LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS DE CONTINUOS

PEDRO NEL JAIMES JAIMES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2015

LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS DE CONTINUOS

PEDRO NEL JAIMES JAIMES

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2015

AGRADECIMIENTOS

Primero, agradecerle sinceramente a mi orientador de Tesis, Dr. Javier Enrique Camargo su dedicación, esfuerzo, sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar y su paciencia ya que han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo y para mi formación como investigador.

A mi madre, María Elisa Jaimes por haberme proporcionado la mejor educación y lecciones de vida. A todos mis familiares, por su apoyo. En especial a mi abuelo Celiano Jaimes y a mi tía Helida Jaimes, por haberme enseñado que con esfuerzo, trabajo, honestidad y dedicación todo se puede conseguir en la vida.

A mis compañeros de Maestría, por las risas, el vacilón en la sala, por el apoyo y por sus conocimientos que hicieron de esta experiencia una de las mejores. En especial a Jairo Orlando Valbuena ya que ha sido no solo un buen compañero de estudio y de juego de ajedrez sino un gran amigo en quien se puede confiar.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

RESUMEN

TÍTULO: LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS DE CONTINUOS*

AUTOR: PEDRO NEL JAIMES JAIMES**

PALABRAS CLAVES: continuo, función semicontinua superiormente, límite inverso generalizado.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Dado X un espacio métrico y compacto, definimos el conjunto $2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}$. Sean X e Y continuos y $F\colon X \to 2^Y$ una función. Decimos que F es semicontinua superiormente en un punto p de X, si para cada abierto V de Y tal que $F(p) \subset V$, existe un abierto U de X tal que $p \in U$ y $F(x) \subset V$ para cada $x \in U$. Diremos que F es semicontinua superiormente si lo es en cada punto de X. Sean $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa, donde $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ es una función semicontinua superiormente para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, definimos el límite inverso generalizado de la sucesión inversa $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ como: $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$.

El espacio $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ lo consideramos como subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Además, no es difícil demostrar que $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es compacto.

El propósito de este trabajo es estudiar propiedades de los límites inversos generalizados de continuos. Nuestro trabajo está compuesto por cuatro capítulos:
En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar nuestro trabajo.
El Capítulo 2 mostramos las condiciones suficientes para que el límite inverso generalizado sea conexo.
En el Capítulo 3 estudiamos características de la dimensión de continuos obtenidos a partir de límites inversos generalizados.
Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos límites inversos generalizados de una familia de funciones semicontinuas superiormente definidas sobre el intervalo $[0, 1]$.

*Proyecto de grado
**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Dr. Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: GENERALIZED INVERSE LIMITS OF CONTINUOUS[***]

AUTHOR: PEDRO NEL JAIMES JAIMES[****]

KEYWORDS: continuum, upper semicontinuous function, limit inverse generalized .

DESCRIPTION:

A continuum is a metric space, compact, connected and different empty. We gave X be a metric compact space, define the set $2^X = \{A \subset X| \ A$ is compact and $A \neq \emptyset\}$. Let X and Y continuous and $F\colon X \to 2^Y$ a function. We say that F is upper semicontinuous at a point p of X, if for every open V of Y such that $F(p) \subset V$, there exists an open U of X such that $p \in U$ and $F(x) \subset V$ for each $x \in U$. We say that F is upper semicontinuous if it is at each point of X. Let $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ a inverse sequence, where $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ is an upper semicontinuous function for each $i \in \mathbb{N}$. Then, we define the inverse limit generalized of the inverse sequence $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ as $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1})$ for all $i \in \mathbb{N}\}$.

The space $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ we consider it subspace of the product space $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Moreover, it is not difficult show that $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ is compact.

The purpose of this paper is to study properties of inverse limits generalized of continuous. Our work consists of four chapters:
In chapter 1 we present the definitions and results we need to develop our work.
In chapter 2 we show the sufficient conditions for the inverse limit generalized is connected.
In chapter 3 study dimension characteristics obtained from continuous inverse limits generalized.
Finally, in Chapter 4 inverse limits generalized study of a family of upper semicontinuous functions defined over the interval $[0, 1]$.

[***] Graduation project
[****] Faculty of Science. Department of Mathematics. Director Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

Introducción

El estudio de los límites inversos de continuos tiene una larga historia. La noción de límite de una sucesión inversa aparece por primera vez, en una forma ligeramente diferente, en 1929 por el reconocido matemático soviético Paul Alexandroff. Dos años más tarde, Solomon Lefschetz presenta la definición de límite inverso que es manejada hoy en día por investigadores y estudiosos del tema. Posteriormente, en los años 30´s, el matemático holandés Hans Freudenthal fue quizás el primero en estudiar formalmente las propiedades de sucesiones inversas y el límite inverso inducido por tal sucesión.
De esta manera los límites inversos de continuos se convirtieron en una herramienta para construir espacios con propiedades topológicas interesantes a partir de espacios y funciones continuas "sencillas". Solamente por mencionar un ejemplo, tomando la circunferencia unitaria S^1 en el plano complejo y la función elevar al cuadrado, generamos un grupo topológico conocido como solenoide diádico $\sum_2$ el cual es un continuo indescomponible (ver Teorema 1.12) donde todo subcontinuo propio es un arco [15, Definición 2.8].
Hoy en día todavía encontramos investigaciones novedosas sobre límites inversos; un ejemplo de esto son los trabajos de W. T. Ingram y W. S. Mahavier (ver [10] y [14]) donde introdujeron el concepto de límite inverso generalizado de una sucesión inversa $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$, donde cada $f_i \colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ es una función semicontinua superiormente como $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$. Ingram y Mahavier presentaron en [10] condiciones suficientes para que el límite inverso generalizado de continuos sea un continuo; también, mostraron algunos ejemplos donde ciertas propiedades que se preservan con los límites inversos usuales, no se preservan con límites inversos generalizados. Particularmente, sabemos que la dimensión se preserva en los límites inversos usuales (ver [3, pág. 19] y [2, pág. 261]), pero en los límites inversos generalizados esto no siempre se cumple, estudiaremos esto en el capítulo 3, de hecho existen preguntas abiertas en torno a este tema [10, Sección 6].
Cuando tenemos construcciones funtoriales, es natural estudiar qué tipo de propiedades se preservan. En esta tesis, estudiaremos la preservación de algunas pocas propiedades topológicas, principalmente, nos enfocaremos en la conexidad y dimensión.
El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1, realizamos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre los límites inversos usuales y sus propiedades.

El Capítulo 2 está dividido en dos secciones. En la primera sección mostramos las condiciones suficientes para que el límite inverso generalizado sea un continuo. También construímos ejemplos que muestran cuando los límites inversos generalizados no son conexos. En el capítulo 3 estudiamos características de la dimensión de continuos obtenidos a partir de límites inversos generalizados. Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos límites inversos generalizados de una familia de funciones semicontinuas superiormente definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ y presentamos algunas preguntas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados de topología general, particularmente en la teoría de continuos, que usaremos a lo largo de este trabajo. Todas las definiciones que establecemos en este trabajo serán dadas en el contexto de los espacios métricos compactos y conexos, a los que llamamos *continuos*.

1.1. Notación

Empezamos introduciendo la simbología que, aunque es muy usada en libros de teoría de conjuntos y topología general, es importante tener en cuenta:

- $\mathbb{N}$: El conjunto de enteros positivos;
- $A \setminus B$: Es la diferencia entre dos subconjuntos de un espacio X;
- $A \subset B$: A es un subconjunto de B (puede suceder que $A = B$);
- $f|_A$: Es la restricción de una función f a un subespacio A de su dominio;
- $\overline{A}$: Es la cerradura del conjunto A con respecto al espacio X.

Algunos otros símbolos que usaremos, que requieren una definición, los introduciremos en su momento.

1.2. Continuos

En esta sección, introducimos los conceptos de la teoría de continuos que serán necesarios para afrontar los objetivos que nos propusimos desarrollar.

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Algunos ejemplos de continuos son un *arco* el cual es un continuo homeomorfo al intervalo $[0,1]$, una *curva cerrada simple* es un continuo homeomorfo a la circunferencia de radio uno en el plano complejo que denotaremos por S^1 y un continuo X es un *triodo* si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres conjuntos no vacíos donde cada par de estos son mutuamente separados en X. Por dar más ejemplos, sabemos que el producto cartesiano a lo más contable de continuos es un continuo. Así, particularmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[0,1]^n$ es un continuo que llamamos *n-celda* y el conocido como *cubo de Hilbert*, que denotamos por $\mathcal{Q}$, continuo homeomorfo a $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $I_i = [0,1]$, para cada i. El cubo de Hilbert es conocido como *el continuo universal* pues todo continuo se puede encajar o inmersar en el cubo de Hilbert [15, Capítulo 1, pág. 4]. Además, si $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ son puntos de $\mathcal{Q}$, entonces usaremos constantemente la distancia entre ellos, la cual la tomaremos por

$$d((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Una propiedad de los espacios métricos compactos se presenta en la siguiente proposición. Una prueba de la siguiente proposición se puede ver en [15, Proposición 1.7].

Proposición 1.2. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de compactos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para todo i. Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$.*

Es importante resaltar que la Proposición 1.2 en particular implica que la intersección anidada de compactos no vacíos es diferente del vacío. El siguiente teorema se conoce como la técnica de intersección anidada de continuos para construir continuos.

Teorema 1.3. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tal que $X_{i+1} \subset X_i$ para todo i. Entonces $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ es un continuo.*

Demostración. Sabemos que X es un espacio métrico, compacto y no vacío. Ahora, veamos que X es conexo. Supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados y disjuntos. Como X_1 es un espacio normal, existen conjuntos abiertos, disjuntos V y W de X_1 tal que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces, por la Proposición 1.2, se tiene que $X_n \subset U$ para algún n. Como X_n es conexo, $X_n \subset V$ o $X_n \subset W$. Supongamos que $X_n \subset V$. Nótese que $X \subset X_n$. Así, $X \subset V$ y $B = \emptyset$. Por lo tanto X es conexo. $\square$

Por mencionar otro ejemplo de continuos tenemos la curva universal de Sierpiński, que se puede construir inductivamente usando el Teorema 1.3 (ver [15, 1.11]).
Un gran número de caracterizaciones y resultados en teoría de continuos dependen de la existencia de puntos de corte [15, Capítulo 6]. En seguida daremos la definición de puntos de corte y mencionaremos un resultado muy conocido donde se involucran los puntos de corte.

Definición 1.4. Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Diremos que p es *punto de corte* de X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo. Diremos que p es *punto de no corte* de X si $X \setminus \{p\}$ es conexo.

En [15, Proposición 6.10] encontramos que un continuo X tiene exactamente dos puntos de no corte si y solo si X es un arco.

Definición 1.5. Una *sucesión inversa* es una doble sucesión $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que X_i es un espacio métrico compacto y $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es una función continua, para cada $i \in \mathbb{N}$. Las funciones continuas son conocidas como *funciones de ligadura.*

A continuación definimos sucesión y límite inverso en el sentido clásico y probaremos algunas propiedades.

Definición 1.6. Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Definimos el *límite inverso* de la sucesión inversa $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ como

$$\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i = f_i(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cabe mencionar que si escribimos (X, f) y $\varprojlim(X, f)$ hacemos referencia a una sucesión inversa $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y un límite inverso $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$, donde $X_i = X$ y $f_i = f$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
A continuación mostramos que el límite inverso de continuos siempre es un continuo. Pero antes, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$G_n = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i = f_i(x_{i+1}) \ \forall i \leq n \right\},$$

donde cada X_i es un continuo y $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es una función continua.

Teorema 1.7. *Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$:*

1. $G_{n+1} \subset G_n$,
2. G_n *es homeomorfo a* $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$,
3. $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$.

Demostración. Veamos que $G_{n+1} \subset G_n$. Note que si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_{n+1}$ entonces $x_i = f_i(x_{i+1})$ para todo $i \leq n+1$, es decir también se satisface para $i \leq n$, así $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_n$. Ahora, fijemos n y definamos $h\colon G_n \to \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ dada por $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}$. Nótese que $\pi_i \circ h = \pi|_{G_n}$, donde $\pi_i\colon \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \to X_i$ y $\pi|_{G_n}\colon G_n \to X_i$ son las proyecciones naturales. Así h es continua. Por otra parte, sean $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ puntos de G_n tales que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = h((y_i)_{i=1}^{\infty})$. Entonces, $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} = (y_i)_{i=n+1}^{\infty}$. Ahora, note que como $x_{n+1} = y_{n+1}$ se deduce que $y_n = x_n = f_n(y_{n+1}) = f_n(x_{n+1})$. Así, procediendo inductivamente se tiene que $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, esto quiere decir que h es inyectiva. Ahora, sea $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$. Basta notar que

$$h(f_1(f_2 \dots (f_n(x_{n+1}))), \dots, f_n(x_{n+1}), x_{n+1}, \dots) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}.$$

Lo que implica que h es sobreyectiva. A continuación podemos definir $g\colon \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \to G_n$ como $g((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) = (f_1(f_2 \ldots (f_n(x_{n+1}))), \ldots, f_n(x_{n+1}), x_{n+1}, \ldots)$. Es claro que g es la función inversa de h y además es continua, así podemos afirmar que h es un homeomorfismo. Por último, es fácil verificar que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. $\square$

Teorema 1.8. *Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Si X_i es un continuo para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces su límite inverso $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo.*

Demostración. Como $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es un continuo tal que $G_n \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Ahora, por el Teorema 1.7, tenemos que G_n es un continuo, que cumple con que para cada n, $G_{n+1} \subset G_n$. Luego por el Teorema 1.3, vamos a tener que $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es un continuo. Así, $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo. $\square$

Tras ver que el límite inverso de continuos es un continuo, en seguida mostraremos como usar los límites inversos para construir continuos indescomponibles, para ello empezamos dando la siguiente definición.

Definición 1.9. Un continuo X es *descomponible* siempre que X es la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo el cual no es descomponible diremos que es *indescomponible.*

Definición 1.10. Una sucesión inversa $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es llamada una *sucesión inversa indescomponible* siempre que para cada i, A_{i+1} y B_{i+1} son subcontinuos de X_{i+1} tal que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, entonces $f_i(A_{i+1}) = X_i$ o $f_i(B_{i+1}) = X_i$.

El siguiente teorema nos ilustra cómo construir continuos indescomponibles usando límites inversos, su demostración la tomamos de [15, Teorema 2.7]. Pero antes, el siguiente lema será usado en su demostración ([15, Lema 2.6]).

Lema 1.11. *Sean $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa con límite inverso X_∞ y $\pi_i\colon X_\infty \to X_i$ es la proyección natural, para cada i. Si A es un subconjunto compacto de X_∞, entonces*

$$\varprojlim(\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)})_{i=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)\right] \cap X_\infty.$$

Teorema 1.12. *Si $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa indescomponible con límite inverso $X_\infty = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$, entonces X_∞ es un continuo indescomponible.*

Demostración. Por el Teorema 1.8, tenemos que X_∞ es un continuo. Veamos que X_∞ es indescomponible. Supongamos que $X_\infty = A \cup B$ para A y B subcontinuos de X_∞. Debemos probar que $A = X_\infty$ o $B = X_\infty$. Como $\pi_i\colon X_\infty \to X_i$ es sobreyectiva para cada i, $X_{i+1} = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B)$. Por la Definición 1.10, tenemos que $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$ o $f_i(\pi_{i+1}(B)) = X_i$ para cada i. Ahora, no es difícil verificar que $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$. Por tanto $\pi_i(A) = X_i$ o $\pi_i(B) = X_i$ para cada i. Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\pi_i(A) = X_i$ para infinitos i. Por la sobreyectividad de las funciones de ligadura tenemos que $f_j \circ \cdots \circ f_k \circ \pi_{k+1} = \pi_j$, siempre que $1 \leq j < k$. Así vemos que $\pi_i(A) = X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora, obsérvese que por el Lema 1.11, tenemos que $[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty = A$, por lo anterior $\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Luego, $X_\infty = [\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$. Así, $A = X_\infty$. $\square$

Un ejemplo sobre lo visto anteriormente, es un continuo conocido como *continuo de Knaster*, el cual es límite inverso de la sucesión $([0,1], f)$, donde $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es una función continua cuya gráfica consiste de dos segmentos, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$ y uno de $(\frac{1}{2}, 1)$ a $(1,0)$. Nótese que si A y B son subcontinuos de $[0,1]$ tales que $[0,1] = A \cup B$, entonces es fácil comprobar que $f(A) = [0,1]$ o $f(B) = [0,1]$. Así usando la Definición 1.10 se deduce que $([0,1], f)$ es una sucesión inversa indescomponible, luego por el Teorema 1.12 concluimos que $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo indescomponible. Un segundo ejemplo es tomando (S^1, f), donde la función $f\colon S^1 \to S^1$ esta dada por $f(z) = z^2$, generamos un continuo conocido como *solenoide diádico*, $\sum_2$, el cual es un continuo indescomponible por el Teorema 1.12.
A continuación, introduciremos algunas definiciones para construir la noción generalizada de sucesión y límite inverso dada por Ingram y Mahavier en [10], la cual trabajaremos en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.13. Dado X un espacio métrico compacto, definimos el conjunto conocido como *hiperespacio de X*

$$2^X = \{A \subseteq X \mid A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}.$$

Como se puede ver en [15], el espacio 2^X es un espacio métrico compacto si lo dotamos convenientemente de la métrica de Hausdorff. Además, si X es un continuo, entonces el hiperespacio 2^X es nuevamente un continuo [15, Teorema 4.13].

Definición 1.14. Sean X y Y continuos y $F\colon X \to 2^Y$ una función. Decimos que F es *semicontinua superiormente en un punto p* de X, si para cada abierto V de Y tal que $F(p) \subset V$, existe un abierto U de X tal que $p \in U$ y $F(x) \subset V$ para cada $x \in U$. Diremos que F es *semicontinua superiormente* si lo es en cada punto de X.

Las siguientes propiedades muestran algunas características importantes y ejemplos de funciones semicontinuas superiormente (ver [15, Capítulo 7] para profundizar en detalles).

Proposición 1.15. *Sean X y Y continuos. Entonces:*

1. *Si $F\colon X \to 2^Y$ es una función semicontinua superiormente y $F(x) = \{y_x\}$ para cada $x \in X$, entonces la función $f\colon X \to Y$ definida por $f(x) = y_x$ para cada $x \in X$ es continua.*

2. *Sea $\mathbb{D}$ una partición cerrada de un continuo X (es decir, una partición cuyos elementos son cerrados). Si $\pi\colon X \to \mathbb{D}$ la proyección natural, entonces $\mathbb{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente (ver definición en [15, Capítulo 3] o [17, Capítulo 3]) si y solamente si π como función de X en 2^X es semicontinua superiormente.*

3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Es claro que $f^{-1}(y)$ es un cerrado de X para cada $y \in Y$. Definimos $F\colon Y \to 2^X$ dada por $F(y) = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces, f es cerrada si y solamente si F es semicontinua superiormente.*

Definición 1.16. Una *sucesión inversa generalizada* es una doble sucesión $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ donde X_i es un espacio métrico compacto y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ es una función semicontinua superiormente, para todo $i \in \mathbb{N}$. Las funciones semicontinuas superiormente se conocen como *funciones de ligadura*.

Definición 1.17. Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada, entonces definimos el *límite inverso* de $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$, por

$$\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $f_i(x)$ es degenerado (tiene un solo punto) para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces esta definición se reduce a la usual dada en la Definición 1.6. Además, es importante resaltar que $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ con la topología producto.

1.3. Compacidad de límites inversos generalizados

En esta sección mostramos que el límite inverso generalizado es compacto. Pero antes, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$G_n = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para todo } i \leq n \right\},$$

donde cada X_i es un espacio métrico, compacto y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ es una función semicontinua superiormente. La prueba del siguiente teorema es similar a la que dimos en el Teorema 1.7 y la tomamos de [10].

Teorema 1.18. *Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$:*

1. *$G_{n+1} \subset G_n$,*

2. *G_n es compacto y no vacío,*

3. *$\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es compacto y no vacío.*

Demostración. 1. Veamos que $G_{n+1} \subset G_n$. Note que si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_{n+1}$ entonces $x_i \in f_i(x_{i+1})$ para todo $i \leq n+1$, es decir también se satisface para $i \leq n$, así $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_n$.

2. Como cada X_i es compacto, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es compacto. Así, basta probar que G_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$ [17, Teorema 17.5]. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \setminus G_n$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ tal que $x_k \notin f_k(x_{k+1})$. Ahora, como $f_k(x_{k+1})$ es compacto y X_k es de Hausdorff, existen abiertos U y V de X_k tal que $x_k \in U$ y $f_k(x_{k+1}) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$ [17, Teorema 17.6]. Por hipótesis f_k es una función semicontinua superiormente, entonces existe un abierto $W \subset X_{k+1}$ tal que $x_{k+1} \in W$ y $f_k(x) \subset V$ para cada $x \in W$. Obsérvese que $\pi_{k+1}^{-1}(W) \cap \pi_k^{-1}(U)$ es un abierto de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ con $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in (\pi_{k+1}^{-1}(W) \cap \pi_k^{-1}(U))$ y no interseca a G_n. Así, G_n es cerrado y por tanto compacto, para cada n.
   Nótese que $G_n \neq \emptyset$ ya que las coordenadas de un punto $y \in G_n$ son definidas inductivamente, esto es, sean $y_{n+1} \in X_{n+1}$ y $y_n \in f_n(y_{n+1})$, así $y_{n-i} \in f_{n-i}(y_{n-i+1})$ para todo $i \leq n$, y para $i > n+1$, y_i puede ser cualquier punto de X_i. Por tanto, $G_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Haciendo uso del item 1, tenemos que $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión anidada de compactos no vacíos, luego $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es compacto y no vacío. Es fácil verificar que $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$.

$\square$

En seguida mostramos un ejemplo de un límite inverso generalizado, pero antes tengamos en cuenta la siguiente definición. Dado un espacio métrico, compacto X definimos el cono de X como el espacio cociente $\Lambda(X) = X \times [0,1]/X \times \{1\}$. En particular si X es homeomorfo a $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, diremos que $\Lambda(X)$ es un *abanico armónico.*

Ejemplo 1.19. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$, tal que $\varprojlim([0,1], f)$ es un abanico armónico.

Sea $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(0,1)$ y uno de $(0,0)$ a $(1,1)$. Como se ilustra en la Figura 1.
Supongamos que $K = \varprojlim([0,1], f)$ y definimos:

$$A_0 = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_i = p_1 \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces, note que A_0 consiste de los puntos de la forma $(t, t, \ldots)$, con $t \in [0,1]$. Ahora observe que A_0 es un arco, esto es: sea $h_0\colon A_0 \to [0,1]$ definida por $h_0(t, t, \ldots) = t$. Es claro que h_0 es una función continua ya que es una función proyección y además es un homeomorfismo ya que no es difícil verificar que h_0 es una biyección cerrada. Ahora, para cada n, definamos

$$A_n = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_j = 0 \text{ para } j > n \text{ y } p_j = p_n \text{ para } 1 \leq j \leq n\}.$$

Note que, con la misma deducción anterior tenemos que A_n es un arco. Cabe mencionar que los puntos que pertenecen a A_n, las primeras coordenadas hasta n son

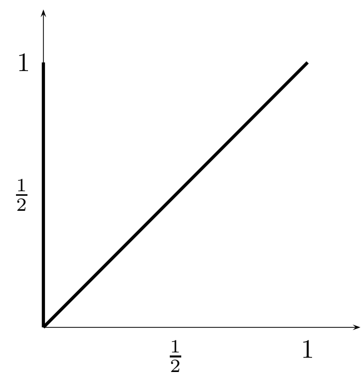

Figura 1: Una función semicontinua superiormente teniendo un abanico armónico como su límite inverso.

iguales y a partir de la coordenada $n+1$ son cero, (Tomando $h_n\colon A_n \to [0,1]$ como $h_n(t,\dots,t,0,\dots) = t$).
Por otra parte, para cualesquiera i y j, con $i \neq j$, tenemos que $A_i \cap A_j = \{(0,0,0,\dots)\}$, además haciendo uso de la métrica establecida en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ podemos observar que cada arco tiene longitud de $\frac{2^n-1}{2^n}$, esto es:

$$\begin{aligned}
d((x_i)_{i=1}^{\infty},(y_i)_{i=1}^{\infty}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{2^n-1}{2^n}.
\end{aligned}$$

No es difícil verificar que, $\varprojlim([0,1],f) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Con algunos cálculos adicionales se concluye que $\varprojlim([0,1],f)$ es un abanico armónico. El gráfico del límite inverso $\varprojlim([0,1],f)$ se puede observar en la Figura 2.

1.4. Teoremas de funciones

En límites inversos es bien conocido y de gran utilidad el siguiente teorema [13, Teorema 2.1.38]:

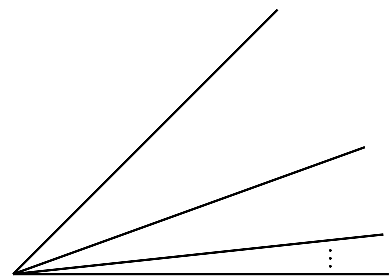

Figura 2: Abanico armónico.

Teorema 1.20. *Sean $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios continuos, $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de enteros positivos y $F\colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=1}^{\infty} X_{n_i}$ dada por $F((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ una función continua. Si $g_i = f_{n_i} \circ f_{n_{i+1}} \circ \ldots \circ f_{n_{i+1}-1}$, entonces la restricción de F al espacio $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un homeomorfismo en $\varprojlim(X_{n_i}, g_i)_{i=1}^{\infty}$.*

La siguiente sección tiene como objetivo mostrar que este teorema no se cumple en el caso de límites inversos generalizados.

1.4.1. Composición de funciones semicontinuas superiormente

En seguida daremos a conocer cómo se define la compuesta entre funciones semicontinuas superiormente.

Definición 1.21. Sean X, Y y Z espacios métricos, compactos y $f\colon X \to 2^Y$ y $g\colon Y \to 2^Z$ funciones semicontinuas superiormente. Definimos la *compuesta* $(g \circ f)\colon X \to 2^Z$ como

$$(g \circ f)(x) = \{z \in Z : \text{ existe un } y \in Y \text{ tal que } y \in f(x) \text{ y } z \in g(y)\}.$$

Teorema 1.22. *Sean $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada, $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de enteros positivos y $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tal que $g_i = f_{n_i} \circ f_{n_{i+1}} \circ \ldots \circ f_{n_{i+1}-1}$ para cada i. Si $F\colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=1}^{\infty} X_{n_i}$ se define por $F((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, entonces $F|_{\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}}$ es una función continua y sobreyectiva de $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ en $\varprojlim(X_{n_i}, g_i)_{i=1}^{\infty}$.*

Demostración. Supongamos que $K = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $M = \varprojlim(X_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$. Sea

$$F\colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=1}^{\infty} X_{n_i} \text{ definida por } F((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_{n_i})_{i=1}^{\infty}.$$

Veamos primero que $F|_K$ esta bien definida. Supongamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K$, entonces $x_i \in f_i(x_{i+1})$ para cada i; es decir, $x_{n_{i+1}-1} \in f_{n_{i+1}-1}(x_{n_{i+1}})$ para cada i. Por tanto,

$$x_{n_i} \in (f_{n_i} \circ f_{n_{i+1}} \circ \ldots \circ f_{n_{i+1}-1})(x_{n_{i+1}}) = g_i(x_{n_{i+1}}).$$

De lo cual deduce que $F|_K$ esta bien definida.
Veamos que $F|_K$ es continua. Nótese que $\pi_{n_i} \colon K \to X_{n_i}$ y $\pi'_{n_i} \colon M \to X_{n_i}$ son las proyecciones naturales tal que $\pi'_{n_i} \circ F|_K = \pi_{n_i}$. Así, $F|_K$ es continua.
Ahora, definamos

$$y = \begin{cases} x_n & si \qquad\qquad n = n_i \text{ para algún } i, \\ \\ z_n & si \quad n \neq n_i,\ m = \text{mín}\{n < n_i\} \text{ y } z_n \in f_n^m(x_m). \end{cases}$$

No es difícil verificar que $y \in K$ y $F|_K(y) \in M$. Así, $F|_K$ es sobreyectiva. $\square$

Una observación bastante importante es que $F|_{\varprojlim(X_i,f_i)_{i=1}^{\infty}}$ no necesariamente es un homeomorfismo como pasa en los límites inversos usuales. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.23. Existe una función semicontinua superiormente $f \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$, tal que $\varprojlim([0,1], f)$ contiene un triodo y tomando $g = f \circ f$ se tiene que $\varprojlim([0,1], g)$ es un arco. Así, $\varprojlim([0,1], f)$ y $\varprojlim([0,1], g)$ no son homeomorfos.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$, $\{1\} \times [0, \frac{1}{2}]$ y uno de $(0,1)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, como ilustramos en la Figura 3. El límite inverso generado por esta sucesión inversa contiene un triodo como veremos a continuación.

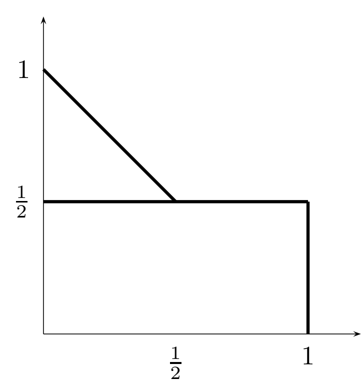

Figura 3: Una función semicontinua superiormente teniendo un triodo contenido en su límite inverso.

Supongamos que $K = \varprojlim([0,1], f)$. Veamos que K contiene un triodo. Definamos los siguientes conjuntos:

- $A_1 = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_1 \in (\frac{1}{2}, 1]\}$.
- $A_2 = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ y $p_3 \in (\frac{1}{2}, 1]\}$.
- $A_3 = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_1 = \frac{1}{2}$ y $p_2 \in [0, \frac{1}{2})\}$.

La clausura de cada uno de los conjuntos anteriores es un arco, para ver esto definamos las siguientes funciones:

- Sea $h_1 \colon \overline{A_1} \to [\frac{1}{2}, 1]$ dada por $h_1(t, 1-t, 1, 0, 1, \ldots) = t$.
- Sea $h_2 \colon \overline{A_2} \to [\frac{1}{2}, 1]$ dada por $h_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t, 1-t, 1, 0, \ldots) = t$.
- Sea $h_3 \colon \overline{A_3} \to [0, \frac{1}{2}]$ dada por $h_3(\frac{1}{2}, t, 1, 0, 1, \ldots) = t$.

Es fácil verificar que cada una de las anteriores funciones son homeomorfismos ya que son continuas y biyecciones cerradas. Ahora, note que el punto de intersección entre los tres arcos es $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0, \ldots)$. Así, K contiene un triodo.

Sin embargo, si tomamos $g \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ como $g = f \circ f$ la gráfica consiste de tres segmentos de recta, $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$, $\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$ y $\{1\} \times [\frac{1}{2}, 1]$ como ilustramos en la Figura 4. El límite inverso $\varprojlim([0,1], g)$ es un arco.

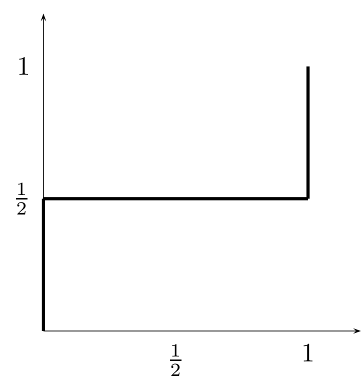

Figura 4: Una función semicontinua superiormente teniendo un arco como su límite inverso.

Supongamos que $M = \varprojlim([0,1], f \circ f)$. Veamos que M es un arco con puntos finales $a = (0, 0, \ldots)$ y $b = (1, 1, \ldots)$. Sea $p = (p_n)_{n=1}^{\infty} \in M$ un punto diferente de a y de b. Así, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que p_n no es ni cero ni uno.
Si $p_n \neq \frac{1}{2}$, entonces $M \cap \pi_n^{-1}(p_n)$ es degenerado y separa a M en dos conjuntos mutuamente separados $M \cap \pi_n^{-1}([0, p_n))$ y $M \cap \pi_n^{-1}((p_n, 1])$. Si $p_n = \frac{1}{2}$ y $p_{n+1} \in \{0, 1\}$, entonces $M \cap \pi_n^{-1}(p_n)$ es degenerado y un punto de corte de M. Por tanto, asumimos que p_{n+1} no es cero ni uno y así concluimos que $M \cap \pi_n^{-1}(p_{n+1})$ es un punto de corte, a menos que $p_{n+1} = \frac{1}{2}$.

Como $p = (p_n)_{n=1}^{\infty}$ fue un punto arbitrario, falta considerar el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots)$, pero dicho punto es claramente un punto de corte de M. Por lo tanto, M es un arco por [15, Proposición 6.10]. Así vamos a tener que $\varprojlim([0,1], f)$ y $\varprojlim([0,1], g)$ no son homeomorfos, puesto que un arco no contiene triodos.

1.4.2. Límites inversos generalizados homeomorfos

A continuación se muestran condiciones necesarias y suficientes para relacionar dos sucesiones inversas $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(Y_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ cuyos límites inversos generalizados son homeomorfos.

Teorema 1.24. *Sean $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(Y_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ sucesiones inversas generalizadas. Supongamos que $\varphi_i \colon X_i \to Y_i$ una función para cada $i \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi_i \circ f_i = g_i \circ \varphi_{i+1}$. Si $\varphi \colon \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} \to \varprojlim(Y_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ dada por $\varphi((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty}$, entonces:*

1. *La función φ es continua si y solamente si φ_i es continua, para todo $i \in \mathbb{N}$,*

2. *φ es inyectiva si y solamente si φ_i es inyectiva, para cada $i \in \mathbb{N}$,*

3. *φ es sobreyectiva si y solamente si φ_i es sobreyectiva, para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $K = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $M = \varprojlim(Y_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$. Veamos que φ esta bien definida. Sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in K$ y debemos probar que $\varphi(x) \in M$ es decir, $\varphi_i(x_i) \in g_i(\varphi_{i+1}(x_{i+1}))$ para todo i. Pero obsérvese que $(\varphi_i \circ f_i)(x_{i+1}) = (g_i \circ \varphi_{i+1})(x_{i+1})$ y $\varphi_i(x_i) \in (\varphi_i \circ f_i)(x_{i+1})$, por ende $\varphi_i(x_i) \in g_i(\varphi_{i+1}(x_{i+1}))$.

1. Es claro que φ es continua si φ_i es continua para cada i ver [10, Sección 8].

2. Veamos que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \varphi((y_i)_{i=1}^{\infty})$ para $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ en K. Entonces, $(\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty} = (\varphi_i(y_i))_{i=1}^{\infty}$, pero como φ_i es inyectiva para cada i, $x_i = y_i$ para cada i. Así, φ es inyectiva. No es difícil verificar que φ_i es inyectiva para cada i siempre que φ es inyectiva.

3. Por otra parte, sea $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in M$. Nótese que $\varphi(x) = y$, donde $x = (\varphi_i^{-1}(x_i))_{i=1}^{\infty}$. Veamos que $x \in K$. Como $y_{i+1} \in \varphi_{i+1}(x_{i+1})$ y $y_i \in g_i(y_{i+1})$, tenemos que $y_i \in (\varphi_i \circ f_i)(x_{i+1}) = (g_i \circ \varphi_{i+1})(x_{i+1})$, por tanto existe un $t \in f_i(x_{i+1})$ tal que $\varphi_i(t) = y_i$ y como φ_i es inyectiva se deduce que $x_i = t$. Así φ es sobreyectiva.

$\square$

Un resultado que se obtiene del teorema anterior es que φ es un homeomorfismo ya que φ es una biyección continua y además cerrada, puesto que K y M son espacios compactos y Hausdorff.

Definición 1.25. Sean X un continuo, $f \colon X \to 2^X$ y $g \colon X \to 2^X$ funciones semicontinuas superiormente. Decimos que f y g son *topológicamente conjugadas* siempre que existe un homeomorfismo $h \colon X \to X$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 1.24.

Corolario 1.26. *Suponga que X es un continuo. Si $f\colon X \to 2^X$ y $g\colon X \to 2^X$ funciones semicontinuas superiormente y topológicamente conjugadas entonces $\varprojlim(X, f)$ y $\varprojlim(X, g)$ son homeomorfos.*

1.5. Problemas abiertos

En esta sección encontramos problemas abiertos que han aparecido a partir del estudio de los límites inversos generalizados, esto lo hacemos con el propósito de que el lector pueda avanzar e investigar más sobre los diferentes temas.

Pregunta 1.27. Si X es un continuo, $f\colon X \to 2^X$ una función semicontinua superiormente y $n > 1$, entonces que condiciones suficientes podemos encontrar sobre f tal que $\varprojlim(X, f)$ es homeomorfo a $\varprojlim(X, f^n)$.

Pregunta 1.28. Si $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada, $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de enteros positivos y $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tal que $g_i = f_{n_i} \circ f_{n_{i+1}} \circ \ldots \circ f_{n_{i+1}-1}$, entonces que condiciones suficientes podemos encontrar sobre las funciones de ligadura tal que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\varprojlim(X_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$.

Capítulo 2

Conexidad de límites inversos generalizados

Cuando hacemos operaciones entre espacios topológicos es natural estudiar las propiedades topológicas que se preservan. Para nuestro caso, como mostramos en el Teorema 1.18, el límite inverso generalizado de compactos es compacto; sin embargo, como podemos verificar con el Ejemplo 2.1, la conexidad no siempre se preserva por límites inversos generalizados. En este capítulo daremos a conocer condiciones suficientes para que los límites inversos generalizados de continuos sean conexos.
Empezaremos este capítulo con un ejemplo donde se ilustra un límite inverso generalizado de continuos no conexo y por tanto, es un límite que no es un continuo.

Ejemplo 2.1. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0,1], f)$ no es conexo.

Sea $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de cuatro segmentos de recta, $I \times \{0\}$, $\{1\} \times [0,1]$, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y uno de $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ a $(1,1)$, como podemos observar en la Figura 5.

Sea $K = \varprojlim([0,1], f)$. Definamos $N = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ y $p_3 = \frac{3}{4}\}$. Sea $R = R_1 \times R_2 \times R_3 \times [0,1] \times [0,1] \times \dots$, donde $R_1 = R_2 = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ y $R_3 = (\frac{5}{8}, \frac{7}{8})$. Es claro que R es un abierto del cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ y $N \subset R$.
Debemos probar que N y $K \backslash N$ son mutuamente separados; es decir, que $R \cap (K \backslash N) = \emptyset$. Entonces, supongamos que existe un punto $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in R \cap (K \setminus N)$. Esto implica que $y_1,\ y_2 \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ y por tanto, podemos deducir que $y_2 \leq \frac{1}{4}$. Nótese que, si $y_2 < \frac{1}{4}$, entonces $y_3 = 1$. Así, $(y_i)_{i=1}^{\infty} \notin R$ lo cual es absurdo. Por tanto, concluimos que R no contiene puntos que no están en N y además obsérvese que como $N \subset R$, $K \setminus N \subset \mathcal{Q} \setminus R$, por tanto $\overline{K \setminus N} \subset \mathcal{Q} \setminus R$, $\overline{K \setminus N} \cap N = \emptyset$. Así, N y $K \setminus N$ son mutuamente separados y K no es conexo.
Consideramos importante resaltar que la gráfica de f en el Ejemplo 2.1, como se puede apreciar en la Figura 5, es conexa. Es decir, la conexidad de límites inversos generalizados

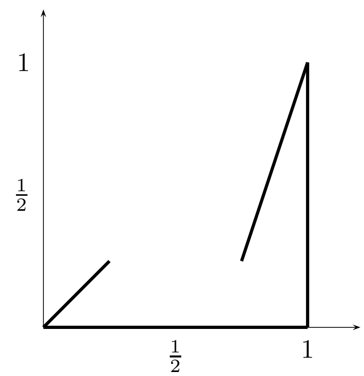

Figura 5: Una función semicontinua superiormente que su límite inverso no es conexo.

no se preserva para funciones definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$ con gráfica conexa.

2.1. Dos condiciones de conexidad

Esta sección tiene como objetivo las pruebas de los Teoremas 2.11 y 2.12, donde a partir del concepto de gráfico, que formalizaremos a continuación, mostramos condiciones para que un límite inverso generalizado de continuos sea un continuo.

Definición 2.2. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to 2^Y$ una función semicontinua superiormente. Definimos el *gráfico de* f, que denotaremos por $G(f)$, como

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in f(x)\}.$$

Las demostraciones de esta sección, las tomamos de [5].

Teorema 2.3. *Sean X y Y continuos y $M \subseteq X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe un punto $y \in Y$ donde $(x,y) \in M$ ($\pi_1(M) = X$). Entonces, M es cerrado si y solamente si existe una función $f\colon X \to 2^Y$ semicontinua superiormente tal que $M = G(f)$.*

Demostración. Supongamos primero que M es cerrado. Para cada $x \in X$, sea $f(x)$ el conjunto de todos los puntos $t \in Y$ tal que $(x,t) \in M$. Como $f(x) = M \cap \{x\} \times Y$, $f(x)$ es cerrado y claramente, $M = G(f)$. Ahora, veamos que f es semicontinua superiormente. Supongamos lo contrario; esto es, existe un punto $x \in X$ y V un abierto de Y tal que $f(x) \subset V$ y existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ que converge a x y una sucesión $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Y$ tal que $y_i \in f(x_i) \setminus V$. Para cada i, se tiene que $(x_i, y_i) \in M$ y como M es compacto tenemos que alguna subsucesión de $((x_i, y_i))_{i=1}^{\infty}$ converge a (x,y). Además, M es cerrado. Así, $(x,y) \in M$, pero esto es absurdo ya que $y \notin V$, es decir que $y \notin f(x)$ y por tanto $(x,y) \notin M$. Por consiguiente se tiene que f es semicontinua superiormente.

Recíprocamente, veamos que M es cerrado. Suponga que $(x_0, y_0) \notin M$, entonces $y_0 \notin f(x_0)$. Esto es, existe un abierto $W \subset Y$ tal que $f(x_0) \subset W$ y $y_0 \notin \overline{W}$. Ahora, como f es semicontinua superiormente, se tiene que existe un abierto $U \subset X$, con $x_0 \in U$ tal que si $z \in U$ entonces $f(z) \subset W$. Tomemos el abierto $U \times V \subset X \times Y$ con $V = Y \setminus \overline{W}$. Es claro que $(U \times V) \cap M = \emptyset$. De lo anterior, M es cerrado. □

A continuación vamos a dar condiciones bajo las cuales $G(f)$ es conexo cuando f es una función semicontinua superiormente. Hay que resaltar que el efecto de que $G(f)$ sea conexo no implica la conexidad del límite inverso generalizado (ver Ejemplo 2.1).

Teorema 2.4. *Sean X y Y continuos y $f\colon X \to 2^Y$ una función semicontinua superiormente. Si $f(x)$ es conexo para cada $x \in X$, entonces $G(f)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es conexo para cada $x \in X$ y $G(f)$ no es conexo. Entonces existen H y K conjuntos mutuamente separados, no vacíos con $G(f) = H \cup K$. Sea $x \in X$ entonces tenemos que $\{x\} \times f(x)$ es un subconjunto conexo de $G(f)$ y por tanto un subconjunto de H o de K. Definamos $H_1 = \{x \in X : \ \{x\} \times f(x) \subset H\}$ y $K_1 = \{x \in X : \ \{x\} \times f(x) \subset K\}$. Es claro que H_1 y K_1 son diferentes del vacío y además compactos. Nótese que $X = H_1 \cup K_1$ y $H_1 \cap K_1 = \emptyset$. Lo anterior contradice la conexidad de X. Así, $G(f)$ es conexo. □

Un resultado similar al Teorema 2.4, usando ahora una noción intuitiva de “imagen inversa” la presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Sean X y Y continuos y $f\colon X \to 2^Y$ una función semicontinua superiormente. Si para cada $y \in Y$, $\{x \in X : y \in f(x)\}$ es conexo y no vacío, entonces $G(f)$ es conexo.*

Demostración. Si M es un subconjunto cerrado de $X \times Y$, entonces M^{-1} es un subconjunto cerrado de $Y \times X$, donde M^{-1} denota el conjunto de puntos $(y, x) \in Y \times X$ tales que $(x, y) \in M$. Ahora considere $M = G(f)^{-1}$. Nótese que si M es cerrado entonces M^{-1} es cerrado, luego por el Teorema 2.3 tenemos que M^{-1} es el gráfico de una función semicontinua superiormente. Por el Teorema 2.4, $M^{-1} = G(f)$ es conexo. □

Como nuestra definición de límite inverso involucra una sucesión de funciones, necesitamos una noción de gráfica mas general, como la enunciamos a continuación.

Definición 2.6. Sean $X_1, ..., X_{n+1}$ continuos y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. El *gráfico de* $f_1, ..., f_n$, que denotamos por $G(f_1, ..., f_n)$, es definido por

$$G(f_1, ..., f_n) = \left\{ (x_i)_{i=1}^{n+1} \in \prod_{i=1}^{n+1} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Con los siguientes dos teoremas generalizamos los Teoremas 2.4 y 2.5, usando esta nueva noción de gráfica de una familia finita de funciones semicontinuas superiormente.

Teorema 2.7. *Sean $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ continuos y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Si $f_i(x)$ es conexo, para cada $x \in X_{i+1}$ y cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $G(f_1, ..., f_n)$ es conexo.*

Demostración. Procedamos inductivamente. Si consideramos una función, el resultado se sigue del Teorema 2.4. Supongamos ahora que el gráfico $G(f_2, ..., f_{n+1})$ es conexo y veamos que $G(f_1, ..., f_{n+1})$ es conexo. Supongamos que existen H y K conjuntos mutuamente separados tales que $G(f_1, ..., f_{n+1}) = H \cup K$. Sea $\varphi\colon G(f_1, ..., f_{n+1}) \to G(f_2, ..., f_{n+1})$ definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = (x_2, \ldots, x_{n+2}).$$

Es fácil verificar que φ es una función continua y sobreyectiva, por tanto tenemos que $\varphi(G(f_1, ..., f_{n+1})) = G(f_2, ..., f_{n+1})$. Como $G(f_1, ..., f_{n+1}) = H \cup K$, tenemos que $\varphi(H) \cup \varphi(K) = G(f_2, ..., f_{n+1})$. Por la conexidad de $G(f_2, ..., f_{n+1})$, deducimos que $\varphi(H) \cap \varphi(K) \neq \emptyset$. Sea $(p_i)_{i=2}^{n+2} \in \varphi(H) \cap \varphi(K)$. Definamos $A = \{(x_i)_{i=1}^{n+2} \in G(f_1, ..., f_{n+1}) : x_1 \in f_1(p_2)$ y $x_i = p_i$ para $2 \leq i \leq n+1\}$. Es claro que $A \subseteq G(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$, es conexo e interseca H y K. Esto contradice que $H \cap K = \emptyset$. Así, $G(f_1, ..., f_{n+1})$ es conexo. □

En seguida veremos la relación que hay entre el gráfico de una colección numerable de funciones semicontinuas superiormente y el espacio G_n. Pero antes recordemos que definimos $G_n = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1})$ para cada $i \leq n\}$.

Teorema 2.8. *Sean $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de continuos y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente, para cada $i \in \mathbb{N}$. Si para cada $x \in X_{i+1}$ y cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $f_i(x)$ es conexo, entonces G_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Observe que $G_n = G(f_1, ..., f_n) \times \prod_{i=n+2}^{\infty} X_i$. Así, G_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.7 y la conexidad de X_i, para cada $i \geq n+2$. □

Teorema 2.9. *Sean $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de continuos y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente, para cada $i \in \mathbb{N}$. Si para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y cada $y \in X_i$ el conjunto $\{x \in X_{i+1} : y \in f(x)\}$ es conexo y no vacío, entonces $G(f_1, ..., f_n)$ es conexo.*

Demostración. Procedamos inductivamente. Si consideramos una función, el resultado se sigue del Teorema 2.5. Supongamos que $G(f_1, ..., f_n)$ es conexo. Veamos que $G(f_1, ..., f_{n+1})$ es conexo. Sean H y K conjuntos mutuamente separados cuya unión es $G(f_1, ..., f_{n+1})$. Definamos $h\colon G(f_1, ..., f_{n+1}) \to G(f_1, ..., f_n)$ por $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Es claro que h es continua y sobreyectiva, por tanto $h(H) \cup h(K) = G(f_1, f_2 \ldots, f_n)$, esto quiere decir que $h(H) \cap h(K) \neq \emptyset$ puesto que $G(f_1, ..., f_n)$ es conexo. Luego, sea $(p_i)_{i=1}^{n+1} \in h(H) \cap h(K)$ y definamos $A = \{(x_i)_{i=1}^{n+2} \in G(f_1, ..., f_{n+1}) : x_n \in f_n(x_{n+1})$ y $x_i = p_i$ para $1 \leq i \leq n\}$. Es claro que $A \subseteq G(f_1, ..., f_{n+1})$, es conexo e interseca a H y K, pero esto es absurdo ya que H y K son disjuntos. Así, $G(f_1, ..., f_{n+1})$ es conexo. □

La demostración del siguiente teorema es análoga a la prueba del Teorema 2.8.

Teorema 2.10. *Sean X_i un continuo y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ funciones semicontinuas superiormente, para todo $i \in \mathbb{N}$. Si para cada $x \in X_i$, $\{y \in X_{i+1} : x_i \in f_i(y)\}$ es no vacío y conexo, entonces G_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Observe que $G_n = G(f_1, f_2, ..., f_n) \times \prod_{i=n+2}^{\infty} X_i$. Así, G_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.7 y la conexidad de X_i, para cada $i \geq n+2$. □

Ahora demostraremos los teoremas más importantes de esta sección donde mostramos condiciones para que el límite inverso generalizado de continuos sea un continuo.

Teorema 2.11. *Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada. Si $f_i(x)$ es conexo para cada $x \in X_{i+1}$, entonces $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.18, $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es compacto y no vacío. Ahora, G_n es conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.8. Por lo tanto, $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo, por el Teorema 1.3. □

La demostración del siguiente teorema es similar al teorema anterior, sin embargo, presentamos la demostración para comodidad del lector.

Teorema 2.12. *Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada. Si $\{y \in X_{i+1} | \ x \in f_i(y)\}$ es conexo y no vacío para cada $x \in X_i$, entonces $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.18, $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es compacto y no vacío. Ahora, G_n es conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.10. Por lo tanto, con el Teorema 1.3 concluimos que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo. □

2.2. Ejemplos adicionales

En esta sección mostramos dos ejemplos donde no se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 2.11 y 2.12; sin embargo, en uno de ellos su límite es conexo. Esto muestra que los Teoremas 2.11 y 2.12 no presentan condiciones necesarias para la conexidad del límite inverso generalizado.
Como presentamos en el Ejemplo 2.1, la conexidad del gráfico no implica la conexidad del límite inverso generalizado. En el siguiente ejemplo se observa una sucesión inversa de continuos con gráfico conexo tal que su límite es homeomorfo al espacio de Cantor.

Ejemplo 2.13. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ con gráfico conexo, tal que $\varprojlim([0,1], f)$ es el espacio de Cantor.

Sea $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de cuatro segmentos de recta, uno de $(0, \frac{3}{4})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, uno de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $(1, \frac{1}{2})$, uno de $(0, \frac{3}{4})$ a $(\frac{1}{2}, 1)$ y uno de $(\frac{1}{2}, 1)$ a $(1, 1)$, como podemos observar en la Figura 6. Veamos que $\varprojlim([0,1], f) = \{\frac{1}{2}, 1\}^{\mathbb{N}}$.
Sean $K = \varprojlim([0,1], f)$ y $(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K$. Entonces nótese que:

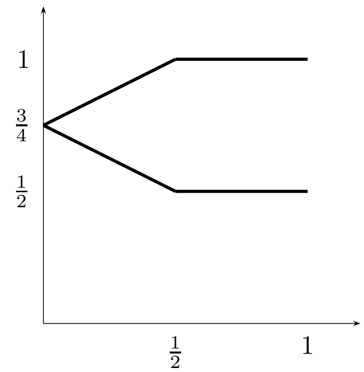

Figura 6: Una función semicontinua superiormente cuyo límite inverso es totalmente disconexo.

1. Si $p_n \in [0, \frac{1}{2})$, entonces tenemos que p_{n+1} no existe, ya que los puntos que están en ese intervalo no tienen preimagen.

2. Si $\frac{1}{2} < p_n < 1$, entonces $p_{n+1} \in [0, \frac{1}{2})$, pero p_{n+2} no existe por la misma observación hecha en el paso anterior.

3. Ahora, si $p_n \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, entonces $p_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. Pero si $p_{n+1} \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonces vamos a tener nuevamente el segundo caso. Así, tenemos que $p_{n+1} \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Continuando inductivamente podemos concluir que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $p_n = \frac{1}{2}$ o $p_n = 1$, es decir $(p_i)_{i=1}^{\infty} \in \{\frac{1}{2}, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Por otra parte, tenemos que cualquier punto $(p_i)_{i=1}^{\infty} \in \{\frac{1}{2}, 1\}^{\mathbb{N}}$ pertenece a $\varprojlim([0,1], f_i)_{i=1}^{\infty}$.

A continuación mostraremos un ejemplo en donde no se cumple ninguna de las hipótesis de los Teoremas 2.11 y 2.12, pero el límite inverso generalizado es un continuo. Antes de dar el ejemplo tengamos en cuenta la siguiente definición. Sea X un espacio topológico. Definimos el *cono* ΛX sobre X como el espacio cociente $X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Si X es homeomorfo al conjunto de Cantor, entonces diremos que ΛX es el cono de Cantor.

Ejemplo 2.14. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ en donde no se cumple ninguna de las hipótesis de los Teoremas 2.11 y 2.12 y $\varprojlim([0,1], f)$ es el cono sobre Cantor.

Sea $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(1,1)$ y uno de $(0,1)$ a $(1,0)$, como podemos observar en la Figura 7.
Podemos observar que para cada $x \in [0,1]$ se tiene que los conjuntos $f(x)$ y $\{y \in [0,1]|\ x \in f(y)\}$ no son conexos, para ninguna $x \in [0,1]$ excepto para $x = \frac{1}{2}$; sin embargo, mostraremos que el límite inverso generalizado $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo.

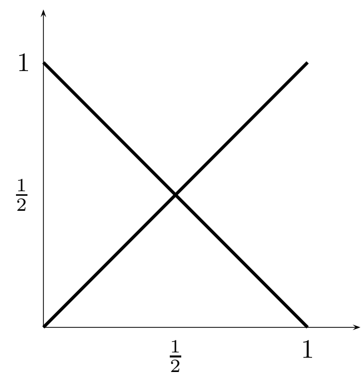

Figura 7: Una función semicontinua superiormente que no satisface ninguno de los Teoremas 2.11 y 2.12 y su límite inverso es el cono de Cantor.

Sea $K = \varprojlim([0,1], f)$. Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} = \{(s_i)_{i=1}^{\infty} \in K : s_i = 0 \text{ o } s_i = 1 \text{ para cada } i\}.$$

Claramente $\mathcal{C} \subset K$. Nos podemos dar cuenta de que el gráfico de la función f es la unión de 4 intervalos, que vienen desde las esquinas de $[0,1]^2$ hasta el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Entonces, notemos a estos intervalos como $I_{(x,y)}$, donde $(x,y) \in \{0,1\}^2$ son las esquinas de $[0,1]^2$. Ahora veamos la descripción de los demás puntos que están en el límite inverso, esto es: si $s = (s_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$, entonces sea:

$$I_s = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K : (p_{i+1}, p_i) \in I_{(s_{(i+1)}, s_i)} \text{ para } i \in \mathbb{N}\}.$$

Al observar estos 4 intervalos nos damos cuenta que son las gráficas de funciones continuas que son homeomorfismos, cuyos dominios son los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ o $[\frac{1}{2}, 1]$ y cuyos rangos son estos mismos intervalos. Entonces podemos deducir que para $s = (s_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$, I_s es el límite inverso de una sucesión $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$, donde cada X_i es $[0, \frac{1}{2}]$ o $[\frac{1}{2}, 1]$, f_i es un homeomorfismo y $f_i(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos que si $x_1 \in X_1$ entonces existe un solo punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K$ tal que $\pi_1((x_i)_{i=1}^{\infty}) = x_1$. Esto implica que I_s es un arco ya que π_1 es un homeomorfismo de I_s en X_1. Además, los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots)$ y s son puntos finales de I_s. Entonces, vamos a tener que el límite inverso generalizado $\varprojlim([0,1], f)$ es la unión de una colección de arcos teniendo un punto final en común, por tanto $\varprojlim([0,1], f)$ es conexo. Ahora, haciendo uso del Teorema 1.18 concluimos que $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo y es conocido como el cono de Cantor.

2.3. Union de funciones continuas

En esta sección estudiaremos un caso particular de función semicontinua superiormente; cuando esta función se puede ver como unión de funciones continuas. Daremos una condición para que el límite inverso de una sucesión inversa que involucra esta función sea un continuo.

2.3.1. Definiciones y teoremas

A continuación daremos a conocer una definición que se maneja en teoría de continuos para saber cuándo una función tiene puntos de coincidencia con una colección de funciones continuas. Además, mostraremos un lema el cual nos dice que dos límites inversos tienen un punto en común.

Definición 2.15. Sean X y Y continuos y $\mathcal{F}$ una colección de funciones continuas de X a Y. Diremos que una función $f\colon X \to Y$ es *universal con respecto a* $\mathcal{F}$ siempre que para cualquier $g \in \mathcal{F}$, existe un punto $x \in X$ donde $f(x) = g(x)$. Es decir, f tiene un punto de coincidencia con cada miembro de $\mathcal{F}$.

Solamente por presentar un ejemplo, es sencillo ver que una función sobreyectiva $f\colon X \to [0,1]$ es una función universal con respecto a la familia de todas las funciones continuas de X en $[0,1]$, para cualquier continuo X. Para profundizar acerca de funciones universales el lector puede consultar [15, Capítulo 12].

Lema 2.16. *Sean X un continuo y $(f_i\colon X \to X)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas. Sea $g\colon X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n y g tienen un punto de coincidencia. Si f_i es sobreyectiva para $i > n$ y $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas tal que $\varphi_i = f_i$ para $i \neq n$ y $\varphi_n = g$, entonces $\varprojlim(X, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $\varprojlim(X, \varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ tienen un punto en común.*

Demostración. Supongamos que $g\colon X \to X$ es una función continua y $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n y g tienen un punto de coincidencia, es decir existe un punto $t \in X$ tal que $f_n(t) = g(t)$. Ahora, como f_i es sobreyectiva para cada $i > n$, entonces existe un punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, f_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $x_{n+1} = t$. Ahora como $g(t) = f_n(t)$ tenemos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, \varphi_i)_{i=1}^{\infty}$. □

Con el siguiente teorema mostramos un caso particular cuando el límite inverso generalizado es un continuo. La prueba del siguiente teorema la tomamos de [6].

Teorema 2.17. *Sea X un continuo no degenerado. Consideremos*

$$\mathcal{F} = \{f_i\colon X \to X : f_i \text{ es continua para todo } i \in \mathbb{N}\},$$

donde una de las f_i es universal con respecto a $\mathcal{F}$. Si $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ y $G(f)$ es un cerrado de $X \times X$, entonces $f\colon X \to 2^X$ es una función semicontinua superiormente y $\varprojlim(X, f)$ es un continuo.

Demostración. Supongamos que $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ y $G(f)$ es un cerrado de $X \times X$. Veamos primero que f es una función semicontinua superiormente. Sea V un abierto de X y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \subset V$. Entonces, como cada f_i es continua se tiene que $f_i^{-1}(V)$

es un abierto de X para cada $i \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in f_i^{-1}(V)$. Ahora, sea $W = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(V)$. Es claro que W es un abierto de X de manera que $f(x) \subset V$ para cada $x \in W$. Así f es una función semicontinua superiormente.
La compacidad de $\varprojlim(X, f)$ la tenemos del Teorema 1.18.
Solamente nos resta probar que $\varprojlim(X, f)$ es conexo. Supongamos sin pérdida de generalidad que f_1 es una función universal con respecto a $\mathcal{F}$. Como f_1 es sobreyectiva, tenemos que $\varprojlim(X, f_1)$ es un continuo no degenerado. Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, f_1)$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, f)$. Entonces, existe una sucesión de funciones $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_i \in \mathcal{F}$ y $\varphi_i(x_{i+1}) = x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $C_1 = \varprojlim(X, f_1)$, y para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, sea $C_n = \varprojlim(X, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, f_1, \ldots)$. Ahora, note que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que C_n es un continuo ya que C_n es homeomorfo a C_1, esto es: $h\colon C_n \to C_1$ dada por $h(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Es claro que h es una función continua y como C_n y C_1 son compactos y Hausdorff, h es un homeomorfismo. Ahora haciendo uso del Lema 2.16 tenemos que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, y así vamos a tener que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y como f_1 es sobreyectiva, entonces existe un punto $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ de C_n tal que $\pi_i((p_i)_{i=1}^{\infty}) = y_i$ para $i \leq n$. Esto implica que $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, f) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$. Así, $\varprojlim(X, f)$ es conexo.
De lo anterior concluimos que $\varprojlim(X, f)$ es un continuo. □

A continuación se muestra una consecuencia inmediata del Teorema 2.17.

Corolario 2.18. *Si $\mathcal{F}$ es una colección finita de funciones continuas de un continuo en si mismo, una de las cuales es universal con respecto a $\mathcal{F}$, y f es la unión de funciones de $\mathcal{F}$, entonces $\varprojlim(X, f)$ es un continuo.*

En seguida veremos un ejemplo donde ilustramos una aplicación del corolario anterior.

Ejemplo 2.19. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ que es unión de dos funciones continuas, tal que $\varprojlim([0, 1], f)$ es el espacio $\mathcal{F}_\omega$.

Sea $f\colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, uno de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y uno de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, como podemos ver en la Figura 8.
Sean $g\colon [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $g(x) = x$ y $h\colon [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $h(x) = 0$. Es evidente que tanto g como h son funciones continuas. Ahora, definamos $f = g \cup h$. Entonces, haciendo uso del Corolario 2.18, tenemos que $\varprojlim([0, 1], f)$ es un continuo.
A continuación veamos la descripción de este límite inverso. Sean $K = \varprojlim([0, 1], f)$ y $(p_i)_{i=1}^{\infty} \in K$. Si para algún $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $p_n > 0$, entonces $p_n = p_j$ para $j \geq n$, luego con esta observación definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \{(p_n)_{i=1}^{\infty} \in K : p_j = 0 \text{ para } j < n \text{ y } p_j = p_n > 0 \text{ para } j \geq n\}.$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{K_n}$ es un arco, puesto que podemos definir $h_n\colon \overline{K_n} \to [0, 1]$ como $h_n((p_n)_{i=1}^{\infty}) = p_n$. Es claro que h_n es una función continua ya que

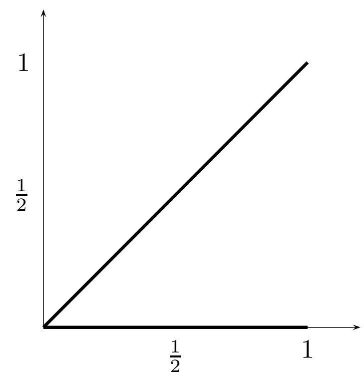

Figura 8: Función semicontinua superiormente que es unión de dos funciones continuas.

es una función proyección y además es un homeomorfismo ya que no es difícil ver que h_n es una biyección cerrada. Ahora, nótese que K_n es de longitud $\frac{1}{2^{n-1}}$, esto es, para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ en K tenemos:

$$\begin{aligned} d((x_i)_{i=1}^{\infty},(y_i)_{i=1}^{\infty}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i} \\ &= 1-\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

También podemos observar que $K_n \cap K_{n+1} = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que el punto $(0,0,\dots) \notin K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim([0,1],f) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}$, es decir el límite inverso generalizado es un abanico, comúnmente llamado $\mathcal{F}_\omega$.

2.3.2. Uniones de funciones continuas de [0,1]

Continuando con la idea de definir funciones semicontinuas superiormente mediante uniones de funciones continuas, en esta sección daremos a conocer algunos resultados de límites inversos generalizados en $[0,1]$. Empezaremos con un lema sencillo que nos será de utilidad en esta sección.

Lema 2.20. *Sea X un continuo y $f\colon X\to X$ una función continua tal que $f(f(X)) = f(X)$ y t es un punto de $f(X)$, entonces existe un punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X,f)$ tal que*

$x_1 = t$.

Demostración. Sea t un punto de $f(X)$ y $x_1 = t$. Como $f(f(X)) = f(X)$, existe un punto $x_2 \in f(X)$ tal que $f(x_2) = x_1$. Similarmente, como $x_2 \in f(X)$, entonces existe $x_3 \in f(X)$ tal que $f(x_3) = x_2$, y así continuando con este proceso obtenemos un punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim(X, f)$ tal que $x_1 = t$. $\square$

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 2.17, donde no vamos a asumir la sobreyectividad de ninguna de las funciones de $\mathcal{F}$.

Teorema 2.21. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ tal que $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ y $G(f)$ es cerrado. Suponga además que $\mathcal{F}$ contiene una función f_1 con las siguientes propiedades:*

1. *$f_1([0,1])$ es no degenerado;*
2. *Si $g \in \mathcal{F}$, entonces existe p_g de $f_1([0,1])$ tal que $f_1(p_g) = g(p_g)$; y*
3. *Si $g \in \mathcal{F}$, entonces $g(f_1([0,1])) = g([0,1])$.*

Si f es la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}$, entonces $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo.

Demostración. Note que como $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ y $G(f)$ es un cerrado de $[0,1]\times[0,1]$, entonces por el Teorema 2.17 se tiene que f es semicontinua superiormente. Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim([0,1], f)$, entonces existe una sucesión $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_i \in \mathcal{F}$ y $\varphi_i(y_{i+1}) = y_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, sean $C_1 = \varprojlim([0,1], f_1)$ y $C_n = \varprojlim([0,1], \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, f_1, \ldots)$ para $n > 1$. Entonces, usando la condición 2 y el Lema 2.16 vamos a tener que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así podemos afirmar que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es conexo.
Usando el lema anterior obtenemos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim([0,1], f_1)$ tal que $x_1 = y_n$. Observe que el punto $p_n = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, x_2, x_3, \ldots)$ pertenece a C_n y además:

$$\begin{aligned}
d((y_i)_{i=1}^{\infty}, (p_{n_i})_{i=1}^{\infty}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i - p_{n_i}|}{2^i} \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|y_i - p_{n_i}|}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - p_{n_i}|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|y_i - p_{n_i}|}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - p_{n_i}|}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \\
&= 1 - \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i}$. Entonces, como cada punto de $\varprojlim([0,1], f)$ pertenece a un continuo que contiene a $\varprojlim([0,1], f_1)$, entonces $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo. $\square$

Sabemos que si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es una función continua y sobreyectiva entonces f es universal, por tanto si $\mathcal{F}$ es una colección finita de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ y $\mathcal{F}$ contiene una función que es sobreyectiva, entonces $\mathcal{F}$ satisface las condiciones del Teorema 2.21. Así vamos a tener el siguiente teorema.

Teorema 2.22. *Si $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es una función semicontinua superiormente que es unión de una colección finita $\mathcal{F}$ de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ y al menos un elemento es sobreyectivo, entonces $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo que contiene una copia de cada límite inverso $\varprojlim([0,1], g_i)_{i=1}^{\infty}$ donde $g_i \in \mathcal{F}$ para cada i.*

Demostración. Usando el Corolario 2.18 tenemos que $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo. $\square$

2.4. Sobre una construcción de una función semicontinua superiormente

En esta sección continuamos con la búsqueda de mostrar que el límite inverso generalizado es un continuo bajo ciertas condiciones. En seguida, veremos cómo se pueden construir funciones semicontinuas superiormente a partir de funciones continuas y subconjuntos cerrados y después, tomando este tipo de funciones como funciones de ligadura mostraremos que el límite inverso es un continuo.

En seguida veremos una serie de resultados que nos ayudan a construir funciones semicontinuas superiormente que a su vez nos sirven para construir continuos con propiedades interesantes.

Definición 2.23. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Para un $A \subseteq X$ cerrado, definimos la función $\widetilde{f}\colon X \to 2^Y$ como:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & si \quad x \notin A, \\ \\ Y & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Ahora mostramos que $\widetilde{f}$ siempre es una función semicontinua superiormente.

Teorema 2.24. *Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $\widetilde{f}\colon X \to 2^Y$ es una función semicontinua superiormente.*

Demostración. Sabemos que $G(f)$ y $A \times Y$ son subconjuntos cerrados de $X \times Y$. No es difícil ver que $G(\widetilde{f}) = G(f) \cup (A \times Y)$. Así, por el Teorema 2.3, tenemos que $\widetilde{f}$ es una función semicontinua superiormente. $\square$

Después de haber definido $\widetilde{f}$, veremos a continuación que el límite inverso generalizado usando este tipo de funciones como funciones de ligadura es un continuo.

Teorema 2.25. *Sea* $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa. Si* A_i *es un subconjunto cerrado de* X_i *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces* $\varprojlim(X_i, \widetilde{f_i})_{i=1}^{\infty}$ *es un continuo.*

Demostración. Usando el teorema 2.24 tenemos que cada $\widetilde{f_i}$ es una función semicontinua superiormente. Ahora, como $\widetilde{f_i}(x)$ es conexo para todo $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X_{i+1}$, por el Teorema 2.11, concluimos que $\varprojlim(X_i, \widetilde{f_i})_{i=1}^{\infty}$ es un continuo. □

Para ilustrar todo lo visto en esta sección podemos usar el Ejemplo 1.19, donde $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es una función construida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \{x\} & si \quad x \notin A, \\ \\ [0,1] & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Donde $A = \{0\}$, entonces usando la Definición 2.23 tenemos que f es una función semicontinua superiormente y por el Teorema 2.25 concluimos que $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo, el cual demostramos en el Ejemplo 1.19 que es un abanico armónico.

2.5. Problemas abiertos

Esta sección tiene como objetivo dar a conocer algunos problemas abiertos sobre la conexidad de los límites inversos generalizados que se han planteado en diferentes artículos.

Pregunta 2.26. Si $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es una función semicontinua superiormente, entonces que condiciones necesarias y suficientes podemos encontrar sobre f tal que $\varprojlim([0,1], f)$ sea conexo.

Pregunta 2.27. Si $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa generalizada, entonces que condiciones necesarias y suficientes podemos encontrar sobre f_i tal que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ sea conexo.

Capítulo 3

Dimensión de los límites inversos generalizados

En [3, pág. 19] y [2, pág. 261] encontramos que los límites inversos usuales no aumentan dimensión; es decir, si $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, donde cada $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es continua y $\dim(X_i) \leq n$ para cada i, entonces $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ tiene dimensión menor o igual a n. Sin embargo, cuando usamos funciones semicontinuas superiormente como funciones de ligadura encontramos que el límite inverso generalizado no preserva dimensión. En [5] encontramos ejemplos en donde el gráfico de la función es $1-$dimensional y cuyo límite inverso es de dimensión mayor o igual que 2 o incluso de dimensión infinita. Antes de ilustrar esos ejemplos es necesario conocer la definición y resultados de dimensión. Cabe mencionar que dado X un espacio topológico, la dimensión de X la notaremos como $\dim(X)$.

3.1. Definiciones, teoremas y ejemplos

Las definiciones que daremos a continuación son muy importantes ya que nos sirven para definir dimensión de un espacio.

Definición 3.1. Sean G una colección finita de conjuntos no vacíos y $m \in \mathbb{N}$. Decimos que el *orden de* G es m, siempre que m es el más grande de los enteros i tal que existen $i+1$ miembros de G con un elemento en común. Además, si $G = \emptyset$, entonces decimos que el *orden de* G es -1.

Definición 3.2. Sean H y G colecciones de conjuntos. Diremos que H es un *refinamiento de* G, siempre que para cada elemento $h \in H$, existe un elemento $g \in G$ tal que $h \subset g$.

La definición de dimensión que daremos a continuación es usada en el estudio de límites inversos, aunque el lector puede estar familiarizado con la definición de dimensión de forma inductiva, que usa sistemas de vecindades abiertas arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen dimensión menor a igual a $n-1$ (esta definición se encuentra en [16, pág. 5]), [16, pág. 81] establece que las dos definiciones son equivalentes.

Definición 3.3. Sea X un espacio métrico, separable y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que *la dimensión de X es menor o igual que m*, siempre que cualquier cobertura finita de abiertos de X puede ser refinada por una cobertura finita de abiertos de X de orden menor o igual que m. Diremos que *la dimensión de X es igual a m*, siempre que $\dim(X) \leq m$ y $\dim(X) \nleq m-1$. Además, diremos que *la dimensión de X es infinita* si $\dim(X) \nleq m$ para cualquier m.

Algunos ejemplos de continuos de dimensión finita son: el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es de dimensión cero, un arco es de dimensión 1 y la $n-$celda es de dimensión n. Un ejemplo de un continuo de dimensión infinita es el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ (ver [16] para detalles y más ejemplos).
Los teoremas que son mencionados a continuación no serán demostrados para no extender este trabajo, pero si los utilizaremos en el desarrollo de este capítulo.
En seguida se mostrará una propiedad de dimensión interesante en la cual podemos observar que la dimensión se conserva bajo la unión arbitraria de espacios métricos compactos [4, pág. 30].

Teorema 3.4. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Si existe un $k \in \{-1,0\} \cup \mathbb{N}$ tal que $\dim(X_i) \leq k$ para todo i, entonces $\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leq k$.*

A continuación mencionamos un teorema que caracteriza la dimensión de los subespacios de un espacio de dimensión finita (ver [4, p. 26]).

Teorema 3.5. *Sea X un espacio métrico compacto y $Y \subseteq X$. Si $\dim(X) \leq n$, entonces $\dim(Y) \leq n$.*

En efecto, como consecuencia del Teorema 3.5, si $\dim(Y)$ es infinita entonces $\dim(X)$ también lo es. El siguiente teorema caracteriza los espacios compactos que son de dimensión cero [16, Teorema 4.7].

Teorema 3.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces $\dim(X) = 0$ si y solamente si X es totalmente disconexo.*

El resultado que viene a continuación puede ser encontrado en [16, Corolario 20.3 pág. 126].

Teorema 3.7. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Si $\dim(X) = 0$, entonces $\dim(X \times Y) = \dim(Y)$.*

En seguida ilustramos un ejemplo donde el gráfico de la función es $1-$ dimensional y cuyo límite inverso es de dimensión mayor o igual que 2 ya que contiene una $2-$ celda.

Ejemplo 3.8. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0,1], f)$ es de dimensión mayor o igual que 2.

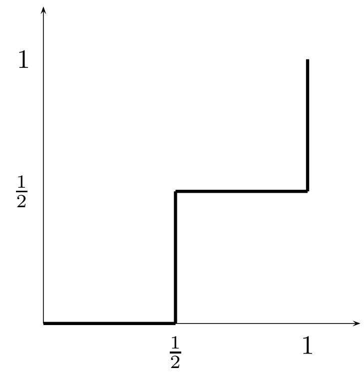

Figura 9: Una función semicontinua superiormente cuyo límite inverso es de dimensión mayor o igual que 2.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de cuatro segmentos de recta, $[0,\frac{1}{2}] \times \{0\}$, $\{\frac{1}{2}\} \times [0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1] \times \{\frac{1}{2}\}$ y $\{1\} \times [\frac{1}{2},1]$.
Notemos a $M = \varprojlim([0,1],f)$. Por el Teorema 2.11, tenemos que M es un continuo. Veamos que M es la unión de una $2-$celda y un arco. Sean i y j números naturales con $j > i+1$ y definamos:

$$D_{i,j} = \left\{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_i \in \left[0,\frac{1}{2}\right], p_j \in \left[\frac{1}{2},1\right], p_k = 0 \text{ si } k < i\right\} \cup \left\{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_k = \frac{1}{2} \text{ si } i < k < j, p_k = 1 \text{ si } k > j\right\}.$$

Note que cada $D_{i,j}$ es homeomorfo a una $2-$celda. Tomemos el caso particular cuando $i = 1$ y $j = 3$. Definamos $g_{1,3}\colon D_{1,3} \to [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$ por $g(t,\frac{1}{2},s,1,1,\ldots) = (t,s)$. Es fácil verificar que $g_{1,3}$ es continua y además una biyección cerrada, por tanto es un homeomorfismo. Tomamos $D = \overline{\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} D_{i,j}}$, entonces vamos a tener que D es una $2-$celda.
Ahora definamos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_1 \in \left[\frac{1}{2},1\right],\ p_k = 1\ k > 1\right\} \cup \left\{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 \in \left[\frac{1}{2},1\right],\ p_k = 1 \text{ si } k > 2\right\}.$$

Veamos que A es un arco. Para ello definamos $\varphi\colon A \to [\frac{1}{2},1]$ como $\varphi(t,1,1,\ldots) = t$ o $\varphi\colon A \to [\frac{1}{2},1]$ como $\varphi(\frac{1}{2},t,1,1,\ldots) = t$. En ambos casos se tiene que φ es una función continua, puesto que es una función proyección y además es un biyección cerrada por consiguiente es un homeomorfismo. Así, vamos a tener que $M = D \cup A$, donde $D \cap A = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,\ldots)\}$. Por ende $\dim(\varprojlim([0,1],f)) = 2$.

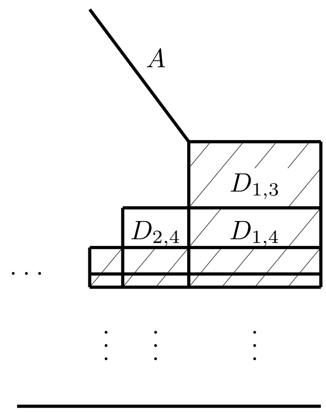

Figura 10: Límite inverso del Ejemplo 3.8.

A continuación mostraremos un ejemplo de un límite inverso generalizado de dimensión infinita, ya que contiene al cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Ejemplo 3.9. Existe una función semicontinua superiormente $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0,1], f)$ contiene al cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$ y $\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$. La gráfica de esta función se muestra en la Figura 11.

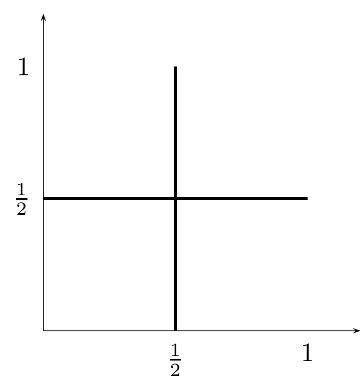

Figura 11: Una función semicontinua superiormente cuyo límite inverso contiene el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Supongamos que $M = \varprojlim([0,1], f)$. Por el Teorema 2.11, tenemos que M es un continuo.

Ahora, veamos que M contiene un cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Definamos el conjunto:

$$B = \left\{ (p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_i = \frac{1}{2} \text{ para } i = 2k \text{ y } p_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ para } i = 2k+1 \right\}.$$

Nótese que B es homeomorfo al cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$, esto es: sea $g\colon B \to \mathcal{Q}$ dada por $g(t_1, \frac{1}{2}, t_2, \frac{1}{2}, t_3, \frac{1}{2}, t_4, \ldots) = (t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots)$. Observe que la función g puede ser nuevamente definida de la siguiente manera, pero antes notemos $a = (t_1, \frac{1}{2}, t_2, \frac{1}{2}, t_3, \frac{1}{2}, t_4, \ldots)$, entonces $g(a) = (\pi_1(a), \pi_3(a), \pi_5(a), \pi_7(a), \ldots)$, así nos podemos dar cuenta que g es una función continua. Ahora, como B es compacto y el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ es de Hausdorff, se deduce que g es un homeomorfismo. Como $B \subset M$ y B es de dimensión infinita ya que es homeomorfo al cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$, por tanto M es de dimensión infinita.

3.2. Límites inversos generalizados de dimensión finita e infinita

Algunos de los resultados que son propios de la teoría de la dimensión van a ser usados en esta sección para demostrar que el límite inverso generalizado es de dimensión finita o infinita, para estos resultados que utilizaremos, omitiremos su prueba para no hacer más extensa la escritura de este trabajo. Sin embargo, estos resultados fueron nombrados al principio de este capítulo.

Recordemos que en la Sección 2.4 definimos una función $\widetilde{f}\colon X \to 2^Y$ a partir de una función $f\colon X \to Y$ continua y $A \subseteq X$ cerrado, esto es:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & si \quad x \notin A, \\ \\ Y & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Usando el Teorema 2.24 se tiene que $\widetilde{f}$ es una función semicontinua superiormente. Ahora, sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa, donde cada $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es una función continua y para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es un cerrado de X_i. Notemos $K = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ y $\widetilde{K} = \varprojlim(X_i, \widetilde{f}_i)_{i=1}^{\infty}$. Por el Teorema 2.25 tenemos que $\widetilde{K}$ es un continuo.

Definición 3.10. Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa, donde cada $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es una función continua y para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es un cerrado de X_i. Para cada $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$ definimos el $m-$ árbol D_m como un subespacio del producto $\prod_{i=m+2}^{\infty} X_i$, que contiene los puntos $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que:

1. $x_1 \in A_{m+2}$;
2. para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \widetilde{f}_{i+m+1}(x_{i+1})$.

Cabe mencionar que si todos los $m-$ árboles son iguales, nosotros notamos a D_m por D, y D recibe el nombre de $m-$ árbol simple.

Comentario 3.11. Podemos observar que $D_m = \pi(\pi_{m+2}^{-1}(\{A_{m+2}\}) \cap (\varprojlim(X_i, \widetilde{f}_i)_{i=1}^{\infty}))$ para cada m, donde $\pi_m \colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_m$ es la función proyección, y $\pi \colon \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod_{i=m+2}^{\infty} X_i$ esta definida por $\pi((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{m+2}^{\infty}$.

En seguida veremos un ejemplo donde todos los $m-$ árboles son iguales, $X_i = [0,1]$, $f_i = f$ y $A_i = \{1\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.12. Existe una función semicontinua superiormente $f \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que todos los $m-$ árboles son iguales.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, uno de $(0,1)$ a $(1,0)$ y uno de $(1,0)$ a $(1,1)$.

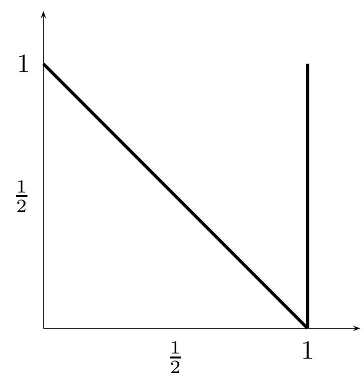

Figura 12: Una función semicontinua superiormente donde todos los $m-$ árboles son iguales.

Empecemos con el caso cuando $m = -1$, pero cabe mencionar que los puntos de todos los $m-$ árboles tienen la primera coordenada igual a 1. Así tenemos que el $-1-$ árbol se define como:

$$D_{-1} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : x_1 = 1 \text{ y para cada } i = 1, 2, \ldots, x_i \in f(x_{i+1})\}.$$

Por tanto, si para algún n tenemos que $x_n = 1$, entonces $x_{n+1} = 0$ o $x_{n+1} = 1$. Si $x_{n+1} = 0$, se deduce que $x_{n+2} = 1$ (es decir, siempre que para algún k se tiene que $x_k = 0$, entonces $x_{k+1} = 1$). Pero si $x_{n+1} = 1$ vuelve a ocurrir los dos casos del inicio y así se sigue con el mismo proceso hasta obtener el esquema de la Figura 13. Ahora si $m = 0$, entonces definimos

$$D_0 = \{(x_i)_{i=2}^{\infty} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : x_2 = 1 \text{ y para cada } i \geq 2, x_i \in f(x_{i+1})\}.$$

No es difícil verificar que los puntos de D_0 tienen el mismo comportamiento que el caso anterior, solo que ya empezamos desde la segunda coordenada (para el caso de D_m con

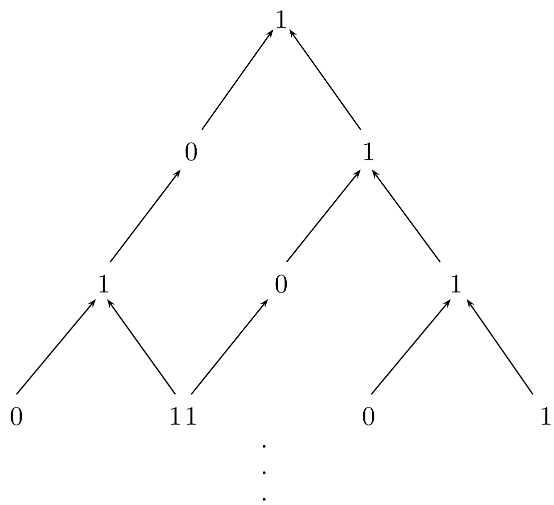

Figura 13: Los $m-$ árboles del Ejemplo 3.12.

$m \notin \{-1, 0\}$ vamos a tener el mismo comportamiento, solo que empezamos desde la $m+2$ coordenada). Así podemos afirmar que para cada $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$, todos los $m-$ árboles son iguales.

Teorema 3.13. *Si $(X_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa y A_n es un cerrado de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces D_m es compacto, para cada m.*

Demostración. Se deduce del Teorema 2.24, que $\varprojlim(X_i, \widetilde{f}_i)_{i=1}^{\infty}$ es compacto. Ahora, como π_{m+2} es continua, $\prod_{i=m+2}^{\infty} X_i$ es compacto y A_{m+2} es cerrado, $\pi_{m+2}^{-1}(\{A_{m+2}\})$ es compacto. Por tanto, como π es continua se tiene que $\pi(\pi_{m+2}^{-1}(\{A_{m+2}\})$ es compacto, así por el Comentario 3.11 vamos a tener que D_m es compacto para cada m. $\square$

Definición 3.14. Sean X_n un continuo, $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$ una función continua y A_n es un cerrado de X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in D_m$ definimos $L(a, m)$ como

$$L(a, m) = \{(f_1(f_2(\dots f_m(x)\dots)), \dots, f_{m-1}(f_m(x)), f_m(x), x, a) : \ x \in X_{m+1}\}$$

para $m \geq 1$, y

$$L(a, 0) = \{(x, a) : \ x \in X_1\}.$$

Lema 3.15. *Si $m \geq 0$ y $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in D_m$, entonces $L(a, m)$ es homeomorfo a X_{m+1}.*

Demostración. Sea $g\colon X_{m+1} \to L(a, m)$ definida por

$$g(x) = (f_1(f_2(\dots f_m(x)\dots)), \dots, f_{m-1}(f_m(x)), f_m(x), x, a).$$

Es claro que g es una biyección continua. Como X_{m+1} es compacto y $L(a,m)$ Hausdorff, tenemos que g es cerrada. Así g es un homeomorfismo. $\square$

Lema 3.16. *Si* $K = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ *y* A_i *es un cerrado de* X_i *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\widetilde{K} = K \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \left(\bigcup_{a \in D_m} L(a,m) \right) \right).$$

Demostración. Es claro que $K \subseteq \widetilde{K}$. Por la Definición 3.14, tenemos que $L(a,m) \subseteq \widetilde{K}$ para todo m y todo $a \in D_m$. Así,

$$\widetilde{K} \supset K \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \left(\bigcup_{a \in D_m} L(a,m) \right) \right).$$

Al contrario, sean $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \widetilde{K} \setminus K$, $l = \min\{k \in \mathbb{N} : x_{k+1} \in A_{k+1},\ x_k \neq f_k(x_{k+1})\}$ y $m = l - 1$. Entonces,

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} = (f_1(f_2(\ldots f_m(x_l)\ldots)), \ldots, f_{m-1}(f_m(x_l)), f_m(x_l), x_l, a),$$

donde $a = (x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots)$. Nótese que para $i \geq 1$, tenemos que $x_{l+i} \in \widetilde{f}_{l+i}(x_{l+i+1})$, por tanto $a \in D_m$ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in L(a,m)$. $\square$

Teorema 3.17. *Si* $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa, entonces* $\bigcup_{a \in D_m} L(a,m)$ *es homeomorfo a* $D_m \times X_{m+1}$ *para todo* $m = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Usando el Teorema 3.13, tenemos que D_m es compacto. Por tanto, $D_m \times X_{m+1}$ es compacto. Ahora, definamos $\varphi\colon D_m \times X_{m+1} \to \bigcup_{a \in D_m} L(a,m)$ como

$$\varphi(a,m) = (f_1(f_2(\ldots f_m(x)\ldots)), \ldots, f_{m-1}(f_m(x)), f_m(x), x, a).$$

Claramente φ es una biyección continua y además cerrada, puesto que $D_m \times X_{m+1}$ es compacto y $\bigcup_{a \in D_m} L(a,m)$ es Hausdorff, por tanto φ es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 3.18. *Si* $K = \varprojlim(X, f)$ *y* A *es un cerrado de* X, *entonces* $\dim(\widetilde{K}) = \dim(D_m \times X)$ *o* $\dim(\widetilde{K}) = \infty$, *para algún* m.

Demostración. Sea $M = \sup\{\dim(D_n) : n = \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}\}$. Si $M = \infty$, entonces por el Lema 3.16 y el Teorema 3.17, tenemos que $\dim(\widetilde{K}) = \infty$. Ahora, si M es finito, entonces existe un m tal que $M = \dim(D_m)$. Como $D_m \times X$ es homeomorfo a $L(a,m)$ y $L(a,m) \subseteq \widetilde{K}$, $\dim(D_m \times X) \leq \dim(\widetilde{K})$.
Por el Lema 3.16, tenemos que

$$\widetilde{K} = K \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{a \in D_n} L(a,n) \right) \right).$$

Por el Teorema 3.17 tenemos que $\bigcup_{a \in D_n} L(a,n)$ es homeomorfo a $D_n \times X$. Como $\dim(K)$ y $\dim(D_n \times X)$ son menores o iguales que $\dim(D_m \times X)$ para cada n, $\dim(\widetilde{K}) \leq \dim(D_m \times X)$. Por lo tanto, $\dim(\widetilde{K}) = \dim(D_m \times X)$. $\square$

El resultado que se muestra a continuación es una consecuencia inmediata del Teorema 3.18.

Corolario 3.19. *Sean* $K = \varprojlim(X, f)$ *y* A *un cerrado de* X*. Si* $\dim(D_n) = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\dim(\widetilde{K}) = \dim(X)$*.*

Demostración. Supongamos que $\dim(D_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando el Teorema 3.18, tenemos que $\dim(\widetilde{K}) = \dim(D_m \times X)$ para todo m. Ahora, por el Teorema 3.7, se deduce que $\dim(\widetilde{K}) = \dim(X)$. $\square$

Ahora probaremos el Teorema 3.22, pero antes enunciaremos los siguientes lemas, los cuales son esenciales para la prueba de dicho teorema. No es difícil demostrar el siguiente lema, su demostración la podemos ver en [1].

Lema 3.20. *Si* X_n *es un continuo para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dim(X_n) > 0$*, entonces* $\dim\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \infty$*.*

Como pudimos observar en las demostraciones del Teorema 3.18 y el Corolario 3.19 hicimos suposiciones de que $\dim(D_m) = \infty$ y $\dim(D_m) = 0$ respectivamente. Pero esta propiedad de los espacios D_m la podemos caracterizar en el siguiente lema. Notemos $f^{-n}(Y) = \{x \in X : \ f^n(x) \in Y\}$.

Lema 3.21. *Sea* (X, f) *una sucesión inversa y* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de cerrados de* X*, donde* $A_i = A$ *para cada* i*. Si* D *es* $m-$ *árbol simple, entonces* D *es compacto y* $\dim(D) = 0$ *o* $\dim(D) = \infty$*.*

Demostración. Sea D un $m-$árbol simple, entonces la primera parte de la demostración la tenemos del Teorema 3.13, de donde D es compacto. Para cada $a, b \in A$ tenemos que $a \in \widetilde{f}(b)$, entonces $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq D$. Nótese que si $\dim(A) > 0$, entonces por el Lema 3.20, tenemos que $\dim\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$, por ende $\dim(D) = \infty$.
Si $\dim(A) = 0$ entonces se tienen los siguientes dos casos:

1. Consideremos los siguientes dos subcasos:

   a) Si A es un espacio degenerado y $f^{-1}(A) \subseteq A$. Como $\widetilde{f}^{-1}(A) = A$, se deduce que D es degenerado. Así $\dim(D) = 0$.

   b) Si A es un espacio no degenerado o $f^{-1}(A) \nsubseteq A$. Veamos que D es totalmente disconexo y que no tiene puntos aislados. Entonces, se deduce de la Definición 3.10 que $D \subseteq \prod_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}^{-n}(A)$. Como $\widetilde{f}^{-n}(A)$ es totalmente disconexo para todo n, $\prod_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}^{-n}(A)$ es totalmente disconexo. Así, D es totalmente disconexo.
   Veamos que D no tiene puntos aislados; esto es, sea $a = (a_1, a_2, \ldots) \in D$ y $\epsilon > 0$. Tomemos un n tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{diam(X)}{2^i} < \epsilon$. Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Por tanto vamos a tener: Primero, si A es no degenerado, entonces podemos tomar $b_{n+1} \in A \setminus \{a_{n+1}\}$. Ahora, para $k \geq n+2$ nosotros

podemos tomar cualquier elemento de $\widetilde{f}^{-1}(\{b_{k-1}\})$ para b_k. Así, tenemos que $b = (b_1, b_2, \ldots) \in D$ y además

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(a_i - b_i)}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d(a_i - b_i)}{2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{diam(X)}{2^i} < \epsilon.$$

Segundo, si A es degenerado y $f^{-1}(A) \nsubseteq A$, entonces consideramos:

- Si $a_n \in A$, entonces tomamos para b_{n+1} un elemento de $\widetilde{f}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cup A$, el cual tiene al menos dos elementos diferentes de a_{n+1}. Ahora, para cualquier $k \geq n+2$ tomamos cualquier elemento de $\widetilde{f}^{-1}(\{b_{k-1}\})$ para b_k. Claramente, tenemos que $b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in D$ y

$$d(a, b) < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{diam(X)}{2^i} < \epsilon.$$

- Si $a_n \notin A$, entonces tomamos a $b_{n+1} \in A$ y elegimos b_{n+2} de $\widetilde{f}^{-1}(A)$ diferente de a_{n+2}, como en el caso anterior. Entonces, para b_k con $k \geq n+3$ tomamos cualquier elemento de $\widetilde{f}^{-1}(\{b_{k-1}\})$. De nuevo vamos a tener que $b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in D$ y $d(a, b) < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{diam(X)}{2^i} < \epsilon$.

2. Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(\widetilde{f}^{-1}(A)) \geq 1$. Ahora, sea

$$H = \{(f^n(x_1), f^{n-1}(x_1), \ldots, f(x_1), x_1, f^n(x_2), f^{n-1}(x_2), \ldots) : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \widetilde{f}^{-n}(A)\}.$$

Entonces, claramente para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^n(x_k) \in \widetilde{f}^n(A) \subseteq A$. Por tanto, $\widetilde{f}(f^n(x_{k+1})) = X$. Así, $x_k \in \widetilde{f}(f^n(x_{k+1}))$ y $H \subseteq D$. Además, nótese que H es homeomorfo al espacio $\prod_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}^{-n}(A)$; esto es, definamos $\psi\colon \prod_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}^{-n}(A) \to H$ por

$$\psi(x_1, x_2, \ldots) = (f^n(x_1), f^{n-1}(x_1), \ldots, f(x_1), x_1, f^n(x_2), f^{n-1}(x_2), \ldots).$$

Es fácil verificar que ψ es continua y además una biyección cerrada, por tanto ψ es un homeomorfismo. Como $\dim(\widetilde{f}^{-1}(A)) \geq 1$, por el Lema 3.20, tenemos que

$$\dim(H) = \dim\left(\widetilde{f}^{-1}(A)\right) = \infty.$$

Así $\dim(D) = \infty$.

$\square$

Teorema 3.22. *Si* $K = \varprojlim(X, f)$ *y* A*es un cerrado de* X*, entonces* $\dim(\widetilde{K}) = \dim(X)$ *o* $\dim(\widetilde{K}) = \infty$.

Demostración. Sea D el $m-$ árbol simple de la sucesión (X, f). Por el Lema 3.16, tenemos que

$$\widetilde{K} = K \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{a \in D} L(a, n) \right) \right).$$

Ahora, usando el Teorema 3.17, tenemos que $\bigcup_{a \in D} L(a, n)$ es homeomorfo a $D \times X$ y por el Lema 3.21, tenemos que $\dim(D) = 0$ o $\dim(D) = \infty$. Entonces, si $\dim(D) = 0$ en virtud del Teorema 3.7, se deduce que $\dim\left(\bigcup_{a \in D} L(a, n)\right) = \dim(X)$. Ahora, recordemos que la dimensión de los límites inversos usuales se preserva, es decir $\dim(K) \leq \dim(X)$, entonces por el Teorema 3.4, se concluye que

$$\dim(\widetilde{K}) = \dim\left(K \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{a \in D} L(a, n) \right) \right) \right) = \dim(X).$$

Por otra parte, si $\dim(D) = \infty$ y como $D \subseteq \widetilde{K}$, entonces por el Teorema 3.5, tenemos que $\dim(\widetilde{K}) = \infty$. □

3.3. Dimensión del límite inverso generalizado con funciones de ligadura que son uniones de funciones continuas

En la Sección 2.3 nosotros estudiamos límites inversos generalizados con funciones de ligadura que son uniones de funciones continuas, además si una de estas funciones es universal con respecto a la colección de las funciones continuas, entonces por el teorema 2.17, tenemos que el límite inverso generalizado es un continuo. A continuación, veremos que si $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(X_i) \leq m$ para cada i, la colección de funciones continuas $\mathcal{F}$ es contable y una de las funciones continuas es universal con respeto a $\mathcal{F}$, entonces $\dim(\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}) \leq m$.
Notemos

$$G_n = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i < n \right\}$$

y a G_n' como el conjunto de puntos $(x_i)_{i=1}^{n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ tal que existen funciones continuas $(g_j)_{j=1}^{n-1}$ de manera que $g_j \in \{f_1^j, f_2^j, \ldots\}$ y $x_j \in g_j(x_{j+1})$ para $1 \leq j < n$.

Teorema 3.23. *Sean $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(X_i) \leq m$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $f_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^i$, donde $f_j^i \colon X_{j+1} \to X_j$ es una función continua para cada j, entonces $\dim(\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}) \leq m$. Además, si $m = 1$ y existe una sucesión de funciones continuas $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $g_i \in \{f_1^i, f_2^i, \ldots\}$ para cada i y $\varprojlim(X_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ es no degenerado, entonces $\dim(\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}) = 1$.*

Demostración. Sea $(g_i)_{i=1}^{n-1}$ una sucesión finita de funciones continuas tal que $g_j \in \{f_1^j, f_2^j, \ldots\}$, para $1 \leq j < n$. Entonces, X_n es homeomorfo a $\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) =$

$\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_n^{'} : \ x_i \in g_i(x_{i+1})$ para $1 \leq i < n\}$; esto es: sea $h\colon X_n \to \Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ definida por

$$h(t) = (g_1(g_{n-1}(t)), g_2(g_{n-1}(t)), \ldots, g_{n-1}(t), t).$$

Es evidente que h es una biyección continua y además es cerrada, puesto que X_n es compacto y $\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ es Hausdorff. Así h es un homeomorfismo.
Por tanto, $\dim(\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})) \leq m$. Esto implica que la dimensión de $G_n^{'}$ es menor o igual que m ya que $G_n^{'}$ es la unión numerable de miembros de $\{\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) : g_i \in \{f_1^i, f_2^i, \ldots\}$ para $1 \leq i < n\}$.
Supongamos que $n > 2$. Como $\dim(G_n^{'}) \leq m$, por la Definición 3.3, tenemos que existe una colección $\mathcal{H}_n^{'}$ de subconjuntos abiertos de $\prod_{i=1}^{n} X_i$ que cubren a $G_n^{'}$ tal que el orden de $\mathcal{H}_n^{'}$ es menor o igual que m y el más grande de los diámetros de los conjuntos en $\mathcal{H}_n^{'}$ es menor que $\frac{1}{2^n}$. Nótese que si $R \in \mathcal{H}_n^{'}$, entonces $R \times \prod_{i>n} X_i$ es un subconjunto de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ teniendo diámetro menor que $\frac{1}{2^{n-1}}$. Sea $\mathcal{H}_n = \left\{R \times \prod_{i>n} X_i : \ R \in \mathcal{H}_n^{'}\right\}$.
Entonces, $\mathcal{H}_n$ es una colección finita de conjuntos abiertos que cubren a G_n (y por tanto a $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$) tal que el orden de $\mathcal{H}_n$ es menor o igual a m y el más grande de los diámetros de los conjuntos en $\mathcal{H}_n$ es menor que $\frac{1}{2^{n-1}}$. Así, $\dim(\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty})$ es menor o igual que m. No es difícil verificar que, si $m = 1$ y existe una sucesión $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $g_i \in \{f_1^i, f_2^i, \ldots\}$ para cada i y $\varprojlim(X_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ es no degenerado, entonces $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ contiene un continuo no degenerado y su dimensión es 1. □

En seguida veremos una aplicación del Teorema 3.23, en donde deduciremos que el límite inverso generalizado es de dimensión uno. Pero antes enunciaremos el Teorema 2.21 de manera completa.

Teorema 3.24. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ tal que $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$ y $G(f)$ es un cerrado de $[0,1] \times [0,1]$. Suponga además que $\mathcal{F}$ contiene una función f_1 con las siguientes propiedades:*

1. *$f_1([0,1])$ es no degenerado;*
2. *Si $g \in \mathcal{F}$, entonces existe p_g de $f_1([0,1])$ tal que $f_1(p_g) = g(p_g)$; y*
3. *Si $g \in \mathcal{F}$, entonces $g(f_1([0,1])) = g([0,1])$.*

Si f es la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}$, entonces $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo de dimensión 1.

Demostración. La primera parte es la prueba del Teorema 2.21. Veamos que $\varprojlim([0,1], f)$ es de dimensión 1. Por la condición 1 y el Lema 2.20, se deduce que $\varprojlim([0,1], f_1)$ es un continuo no degenerado. Así, por el Teorema 3.23 se tiene que $\dim(\varprojlim([0,1], f)) = 1$. □

Una ilustración de lo visto anteriormente la podemos ver en el Ejemplo 2.19, allí probamos que el límite inverso generalizado $\varprojlim([0,1], f)$ es un continuo, donde $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es $f = g \cup h$ tal que $g(x) = x$ y $h(x) = 0$ para $x \in [0,1]$. Ahora, nótese que

$f([0,1]) = [0,1]$, además $f(0) = g(0)$ y $g(f([0,1])) = g([0,1])$, entonces por el Teorema 3.24, deducimos que $\varprojlim([0,1], f)$ tiene dimensión 1.

Capítulo 4

Familia de funciones semicontinuas superiormente en $[0, 1]$

Continuando con el estudio de los límites inversos generalizados, investigamos límites inversos de familias de funciones semicontinuas superiormente en $[0, 1]$, donde podemos encontrar continuos con propiedades bastante importantes, por ejemplo del Teorema 4.15 tenemos que el límite inverso generalizado con una función de ligadura es la clausura de un rayo. Damos también condiciones suficientes para que un límite inverso generalizado con este tipo de funciones sea un continuo indescomponible. Con esto expandimos la lista de ejemplos de continuos indescomponibles producido por funciones semicontinuas superiormente.

4.1. Definición de la Familia

Empezamos mostrando algunas definiciones conocidas pero indispensables para el desarrollo de este capítulo.

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico.

1. Decimos que X es una *gráfica* si es un continuo el cual puede ser escrito como la unión finita de arcos, tal que cada par de arcos son disjuntos o solo se intersecan en uno o en ambos de sus puntos finales.

2. Diremos que X es un *árbol* si es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.

3. Un continuo X es *tipo arco* si es homeomorfo a el límite de una sucesión inversa de arcos.

4. Un continuo X es *tipo árbol* si es homeomorfo a el límite de una sucesión inversa de árboles.

Cabe mencionar que ningún continuo tipo arco contiene un triodo, ver [15, Teorema 12.4]. En seguida mostraremos la definición de la familia de funciones semicontinuas superiormente con la cual vamos a trabajar durante el desarrollo de esta sección.

Definición 4.2. Sean $a \in [0,1]$ y $f_a\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},1)$, uno de $(\frac{1}{2},1)$ a $(\frac{1}{2},a)$ y uno de $(\frac{1}{2},a)$ a $(1,1)$ como ilustramos en la Figura 14.

En [9, Teorema 4.2] se afirma que con las condiciones anteriores el límite inverso $\varprojlim([0,1], f_a)$ es un continuo tipo árbol.

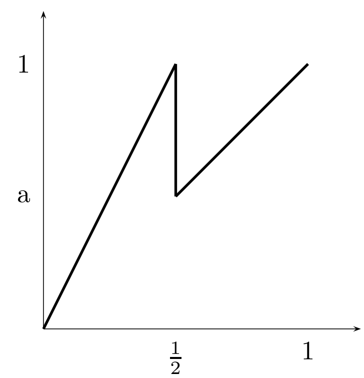

Figura 14: Familia de funciones semicontinuas superiormente en $[0,1]$.

A continuación empezamos ilustrando los siguientes casos particulares:

1. Si $a = \frac{1}{2}$, entonces el límite inverso no es tipo arco.
2. Si $a = 0$, entonces el límite inverso es indescomponible y tipo arco.
3. Si $a = 1$, entonces f_a es una función continua y el límite inverso es un arco.

Entonces veamos el primer caso.

Ejemplo 4.3. Existe una función semicontinua superiormente $f_{\frac{1}{2}}\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0,1], f_{\frac{1}{2}})_{i=1}^{\infty}$ no es tipo arco.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f_{\frac{1}{2}}\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},1)$, uno de $(\frac{1}{2},1)$ a $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y uno de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a $(1,1)$. Ver la Figura 15.
Supongamos que $K = \varprojlim([0,1], f_{\frac{1}{2}})$. Veamos que K no es tipo arco. Para probar esto, mostramos que K contiene un triodo (ver [15, Definición 11.22]). Entonces, definamos los siguientes conjuntos

- $A_1 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K : \ x_1 \in [\frac{1}{2},1] \text{ y } x_i = \frac{1}{2} \text{ para } i > 1\}$.

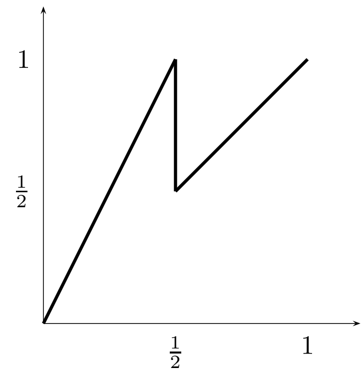

Figura 15: Una función semicontinua superiormente cuando $a = \frac{1}{2}$.

- $A_2 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K : \ x_1 = x_2 \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ y } x_i = \frac{1}{2} \text{ para } i > 2\}$.
- $A_3 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K : \ x_1 = x_2 = x_3 \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ y } x_i = \frac{1}{2} \text{ para } i > 3\}$.

Veamos que cada uno de los tres conjuntos anteriores es un arco. Sean $T_1 \colon A_1 \to [\frac{1}{2}, 1]$ dada por $T_1(t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots) = t$; $T_2 \colon A_2 \to [\frac{1}{2}, 1]$ dada por $T_2(t, t, \frac{1}{2}, \ldots) = t$ y $T_3 \colon A_3 \to [\frac{1}{2}, 1]$ dada por $T_3(t, t, t, \frac{1}{2}, \ldots) = t$. No es difícil verificar que T_1, T_2 y T_3 son funciones continuas ya que son funciones proyección y además son biyecciones cerradas, así cada una es un homeomorfismo. Otra observación que tenemos es que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots)\}$, así $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo tal que $M \subset K$. Por [15, Teorema 12.4], K no es tipo arco.
Nótese que para $a = \frac{1}{2}$, además de saber que K es un continuo, por el Teorema 2.11, concluimos que K no es tipo arco. Es importante resaltar que los continuos tipo arco son los límites inversos (usuales) de arcos.
Para el desarrollo del segundo caso vamos a tener en cuenta la Definición 4.4, además mostramos algunos ejemplos y resultados que involucran esta definición.

Definición 4.4. Sea $(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada y $M = \varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$. Diremos que M tiene la *propiedad de la proyección completa* siempre que si H es un subcontinuo de M tal que $\pi_n(H) = X_n$ para un número de infinitos n, entonces $H = M$.

El siguiente ejemplo ilustra una función semicontinua superiormente cuyo límite inverso generalizado tiene la propiedad de la proyección completa.

Ejemplo 4.5. Existe una función semicontinua superiormente $f_0 \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim ([0,1], f_0)_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de la proyección completa.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f_0 \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$, uno de $(\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, 0)$ y uno de $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(1,1)$. Ver la Figura 16.

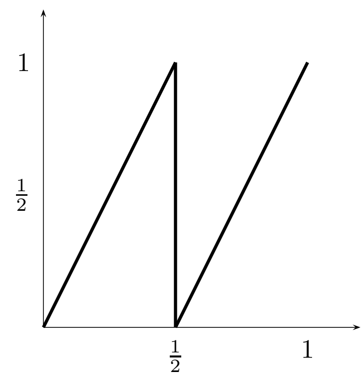

Figura 16: Una función semicontinua superiormente cuyo límite inverso tiene la propiedad de la proyección completa.

Veamos primero que $G_n^{'} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{n+1}[0,1] : x_i \in f(x_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n\}$ es un arco con puntos finales $(0,\ldots,0)$ y $(1,\ldots,1)$. Procedemos por inducción. Para el primer caso tenemos que $G_1^{'}$ es un arco ya que $G_1^{'} = (G(f))^{-1}$.

Ahora, supongamos que $G_k^{'}$ es un arco y veamos que $G_{k+1}^{'}$ es un arco. Entonces sea $p = (p_1,\ldots,p_{k+2}) \in G_{k+1}^{'}$ tal que $p_{k+2} \notin \{0,1\}$. Consideremos los siguientes dos casos: $p_{k+2} \neq \frac{1}{2}$ y $p_{k+2} = \frac{1}{2}$. Si $0 < p_{k+2} < \frac{1}{2}$, entonces $p_{k+1} \notin \{0,1\}$, así $G_k^{'} \setminus \{(p_1,\ldots,p_{k+1})\}$ es disconexo, es decir existen $A_{k,0}$ y $A_{k,1}$ conjuntos mutuamente separados tal que $G_k^{'} \setminus \{p\} = A_{k,0} \cup A_{k,1}$, $(0,\ldots,0) \in A_{k,0}$ y $(1,\ldots,1) \in A_{k,1}$. A continuación definamos los siguientes conjuntos

- $A_{k+1,0} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} < \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,0}\}$,
- $A_{k+1,1} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} \geq \frac{1}{2}$ o $x_{k+2} < \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,1}\}$.

Nótese que $(0,\ldots,0) \in A_{k+1,0}$ y $(1,\ldots,1) \in A_{k+1,1}$; además $A_{k+1,0}$ y $A_{k+1,1}$ son mutuamente separados y $G_{k+1}^{'} \setminus \{p\} = A_{k+1,0} \cup A_{k+1,1}$. Así $G_{k+1}^{'}$ es un arco. Ahora, si $\frac{1}{2} < p_{k+2} < 1$ entonces tenemos que

- $A_{k+1,0} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} \leq \frac{1}{2}$ o $x_{k+2} > \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,0}\}$,
- $A_{k+1,1} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} \geq \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,1}\}$.

Nótese nuevamente que $(0,\ldots,0) \in A_{k+1,0}$ y $(1,\ldots,1) \in A_{k+1,1}$. Además, $A_{k+1,0}$ y $A_{k+1,1}$ son mutuamente separados y $G_{k+1}^{'} \setminus \{p\} = A_{k+1,0} \cup A_{k+1,1}$. Así $G_{k+1}^{'}$ es un arco. Si $p_{k+2} = \frac{1}{2}$, existen tres posibilidades: $p_{k+1} = 0$, $p_{k+1} = 1$ y $p_{k+1} \notin \{0,1\}$. Supongamos que $p_{k+1} = 0$, entonces tenemos que $p = (0,\ldots,0,\frac{1}{2})$ y

- $A_{k+1,0} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} \leq \frac{1}{2}\} \setminus \{p\}$,
- $A_{k+1,1} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'} : x_{k+2} > \frac{1}{2}\}$.

Es fácil verificar que $p \in \overline{A_{k+1,1}}$, esto deduce que $A_{k+1,0}$ y $A_{k+1,1}$ son mutuamente separados, así volvemos a concluir que $G^{'}_{k+1}$ es un arco. El caso de que $p_{k+1} = 1$ es similar al anterior. Ahora, si $p_{k+1} \notin \{0,1\}$, entonces $G^{'}_{k} \setminus \{p\} = A_{k,0} \cup A_{k,1}$, donde $(0,\ldots,0) \in A_{k,0}$ y $(1,\ldots,1) \in A_{k,1}$ y la separación deseada para $G^{'}_{k+1}$ sería:

- $A_{k+1,0} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G^{'}_{k+1} : x_{k+2} < \frac{1}{2}$ o $x_{k+2} = \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,0}\}$ y
- $A_{k+1,1} = \{(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G^{'}_{k+1} : x_{k+2} > \frac{1}{2}$ o $x_{k+2} = \frac{1}{2}$ y $(x_i)_{i=1}^{k+1} \in A_{k,1}\}$.

Por tanto, podemos afirmar que $G^{'}_{k+1}$ es un arco. Ahora supongamos que H es un subcontinuo de $\varprojlim([0,1], f_a)$ tal que $\pi_i(H) = [0,1]$ para $i \in \mathbb{N}$. Sea $p = (p_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim([0,1], f_a)$ tal que $p \notin \{(0,\ldots,0),(1,\ldots,1)\}$. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ tal que existe un m, $m \geq n$ donde $p_{m+1} \notin \{0,1\}$ y $\pi_{m+1}(H) = [0,1]$. Entonces, $(p_1,\ldots,p_{m+1}) \in G^{'}_{m}$ y $G^{'}_{m} \setminus \{(p_1,\ldots,p_{m+1})\} = A_{m,0} \cup A_{m,1}$, donde $(0,\ldots,0) \in A_{m,0}$ y $(1,\ldots,1) \in A_{m,1}$. Note que, $H \cap (A_{m,0} \times \mathcal{Q}) \neq \emptyset$ y $H \cap (A_{m,1} \times \mathcal{Q}) \neq \emptyset$. Además, $A_{m,0} \times \mathcal{Q}$ y $A_{m,1} \times \mathcal{Q}$ son mutuamente separados. Así, H contiene un punto en la frontera de cada uno de estos conjuntos. Consecuentemente, H contiene un punto $q = (q_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $(q_1,\ldots,q_{m+1}) = (p_1,\ldots,p_{m+1})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d(p,q) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|p_i - q_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{|p_i - q_i|}{2^i} \\ &< \sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \\ &< \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Esto implica que $p \in \overline{H}$. Así $H = \varprojlim([0,1], f_a)$, esto quiere decir que el límite inverso generalizado tiene la propiedad de la proyección completa.

Por otra parte, encontramos ejemplos de límites inversos generalizados que no satisfacen la proyección completa, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6. Existe una función semicontinua superiormente $f_{\frac{1}{2}} : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0,1], f_{\frac{1}{2}})$ no tiene la propiedad de la proyección completa.

Sean $X_i = [0,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f_{\frac{1}{2}} : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, uno de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},1)$, uno de $(\frac{1}{2},1)$ a $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y uno de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a $(1,1)$ ver Figura 15.
Sea $M = \varprojlim([0,1], f_a)$. Definamos los siguientes conjuntos:

- $A_0 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in M : x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $x_{k+1} = \frac{x_k}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}\}$.
- $A_{2n-1} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in M : x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y $x_k = x_1$ para $1 \leq k \leq n$ y $x_{k+1} = \frac{x_k}{2}$ para $k > n\}$.
- $A_{2n} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in M : x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y $x_k = x_1$ para $1 \leq k \leq n$ y $x_k = \frac{1}{2^{k-n}}$ para $k > n\}$.

Veamos que para cada $i \geq 0$, A_i es un arco. Entonces, definamos $\varphi_0 \colon [0, \frac{1}{2}] \to A_0$ como $\varphi_0(t) = (t, \frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \ldots)$; $\varphi_{2n-1} \colon [\frac{1}{2}, 1] \to A_{2n-1}$ dada por $\varphi_{2n-1}(t) = (t, \ldots, t, \frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \ldots)$ y $\varphi_{2n} \colon [\frac{1}{2}, 1] \to A_{2n}$ dada por $\varphi_{2n}(t) = (t, \ldots, t, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$. No es difícil verificar que cada una de las funciones anteriores son homeomorfismos ya que son biyecciones continuas y cerradas. Ahora, nótese que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi_k(p_0) = \frac{1}{2^k}$, donde $p_0 \in A_0$. Además, también tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$: primero $\pi_k(p_{2n-1}) = 1$ si $1 \leq k \leq n$ y $\pi_k(p_{2n-1}) = \frac{1}{2^{k-n}}$ para $k > n$, donde $p_{2n-1} \in A_{2n-1}$, y segundo $\pi_k(p_{2n}) = \frac{1}{2}$ si $1 \leq k \leq n$ y $\pi_k(p_{2n}) = \frac{1}{2^{k-n}}$ para $k > n$, donde $p_{2n} \in A_{2n}$. Por otra parte, observemos que $A_{2n} \cap A_{2n-1} = \{(1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces R es un rayo topológico de manera que $\overline{R} \setminus R = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in M : x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $x_n = x_1$ para $n \in \mathbb{N}\}$. Finalmente, tenemos que $\overline{R}$ es un subcontinuo propio de M puesto que no contiene al punto $\{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)\}$ y $\pi_i(\overline{R}) = [0, 1]$ para cada i, entonces M no tiene la propiedad de la proyección completa.

En seguida, probaremos el Lema 4.7 y el Teorema 4.8 qué nos permiten saber bajo que condiciones el límite inverso generalizado es un continuo indescomponible.

Lema 4.7. *Sea X un arco tal que es la unión de dos subcontinuos propios H y K. Si U y V son subconjuntos abiertos, conexos y disjuntos de X, entonces uno de U y V es un subconjunto de uno de H y K.*

Demostración. Sean X un arco y p un punto de corte de X. Note que el punto p no puede pertenecer a U y V a la vez. Supongamos que $p \notin U$ y sea q un punto final de X tal que U es un subconjunto del arco $[p, q]$. Ahora, supongamos que $q \in H$. Tenemos dos posibilidades: primero si $p \in H$, esto implica que $U \subseteq H$ y segundo, si $p \notin H$ y U no es un subconjunto ni de H ni de K, entonces $H \cap K \subseteq U$.
Observe que si $q \in U$, entonces $X \setminus U \subseteq K$. Así, $V \subseteq K$. Por otra parte, si $q \notin U$, entonces $X \setminus U = C \cup D$, donde C y D son cerrados, conexos y disjuntos con $q \in C$; esto implica que $V \subseteq C$ o $V \subseteq D$. Como $C \subseteq H$ y $D \subseteq K$, entonces tenemos que $V \subseteq H$ o $V \subseteq K$. $\square$

Teorema 4.8. *Suponga que $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que X_i es un arco para cada i. Si $f_i \colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ es una función semicontinua superiormente tal que:*

1. *existen subconjuntos abiertos, conexos y disjuntos U y V de X_{i+1} tal que $f_i|_U$ y $f_i|_V$ son funciones continuas y $\overline{f_i(U)} = \overline{f_i(V)} = X_i$;*
2. *$\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es un continuo con la propiedad de la proyección completa.*

Entonces, $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ *es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que $M = \varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es descomponible; es decir, $M = H \cup K$, donde H y K son subcontinuos propios de M. Como M tiene la propiedad de la proyección completa, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\pi_m(H) \neq X_m$ y $\pi_m(K) \neq X_m$. Ahora, por hipótesis tenemos que f_n cumple que existen subconjuntos abiertos, conexos y disjuntos U y V de X_{n+1} tal que $f_n|_U$ y $f_n|_V$ son funciones continuas y $\overline{f_n(U)} = \overline{f_n(V)} = X_n$. Como $\pi_{n+1}(H)$ y $\pi_{n+1}(K)$ son subcontinuos cuya unión es X_{n+1}, entonces por el Lema 4.7, tenemos que uno de U y V es un subconjunto de uno de $\pi_{n+1}(H)$ y $\pi_{n+1}(K)$. Supongamos que $U \subseteq \pi_{n+1}(H)$. Si $t \in f_n(U)$ entonces existe un punto $s \in U$ tal que $f_n(s) = t$. Como $U \subseteq \pi_{n+1}(H)$, se deduce que existe un punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in H$ tal que $x_{n+1} = s$. Entonces $x_n = t$ y así, $t \in \pi_n(H)$. Esto implica que $f_n(U) \subseteq \pi_n(H)$. Sin embargo, como $\overline{f_n(U)} = X_n$, esto contradice que $\pi_n(H) \neq X_n$. $\square$

En seguida veremos el desarrollo del segundo caso cuando $a = 0$.

Ejemplo 4.9. Existe una función semicontinua superiormente $f_0 \colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0, 1], f_0)_{i=1}^{\infty}$ es indescomponible y tipo arco.

Sean $X_i = [0, 1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f_0 \colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de tres segmentos de recta, uno de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$, uno de $(\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, 0)$ y uno de $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(1, 1)$. Ver la Figura 16.
En el Ejemplo 4.5, demostramos que el límite inverso generalizado $\varprojlim([0, 1], f_{\frac{1}{2}})$ tiene la propiedad de la proyección completa. Ahora, observe que $U = (0, \frac{1}{2})$ y $V = (\frac{1}{2}, 1)$ son conjuntos abiertos, conexos y disjuntos de $[0, 1]$, $f|_U$ y $f|_V$ son funciones continuas y $\overline{f(U)} = \overline{f(V)} = [0, 1]$. Así, usando el Teorema 4.8 podemos afirmar que $\varprojlim([0, 1], f_a)$ es indescomponible. Para ver que $\varprojlim([0, 1], f_a)$ es tipo arco es necesario tener en cuenta el Teorema 4.15 que será demostrado posteriormente, por tal motivo dejamos pendiente esta parte del ejemplo.
En seguida veremos el desarrollo del tercer caso, donde el límite inverso es un arco y $a = 1$.

Ejemplo 4.10. Existe una función semicontinua superiormente $f_1 \colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ tal que $\varprojlim([0, 1], f_1)_{i=1}^{\infty}$ es un arco.

Sean $X_i = [0, 1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f_1 \colon [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ una función semicontinua superiormente cuya gráfica consiste de dos segmentos de recta, uno de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$ y uno de $(\frac{1}{2}, 1)$ a $(1, 1)$. Ver la Figura 17.
Sea $M = \varprojlim([0, 1], f_1)_{i=1}^{\infty}$. Definamos el siguiente conjunto

$$A = \left\{ (p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Probemos que $\overline{A}$ es un arco. Sea $\tau \colon [0, \frac{1}{2}] \to \overline{A}$ definida por $\tau(t) = (t, \frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \frac{t}{8}, \ldots)$. Es evidente que τ es una función continua y biyectiva, además es cerrada puesto que $[0, \frac{1}{2}]$

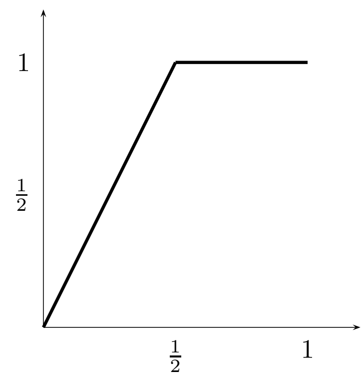

Figura 17: Una función semicontinua superiormente que su límite inverso es un arco.

es compacto y $\overline{A}$ es Hausdorff. Por lo anterior, τ es un homeomorfismo.
Ahora, sea

$$B = \left\{ (p_i)_{i=1}^{\infty} \in M : p_1 = 1,\ p_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ y } p_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ para } \ i \geq 3 \right\}.$$

Observe que B es un arco, ya que $\psi\colon [\frac{1}{2}, 1] \to B$ dada por $\psi(s) = (1, s, \frac{s}{2}, \frac{s}{4}, \frac{s}{8}, \ldots)$ es un homeomorfismo. Además, $\overline{A} \cap B = \{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)\}$. No es difícil ver que, $M = \overline{A} \cup B$.

A continuación veremos algunos resultados que usaremos para la demostración del Teorema 4.14.

Lema 4.11. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios continuos y $f_i\colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente para cada i. Si $p \in X_{n+1}$ tal que $f_i(p)$ es un solo punto para $1 \leq i \leq n$, entonces existe un único punto $(x_i)_{i=1}^{n+1} \in G_n^{'}$ tal que $x_{n+1} = p$.*

Demostración. Procedemos inductivamente. Para el primer caso, obsérvese que si $p \in X_2$ y $f_1(p)$ es un solo punto, entonces el punto $(x_1, x_2) \in G_1^{'}$ con $x_2 = p$, ya que $G_n^{'} = G(f^{-1})$. Supongamos que se cumple para K. Sea $p \in X_{k+2}$ tal que $f_i(p)$ es un solo punto para $1 \leq i \leq k+1$. Veamos que existe un único punto $(x_i)_{i=1}^{k+2} \in G_{k+1}^{'}$ tal que $x_{k+2} = p$. Nótese que por hipótesis el punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_k^{'}$ es único y $x_{k+1} = q$. Si $q \in f_{k+1}(p)$, entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G_{k+1}^{'}$ tal que $p = x_{k+2}$. $\square$

Teorema 4.12. *Si X es un continuo, $f\colon X \to 2^X$ una función semicontinua superiormente, Y un subconjunto compacto de X, y $g\colon Y \to 2^X$ una función semicontinua superiormente tal que $G(g) \subseteq G(f)$ y $g^{-1}\colon X \to Y$ es una función continua, entonces $\varphi\colon G_n^{'} \to \varprojlim(X, f)$ dada por $\varphi((x_i)_{i=1}^{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, g^{-1}(x_{n+1}), g^{-2}(x_{n+1}), \ldots)$ es una inmersión.*

Demostración. Es evidente que φ es una función continua. Ahora, supongamos que $\varphi((x_i)_{i=1}^{n+1}) = \varphi((y_i)_{i=1}^{n+1})$ para $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ y $(y_i)_{i=1}^{n+1}$ en G_n'. Entonces,

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}, g^{-1}(x_{n+1}), g^{-2}(x_{n+1}), \ldots) = (y_1, \ldots, y_{n+1}, g^{-1}(y_{n+1}), g^{-2}(y_{n+1}), \ldots).$$

Así, $(x_i)_{i=1}^{n+1} = (y_i)_{i=1}^{n+1}$; esto quiere decir que φ es inyectiva. Por otra parte, nótese que para $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}, g^{-1}(y_{n+1}), g^{-2}(y_{n+1}), \ldots)$ donde $g^{-k}(y_{n+1}) \in Y$ para $k \in \mathbb{N}$, existe $x = (y_i)_{i=1}^{n+1} \in G_n'$ tal que $\varphi(x) = y$. Así φ es sobreyectiva. Por tanto, φ es una inmersión. □

El siguiente teorema es una generalización del anterior y contiene más información en su conclusión, pero omitiremos su prueba; pues para su demostración es necesario definir nuevos conceptos y resultados que se salen de los alcances de este trabajo. Sin embargo, el lector interesado puede consultar [8].

Teorema 4.13. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios continuos y $f_i \colon X_{i+1} \to 2^{X_i}$ una función semicontinua superiormente para cada i. Si existe un k tal que para $i \geq k$, $G(f_i)$ contiene la gráfica de una función semicontinua superiormente g_i de tal manera que $g_i^{-1} \colon X_i \to X_{i+1}$ es una función continua, entonces $\varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a un límite inverso de copias de los espacios G_n' con funciones de ligadura continuas que son retracciones.*

En seguida veremos un teorema que es la generalización del Teorema de Bennett, este último muy conocido en la teoría de límites inversos (ver [14, Teorema 6]).

Teorema 4.14. *Supongamos que $f \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es una función semicontinua superiormente tal que $f(0) = \{0\}$. Sean $0 < a < c < 1$ y $h \colon [0,c] \to [0,1]$ un homeomorfismo con un punto no fijo en $[a,c]$ tal que $h = f|_{[0,c]}$ y $f([a,1]) \subseteq [a,1]$. Sean $g = f|_{[a,1]}$, $K = \varprojlim([0,1], g)$ y $M = \varprojlim([0,1], f)$. Si G_n' es un arco para cada n, entonces M es un continuo tipo arco que es la clausura de un rayo R con residuo K.*

Demostración. Como cada G_n' es un arco para cada n, por el Teorema 4.13, tenemos que M es tipo arco. Ahora, para cada n y usando el Teorema 4.12, tenemos que $\varphi_n((x_i)_{i=1}^{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, g^{-1}(x_{n+1}), g^{-2}(x_{n+1}), \ldots)$ es una inmersión. Sea el arco $\alpha_n = \varphi_n(G_n')$ para cada n. Note que $\alpha_n \subseteq \alpha_{n+1}$, entonces $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ es un rayo. Ahora, sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in K$. Observe que el punto

$$y_i = (x_1, \ldots, x_{i+1}, h^{-1}(x_{i+1}), h^{-2}(x_{i+1}), \ldots) \notin K,$$

ya que $h^{-1}(x_{i+1})$, $h^{-2}(x_{i+1}), \ldots$ converge a un punto fijo de h que no está en $[a,1]$. Entonces, y_1, $y_2, \ldots$ es una sucesión de puntos de R que convergen a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Es decir, $\overline{R} \setminus R = K$. □

Tras ver en los Ejemplos 4.3, 4.9 y 4.10 propiedades interesantes de los limites inversos generalizados con funciones de ligadura f_a, nuestro propósito ahora es dar a conocer algunas características importantes de éste tipo de límites inversos, para ello vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.15. *Suponga que $a \in [0,1)$. Sea f_a una función semicontinua superiormente dada por la Definición 4.2. Entonces*

1. $\varprojlim([0,1], f_a)$ *es tipo arco si y solamente si* $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Si* $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\varprojlim([0,1], f_a)$ *es la clausura de un rayo con residuo* $\varprojlim([a,1], g_a)$ *donde* $g_a = f|_{[a,1]}$.

3. *Si* $a \in (\frac{1}{2}, 1]$, *entonces* $\varprojlim([0,1], f_a)$ *es un arco.*

Demostración. Primero obsérvese que $G(f_a^{-1})$ es la unión de tres funciones continuas. Estas son:

- $\varphi_1 \colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $\varphi_1(x) = \frac{x}{2}$.
- $\varphi_2 \colon [a,1] \to [0,1]$ dada por $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}$.
- $\varphi_3 \colon [a,1] \to [0,1]$ dada por $\varphi_1(x) = \left(\frac{x-1}{2(1-a)}\right) + 1$.

Supongamos que $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $G_n^{'}$ es un arco para cada n. Procedemos inductivamente. Nótese que $G_1^{'} = G(f_a^{-1})$ es un arco que contiene al punto $(1,1)$, esto lo obtenemos por las tres funciones dadas anteriormente. Ahora, supongamos que $G_k^{'}$ es un arco que contiene al punto $(1,1,\ldots,1)$. Entonces, por el Lema 4.11, tenemos que un solo punto de $G_k^{'}$ tiene la última coordenada a porque $f_a^i(a)$ es un solo punto para $1 \leq i \leq k$. Esto implica que $A = G_k^{'} \cap ([0,1]^k \times [a,1])$ es un arco. En seguida, definamos las siguientes funciones, que no es difícil comprobar que cada una es una inmersión:

- $\tau_1 \colon G_k^{'} \to [0,1]^{k+2}$ dada por $\tau_1(x_1,\ldots,x_{k+1}) = (x_1,\ldots,x_{k+1},\varphi_1(x_{k+1}))$.
- $\tau_2 \colon A \to [0,1]^{k+2}$ dada por $\tau_2(x_1,\ldots,x_{k+1}) = (x_1,\ldots,x_{k+1},\varphi_2(x_{k+1}))$.
- $\tau_3 \colon A \to [0,1]^{k+2}$ dada por $\tau_3(x_1,\ldots,x_{k+1}) = (x_1,\ldots,x_{k+1},\varphi_3(x_{k+1}))$.

Notemos $A_1 = \tau_1(G_k^{'})$, $A_2 = \tau_2(A)$ y $A_3 = \tau_3(A)$. Observe que $G_{k+1}^{'} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y además el punto $(1,1,\ldots,1) \in A_3$. Por otra parte, $A_1 \cap A_2 = \{(1,1,\ldots,1,\frac{1}{2})\}$, $A_2 \cap A_3 = \{(f_a^k(a),\ldots,a,\frac{1}{2})\}$ y $A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Esto implica que $G_{k+1}^{'}$ es un arco que contiene el punto $(1,1,\ldots,1)$. Ahora, por el Teorema 4.13, tenemos que $\varprojlim([0,1], f_a)$ es tipo arco ya que es homeomorfo a un límite inverso de arcos.
Al contrario, supongamos que $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_a^n(a) = \frac{1}{2}$ y para $i < n$, $f_a^i(a) \neq \frac{1}{2}$. Veamos que $\varprojlim([0,1], f_a)$ no es tipo arco. Note que $a \leq \frac{1}{2}$. Supongamos que $a < \frac{1}{2}$ ya que en el caso de que $a = \frac{1}{2}$ es el Ejemplo 4.3. Como $G(f_a)$ contiene φ_1^{-1}, por el Teorema 4.12, obtenemos que $\varprojlim([0,1], f_a)$ contiene una copia de $G_{n+2}^{'}$. Ahora, para $t \in [0,1]$, $f_a^{-1}(t)$ contiene solo uno, dos o tres puntos, por tanto $f_a^{-1}(\frac{1}{2}) \cup f_a^{-2}(\frac{1}{2}) \cup \ldots \cup f_a^{-k}(\frac{1}{2})$ es finito, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $a \in f_a^{-1}(\frac{1}{2})$, existe un punto b, $a < b < \frac{1}{2}$ tal que

$(a,b] \cap (f_a^{-1}(\frac{1}{2}) \cup f_a^{-2}(\frac{1}{2}) \cup \ldots \cup f_a^{-(n+1)}(\frac{1}{2})) = \emptyset$. Por tanto, $f_a^i|_{(a,b]}$ es una función continua para $1 \leq i \leq n+1$. Por otra parte, tenemos que $\frac{1}{2} < f_a^n(t)$ para $t \in (a,b]$, esto es debido a que $f_a^i|_{(a,b]}$ es una función que preserva orden para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Sean

- $A_1 = \{(x_i)_{i=1}^{n+3} \in G'_{n+2} : (x_i)_{i=1}^{n+3} = (t, \frac{1}{2}, f_a^{n-1}(a), \ldots, a, \frac{1}{2}) \text{ para } a \leq t \leq 1\}$,
- $A_2 = \overline{\{(x_i)_{i=1}^{n+3} \in G'_{n+2} : (x_i)_{i=1}^{n+3} = (f_a^{n+1}(t), \ldots, f_a(t), t, \frac{1}{2}) \text{ para } a < t < b\}}$,
- $A_3 = \overline{\{(x_i)_{i=1}^{n+3} \in G'_{n+2} : (x_i)_{i=1}^{n+3} = (f_a^{n+1}(t), \ldots, f_a(t), t, \varphi_3(t)) \text{ para } a < t < b\}}$.

Es fácil verificar que A_1, A_2 y A_3 son arcos con $p = (a, \frac{1}{2}, f_a^{n-1}(a), \ldots, a, \frac{1}{2})$ como punto de intersección. Esto deduce que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo contenido en G'_{n+2}, por tanto $\varprojlim([0,1], f_a)$ no es tipo arco.
Para la prueba del segundo item, recordemos que $\varprojlim([0,1], f_a)$ es tipo arco siempre que $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 4.14, obtenemos que $\varprojlim([0,1], f_a)$ es la clausura de un rayo con residuo $\varprojlim([0,1], g_a)$.
Para ver que $\varprojlim([0,1], f_a)$ es un arco con $a \in (\frac{1}{2}, 1]$, nótese que en este rango tenemos que $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por el Teorema 4.14, el límite inverso es la clausura de un rayo con residuo $\varprojlim([a,1], g_a)$. Pero, $\varprojlim([a,1], g_a) = \{(1,1,\ldots)\}$. Así $\varprojlim([0,1], f_a)$ es un arco. $\square$

En el Ejemplo 4.9 mostramos que el límite inverso generalizado $\varprojlim([0,1], f_a)$ es indescomponible. Ahora, obsérvese que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_a^n(a) \neq \frac{1}{2}$ puesto que $f_a^n(a) = 0$, entonces por el Teorema 4.15, se deduce que $\varprojlim([0,1], f_a)$ es tipo arco.

4.2. Problemas abiertos

Existen problemas abiertos sobre el límite inverso generalizado usando esta familia de funciones como funciones de ligadura, algunas de estas son:

Pregunta 4.16. Si $X_i = [0,1]$ y $f_i = f$ para cada i, entonces qué condiciones suficientes podemos dar sobre f tal que G'_n es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 4.17. Si $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ un límite inverso generalizado, entonces que condiciones suficientes podemos dar sobre f_i tal que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de la proyección completa.

Pregunta 4.18. Si $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ un límite inverso generalizado, entonces qué condiciones necesarias podemos dar sobre f_i tal que $\varprojlim(X_i, f_i)_{i=1}^{\infty}$ sea indescomponible.

Pregunta 4.19. Si $f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es una función semicontinua superiormente, entonces qué condiciones podemos dar sobre f tal que $\varprojlim([0,1], f)$ es la clausura de un rayo con residuo un triodo simple.

Pregunta 4.20. Suponga que $a \in [0,1)$. Sea f_a una función semicontinua superiormente dada por $f_a(t) = 2t$ para $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $f_a(t) = [a,1]$ para $t = \frac{1}{2}$ y $f_a(t) = 2(1-a)(t-1)+1$ para $\frac{1}{2} < t \leq 1$. Si $0 \leq b < c \leq \frac{1}{2}$, entonces $\varprojlim([0,1], f_b)$ y $\varprojlim([0,1], f_c)$ son topológicamente diferentes.

Bibliografía

[1] Banič I. On dimension of limits with upper semicontinuous set-valued bonding functions, Topology Appl., Vol. 154 (2007), 2771-2778.

[2] Dugundji J. *Topology,* Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[3] Engelking R. *Outline of general topology,* North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968.

[4] Hurewicz W, H. Wallman H. *Dimension Theory,* Princeton University Press, Ninth printing, 1974.

[5] Ingram W. T. *Inverse limits, Aportaciones Matemáticas: Investigación,* Vol. 15, Sociedad Matemática Méxicana, México, 2000.

[6] Ingram W. T. Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions that are unions of mappings, Topology Proc. Vol. 34 (2009), 17-26.

[7] Ingram W. T. Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions: Problems and some partial solutions, Topology Proc. Vol. 36 (2010), 353-373.

[8] Ingram W. T. Inverse limits of Families Set-valued Functions, pre-print, Sociedad Matemática Méxicana, México, aceptado: 2 de Mayo de 2014.

[9] Ingram W. T. Concerning dimension and tree-likeness of inverse limits with set-valued functions, Houston J. Math. (to appear).

[10] Ingram W. T, Mahavier W. S. Inverse limits of Upper Semi-continuous Set Valued Functions, Houston J. Math. 32 (2004) 119-130.

[11] Kuratowski K. *Topology,* Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[12] Macías S. *Topics on Continua,* Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[13] Macías S. *Topics on Continua,* Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[14] Mahavier W. S. Inverse with subsets of $[0,1] \times [0,1]$, Topology Appl., 141 (2004), 225-231.

[15] Nadler Jr. S. *Continuum Theory, An Introduction,* Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[16] Nadler Jr. S. *Dimension Theory: An Introduction with Exercises,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 18, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

[17] Willard S. *General Topology,* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.