

**POTENCIAL GRAVITACIONAL Y DENSIDAD
SUPERFICIAL DE MASA PARA MODELOS PLANOS
FINITOS DE GALAXIAS NO AXIALMENTE
SIMÉTRICAS.**

PAOLO ANDRÉS OSPINA HENAO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2006

**POTENCIAL GRAVITACIONAL Y DENSIDAD
SUPERFICIAL DE MASA PARA MODELOS PLANOS
FINITOS DE GALAXIAS NO AXIALMENTE
SIMÉTRICAS.**

PAOLO ANDRÉS OSPINA HENAO

Tesis para optar al título de Físico

Director

GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., Ph. D.

Físico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2006

A la memoria de mis abuelos Ana Lucia e Isaias Henao.

Sería un descuido imperdonable, el no mencionar el tesón, cariño y apoyo de mis padres Gloria Henao, y Luis Norlberto Ospina. Gracias a los dos por aguantarme tanto tiempo.

A mi hermano Marcelo Ospina Henao. Siempre me apoya con su manera tan particular.

A la memoria de mi gran amigo Ivan Arturo Jaimes, que Dios lo tenga en su gloria.

A todos mis familiares.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas. Por haber aceptado ser mi director y llevar a buen puerto este trabajo.

Al Dr. José David Sanabria. Por sus innumerables consejos en la parte académica y personal, este humilde trabajo lo comparto de manera muy especial con el.

Al Dr. Harold Paredes. Por brindarme su amistad y su buen genio en todas las circunstancias.

Al Dr. Carlos Arturo Ramírez. Por haber aceptado ser mi calificador, por compartir sus conocimientos académicos, y por las correcciones para mejorar este trabajo.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG). En especial a Likidcen Framsol López, Jerson Ivan Reina, Jenrry Alonso Jaimes, Fredy Leonardo Dubeibe, Leonardo Augusto Pachón, Jorge Armando Rueda, Jose Luis González Arango, Antonio Calixto Gutierrez, Javier Fernando Ramos, Omar Espitia, Alexander Argüello, Gonzalo Garcia. Gracias a todos ellos por no dejar este barco al garete.

A mi Grupo de Estudio. Fabio Duvan Lora Clavijo, Carlos Eliécer Estupiñán López, Cesar Alonso Valenzuela.

Disculpas a todos aquellos que se me han olvidado nombrar en esta lista, ellos saben que mi memoria me traiciona.

TÍTULO : POTENCIAL GRAVITACIONAL Y DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA PARA MODELOS PLANOS FINITOS DE GALAXIAS NO AXIALMENTE SIMÉTRICAS. *.

AUTORES : OSPINA HENAO, Paolo Andrés **.

PALABRAS CLAVES : Astrofísica, Galaxias no Axialmente Simétricas, Gravitación.

DESCRIPCIÓN : En este trabajo se presentan las herramientas necesarias para la construcción de modelos planos finitos para galaxias no axialmente simétricas. Estos modelos se fundamentan principalmente en la obtención de un potencial gravitacional apropiado que debe cumplir con ciertas condiciones de contorno, y a partir de allí, obtener la densidad superficial de masa y analizar su comportamiento gráficamente.

De acuerdo con lo anterior, se presentan los aspectos principales de la teoría del potencial gravitacional, los cuales nos permiten obtener formalmente las condiciones de contorno que debe cumplir nuestro potencial gravitacional para describir modelos discoidales de galaxias de extensión finita.

Se introduce después un sistema de coordenadas que se adapte de forma natural de nuestra fuente de campo gravitacional y que contenga implícitamente las singularidades, este es el sistema de coordenadas esferoidales oblatas. Luego resolvemos la ecuación de Laplace en dicho sistema coordinado y su solución la sometemos a condiciones físicas de contorno, lo cual nos permite encontrar el potencial gravitacional, el cual se expresa apropiadamente en términos de funciones de Legendre de primera y segunda clase y de una función angular.

Finalmente, obtenemos la expresión general para la densidad superficial de masa, basándonos en la solución general del potencial gravitacional. Se formula un criterio para exigir que la densidad superficial de masa conserve un comportamiento físicamente aceptable; Y por último se analiza el comportamiento gráficamente.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TITLE : GRAVITATIONAL POTENTIAL AND SUPERFICIAL DENSITY OF MASS FOR FINITE FLAT MODELS OF NON-AXISYMMETRIC GALAXIES. *

AUTHOR : OSPINA HENAO, Paolo Andrés **.

KEY WORDS : Astrophysics, Non Axisymmetric Galaxies, Gravitation.

DESCRIPTION : In this work the necessary tools the construction of finite flat models of galaxies not axially symmetrical appear. These models are based mainly on the obtaining of an appropriate gravitational potential that must fulfill certain conditions of contour, and from there, to obtain the superficial density of mass and to analyze their behavior graphically.

In agreement whit the previous thing, the main aspects of the theory of the gravitational potential appear, which allow us to formally obtain the conditions of contour that must fulfill our potential gravitational to describe disc models of galaxies of finite extension.

A system of coordinates is introduced later that adapts to the natural form of our source of field of gravitation and that contains the singularities implicity, this it is the system of oblates spheroidal coordinates. Soon we solve the equation of Laplace in this coordinate system and its solution we put under it physical training conditions of contour, which allows to find the potential us gravitational, which is expressed appropriately in terms of functions of Legendre of first and second class and an angular function.

Finally, we obtain the expression for the superficial density of mass, basing to us on the general solution of the gravitational potential. A criterion is formulated to demand that the superficial density of mass physically conserves an acceptable behavior; And by complete analyzes the behavior graphically.

*Work of Degree.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS PLANOS DE GALAXIAS	4
1.1. TEORÍA DEL POTENCIAL NEWTONIANO Y CONDICIONES DE CONTORNO	5
1.2. DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA $\Sigma(R, \varphi)$	10
2. SOLUCIÓN GENERAL PARA EL POTENCIAL GRAVITACIONAL	13
2.1. COORDENADAS ESFEROIDALES OBLATAS	14
2.2. SOLUCIÓN ECUACIÓN DE LAPLACE	17
3. DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA	25
3.1. EXPRESIÓN PARA LA DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA	25
4. CONCLUSIONES	34
A. FORMULA DE RECURRENCIA PARA LA DERIVADA DE $q_l^m(x)$	35
BIBLIOGRAFÍA	38

LISTA DE FIGURAS

1.1. Geometría del problema en coordenadas cilíndricas.	5
1.2. Coordenadas esferoidales oblatas.	8
3.1. Densidad caso $n = 1$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.	32
3.2. Densidad caso $n = 2$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.	32
3.3. Densidad caso $n = 3$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.	33

INTRODUCCIÓN

Desde que se llegó a la conclusión de que las galaxias eran universos aislados a nuestra propia galaxia, estas se han utilizado como sondas de la estructura en una gran escala y de la historia de la evolución del universo. Su utilidad para este propósito depende en forma crítica de nuestro conocimiento sobre cuando se formaron las galaxias y sobre como han cambiado con el tiempo sus propiedades globales (tamaño, luminosidad y color) y su estructura detallada. El desarrollo de modelos plausibles de la formación y evolución de las galaxias ha planteado a los astrónomos y astrofísicos un desafío estimulante. La elaboración de tales modelos es particularmente difícil, porque la mayor parte de las galaxias nacieron, evidentemente, hace quince mil millones de años y la fase más rápida de su evolución tuvo lugar mucho tiempo antes de la presente época.

Una galaxia de disco tiene dos partes morfológicamente diferenciadas: un núcleo central, que consta de un conglomerado esferoidal de estrellas, y un disco circundante, formado por estrellas que se extienden hacia la periferia en una capa delgada. Los tamaños relativos del núcleo y el disco varían desde un núcleo casi puro en algunas galaxias hasta un disco casi puro en otras. La región del núcleo de la mayor parte de las galaxias de disco parece estar totalmente desprovista de estrellas jóvenes, aunque en la región del disco, sin embargo, varía considerablemente en cuanto a la formación de estrellas.

Las galaxias de disco probablemente comienzan su vida en la primitiva historia del universo en expansión en la forma de nubes protogalácticas y toscamente esféricas que principalmente constan de agrupamientos de gases hidrógeno y helio. Cuando la autogravitación de la nube sobrepasa el efecto opuesto de la expansión del universo, la nube comienza a contraerse. La contracción se efectúa con la máxima rapidez en la región central de la nube y, más despacio, en las regiones periféricas. Cuando la región central alcanza una cierta densidad, comienzan a formarse estrellas, consumiendo gran

parte del gas disponible. El resultado es un sistema esferoidal con un diámetro de entre 10.000 y 100.000 años luz que contiene entre 10^{18} y 10^{12} estrellas. El gas de baja densidad que queda en las regiones periféricas en contracción lenta es tan difuso que resulta imposible la formación de estrellas en esas regiones. Gran parte del gas queda en forma de bolsas. Cuando dos de ellas chocan, se calientan; su energía cinética se convierte en radiación que escapa de la galaxia. Las bolsas chocan principalmente a lo largo del eje de rotación de la nube protogaláctica. Con el tiempo la energía de los movimientos de las bolsas paralelos al eje de rotación se disipa en choques, con el resultado de que el gas finalmente se aplasta en forma de disco giratorio, dando como consecuencia que cuando la densidad del gas alcanza un valor crítico, empiezan a formarse estrellas.

Históricamente son varios los casos en que se han modelado galaxias tomando únicamente el disco, como el caso de Plummer [8], que en 1911 a partir del potencial gravitacional caracterizado por ser función de $R^{-1/2}$ para calcular la densidad volumétrica de masa que genera dicho potencial. Este modelo es comúnmente llamado par potencial densidad. De igual manera en 1956, Kuzmin [7] introdujo un par potencial densidad tal como Plummer. Esta vez Kuzmin modeló el disco a partir de un potencial gravitacional que depende de las variables (R, z) , donde comprobó que dicho potencial gravitacional era generado por una densidad superficial de masa $\Sigma(R)$, calculado por medio de la ley de Gauss. Este modelo fue conocido como el modelo 1 de Toomre. En 1975 Miyamoto y Nagai [9] modelaron una galaxia a partir de un potencial de disco con unas características particulares. Este potencial depende de las variables (R, z) y además de las constantes (b, c) , las cuales mediante una escogencia adecuada representan el potencial hallado por Plummer cuando $a = 0$, ó representaba el potencial de Kuzmin cuando $b = 0$, y por otro lado dependiendo de la escogencia de las constantes (b, c) el potencial de Miyamoto y Nagai puede representar el potencial de cualquier cosa, desde un disco delgado infinitesimal hasta un sistema esférico.

Una característica importante común en todos los modelos anteriormente mencionados, es que los discos presentan una extensión infinita y son axialmente simétricos.

Siguiendo con esta serie de modelos planos de galaxias, el modelo trabajado en [11] es caracterizado por un potencial gravitacional, una densidad superficial de masa y la

velocidad circular de rotación, el cual presenta simetría axial, pero esta vez el disco galáctico es de extensión finita.

En el presente trabajo se generalizará los modelos planos de galaxias encontrando el potencial gravitacional y la densidad superficial de masa, pero para fuentes no axialmente simétricas y de extensión finita. La herramienta principal para el cálculo de las propiedades que describen nuestro modelo es el potencial gravitacional. Vamos a calcularlo en regiones libres de materia, debido a que en un principio no sabemos como es la forma de distribución de materia que lo genera, esta es una razón de peso que nos induce a solucionar la ecuación de Laplace sometida a ciertas condiciones físicas de contorno que nos garanticen que dicho potencial gravitacional describa discos galácticos de extensión finita.

El sistema de coordenadas utilizado para solucionar la ecuación de Laplace será el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, pues es el que mejor se adapta a la geometría natural de nuestro problema. Conocida la forma del potencial gravitacional, calcularemos la densidad superficial de masa que genera dicho potencial. Para este fin haremos uso de la ley de Gauss, calcularemos la expresión para la densidad superficial de masa, luego por propiedades de ortonormalización calcularemos el valor de las constantes y finalmente escribiremos la expresión más general para el potencial gravitacional. Vale la pena resaltar, que todo este trabajo se desarrollará a nivel clásico en base a la gravitación newtoniana.

Capítulo 1

MODELOS PLANOS DE GALAXIAS

INTRODUCCIÓN

Se presentan las herramientas necesarias para la construcción de modelos planos de galaxias. Estos modelos se fundamentan principalmente en un potencial gravitacional apropiado que debe cumplir con ciertas condiciones físicas de contorno, y a partir de allí, obtener la densidad superficial de masa.

La forma de la galaxia recuerda la de un disco redondo muy apretado. Al igual que el disco, la galaxia tiene un plano de simetría, que lo divide en dos partes iguales, y un eje de simetría que pasa por el centro del sistema y es perpendicular al plano de simetría. Sin embargo, la comparación con un disco tiene un defecto consistente, en que todo disco tiene una superficie exactamente delimitada, es decir, su frontera. De acuerdo con lo anterior, en la sección 1.1, estudiaremos los aspectos principales de la teoría del potencial gravitacional necesarios para obtener un potencial gravitacional para una distribución de masa dada, y a su vez presentar las condiciones físicas de contorno, que nos permitirán construir modelos discoidales de galaxias de extensión finita, con la particularidad de ser no axialmente simétricos. Luego en la sección 1.2 se planteará el procedimiento riguroso para obtener la densidad superficial de masa.

1.1 TEORÍA DEL POTENCIAL NEWTONIANO Y CONDICIONES DE CONTORNO

Debido a que la fuerza gravitacional es conservativa, el campo gravitacional se puede determinar por el gradiente de un potencial. El problema del campo gravitacional, se reduce a encontrar una función escalar llamada potencial, la cual nos permite visualizar de una manera más viable, el comportamiento del campo gravitacional, esto es:

$$\vec{g} = -\nabla\Phi, \quad (1.1)$$

Donde ∇ representa el Laplaciano en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z.$$

En coordenadas cilíndricas, se cumple la ecuación de Laplace en todo el espacio excepto en el intervalo $0 \leq R < a$, y $z = 0$, debido a que en esta región es donde se encuentra nuestra distribución de masa ó el disco galáctico.

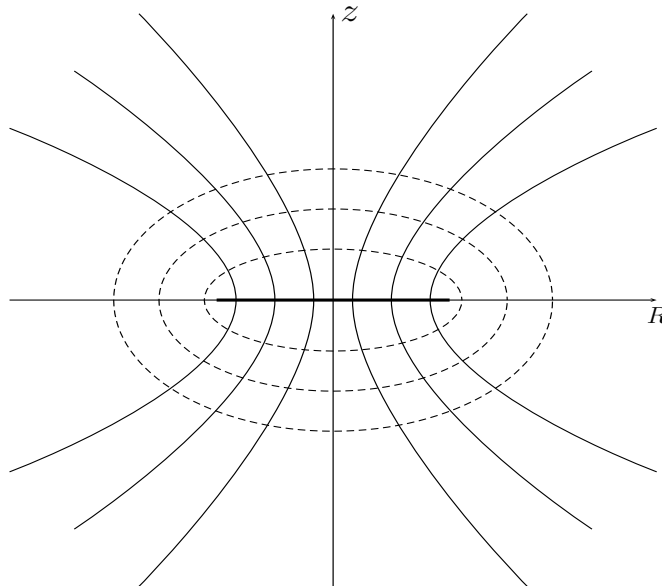


Figura 1.1: Geometría del problema en coordenadas cilíndricas.

Haciendo un análisis de la Figura 1.1 y tomando una pequeña vecindad, las líneas de campo tienen una componente normal $\vec{g} \cdot \hat{n} = g_n$. Entonces, podemos escribir las

condiciones de frontera sobre el campo \vec{g} , de la siguiente manera:

$$g_n|_{0^+} + g_n|_{0^-} = 0; \quad 0 \leq R < a, \quad (1.2a)$$

$$g_n|_{0^+} - g_n|_{0^-} = 0; \quad R \geq a. \quad (1.2b)$$

Al analizar analíticamente se puede concluir que la ecuación (1.2a), es una función no continua; es allí donde se encuentra la fuente de campo gravitacional. En la segunda ecuación (1.2b), no hay distribución de masa, es decir las líneas de campo son continuas en dicho intervalo.

Sabiendo que la componente normal de las líneas de campo en todo el espacio esta dado por la coordenada z , y con la ayuda de (1.1), tenemos:

$$\vec{g} \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Ahora, con la ayuda de la ecuación (1.3), y reemplazando en (1.2a) y (1.2b), respectivamente, encontramos las condiciones sobre la derivada, para el potencial gravitacional, así:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{0^+} = -\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{0^-}; \quad 0 \leq R < a \quad (1.4a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{0^+} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{0^-}; \quad R \geq a. \quad (1.4b)$$

Vale la pena hacer notar, que la configuración del campo es simétrica respecto al plano $z = 0$, lo cual se conoce con el nombre de simetría de reflexión en dicha región, esto es:

$$\Phi(R, \varphi, z) = \Phi(R, \varphi, -z). \quad (1.5)$$

Al aplicar las condiciones sobre la derivada a la componente normal al gradiente del potencial gravitacional, para la región donde tenemos materia, encontramos:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, \varphi, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, \varphi, -z). \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos expresar de una manera más compacta, las condiciones de frontera en el plano $z = 0$ para el potencial gravitacional:

$$\Phi(R, \varphi, z) = \Phi(R, \varphi, -z), \quad (1.7a)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{0+} \neq 0; \quad 0 \leq R < a, \quad (1.7b)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{0+} = 0; \quad R \geq a. \quad (1.7c)$$

Donde (1.7a), expresa que existe simetría de reflexión respecto al plano $z = 0$. De la misma manera (1.7b), garantiza que hay una distribución de masa, y se encuentra concentrada en el disco $z = 0$, y finalmente (1.7c), da a entender que el campo gravitacional no tiene componente normal.

Hasta el momento, tenemos una serie de condiciones de contorno, que nos van a permitir encontrar la forma del potencial gravitacional, en regiones libres de materia.

Como siguiente paso, encontraremos un sistema de coordenadas apropiado, que se adapte de forma natural a la geometría de nuestro problema y nos permita describir nuestro modelo de galaxia como un disco delgado de radio finito, en el cual se aplican las condiciones para el potencial en el plano $z = 0$. Para este fin utilizaremos el sistema de coordenadas esferoidales oblatas [10], el cual nos permite trabajar apropiadamente la simetría de nuestro disco galáctico.

Se usará la relación existente entre el sistema de coordenadas cilíndricas (R, φ, z) y el sistema de coordenadas esferoidales oblatas (ξ, η, φ) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2) \\ z &= a\xi\eta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$ y a es el radio del disco galáctico.

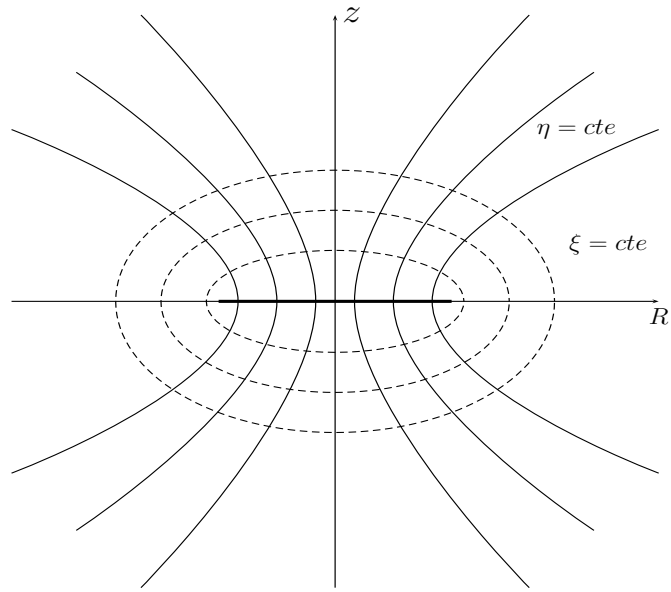


Figura 1.2: Coordenadas esféricas oblatas.

Este es un sistema de coordenadas ortogonal, es decir, que tanto las elipses confocales con ξ constante e hipérbolas confocales con η constante forman un ángulo recto, y sus superficies coordenadas son respectivamente:

$$\frac{R^2}{(1 + \xi^2)} + \frac{z^2}{a^2\xi^2} = 1. \quad (1.9)$$

$$\frac{R^2}{a^2(1 - \eta^2)} - \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1. \quad (1.10)$$

Haciendo un análisis de la Figura 1.2 y analítico de (1.8), se puede concluir:

1. En $\xi = 0$, se cumple: $z = 0$, y además $-a \leq R \leq a$, lo cual nos representa un disco delgado.
2. En $\eta = 0$, se cumple: $z = 0$, y además $R^2 > a^2$.

Pero si tomamos otros valores de η , podemos deducir que esta coordenada presenta una discontinuidad en el plano $z = 0$, esto es:

$$\lim_{z=0^-} \eta = - \lim_{z=0^+} \eta$$

De acuerdo a lo anterior, se puede concluir que las líneas de campo son las formadas por las hipérbolas confocales y a su vez las superficies equipotenciales son las formadas por la familia de elipses confocales.

Recordando que la componente normal al disco esta dada por:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \nabla\Phi \cdot \hat{n} \quad (1.11)$$

y retomando la figura anterior, estudiaremos más a fondo las siguientes regiones:

1. En el disco, se cumple $\xi = 0$, la componente normal esta dada por \hat{e}_η , y reemplazando en (1.11), tenemos:

$$\hat{e}_\eta \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}.$$

Entonces al comparar con la condición de contorno sobre el potencial (1.7b), vemos:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=0^+} \neq 0 \implies \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_{z=0^+} \neq 0 \quad (1.12)$$

y recordando la discontinuidad de η , al atravesar el plano $z = 0$, se cumple también:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_{z=0^-} = - \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_{z=0^+} \quad (1.13)$$

2. Fuera del disco, se cumple $\eta = 0$, la componente normal esta dada por \hat{e}_ξ , y reemplazando en (1.11), tenemos:

$$\hat{e}_\xi \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}.$$

y al comparar con la condición de contorno sobre el potencial (1.7c), resulta

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \implies \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (1.14)$$

Entonces vemos que se cumple $\eta(R, z) = -\eta(R, -z)$, y a su vez $\xi(R, z) = \xi(R, -z)$, permiten encontrar nuestras condiciones de contorno sobre el potencial gravitacional $\Phi(\xi, \eta, \varphi)$, en términos de las coordenadas que describen de mejor manera nuestro problema, las cuales son:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = \Phi(\xi, -\eta, \varphi), \quad (1.15a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} \neq 0, \quad (1.15b)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (1.15c)$$

Lo que hemos estudiado en esta sección, son las características necesarias que debe cumplir el potencial gravitacional, para describir modelos discoidales de galaxias de extensión finita.

Antes de concluir esta sección, vale la pena señalar, que se han impuesto condiciones de frontera apropiadas sobre la componente de la derivada del potencial en dirección normal al disco, de modo que no exista densidad superficial de masa fuera de este. Por otra parte, cuando utilizamos las coordenadas cilíndricas, vemos que las condiciones de contorno necesarias para satisfacer el requerimiento anterior, nos conduciría a un problema de frontera de difícil solución, por la razón de que estas coordenadas no son las apropiadas a la geometría de la fuente de campo gravitacional.

Es por eso que las condiciones de contorno sobre nuestro potencial gravitacional (1.15a), (1.15b), (1.15c), están en términos de las coordenadas que describen mejor la geometría de nuestro problema, estas coordenadas son las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales analizaremos en mayor detalle en el capítulo 2.

1.2 DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA

$$\Sigma(R, \varphi)$$

En la sección anterior encontramos una serie de condiciones físicas de contorno, lo que nos permite encontrar como es la forma de nuestro potencial gravitacional, en regiones

libres de materia para cualquier sistema coordenado, utilizando (3.2).

La presente sección tiene como objeto ilustrar como se calcula la densidad superficial de masa, a partir de la obtención del potencial gravitacional, el cual se calculará en detalle en el capítulo 2.

Vamos a considerar que la galaxia se puede representar como un disco delgado, caracterizado por una densidad superficial de masa $\Sigma(R, \varphi)$ y nuestro potencial gravitacional $\Phi(R, \varphi, z)$, donde (R, φ, z) , son las coordenadas cilíndricas usuales [2]. Supondremos además de que no posee simetría axial, el potencial cumple con simetría de reflexión, lo que implica que la componente normal del gradiente del potencial $\partial\Phi/\partial z$, satisface:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, \varphi, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, \varphi, -z). \quad (1.16)$$

Donde suponemos que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula en el plano $z = 0$, que es la región en la cual se encuentra la distribución de masa de nuestra galaxia.

Dado el potencial gravitacional, la densidad superficial de masa se puede obtener utilizando la ley de Gauss.

La ley de Gauss se puede escribir como [6]: La integral de la componente normal de $\nabla\Phi$, sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa contenida dentro de dicha superficie. Matemáticamente la ley de Gauss esta definida como:

$$\oint_S \vec{g} \cdot \hat{n} dA = -4\pi GM, \quad (1.17)$$

Lo cual implica que:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{0+} - \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{0-} \right\} \quad (1.18)$$

Y usando la propiedad (1.7a), tenemos el resultado para la densidad superficial de masa, así:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{0+} \right\}. \quad (1.19)$$

La expresión (1.19) es el termino general para la densidad superficial de masa. Donde la densidad superficial de masa $\Sigma(R, \varphi)$ es diferente de cero, gracias a las suposiciones anteriores.

Capítulo 2

SOLUCIÓN GENERAL PARA EL POTENCIAL GRAVITACIONAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a resolver la ecuación de Laplace (3.2), con el firme propósito de obtener un potencial gravitacional con las características necesarias para describir modelos planos de galaxias de extensión finita. Con base en esto, en el capítulo anterior se impusieron una serie de condiciones de frontera apropiadas sobre la componente de la derivada del potencial en la dirección normal al disco, de manera que la densidad superficial de masa se anule fuera de éste.

Como se enuncio en la ultima sección del capítulo anterior, si utilizamos coordenadas cilíndricas (R, φ, z) , las condiciones de contorno nos conducen a un problema de difícil solución, debido a que este tipo de coordenadas no se adaptan a la geometría del problema.

En la sección 2.1, se introducirá el concepto y definición geométrica del sistema de coordenadas esferoidales oblatas, y como se asocia a un cuerpo en forma de disco. Dicho sistema de coordenadas lleva implícitamente la simetría de nuestro problema. En la sección 2.2, veremos como el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, satisface la ecuación de Laplace (3.2) de manera exacta, mediante la técnica de separación de variables, por lo que las ecuaciones diferenciales tendrán una forma comúnmente conocida y de hecho más manejables para sus soluciones; Y podremos escribir nuestro potencial gravitacional de una manera más sencilla, luego de someterlo a ciertas condiciones

físicas de contorno.

2.1 COORDENADAS ESFEROIDALES OBLATAS

El sistema de coordenadas esferoidales oblatas es generado tomando una familia de elipses e hipérbolas confocales y rotandolas alrededor del semieje menor de las elipses. Estas elipses e hipérbolas tienen sus focos comunes en $y = a$, $y = -a$, de manera que el semieje menor b estará ubicado en la dirección del eje Z , mientras que sobre el eje Y estará ubicado el semieje mayor c .

Empecemos por considerar el plano YZ de las coordenadas elípticas planas y definamos la ecuación de cada elipse coordenada como:

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

Cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$y = c \operatorname{sen}(u), \quad (2.2a)$$

$$z = b \operatorname{cos}(u). \quad (2.2b)$$

Recordando que la la distancia focal y los semiejes satisfacen la relación:

$$a^2 = c^2 - b^2, \quad (2.3)$$

Podemos parametrizar c y b como:

$$c = a \operatorname{cosh}(v), \quad (2.4a)$$

$$b = a \operatorname{senh}(v), \quad (2.4b)$$

En donde el parámetro a es constante para todas las elipses, mientras que v caracteriza a cada elipse coordenada. Introduciendo estas últimas ecuaciones en (2.2a) y (2.2b), obtenemos las ecuaciones que definen a cada elipse coordenada:

$$y = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u), \quad (2.5a)$$

$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u). \quad (2.5b)$$

Las otras curvas coordenadas de este sistema son las hipérbolas focalizadas en $y = \pm a$, cuya ecuación es:

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.6)$$

La cual puede parametrizarse como:

$$y = c \cosh(v), \quad (2.7a)$$

$$z = b \operatorname{senh}(v). \quad (2.7b)$$

En este caso la distancia focal y los semiejes se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = c^2 + b^2. \quad (2.8)$$

De modo que podemos expresar c y b como:

$$c = a \operatorname{sen}(u), \quad (2.9a)$$

$$b = a \cos(u), \quad (2.9b)$$

Siendo u el parámetro que caracteriza a cada hipérbola coordenada.

De igual manera como lo hicimos para las elipses, reemplazando (2.9a) y (2.9b) en (2.7a) y (2.7b) respectivamente, encontramos las ecuaciones que definen a cada hipérbola coordenada:

$$y = a \cosh(v) \sen(u), \quad (2.10a)$$

$$z = a \sinh(v) \cos(u). \quad (2.10b)$$

Podemos ver que estas últimas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (2.5a) (2.5b), que definen a cada elipse coordenada. Esto quiere decir que podemos asociar a cada punto del sistema de coordenadas cartesianas (y, z) un punto que es la intersección de las elipses e hipérbolas (v, u) , con lo cual podemos establecer (2.5a) y (2.5b), como las transformaciones que relacionan el sistema de coordenadas cartesiano (y, z) y el sistema de coordenadas elípticas planas (v, u) .

Ahora bien, para obtener el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, rotamos el sistema de coordenadas elípticas planas alrededor del eje z un ángulo φ . Anteriormente ubicamos las elipses e hipérbolas confocales sobre el plano YZ , ahora al hacer la rotación, ubiquémonos sobre el plano RZ , en donde los puntos ubicados sobre este tienen coordenadas elípticas (2.5a) y (2.5b) dadas por:

$$R = a \cosh(v) \sen(u), \quad (2.11a)$$

$$z = a \sinh(v) \cos(u). \quad (2.11b)$$

Como el ángulo formado por los planos XZ y RZ es φ , el cual varía entre $0 < \varphi \leq 2\pi$, las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (R, φ, z) se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = R \cos(\varphi), \quad (2.12a)$$

$$y = R \sen(\varphi), \quad (2.12b)$$

$$z = z. \quad (2.12c)$$

Reemplazando (2.11a) y (2.11b) en las expresiones anteriores obtenemos:

$$x = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u) \cos(\varphi), \quad (2.13a)$$

$$y = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(\varphi), \quad (2.13b)$$

$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u), \quad (2.13c)$$

Expresiones que relacionan el sistema de coordenadas cartesianas con el sistema de coordenadas esferoidales oblatas.

Con el fin de obtener unas expresiones más convenientes para nuestros propósitos posteriores, hacemos el cambio de variable:

$$\xi = \operatorname{senh}(v), \quad (2.14a)$$

$$\eta = \cos(u), \quad (2.14b)$$

con $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Reemplazando entonces en (2.13a) - (2.13c), obtenemos:

$$x = a\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi), \quad (2.15a)$$

$$y = a\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{1 - \eta^2} \operatorname{sen}(\varphi), \quad (2.15b)$$

$$z = a\xi\eta. \quad (2.15c)$$

Estas últimas ecuaciones son las transformaciones entre el sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y el sistema de coordenadas (ξ, η, φ) , las cuales comúnmente se denominan también como coordenadas esferoidales oblatas.

2.2 SOLUCIÓN ECUACIÓN DE LAPLACE

En el capítulo 1, encontramos las condiciones necesarias que debe cumplir nuestro potencial gravitacional, para generar modelos planos de galaxias de extensión finita.

En la sección anterior se esbozo el tipo de coordenadas que utilizaremos, el cual nos permitirá analizar mejor la geometría del problema. El paso más importante en esta sección, es calcular el potencial gravitacional en puntos exteriores de la galaxia, para lo cual resolveremos la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas. El resultado obtenido será una ecuación diferencial parcial de segundo orden, y el camino apto para su solución es el bien conocido método de separación de variables.

Una vez efectuada la separación de variables, llegamos a tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, donde una de ellas, es la ecuación diferencial para un oscilador armónico, y las otras dos ecuaciones diferenciales reciben el nombre de la ecuación asociada de Legendre. Ahora bien, nos interesa encontrar los factores de escala, que relacionan las coordenadas oblatas (ξ, η, φ) , con el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , los cuales están definidos así [2],

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (2.16)$$

Donde los q_i , son las coordenadas curvilíneas, con $i = 1, 2, 3$, y cada subíndice representa a ξ, η, φ respectivamente. De acuerdo con (2.15), los factores de escala son:

$$h_\xi = a \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2}}, \quad (2.17a)$$

$$h_\eta = a \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \eta^2}}, \quad (2.17b)$$

$$h_\varphi = a \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}. \quad (2.17c)$$

Ahora bien, en coordenadas curvilíneas ortogonales (q_1, q_2, q_3) , la ecuación de Laplace está dada por la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Donde h_i , son los factores de escala. Introduciendo los factores de escala en (3.2) y recordando que el potencial gravitacional es función de (ξ, η, φ) , obtenemos:

$$\frac{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.19)$$

El anterior resultado es la expresión final para la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas. Esta es una ecuación diferencial parcial, de segundo orden*, por lo tanto, asumimos que (ξ, η, φ) , puede ser expresado como el producto de tres funciones de una variable, a través de la siguiente definición [2]:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = M(\xi)N(\eta)Y(\varphi). \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.19) y multiplicando el resultado por $1/M(\xi)N(\eta)Y(\varphi)$, obtenemos:

$$\frac{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{1}{M} \frac{d}{d\xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{dM}{d\xi} \right] + \frac{1}{N} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dM}{d\eta} \right] \right\} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} = 0. \quad (2.21)$$

Debido a que φ es la coordenada independiente, esta la podemos igualar a una constante así:

$$\frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + m^2 Y = 0. \quad (2.22)$$

Cuya solución es inmediata:

$$Y(\varphi) = [W_m \cos(m\varphi) + Z_m \sin(m\varphi)] \quad (2.23)$$

Ahora vemos que m^2 es equivalente a:

$$\frac{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{1}{M} \frac{d}{d\xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{dM}{d\xi} \right] + \frac{1}{N} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dM}{d\eta} \right] \right\}. \quad (2.24)$$

*El hecho de que la ecuación (2.19) esta compuesta de funciones " ξ ", " η ", y una función " φ ", sugiere ya de antemano su separabilidad

Pero :

$$\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} = \frac{1}{(1 - \eta^2)} - \frac{1}{(1 + \xi^2)} \quad (2.25)$$

Lo cual nos permite separar el bloque de m^2 , en términos de ξ y η , así:

$$\left\{ \frac{m^2}{(1 + \xi^2)} + \frac{1}{M} \frac{d}{d\xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{dM}{d\xi} \right] \right\} + \left\{ \frac{-m^2}{(1 - \eta^2)} + \frac{1}{N} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] \right\} = 0. \quad (2.26)$$

Donde podemos ver claramente que para el bloque ξ , lo podemos igualar a una constante de separación J , y análogamente el bloque η , a otra constante de separación $-J$, para que se cumpla la igualdad. De manera que resultan las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{dM}{d\xi} \right] + \left[-J + \frac{m^2}{(1 + \xi^2)} \right] M = 0. \quad (2.27)$$

Y análogamente

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + \left[J - \frac{m^2}{(1 - \eta^2)} \right] N = 0. \quad (2.28)$$

Donde (2.28), es la ecuación diferencial asociada de Legendre, pero (2.27), aunque no es exactamente igual a esta última, es parecida y puede adoptar la forma si definimos:

$$\xi = i\epsilon \quad \longmapsto \quad \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\epsilon}$$

Reemplazando este resultado en (2.27), obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[(1 - \epsilon^2) \frac{dM}{d\epsilon} \right] + \left[J - \frac{m^2}{(1 - \epsilon^2)} \right] M = 0. \quad (2.29)$$

Idéntica a (2.28), la ecuación diferencial asociada de Legendre, pero para M . Por lo tanto, tenemos que (2.28) y (2.29), son las ecuaciones diferenciales asociadas de Legendre.

Estas ecuaciones, tienen soluciones conocidas, y se puede verificar que dichas soluciones son equivalentes con $m = 0$, a la solución de la ecuación diferencial de Legendre. En otras palabras, se puede verificar que la solución de las ecuaciones asociadas de Legendre con $m = 0$, es equivalente a la solución de la ecuación diferencial de Legendre.

El método utilizado para resolver las ecuaciones (2.28) y (2.29), es plantear soluciones en series de potencias de la forma:

$$N(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{k+n}, \quad (2.30a)$$

$$M(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^{k+n}. \quad (2.30b)$$

Derivando estas expresiones y reemplazando en (2.28) y (2.29), con $m = 0$, respectivamente, encontramos que las soluciones divergen, entonces para que esta solución pueda tener un significado físico concreto (es decir, que converja), la constante J , debe tomar el valor de $l(l+1)$, donde $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Luego de esta condición, podemos interpretar la serie anterior, no como una serie infinita, sino como una suma finita de términos llamados polinomios de Legendre P_l .

Dado que las ecuaciones de Legendre son lineales, su solución general puede ser escrita en términos de los polinomios de Legendre P_l y las funciones de Legendre Q_l , que obviamente satisfacen las ecuaciones (2.28) y (2.29), con $m = 0$. Es así pues que podemos expresar (2.28) y (2.29), con $J = l(l+1)$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1 - \eta^2)} \right] N = 0. \quad (2.31)$$

y

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[(1 - \epsilon^2) \frac{dM}{d\epsilon} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1 - \epsilon^2)} \right] M = 0. \quad (2.32)$$

Cuyas soluciones son respectivamente las siguientes:

$$N(\eta) = [B_{lm}P_l^m(\eta) + C_{lm}Q_l^m(\eta)] \quad (2.33)$$

y

$$M(\epsilon) = [D_{lm}P_l^m(\epsilon) + E_{lm}Q_l^m(\epsilon)] \quad (2.34)$$

Donde $B_{lm}, C_{lm}, D_{lm}, E_{lm}$, son constantes arbitrarias. Pero es conveniente escribir los P_l^m y Q_l^m , del argumento imaginario (2.34), de la siguiente forma [3]

$$p_l^m(\xi) = i^{-l}P_l^m(\epsilon)$$

$$q_l^m(\xi) = i^{l+1}Q_l^m(\epsilon)$$

De modo que cuando $l = 0$, ó entero positivo, se tienen las siguientes expresiones:

$$p_l(\theta) = (-1)^l \frac{1}{l!} (\sin \beta)^{l+1} \left(\frac{d}{\sin \beta d\beta} \right)^l (\csc \beta), \quad (2.35a)$$

$$q_l(\theta) = \frac{1}{l!} (\sin \beta)^{l+1} \left(\frac{d}{\sin \beta d\beta} \right)^l (\beta \csc \beta). \quad (2.35b)$$

siendo $\theta = \cot \beta$.

Con lo expresado anteriormente, la expresión (2.34), se puede reescribir:

$$M(\xi) = [H_{lm} p_l^m(\xi) + F_{lm} q_l^m(\xi)]. \quad (2.36)$$

De acuerdo con (2.20), la solución general para la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas se escribe como:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \varphi) = & - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [H_{lm} p_l^m(\xi) + F_{lm} q_l^m(\xi)] [B_{lm} P_l^m(\eta) + C_{lm} Q_l^m(\eta)] \\ & \times [W_m \cos(m\varphi) + Z_m \sin(m\varphi)]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

No obstante, la ecuación (2.37), no es el resultado final que queremos encontrar, falta aún verificar si esta solución general satisface ciertas condiciones físicas de contorno, veamos:

1. La primera condición de contorno, es que en el infinito, es decir, a distancias lo suficientemente grandes de la fuente de campo gravitacional, $\xi \mapsto \infty$, el potencial gravitacional debe anularse, esto significa que:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi(\xi, \eta, \varphi) = 0. \quad (2.38)$$

para ver claramente como esta condición se representa en la solución (2.37), tendremos en cuenta que:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_l^m(\xi) = \infty,$$

con $l > 0$ y

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} q_l^m(\xi) = 0.$$

Lo que implica que en (2.37), debemos hacer $H_{lm} = 0$, para que se cumpla(2.38).

2. La segunda condición de contorno que se le aplica al potencial gravitacional, es sobre el eje de simetría $\eta = \pm 1$, para garantizar de cierta forma que el potencial gravitacional no presente singularidades, para dicha condición se debe cumplir:

$$Q_l^m(\pm 1) = \infty.$$

lo cual implica que en (2.37), debemos hacer $C_{lm} = 0$.

De acuerdo a la teoría desarrollada previamente y a las dos ultimas condiciones de contorno, la forma del potencial gravitacional (2.37), se simplifica significativamente, resultando entonces:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_l^m(\xi) P_l^m(\eta) [A_{lm} \cos(m\varphi) + B_{lm} \sin(m\varphi)], \quad l + m = \text{par} \quad (2.39)$$

El signo menos, significa que nuestro potencial gravitacional es atractivo. En la anterior expresión las $q_l^m(\xi)$ son funciones de Legendre de segundo orden de argumento imaginario, los $P_l^m(\eta)$ son los polinomios asociados de Legendre, y A_{lm} y B_{lm} son constantes. Este resultado ilustra el significado mas sobresaliente que hemos buscado a lo largo de este capítulo, el cual será fundamental más adelante, porque basándonos en esta solución se determinará el análisis de la densidad superficial de masa, la cual será descrita en detalle en el capítulo 3.

Capítulo 3

DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo aplicaremos los conceptos y definiciones presentados en los capítulos anteriores para estudiar algunas distribuciones discoidales de materia, basándonos en la solución general para el potencial gravitacional obtenida en el capítulo anterior.

En la sección 3.1, obtenemos la expresión general para la densidad superficial de masa, basándonos en la solución general para el potencial gravitacional (3.6). A continuación, formulamos un criterio para exigir que la densidad superficial de masa conserve un comportamiento físicamente aceptable, al tomarla como la suma de un caso axialmente simétrico ó no perturbado y un caso no axialmente simétrico ó perturbativo.

Finalmente, analizaremos gráficamente el comportamiento de estos modelos.

3.1 EXPRESIÓN PARA LA DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA

Recordando lo mencionado en el capítulo 1, la ecuación que relaciona el potencial gravitacional con la densidad superficial de masa, es la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\Sigma(R, \varphi) \tag{3.1}$$

Allí se pudo concluir que el problema del campo gravitacional se reduce a solucionar la ecuación de Poisson, la cual representa la forma usual de calcular el potencial gravitacional en la región en la cual se encuentra la fuente ó la densidad de materia que genera dicho campo.

Dicha ecuación suele ser complicada de solucionar debido a su carácter no homogéneo, determinado por la distribución de materia que en algunos casos puede ser ó no función de las coordenadas utilizadas en el problema. Por otro lado, también vimos que en regiones que estén libres de materia, la densidad superficial de masa se hace igual a cero, entonces la ecuación (3.1) se reduce a:

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (3.2)$$

Conocida como la ecuación de Laplace, que en términos generales es un poco mas fácil de solucionar.

Retomando la ecuación (3.1) e integrando a ambos lados sobre un volumen arbitrario que contiene una masa total M , obtenemos:

$$4\pi G \int_V \Sigma(R, \varphi) d^3x = 4\pi GM = \int_V \nabla^2\Phi d^3x \quad (3.3)$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$-4\pi GM = \oint_S \nabla\Phi \cdot ds = \oint_S \vec{g} \cdot \hat{n} dA \quad (3.4)$$

Esta ultima ecuación es idéntica a (1.17), como lo vimos en el primer capítulo.

Entonces, la densidad superficial de masa para una distribución de materia no axialmente simétrica viene dada por:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{0+} \right\}. \quad (3.5)$$

Donde Φ es el potencial gravitacional newtoniano, calculado en el capítulo anterior y que viene dado por:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_l^m(\xi) P_l^m(\eta) [A_{lm} \cos(m\varphi) + B_{lm} \sin(m\varphi)] \quad (3.6)$$

Así pues, que un conocimiento del potencial gravitacional nos permite determinar la expresión correspondiente para la densidad superficial de masa.

Derivando (3.6) con respecto a z , tenemos:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\xi=0} = \left[\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \Big|_{\xi=0} + \left[\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \Big|_{\xi=0} \quad (3.7)$$

Donde:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{a\eta} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

Los valores de ξ y η están determinados por la condición de que en $\xi = 0$ según (1.8) está presente nuestro disco galáctico y $\eta = \sqrt{1 - (R/a)^2}$.

Reemplazando (3.8) y (3.9) en (3.7) tenemos:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\xi=0} = \left[\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{a\eta} \left[\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0} \quad (3.10)$$

Ahora reemplacemos (3.10) en (3.5), y obtenemos:

$$\Sigma(R, \varphi) = - \frac{1}{2\pi G a \eta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_l^m(\xi = 0) P_l^m(\eta) [A_{lm} \cos(m\varphi) + B_{lm} \sin(m\varphi)] \quad (3.11)$$

Y según el apéndice (A), $q_l^m(\xi = 0)$ es:

$$q_l^m(0) = -m(m+l)q_l^{m-1}(0) - (l+1)q_{l+1}^m(0) \quad (3.12)$$

Al reemplazar (3.12) en (3.11) tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma(R, \varphi) = & -\frac{1}{2\pi Ga\eta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [-m(m+l)q_l^{m-1}(0) - (l+1)q_{l+1}^m(0)] P_l^m(\eta) \\ & \times [A_{lm} \cos(m\varphi) + B_{lm} \sin(m\varphi)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta es la expresión de la densidad superficial de masa para galaxias planas finitas no axialmente simétricas asociada al potencial gravitacional (3.6).

Ahora definamos en (3.11):

$$-\left[\frac{A_{lm}}{G}\right] q_l^m(0) = \left[\frac{M}{a}\right] \tilde{A}_{lm} \quad (3.14)$$

y

$$-\left[\frac{B_{lm}}{G}\right] q_l^m(0) = \left[\frac{M}{a}\right] \tilde{B}_{lm} \quad (3.15)$$

Entonces la expresión (3.11) toma la siguiente forma:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{(M/a)}{2\pi a\eta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\eta) [\tilde{A}_{lm} \cos(m\varphi) + \tilde{B}_{lm} \sin(m\varphi)] \quad (3.16)$$

Y tomando la expansión de varios términos en la sumatoria (3.16), se obtiene:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{(M/a)}{2\pi a \eta} \left[\sum_{\substack{l=0 \\ (m=0)}}^{\infty} \tilde{A}_{l0} P_l(\eta) + \sum_{\substack{l=0 \\ (m=1)}}^{\infty} P_l^1(\eta) [\tilde{A}_{l1} \cos(\varphi) + \tilde{B}_{l1} \sin(\varphi)] + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{l=0 \\ (m=2)}}^{\infty} P_l^2(\eta) [\tilde{A}_{l2} \cos(2\varphi) + \tilde{B}_{l2} \sin(2\varphi)] + \dots \right] \quad (3.17)$$

Donde en la primera sumatoria ($m = 0$), el término $l = 0$ representa el orden monopolar, el término $l = 1$ el orden dipolar, y así sucesivamente.

Con el fin de obtener el valor de las constantes \tilde{A}_{lm} y \tilde{B}_{lm} , propondremos una densidad superficial de masa que contiene las contribuciones de los términos axialmente simétrico ó no perturbado y los términos no axialmente simétricos ó perturbados de la siguiente manera:

$$\tilde{\Sigma}(R, \varphi) = \frac{(M/a)}{2\pi a} \left[\frac{2n+1}{\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \eta^{2(n+m)} C_m \cos(m\varphi) \right] \quad (3.18)$$

La expresión anterior está basada en la expresión general propuesta por Binney and Tremaine en [6]. Esta expresión tiene implicaciones físicas y matemáticas. Las implicaciones físicas se fundamentan en que la expresión (3.18) reduce al caso axialmente simétrico con $m = 0$, es decir, está contenido en ella; y la implicación matemática nos permite calcular el valor de las constantes mediante el proceso de ortonormalización. Aquí C_m es una constante arbitraria y menor que uno.

De manera similar que en la ecuación (3.17), expandiremos algunos términos de (3.18) dando como resultado la siguiente expresión:

$$\tilde{\Sigma}(R, \varphi) = \frac{(M/a)}{2\pi a} \left[\frac{2n+1}{\eta} \eta^{2n} + \frac{2n+1}{\eta} \eta^{2n+2} C_1 \cos(\varphi) + \right. \\ \left. \frac{2n+1}{\eta} \eta^{2n+4} C_2 \cos(2\varphi) + \dots \right] \quad (3.19)$$

Al igualar (3.17) y (3.19) componente a componente y ortonormalizando término a término, obtenemos el valor de las constantes para la densidad superficial de masa (3.13) y escribiremos nuestro potencial gravitacional (3.6) en forma más general.

El caso inicial con $m = 0$, obtenemos:

$$\sum_{l=0, m=0}^{\infty} \tilde{A}_{l0} P_l(\eta) = \left[\frac{M}{a} \right] (2n+1) \eta^{2n} \quad (3.20)$$

Este es el resultado de las constantes para el caso axialmente simétrico.

Si se aplica la misma secuencia para un caso en general de m , de manera análoga obtenemos la expresión para la constante (3.14), ya que debido a la ortonormalización la constante (3.15) se anula. Entonces la constante (3.14) en general tiene la forma:

$$\tilde{A}_{lm} = \frac{C_m (2n+1)(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^1 \eta^{\lambda-1} P_l^m(\eta) d\eta \quad (3.21)$$

Donde hemos introducido la siguiente abreviación [13]:

$$\int_0^1 \eta^{\lambda-1} P_l^m(\eta) d\eta = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi} 2^{-2m-1} \Gamma(\lambda/2) \Gamma(m+l+1)}{\Gamma(1/2 + m/2) \Gamma(1+m+\lambda/2) \Gamma(1-m+l)} \\ F_2 \left(\frac{m+l+1}{2}, \frac{m-l}{2}, \frac{m}{2} + 1; m+1, \frac{\lambda+m}{2} + 1; 1 \right)$$

En la expresión anterior F_2 es una Función Hipergeométrica de segundo orden, y además $\lambda = 2n + 2m + 1 > 0$, y $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Como lo sugiere la expresión (3.14) estamos ahora interesados en conocer el valor de la constante A_{lm} , para poder conocer el efecto sobre nuestro potencial gravitacional. Despejando A_{lm} de (3.14) obtenemos:

$$A_{lm} = - \left[\frac{MG}{a} \right] \frac{\tilde{A}_{lm}}{q_l^m(0)} \quad (3.22)$$

Es oportuno mencionar que debido al proceso de ortonormalización, se anula la constante (3.15), es decir, $\tilde{B}_{lm} = 0$ y la forma de nuestro potencial gravitacional (3.6) se simplificó considerablemente tomando la siguiente forma:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_l^m(\xi) P_l^m(\eta) [A_{lm} \cos(m\varphi)] \quad (3.23)$$

Al aplicar la expresión (3.22) sobre (3.23), obtenemos:

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = \left[\frac{MG}{a} \right] \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{q_l^m(\xi)}{q_l^m(0)} \right] P_l^m(\eta) \tilde{A}_{lm} \cos(m\varphi) \quad (3.24)$$

Esta es la expresión mas general para nuestro potencial gravitacional, que es generado por una fuente no axialmente simétrica.

A continuación representamos gráficamente el comportamiento de la densidad superficial de masa, para valores de $n = 1, 2, 3$ y variando el valor de $m = 0, 1, 2, 3$. Podemos analizar que para valores muy pequeños de n y m , la densidad tiende a comportarse como en el caso axialmente simétrico, por otra parte al aumentar al valor de m , la densidad superficial de masa presenta un comportamiento natural en algunas regiones, pero en otras se ve claramente el caso no axialmente simétrico ó perturbativo.

En las siguientes gráficas, los ejes coordenados X y Y están normalizados al radio del disco, es decir a (± 1) ; y el eje Z representa la densidad superficial de masa $\Sigma(R, \varphi)$. En todas las gráficas a continuación el valor de la constante C_m en (3.18) es el mismo, y toman los siguientes valores: $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.

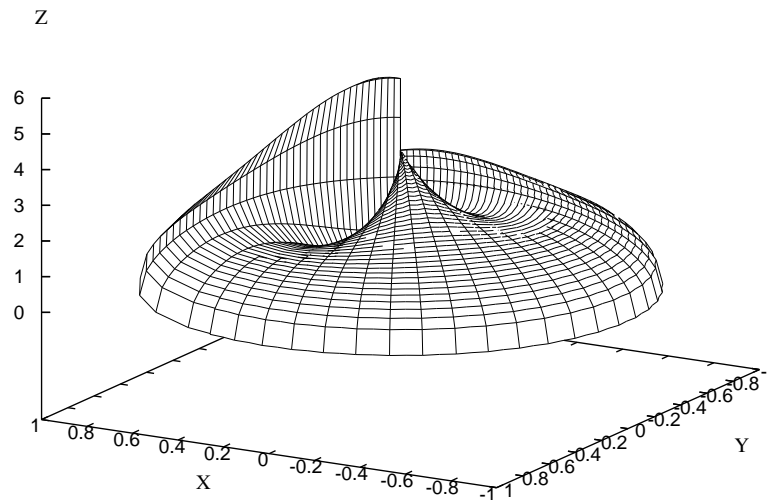


Figura 3.1: Densidad caso $n = 1$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.

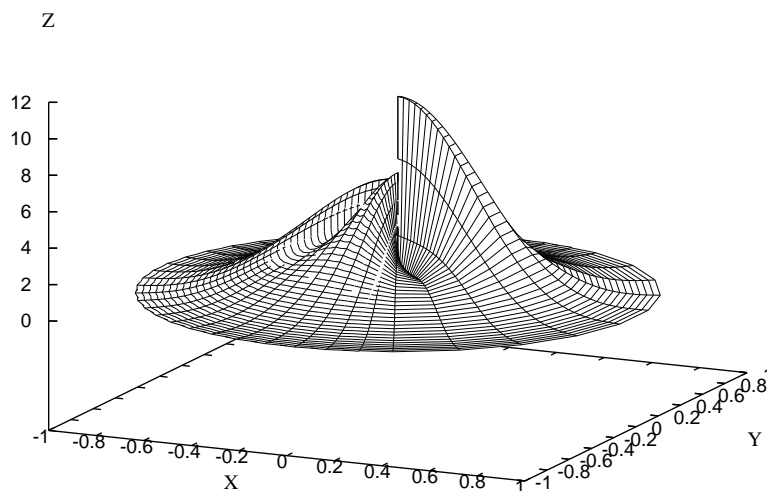


Figura 3.2: Densidad caso $n = 2$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.

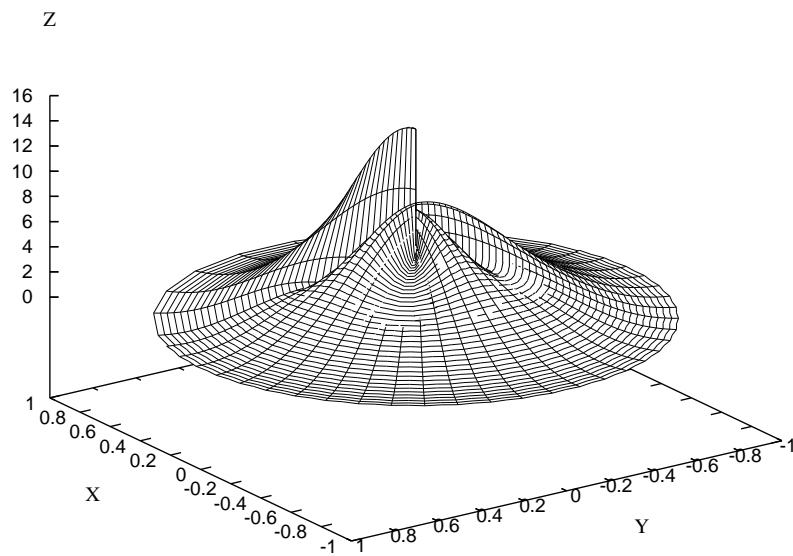


Figura 3.3: Densidad caso $n = 3$; $m = 0, 1, 2, 3$; $C_1 = 0,125$; $C_2 = 0,375$ y $C_3 = 0,5$.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

- Encontramos una solución general y exacta de la ecuación de Laplace para obtener un potencial gravitacional no axialmente simétrico (3.6).
- Se mostró como a partir del potencial gravitacional $\Phi(\xi, \eta, \varphi)$, se obtiene una expresión general para la densidad superficial de masa (3.13).
- Con el fin de ajustar las constantes (3.14) y (3.15), se propuso una densidad (3.18), la cual cumple con ciertas condiciones de tipo Físico y Matemático, como que contiene implícitamente el término axialmente simétrico y una serie de términos perturbativos [6].
- Probamos como el primer término de dicha densidad correspondía a las constantes del caso axialmente simétrico con $m = 0$ (3.20).
- Al aumentar el número de términos, notamos como la densidad decae rápidamente en algunas regiones del disco, pero en otras regiones no conserva su forma, generando así una distribución no axialmente simétrica como lo esperábamos.
- Cabe resaltar que en el desarrollo de este trabajo se encontró relaciones de recurrencia para las funciones asociadas de Legendre de argumento imaginario (q_l^m), las cuales no se encontraron en la literatura. Estas expresiones se pretenden presentar en alguna revista de interés científico.
- Finalmente, se estudiará mas adelante el problema de las órbitas para galaxias no axialmente simétricas.

Apéndice A

FORMULA DE RECURRENCIA PARA LA DERIVADA DE $q_l^m(x)$

$$(1 + x^2)q_l'(x) = -(l + 1)xq_l(x) - (l + 1)q_{l+1}(x) \quad (\text{A.1})$$

Recordando la regla de Leibnitz,

$$\frac{d^m}{dx^m}(AB) = \left(\frac{d^m}{dx^m}A\right)B + \left(m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}A\right)\frac{dB}{dx} + \left(m(m+1)\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}A\right)\frac{d^2B}{dx^2} + \dots + A\frac{d^m}{dx^m}B. \quad (\text{A.2})$$

Ahora aplicando (A.2), a (A.1), veamos como se comporta componente a componente:

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1 + x^2) \frac{d}{dx} q_l(x) \right] = \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} q_l(x) \right] (1 + x^2) + m \left[\frac{d^m}{dx^m} q_l(x) \right] 2x + \left[m(m-1) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} q_l(x) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Pero recordando que:

$$q_l^m(x) = (1 + x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} q_l(x).$$

Se le aplica a (A.3), y derivando vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} q_l^m(x) &= (1+x^2)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} q_l(x) + mx(1+x^2)^{-1+m/2} \frac{d^m}{dx^m} q_l(x) \\ &= \frac{(1+x^2)^{m/2}}{(1+x^2)} \left[(1+x^2) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} q_l(x) + mx \frac{d^m}{dx^m} q_l(x) \right]. \end{aligned}$$

Entonces:

$$(1+x^2) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} q_l(x) = (1+x^2)^{1-m/2} \frac{d}{dx} q_l^m(x) - mx \frac{d^m}{dx^m} q_l(x). \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando (A.4) en (A.3), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left[(1+x^2) \frac{d}{dx} q_l(x) \right] &= (1+x^2)^{1-m/2} \frac{d}{dx} q_l^m(x) + mx(1+x^2)^{-m/2} q_l^m(x) + \\ &= m(m-1)(1+x^2)^{-m/2} (1+x^2)^{1/2} q_l^{m-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

También:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [x q_l(x)] &= \left[\frac{d^m}{dx^m} q_l(x) \right] x + m \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} q_l(x) \right] \\ &= (1+x^2)^{-m/2} x q_l^m(x) + m(1+x^2)^{-m/2} (1+x^2)^{1/2} q_l^{m-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Y el último termino será:

$$\frac{d^m}{dx^m} q_{l+1}(x) = (1+x^2)^{-m/2} q_{l+1}^m(x). \quad (\text{A.7})$$

Reemplazando (A.5), (A.6) y (A.7) en (A.1), tenemos:

$$\begin{aligned} -l(l+1) q_{l+1}^m(x) &= (1+x^2) \frac{d}{dx} q_l^m(x) + mx q_l^m(x) + m(m-1)(1+x^2)^{1/2} q_l^{m-1}(x) + \\ &+ m(l+1)(1+x^2)^{1/2} q_l^{m-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Factorizando, tenemos finalmente:

$$(1+x^2)\frac{d}{dx}q_l^m(x) + x(m+l+1)q_l^m(x) + m(m+l)(1+x^2)^{1/2}q_l^{m-1}(x) = -(l+1)q_{l+1}^m(x). \quad (\text{A.9})$$

Si hacemos $x = 0$, tenemos:

$$q_l^{\prime m}(0) = -m(m+l)q_l^{m-1}(0) - (l+1)q_{l+1}^m(0). \quad (\text{A.10})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M ABRAMOVITZ. and STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series. 55 (AMS-55), National Bureau of Standards, U. S. Department of Commerce (1978).
- [2] G ARFKEN. *Mathematical Methods for Physicists Third edition*. Academic Press (1985).
- [3] H BATEMAN. *Partial Differential Equations*. Dever (1944).
- [4] I S GRADSHTEYN and I M RYZHIK. *Table of integrals, Series, and Products*. Fourth edition. Academic Press New York and London (1965)
- [5] J MARION, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Segunda Edición. Editorial Reverté (1995).
- [6] J BINNEY and S TREMAINE. *Galactic Dynamic*. Princeton University, Press (1987).
- [7] G KUZMIN. *Astron. Zh.* **33**, 27 (1956).
- [8] H C PLUMMER. *MNRAS* **28**, 460 (1911).
- [9] M S MIYAMOTO and R NAGAI. *Publ.Astron.Soc.Japan*, **27** 533 (1975).
- [10] P MOON and D SPENCER. *Field theory for Engineers*. D. Van Nostrand Company (1961).
- [11] J I REINA. *Potencial Gravitacional, Densidad Superficial de Masa y Velocidad Circular para Modelos Planos de Galaxias, Tesis de Grado*. Universidad Industrial de Santander (2004).
- [12] O D KELLOG. *Foundations of Potential Theory*. Dover (1953).

-
- [13] H BATEMAN. *Tables of Integrals, Vol II. Mc Graw Hill* (1954).