LA VARIABLE:
“COSA”, “LETRA ACOMPAÑANTE” O “NÚMERO ESCONDIDO”

CRISTIAN COGOLLO GUEVARA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

LA VARIABLE:
“COSA”, “LETRA ACOMPAÑANTE” O “NÚMERO ESCONDIDO”

CRISTIAN COGOLLO GUEVARA
Licenciado en Matemáticas

Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

Directora
DIANA JARAMILLO QUICENO
Ph. D. en Educación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

A mi Dios, con
mucho amor.

A mi familia,
con cariño especial.

Agradecimientos

A mis queridos estudiantes Tulio, Crisanto, Isidoro, Nacho y Jacinto por su colaboración y entrega en las actividades de este trabajo.

A Diana Jaramillo, profesora orientadora de este trabajo, por todo.

Al grupo de Educación Matemática, por contribuir en mi formación personal, académica y profesional.

A mis amigos, con quienes he compartido aciertos y desaciertos.

A mis familiares, por su apoyo cariño incondicional.

A Leila Maria, por su cariño especial, colaboración y paciencia.

A mis colegas y directivos del colegio ASPAEN Gimnasio Saucará, por su colaboración y apoyo brindado en el transcurso de este proyecto.

ÍNDICE

			Pág.
		Revelando el panorama	
CAPÍTULO	1.	Trazando el rumbo	5
CAPÍTULO	2.	Escuchando voces	14
CAPÍTULO	3.	Estudiando categorías	29
	3.1	La variable como "cosa"	33
	3.2	La variable como "letra acompañante", escolta	38
	3.3	La variable como "número escondido"	41
A modo de cierre			
Referencias bibliográficas			

Resumen

TÍTULO:
LA VARIABLE: "COSA", "LETRA ACOMPAÑANTE" O "NÚMERO ESCONDIDO"*

AUTOR:
COGOLLO GUEVARA, Cristian**

PALABRAS CLAVES:
Variable, uso y significado de las letras, álgebra, sentido.

Esta investigación tiene como objetivo identificar y estudiar el sentido que le atribuyen los estudiantes a la "variable" cuando trabajan algebra elemental.
La pregunta orientadora de esta investigación fue la siguiente: ¿Cuál es el sentido que los estudiantes de séptimo grado poseen de la variable en actividades algebraicas?
Para responder a esta pregunta fueron realizadas unas observaciones y entrevistas a cinco estudiantes de séptimo grado de un colegio del municipio de Floridablanca. Estas observaciones y entrevistas fueron registradas en el diario de campo y, algunas, audio-gravadas y trascritas.
Después de escuchar las voces de los estudiantes y de percibir los errores que estos cometían en el trabajo con álgebra elemental (Capítulo II), fueron estudiados los sentidos que los estudiantes le otorgan a la variable en un intento de significación (Capítulo III).
Este estudio muestra, entre otros resultados, que los estudiantes le otorgan sentidos a la variable dependiendo del contexto en que esta sea presentada. Para ellos la variable siempre fue representada por una "letra", la cual pudo ser una "cosa", una letra que "acompaña números" o un "número escondido". También, en el trabajo muestra que el conocimiento de los errores básicos en el álgebra es importante para el profesor, porque lo provee de información sobre la forma en que los estudiantes interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos.

---

* Trabajo de grado

**Facultad de ciencias, Escuela de matemáticas, Especialización en educación matemática. Directora: Diana Jaramillo Quiceno, Ph. D. en Educación.

Summary

TITLE:
THE VARIABLE: “THING”, “COMPANIAN LETTER” OR “HIDDEN NUMBER”*

AUTHOR:
COGOLLO GUEVARA, Cristian**

KEY WORDS:
Variable, use meaning of the letters, algebra and meaning

This research work has as main objective to identify and study the meaning given to the “variable” by the students when they are working on elementary algebra.

The guiding questions was: What is the meaning that students of seventh grade have for the variable in algebraic activities?

To answer this question several observations and interviews were performed to five seventh grade students from a school of Floridablanca municipality. Some of the observations and interviews were done on the field and others were recorded and then transcript.

After listening to the students’ voices and being aware of the mistakes that they made in the elementary algebra activities (Chapter II), the meaning that the students give to the variables were studied when they try to establish a meaning.

This study shows, among other results, that the students give different meanings to the variable according to the context in which it is presented. For the students the variable was always represented by a “letter”, which could have been a “thing”, a letter that “goes next to numbers” or a “hidden number”. In addition this research work shows that the knowledge of the basic errors in algebra is very important for the teacher, because it provides information about the way students interpret the problems and how they use different algebraic procedures.

---

*Thesis

**Science Faculty, Mathematics School, Specialization Mathematics Education. Director: Diana Jaramillo Quiceno, Ph. D. in Education.

Revelando el panorama

La intranquilidad que originaba la alta mortalidad académica y el rechazo que la mayoría de mis estudiantes, incluso los más diestros, manifestaban hacia el álgebra en el grado séptimo me llevaron a preguntarme por las razones por las cuales se da y se mantiene esta dificultad tan común y tan preocupante en la clase de matemáticas.

Entre los tantos libros, revistas y documentos que consulté para abordar mi inquietud, hallé un artículo de la revista *Zetetiké,* en el cual se invitaba a mirar el error cometido por el estudiante no como algo ruin o negativo, sino como una consecuencia del intento de comprensión y significación que tiene cuando trabaja el álgebra.

La lectura enriquecedora de dicho artículo me llevó a preguntarme por la significación que tenía el sentido y para mis estudiantes la variable y, además, me condujó a recordar lo importantes e influyentes que son las experiencias previas de los estudiantes, ya que ellos moldean, en cierto grado, las nuevas experiencias y la interpretación que se dé a las mismas.

Algo tan cierto como lo anterior es que el profesor la mayor parte del tiempo ignora la verdadera interpretación que el estudiante da a los conceptos matemáticos. A esto se suma el hecho de que el estudiante siempre intenta responder lo esperado por el profesor, lo cual es, muchas veces, contrario a lo que él realmente entiende, siendo esto último lo que perdura al final del proceso de aprendizaje y es, probablemente, lo que genera dificultades en aprendizajes posteriores.

Siguiendo esta línea de ideas y después de realizar una extensa revisión bibliográfica sobre las relaciones entre el trabajo aritmético y algebraico y el estudio de la variable en actividades algebraicas, concreté finalmente la pregunta que da origen a esta experiencia: **¿Cuál es el sentido que los estudiantes de séptimo grado dan a la variable en actividades algebraicas?**

Esta pregunta se podría abordar desde diferentes perspectivas, por lo cual la enfoqué hacia el siguiente objetivo: **Identificar y estudiar el significado asignado por los estudiantes a la variable en actividades álgebraicas**.

El estudio de caso que permitió el desarrollo de esta investigación requirió de encuestas, diálogos, entrevistas y de la observación directa sobre los estudiantes en cada una de las clases de álgebra y en otros momentos específicos que convinimos previamente.

Este estudio lo desarrollé en 2004 con un grupo de 17 estudiantes del grado séptimo B del colegio ASPAEN Gimnasio Saucará, institución educativa de carácter privado del Municipio de Floridablanca. Sin embargo, para el análisis de este trabajo solamente tomé información de cinco estudiantes El criterio de selección de estos estudiantes fue por la dificultad y confusión que presentaban en el trabajo con el álgebra.

Los resultados de esta investigación los presento en cuatro capítulos, que a continuación relato brevemente:

En el primer capítulo, **"**Trazando el rumbo**"**, describo las motivaciones que me llevaron a plantear este estudio de caso, los antecedentes necesarios para la comprensión, los objetivos que me tracé, la pertinencia del trabajo, entre otras cosas. También expongo el plan y la realización de las actividades y el posterior análisis de cada una.

En el segundo capítulo, **"**Escuchando voces**"**, transcribo fidedignamente las "voces" de los estudiantes en cada entrevista y en cada diálogo que tuvimos -aclaro que intención de este capítulo es mostrarle al lector la forma como se llevó a cabo cada actividad, los formatos y las respuestas (sin hacer un análisis profundo) que los estudiantes dieron durante la experiencia-.

En el tercer capítulo, **"**Estudiando categorías**"**, planteo tres categorías que reúnen toda la experiencia. Aquí analizo cada categoría desde las voces de los estudiantes y del marco teórico que sustenta el trabajo además de mis puntos de vista.

Por último, en el cuarto capítulo, **"**A modo de cierre**",** trato de concluir algunos aspectos que me pareció pertinente nombrar sobre esta experiencia, y de mencionar algunas recomendaciones generales.

Trazando el rumbo

CAPÍTULO 1

El presente trabajo de investigación fue realizado en 2004 con un grupo 17 estudiantes del grado séptimo B del colegio ASPAEN Gimnasio Saucará, institución educativa de carácter privado del Municipio de Floridablanca, A través de la experiencia y el conocimiento que adquiría de mis estudiantes en el día a día del ejercicio de la docencia, noté que mis estudiantes cometían errores frecuentes en el trabajo con álgebra. Además, fui comprendiendo que la enseñanza del álgebra es una cuestión delicada y que mi compromiso era esforzarme para que ellos lograran comprenderla.

En ese momento de mi ejercicio docente mi preocupación radicaba en encontrar formas metodológicas y didácticas para que los estudiantes superaran dichas dificultades, pero en algunos intentos por superar los errores, notaba con preocupación que estos sólo mejoraban momentáneamente, es decir, por una o dos clases parecía que lograban comprender y dominar el concepto, pero pasadas algunas clases los errores reaparecían. Toda esta problemática me motivó a elegir el álgebra para la elaboración del proyecto de investigación.

Por otro lado, el marco teórico que me permitió desarrollar y sustentar el tema investigado incluye autores como Lesley Booh, Martín Socas, y John Mason, entre otros reconocidos.

Al hacer lectura de los textos que hacen parte de mi marco teórico, comencé a darme cuenta de que no bastaba una solución metodológica para resolver el problema. Entonces decidí centrarme en observar detenidamente los errores que mis estudiantes presentaban cuando trabajan con álgebra. Y, finalmente, redireccioné mi investigación hacia las dificultades y errores de los estudiantes en el trabajo con álgebra.

Por lo tanto, comencé a realizar una revisión bibliográfíca acerca de los errores y las dificultades que los estudiantes cometen en un curso de álgebra de séptimo grado, encontrando varios autores y estudios que muestran algunos problemas en la enseñaza y aprendizaje de la misma:

> Profesores y estudiantes sufren con el álgebra de 7º grado. Unos intentando explicar, otros intentando introducir técnicas de cálculo con letras que, casi siempre, están desprovistas de significados para unos y otros. Lo mismo en estas escuelas de excelencia, donde aparentemente los estudiantes de 7º grado dominan todas las técnicas, ese esfuerzo tiene pocos resultados: en la 1ª serie de 2º grado [equivalente a nuestro décimo grado] es necesario repetirlo todo (Pinto, 1997, p. 31).

Entonces, ¿por qué será tan difícil para los estudiantes aprender álgebra? ¿Qué tipos de dificultades y errores presentan los estudiantes?, ¿cómo son percibidos y tratados los errores y las dificultades por los profesores?

En 1981 Kücheman estudió los diferentes contextos en los que aparecen las letras en el álgebra, y los clasificó a la luz de las ideas representadas por alumnos en seis categorías diferentes de interpretación y uso de las letras:

a) **Letras evaluadas**. Esta categoría se aplica en aquellas respuestas en las que a las letras se les asigna un valor numérico desde el principio.

b) **Letras ignoradas**. Los estudiantes ignoran las letras, o a lo más reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado.

c) **Las letras como objeto***:* Las letras son vistas como un objeto concreto (frutas, lados de un polígono, etc.), eliminando su significado abstracto por algo más real.

d) **Letras como incógnitas específicas**. En esta categoría se consideran las letras como un número desconocido pero específico, donde se puede operar sobre él directamente.

e) **Letras generalizando números**. Los estudiantes ven las letras como una representación de varios valores numéricos antes que de uno exactamente, es decir, las letras representan “muchos números”.

f) **Letras como variables**. Las letras son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

Entre 1980 y 1983, en el Reino Unido, el grupo de álgebra *Strategies and Errors in Secundary Mathematics (S.E.S.M.)* trató de identificar los errores que comúnmente cometían los estudiantes cuando trabajaban álgebra. Estos jóvenes tenían una edad entre los trece y dieciséis años, y a pesar de las diferencias de edad y de haber estudiado diferentes cursos de álgebra, cometían similares errores en todos los niveles.
Según este trabajo, el objetivo de la actividad aritmética es diferente al de la actividad algebraica. Al operar solamente números, el objetivo es encontrar respuestas particulares. En álgebra es operar también con las letras, pero el objetivo es otro. El cálculo algebraico no sólo puede proveer respuestas particulares, únicas, sino que también puede expresar procedimientos y relaciones de manera generalizada y simplificada.

El álgebra, como una rama de las matemáticas, es también un lenguaje de comunicación de ideas abstractas que necesita una notación formal; esta notación es la causa de la gran confusión que experimentan los estudiantes. Esta confusión proviene, en general, de la separación entre lo que el estudiante ve en símbolos y el significado que ellos les asignan. Algunos estudiantes intentar ver el significado de una notación a través de lo meramente visible o lo asociado en algún momento. Por ejemplo, existen errores comunes con el tratamiento de la variable; las diferentes interpretaciones que los estudiantes le pueden asignar a la variable puede llevar a dar $5x$ como respuesta de $3x+2$, algo que tiene que ver con su interpretación del símbolo de la operación; o la interpretación que le hacen a la letra cuando concluyen, por ejemplo, que $3n$ son tres naranjas (o tres naves, o tres niños, etc.) y que la variable simplemente juega el papel de objeto. También suelen decir que bb es igual a $2b$ simplemente haciendo un conteo de "bes" (Rojas & Rodríguez, 1997, p. 21).

Pinto & Fiorientini (1997) analizaron el punto de vista semiótico, epistemológico y pedagógico de los significados producidos y negociados por una profesora de matemática de séptimo grado y sus estudiantes en el aula, durante la realización de una actividad algebraica. El estudio mostró que, estudiantes y profesora, en un intento de producir, y negociar significados para los entes algebraicos, produjeron polisemias para palabras como, "cuadrado" y "cosa", generando de ese modo obstáculos didácticos, epistemológicos y verbales.

Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1997) tratan sobre una de las interpretaciones que se le da a la variable en álgebra: la letra ignorada. Ellos plantearon consideraciones en torno a la comunicación en matemáticas y el sentido que se debe dar a la variable. Pues aunque los distintos usos de las letras (que constituyen, en general, la manifestación simbólica de las variables), parezcan simples para el que sabe, deben ser reconocidos por los estudiantes para "dotar de significado" el trabajo algebraico que realizan.
Lo anterior resalta la importancia del proceso de significación de la variable; es decir, cómo los estudiantes van dando, dependiendo de la experiencia, sentido a la variable, hasta llegar a encontrarle un significado estable que perdure a través de los años.

Gracias a consideraciones como las anteriores, producto de la lectura, y a las inquietudes que me embargaban en cuanto al rendimiento y el aprendizaje de mis estudiantes, logré concretar la pregunta que sería el eje principal de esta investigación: **¿Cuál es el sentido que los estudiantes de séptimo grado poseen de la variable en actividades algebraicas?**

Antes de continuar quiero definir y precisar algunos términos y conceptos que a mi modo de ver parecen pertinentes para el desarrollo de este trabajo. El primer término que quiero esclarecer es el de "significado" y el segundo "sentido", llevándolos desde sus interpretaciones más sencillas hasta su construcción formal.

Para realizar esta aclaración busqué apoyo teórico, por un lado, y por otro lo enfoqué desde una perspectiva socio-histórica del conocimiento, la cual tiene como principales interlocutores a Vygotsky y Bajtín.

Según Blumer (1982), referenciado en Godino y Llinares (1999, p. 74), el "significado" es una interacción entre los miembros de una cultura, y esta interacción se basa en tres premisas básicas:

1. El ser humano orienta sus actos hacia las "cosas" en función de lo que ellas significan para él;
2. el significado de esas cosas se deriva, o surge, como consecuencia, de la interacción social que cada cual mantiene con su prójimo (fuente del significado);
3. los significados se manipulan y modifican mediante un proceso interpretativo desarrollado por la persona al enfrentarse con las cosas que va hallando a su paso.

Pero es conveniente hacer una distinción entre sentido y significado desde Vygotsky (1995):

> El sentido de una palabra es la suma de todos los eventos psicológicos que la palabra despierta en nuestra conciencia. Es un todo complejo, fluido y dinámico, que tiene varias zonas de estabilidad desigual. El significado es apenas una de las zonas del sentido, es más estable y precisa. (Vygotsky (1995) citado por Pinto, 1997, p. 81).

Es decir, el sentido es más amplio que el significado, y obedece al contexto donde subyace, mientras el significado es más preciso.

Posteriormente me embargó otro gran interrogante: ¿Cuál era el abordaje metodológico más apropiado para aproximarme hacia esa realidad? Al observar la naturaleza de la problemática opté por un abordaje cualitativo, ya que permitirá comprender mejor lo que habrían de expresar mis estudiantes.

Una vez resuelto ese dilema, apareció otro: ¿Con cuántos estudiantes trabajaría para desarrollar las actividades que permitirían solucionar la problemática?; además ¿cuál curso sería el apropiado para realizar el estudio de caso que pretendía?

Según Lüdke y André (1986), un caso necesita ser bien delimitado, con sus “contornos claramente definidos en el desarrollo del estudio”; es más, Pinto (1997) citando a Lüdke y André (1986), menciona:

> El caso puede ser similar a otros, pero en distinto tiempo, pues tiene un interés propio singular, […] El interés, por tanto, incide en aquello que es único, particular, por lo que posteriormente vienen a quedar evidentes semejanzas con otros casos o situaciones. Cuando queremos estudiar algo singular, que tenga un valor en sí mismo, debemos escoger el estudio de caso.

Además, los autores también expresan que la comprensión de esta singularidad es la preocupación central del estudio de caso:

> Eso significa que el objeto estudiado es tratado como único, una representación singular de la realidad que es multidimensional e históricamente situada. De ese modo, la pregunta sobre el caso “típico”, esto es, empíricamente representativo de un población determinada, se torna inadecuada, ya que cada caso es tratado como teniendo un valor intrínseco. (Lüdke y André, 1986, p. 21, en Pinto 1997, p. 15).

Uno de los instrumentos utilizados para la recolección de datos en un estudio de caso es la observación directa. Actividad que realicé dentro de mis clases de álgebra en el transcurso de mi trabajo de campo. Mi propósito era prestar atención al sentido que los estudiantes le daban a la variable en algunos ejercicios propuestos y algunas intervenciones en el tablero.

Finalmente, habiendo definido lo que quería, empecé a realizar mis observaciones y a tomar registro de las situaciones particulares que se presentaban en cada clase. Sin embargo, no me parecían suficientes para los propósitos proyectados, por lo que busqué apoyo en otro instrumento de recolección de datos: la entrevista. Esta tiene grandes ventajas en relación con otras técnicas, ya que:

> Otros instrumentos tienen su destino sellado en el momento en el que salen de las manos del investigador que las elaboró; la entrevista gana vida al iniciar el diálogo entre el entrevistador y el entrevistado (Lüdke y André, 1986, p. 34 en Pinto 1997, p. 19).

La entrevista que realicé era semiestructurada, es decir, según Thiollent (1987) (Pinto, 1997), aplicada a partir de un número pequeño de preguntas abiertas. Sin embargo según el autor, ese tipo de pregunta no predefine la respuesta. En regla general, las respuestas a preguntas libres son procesadas por técnicas de análisis de contenido.

Además hay que resaltar que este tipo de entrevista permite mayor flexibilidad y un menor rigor en el derrotero planteado por el investigador, pues dependiendo de las respuestas del entrevistado, se puede variar o desviar lo que se había planeado o establecido.

Un factor importante y determinante durante la entrevista es el clima que haya entre el entrevistador y el entrevistado, como bien lo dicen Lüdke y André (1986): "en la medida en que hubiera un clima de estímulo y de aceptación mutua, las informaciones fluirán de una manera notable y auténtica" Y para que este clima se produzca son necesarios ciertos cuidados por parte del investigador requeridos por cualquier tipo de entrevista.

> ...un respeto muy grande por el entrevistado. Ese respeto envuelve desde un acuerdo en el horario y su conveniencia ante la perfecta garantía de sigilo y anonimato en relación con el informante, sea el caso. [..] Por otro lado un respeto por la cultura y los valores del entrevistado; el entrevistador tiene que desenvolver una gran capacidad de oír atentamente y de estimular el flujo natural de las informaciones por parte del entrevistado (Pinto, 1997). De ese modo, (Lüdke y André, 1986. p. 35).

Así, el entrevistado no se siente forzado a dar respuestas en determinada dirección, y se garantiza un clima de confianza para que el entrevistado pueda responder libremente.

Antes de continuar quiero hacer una breve presentación de los cinco estudiantes[2]:

Jacinto era un chico de 12 años a quien, aunque le parecía aburrida, se le facilitaba la matemática. Él se cuestionaba permanentemente sobre la aplicabilidad de la matemática en su vida.

Tulio tenía 12 años y consideraba que la matemática era importante, ya que su padre, un empresario, las utilizaba con frecuencia en su trabajo. Es de resaltar sus buenas relaciones con sus compañeros.

Crisanto era un niño de 11 años que siempre estaba haciendo chistes y relacionando todo con algo de gracia. La matemática siempre se le ha dificultado y manifestaba que debía recuperar cada evaluación.

Isidoro era un joven de 13 años, distraído y olvidadizo en la mayoría de las clases de matemáticas. Él manifestaba que no era muy bueno para las matemáticas, ya que a la hora de hacer ejercicios necesitaba de mucha ayuda.

[2] En este trabajo, los nombres auténticos de los estudiantes han sido reemplazados por nombres ficticios.

Nacho tenía 13 años. Él muy orgullosamente comentaba: “Yo creo que desde el grado quinto fue que me di cuenta de que debía ser un mejor estudiante”. Era un estudiante muy preocupado por su rendimiento académico.

Finalmente, para el análisis del material recogido (observación y entrevistas), empecé la triangulación entre la teoría consultada, lo recolectado y mi opinión como investigador, tratando de obtener categorías de análisis a partir de las reflexiones progresivas sobre el material –en el proceso de construcción de esas categorías, la teoría ejerció un papel fundamental-.

> [Las categorías] brotan, en un primer momento, del soporte teórico en que se apoya la investigación. Ese conjunto inicial de categorías, entretanto, va ha ser modificado a lo largo del estudio, en un proceso dinámico de confrontación constante entre la teoría y la práctica, el que origina nuevas concepciones y, consecuentemente, nuevos enfoques de interés (Lüke y André, 1986, Pinto 1997, p. 21).

Escuchando voces

CAPÍTULO 2

Para ningún profesor de matemáticas es ajeno el hecho de que una de las áreas más difíciles para que el estudiante aprenda es el álgebra, además de “generar” inconformismo y desmotivación.

Es por eso que en este capítulo pretendo mostrar algunos de los errores más frecuentes de mis estudiantes, haciendo grosso modo algunas observaciones pertinentes.

Concuerdo con Booth (1990) en que el álgebra es reconocida como la piedra en el zapato en la escuela, tanto en el presente como en el pasado. Los estudios históricos de los desarrollos del álgebra en la educación en el siglo XX muestran que el álgebra en la escuela secundaria no ha cambiado mucho en los últimos años. Sin intención, el álgebra ha funcionado como medio para captar los aprendices más capaces (unos cuantos felices que entienden y disfrutan el poder del álgebra) que el resto, quienes la recuerdan y la experimentan como una combinación exclusiva de letras y números.

Los investigadores han reportado que los adultos frecuentemente tienen una imagen negativa del álgebra en el colegio, y muchos estudiantes no le encuentran sentido. Referente a esto, Mason (1996: p. 3) dice:

> La idea que la mayoría de la gente tiene del álgebra escolar es probablemente borrosa. Muchas personas se pueden acordar de haber trabajado con la x y con la y, con a y b, tal vez de haber manipulado esas letras y, si se les insiste, tal vez pueden acordarse de que trabajaron en la solución de ecuaciones. Pero aún aquellos que muestran una competencia superficial en el álgebra pueden manifestar sus dudas en relación con el propósito del estudio del álgebra. Como un colega recientemente anotaba: “Yo siempre pude trabajar el álgebra en el

> colegio pero nunca puede entender por qué uno siempre debía encontrar el valor de x".

Esta situación no era del todo ajena a las ideas de mis estudiantes, ya que algunos de ellos expresaban que el álgebra era como un juego con símbolos, justificando que era un buen entrenamiento para la mente.

Tulio, en la entrevista realizada el tres de diciembre de 2004, comentó que consideraba el álgebra importante porque:

> "Ahí también se empieza a trabajar la mente, a saber…, para uno no quedarse sin saber nada de eso" (Entrevista, Tulio; 3/Dic/04)

Por otro lado, Crisanto y Nacho veían el álgebra como el estudio de la mezcla entre números y letras:

> "El álgebra es como una ciencia que estudia los signos, se mezclan los números y letras para formar expresiones algebraicas y también tiene temas interesantes" (Entrevista, Crisanto; 3/Dic/04).

> "Entiendo que el álgebra es una matemática que comprende las expresiones de los números y letras en cantidades variables" (Entrevista, Nacho; 3/Dic/04).

Además, Isidoro dijo que el álgebra es una matemática más complicada cuyo único objetivo era resolver incógnitas.

> "Es como una rama de las matemáticas que nos ayuda a resolver incógnitas" (Entrevista, Isidoro; 3/Dic/04).

Igualmente expresaban que el álgebra era complicada, porque era una generalización de la matemática que ellos habían visto hasta el momento (aritmética). Es decir, percibían el álgebra como aritmética generalizada. Al respecto, Tulio dijo:

> “Es una forma más avanzada de la matemática, donde se obtienen operaciones de más alto grado” (Entrevista, Tulio, 3/Dic/04).

Esta visión que tenían los estudiantes del álgebra podía ser atribuida en gran parte a la enseñanza, pues como profesor reconozco que esta materia es usualmente presentada al estudiante como un tema matemático fijo y predeterminado, con reglas estrictas, empezando el curso con muy poca introducción en el significado de las letras y sin dejar lugar al estudiante a que la relacione con la vida real.

Justamente Booth (1990) expresa que la instrucción tradicional empieza con las reglas sintéticas del álgebra, presentándoles a los estudiantes un lenguaje simbólico que ellos no relacionan. Se espera que los estudiantes se adiestren en la manipulación simbólica antes de aprender el propósito y el uso del álgebra. En otras palabras, el contexto matemático es el punto de partida, mientras que la aplicación del álgebra (resolución de problemas y relaciones generales) quedan en segundo lugar. A los estudiantes se les da muy poca oportunidad para que encuentren las posibilidades de solución y el poder del álgebra por ellos mismos.

Otra razón por la que los estudiantes tenían esta visión del álgebra como algo supremamente difícil, aun por encima de la matemática que han aprendido hasta el momento, es el aspecto procesal del álgebra, ya que está relacionado con la aritmética a la que han estado acostumbrados y que es dejada a un lado, justo después de la introducción. Reflejo de esto fueron las palabras de Jacinto:

> “El álgebra es una forma de matemáticas pero más complicada, ya que utilizan letras o diferentes casos” (Entrevista, Jacinto, 3/Dic/04).

Además, Jacinto mencionó que el álgebra es más complicada porque "se utilizan las letras".

> "Porque se utilizan muchos casos, las operaciones son más largas y se utilizan letras" (Entrevista, Tulio, 3/Dic/04).

Cuando Jacinto hablaba de "muchos casos" se refería a los casos de factorización; y con "las operaciones más largas" hacía referencia a las operaciones entre polinomios, las cuales utilizan en su mayoría "letras".

En las clases de álgebra notaba errores muy comunes en los estudiantes cuando les proponía ejercicios; por ejemplo, $3a+5=$ la respuesta común para ellos era $8a$.

Al respecto Socas, Camacho, Paralea y Hernández (1989: 96) dicen: "Un conocimiento de los errores básicos en álgebra es importante para el profesor, porque lo provee de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos".

Dada la importancia que representan los errores para el profesor, realicé un taller con algunas preguntas que, a mi modo ver como profesor de álgebra, son básicas para el desempeño en esta área. A continuación aparece el Taller Uno, a través del cual pretendía establecer un diagnóstico –en una primera fase– de esos errores que mis estudiantes estaban cometiendo frecuentemente en el trabajo con álgebra.

ASPAEN GIMNASIO SAUCARÁ
GRADO SÉPTIMO

1. Si $a+b=43$, $a+b+2=$_______ Si $e+f=8$, $e+f+g=$______

2. ¿Qué puedes decir de a, si $a+5=8$?

3. ¿Qué puedes decir de u, si $u=v+3$ y $v=1$

4. Añade 4 a $3n$

5. ¿Quién es mayor $2n$ ó $n+2$?

6. ¿Qué puedes decir de c si $c+d=10$ y c es menor que d?

7. ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad:

$$L+M+N=L+P+N$$

Taller Uno. Diagnóstico de errores (fase I)

Según Booth (1984), a partir del descubrimiento e investigación de los errores más comunes cometidos por los alumnos se puede intentar responder a la pregunta ¿Por qué es tan difícil para los estudiantes aprender álgebra?

A continuación presento las respuestas (voces) dadas por mis estudiantes en cada pregunta del taller y, paralelamente, doy paso a mi voz para hacer explícitos los errores cometidos sin entrar en análisis sobre ellos:

En la primera pregunta Jacinto respondió:

1. Si a+b=43 , a+b+2= 45

Porque a+b 43 +2 igual a 45

En esta parte de la respuesta no hubo error, pero la segunda parte de la misma no estuvo acertada:

Si e+f= 8, e+f+g= 10

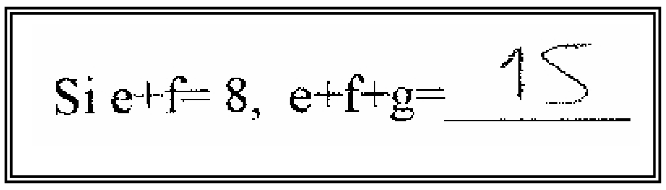
Aquí evidentemente había un error. Lo que Jacinto hizo fue darle un valor arbitrario a la g para dar el resultado. Conducido por la primera parte, para él la g tomó el valor de 2.

En la misma pregunta, Tulio, Crisanto y Nacho tuvieron la misma respuesta que Jacinto. Aquí pude notar que los estudiantes sólo concibian una respuesta numérica; por tal razón, para ellos fue "fácil" escribir una expresión numérica y no la respuesta algebraica que requería la situación (e+f+g = 8+g). Al respecto Mason (1999) menciona:

> Muchos alumnos encuentran difícil el aceptar que, por ejemplo $3+2x$ pueda ser la respuesta a una pregunta matemática. Esto, sin duda, surge de la

> expectativa (basada en las experiencias anteriores) de que $3+2x$ nos está dando la instrucción de adicionar los términos 3 y $2x$, y no de que esta expresión es cerrada.

También fue notorio que las experiencias anteriores, como anteriormente se dijo, afectan las nuevas, ya que ellos le dieron a la g el valor de dos influenciados, por decirlo de alguna manera, por la primera parte del punto. La respuesta que dio Isidoro en la segunda parte de la pregunta me sorprendió un poco más, ya que su resultado fue 15.

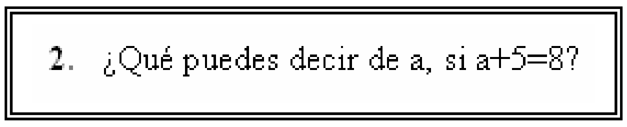

Si e+f= 8, e+f+g= 15

Analizando la respuesta de Isidoro, noté que esta no era tan arbitraria, pues él reemplazó por el valor posicional de la g dentro del abecedario:

a	b	c	d	e	f	g
1	2	3	4	5	6	**7**

Al respecto Booth (1984), citado por Mason (1999, p. 131), dice:

> “Otros niños saben que las letras representan números, pero piensan que hay “reglas” que determinan qué números representan las letras, tales como establecer un patrón entre las letras y los números (e.g. a, b, c, representan 1, 2, 3, respectivamente, ó 10, 20, 30, etc.), o contando la posición de una letra dada en el alfabeto, luego “c”, por ejemplo, siempre se reemplaza por 3. (Booth (1984) en Mason 1999:p.131).


2. ¿Qué puedes decir de a, si a+5=8?

En cuanto a esta, la segunda pregunta, los estudiantes no mostraron dificultad para responder acertadamente, ya que este tipo de pregunta se hace en aritmética para trabajar con ecuaciones como lo demostró Tulio:

> **2.** ¿Qué puedes decir de a, si a+5=8?
> que a es 3 porque para que de 8 falTon tres

> **3.** ¿Qué puedes decir de u, si u=v+3 y v=1

Pasando a la tercera pregunta, encontré que todos los estudiantes excepto Nacho respondieron que el valor de u era cuatro, simplemente reemplazando el valor de v y obteniendo, posteriormente el valor de u. La respuesta de Nacho fue:

> **3.** ¿Qué puedes decir de u, si u=v+3 y v=1
> pues que u es mayor que v

Aparentemente es una buena deducción, pero me inquietaba la posibilidad de que Nacho no hubiera tenido en cuenta la información de $v = 1$ y simplemente tuviera en cuenta que al agregar o sumar 3 a v, siempre iba a obtener u mayor.

> **4.** Añade 4 a 3n

En esta pregunta los cinco estudiantes contestaron exactamente lo mismo: $7n$.

> **4.** Añade 4 a 3n
> = 7n

Crisanto justificó su respuesta así:

4. Añade 4 a 3n = 7n Porque: 4+3 = 7

Fue claro para los estudiantes que la repuesta la podían obtener al hacer la operación suma que estaba implícita en el problema, pero no tuvieron en cuenta la n.

Referente a esto Socas et al. (1989) afirman que en la respuesta $7n$ los únicos que tienen significado para el estudiante son los números 4 y 3, los cuales son propiamente combinados mientras que la letra es ignorada.

5. ¿Quién es mayor 2n ó n+2?

En esta pregunta las respuestas de Isidoro, Jacinto y Crisanto fueron iguales, aunque en diferentes términos:

5. ¿Quién es mayor 2n ó n+2?
son iguales

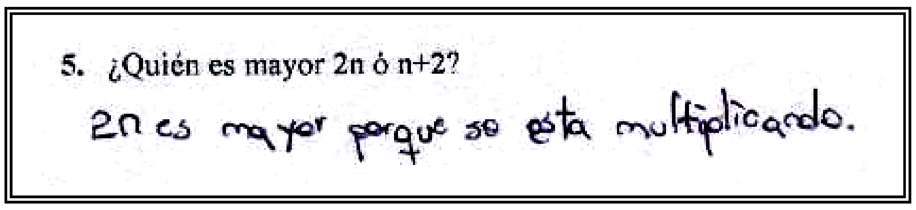
5. ¿Quién es mayor 2n ó n+2?
es lo mismo

5. ¿Quién es mayor 2n ó n+2? son iguales, por que n+2 = 2n.

Noté que estos estudiantes no se percataron de que la n podía tomar valores y que de esos valores dependía la respuesta; además, veían a la n como un objeto coleccionable, así $n+2$ era unir (literalmente) el símbolo 2 con la n y, por lo tanto, la respuesta era "igual".

> Según Booth (1984), los niños (con frecuencia) reemplazan una suma como $a+b$ por los términos unidos "ab". La idea de unir los términos parece ser debido al hecho de que los niños piensan que las "respuestas" se dan siempre como un solo término. Esto no parece resultar de una confusión con la forma abreviada del producto $a \times b = ab$, pues los niños que todavía no han aprendido álgebra también tienden a escribir ab en cambio de $a+b$.

Por otra parte, Nacho y Tulio expresaron que $2n$ es mayor:



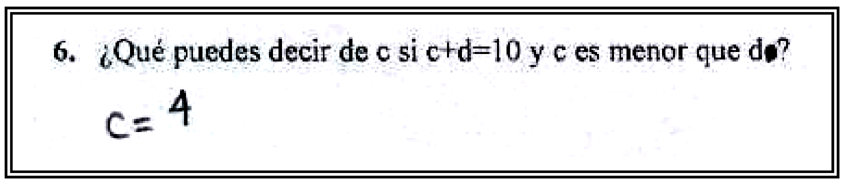
5. ¿Quién es mayor 2n ó n+2?

2n es mayor porque se esta multiplicando.

En este caso, para ellos la n tomaba valores pero tenían la idea (tal vez desde la aritmética) de que multiplicar siempre es mayor que sumar.

6. ¿Qué puedes decir de c si c+d=10 y c es menor que d?

En la sexta pregunta encontré cuatro respuestas diferentes. Jacinto y Tulio respondieron que $c=4$, ignorando los otros valores que podía tomar la c, pero dijeron esto porque la operación mental que hicieron, fue: "10 dividido en 2 igual a 5 pero como d es mayor que c entonces debe tomar un valor menos, es decir el cuatro". Tal vez por aquella idea de encontrarle un valor a una letra.



6. ¿Qué puedes decir de c si c+d=10 y c es menor que d?

c= 4

En la respuesta de Nacho fue interesante ver cómo aceptaba que la c tomaba varios valores, pero sólo puede valer números enteros positivos restringiendo la generalidad que es la esencia del pensamiento algebraico:

> **6. ¿Qué puedes decir de c si c+d=10 y c es menor que d?**
> c= puede ser = 4, 3, 2, ó 1.

Crisanto simplemente se centró en la información: "c es menor que d" y muy tenuemente la cambio por "d es mayor que c", desconociendo la expresión $c+d=10$:

> **6. ¿Qué puedes decir de c si c+d=10 y c es menor que d ?** que d es Mayor que c.

Isidoro parece que tuvo la misma idea de Nacho, pero para él sólo bastó escribir una de las posibilidades que tenía c.

> **6. ¿Qué puedes decir de c si c+d=10 y c es menor que d?**
> c =3
> d= 7

> 7. ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad:
>
> L+M+N=L+P+N

La séptima pregunta no fue problema para responder correctamente, pero observé algo particular en la respuesta de Isidoro, ya que podría haber sido aceptada como correcta pero me inquietó la posibilidad de que simplemente la respuesta hubiese resultado por simple observación mas no por un proceso lógico-algebraico o consciente, es decir, que la igualdad se conseguía sólo teniendo los mismos símbolos en ambos lados, y no que los valores de la m deben ser iguales al de la p.

7. ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad:

L+M+N=L+P+N

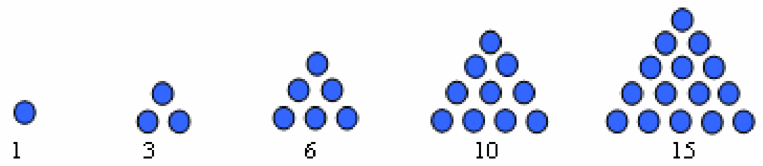
L+M+N=L+M+N

Posteriormente, realicé otro taller (Taller Dos) con el mismo propósito que el anterior enfatizando un poco mas el concepto de variable.

ASPAEN GIMNASIO SAUCARÁ
GRADO SÉPTIMO

1. Luis tenía 8 canicas; jugando ganó algunas mas y ahora tiene 12. ¿Cuántas canicas gano? Escribe una expresión simbólica que represente la anterior situación, la cual le permita resolver el problema.

2. Observe la siguiente situación y responda



¿La expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ que representa en la gráfica?

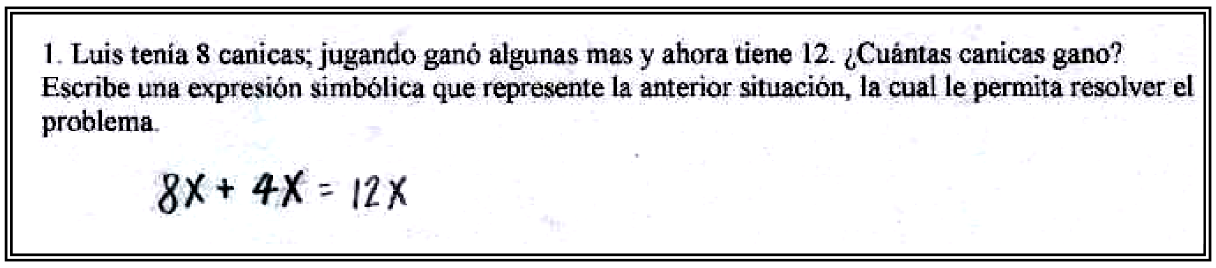
¿La n que representa en la expresión anterior?

3. Invente una situación la cual se resuelva con las siguientes ecuaciones.

$3c + 4n = 31$, y $n = c - 1$

Taller Dos. Diagnóstico de errores (fase II)

Antes de relatar las respuestas dadas por los estudiantes quiero comentar que este cuestionario se les dificultó bastante al momento de encontrar una respuesta hasta el punto de no responder varias preguntas, ya que, según ellos, no sabían qué contestar; además, mi recomendación había sido responder con toda la convicción posible. Pero aunque la mayoría de las preguntas no fueron respondidas, algunas sí contenían información para considerar. Por ejemplo, en la primera pregunta Crisanto escribió la siguiente expresión:


1. Luis tenía 8 canicas; jugando ganó algunas mas y ahora tiene 12. ¿Cuántas canicas gano? Escribe una expresión simbólica que represente la anterior situación, la cual le permita resolver el problema.

$8X + 4X = 12X$

Aquí pude apreciar que Crisanto resolvió la pregunta del problema, mas no dio una expresión correcta. Simplemente agregó a todos los números una x para decir que era una expresión algebraica. Para él la x representaba las canicas, pero tal vez le hubiese gustado usar una c; pero como el problema se tenía que resolver como una ecuación y las ecuaciones la mayoría de las veces llevan x, entonces la usó.

En este sentido Booth (1984) dice:

> Muchos alumnos nunca logran captar apropiadamente cómo se puede usar una letra para representar un número generalizado. Ellos tienen la tendencia a ver, digamos, $2m+3b$ como 2 manzanas más 3 bananos, usando las letras como unidades de medición y no como símbolos que pueden tomar diferentes valores: (dos veces el número de manzanas…).

Los otros estudiantes sólo respondieron que “Luis ganó 4 canicas” y no escribieron ninguna expresión algebraica que representara el problema.

Para la segunda pregunta de este taller, ninguno respondió lo que representaba la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$. Pero en la segunda parte, curiosamente dijeron que la n representaba el número de bolitas. Para ellos es imperceptible o tal vez insignificante la posición en que apareció cada arreglo de bolitas.

En la tercera pregunta de este cuestionario no respondieron nada, ya que argumentaban no encontraba relación alguna para inventarse algo. Tal vez porque hasta el momento no habían trabajado con dos ecuaciones al mismo tiempo.

Después de realizar estas actividades y de registrar los errores cometidos en cada una de ellas, posteriormente me centré en el sentido de la variable para ellos –asunto que desarrollo en el siguiente capítulo-.

Estudiando categorías

CAPÍTULO 3

Un concepto importante en el aprendizaje de las matemáticas, que causa mucha confusión entre los estudiantes y que debe tenerse en cuenta desde la escuela, es el de variable. Este es muy importante para el desarrollo del pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y analíticos propuesto en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), pues, además, es la base de otros conceptos fundamentales como la función, el límite, etc., y merece ser estudiado y comprendido por el docente.

Godino y Batanero, citadas por Rodríguez (2003), proponen una perspectiva semiótico-antropológica en didáctica de las matemáticas que parte de un análisis de la noción de significado desde un punto de vista didáctico: ¿qué significado atribuyen los estudiantes a los objetos matemáticos? Así, esbozan una teoría pragmática (en oposición a la realista) del significado de los objetos matemáticos, condicionados institucional, personal y temporalmente, y muestran la necesidad de la construcción de una semiótica específica que, en primer lugar, permita la descripción e interpretación de los sistemas de signos utilizados en las instituciones escolares; y en segundo lugar, establezca criterios básicos de actuación dentro del sistema didáctico con el fin de que los estudiantes comprendan "significativamente mejor" los contenidos matemáticos que el currículo establece como obligatorios.

El mirar el sentido que los estudiantes le atribuyen a determinado concepto matemático es importante para el docente, dado que él puede así replantear su práctica, reflexionar acerca de ella y repensar sus formas de enseñanza.

En este sentido, Rodríguez (2003) afirma que se pueden precisar medios de descripción de significados curriculares de objetos que van a ser enseñados en una determinada institución escolar, esto es, criterios de estructuración de gestos, técnicas, procedimientos, nociones y problemas asociados a un determinado objeto matemático y que constituyen su significado situacional (referido al conjunto de situaciones que es pertinente comprender y comunicar); de esta forma, se tendría un instrumento para la construcción de currículos y la elaboración de libros de texto.

En este capítulo quiero mostrar ese sentido y significado que los estudiantes le dieron a la variable, y lo expongo en tres categorías que consideré representativas y que fueron fruto del análisis reflexivo entre el marco teórico, mi opinión y los datos proporcionados por mis estudiantes.

Antes de ir a las categorías quiero aclarar que para mis estudiantes la noción de variable siempre fue entendida desde el punto vista de la letra, es decir, ellos relacionaban la variable con la letra que se usa en el álgebra, y para la mayoría la palabra variable significaba que “cambia” pero no el cambio que tiene en matemáticas sino el cambio en el contexto real, en otras palabras, es aquella cosa que no es permanente (en sus actos, en sus emociones, etc.) y que es el sentido de la palabra en el lenguaje coloquial.

Según Socas et al. (1989), el lenguaje oral que comúnmente utilizamos y por medio del cual podemos comunicarnos puede ocasionar ciertas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La dificultad radica en que el lenguaje ordinario puede ser usado para expresar emociones, dar opiniones, discutir cualidades o valores, mientras que el lenguaje matemático es más preciso y está sometido a reglas exactas. Esta situación fue la que llevó a estudiantes como Jancinto a expresar en la entrevista del 3 de diciembre de 2004 que

“Variable es como formas de cambiar… estados de ánimo, actos, etc.” (Entrevista, Jacinto; 3/Dic. /2004).

Es evidente que su respuesta estaba influenciada por el lenguaje coloquial; por ejemplo, en las frases como “el profesor tiene un estado de ánimo variable” o “en ese aspecto influyen muchas variables” se notan las influencias externas y el inconveniente y la dificultad que a veces generan estas relaciones equívocas.

Tulio e Isidoro expresaron de la palabra variable:

“es como que varía” (Entrevista, Tulio; 3 Dic. /2004).

que se podría llamar definición “de diccionario”. Así mismo,

“Como la palabra lo dice, la que varía, se encuentra o no se encuentra” (Entrevista, Isidoro; 3 Dic. /2004).

Señalo que son “definiciones de diccionario”, ya que se asemejan a ciertas definiciones que dan los diccionarios de “variable”. Por ejemplo, el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española define variable así: *que varía o puede variar. Inestable, inconstante y mudable*. Esta definición fue común entre la mayoría de los estudiantes, pero estas respuestas cambiaron de interpretación cuando se les sugirió desde el contexto matemático.

Aquí es oportuno decir que los estudiantes estaban dando un significado de variable desde el lenguaje coloquial, situación que no era substancial para los propósitos de mi investigación, pues quería ver cómo estaban interpretando la variable desde el contexto matemático. Entonces empecé a indagar sobre la variable desde dicho contexto.

> "A veces, los niños pueden pensar que una palabra en el lenguaje ordinario toma un significado misterioso cuando se emplea en matemáticas, o quizás ellos no entienden realmente su verdadero significado, en ambas situaciones." (Socas et al., 1989, p. 16).

> "Las palabras tienen para las matemáticas un significado muy propio y a menudo distinto del que comúnmente se les atribuye [en el lenguaje coloquial]". (Socas et al., 1989, p. 11).

Quiero añadir que desde el contexto matemático los estudiantes interpretaban la variable como la letra que se utiliza en álgebra. Esto no es del todo ajeno a la historia del uso de las letras como variables que procede de la geometría griega, donde la comunicación escrita del conocimiento geométrico requería del uso de figuras en las cuales los puntos eran señalados con las letras del alfabeto. En álgebra, generalmente, se utilizan letras para representar la variable. Así mismo expresaron los estudiantes el uso de las letras como variable, como bien lo expresaron Crisanto y Nacho en la entrevista:

> "Pues, lo que yo creo que es variable son las consonantes que se utilizan, por ejemplo la x". (Entrevista, 3/Dic. / 2004).

> "Variable es lo que uno trata de buscar en cada ejercicio… y entonces ¿eso a qué es igual? A esa variable, la letra". (Entrevista, 3/Dic. / 2004).

Considero aquí que los estudiantes asociaron la variable desde el contexto matemático como la **letra** que se utiliza en el trabajo algebraico. En consecuencia, la variable, de aquí en adelante, para este estudio será considerada como una letra según lo expresado por los estudiantes. Pero, entonces, ¿qué sentido les dan los estudiantes a las letras?

3.1 **La variable como "cosa"**

Un esfuerzo considerable ha sido realizado para investigar las razones establecidas en la dificultad de los niños para enfrentarse al nuevo uso de las letras introducidas en el estudio del álgebra. Tal vez el marco explicatorio más inmediato está dado por la experiencia aritmética de los niños en la escuela primaria. Por ejemplo, en la aritmética los niños han experimentaron que las letras podían denotar medidas: 10 m denota diez metros; en álgebra, tal expresión puede denotar diez veces un número no identificado.

Tradicionalmente, la experiencia de los niños con las letras en la escuela primaria está restringida a las ecuaciones tales como $A = l \cdot a$ (el área de un rectángulo) lo cual parece reforzar, tal como lo expone (Kücheman 1981), el uso aritmético de las letras como *l* para largo y *a* para ancho esta interpretación de letras como medidas parece explicar la tendencia del estudiante a tratar las variables numéricas como si fueran objetos en vez de números.

Indiscutiblemente, no cabe duda de que los estudiantes –mis estudiantes- le atribuyen a la variable la idea de algún objeto o cosa específica dependiendo del contexto del problema:

> "Para reemplazar el valor numérico de algo, como patas, cocos, monedas, etc." (Entrevista, Isidoro; 3/ Dic. / 2004).

> "Alguna unidad de medida, o algún objeto, o alguna ciudad para diferenciar o simbolizar" (Entrevista, Jacinto; 3/Dic/04).

> "Para decir que hay milímetros, metros o cualquier objeto". (Entrevista, Jacinto; 3/Dic. / 2004).

Puede ser que esta idea sea reforzada por esquemas de trabajo que se usan en la enseñanza, tales como el de "iniciación al álgebra" que ayudan a la memorización; por ejemplo, "$c = el\ número\ \ de\ \ caras$". Algunos niños no distinguen entre "c" para representar **caras** y "c" para representar el **número** de caras, y por eso leen expresiones tales como "$3c$", como "3 caras" en lugar de "3 veces el número de caras". Sin embargo, hay gran posibilidad de que esta idea particular esté relacionada con el uso de las letras en aritmética, donde "$3\,m$" significa "3 metros". Incidentalmente, la explicación de "manzanas y bananos" usada por el profesor (frecuentemente) en el aula para hacer ver que términos como $2m$ y $3b$ no son semejantes, puede también contribuir a esta confusión.

Retomando la respuesta de Isidoro, quiero recalcar que el sentido que él otorgó a la variable fue de un "objeto" o "cosa", como se aprecia en la respuesta. Pero si se examina un poco más esa respuesta, se observará que esta proviene de la influencia de los contextos de los problemas típicos que se resuelven en álgebra y que en días pasados a esa entrevista les llevé a clase. Fueron situaciones que se podían resolver haciendo un sistema de ecuaciones, tales situaciones involucraban en su texto efectivamente cocos, el número de patas en un cierto corral y el número de monedas que podría pagar por un animal.

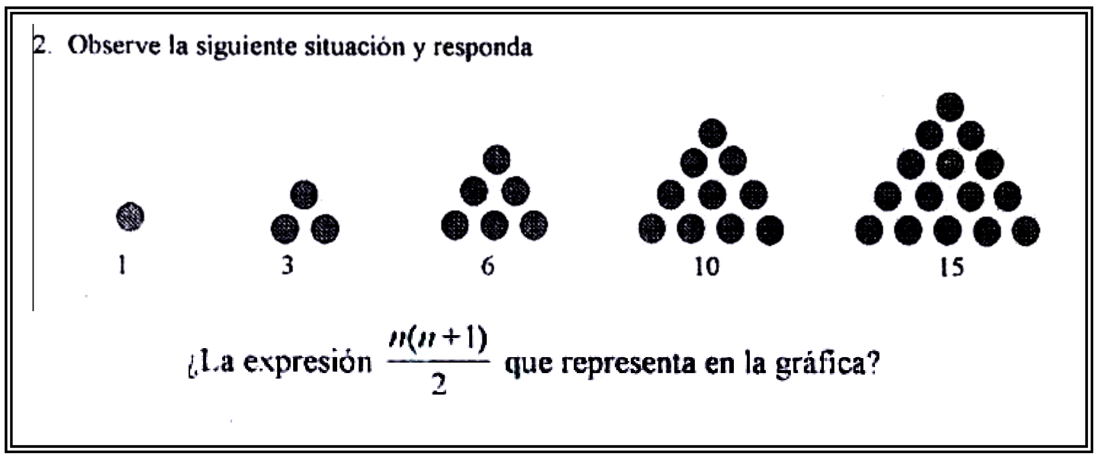
Los estudiantes, estaban en un proceso de significación, entendido, según Pino (1994), como la reelaboración y producción de significados, que se nutren de los posibles sentidos que las cosas (palabras, eventos, acciones, etc.) pueden tener para esas personas y que surgen de las relaciones discursivas (Pinto, 1997, p. 81)

Las palabras expresadas por los estudiantes mostraron que el sentido que le dieron a la variable (vista como la letra) fue de una "cosa" u "objeto", que para ellos les pudo surgir de la experiencia pasada (aritmética escolar) y del intento del profesor por negociar ese significado de la variable en el proceso de enseñanza.

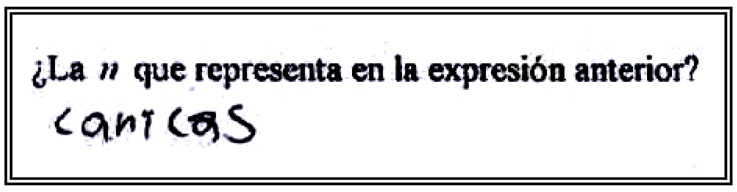
Además, pude notar que este sentido de variable como "cosa" u "objeto" lleva al estudiante a pensar siempre en la idea de que toda letra que esté en una expresión algebraica tiene asociada una "cosa". En el caso de que el enunciado del problema no exista algún objeto, entonces es ellos piensan que la letra representa cualquier "cosa", pero caso contrario ocurre cuando trabajan con situaciones donde en el texto existen "objetos" o "cosas" (monedas, camisas, etc.); entonces las letras representan esas "cosas", y por lo general la letra representativa es la inicial del nombre de la "cosa".

Es decir, en el caso de situaciones como $2p+3m$ la p y la m representan cualquier "cosa" (peras, pepas, melones, manzanas, etc.) pero en casos donde aparezcan situaciones como "en un barril caben 3 galones", la expresión que comúnmente los estudiantes escribirían es $1b=3g$ que claramente es una expresión equívoca. Esta expresión es una traslación directa del lenguaje usual a una forma abreviada, no a una expresión algebraica, ya que vieron las letras b y g como unidades (barriles y galones) y no como número generalizado. Situación que da lugar a errores.

Por ejemplo: en el Taller Dos pude ver que los estudiantes, cuando le dieron este sentido a la variable de "cosa", respondieron la segunda pregunta:



Así:


¿La n que representa en la expresión anterior?
canicas

Donde claramente la n no representaba canicas, pero, como eran bolitas de una secuencia, ellos lo vieron así.

Quiero agregar que este sentido que le dan a la variable de “cosa” es también porque cada palabra que pronunciaron estaba cargada de múltiples voces ajenas y propias que influyeron en la respuesta a la pregunta sobre variable. Esas voces ajenas pudieron provenir de los profesores, compañeros, padres de familia, en fin de la interacción social a la que está expuesto el estudiante.

En los intentos por analizar el sentido que los estudiantes le otorgan a la variable en matemáticas, me fue útil explorar algunos conceptos bajtinianos en la lectura de entrevistas, los cuales quiero precisar a continuación; en primer lugar, “polifonía”:

La noción de “polifonía” fue trabajada por Bajtín en el marco de sus análisis sobre los personajes de Dostoievski. Esta concepción ha sido rescatada por diversas tendencias de la lingüística que privilegian el estudio de la enunciación como un acontecimiento nuevo e irrepetible donde el “yo” se apodera e instaura en el discurso.

Para Bajtín (1934), un enunciado no se agota en sí mismo, no encuentra sus objetos en una relación unívoca, sino en una pletórica multivocidad. Lo interesante de esta aproximación es que nos abre en la búsqueda de significación y de sentido “actual” a la multiplicidad, a ese “plurilingüismo social” que se forma en torno a cualquier objeto, a esa red compleja de relaciones, de variaciones, acentos ajenos, a la pregunta por esa activa participación en el diálogo social en el cual todo enunciado se produce ([…]todo enunciado vivo[…] no puede dejar de tocar miles de hilos dialógicos vivos, tejidos alrededor del objeto de ese enunciado por la conciencia ideológica-social […] Porque tal enunciado surge del diálogo como su replica y continuación, y no puede abordar el objeto proviniendo de ninguna otra parte (Zavala, 1996, p. 63).

Volviendo a los estudiantes, esta idea de Bajtín se vio reflejada en las respuestas, ya que, por ejemplo, Nacho en unas de las entrevistas dijo:

> "Digamos que uno puede entender las cosas en álgebra recordando que yo tuve 12 carros o algo así (12c) […] Y entonces uno puede verlo mas allá y no tiene que verlo como que tiene que ser un ejercicio con letras y todo eso. Uno lo ve diferente, para aprender de otra manera" (Entrevista; 3/ Dic. / 2004).

Aquí se puede notar que varias voces influyen en la respuesta de Nacho. Una multiplicidad de voces: "relacioné todo con la experiencia en la vida", "la clave es verla (el álgebra) sin letras", "traté de verlo diferente", y es que estas palabras no son propias, son voces ajenas, quizás voces de los padres, familiares, profesores y compañeros en intentos por ayudarles en el aprendizaje del álgebra.

Uno de los constructos más básicos de Bajtín es el de dialogicidad, implicado por su noción de direccionalidad como "cualidad de dirigirse a otro", sin la cual el enunciado no puede existir. Ello involucra la situación o contexto enunciativo, de manera que la relación entre las enunciaciones y el escenario socio-histórico ha de ser considerada en las producciones de significaciones. De esta manera, es ese carácter, relacional del lenguaje lo que hace que estemos marcados por las palabras de otros (Bajtín, 1934). Más que solo imitación o reproducción, Bajtín ve un desarrollo creativo de la palabra ajena, que por ello, es siempre semiajena, semipropia.

Según Bajtín (1979), mencionado por Rivero (2003), la comprensión está indisolublemente unida a una respuesta, sea de objeción o de consentimiento, comprensión que considera, pues, al hablante, de lo cual se desprende que toda comprensión es dialógica. De allí que afirme que lo característico y constitutivo del enunciado es su "orientación hacia alguien":

un enunciado tiene autor y destinatario, y es justo lo que lo diferencia de las palabras y oraciones, unidades significantes que son, por el contrario, “impersonales, no pretenden a nadie y a nadie están dirigidas (Bajtín 1979, mencionado en Rivero, 2003).

Esta idea de dialogicidad también se notó en mis estudiantes, cuando Nacho expresó: “Para mí esa letra representa un gran reto, porque cuando el profesor la escribe, yo me pongo a imaginar cómo lo hago” Esta expresión adquiere notoriamente un destinatario (el profesor), ya que el estudiante trató de demostrar su responsabilidad con el estudio del álgebra.

Finalizo esta categoría reiterando que algunos estudiantes dan sentido a la variable como algún “objeto” o “cosa” (cocos, peras, etc.), aquí las letras son aún ideas de un simple nombre. En esta dirección, las letras como “objetos” o “cosas” reducen el significado de la variable. Este hecho fue visible en el momento de trabajar con situaciones-problema en donde se involucran objetos (lápices, carros, monedas, etc.). Es decir aquellos problemas que acostumbramos a trabajar en álgebra -en una papelería empacaron 28 lápices en cajas con 4 lápices y cajas con 6 lápices […] -, por ejemplo.
Cabe anotar que los estudiantes no distinguen entre los objetos mismos y su cantidad; en otras palabras, la letra representa para ellos el objeto, mas no la cantidad de objetos que se tengan.

3.2 La variable: “letra acompañante”, escolta

Algunos estudiantes ven las letras en ciertas ocasiones como “acompañantes”, y tienden a ignorarlas como entes matemáticos y a pensar que no juegan un papel importante en la expresión; por el contrario, piensan que sólo importan los números que ellas tengan (coeficientes).

Esto fue muy visible en mis estudiantes; por ejemplo, cuando se le preguntó a Isidoro sobre la utilidad de las letras en el álgebra, él dijo:

> “Para acompañar el número” (Entrevista, Isidoro; 3/Dic/04).

Es claro que aquí Isidoro le dio sentido a la variable como una decoración, y lo reafirmó cuando se le pregunta ¿Qué puede ser la m en esta expresión $10m + 20m = 30m$?

> “Algo que acompaña a los números” (Entrevista, Isidoro; 3/Dic/04).

Isidoro recalcó que la letra es “lo que está demás” para que una expresión esté completa. Para él los números (en álgebra) debían ir acompañados o adornados por una letra porque pensaba que esa era la gran diferencia con la aritmética. Además, cuando se le preguntó por la representabilidad de las letras en álgebra, justamente dijo:

> “[…] es como que se necesitan dos números para que sea una cifra correcta” (Entrevista/ Isidoro/ 3/Dic/04).

Con esto Isidoro mostró que necesita ver números entre las letras, para aceptarla como una expresión válida; para él, si sólo aparecieran letras en una expresión algebraica, esta no sería reconocida como tal. Por ejemplo, en la expresión $n + m = p$ él se preguntó: ¿cuántas “enes” “emes” y “pes” hay? Ya sé, una de cada una, ¿verdad?

Algo similar ocurrió con Tulio, en la pregunta ¿qué puede ser la m en esta expresión: $10m + 20m = 30m$? Afirma:

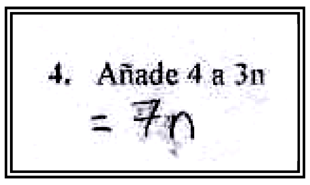
"Que sumando 10+20=30 y la m la ponen ahí para completar" (Entrevista, Tulio; 3/Dic/04).

En la frase anterior Tulio está concibiendo el álgebra como una aritmética con letras, es decir, para él las letras que se usan en álgebra son simplemente unas acompañantes de los números las cuales hacen la mayor diferencia entre álgebra y aritmética. Además, porque aparentemente la respuesta a 10m+20m en realidad es 30m, situación que hace pensar al estudiante que la manera como está pensando es la correcta.

En esta respuesta el sentido que el estudiante estaba atribuyendo a la variable podía pasar inadvertido por el profesor, ya que generalmente el interés es verificar si la respuesta es correcta o no. Esto sucede entre otras cosas porque en nuestra práctica como profesores, cuando les ponemos a los estudiantes una situación, tenemos la tendencia a verificar la certeza de respuesta sin detenernos a mirar como está pensando el estudiante. Esto hace que los estudiantes se "inventen" reglas para el álgebra, que son reforzadas involuntariamente por el profesor.

> Los estudiantes pueden declarar que las letras representan números, pero a pesar de ello, las manejan como entes especialmente cuando simplifican expresiones como $2a + 3b + 4a$, donde ellos no interpretan las letras como tal, sino que simplemente inventan reglas como "sumar los números y luego escribir las letras", obteniendo respuestas a la pregunta anterior, como $9ab,\ 9aba,$ o inclusive $10ab$ (incluyendo 1 por la a extra). (Booth, 1984, p. 132).

Este sentido que los estudian dan de "acompañante" a la variable hace que respondan:



Como lo pude notar en la respuestas del Taller Uno.

En esta categoría, pues, se observa que los estudiantes vieron la variable como un “acompañante”, situación que se deriva de la aritmética en lo que se supone dar una respuesta bien dada. Es decir, para ellos una respuesta bien dada es responder $5x$ a una expresión como $3x+2$, donde no importan las letras: simplemente se suman los números y la letra se coloca para acompañar, ya que para ellos $3x+2$ es una respuesta inconclusa que no puede ser aceptada como tal.

3.3 La variable como “número escondido”

Sin querer que esto se tome en serio, ¡el álgebra ha sido definida como el estudio de la letra número 26 del alfabeto!
Mason (1999, p. 76)

Esta categoría es más frecuente en los estudiantes, pues le dan sentido a la variable como una “incógnita” que siempre hay que encontrar, o, lo que es más sorprendente, que es la razón del álgebra.

Los estudiantes piensan que una letra siempre representa un sólo valor particular que tiene que ser hallado, como en $x+5=8$. Los estudiantes no comprenden que existe la posibilidad de que la letra represente números en general, como en la siguiente igualdad $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donde x puede ser un número real.

Esta situación fue retomada por los estudiantes:

> “Variable es lo que uno trata de buscar en cada ejercicio. Es lo que uno busca haciendo ese ejercicio. Es como el resultado, lo que existe entre ese ejercicio que estamos buscando, y entonces ¿eso a qué es igual? A esa variable” (Entrevista, Nacho; 3/Dic/04).

Pero no sólo dijeron que la variable es una incógnita, sino que también trataron de decir que siempre que aparezca la x, esta es una incógnita; por ejemplo:

> “Pues, lo que yo creo que es variable son las consonantes que se utilizan, por ejemplo la x, y el valor que tiene que encontrar por cada letra” (Entrevista, Crisanto; 3/Dic. / 2004).

No sólo en las entrevistas los estudiantes manifestaron que la variable representa una incógnita; también en el Taller Uno aplicado se pudo notar este sentido:

Si e+f= 8, e+f+g= 10

En esta respuesta Crisanto claramente encuentra un valor para g (2), que el ejercicio no establecía. Se nota el afán de Crisanto por encontrarle un valor a la g. Es decir, él esta viendo la letra g como una "incógnita" que necesita ser encontrada para dar solución.

Esta misma situación se presentó en Isidoro cuando escribió:

Si e+f= 8, e+f+g= 15

Aunque esta respuesta es diferente, guarda bastante semejanza en el sentido que le dio a la variable, ya que Isidoro también buscó un valor para la g, y en su interés por encontrar ese valor recurrió a la posición de la letra g en el alfabeto (la séptima); circunstancias que evidencian que los estudiantes le dan sentido a la letra como una "incógnita".

Este sentido que le he dado a la variable no es del todo ajeno al sentido descrito en la historia de las matemáticas: cuando se empezó a desarrollar la aritmética pura y la algebrización, se empezaron a utilizar los primeros símbolos matemáticos y las primeras palabras inventadas; a estas se les designó como "*cosa*", mientras los autores de los escritos matemáticos las llamaban "cositas". La palabra "cosa" procede de la denominación dada a la cantidad buscada, aquella que se había de determinar de las ecuaciones. En latín se dice *res*, en italiano *cosa*, en alemán $co\beta$[3]. Poco a poco se fueron introduciendo los primeros signos de forma obligatoria, comenzando con los de las primeras potencias de las variables y los de las operaciones de la adición y sustracción. La *cosa* experimentó un floreciente desarrollo en sus símbolos, lo que desembocó en la algebrización.

[3] Tomado de Wussing H. (1998) *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid. Siglo Veintiuno Editores.

Volviendo a las respuestas y justificaciones de los estudiantes, para Nacho el sentido de variable como incógnita fue bastante notorio, pues

> “Puede ser un número que uno no llega a conocer, pero que eso vale algo. Pues que esas letras representan un número […] que vale algo, pero que no se saben hasta que se tenga resuelto el ejercicio” (Entrevista, 3/Dic. / 2004).

Este sentido que los estudiantes le dieron a la variable puede ser explicado porque nosotros como profesores acostumbramos describir la x con un sinnúmero de palabras diferentes, como incógnita, dependiente o independiente, letra, parámetro, casilla, etc. y que en la mayoría de las veces no las usamos apropiadamente, causando confusión entre los estudiantes:

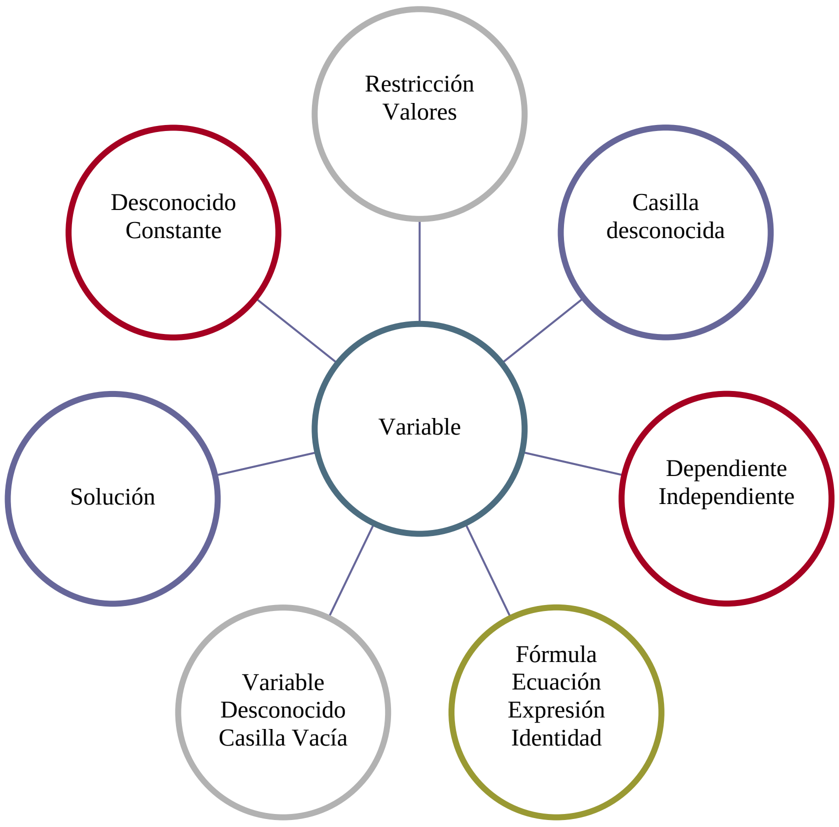
x *toma …*	*el valor de x…*
x *viene a ser…*	x *representa …*
x *es …*	x *es cualquier …*
sea x *…*	x *es un …*
si x *es igual a …*	

Según Mason (1999), hay una variedad de expresiones alrededor de la x, probablemente porque es difícil definir exactamente lo que queremos significar; por eso usamos un número diferente de palabras para así poder acercarnos a lo que realmente queremos decir. El único acercamiento razonable en tales circunstancias es ser honrado con los estudiantes y admitir que es difícil ser preciso.

Cualesquiera que sean las palabras usadas para hablar acerca de la idea de una variable, es de utilidad tener en mente las concepciones erradas más comunes de los estudiantes, que habitualmente se producen por una confusión del lenguaje.

Por esto creo conveniente en esta instancia aclarar estas palabras (parámetro, dependiente, o independiente, etc.) y algunos de los usos más comunes que nosotros como profesores le damos a la letra x cuando intentamos negociar su significado.

Mason (1999) muestra en el siguiente diagrama una forma de agrupar las diferentes palabras alrededor de la idea central de variable:



A continuación presento algunos comentarios relacionados con las diferentes formas de considerar la x que surgen de los agrupamientos anteriores:

Fórmula, ecuación, expresión, identidad.

Estas palabras se aplican en los contextos en los cuales x es, con frecuencia, usada como variable.

Solución.

Las variables –y particularmente la x – son usadas para obtener soluciones de problemas, una vez que el problema ha sido expresado en términos algebraicos. Existe la tendencia a relacionar la aparición de la x con solución; inclusive ella ha sido usada únicamente para expresar una generalidad.

***Dependiente e independiente*.**

Estas palabras son adjetivos que describen usos particulares de la x. Su uso tiene origen en la práctica de especificar una función de la forma "y = expresión en x". A menudo no es claro cuál letra debe tomar valores en el domino de la función, y cuál nos da los valores de la imagen. La variable independiente corresponde al dominio de una función, y la dependiente a los del codomino. Estas establecen distinciones que son particularmente relevantes en la solución de ecuaciones y en el trazo de curvas. Las nociones de dependencia e independencia son curiosas, porque asumen un conocimiento existente de lo que una variable representa o de los valores que puede tomar. Una situación como

"exprese x en función de y…"

está realmente probando la competencia de los alumnos en la manipulación de ecuaciones, pero tiene la intención de llegar hasta el cambio de percepción que surge de

ver x como la variable *independiente* en $y = 2x + 3$

y

ver la x como la variable *dependiente* en $y = 2x + 3$.

Puede que le guste considerar qué es lo que la x debe representar cuando aparece en estos contextos (no simplemente si a ella se le aplica el adjetivo dependiente, sino cuál es el papel que la x desempeña en la pregunta como un todo).

Desconocido y constante.

De igual forma estos términos son como lados opuestos de un espectro. Al igual que la palabra variable, ellos describen diferentes formas de pensar sobre una letra que representa un número. *Constante* implica que el número representado es fijo (pero luego, cuando la ecuación se está solucionando, no hay la percepción de que la solución “cambie” ¡inclusive en el caso de que el valor desconocido esté representado por lo que llamamos una variable!). ¡Con razón los alumnos se confunden!

Hasta cierto punto tenemos una concepción de una variable como algo que no es constante. También hay una percepción de que la x es conocida, pues este es el nombre que le damos a lo desconocido en nuestro intento de capturar algo misterioso. Al darle el nombre de x obtenemos cierto poder sobre ella porque podemos manipularla poniéndola en diferentes expresiones. A medida que tratamos de limitar el alcance o rango de su variabilidad, como cuando resolvemos ecuaciones, ella puede acumular propiedades y atributos. Existen tantas confusiones inducidas por las palabras “conocido” y “desconocido”, tanto en el aspecto psicológico como en el aspecto semántico, que parece sabio tratar de evitar estos nombres completamente.

Símbolo, notación.

Hay una confusión clásica entre lo que es un símbolo y lo que él representa. En otras palabras, entre el nombre de una cosa y la cosa misma. Esta confusión no se presenta únicamente en matemáticas, pero es particularmente común en matemáticas por nuestra tendencia a abstraer, y luego tratar nuestras abstracciones como objetos que luego deben manipularse.

Variable, desconocido, casilla vacía.

¿Qué es lo que se desconoce de la x? ¿Son realmente los valores de x, o es algo diferente? La palabra *variable* invoca una asociación con *cambio*, pero, ¿qué está cambiando? No es tanto un cambio real –como cambio potencial- lo que queremos capturar cuando usamos x. La palabra “desconocido” entra aquí en un intento de capturar (una metáfora interesante) el sentido del cambio potencial, de la no-especificidad, de la variabilidad que queremos significar con el uso de la variable x. Los términos “conocido” y “desconocido” producen todo tipo de confusión.

Restricción, valores.

Parece que el uso de los adjetivos conocido y desconocido depende en gran parte de la experiencia y habilidad de la gente que está involucrada en el trabajo. Hay una tendencia de hablar de la x como conocida, si limitamos sus valores a uno particular, que nosotros conocemos –usualmente la solución de una ecuación-. Se puede notar que en el uso de la expresión “la solución” siempre estamos buscando o esperando una respuesta definida y simple a las preguntas.

A modo de cierre

El álgebra escolar es una fuente de confusión para la mayoría de los estudiantes y es considerada por muchos como “la piedra en el zapato” en la experiencia con matemáticas durante sus años escolares. En la enseñanza y aprendizaje del álgebra se encuentra una gran variedad de dificultades que pueden agruparse a grandes rasgos en los siguientes tópicos:

1. Dificultades debidas a la naturaleza del tema algebraico dentro del contexto de las matemáticas.
2. Dificultades que surgen de los procesos del desarrollo cognitivo de los alumnos.
3. Dificultades atribuibles a los métodos y organización de actividades para la enseñanza.

El conocimiento de los errores básicos en el álgebra es importante para el profesor, porque lo provee de información sobre la forma en que los estudiantes interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esta información le sugiere formas de ayudar a los estudiantes a corregir dichos errores, y al mismo tiempo, las posibles causas de las dificultades de los chicos para aprender álgebra.

Como bien se mencionó anteriormente, el concepto de variable es importante en el aprendizaje de las matemáticas; aunque cause mucha confusión entre los estudiantes, debe tenerse en cuenta desde la escuela. Además, es importante porque es la base de otros conceptos fundamentales en matemáticas como la función, el límite, etc., y merece ser estudiado y comprendido por el docente.

Por otro lado, las respuestas de los estudiantes no deben pasar desapercibidas por parte del profesor, ya que ellas tienen una justificación, es decir, para ellos la respuesta a un pregunta matemática esta basada en algún hecho anterior que hace que respondan de esa manera. El papel del profesor es tratar de indagar en el porqué de la respuesta, y no simplemente rechazarla señalándola con una X roja que indica respuesta errada.

Como bien se notó a través de la experiencia, el sentido que los estudiantes le dieron a la variable siempre estuvo permeado por el contexto. Para la mayoría, la palabra variable significaba que "cambia", es decir, aquella cosa que no es permanente (en sus actos, en sus emociones, etc.), que es el sentido de la palabra en el lenguaje coloquial. Pero le daban sentido a la variable como una letra en el contexto matemático.

Estudiando el sentido de variable en el contexto matemático y el análisis cualitativo realizado sobre la información que permitieron desarrollar la investigación, pude establecer tres categorías de cómo los estudiantes le dan sentido a la letra: como "cosa", es decir objetos (manzanas, camisas, etc.); como "acompañante", en donde a la letra (variable) le otorgan el sentido de una letra que "acompaña los números", ya que se inventan reglas como "sume los números y luego escriba la letra"; y, por último, los estudiantes le dieron sentido a la variable como un "incógnita" a la que, para ellos, siempre hay que encontrarle el valor numérico.

Quiero anotar aquí que durante esta experiencia pude ver que la mayoría de los errores cometidos en el álgebra por parte de los estudiantes son causados por la mirada errónea que uno como docente tiene hacia el álgebra. Solamente centrándose en la presentación de expresiones algebraicas (representaciones simbólicas prefabricadas[4]) y en el dominio de reglas para manipular dichas expresiones, y que simplemente nos preocupamos por "enseñarlas" en el grado octavo o séptimo.

[4] Con la palabra prefabricada quiero dar a entender que las expresiones que son dadas por nosotros los docentes al inicio del trabajo algebraico, sin notar que el estudiante no tiene idea de dónde surgen tales expresiones y menos reconocen la conexión que estas pueden tener con las ideas matemáticas que ellos tienen.

De esta experiencia puede concluir que el álgebra no puede considerarse como un paquete separado que se inicia una vez haya terminado la lista de contenidos, que supuestamente corresponden al programa de aritmética o geometría, ya que no considero que se puedan trazar líneas limítrofes entre la enseñanza de la aritmética y la geometría y la enseñanza del álgebra, pues el conocimiento algebraico está enclavado en todo el conocimiento matemático. La construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años del ciclo básico, desde el preescolar, como lo advierte Mason (1999).

Igualmente este trabajo me permitó tomar un cierto distanciamiento de la idea expuesta por Rojas et al. (1997) sobre “una transición” entre aritmética y álgebra, contemplada en un periodo de tiempo escolar (sexto, séptimo y octavo grado), como lo expresan Rojas et al. (1997) en su reporte de investigación:

> Son varios los problemas que se presentan en la transición aritmética-álgebra. En este capítulo se hará referencia a algunas de sus manifestaciones generales, en cuanto ubicadas dentro de aspectos que engloban los problemas referidos, particularizando los que desde el trabajo del Grupo PRETEXTO[5] se han caracterizado bajo el nombre de Problemas puntuales en la enseñanza de las matemáticas”, las cuales, si bien no aparecen explícitamente en los momentos de transición, grados sexto a octavo, determinan en una alta medida la posibilidad de comprensión tanto de la relación entre aritmética-álgebra, como del álgebra misma. (Rojas y otros,1997, p. 19).

Aquí manifiesto mi desacuerdo, ya que el álgebra tiene sus raíces bien profundas en la aritmética escolar, y el álgebra no pertenece a un grado específico del tiempo escolar (sexto, séptimo y octavo). La idea expuesta de transición sería mejor entendida desde el punto de vista de que esa transición comienza con el trabajo matemático en los primeros grados (desde preescolar) y se va potenciando hacia los grados superiores.

[5] Grupo PRETEXTO (1996). *La variable como problema puntual. Búsqueda de causas en octavo grado.* Informe proyecto de investigación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Colciencias. Bogotá.

En este sentido Godino (2004) afirma:

> En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar. Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato. En el “álgebra escolar” se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

Es decir, el álgebra se empieza a posibilitar en los niños desde temprana edad, por lo cual se hace necesario empezar a replantear las formas de enseñanza de la matemática en los primeros grados.

De igual forma, este trabajo le deja muchas reflexiones a mi práctica profesional como docente. Una de esas es que me permitió tener una visión ampliada del álgebra como instrumento de modelación matemática, característica que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, y me cambió la visión reducida el álgebra como una aritmética generalizada. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos, se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones e identificación de patrones son propios de los primeros niveles de algebrización y, como pude ver, se pueden, y deben, iniciar desde la educación primaria.

Por último, quiero señalar que este trabajo es apenas un punto de partida para otras investigaciones que quieran preguntarse por la dificultades que surgen de los procesos del desarrollo cognitivo de los estudiantes y de la estructura y organización de sus experiencias. Y también el trabajo puede ayudar en los procesos de formación de profesores.

Referencias bibliográficas

Agudelo C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Booth L. (1984). *Álgebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Bershire: NFER-Nelson publishing company Ltd.

Campos R. & Giménez J. (2000). "Sobre el sentido aritmético y algebraico". En Ramírez M. (Ed.) *Formarse para la enseñanza de las matemáticas*. (pp. 59-69) Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Godino J. (2004). "Matemáticas para maestros". Recuperado el 12 de diciembre de 2005, del sitio Web de la página personal del autor en la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino J. & Llinares S. (1999). "El interaccionismo simbólico en la educación matemática". Revista *Educación Matemática*, Vol. 12, nº 1: 70-92.

Jaimes M. (2004). *Propuesta para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes de octavo grado*. Tesis de especialización no publicada. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Kücheman D.E. (1981). "Álgebra". En K. M. Hart (Ed.): *Children´s understading of mathematics,* (pp. 11-16). John Murray, Londres.

Lüdke M., André M. (1986). *Pesquisa em educaçao: abordagens cualitativas.* EPU, Sao Paulo.

Mason, Graham, Pimm, Gowar (1999). *Raíces del álgebra y Rutas hacia el álgebra*. (C.Agudelo, Trad.) Tunja, Colombia. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1988)

Pinto R. A., (1997). *Erros e dificultades no ensino da álgebra: o tratamiento dado por profesoras de 7ª série en aula*. Tesis de maestría. Universidad Estadual de Campinas. Brasil.

Pinto R. A. & Fiorentini D. (1997, 10 julio). *Cenas de uma aula de álgebra: Produzindo e negociando significados para "a coisa". Zetetiké*, Vol. 5, Nº 8, pp.45-71.

Rojas P., Rodríguez J., Romero J., Castillo E. & Mora L. (1997). *La transición de la aritmética-álgebra*. Bogotá, Colombia. Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rodríguez M. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Tesis de doctorado. Universidad Pública de Navarra. Pamplona, España.

Rivero I. (2003). "Intertextualidad, polifonía y localización en investigación cualitativa" *Athenea Digital*, 3, 1-13. Recuperado el 12 de enero de 2005, en http://antalya.uab.es/athenea/num3/rivero.pdf

Socas M. Camacho M. Palarea M. & Hernández J. (1989) *Iniciación al álgebra.* Editorial Síntesis. Madrid.

Zavala I. M. (1996). *Escuchar a Bajtín.*: Novagrafik S. A., España.