(F_{n+1}) \arrow[r] & \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

  Donde $\tilde{\pi} : F_{n+1}/G_{n+1} \to \pi(F_{n+1})/\pi(G_{n+1})$ es el homomorfismo canónico inducido por π. Ahora considere $\pi|_{G_{n+1}}$. Para cada $v \in E^0$ sea

$$\mathcal{G}_{n+1}(v) := \langle \left\{ \alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^{n+1} \text{ y } r(\alpha) = r(\beta) = v \right\} \rangle.$$

  Entonces $G_{n+1}(v)$ es ortogonal a $G_{n+1}(w)$ para $v \neq w$, y $G_{n+1} = \oplus_{v \in E^0} G_{n+1}(v)$ como anillos. Por lo tanto, para cualquier $\alpha\beta^*, \gamma\delta^* \in G_{n+1}(v)$ se tiene que

$$\alpha\beta^*\gamma\delta^* = \begin{cases} \alpha\delta^* & \text{si } \beta = \gamma \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Así $\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^{n+1} \text{ y } r(\alpha) = r(\beta) = v\}$ es un conjunto de unidades matriciales, y $G_{n+1} \cong M_{m(v)}\mathbb{K}$ donde $m(v)$ es el valor (posiblemente infinito) $m(v) := |\{\alpha \in E^{n+1} : r(\alpha) = v\}|$. Esto prueba que G_{n+1} es simple. Si se toma $I = Ker(\pi|_{G_{n+1}})$, entonces $I = \oplus_{v\in E^0} I \cap G_{n+1}(v)$ (ya que $G_{n+1} = \oplus_{v\in E^0} G_{n+1}(v)$ como anillos), y por la simplicidad de $G_{n+1}(v)$ el ideal $I \cap G_{n+1}(v)$ es o bien $\{0\}$ o todo $G_{n+1}(v)$.

Además, para cada $v \in E^0$ se vio que si $\alpha \in E^*$ con $r(\alpha) = v$, entonces $\pi(\alpha^*\alpha) = \pi(v) \neq 0$ implica que $\pi(\alpha^*\alpha) \neq 0$. Así, $\alpha\alpha^* \notin I \cap G_{n+1}(v)$, y $I \cap G_{n+1}(v) = \{0\}$ para todo $v \in E^0$. Luego $I = \{0\}$ y $\pi|_{G_{n+1}}$ es inyectivo.

Sea $\bar{\pi} : F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \to \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1})$ el homomorfismo canónico inducido por π. Se acaba de probar que $\pi|_{G_{n+1}}$ es inyectivo. Por lo tanto, $\pi|_{F_n\cap G_{n+1}} : F_n \cap G_{n+1} \to \pi(F_n \cap G_{n+1})$ es un isomorfismo. Y como por hipótesis se tiene que $\pi|_{F_n}$ es inyectivo, se sigue que $\bar{\pi} : F_n/(F_n \cap G_{n+1}) \to \pi(F_n)/\pi(F_n \cap G_{n+1})$ es inyectivo. Por lo tanto, por el Lema 3.14 implica que $\tilde{\pi}$ es inyectivo.

Dado que $\pi|_{G_{n+1}}$ y $\tilde{\pi}$ son inyectivos, el diagrama conmutativo anterior junto una aplicación del Lema 3.14 muestra que $\pi|_{F_n+1} : F_{n+1} \to \pi(F_{n+1})$ es inyectivo.

Por lo tanto, por el Principio de Inducción Matemática, $\pi|_{F_n} : F_n \to R$ es inyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $\pi|_{(L_K(E))_0} : (L_K(E))_0 \to R$ es inyectivo. □

Teorema 3.16. *El homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha F$ definido en la Proposición 3.9 es un*

$\mathbb{K}$-*isomorfismo.*

Demostración. Se va realizar la prueba por partes. En primer lugar, se va a mostrar que el homomorfismo es un homomorfismo $\mathbb{Z}$-graduado, en segundo lugar, se aplicará el Teorema de unicidad graduado para mostrar que φ es un monomorfismo y finalmente, se mostrará la sobreyectividad.

- **Homomorfismo graduado:** Vale la pena recordar que las componentes homogéneas de $L_K(E)$ están dadas por

$$(L_K(E))_n = \langle \{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in \text{Path}(E) \text{ y } |\gamma| - |\lambda| = n\} \rangle,$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Se verifica que $\varphi\left((L_K(E))_n\right) \subseteq A_n$, para esto, se muestra lo siguiente:

Afirmación: Si $\gamma, \lambda \in W$, entonces $\varphi(\gamma) = 1_\gamma \delta_\gamma, \varphi(\lambda^*) = 1_{\lambda^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}}$ y si $r(\gamma) = r(\lambda)$ con $\gamma\lambda^*$ es su forma reducida $\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}} \delta_{\gamma\lambda^{-1}}$.

En efecto, se mostrará la primera igualdad usando inducción matemática sobre el número de aristas de los caminos. Como base inductiva, se tiene por definición que $\varphi(\gamma_1) = 1_{\gamma_1} \delta_{\gamma_1}$. Se supone que $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}$ y $\varphi\left(1_{\gamma_1} \cdots 1_{\gamma_m}\right) = 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, se observa que $\varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}) = 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}) &= \varphi(\gamma_1 \cdots \gamma_m)\, \varphi(\gamma_{m+1}) \\
&= \left(1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}\right) \left(1_{\gamma+1} \delta_{\gamma+1}\right) \\
&= \alpha_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \left(\alpha_{(\gamma_1 \cdots \gamma_m)^{-1}} \left(1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}\right) 1_{m+1}\right) \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \\
&= \alpha_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \left(1_{(\gamma_1 \cdots \gamma_m)^{-1}} 1_{\gamma_{m+1}}\right) \delta_{\gamma} \\
&= 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma} \\
&= 1_{\gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_{m+1}} \delta_{\gamma} && (*) \\
&= 1_{\gamma} \delta_{\gamma},
\end{aligned}
$$

donde la igualdad $(*)$ se sigue del Lema 3.6 ítem 3. Ahora se probará que $\varphi(\lambda^*) = 1_{\lambda^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}}$, para esto se supone que $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y de manera similar se hará por inducción matemática. Como base inductiva, por definición de φ se tiene $\varphi(\lambda_1^*) = 1_{\lambda_1^{-1}}$, suponga entonces $\varphi\left((\lambda_1 \cdots \lambda_m)^*\right) = 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}} \delta_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}}$ y se probará que $\varphi\left((\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^*\right) = 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+})^{-1}} \delta_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^{-1}}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda^*) = \varphi\left((\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^*\right) &= \varphi\left(\lambda_{m+1}^{-1}\right) \varphi\left((\lambda_1 \cdots \lambda_m)^*\right) \\
&= \left(1_{\lambda_{m+1}^*} \delta_{\lambda_{m+1}^{-1}}\right) \left(1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}} \delta_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}}\right) \\
&= \alpha_{\lambda_{m+1}^{-1}} \left(\alpha_{\lambda_{m+1}} \left(1_{\lambda_{m+1}^{-1}}\right) 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}}\right) \delta_{\lambda^{-1}} \\
&= \alpha_{\lambda_{m+1}^{-1}} \left(1_{\lambda_{m+1}} 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m)^{-1}}\right) \delta_{\lambda^{-1}} \\
&= 1_{\lambda_{m+1}^{-1}} 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}} \\
&= 1_{(\lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1})^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}} && (*) \\
&= 1_{\lambda^{-1}} \delta_{\lambda^{-1}}
\end{aligned}
$$

donde la igualdad $(*)$ se obtiene como consecuencia del Lema 3.6 ítem 1. Seguidamente, para finalizar la prueba de la afirmación, falta probar que $\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}}$ si $r(\gamma) = r(\lambda)$ y $\gamma\lambda^*$ está en su forma reducida, esto se verifica pues

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma\lambda^*) &= \varphi(\gamma)\varphi(\lambda^*) \\
&= \left(1_\gamma\delta_\gamma\right)\left(1_{\lambda^{-1}}\delta_{\lambda^{-1}}\right) \\
&= \alpha_\gamma\left(\alpha_{\gamma^{-1}}\left(1_\gamma\right)1_{\lambda^{-1}}\right)\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \\
&= \alpha_\gamma\left(1_{\gamma^{-1}}1_{\lambda^{-1}}\right)\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \\
&= 1_\gamma 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \qquad\qquad (*) \\
&= 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}},
\end{aligned}$$

en este caso, $(*)$ se obtiene por el Lema 3.6.

Una vez mostrada la afirmación, se tiene que $\gamma\lambda^* \in (L_K(E))_n$, entonces

$$\varphi(\gamma\lambda^*) = 1_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \in D_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}},$$

y dado que $\left|\gamma\lambda^{-1}\right| = |\gamma| - |\lambda| = n$, así las cosas $\varphi\left(\gamma\lambda^{-1}\right) \in D_{\gamma\lambda^{-1}}\delta_{\gamma\lambda^{-1}} \subseteq A_n$, y de ahí como $\gamma\lambda^{-1}$ fue escogido arbitrariamente se consigue que el homomorfismo es $\mathbb{Z}$-graduado.

- **Inyectividad:** Como consecuencia del Teorema de unicidad graduado, puesto que $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha F$ es un homomorfismo graduado, es suficiente mostrar que $\varphi(v) \neq 0$ para cada vértice $v \in E^0$. En efecto, si $v \in E^0$ es un sumidero entonces $X_v = \{v\} \neq \emptyset$, y en consecuencia $1_v \neq 0$. Por otro lado, si v no es un sumidero debe existir un camino infinito que inicia en v, o un camino finito que inicia en v y que termina en un sumidero, en cualquier caso $X_v \neq \emptyset$, y de ahí $1_v \neq 0$, lo que permite concluir $\varphi(v) = 1_v\delta_0 \neq 0$, luego φ es inyectivo.

- **Sobreyectividad:** Para demostrar que φ es sobreyectiva, es suficiente ver que $D_p\delta_p \subseteq Im(\varphi)$ para cada $p \in F$. Primero note que $D_0\delta_0 \subseteq Im(\varphi)$, por la linealidad basta ver $1_v\delta_0, 1_p\delta_0$ para todo $v \in E^0$, y $p \in F\backslash\{0\}$, por construcción de φ se sabe que $1_v\delta_0 \in \mathrm{Im}(\varphi)$ pues $\varphi(v) = 1_v\delta_0$, ahora si $p \in F\backslash\{0\}$ se mostrará que $1_p\delta_0 = (1_p\delta_p)\left(1_{p^{-1}}\right)$, en efecto,

$$\begin{aligned}(1_p\delta_p)\left(1_{p^{-1}}\right) &= \alpha_p\left(\alpha_{p-1}(1_p)1_{p-1}\right)\delta_0\\ &= \alpha_p\left(1_{p^{-1}}1_{p^{-1}}\right)\delta_0\\ &= 1_p\delta_0,\end{aligned}$$

  y dado que por definición de φ se tiene $1_p\delta_p, 1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}} \in \mathrm{Im}(\varphi)$ concluyendo así $1_p\delta_0 \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Finalmente, falta ver que $D_p\delta_p \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ para esto por la linealidad, sólo es suficiente probar que $1_p1_q\delta_p \in \mathrm{Im}(\varphi)$, note que

$$\left(1_q\delta_0\right)(1_p\delta_p) = \alpha_0\left(\alpha_0\left(1_q\right)1_p\right)\delta_p = 1_p1_q\delta_p$$

  y además que $1_q\delta_0, 1_p\delta_p \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Luego, por los ítems anteriores que φ es un $\mathbb{K}$-isomorfismo. $\square$

3.3. Simplicidad sobre las álgebras de camino de Leavitt

Para terminar este capítulo se aplicarán los resultados de los capítulos 1 y 2 a las álgebras de camino de Leavitt.

Definición 3.17. *Sea $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo, entonces:*

1. *Un subconjunto $H \subseteq E^0$ se dice **hereditario** si para cualquier $e \in E^1$, se tiene que si $s(e) \in H$ implica que $r(e) \in H$.*

2. *Un subconjunto hereditario $H \subseteq E^0$ es llamado **saturado** si siempre que $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$, entonces $\{r(e) \in H : e \in E^1 \text{ y } s(e) = v\} \subseteq H$ implique que $v \in H$.*

Ejemplo 3.18. *Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$, considere el siguiente grafo*

$$\cdots \quad \cdot v_m \xrightarrow{f_{m+1}} \cdot v_{m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot v_{n-2} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdot v_{n-1} \xrightarrow{f_n} \cdot v_n$$

Entonces $H = \{v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es hereditario y saturado.

Proposición 3.19. *El conjunto $D_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal en $D_0 \rtimes_\alpha F$ si y solo si, el grafo E satisface la condición (L).*

Demostración. Suponga primero que E satisface la condición (L). Se probará por contradicción que $D_0\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal. Para esto, suponga que existe un elemento $a_t \in D_t$, con $t \neq 0$ y $a_t \neq 0$, tal que $a_t\delta_t \cdot a_0\delta_0 = a_0\delta_0 \cdot a_t\delta_t$ para cada $a_0 \in D_0$ es decir, que

$$\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_0) = a_t a_0 \tag{6}$$

se cumple para todo $a_0 \in D_0$.

Note que $a_t \neq 0$ implica que $t \in W$ o $t = r^{-1}$, con $r \in W$, o $t = ab^{-1}$, donde $a, b \in W$. Además, si en (6) tomando $a_0 = 1_{t^{-1}}$ se obtiene que $a_t = a_t 1_{t^{-1}}$ y por lo tanto el soporte de a_t esta contenido en $D_t \cap D_{t^{-1}}$ y por tanto t debe ser un camino cerrado.

Ahora, tomando las funciones apropiadas para a_0 en (6) y usando inducción se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_t = a_t 1_{(t^n)^{-1}}$ y $a_t 1_{t^n} = a_t$. Por ejemplo, para $a_0 = 1_{t^{-1}t^{-1}}$ se sigue que $a_t 1_{t^{-1}} = a_t 1_{t^{-1}t^{-1}}$ y así $a_t = a_t 1_{t-1t^{-1}}$. Por otro lado, para $a_0 = 1_t 1_{t^{-1}}$ se consigue que $\alpha_t(\alpha_{t-1}(a_t) 1_t 1_{t^{-1}}) = a_t 1_t 1_{t^{-1}}$, y así $a_t 1_{tt} = a_t 1_{t^{-1}} = a_t$.

Antes de derivar la contradicción, observe que si $\zeta \in X_t$ con $a_t(\zeta) \neq 0$, entonces dado $a_t \in D_t$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $\mu \in X_t$ con $\mu_1 \cdots \mu_m = \zeta_1 \cdots \zeta_m$, entonces $a_t(\mu) = a_t(\zeta)$. Ahora, se separa el argumento en tres casos.

Caso 1. Suponga $t \in W$.

Dado $a_t = a_t 1_{t^m}$ se tiene que $t^m = \zeta_1 \cdots \zeta_m \cdots \zeta_{m|t|}$. Sea s una salida para t y $\mu \in X_t$ tal que $\mu_1 \cdots \mu_{m|t|} \cdots \mu_k = t^m t_1 \cdots t_l s$. Entonces, $a_t(\mu) = a_t(\zeta) \neq 0$, pero $a_t(\mu) = a_t(\mu) 1_{t^{m+1}}(\mu) = 0$ es una contradicción. Así t no es un elemento de W.

Caso 2. Suponga $t = r^{-1}$, con $r \in W$.

Este caso sigue como el anterior, utilizando la igualdad $a_t = a_t 1_{(t^m)^{-1}}$ en lugar de $a_t = a_t 1_{t^m}$.

Caso 3. Suponga que $t = ab^{-1}$, donde $a, b \in W$.

Se obtiene una contradicción procediendo como en el **Caso 1** si $|a| \leq |b|$ y como en el **Caso 2** si $|a| < |b|$.

Así las cosas, no existe un $a_t \in D_t$, con $t \neq 0$, tal que $a_t \delta_t$ conmuta con cada elemento de $D_0 \delta_0$, luego $D_0 \delta_0$ es un subanillo conmutativo conmutativa.

Suponga ahora que E no satisface la condición (L), esto es, existe un camino cerrado $t = t_1 \cdots t_m$ que no tiene salida. Se probará que $a_t \delta_t$ conmuta con todos los $D_0 \delta_0$ y así $D_0 \delta_0$ no es un subanillo conmutativo maximal.

Como $D_0 = \langle \{1_p : p \in F \backslash \{0\}\} \cup \{1_v : v \in E^0\} \rangle$ por lo que basta con demostrar que $1_t \delta_t$ conmuta con $1_v \delta_0$, y con $1_p \delta_0$, para cada $v \in E^0$ y $p \in F \setminus 0$.

Sea $v \in E^0$. Entonces $1_t \delta_t \cdot 1_v \delta_0 = \alpha_t (\alpha_{t-1} (1_t) 1_v) \delta_t = \alpha_t (1_{t-1} 1_v) \delta_t$ que es no cero, solo si $r(t) = v$, en cuyo caso es igual a $1_t \delta_t$. Por otro lado, $1_v \delta_0 \cdot 1_t \delta_t = 1_v 1_t \delta_t$, que es no nulo solo si $s(t) = v$, en cuyo caso es igual a $1_t \delta_t$. Como t es un camino cerrado, se deduce que $1_t \delta_t$ conmuta con $1_v \delta_0$.

Ahora, sea $r \in F \setminus 0$. Note que, para probar que $1_t \delta_t$ conmuta con $1_r \delta_0$, es suficiente para verificar que $\alpha_t (1_{t^{-1}} 1_r) = 1_t 1_r$, que es equivalente a $1_t 1_{tr} = 1_t 1_r$ (ya que $\alpha_t (1_{t^{-1}} 1_r) = 1_t 1_{tr}$). Como antes, ahora se divide la prueba en casos:

Caso 1. $r \in W$.

Si $r = t^n t_1 \cdots t_k$ para algún $n \geq 0$ y $1 \leq k \leq m$ entonces, como t no tiene salida, $X_r = X_t = \{tttt \cdots\}$, y así las cosas $1_t 1_{tr} = 1_t = 1_t 1_r$. Si $r \in W$ no es de esa forma, entonces $1_t 1_{tr} = 0 = 1_t 1_r$.

Caso 2. $r = s^{-1}$ con $s \in W$.

Suponga primero que $r(s) = r(t)$. Entonces $X_{s^{-1}} = X_t$, dado que t es un camino cerrado sin salida, y por lo tanto $1_t 1_{tr} = 1_t 1_{ts-1} = 1_t = 1_t 1_{s-1} = 1_t 1_r$. Si $r(s) \neq r(t)$, entonces $1_{ts^{-1}} = 0 = 1_t 1_{s-1}$.

Caso 3. $r = ab^{-1}$ con $a, b \in W$ y $r(a) = r(b)$.

Como $1_{tr} = 1_{tab^{-1}} = 1_{ta}$ y $1_r = 1_{ab^{-1}} = 1_a$ este caso se reduce al **Caso 1**.

Caso 4. Cualquier otro $r \in F$.

En este caso $1_r = 0$, de ahí que ambos lados de la ecuación $\alpha_t (1_{t^{-1}} 1_r) = 1_t 1_r$ son iguales a cero.

Se ha demostrado que $1_t \delta_t$ esta en el centralizador de $D_0 \delta_0$, y así $D_0 \delta_0$ no es un subanillo conmutativo maximal, como se quería ver. □

Antes de proceder a mostrar la conexión entre la simplicidad de F con D_0 y la inexistencia de subconjuntos propios heredados y saturados de E^0, se probarán algunos lemas.

Lema 3.20. *Sea $x_0\delta_0$ un elemento no nulo de $D_0\delta_0$ y denote por I el ideal principal de $D_0 \rtimes_\alpha F$ generado por $x_0\delta_0$. Entonces existe un vértice $v \in E^0$ tal que $1_v\delta_0 \in I$.*

Demostración. Se puede escribir a x_0 como combinación lineal de funciones características, $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{a_i b_i^{-1}} + \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{v_j}$, donde $a_i \in W$ y $b_i \in W \cup 0$ (si $a_i = 0$, entonces $1_{a_i b_i^{-1}} = 1_{b_i^{-1}} = 1_{r(b_i)}$ así $X_{b^{-1}} = X_{r(b_i)}$). Tomando algún $v \in E^0$ tal que $1_v x_0 \neq 0$. Si v es un sumidero, entonces $1_v 1_{a_i b_i^{-1}} = 0$ para cada i, luego,

$$0 \neq 1_v x_0 \delta_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j 1_v 1_{v_j} \delta_0 = \sum_{j:v_j=v} \beta_j 1_v \delta_0,$$

se cumple que $1_v\delta_0 \in I$.

Ahora suponga que v no es un sumidero. Sea $m = max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Como se puede escribir $X_v = \bigcup_{c\in I} X_c$ donde el conjunto de indices I se compone de todos los $c \in W$, tal que $s(c) = v$ y $|c| = m$, o $s(c) = v, |c| < m$ y $r(c)$ es un sumidero. Si $1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \neq 0$, entonces a_i es un subcamino inicial de c, y entonces $1_c 1_{a_i b_i^{-1}} = 1_c 1_{a_i} = 1_c$. Más aún, si $1_c 1_{v_j} \neq 0$, entonces $1_c 1_{v_j} = 1_c$. Usando esto, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 \neq 1_c x_0 \delta_0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \delta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_c 1_{v_j} \delta_0 \\
&= \sum_{i:1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \neq 0} \lambda_i 1_c 1_{a_\ell b_i^{-1}} \delta_0 + \sum_{j:1_c 1_{v_j} \neq 0} \beta_j 1_c 1_{v_j} \delta_0 \\
&= \sum_{i:1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \neq 0} \lambda_i 1_c \delta_0 + \sum_{j:1_c 1_{v_j} \neq 0} \beta_j 1_c \delta_0 \\
&= \left(\sum_{i:1_c 1_{a_i b_i^{-1}} \neq 0} \lambda_i + \sum_{j:1_c 1_{v_j} \neq 0} \beta_j \right) 1_c \delta_0
\end{aligned}$$

que muestra que $1_c \delta_0 \in I \setminus 0$. Note que $1_{r(c)} \delta_0 = 1_{c^{-1}} \delta_0 = 1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}} \cdot 1_c \delta_0 \cdot 1_c \delta_c$. Usando que I es un ideal, se concluye que $1_{r(c)} \delta_0 \in I$. □

Lema 3.21. *Sea I un ideal F-invariante de D_0. Entonces, el conjunto $Z = \{v \in E^0 : 1_v \in I\}$ es hereditario y saturado.*

Demostración. Sea $e \in E^1$ tal que $s(e) \in Z$. Entonces $1_e = 1_{s(e)} 1_e \in I \cap D_e$ y, dado que I es F-invariante, $\alpha_{e^{-1}}(1_e) = 1_{e^{-1}} = 1_{r(e)} \in I$, así $r(e) \in Z$.

Ahora, sea $v \in E^0$ tal que $0 < \# s^{-1}(v) < \infty$ y $r(e) \in Z$ para cada $e \in s^{-1}(v)$. Note que $1_{r(e)} = 1_{e^{-1}}$ y así, como I es F-invariante, se tiene que $1_e = \alpha_e(1_{e^{-1}}) \in I$.

Esto implica que $1_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \in I$ y así $v \in Z$. □

Proposición 3.22. *El álgebra D_0 es F-simple si y solo si, los únicos subconjuntos saturados y hereditarios de E^0 son E^0 y $\varnothing$.*

Demostración. Suponga primero que D_0 es F-simple. Sea F un subconjunto saturado y hereditario no vacío de E^0. Se debe probar que $F = E^0$.

Considere el ideal I generado por $\{1_v\delta_0 : v \in F\}$ en $D_0 \rtimes_\alpha F$ I, I la extensión lineal de todos los elementos de la forma $a_r\delta_r 1_v\delta_0 b_s\delta_s$, con $v \in F, a_r \in D_r, b_s \in D_s$ y $r,s \in F$. Sea $J = P_0(D_0\delta_0 \cap I)$, y note que J es un ideal F-invariante no nulo de D_0 (J es F-invariante ya que si $a_t \in J \cap D_t$, entonces $a_t\delta_0 \in I$, así $\alpha_{t-1}(a_t)\delta_0 = 1_{t-1}\delta_{t-1} \cdot a_t\delta_0 \cdot 1_t\delta_t \in I$ y luego $\alpha_{t-1}(a_t) \in J$). Ahora, dado que D_0 es F-simple se sigue que $J = D_0$ y, en particular, $1_u \in J$ para cada $u \in E^0$. Esto significa, para cada $u \in E^0, 1_u\delta_0 \in I$, así se puede escribir como

$$1_u\delta_0 = \sum_t x_t\delta_t \cdot 1_{v_t}\delta_0 \cdot y_{t^{-1}}\delta_{t^{-1}} = \sum_t \alpha_t\left(\alpha_t^{-1}(x_t)\,1_{v_t}y_{t^{-1}}\right)\delta_0,$$

donde la suma anterior es finita, y $v_t \in F$ para cada t. Multiplicando la ecuación anterior por $1_u\delta_0$, se obtiene

$$1_u\delta_0 = \sum_{t\in T} 1_u\alpha_t\left(\alpha_t^{-1}(x_t)\,1_{v_t}y_{t-1}\right)\delta_0,$$

donde

$$T := \left\{t \in F : 1_u\alpha_t\left(\alpha_t^{-1}(x_t)\,1_{v_t}y_{t-1}\right) \neq 0\right\}.$$

En particular, ya que $1_u\alpha_t\left(\alpha_t^{-1}(x_t)\,1_{v_t}y_{t^{-1}}\right) \neq 0$ para cada $t \in T$, se tiene que $1_u 1_t \neq 0$ y $1_{v_t}1_{t^{-1}} \neq 0$, para todo $t \in T$.

El objetivo es demostrar que cada $u \in E^0$ pertenece a F. Así, sea $u \in E^0$. Si $u = r(b)$ para algún b y $s(b) \in F$, entonces $u \in F$, ya que F es hereditario. Más aún, si $0 < \#s^{-1}(u) < \infty$ y $r(e) \in F$ para cada $e \in s^{-1}(u)$ entonces $u \in F$, ya que F es saturado. Así, quedan los siguientes casos.

Caso 1. $s^{-1}(u) = \varnothing$, y no existe un camino b con $s(b) \in F$ y $r(b) = u$.

En primer lugar, observe que como no hay $b \in W$ tal que $s(b) \in F$ y $r(b) = u$, para cada $b \in W$, esto dice, que o bien $1_u 1_{b^{-1}} = 0$ o $1_v 1_b = 0$ para cada $v \in F$. Entonces, por el enunciado justo después de la definición de T, se obtiene que no existe un $t \in T$ de la forma $t = b^{-1}$ (Con $b \in W$). Ahora, para t de la forma $t = ab^{-1} \in F$, con $a \in W$ y $b \in W \cup 0$, se tiene que $1_u 1_t = 0$, ya que $s(a) \neq u$, y por tanto $t = ab^{-1} \notin T$. Se concluye que $T = 0$, y así $1_u = 1_u x_0 1_{v_0} y_0$ y esto prueba que $u = v_0 \in F$.

Caso 2. $\#s^{-1}(u) = \infty$, y no existe un camino b con $s(b) \in F$ y $r(b) = u$.

Aquí, como en el Caso 1, no existe un $t \in T$ de la forma $t = b^{-1}$ (Con $b \in W$). Suponga que $0 \notin T$. Entonces, cada $t \in T$ es de la forma $t = ab^{-1}$, con $a \in W$ y $b \in W \cup 0$. Como $\#s^{-1}(u) = \infty$, hay un elemento $\zeta \in X$ con $s(\zeta) = u$ y $s(\zeta) \neq s(a)$ para cada $ab^{-1} \in T$. Note que $1_t(\zeta) = 0$, para todo $t \in T$, y por lo tanto

$$1 = 1_u(\xi) = \sum_{t \in T} 1_u \alpha_t \left(\alpha_t^{-1}(x_t) 1_{v_t} y_{t^{-1}}\right)(\xi) = 0$$

Lo que es una contradicción. Así $0 \in T$ y $1_u x_0 1_{v_0} y_0 \neq 0$, lo que implica que $u = v_0 \in F$.

Caso 3. $0 < \#s^{-1}(u) < \infty$, y no existe un camino b con $s(b) \in F$ y $r(b) = u$, y hay una arista $e \in s^{-1}(u)$ tal que $r(e) \notin F$.

De nuevo como en el Caso 1, no hay $t \in T$ que sea de la forma $t = b^{-1}$ con $b \in W$. Suponga como en el Caso 2, que $0 \notin T$. Entonces, como antes, cada $t \in T$ es de la forma $t = ab^{-1}$, con $a \in W$ y $b \in W \cap 0$.

Ahora, para cada $t \in T$, sea $c_t = 1_u \alpha_t \left(\alpha_t^{-1}(x_t) 1_{v_t} y_{t-1}\right)$. Como, para cada $t = ab^{-1} \in T$, prueba que $1_u 1_t \neq 0$ y $1_{v_t} 1_{t^{-1}} \neq 0$, se tiene que $s(a) = u$ y $s(b) = v_t \in F$. Dado que F es hereditario, entonces $r(b) \in F$, y ya que $r(a) = r(b)$ se sigue que $r(a) \in F$.

Así, se obtiene que

$$1_u = \sum_{t \in T} c_t = \sum_{ab^{-1} \in T} c_{ab^{-1}},$$

donde $u = s(a)$ y $r(a) \in F$ para todo $ab^{-1} \in T$.

Sea $z = z_1 \cdots z_m$ un camino de longitud máxima tal que $|z| \leq max\{|a| : ab^{-1} \in T\}$, con $s(z) = u$ y $r(z_i) \notin F$, para cada $i \in 1, ..., m$. Por hipótesis tal z existe.

Entonces, multiplicando la ecuación $1_u = \sum_{ab^{-1} \in T} c_{ab^{-1}}$ por 1_z se obtiene que

$$1_z = \sum_{ab^{-1} \in T : |z| < |a|, a_1 \cdots a_m = z} c_{ab^{-1}}.$$

Como la suma del lado derecho es finita, tenemos que $0 < \# s^{-1}(r(z)) < \infty$. Por la maximalidad de $|z|$, no existe una arista $e \in s^{-1}(r(z))$ tal que $r(e) \notin F$. Entonces, $r(e) \in F$ para todo $e \in s^{-1}(r(z))$, y ya que F es saturado, $r(z) \in F$, lo que es una contradicción (ya que $r(z) = r(z_m) \notin F$).

Se concluye que $0 \in T$ y, como en el Caso 2, eso prueba que $u \in F$.

Sea I un ideal F-invariante no nulo de D_0. Se necesita probar que $I = D_0$.

Se supone ahora, que los únicos subconjuntos saturados y hereditarios de E^0 son E^0 y $\varnothing$.

Sea J el ideal no nulo de $D_0 \rtimes_\alpha F$ que consiste en todas las sumas finitas $\sum a_t \delta_t$, con $a_t \in D_t \cap I$ (J es un ideal ya que I es F-invariante), y sea $Z = \{v \in E^0 : 1_v \in I\}$. Por el Lema 3.20 hay algún $v \in E^0$ tal que $1_v \delta_0 \in J$, así $1_v \in I$ (ya que $J \cap D_0 \delta_0 = I \delta_0$), y por lo tanto Z es no vacío. Por el Lema 3.21, Z es hereditario y saturado, luego $Z = E^0$. Así, $1_v \in I$ para cada $v \in E^0$, así las cosas $I = D_0$, como se quería ver. □

La Proposición 3.19 y la Proposición 3.22 permiten relacionar las álgebras de caminos de Leavitt con los anillos parciales de grupos torcidos, y viceversa. Utilizando esto, se dará ahora una nueva prueba del criterio de simplicidad para las álgebras de caminos de Leavitt.

Teorema 3.23. *El anillo de grupo torcido $D_0 \rtimes_\alpha F$ es simple, si y solo si, el grafo E satisface la condición (L) y los únicos subconjuntos saturados y hereditarios de E^0 son E^0 y $\varnothing$.*

Demostración. Se obtiene al combinar los resultados Teorema 2.19, Proposición 3.19 y Proposición 3.22. □

Esta sección termina proporcionando una prueba alternativa del teorema de unicidad de Cuntz-Krieger para las álgebras de caminos de Leavitt.

Teorema 3.24. *(Teorema de unicidad de Cuntz-Krieger) Sea E un grafo que satisface la condición (L). Si $\phi : D_0 \rtimes_\alpha F \to B$ es un homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\phi(1_v\delta_0) \neq 0$ para cada $v \in E^0$, entonces ϕ es inyectivo.*

Demostración. Sea I denotando el ideal $ker(\phi)$. Buscando una contradicción, suponga que $I \neq 0$. La Proposición 3.19 y el Teorema 2.19 indican que $D_0\delta_0 \cap I \neq 0$. Sea $x_0\delta_0 \in D_0\delta_0 \cap I$ un elemento no nulo, por el Lema 3.20 existe algún $v \in E^0$ tal que $1_v\delta_0 \in I = ker(\phi)$, pero esto es una contradicción. Así $ker(\phi) = 0$. □

4. Dinámicas topológicas

Este último capítulo se encargará de aplicar los resultados mencionados en el capítulo 2 para las dinámicas topológicas, las cuales son estudiadas en Gonçalves (2014).

4.1. Dinámica topológica parcial

En primer lugar, en esta sección se definirán los conceptos básicos para comprender sobre que se está trabajando.

En la dinámica topológica parcial, así como en Exel et al. (2011) y Exel et al. (2002) se trabajará sobre $C(X) \rtimes_\alpha G$, donde $C(X)$ denota las funciones continuas de valor complejo en X el cual es un espacio topológico.

Definición 4.1. *Dado X un espacio topológico no vació y $\phi : X \to X$ es una función continua. Conocer la **dinámica topológica** del par (X,ϕ) (que es isomorfa a un sistema dinámico discreto (S.D.D) asociado o inducido por el endomorfismo ϕ), consiste en tener conocimientos en términos de descripción explicita y de propiedades topológicas que ocurren para cada $x \in X$ con el conjunto*

$$Orb_\phi(x) = \{\phi^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Definición 4.2. *Una **acción parcial topológica** del grupo G en el espacio topológico X es una acción parcial $\theta = (D_g, \theta_g)_{g\in G}$ sobre el conjunto subyacente X, tal que cada D_g es abierto en X y cada θ_g es un homeomorfismo.*

Definición 4.3. *Por un **sistema dinámico parcial topológico** se entenderá como un sistema dinámico parcial*

$$(X, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}),$$

donde X es un espacio topológico y $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ es una acción parcial topológica de G en X.

Antes de continuar, recuerde que existe una correspondencia entre las acciones parciales sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto X, y las acciones parciales sobre la C^*-álgebra de funciones continuas de valor complejo que desaparecen en el infinito, $C_0(X)$ (ver Beuter and Gonçalves (2016)), se denotará este conjunto por, $C_0(X) = \{f : X \to R \text{ continua} : \forall \varepsilon > 0\ \exists K \text{ compacto cerrado tal que } |f| < \varepsilon \text{ en } X \setminus K\}$. A saber, si $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ es una acción parcial en X, entonces $\alpha = (D_t, \alpha_t)_{t\in G}$, donde $D_t = C_0(X_t)$ y $\alpha_t(f) := f \circ h_{t^{-1}}$, es una acción parcial de G en $C_0(X)$. La simplicidad del producto cruzado C*-parcial asociado se estudió en Exel et al. (2002), y en Gonçalves (2014) dan una versión del teorema anterior para acciones parciales de grupos abelianos. A continuación, se recordarán las definiciones pertinentes y se harán las adaptaciones apropiadas de las ideas de Gonçalves (2014) para este caso.

Definición 4.4. *Una acción parcial $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ de un grupo G en X es **libre**, si para todo $x \in X$, $h_t(x) = x$ implica que $t = e$.*

Proposición 4.5. *Si $F(X) \rtimes_\alpha G$ es simple, entonces $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ es libre.*

Demostración. Se supone que θ no es libre. Entonces existe un $x \in X$ y $g \in G, g \neq e$ tal que $x \in X_{g^{-1}}$ y $h_g(x) = x$, considere el ideal I generado por $\chi_x\delta_0 - \chi_x\delta_g$ (note que $\chi_x \in F(X_g)$, ya que $x = h_g(x) \in X_g$).

Se demostrará que la suma de coeficientes de elementos en I es cero. Para ello, observe que $\alpha_{g^{-1}}(\chi_x) = \chi_x$, y así

$$
\begin{aligned}
a_s\delta_s\left(\chi_x\delta_0 - \chi_x\delta g\right) b_t\delta_t &= a_s\delta_s\chi_x b_t\delta_t - a_s\delta_s\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(\chi_x\right) b_t\right)\delta_{t+g} \\
&= a_s\delta_s\chi_x b_t\delta_t - a_s\delta_s\alpha_g\left(\chi_x b_t\right)\delta_{t+g}.
\end{aligned}
$$

Ahora, $\alpha_g(\chi_x b_t) \neq 0$ si y solo si, existe $y \in X$ tal que

$$\chi_x(h_{g^{-1}}(y))b_t(h_{g^{-1}}(y)) \neq 0,$$

y esto es cierto, si y solo si, $b_t(h_{g^{-1}}(y)) \neq 0$ y $h_{g^{-1}}(y) = x$; esto es, $y = h_g(x) = x$, en este caso $\alpha_g(\chi_x b_t)(x) = b_t(x)$. Así $\alpha_g(\chi_x b_t) = \chi_x b_t$, y por tanto

$$\begin{aligned} a_s\delta_s\left(\chi_x\delta_0 - \chi_x\delta g\right)b_t\delta_t &= a_s\delta_s\chi_x b_t\delta_t - a_s\delta_s\chi_x b_t\delta_{t+g} \\ &= \alpha_s\left(\alpha_{s^{-1}}\left(a_s\right)\chi_x b_t\right)\delta_{t+s} - \alpha_s\left(\alpha_{s^{-1}}\left(a_s\right)\chi_x b_t\right)\delta_{t+g+s}. \end{aligned}$$

Se concluye que la suma de coeficientes de elementos en I es cero. Pero entonces $\chi_x\delta_0 \notin I$, y así $F(X) \rtimes_\alpha G$ no es simple. □

4.2. Simplicidad sobre las dinámicas topológicas

En esta sección final se utilizarán los resultados de los capítulo 1 y 2 para caracterizar las acciones parciales sobre un espacio compacto de conjuntos abierto-cerrados cuyo anillo de grupo torcido en el contexto parcial asociado es simple.

Definición 4.6. *La acción parcial θ sobre X es* ***minimal*** *si no hay subconjuntos abiertos θ-invariantes de X distintos de $\varnothing$ y X o, equivalentemente, si la acción parcial α sobre $C_0(X)$ no tiene ideales invariantes propios.*

Definición 4.7. *Una acción parcial topológica $\phi = (X_t, h_t)_{t\in G}$ es* ***topológicamente libre****, si para todo $t \neq e$ el conjunto $F_t = \{x \in X_{t^{-1}} : h_t(x) = x\}$ tiene el interior vacío.*

El siguiente ejemplo ayudará a entender mejor estas definiciones.

Ejemplo 4.8. *Sea $G = (\mathbb{Z}, +)$.*

1. *Se puede tomar* $X = \mathbb{R}$ *cualquier espacio topológico y* $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $x \longmapsto x+t$.

2. *Si* $X = (a,b)$ *con* $a,b \in \mathbb{R}$ *y* $h_t : X_{t^{-1}} \to X_t$ *tal que* $x \longmapsto x+t$*, donde se va a tener que* $X_{t^{-1}} = \{x \in X : x+t \in X\}$.

La idea de esta sección, es dar una demostración al siguiente teorema.

Teorema 4.9. *Sea* $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ *una acción parcial de un grupo G en un espacio compacto X, tal que para cada* $t \in G$*,* X_t *es un conjunto abierto-cerrado. Entonces el anillo de grupo torcido* $C(X) \rtimes_\alpha G$ *es simple, si y solo si,* θ *es topológicamente libre y minimal.*

Observación 4.10. *Las acciones parciales sobre el conjunto de Cantor por subconjuntos abierto-cerrados son exactamente aquellas para las que el espacio envolvente es Hausdorff (ver Exel et al. (2011)).*

Observación 4.11. *Como la acción parcial actúa sobre conjuntos abierto-cerrados, cada* D_t *es unitario. Por lo tanto, se usa el Teorema 2.19 para demostrar el teorema anterior.*

Observación 4.12. *A la luz de la Observación 2.16 y la Observación 2.18, se deduce que la primera parte del teorema anterior, se cumple para cualquier acción parcial topológica en un espacio localmente compacto X, es decir, si* $C(X) \rtimes_\alpha G$ *es simple, entonces* θ *es topológicamente libre y minimal.*

Proposición 4.13. *Una acción parcial* $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ *en un espacio compacto X es minimal, si y solo si,* $C(X)$ *es G-simple.*

Demostración. La prueba de ello puede encontrarse en (Exel et al., 2002, Colorario 2.9, pág 174). $\square$

Proposición 4.14. *Suponga que $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ es una acción parcial topológicamente libre. Entonces, $C(X)\delta_0$ es un subanillo conmutativo maximal en $C(X)\rtimes_\alpha G$.*

Demostración. Suponga que $C(X)\delta_0$ no es un subanillo conmutativo maximal. Entonces existe una función no nula f_t y $t \in G$, con $t \neq 0$, tal que $f_t\delta_t \cdot f\delta_0 = f\delta_0 \cdot f_t\delta_t$ para todo $f \in C(X)$, lo cual es equivalente a $\alpha_t\left(\alpha_{t^{-1}}(f_t)\, f\right)\delta_t = f f_t \delta_t$, para todo $f \in C(X)$, que a su vez equivale a

$$f_t(x)f(h_{t^{-1}}(x)) = f(x)f_t(x), \tag{7}$$

para todo $f \in C(X)$ y $x \in X_t$.

Ahora, dado que f_t es no nulo, entonces existe $x \in X_t$ tal que $f_t(x) \neq 0$ y la continuidad de f_t implica que existe un subconjunto abierto $U \subseteq X_t$ tal que f_t no es nulo en U. Como la acción parcial es topológicamente libre existe $y \in U$, tal que $h_{t^{-1}}(y) \neq y$. Sea $f \in C(X)$ tal que $f(y) = 1$ y $f(h_{t^{-1}}(y)) = 0$ (tal función existe por el lema de Urysohn). Pero por (7) implica que $f_t(y) = 0$, generando así una contradicción. $\square$

Proposición 4.15. *Si $C(X)\rtimes_\alpha G$ es simple, entonces $\theta = (X_t, h_t)_{t\in G}$ es topológicamente libre.*

Demostración. Suponga que θ no es topológicamente libre. Entonces existe un $g \neq e$ en G tal que el interior de F_g no es vació. Sea x un elemento del interior de F_g. Por el lema de Urysohn, existe una función continua f tal que $f(x) = 1$, y el soporte de f está contenido en el interior de F_g.

Note que $f = \chi_{F_g} \cdot f$, y dado que $\alpha_g(f) = f = \alpha_{g^{-1}}(f)$. Ahora considere el ideal generado por $f\delta_0 - f\delta_g$. Procediendo de manera similar como en la Proposición 4.5, esto es, expandiendo los términos de la forma $a_s\delta_s(f\delta_0 - f\delta_g)b_t\delta_t$, se tiene que la suma de coeficientes de elementos en I es cero. Pero, entonces $f\delta_0 \notin I$, y así $C(X) \rtimes_\alpha G$ no es simple. $\square$

Observación 4.16. *Las 3 proposiciones anteriores, combinadas con el Teorema 2.19, prueban el Teorema 4.9.*

Referencias Bibliográficas

Abrams, G., Ara, P., Molina, M. S., and Ara, P. (2017). *Leavitt path algebras*, volume 2191. Springer.

Abrams, G. and Pino, G. A. (2005). The leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, 293(2):319–334.

Beuter, V. M. and Gonçalves, D. (2016). Partial crossed products as equivalence relation algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 46(1):85–104.

Beuter, V. M. and Gonçalves, D. (2018). The interplay between steinberg algebras and skew rings. *Journal of Algebra*, 497:337–362.

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2005). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952.

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2017). The ideal structure of algebraic partial crossed products. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 115(1):91–134.

Exel, R., Giordano, T., and Gonçalves, D. (2011). Enveloping algebras of partial actions as groupoid c*-algebras. *Journal of Operator Theory*, pages 197–210.

Exel, R., Laca, M., and Quigg, J. (2002). Partial dynamical systems and c*-algebras generated by partial isometries. *Journal of Operator Theory*, pages 169–186.

Gonçalves, D. (2014). Simplicity of partial skew group rings of abelian groups. *Canadian Mathematical Bulletin*, 57(3):511–519.

Gonçalves, D., Öinert, J., and Royer, D. (2014). Simplicity of partial skew group rings with applications to leavitt path algebras and topological dynamics. *Journal of Algebra*, 420:201–216.

Gonçalves, D. and Royer, D. (2014). Leavitt path algebras as partial skew group rings. *Communications in Algebra*, 42(8):3578–3592.

Leavitt, W. G. (1962). The module type of a ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, 103(1):113–130.

Öinert, J. (2009). Simple group graded rings and maximal commutativity. *Contemporary Mathematics*, 503:159.

Öinert, J. (2014). Simplicity of skew group rings of abelian groups. *Communications in Algebra*, 42(2):831–841.

Öinert, J. and Lundström, P. (2012). The ideal intersection property for groupoid graded rings. *Communications in Algebra*, 40(5):1860–1871.

Tomforde, M. (2007). Uniqueness theorems and ideal structure for leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 318(1):270–299.