INTERACCIÓN ENTRE LA VARIABILIDAD Y LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES EN EJERCICIO

ANDREA MARÍA FLÓREZ MARTÍNEZ
JOHANNA MILENA GUTIERREZ PRADA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

INTERACCIÓN ENTRE LA VARIABILIDAD Y LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES EN EJERCICIO

ANDREA MARÍA FLÓREZ MARTÍNEZ
JOHANNA MILENA GUTIERREZ PRADA

Trabajo de Grado para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Director:
Ph.D. GABRIEL YÁÑEZ CANAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

Dedico este proyecto:

A mis padres Doris y Orlando

y a mi hermana Mónica

por su amor incondicional

y paciencia

Andrea María Flórez Martínez

Dedico este proyecto:

A mis padres Jaime y Claudia, por su cariño y comprensión,

y a Roger por su amor y constante apoyo

Johanna Milena Gutierrez Prada

AGRADECIMIENTOS

A Dios todopoderoso por sus bendiciones

A nuestras familias, por su amor y comprensión

Al doctor Gabriel Yáñez Canal por su apoyo y orientación constante a lo largo de esta experiencia

A los profesores de la escuela de matemáticas, Juan de Dios Urbina, Carlos Bautista Duque y Gildardo Guzmán por sus enseñanzas

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: INTERACCIÓN ENTRE LA VARIABILIDAD Y LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES EN EJERCICIO*

AUTOR: Andrea María Flórez Martínez
Johanna Milena Gutierrez Prada **

PALABRAS CLAVES: Probabilidad
Variabilidad
Ley de los Grandes Números
Simulación Computacional

DESCRIPCIÓN

Este trabajo presenta los resultados de una investigación realizada con el fin de determinar las intuiciones que tienen los docentes en ejercicio acerca de la variabilidad y cómo se conecta la comprensión de este concepto con el entendimiento de la ley de los grandes números, la investigación se desarrolló a través de un proceso de enseñanza aprendizaje fundamentado en el enfoque frecuencial de la probabilidad y mediado por la simulación computacional.

La investigación se llevó a cabo con 16 docentes matriculados en la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, a quienes les fueron presentadas diversas actividades, cuya estructura fue basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986). Dichas actividades fueron implementadas a través de la experimentación física y la simulación computacional, para lo cual fue utilizado el software dinámico de datos Fathom.

Del análisis de los resultados se concluye, en términos generales, que los estudiantes, a partir de la modificación de sus intuiciones alrededor del concepto de variabilidad, lograron inferir que las frecuencias relativas oscilan considerablemente cuando el tamaño muestral es reducido, pero estas se estabilizan alrededor del valor de probabilidad cuando se aumenta el tamaño de la muestra, constatando así, una comprensión del significado de la ley de los grandes números a partir de la coordinación de los significados de “variabilidad” y “estabilidad” .

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

ABSTRACT

TÍTLE: INTERACTION BETWEEN VARIABILITY AND THE LAW OF THE LARGE NUMBERS: AN EXPERIENCE WITH TEACHERS IN EXCERCISE[*]

AUTHOR: Andrea María Flórez Martínez
Johanna Milena Gutierrez Prada [**]

KEY WORDS: Probability
Variability
Law of the Large Numbers
Simulation Computacional

DESCRIPTION

This paper presents the results of an investigation developed with the aim of stablish which are the intuitions of mathematics teachers concerning the variability and how is connected with the understanding of The law of large Numbers, the investigation was developed through a learning process based on the frequentist approach of probability and mediated by computer simulation.

This research was conducted with 16 teachers registered the program of specialization in mathematical education at Universidad Industrial de Santander, whom were presented various activities, whose structure was based on the theory of didactic situations of Brousseau (1986). These activities were implemented through physical experimentation and computer simulation, for which the Fathom Dynamic Data software was used.

From the analysis of the results we conclude, that students, from the modification of their intuitions about the concept of variability, achieved to infer that the relative frequencies vary considerably when the sample size is reduced, but these are stabilized around the probability value when the sample size is increases, noting as well, an understanding of the meaning of the law of large numbers, from the coordination of the meanings of "variability" and "stability."

[*] Grade work
[**] Faculty of Sciences. Licenciate in Mathematics. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

PRESENTACIÓN

La presencia de la probabilidad y la estadística en situaciones de la vida cotidiana tales como la medicina, los deportes y la política, entre otras, resaltan la importancia que tienen estos temas en la formación de los ciudadanos de cualquier país. Por esto, nadie niega, hoy en día, en ningún lugar del mundo, la necesidad de enseñar estos temas en la educación básica.

Aunque en la mayoría de los niveles de enseñanza no se le había dado mucha importancia al estudio de la variabilidad y las ideas estocásticas fundamentales, es justo reconocer la fuerza que han tomado la Estadística y la Probabilidad en las escuelas y colegios en los años recientes. Ese interés se ha dado gracias a que se ha reconocido su importancia en diversas áreas científicas y en el análisis de situaciones que afectan el entorno en general.

En consecuencia, desde hace algunos años el sistema educativo ha reconocido la importancia de crear espacios en el currículo para que los estudiantes utilicen el pensamiento aleatorio como herramienta en el proceso de toma de decisiones. Acerca de este tipo de pensamiento, Shaughnessy (1992) en su investigación discute la existencia de una dificultad de parte de los estudiantes para comprender y manejar situaciones de aleatoriedad y realizar predicciones acerca de ellas. Por lo que se hace fundamental ayudar a que los estudiantes reconozcan la incertidumbre como una característica de los experimentos aleatorios y aprendan a manejarla.

La importancia de investigar sobre la comprensión del concepto de variabilidad en los estudiantes ha sido reconocida en la última década; entre los trabajos pioneros, en el sentido de considerar la variabilidad como un problema de investigación educativa, se destaca Shaughnessy (1992), quien recomendó que en las investigaciones de educación estadística se procurara prestar una mayor atención a los razonamientos que hacían los estudiantes acerca de la variabilidad.

Es claro que la persona crítica, en cualquier ambiente de aprendizaje es el maestro, por tanto se debe prestar mayor atención a la preparación que reciben los docentes en cuanto a la probabilidad y la estadística, pues su papel en el aprendizaje es determinante. Logrando así, que evolucione su pensamiento probabilístico, en búsqueda de transformar y mejorar la calidad de su práctica pedagógica, dando mayor importancia a la experimentación, indagación y a la confrontación de ideas.

Por esto, se decidió que esta investigación se centraría en el análisis de la forma en que los docentes enfrentan la variabilidad y cómo a partir de ella construyen nuevo conocimiento, en este caso, el teorema de la Ley de los Grandes Números, donde además evolucionarán sus intuiciones primarias a lo largo de un proceso donde ya no estarán a cargo de la clase, sino que volverán a su antiguo rol de estudiantes, donde reevaluarán sus creencias acerca de la aleatoriedad.

La razón por la que se considera importante la investigación con docentes es que la mayoría de ellos tiene conocimiento débil de los conceptos relacionados con probabilidad y, en el caso de tener que enseñarla en su aula, tienden a enfocar su instrucción en los aspectos algebraicos y no en la interiorización de las ideas fundamentales.

Al analizar las investigaciones realizadas por Yáñez (2003), Reátiga (2004), Martínez y Mantilla (2007), Jaimes y Martínez (2007), Shaughnessy y Ciancetta (2002), García y Sánchez (2007), alrededor de la variabilidad y la ley de los grandes números, se puede ver que, aunque se crea que son conceptos estadísticos que los estudiantes interiorizan con facilidad y de manera innata, se necesita todo un proceso para lograr comprender estas ideas y todas las demás que se desprenden de ellas. Por tanto es normal que surjan inquietudes acerca de los pensamientos e intuiciones con los que cuentan los docentes.

Con base en lo anterior y buscando analizar la manera en que los profesores modifican sus nociones de variabilidad y cómo esta se conecta a otros conceptos estadísticos, se estableció la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se conecta la comprensión del concepto de variabilidad con el entendimiento de la ley de los grandes números?

Para tal fin, se decidió llevar a cabo la investigación con un grupo de 16 docentes matriculados en la Especialización en Educación Matemática, con el objetivo de analizar cómo a partir de la comprensión del concepto de variabilidad, los estudiantes se deducen al teorema de la Ley de los Grandes Números en un ambiente computacional.

Para dar solución a este cuestionamiento se buscó que además de resolver guías y realizar informes, los estudiantes recibieran una instrucción mediada por la experimentación física y la simulación computacional, buscando analizar situaciones probabilísticas en las cuales está presente la variabilidad y permitiendo además, que los estudiantes construyeran conocimiento por medio del análisis y discusión de las conclusiones que aparecieron a través del trabajo conjunto entre el curso y el profesor a cargo.

En el primer capítulo: *“Antecedentes”*, se resaltan algunas ideas fundamentales presentes en algunos trabajos de investigación relacionados con la interacción entre la variabilidad y la ley de los grandes números, donde el ambiente computacional hace presencia.

En el segundo capítulo: “*Diseño de la Investigación*”, se describe el diseño y los objetivos de cada una de las actividades implementadas, cuya estructura fue basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), donde se conjugan tres elementos fundamentales: estudiante, docente y el medio didáctico. Siendo en esta terna, el docente quien ofrece al estudiante el medio en el cual construirá su conocimiento.

En el tercer capítulo de *Análisis de las concepciones alrededor de la variabilidad y la ley de los grandes números en docentes*, se presenta el análisis de las actividades que fueron realizadas y las concepciones que reflejaron tener los profesores.

En el cuarto capítulo: *“Conclusiones”,* se presentan las conclusiones generales obtenidas en esta investigación. Igualmente, se hacen algunas sugerencias para futuras investigaciones relacionadas con los temas aquí tratados.

Al final del trabajo aparecen las referencias citadas en algún lugar del texto, y los anexos.

En el primer anexo se presenta la actividad “*Adivinando el contenido de una urna*” por medio del cual se indujo a los estudiantes en el reconocimiento de la relación existente entre el espacio muestral y la distribución de los resultados obtenidos.

En el segundo anexo “*Procedimiento para hacer la simulación computacional*” se presenta los pasos con los que se realizó la inducción de los estudiantes en un ambiente de simulación computacional a través de un software dinámico de datos como lo es Fathom.

En el tercer anexo “*Hospitales*” aparece el problema planteado por Kahneman y Tversky (1982), para la identificación de la existencia de concepciones erróneas relacionadas con la heurística de la representatividad.

En el cuarto anexo “*Generando bloques de muestras en Fathom*” aparecen las preguntas a posteriori de la simulación computacional por medio de las cuales se permitió que los estudiantes visualizaran la variabilidad presente en un grupo de muestras.

En el quinto anexo es presentada el examen final.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

“Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá”

Hipatia

Antecedentes Matemáticos

A continuación se presentan la teoría formal de la probabilidad partiendo de los diferentes enfoques de la probabilidad hasta la formalización del teorema de la ley de los grandes números y cómo la comprensión de estos va estrechamente ligada al entendimiento de la variabilidad.

Probabilidad Clásica

Sea $\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_N\}$ un espacio muestral finito y sea $P(\Omega)$ el conjunto de eventos posibles. Se define la probabilidad de un evento en función de su cardinal de la siguiente manera:

$$Si\ \ A \subseteq \Omega,\ P(A) = \frac{\#(A)}{N} \quad (1)$$

Definimos la medida de probabilidad como el tamaño relativo del evento respecto al tamaño muestral.

Esta noción de probabilidad conocida como probabilidad clásica y que se le adjudica a Laplace es la más utilizada en los problemas de probabilidad de los textos escolares para espacios finitos, y es el puente entre la teoría de probabilidades y la teoría combinatoria.

El enfoque frecuencial de la probabilidad

En este enfoque se supone que el experimento aleatorio se puede realizar repetidas veces bajo las mismas condiciones. La probabilidad de un evento A se calcula con la expresión:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} \quad (2)$$

Donde N hace referencia al número de veces que se repite el experimento y N_A al número de veces en que el resultado es favorable al evento A. Para distinguir la probabilidad obtenida de esta manera de la probabilidad clásica, la identificamos como probabilidad frecuencial.

De todas maneras, se mantiene la idea del acercamiento, característica del concepto de límite, en este caso se trata del acercamiento de las frecuencias relativas asociadas al evento *A* a un valor fijo que se corresponde con el valor de su probabilidad. Más adelante, al tratar la ley de los grandes números, se aclarará un poco más esta clase de convergencia.

En la práctica, el número de repeticiones es finito, lo que significa que dado N, un cierto número de ensayos, la probabilidad del evento A se aproxima por la expresión

$$P(A) \approx \frac{N_A}{N}$$

Donde el símbolo $\approx$ refleja que es una aproximación relativa a una serie N de ensayos del experimento aleatorio. Esta aproximación para un valor dado N, hace que la frecuencia con la que se observa se asemeje operatoriamente a la probabilidad clásica: los resultados favorables se traducen en los ensayos favorables, y el tamaño del espacio muestral se asimila al número de repeticiones realizadas.

Ley de los grandes números

El enfoque frecuencial que se introdujo y que tiene un carácter empírico, se relaciona estrechamente con el enfoque teórico de la teoría clásica en la llamada por Poisson, Ley de los grandes números. Si bien este principio tiene un carácter empírico, su expresión teórica recibe el mismo nombre y se enuncia en la siguiente forma[1](James, 1981, p210):

Sean X_1, $X_{2,\ldots,}$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas e integrables[2], con $EX_n = \mu$. Entonces

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} \rightarrow \mu \ cuando \ \ N \rightarrow \infty\right) = 1 \qquad (3)$$

Como nuestro interés está limitado a los espacios muéstrales finitos, basta con considerar el caso de la distribución de Bernoulli donde la probabilidad de éxito es igual a p:

$$p\left(\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{S_n}{n} = p\right) = 1 \qquad (4), \quad \text{donde } \ S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Es importante aclarar que las expresiones (3) y (4) implican que la convergencia se da para cualquier muestra que se considere, en el sentido de que las frecuencias relativas asociadas a una sucesión específica de ensayos de un experimento aleatorio convergen al valor de la media.

En este mismo terreno teórico si consideramos las frecuencias relativas S_n/n como una variable aleatoria su varianza es $\frac{p(1-p)}{n^2}$, que como se observa se hace cada vez más pequeña al aumentar el número de datos, esto es, las frecuencias relativas oscilan considerablemente cuando n es pequeño, pero se hacen estables cuando n crece.

[1] Se refiere a la conocida como ley débil de los grandes números
[2] Tiene esperanza finita. Se usa E para referirse a la esperanza matemática

1.2 Antecedentes Didácticos

A continuación se hace referencia a los antecedentes didácticos previos a este trabajo, los cuales se han tenido en cuenta para el diseño de esta investigación ya que están relacionados con la importancia de la simulación computacional en la construcción de los conceptos de variabilidad y la ley de los grandes números.

Yáñez (2003)

Esta investigación realizada por Gabriel Yánez Canal para optar al título de Doctor en ciencias en la especialidad de Matemática Educativa: *Estudios Sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional,* presenta los resultados de una investigación realizada para conocer el efecto que tiene un proceso de enseñanza aprendizaje, fundamentado en el enfoque frecuencial de la probabilidad e implementado a través de la simulación computacional, sobre la comprensión de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional.

La muestra con la que se trabajó estaba formada por seis estudiantes voluntarios de segundo semestre de Ingeniería de Control y Automatización del Instituto Politécnico Nacional en la Ciudad de México, se trabajó en trece sesiones de cuatro horas cada una para un total de 52 horas.

El curso se fundamentó en el uso de la simulación computacional implementada a través del software dinámico de datos Fathom donde se desarrollaron ideas fundamentales de probabilidad: experimento aleatorio, espacio muestral, evento, probabilidad frecuencial y probabilidad clásica, la ley de los grandes números, la ley de la suma y del complemento, la regla del producto para eventos independientes, la probabilidad condicional, la regla del producto generalizada y el teorema de probabilidad total.

Se utilizó como método de investigación el estudio de casos, el cual le permitió estudiar a profundidad la evolución que sufrieron los conceptos previos de los estudiantes a través de una metodología didáctica basada en la simulación computacional.

Para el análisis de las respuestas el investigador tuvo en cuenta los siguientes aspectos: las estrategias de solución, la exactitud de las respuestas, los errores (conceptuales, operativos, simbólicos) y las representaciones usadas.

Además siguiendo las recomendaciones de Miles y Huberman (1994), se realizó el análisis de la información recolectada en cuatro núcleos de interés, a saber:

1. La influencia del enfoque frecuencial sobre las concepciones y creencias de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional.

2. La relación del enfoque frecuencial y su implementación a través de los procesos de simulación en el computador con el uso del paquete Fathom, con la capacidad de resolución de problemas.

3. La relación del lenguaje y los resultados de simulación con las expresiones algebraicas que dan cuentas de ellos.

4. Los aspectos más relevantes que caractericen el manejo de los estudiantes de la herramienta computacional, en particular del lenguaje de programación del Fathom y su relación con los problemas propuestos.

Algunas conclusiones generadas de esta investigación son las siguientes:

1. Los estudiantes no alcanzaron un nivel de comprensión suficientemente claro del concepto de probabilidad frecuencial. El nivel que los estudiantes lograron les permitió desarrollar una intuición secundaria en el sentido de que la probabilidad está asociada a muchas repeticiones del experimento aleatorio con el cual se relacionan. Sin embargo, algunos hechos muestran que esta intuición no está sólidamente constituida y puede conducir a interpretaciones erróneas acerca de la probabilidad.

   Además, la dificultad en asumir el infinito en acto conduce a creer que la probabilidad no es un valor exacto sino un valor aproximado. Los estudiantes reflejaron esta concepción repetida veces en sus respuestas. Esta idea de aproximación se vio reflejada incluso cuando la probabilidad se calculaba recurriendo a la probabilidad clásica.

2. La simulación computacional de la probabilidad permite superar algunos de los sesgos o malas concepciones que los estudiantes poseían sobre las secuencias aleatorias o sobre el valor de las probabilidades en experimentos compuestos. Estos sesgos fueron el de los valores recientes, el de desorden y el de variación constante o comportamiento lineal de las frecuencias relativas.

   Además, la apreciación de la tendencia y de la variabilidad de las secuencias aleatorias exige un análisis de diferentes muestras. El comportamiento que se detectó en los estudiantes, fue que aunque inicialmente consideraban la generación de varias muestras como mecanismo necesario para acertar o ratificar algunos valores que se conjeturaban, terminaron al final, considerando una sola muestra y adoptando el último valor generado de las frecuencias relativas como estimador de la probabilidad.

Con base en los resultados obtenidos, el investigador formula algunas sugerencias didácticas que podrían ayudar a que la simulación cumpla un mejor papel en el salón de clases:

1. Es prudente hacer experimentaciones y simulaciones físicas antes de realizar simulaciones en el computador. Las experiencias físicas permitirán percibir “libremente” las características de los experimentos aleatorios y una mejor comprensión de la medida de probabilidad como cociente de frecuencias absolutas.

2. Las actividades de simulación deben incluir la realización de experimentos compuestos, de tal forma que el análisis de sus resultados permita que los estudiantes puedan comprender las relaciones que existen entre sus probabilidades y la de los resultados simples que los componen.

3. Deben diseñarse actividades que conduzcan a los estudiantes a realizar abstracciones situadas que les permitan formar redes de significados de carácter global para poder controlar de alguna forma los resultados de los experimentos aleatorios.

En conclusión, los resultados obtenidos por el autor, evidencian la importancia del papel que juega el enfoque frecuencial en el momento de superar algunas de las ideas erróneas que las personas tienen acerca de las secuencias aleatorias. El abordar el concepto de probabilidad frecuencial a través de un software, generó entre los estudiantes un significado alrededor de la probabilidad en estrecha relación con un conjunto de datos, sin embargo, no fue asimilado en toda su extensión.

Reátiga (2004)

Esta investigación realizada por Alexánder Reátiga Villamizar para optar al título de Especialista en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander: *Confrontación entre realidad y modelo teórico: una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en niños de sexto grado*, Buscaba que, por medio de una propuesta de aula, fuera posible que los estudiantes desarrollaran intuiciones probabilísticas alrededor de los siguientes conceptos: espacio muestral, certeza e incertidumbre de un suceso, azar, naturaleza de pruebas experimentales, tratamiento de residuos, sesgos asociados a experimentos aleatorios, leyes de los grandes números.

Esta investigación se llevó a cabo con 19 estudiantes de sexto grado del Gimnasio Saucará, a quienes les fueron presentados cuatro talleres, con los cuales se buscaba que por medio del juego los estudiantes predijeran resultados acerca de diversos experimentos aleatorios.

Algunas de las conclusiones que se obtuvieron en este trabajo se presentan a continuación:

1. *Distinción entre certeza e incertidumbre*: A través del desarrollo de los talleres, se logró que los estudiantes modificaran algunas de sus concepciones erróneas, ejemplo de esto es que gracias a la actividad *Jugando con los dados I,* los estudiantes pudieron establecer la incertidumbre que genera un experimento aleatorio.

2. *Naturaleza de las pruebas experimentales*: La experimentación física fue esencial en el momento de aclarar conceptos relacionados con la naturaleza de las pruebas experimentales asociadas al lanzamiento de un

dado, ya que se corrigieron ideas erróneas tales como que la fuerza de lanzamiento o la suerte podían influir en los resultados del experimento.

3. *Relaciones entre resultados individuales y patrones de resultados*: Aunque los estudiantes lograron definir el espacio muestral asociado al experimento aleatorio donde se lanzan dos lados convencionales y se suman sus resultados, al preguntarles por el resultado con mayor probabilidad, persistía la idea de suerte. Luego de pedirles que escribieran las posibles parejas correspondientes a cada suma, reconocieron que los valores centrales tenían mayor probabilidad, modificando sus primeras intuiciones. Por lo que se hace necesario realizar más experimentos físicos antes de pretender que el estudiante extrapole un concepto.

4. *Estructura de los eventos*: Determinar el espacio muestral del experimento aleatorio no presentó mayor dificultad en los estudiantes, y aunque en un comienzo le adjudicaron igual probabilidad a cada suma, por medio de la práctica descubrieron la conmutatividad presente y por lo mismo que hay algunas sumas que tienen mayor probabilidad de generarse.

5. *Tratamiento de residuos*: No obstante que se realizó un gran número de repeticiones, los estudiantes no pudieron visualizar la estabilidad presente en los valores obtenidos, lo cual impidió que lograran asimilar la diferencia entre el valor dado por la probabilidad teórica y el obtenido por medio de las repeticiones.

El autor reconoce que el no haber abordado las frecuencias relativas de los resultados obtenidos, dificultó que los estudiantes mejoraran la percepción de la ley de los grandes números a través de la percepción de la estabilidad de las frecuencias en la medida en que se aumenta el número de repeticiones. Esta recomendación se tuvo en cuenta para el desarrollo de esta investigación, donde el docente, a través del medio didáctico, le ofrece al estudiante la oportunidad de construir su propio conocimiento.

Mantilla y Martínez (2007)

Esta investigación realizada por María Isabel Mantilla Valcárcel y Maira Alejandra Martínez Avendaño para optar al título de Licenciada en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander: *Construcción de significados del concepto de probabilidad frecuencial en un ambiente computacional. Un estudio con profesores en formación*, fue orientada a interpretar los significados que adquirieron algunos profesores en formación alrededor de las secuencias aleatorias y la probabilidad durante un proceso de instrucción basado en el enfoque frecuencial y con la ayuda de la simulación computacional.

Dicha investigación fue de tipo cualitativo aunque también se realizaron algunos análisis cuantitativos. La población a la que fueron aplicadas las actividades de las que consta esta investigación la constituyeron 19 estudiantes que en ese momento cursaban Estadística en la Universidad Industrial de Santander, en el programa de la Licenciatura en Matemáticas.

La metodología usada en la investigación fue la resolución de problemas apoyada por el manejo del Software Dinámico de Datos Fathom, permitiendo así que los estudiantes construyeran su propio conocimiento por medio del descubrimiento y que interiorizaran los conceptos. Las actividades que fueron realizadas durante el curso abordaron temas básicos de la probabilidad tales como: experimento aleatorio, espacio muestral, medida de probabilidad, equiprobabilidad, independencia de eventos, la ley de la suma para eventos disyuntos, regla del producto y la distribución binomial.

Algunas de las conclusiones que se obtuvieron en este trabajo se presentan a continuación:

1. La simulación computacional hecha en Fathom de los diferentes experimentos aleatorios, facilitó a los estudiantes observar y analizar el comportamiento de las frecuencias relativas en la medida que se aumentaba el número de casos y les permitió además observar la convergencia de las frecuencias relativas al valor teórico de la probabilidad dado por la regla de Laplace en estrecha relación con la Ley de los Grandes Números.

2. En algunos estudiantes persistió el enfoque en el resultado aislado para interpretar el valor de la probabilidad, a pesar, de llevar tanto tiempo insistiendo en la necesidad de analizar bloques de repeticiones del experimento, representando así un serio obstáculo para que los estudiantes se apropien del significado frecuencial de la probabilidad.

3. La interpretación del valor de probabilidad más como una razón aritmética (inducida por el enfoque clásico) que como un asunto de frecuencias relativas de resultados exitosos cuando se repite un experimento muchas veces, se presentó en varios estudiantes. Esta concepción, que hace que los estudiantes se identifiquen más con el enfoque clásico, tiene, entre otros, el inconveniente de que limita sus competencias a la hora de resolver problemas: sólo intentan resolverlas utilizando criterios aritméticos que muchas veces no pueden justificar.

4. La experiencia física facilita la comprensión alrededor del experimento aleatorio ayudando a destacar sus aspectos relevantes. Sin la experiencia física es difícil que los significados construidos en el ambiente

computacional puedan ser considerados por los estudiantes como válidos en la realidad del fenómeno.

Mantilla y Martínez en los resultados de su trabajo, y en relación con la presente investigación, muestran la evolución que vivieron los estudiantes de sus concepciones iniciales respecto a las sucesiones de resultados de fenómenos aleatorios y del concepto de probabilidad tanto clásica como frecuencial, como resultado de un trabajo en un ambiente computacional.

Jaimes y Martínez (2007)

Esta investigación realizada por Édgar Jaimes Carvajal y Jorge Alexánder Martínez Silva para optar al título de Especialista en educación matemática de la Universidad Industrial de Santander: *Probability Explorer: Un socio cognitivo en la construcción del significado de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional,* presenta una experiencia de aula cuyo propósito era implementar y estudiar los efectos de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo del concepto de probabilidad a partir de una situación problema contextualizada y el uso de un simulador aleatorio llamado Probability Explorer.

El principal interés de los autores era identificar las intuiciones y malas concepciones probabilísticas de los estudiantes a partir de un diagnóstico, analizar los posibles cambios y su relación con la construcción del significado de la ley de los grandes números durante el desarrollo de las actividades de experimentación y simulación computacional a través del enfoque frecuencial. Se utilizó como método de investigación el estudio de casos para analizar los cambios que presentaron los estudiantes en pensamiento probabilístico durante la aplicación de las actividades en el aula.

La población objeto de estudio fueron los estudiantes de octavo grado entre los 12 y 17 años tomando una muestra de 40 estudiantes del *Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional*. Durante el trabajo de campo con los estudiantes se desarrollaron una serie de actividades basadas en el análisis de los resultados experimentales de una promoción de paletas, la cual giraba en torno a una apuesta relacionada con el lanzamiento de una moneda y el modelo de urna equivalente. En ambas experimentaciones el objetivo general era que los estudiantes pudieran argumentar acerca de la validez de una cierta promoción de mediano y largo plazo para la venta de los helados.

Algunas de las conclusiones que se obtuvieron en este trabajo se presentan a continuación:

1. *Construcción del significado conceptual*: La comprensión de la Ley de los Grandes Números exige la coordinación de dos significados el de "variabilidad" y el de "estabilidad" relacionados con las características de las frecuencias relativas a corto y largo plazo, así como la coordinación del significado del valor de probabilidad y el espacio muestral.

2. *El surgimiento del significado de variabilidad*: Para que el estudiante pudiera construir el significado claro de "variabilidad" era necesario primero el surgimiento del significado de "estabilidad".

3. *El significado de estabilidad:* En general la mayoría de estudiantes al final del análisis de los resultados totales de la experimentación real, no lograron establecer este significado y expresarlo claramente debido a la influencia de los significados de parcialidad.

4. *La controlabilidad y la predicibilidad se relacionan como significados iniciales en forma diferente para cada estudiante*: Respecto a la naturaleza

de los experimentos aleatorios, en el diagnóstico se pudo apreciar que la mayoría de estudiantes justifican los resultados con una causa física o sobrenatural, cuyo efecto en unos estudiantes es creer que los resultados pueden ser “controlables” y “predecibles”, y en otros que los resultados son “incontrolables” e “impredecibles”.

5. *Los significados que surgen de la experimentación física influyen en la confiabilidad que tiene el estudiante sobre la herramienta computacional y sus resultados:* Los significados que surgen de la experimentación física influyen en la confiabilidad que tiene el estudiante sobre la herramienta computacional y sus resultados, lo que implica una mayor responsabilidad a la hora de diseñar y aplicar experimentos físicos que no permitan generar malas concepciones que obstaculicen la construcción de significados a través de las simulaciones computacionales.

En relación con la presente investigación, Jaimes y Martínez en su trabajo muestran una experiencia con fenómenos aleatorios reales y simulados, donde se constata que en general, las malas concepciones que los estudiantes construyen alrededor de este tipo de experimentos son fuertes y difíciles de modificar. Resalta además, la importancia que tiene una metodología basada en el enfoque frecuencial y la simulación computacional como herramienta poderosa en la construcción de la ley de los grandes números.

Shaughnessy y Ciancetta (2002)

Esta investigación realizada por Michael Shaughnessy y Matthew Ciancetta titulada: *Students’ understanding of variability in a probability environment*, tuvo como principal propósito analizar la relación existente entre la comprensión del espacio muestral y las concepciones de la variabilidad.

Además, se buscó recopilar datos sobre la Evaluación Nacional del Progreso Educativo de Estados Unidos, con estudiantes de distintos niveles en cuanto a su conocimiento matemático e investigar acerca de su pensamiento probabilístico a través de entrevistas, para ver si la variación en los resultados de los ensayos influyó en la toma de sus decisiones.

Se entrevistaron a 652 estudiantes, en los grados 6 a 12, en cinco escuelas de tipo suburbano, urbano y rural; posteriormente, a 28 estudiantes de los grados 8 a 12 se les dio una versión de la entrevista que incluyó una simulación de la tarea. Los profesores de las clases de matemáticas de estos estudiantes fueron participantes en un proyecto de desarrollo profesional en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, en el verano antes del año en el que se aplicaron las encuestas.

Algunas de las conclusiones que se obtuvieron en este trabajo se presentan a continuación:

1. Los resultados de las entrevistas sugieren que es probable que los estudiantes que al principio piensan incorrectamente acerca de la situación problema, cambien de opinión después de ver la variación de los resultados de la repetición de ensayos.

2. La información que los estudiantes obtienen de la recolección de bloques de muestras y la comprensión del rango de la variable aleatoria puede llevarles a descubrir el espacio muestral por su cuenta.

3. La ganancia fundamental de esta investigación fue el realizar simulaciones, ya que representan una conexión que puede ser hecha entre la variación observada en las repeticiones y los resultados esperados.

4. Para algunos estudiantes no parece haber una conexión entre los datos obtenidos y el espacio muestral. Este particular resultado es sólo un ejemplo más en una larga lista de resultados de investigaciones que demuestran lo difícil que es cambiar las creencias de algunos estudiantes acerca de la probabilidad y la estadística (Shaughnessy, 1992).

García y Sánchez (2007)

Esta investigación realizada por Jaime García y Ernesto Sánchez, titulada: *El desarrollo de nociones de variabilidad estadística en profesores de secundaria con apoyo de actividades de simulación,* tuvo como objetivo principal observar y describir la manera en que los profesores de secundaria modificaban sus nociones de variabilidad estadística después de realizar actividades dentro de un contexto de distribuciones empíricas apoyadas con un software educativo de estadística (Probability Explorer, Fathom).

Este trabajo se realizó con la ayuda de seis profesores a través de actividades en las que resolvieron un diagnóstico y exploraron situaciones problema en el contexto de distribuciones empíricas (distribución uniforme y binomial). Además dichas actividades fueron diseñadas para llevarse a cabo con un software educativo de estadística (Probability Explorer y Fathom).

A continuación se presentan algunas de las conclusiones que se obtuvieron en este trabajo:

1. Durante las actividades emergieron evidencias que permiten conjeturar dos grandes dificultades que impiden a los maestros avanzar en la construcción de la noción de variabilidad. La primera es la tendencia a creer que las respuestas tienen que ser determinadas; se puede observar que en todas las predicciones que se les piden, los profesores expresan lo que va

a ocurrir mediante una secuencia determinada y no dando rangos dentro de los cuales esperar la respuesta. La segunda, es una idea contraria de la ley de los grandes números que supone que hay una convergencia en valores absolutos y no en valores relativos.

2. La etapa de confrontación de sus resultados con los de la simulación permite a algunos estudiantes considerar otros aspectos con relación a su manera de manejar la variabilidad en la situación planteada, por lo cual se distinguen tres grupos de dos estudiantes cada uno: los estudiantes que reconocen la omnipresencia del azar, otros que se mantienen defendiendo el dominio de la estructura y los que tratan de conciliar ambos aspectos recurriendo a otros conceptos estadísticos como el de independencia y tamaño de la muestra.

En conclusión, y en relación con el presente trabajo, el uso de las herramientas tecnológicas crea la posibilidad de que los estudiantes entiendan de manera más profunda el sentido de la variabilidad y la predictibilidad.

1.3 Antecedentes Sicológicos

A continuación se hace referencia a los antecedentes sicológicos previos a este trabajo, los cuales están relacionados con esta investigación. La intuición de la variabilidad presente en las frecuencias relativas y la ley de los grandes números constituye una plataforma cognitiva que soporta el uso del enfoque frecuencial de la probabilidad.

Heurística, sesgos y esquemas causales

La heurística de representatividad, según Kahneman y Tversky (1982), consiste en evaluar la probabilidad de un evento en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Se dice que un sujeto sigue esta estrategia de estimación de la probabilidad de un suceso, basándose en la semejanza del mismo con la población de la cual se extrae o en el parecido de éste con el proceso por medio del cual se generan los resultados.

En este tipo de razonamiento se prescinde del tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo, produciendo una confianza indebida en pequeñas muestras.

Se presenta a continuación una lista de los sesgos que se derivan del uso de las heurística de representatividad y que relacionan estrechamente con el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Insensibilidad al tamaño de la muestra o ley de los pequeños números

Este sesgo de insensibilidad al tamaño muestral, según indican Tversky y Kahneman (1971), se manifiesta cuando las personas hacen una extensión indebida de la ley de los grandes números y asumen que en las muestras pequeñas debe reflejarse la probabilidad de los eventos.

En particular, al adoptar esta ley las personas creen que para obtener el valor de probabilidad de un evento es suficiente calcular la frecuencia relativa en un número reducido de ensayos, o en el otro sentido, asumen que los resultados obtenidos en pequeñas muestras deben ser proporcionales a la probabilidad de los eventos.

Este sesgo se ha encontrado que es indiferente al paso del tiempo y al crecimiento intelectual de las personas. Fischbein (1975) lo describe en niños pequeños que se inician en la vida escolar y Tversky y Kahneman (1971) lo describen en sicólogos con experiencia.

El sesgo de equiprobabilidad

Este sesgo hace referencia a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los eventos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos con un espacio muestral no uniforme. Los sujetos que muestran el sesgo de equiprobabilidad en sus razonamientos, consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia los posibles resultados son equiprobables.

CAPÍTULO II

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

*"**Una cosa es saber y otra saber enseñar**"*
Marco Tulio Cicerón.

Los sujetos de esta investigación fueron 16 profesores de primaria y bachillerato de escuelas del sector público y privado de Bucaramanga y sus alrededores, con un promedio de 8 años de experiencia en la docencia, inscritos en la

Especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, más específicamente en el curso de Probabilidad y Estadística.

En la siguiente tabla se exponen algunas características básicas de los participantes, quienes serán identificados con seudónimos.

Estudiante	Años dentro del sistema educativo	Grados a los que les ha enseñado Estadística y/o Probabilidad	Grado Académico
Pedro	12	4° y 5° de básica primaria	Lic. en Educación Básica Primaria
Olga	4	Ninguno	Lic. en Matemáticas
Daniel	4	Ninguno	Lic. en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Eduardo	3	6° y 7°	Contador
Julio	15	Ninguno	Lic. en Ciencias de la Educación
Laura	3	2°, 3° y 4° de primaria	Lic. en Matemáticas
Óscar	4	Ninguno	Ingeniero Electromecánico
Carlos	8	Ninguno	Lic. en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Érika	7	6°, 7° y 8°	Lic. en Matemáticas
Susana	4	6° y 7°	Lic. en Matemáticas e Informática Educativa
Roberto	24	6°	Lic. en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Ana	11	6°, 9°, 10° y 11°	Lic. en Educación Básica con énfasis en Educación Matemática
Viviana	3.5	Ninguno	Lic. en Matemáticas
Sara	7	10°	Lic. en Matemáticas
Sonia	7	10° y 11°	Lic. en Matemáticas
Marisol	6	Ninguno	Lic. en Matemáticas y Tecnóloga Empresarial

Como se observa en la tabla, todos los profesores tienen un mínimo de tres años de experiencia docente, con una media de casi 7 años. Además, 11 de ellos han sido profesores de probabilidad y estadística; como grupo han tenido a su cargo estos cursos en toda la educación básica, razón por la cual se puede suponer que estos profesores tienen, al menos, conocimientos básicos de probabilidad y estadística.

Descripción del desarrollo de las sesiones

Semanalmente se realizó una sesión presencial con duración de 8 horas, para un total de 32 horas de clase en el curso. El diseño en las 4 sesiones fue elaborado en forma conjunta con el profesor Gabriel Yáñez Canal, docente del curso Probabilidad y Estadística. Las investigadoras de este proyecto estuvieron siempre presentes en el aula registrando el proceso de los estudiantes a lo largo del curso.

Las actividades realizadas en el curso fueron enfocadas a la resolución de problemas de una manera significativa, es decir, se buscó que los estudiantes construyeran su propio conocimiento a través del descubrimiento y de la experimentación, para tal efecto se utilizó la herramienta tecnológica Fathom y algunas pruebas físicas.

En general, el desarrollo de las actividades estuvo caracterizado por permitir las discusiones abiertas donde los estudiantes podían cuestionar los argumentos de los demás compañeros y a su vez contrastar sus propias ideas. Por tanto, esta forma de socializar se convirtió en un ejercicio de profunda importancia desde el punto de vista didáctico, pues los estudiantes reconocieron lo fundamental de aprender a escuchar los argumentos de otros, logrando con ello contrastar sus razones para poder obtener ideas más refinadas.

Esto permitió que, aunque el curso poseía una estructura definida y unos objetivos, fueran los mismos estudiantes quienes dieran los matices a las sesiones, es decir, las actividades no eran algo invariable, siempre estuvieron sujetas a cambios producidos por ideas y conceptos que iban apareciendo en el proceso, por tanto, los estudiantes continuamente se veían impulsados a generar teoría a medida que aparecían nuevas ideas y conceptos.

Para presentar las actividades desarrolladas a lo largo de la investigación, se debe hablar primero de la estructura que en general mantuvieron cada una de ellas.

Para esto hay que referirse a la teoría planteada por Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas (1986), dicha teoría consta de las cuatro fases siguientes, desarrolladas a través de cada uno de los trabajos realizados a lo largo de las sesiones:

- **Situación de Acción**: Ocurre una interacción entre los estudiantes y el problema o actividad propuesta. Los estudiantes deben tomar las decisiones que permitan resolver el problema planteado.

- **Situación de Formulación**: Una vez que los estudiantes han trabajado en el problema propuesto, se reúnen en parejas o pequeños grupos para compartir sus soluciones. El objetivo de esta situación de formulación es la comunicación de informaciones entre estudiantes. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

- **Situación de Validación**: Después del trabajo en parejas o pequeños grupos, donde se busca que los estudiantes logren una misma posición respecto al problema propuesto y su solución, se convoca a todos los estudiantes a una sesión plenaria de socialización de todas las estrategias y soluciones encontradas por todas las parejas participantes. Se trata de convencer a uno o más interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los estudiantes deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto, hay que explicar porque las cosas deben ser así.

- **Situación de Institucionalización**: Se busca que el conjunto de estudiantes de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido trabajado de alguna forma por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. Es importante aclarar que esta actividad es realizada por el profesor.

A continuación se presenta la descripción de la totalidad de las actividades desarrolladas en el aula:

2.1 Primera Sesión. LA PROBABILIDAD Y LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

El objetivo principal de esta sesión fue inducir a los estudiantes a la idea fundamental de que las frecuencias relativas asociadas a un resultado específico o a un evento de un experimento aleatorio, en este caso el modelo de urna, convergen a un cierto valor, y ese límite al cual convergen es la misma razón dada por la probabilidad clásica o probabilidad Laplaciana.

Para cumplir con este objetivo en esta sesión se realizaron 3 actividades donde además de un cuestionario diagnóstico, se incluyó la experimentación física y la simulación computacional, dándoles la posibilidad de confrontar sus ideas.

A continuación se da una descripción detallada de cada una de las actividades desarrolladas y se definen los objetivos propuestos en cada una.

Actividad 1: Cuestionario Diagnóstico

El objetivo de esta actividad era el de identificar de qué manera los estudiantes definían la probabilidad de un evento y si la asociaban con una proporción. El desarrollo de dicha actividad fue de manera individual, dándoles oportunidad de plasmar sus respuestas y justificaciones de manera escrita.

Este cuestionario estaba compuesto por las siguientes tres preguntas:

En la primera pregunta se pretendía saber si los profesores además de adoptar un criterio de orden para dar la respuesta incluían en su razonamiento algún elemento probabilístico.

1. *Se tiene una urna en cuyo interior hay dos bolas negras y tres bolas blancas, si se trata de extraer solamente una bola y sin mirar al interior de la urna ¿Cuál es la bola más probable de extraer?*

En la segunda pregunta, se presenta una situación con dos urnas con diferente contenido de bolas blancas y negras pero con cantidades iguales en cada urna. Se pretendía saber si los profesores adoptaban criterios meramente de conteo o, por el contrario, acudían a razones entre cantidades y si éstas eran respaldadas por criterios aleatorios.

2. *Se tienen dos urnas, la primera de ellas tiene en su interior dos bolas negras y dos bolas blancas, la otra urna tiene tres bolas negras y tres bolas blancas, si lo que se quiere es extraer una bola blanca y para esto sólo se cuenta con una única extracción ¿Cuál urna escogería para hacerlo?*

La tercera pregunta es muy similar a la segunda, la composición de las urnas no es uniforme.

3. *Se cuenta con dos urnas, la composición de la primera urna es de tres bolas negras y seis bolas blancas, la segunda urna cuenta con una composición de dos bolas negras y cuatro bolas blancas, si lo que se busca es obtener una bola negra sin mirar al interior de la urna y en una única extracción ¿Cuál urna escogería?*

Actividad 2: Adivinando el contenido de una urna

El primer experimento aleatorio que se trató fue el de adivinar el contenido de una urna a partir de la extracción de bolas con sustitución. Más específicamente, esta actividad consistía en "adivinar" la composición de una urna que contiene bolas de dos colores distintos. Se trataba de estimar el número de bolas de cada color, teniendo para ello como única acción válida extraer una bola sin mirar adentro de la urna, haciendo reposición de la misma.

Si bien tradicionalmente este experimento se realiza en forma inversa, es decir, conocida la composición de la urna, se pregunta si la distribución de los resultados que se obtienen al realizar extracciones guardan alguna relación con la composición de bolas en la urna (Bohórquez y Zárate, 2009) se resolvió invertirlo para realizar una actividad de predicción que obligara a los estudiantes a estar más atentos a la distribución de los resultados con el ánimo de percibir regularidades que les permitieran realizar "adivinanzas" mejor respaldadas. De todas maneras la forma tradicional se utilizó en el momento de realizar simulaciones en el computador como respuesta a la imposibilidad de seguir haciendo extracciones "físicas" con la urna.

Tal como lo sugiere Fischbein (1982) se pretendía que los profesores participaran en un proceso de realización de experimentos aleatorios, de adivinar resultados y evaluar posibilidades, de confrontar resultados individuales y grupales con unas predicciones a priori.

Entre las finalidades que se perseguían con este experimento estaba que los estudiantes identificaran la variabilidad presente en las diferentes extracciones, incluso por grupos de ellas, variabilidad que naturalmente se reflejaba también en las frecuencias relativas y que observaran que esta variabilidad se suavizaba a medida que se hacían un mayor número de repeticiones, y que, por ende, terminaban oscilando muy cerca a un cierto valor que guardaba estrecha relación con las razones de las cantidades de bolas presentes en la urna. En pocas palabras, se pretendía abordar experimentalmente el enfoque frecuencial de la probabilidad. En el Anexo 1 se presenta la guía de esta actividad.

Esta actividad fue dividida en dos partes. La primera parte de la actividad comprendía 11 pasos**,** el primero de los cuales tenía como intención que los estudiantes pensaran en una estrategia que les ayudara a realizar una estimación lo más acertada posible de la cantidad de bolas de cada color dentro de la urna, la cual contenía a lo más 12 bolas identificadas con dos colores diferentes. Es decir, antes de realizar cualquier experiencia física, los estudiantes debían describir, a priori antes de hacer extracciones, la estrategia que utilizarían para estimar el número de bolas dentro de la urna. Este proceso basa su importancia en la oportunidad que da al sujeto de proponer su propia estrategia y no lo limita a imitar estrategias y pensamientos de otros, sino que permite que cada quien establezca su propio desarrollo.

Paso seguido, se dio inicio a la experimentación física donde los estudiantes debían poner en práctica las estrategias planteadas anteriormente por ellos mismos. Para esto se formaron 8 parejas y se definieron los roles de Casino y Jugador dentro de ellas. El papel del Casino era el de controlar la urna y vigilar que el Jugador cumpliera con las reglas. El Jugador no conoce la composición de la urna mientras que el Casino sí y será él quien le dirá al Jugador si ha encontrado la composición correcta.

Para el desarrollo de la actividad se les suministró una urna a cada pareja, dicha urna tenía una composición diferente en cada caso y que respondía a un cierto modelo que representaba la relación existente entre la cantidad de bolas de los dos colores que había dentro de la urna. Los modelos planteados fueron los siguientes:

a) Modelo de Igualdad : 2-2, 3-3, 4-4, 5-5

b) Modelo Doble: 2-1, 4-2, 6-3, 8-4

c) Modelo Triple: 3-1, 6-2, 9-3

Para dar solución a la pregunta ¿Cuál es la composición de la urna? el Jugador tenía que extraer una bola y después de haber observado su color la debía devolver a la urna antes de hacer una nueva extracción.

El jugador contaba con una hoja de registro para las extracciones, así podía llevar una cuenta del número de extracciones y el color obtenido. El Jugador podía hacer tantas extracciones como fueran necesarias, hasta que considerara que contaba con suficientes datos como para dar una estimación. Es importante dejar claro que el Jugador sólo contaba con dos oportunidades para dar su estimación, por lo cual si no acertaba en la primera predicción tenía la posibilidad de tomar más datos para realizar un nuevo análisis.

Después de que el Jugador hubiera acertado o agotado sus dos oportunidades, el Casino tenía que revelar la composición de la urna. Acto seguido, se invertían los roles, el Jugador pasaba a ser Casino y el jugador Casino pasaba a ser Jugador y se repitió la experiencia con un modelo de urna diferente.

Luego de haber terminado la experimentación física, se les pidió que se reunieran por parejas y compartieran estrategias de tal forma que pudieran confrontar sus ideas y así elaborar una sola estrategia más perfeccionada, y si no se llegaba a un acuerdo, entonces pulir sus propias estrategias.

Una vez terminada la discusión en parejas, cada una seleccionó un ponente, quien tuvo que participar al profesor y a sus pares la estrategia que había elaborado junto a su compañero, si es que llegaron a una misma conclusión, en caso contrario, debía explicar las dos estrategias. Además, debía hablar acerca del razonamiento que los llevó a establecer dichas tácticas, dejando claro el camino que habían seguido desde el inicio de la actividad.

La segunda parte de esta actividad fue denominada "*En búsqueda de regularidades*", su finalidad era reunir en grupos a los estudiantes que tenían el mismo modelo de urna para que analizaran y discutieran alrededor de los datos obtenidos durante todo el proceso, buscando que generaran una nueva estrategia más sólida que corroborara las conclusiones a las que habían llegado en la confrontación en parejas. A continuación, cada grupo expresó en forma escrita sus conclusiones.

Luego de la experiencia física con las urnas y de la socialización por parejas y frente al salón, se dio paso a establecer las ideas fundamentales de la actividad de una manera formal, para esto se realizó una síntesis de todo el trabajo.

Cabe señalar que las actividades realizadas anteriormente siguieron un proceso inductivo en el sentido en que el Jugador no conocía la composición exacta de la urna, por tanto realizaba una inferencia con base en los resultados obtenidos en las extracciones, generando así diversas hipótesis a lo largo del proceso.

Actividad 3: Simulación Computacional

Después de realizado el proceso inductivo plasmado en la actividad de adivinar el contenido de una urna, se procedió al proceso inverso, es decir, a una actividad también de urna pero conociendo su composición, con el ánimo de que los estudiantes pudieran observar las relaciones que se presentan entre la distribución de los resultados obtenidos y la composición de la urna. Para realizar esta actividad deductiva se decidió utilizar la simulación computacional utilizando el paquete estadístico educativo Fathom (2000).

Las ideas principales que se trabajaron a lo largo de la actividad fueron la variabilidad entre muestras, la relación existente entre cantidad de las bolas de cada color que componen la urna y los resultados obtenidos, además, la tendencia a estabilizarse a largo plazo que tienen las frecuencias relativas. En el Anexo 2 se puede consultar la guía utilizada.

La finalidad de esta actividad es introducir a los estudiantes en un ambiente de simulación computacional a través de un software dinámico de datos como lo es Fathom, el cual proporciona y motiva a explorar y analizar datos gráficamente, ayudando a los estudiantes a confrontar sus ideas del experimento físico con los resultados del proceso de simulación al realizar extracciones en una urna de cierta composición.

Para esto se modeló una urna que contenía dos bolas blancas y una bola negra de donde se realizara con sustitución cierto número n de extracciones, y contar las bolas blancas obtenidas, para lograr así realizar un ejercicio equivalente a la experimentación física pero de una manera más eficiente gracias a las herramientas ofrecidas por la tecnología. El trabajo de los estudiantes era realizar individualmente un nuevo análisis sobre el proceso aleatorio desarrollado en

Fathom y los resultados obtenidos en las tablas y gráficos construidos, identificando así, conceptos tales como la variabilidad.

Luego de eso se dio paso a un análisis en parejas de las conclusiones obtenidas por cada uno para después ser debatidas con todo el curso. En esta fase de la actividad se compartieron las diferentes conclusiones a las que habían llegado los estudiantes a través del proceso de simulación, teniendo en cuenta cómo su análisis lograba complementar y refinar las conclusiones del experimento físico, consiguiendo así que plantearan nuevos resultados como consecuencia de la experiencia vivida en el ambiente computacional.

Posteriormente se dio la *fase de institucionalización*, en la cual el profesor del curso estableció los conceptos fundamentales de lo que se había hecho tales como la definición de probabilidad de un evento como el límite de las frecuencias relativas obtenidas cuando el experimento es repetido un número infinito de veces.

Como trabajo complementario para la casa se les dejo como única tarea realizar un ensayo sobre la Ley de los grandes Números, sin la ayuda de libros, Internet, etc. sólo con lo que se había visto en la sesión 1, buscando así que describieran en sus propios términos lo que habían aprendido en las actividades desarrolladas en clase.

2.2 Segunda sesión. VARIABILIDAD

El objetivo de esta sesión fue el de verificar si los estudiantes identificaban la variabilidad como un concepto fundamental en probabilidad. Para el desarrollo de la segunda sesión se realizaron dos actividades. La primera, consistía en un ejercicio que pretendía conocer el grado de comprensión que los estudiantes habían logrado acerca de la ley de los grandes números, en particular, el efecto del tamaño muestral sobre la variabilidad de las frecuencias relativas y la convergencia de éstas al valor de probabilidad.

La segunda buscaba que los estudiantes reflexionaran sobre la variabilidad de las muestras de un mismo tamaño y que analizaran sus regularidades cuando se aumenta el número de ellas. La idea para esta segunda actividad surgió a raíz de que, precisamente, la estrategia más utilizada por los estudiantes para adivinar el contenido de la urna en la primera sesión, consistió en analizar bloques de extracciones del mismo tamaño en busca de regularidades que les permitieran inferir el número de bolas de cada color en la urna. Como es de suponer, esta actividad desembocó en la construcción del modelo binomial que da cuenta de la probabilidad de obtener cierta cantidad de bolas de cierto color cuando se realizan un número fijo de extracciones.

A continuación se describen las dos actividades desarrolladas:

Actividad 1: Hospitales

El ejercicio que se pidió a los estudiantes que resolvieran es el ya famoso problema clásico de los hospitales mencionado por Kahneman y Tversky (1972):

En una cierta ciudad existen dos hospitales: el hospital A que es el hospital grande y el hospital B que es el hospital pequeño. Se sabe que la probabilidad de que un bebé que nace sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es más probable?

a) *Que en el hospital A de cada 100 nacimientos nazcan 80 o más varones*

b) *Que en el hospital B de cada 10 nacimientos nazcan 8 o más varones* *c) Son igualmente probables*

Escoja una de las opciones y justifique su respuesta.

Luego de haber terminado el análisis individual, se dio oportunidad a que cada uno de los estudiantes diera su punto de vista a manera de debate, para estimular la confrontación de ideas como estrategia de aprendizaje.

De esta forma, si alguien tenía una duda sobre las razones que su compañero exponía al grupo, podía preguntar de manera abierta o dar su opinión acerca del argumento en cuestión. A lo largo de la puesta en común hubo quienes modificaron su respuesta y sus argumentos una vez habían oído los planteamientos de los demás participantes en la discusión.

Una vez que todos los estudiantes habían defendido sus argumentos o refutado los de sus compañeros y habiendo terminado la puesta en común, se dio paso a la clarificación de las ideas principales con la ayuda del profesor, para esto siempre se tuvo en cuenta los puntos de vista que habían dado en la socialización. Fue así como se llegó a un consenso en cuanto a cuál era la respuesta correcta y por qué, dando precisión a los conceptos y negando con argumentos validos y lógicos las respuestas incorrectas.

Actividad 2: Generando bloques de muestras en Fathom

Después de que el profesor del curso disertara acerca de la Ley de los Grandes Números, resaltando, entre otras cosas, la estrecha relación entre la probabilidad laplaciana, teórica o a priori con la probabilidad experimental, a posteriori o, simplemente, frecuencial, se procedió a continuar con la segunda actividad en Fathom.

Con esta actividad se quiso comprobar, con la ayuda de Fathom, si las estrategias que los estudiantes habían planteado para dar solución al experimento físico donde debían adivinar el contenido de una urna eran efectivas. Más concretamente, se simuló la generación de muestras del mismo tamaño, con el ánimo de conocer regularidades que de alguna forma se pudieran relacionar con la composición de la urna.

Antes de dar lugar a la actividad en sí misma, el profesor explicó paso a paso el proceso para hacer la simulación en Fathom, y cada estudiante generó bloques de muestras de tamaño n que les asignó el profesor, de esta manera se generaron muestras de tamaño 10, 50, 100, 200 y 500, con una urna que tenía dos bolas blancas y una negra. A la par con este proceso debían responder las preguntas del taller que se describe en el Anexo 4.

Este trabajo permitió que los estudiantes establecieran la variabilidad presente en un grupo de muestras y además reconocieran la ayuda que presta la tecnología a la hora de realizar un trabajo mecánico y prolongado.

Luego de todo el trabajo con Fathom, se pasó a una socialización de las ideas principales que había arrojado la actividad y de las conclusiones a las que había llegado cada estudiante después del contraste que se dio entre el trabajo físico y el computacional.

En medio de la discusión se llegó a la idea de *distribución de probabilidad de una variable aleatoria,* en este caso el número bolas blancas extraídas en cada muestra, gracias a la pregunta que surgió de manera natural cuando se repiten muestras de cierto tamaño:

Se tiene una urna con dos bolas blancas y una bola negra ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 bolas blancas en seis extracciones?

Fue así como, a raíz de este interrogante, se hallaron proporciones y estimaciones de la probabilidad de cada uno de los valores, en el caso especifico de una urna compuesta por dos bolas blancas y una negra, de donde apareció la duda de si había una forma de conocer el valor exacto de bolas blancas cuando se realizan seis extracciones.

Las ideas que aparecieron en medio del proceso, tales como la regla del producto para eventos independientes, el principio fundamental del conteo y la combinatoria, fueron enfocadas a la deducción de la función de probabilidad de la variable aleatoria binomial, actividad que fue realizada por el profesor.

Una vez aclaradas las ideas, se aplicó este nuevo concepto a la solución del problema de los hospitales, lo que permitió que los estudiantes percibieran en "vivo" la forma como las matemáticas enfrentan los problemas y obtienen sus soluciones creando, de paso, teoría matemática que, por supuesto, tiene un alcance mayor que el problema o problemas que la originaron.

Como trabajo extra los estudiantes debían ahondar un poco más en estos conceptos buscando de esta forma mayor claridad de ideas y realizar un examen alrededor de la identificación de situaciones de Distribución Binomial y sus parámetros.

2.3 Tercera sesión. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Esta sesión tuvo como finalidad determinar si los estudiantes reconocían situaciones binomiales e identificaban los parámetros claves de este tipo de distribución, además se dio el empalme entre la Distribución Binomial y la actividad de adivinar el contenido de una urna. Se dio inicio a la clase con un resumen de la sesión anterior hecho por los mismos estudiantes y guiado por preguntas formuladas por el profesor, donde explicaban en sus palabras el proceso de deducción de la Distribución Binomial que habían realizado.

Una vez hecha la socialización se dio paso a la primera actividad donde fueron propuestos dos problemas de Distribución Binomial:

Actividad 1: Problemas de Distribución Binomial

Dado que una distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta utilizada en muchos de los problemas de la vida cotidiana es la distribución binomial, se pretende que a través de situaciones-problema los estudiantes identifiquen las características que la definen.

Los dos problemas planteados tenían como finalidad el que los estudiantes de manera individual identificaran los parámetros esenciales de la Distribución Binomial: la probabilidad de éxito y el número de repeticiones. Como bien lo relata Vergara (2008), identificar estos parámetros no es, ni mucho menos, una tarea fácil, aquí queríamos saber si el trabajo computacional previo y la forma como se llegó a la distribución binomial habían ayudado en esta identificación.

Problema 1.

Suponga que la experiencia ha demostrado que solo 1/3 de todos los pacientes que tiene una cierta enfermedad se recobrarán si se les administra el tratamiento estándar. Una nueva droga va a ser probada con 12 voluntarios. Si las regulaciones sobre la salud requieren que al menos 7 de estos pacientes deben sanarse antes de que la nueva droga se autorice, ¿Cuál es la probabilidad de que la droga no sea acreditada incluso si aumenta la tasa de recuperación a ½?

Problema 2

Un estudiante responde un examen de escogencia múltiple en el cual hay 10 preguntas cada una con 5 alternativas, de las cuales solo una es la respuesta correcta, el estudiante no sabe del tema de cuestionario y resuelve contestar al azar

a. *¿Cuál es la probabilidad que responda acertadamente 6 preguntas?*

b. *¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien al menos una pregunta?*

Una vez resueltos los problemas de manera individual se dio paso a la socialización de los argumentos y soluciones a los que los estudiantes habían llegado. El profesor planteó el enriquecimiento de los problemas como una herramienta didáctica, (el profesor la llamó la “didáctica del engorde”) la cual consistía en que los estudiantes ahondaran y analizaran nuevos cuestionamientos generados alrededor de la situación propuesta en un inicio, buscando que una vez que los estudiantes se hayan apropiado del problema puedan generar otras preguntas interesantes. De allí se derivó, por ejemplo, el siguiente interrogante aportado por una alumna que dio lugar a un nuevo análisis del problema:

¿Cuál debe ser la tasa que debe garantizar la droga para cumplir las condiciones de acreditación?

La distribución binomial y los problemas de cálculo que surgen cuando los valores del parámetro n son muy grandes dieron lugar a la búsqueda de aproximaciónes utilizando la distribución normal, aspecto que permitió abordar de forma gráfica intuitiva el Teorema Central del Límite.

De otro lado, en medio de la discusión entre grupos a raíz de los problemas propuestos, el profesor preguntó qué estrategia utilizarían para estimar la proporción de blancas en una urna cuya composición no se conoce de tal forma que la probabilidad de que acierte sea mayor que el 60%, es decir, de cada 100 pronósticos que se hagan en promedio en 60 de ellos el resultado que de, va a ser el valor verdadero de la proporción de bolas blancas en la urna.

El análisis de esta pregunta, que relaciona el problema de la composición de la urna con la estimación del parámetro *p,* condujo el curso al proceso de estimación de parámetros entrando de esta forma en los terrenos de la estadística inferencial.

Es así que a partir de este momento se introdujeron términos tales como la media o esperanza de la distribución binomial, intervalos de confianza, e incluso, algunos elementos de pruebas de hipótesis.

2.4 Cuarta sesión. Exposiciones y evaluación final

Esta sesión tuvo como finalidad analizar los saberes adquiridos por los estudiantes durante el curso de estadística y probabilidad. Además, hubo un ingrediente particular el cual consistió en que, a petición de los estudiantes, se realizó una presentación colectiva de los temas propuestos por el profesor como tema de estudio, ya que durante la semana anterior por iniciativa propia decidieron reunirse para preparar la presentación. En esta exposición se trataron conceptos fundamentales para el curso tales como Distribución Normal, estandarización e intervalos de confianza.

Actividad 1: Exposiciones

Para la presentación de los temas los estudiantes se organizaron de la siguiente manera:

- Pedro: Estuvo a cargo de la historia de la Distribución Binomial.

- Viviana: Manifestó que la intención que tenía era exponer la relación de la Distribución Normal con el ejercicio de la urna para saber su composición.

- Roberto: Estuvo a cargo de algunas propiedades de la Distribución Normal.

- Sonia: Habló de la Distribución Normal Estándar.

- Laura: Se encargó de resolver algunos problemas de aplicación de la aproximación de la Distribución Binomial a través de la Distribución Normal con la ayuda de tablas de probabilidad.

- Sara: Habló sobre aproximación normal de una Distribución Binomial tomando como ejemplo el modelo de urna.

- Olga: Expuso acerca de los intervalos de confianza para una proporción.

Actividad 2. Examen final.

Para evaluar el curso el profesor realizó dos evaluaciones, una oral y otra escrita.

Examen oral: para el desarrollo de esta actividad los estudiantes fueron llamados de forma individual al salón donde sólo estaban presentes el profesor y las investigadoras. Las preguntas formuladas fueron las siguientes:

- ¿Qué es la probabilidad para usted?
- ¿Cuál es la diferencia entre probabilidad y posibilidad?
- ¿Qué es un evento?

- ¿Qué es el espacio muestral?
- ¿Qué es un experimento aleatorio?
- ¿Qué es la ley de los grandes números?
- Hable de la distribución binomial.

Examen escrito: Constaba de cuatro situaciones-problema, en las cuales debían aplicar conceptos e ideas estudiados a lo largo de las sesiones, tales como la independencia de eventos aleatorios, aproximación de una Distribución Binomial a través de una normal e intervalos de confianza. En el Anexo 5 se presenta todo el contenido de esta evaluación.

Una vez presentada la evaluación final se da por concluido el curso de Probabilidad y Estadística de la Especialización en Educación Matemática.

En el próximo capítulo se realiza un análisis de las respuestas y comentarios de los estudiantes a lo largo de todo el curso.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES ALREDEDOR DE LA VARIABILIDAD Y LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS EN LOS DOCENTES EN FORMACIÓN

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles"

Descartes

En este capítulo se presenta el análisis de las actividades que fueron realizadas en la primera y segunda sesión del curso de Estadística y Probabilidad en la Especialización en Educación Matemática. Además, se presenta la prueba diagnóstica y el análisis de la evaluación final.

EXPERIENCIAS Y POSTURAS DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

La Estadística y la Probabilidad son áreas esenciales en la formación del docente en ejercicio, por tanto es primordial conocer su postura y experiencias frente a ellas y saber si en realidad comprenden su importancia en el mundo de hoy.

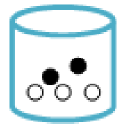
Por esto, se realizó una encuesta al inicio del curso con la cual se pretendía identificar las posturas de los estudiantes frente a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, además, se buscaba saber cómo había sido su experiencia en el momento de interactuar con ellas.

3.1 CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Este cuestionario consta de cuatro preguntas, pensadas con el ánimo de identificar las concepciones previas que tenían los estudiantes alrededor de un experimento aleatorio trabajado con urnas, donde la comparación de probabilidades implica una comparación de fracciones, pero se añade la dificultad de que también se requieren las ideas de azar, casos favorables y posibles.

Las tres preguntas buscan establecer si los estudiantes manejan conceptos formalizados a la hora de calcular el valor de probabilidad o si por el contrario acudían a sus intuiciones primarias para validar sus argumentos.

1. *Se tiene una urna en cuyo interior hay dos bolas negras y tres bolas blancas, si se trata de extraer solamente una bola y sin mirar al interior de la urna ¿Cuál es la bola más probable de extraer?*



Para dar solución a esta pregunta era necesario que los estudiantes identificaran y compararan las dos fracciones implícitas en el problema (probabilidad clásica), pero aunque la totalidad de estudiantes contestaron correctamente en esta pregunta, solamente tres estudiantes (18.75%) hallaron la probabilidad aplicando la regla de Laplace. Además, identificaron los posibles resultados en este experimento aleatorio (espacio muestral).

El porcentaje restante (81.25%) de los estudiantes respondieron comparando la cantidad de bolas de cada color existentes en la urna, eligiendo el resultado que tiene mayor presencia en el espacio muestral. Sin duda, este argumento aritmético de orden permite responder a la pregunta de *la bola más probable de extraer,* el asunto es que no tiene implicaciones en términos de comparación de probabilidades ni mucho menos en términos de la distribución de resultados cuando se realizan un conjunto de extracciones. Naturalmente no se pueden pedir razonamientos de este estilo cuando el problema no lo exigía.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento es el de Oscar: *"La blanca; porque observo mayor número dentro de la urna, entonces hay más probabilidad de sacar una bola blanca"*; otro razonamiento es el dado por Carlos: *"La bola más probable es la bola blanca ya que es la que tiene mayor cantidad y es su relación 3 a 2".*

Por el contrario, la siguiente pregunta obligaba a realizar comparaciones que iban más allá del simple conteo de posibilidades favorables.

2. *Se tienen dos urnas, la primera de ellas tiene en su interior dos bolas negras y dos bolas blancas, la otra urna tiene tres bolas negras y tres bolas blancas, si lo que se quiere es extraer una bola blanca y para esto sólo se cuenta con una única extracción ¿Cuál urna escogería para hacerlo?*

Las respuestas dadas por los estudiantes fueron clasificadas según la opción escogida.

Ocho de los estudiantes (50%) dieron la solución correcta, sin embargo sólo tres de ellos recurrieron a la regla de Laplace, unos realizando el cálculo directamente y otros en forma encubierta, tal como lo dice Daniel: *"Al ser igual el número de bolas, considero que escoger cualquier urna da igual, pues bolas negras y blancas la posibilidad de extracción sería 50% y 50%"*.

En las otras cinco respuestas de nuevo se evidenció que para dar solución a la escogencia de la urna, los estudiantes compararon el número de bolas de cada color dentro de las urnas. Un ejemplo de las respuestas dadas por los estudiantes es el razonamiento de Olga: *"Las dos me garantizan la misma probabilidad porque tienen la misma cantidad de bolas del mismo color"*.

Cuatro estudiantes (25%) en esta pregunta escogieron la urna número uno, En general, estos cuatros estudiantes argumentaron que al haber menos bolas en la primera urna, existiría menor probabilidad de fracaso al extraer la bola blanca. Un ejemplo de esta argumentación es el de Viviana: *"En ambas urnas existe la misma relación numérica entre las bolas, pero en la (1) hay menor cantidad de bolas, por lo tanto hay menor posibilidad de equivocarse"*.

Este tipo de argumentación que ya se había presentado en otros trabajos (Yáñez, 2003), muestra cómo a pesar de identificar las razones iguales entre bolas en ambas urnas, algunos estudiantes no asumen que sea esta la que termine condicionando los resultados que deben salir, sino que son las frecuencias absolutas de bolas las que realmente los condicionan.

Además, y de manera algo extraña, no se fijan en la cantidad de bolas blancas, que es el color que debe salir, sino que, adoptan una estrategia de conteo de las bolas negras, para disminuir "*la posibilidad de equivocarse*". Es como si se tuviera una intuición de complementariedad: si tengo menos desfavorables seguramente es porque tengo más de favorables, argumento que si bien funciona cuando se trabaja con probabilidades porque la suma debe ser 1 no es el caso cuando se trabaja con frecuencias absolutas.

De otro lado, cuatro estudiantes (25%), adoptaron un argumento o estrategia que identificamos como positivo, (en contraposición a la anterior que llamamos negativa), en el sentido de que escogieron la urna dos que es la que más bolas blancas contiene. Ejemplo de estos razonamientos es la argumentación dada por Laura: *"La dos porque entre más bolas blancas hay más probabilidad de que salga la bola blanca, hay más blancas en la dos que en la uno aunque tenga la misma probabilidad"*. Otro detalle para resaltar es el uso indiscriminado que los estudiantes tienen respecto a las *posibilidades* y las *probabilidades,* términos que prácticamente asumen como sinónimos.

En la tercera pregunta, las urnas siguen teniendo la misma distribución pero ahora ésta no es uniforme.

3. *Se cuenta con dos urnas, la composición de la primera urna es de tres bolas negras y seis bolas blancas, la segunda urna cuenta con una composición de dos*

bolas negras y cuatro bolas blancas, si lo que se busca es obtener una bola negra sin mirar al interior de la urna y en una única extracción ¿Cuál urna escogería?

Urna I Urna II

Esta pregunta, al igual que las dos anteriores, describe un experimento aleatorio simple que es trabajado con urnas, dicho cuestionamiento está asociado al cálculo y comparación de probabilidades. Los argumentos que dieron los estudiantes fueron clasificados según la opción escogida por cada uno de ellos, surgiendo así, dos tipos de estrategias dadas por los estudiantes, la primera de ellas es la estrategia positiva, llamada así porque sólo tuvieron en cuenta los casos favorables al evento para dar su respuesta. A diferencia de esto, la "estrategia negativa" corresponde al caso en que los estudiantes elegían la urna con menor número de casos desfavorables, a pesar de que en ambas urnas existía igual probabilidad de extraer una bola negra.

Dos (12.5%) estudiantes mostraron la estrategia positiva, es decir, seleccionaron la urna uno, ya que en esta urna había mayor cantidad de bolas negras. Ejemplo de este razonamiento es el dado por Eduardo: *"La urna uno ya que tiene más bolas negras, lo cual me da más opciones de extraerla"*.

Seis estudiantes (37.5%) escogieron la urna número dos, aquí se encontraron razonamientos que incluyen diferentes percepciones acerca de la cantidad de bolas en las urnas; tres de ellos en la pregunta anterior se inclinaron por la urna I ya que existía menor cantidad de bolas, siendo claro que en estos estudiantes persiste la ausencia de la idea de asociar el valor de probabilidad con una proporción entre casos favorables y casos posibles.

Ejemplo de estas reflexiones es la dada por Érika: *"Escogería la urna dos, en esta tengo mayor posibilidad de sacar negra ya que son menos bolas en total. Aunque la probabilidad de sacar negra en la urna uno y dos es la misma"*.

Otro ejemplo es la respuesta dada por Viviana: *"Nuevamente en ambas urnas hay la misma relación entre las bolas negras y las blancas, pero donde hay menor números de bolas hay menor posibilidad de equivocarse"*. En este razonamiento, a pesar de manifestar que existe igual probabilidad, estos estudiantes eligieron la urna dos guiados por la idea de que al haber menor cantidad de bolas es menor la probabilidad de fracaso.

Ocho de los estudiantes (50%) manifestaron en sus razonamientos que en las dos urnas existía igual probabilidad de extraer una bola negra, sin embargo cinco de ellos no aplicaron la regla de Laplace. Entre éstos últimos, se dieron argumentos como el de Marisol*:"Tomaría la opción 2 ó 1, ya que hay menos bolas en la dos y en la uno más bolitas, luego cualquiera de las opciones tiene la misma posibilidad",* que se puede interpretar como la respuesta a la confrontación de los dos puntos de vista comentados previamente: "La urna 1 porque contiene más negras (estrategia positiva), pero la urna 2 porque contiene menos blancas (estrategia negativa)".

De los estudiantes que respondieron correctamente a la primera pregunta, el 50% de ellos se equivocaron al responder la segunda pregunta al escoger la respuesta guiados por la cantidad de bolas, ignorando en sus argumentos los casos favorables al evento, esta idea errada persistió en las respuestas obtenidas en la tercera pregunta, a excepción de Laura, quien aunque la respondió correctamente, estableció una proporción entre la cantidad de bolas de cada color existentes en cada urna, sin tener en cuenta el total de bolas.

A continuación se analizan los razonamientos que justifican por qué escogieron la opción que presentaron como respuesta:

		Pregunta 2	**Pregunta 3**
Comparación del número de casos posibles	Consiste en elegir la urna que contenga menor número de bolas. Los estudiantes sólo tienen en cuenta el número de casos posibles de ambas urnas, sin comparar las proporciones de bolas blancas y negras.	25%	37.5%
Comparación del número de casos favorables	Consiste en elegir la urna que contenga más bolas del color favorable.	18.75%	6.25%
Estrategia comparación de casos favorables con casos desfavorables	Se tienen en cuenta los casos favorables y los desfavorables, estableciendo con ellos dos razones.	25%	18.75%
Estrategias comparación de casos favorables, desfavorables y posibles:	Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. Consiste en la aplicación de la regla de Laplace.	18.75%	25%
Otros tipos	Tener en cuenta la posición de las bolas en el dibujo o decir que todo es igualmente probable (sesgo de equiprobabilidad).	12.5%	12.5%

En conclusión, se podría decir que los estudiantes resolvieron los problemas con argumentaciones puramente aritméticas sin ninguna referencia a la esencia aleatoria que ellos contienen. Las argumentaciones aritméticas fueron o de conteo y comparación de cantidades, o de razones. Si bien las de razón se pueden asimilar a la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades, tal como los estudiantes lo dejaron traslucir en las discusiones alrededor de los problemas, se trata más bien de un razonamiento aritmético más totalizador que pone en juego toda la información dada. Ningún estudiante insinuó, siquiera, que existiera una relación entre las razones en el espacio muestral con los resultados que se pudieran obtener si se realizaban extracciones de las urnas.

ADIVINANDO EL CONTENIDO DE UNA URNA

Después de conocer los diferentes enfoques de los estudiantes respecto al concepto de probabilidad que dejaron traslucir su falta de conciencia aleatoria, se procedió a realizar experimentos aleatorios con el ánimo de que los estudiantes realizaran repetidas experiencias y percibieran directamente la forma como ellas se comportan, en primera instancia, con los experimentos físicos con pocas repeticiones y, después, usando el computador para grandes cantidades de repeticiones. Es decir, primero se quería que apreciaran la gran variabilidad que se presenta con pocas repeticiones y, luego, que apreciaran como ésta disminuía y se producía el fenómeno de la estabilidad. Para ello, se utilizó la experiencia que se llamó *adivinando el contenido de una urna* que describimos ampliamente en el capítulo anterior.

> *Imagine que una urna contiene una cierta cantidad de bolas blancas y de bolas negras de tal forma que la suma de ellas es menor o igual a 12, y se trata de "adivinar" el número de bolas negras y bolas blancas. Para ello, la única acción válida que se puede realizar consiste en extraer una bola sin mirar hacia dentro de la urna, observar su color y devolverla antes de sacar otra bola después de haber sacudido la urna. Se pueden realizar las extracciones que se consideren necesarias.*

En las estrategias mencionadas por los profesores antes de realizar la experiencia, se observan algunas ideas intuitivas que se pueden considerar primarias según la clasificación de Fischbein (1982):

1. Si al realizar un cierto número de extracciones, se obtienen más bolas de un color que otro, es porque en la urna probablemente existen más bolas del color mayoritario.

Un ejemplo de esta estrategia lo da Sonia. *“Realizo el ejercicio diez veces y observo si saco sólo negras, tiendo a pensar que sólo hay bolas negras, pero si de 10 veces saco una bola roja voy a creer que hay más negras que rojas, siempre llevando el registro de las extracciones y el color que se va obteniendo”*.

Sin embargo, esta “lógica” que desconoce por completo la variabilidad muestral, no es del todo válida porque va a depender del número de extracciones, de la cantidad de bolas en la urna y, fundamentalmente, de la relación entre las bolas de los dos colores.

2. Realizar cierta cantidad de extracciones (no se precisa cuántas) y observar la relación que se da entre los números de bolas de cada color.

La respuesta dada por Marisol es ejemplo de esta categoría: *“Realizar extracciones, llevar un registro de los colores y veces que he sacado la bola y de acuerdo a ello indicar un posible resultado de las cantidades de bolas teniendo en cuenta realizar varias extracciones”.* Otro ejemplo es la respuesta dada por Eduardo: *“Buscar una relación entre los colores sacando varias veces la bola para ver con qué frecuencia sale un color”*. En este mismo sentido es el razonamiento de Sara, quien además añade un ingrediente de intento de control del experimento tal y como lo reportan, por ejemplo Reátiga (2004), Bohórquez y Zárate (2009) y Jaimes y Martínez (2005): “*Sacudir la caja para escuchar si hay muchas o pocas* *bolas; empezar a realizar la extracción y si observo que la mayoría de veces sale negra entonces es porque hay mayor probabilidad de que éste color sea la mayor cantidad".*

En la misma dirección pero estableciendo el número de extracciones está el argumento de Viviana: *"Como no se sabe el número total de bolas, pienso que se deben realizar por lo menos 6 intentos de sacar bolas y se contaría la cantidad de veces que sale cada color"*. "Como el número máximo de bolas es 12, entonces digamos que son 6 y hagamos 6 extracciones y contemos el número de bolas de cada color que se extrajo". Valdría la pena para confirmar esta especulación que, en lugar de hablar de un máximo, se dijera el número exacto del total de bolas en la urna para conocer con mayor certeza las relaciones deterministas que los estudiantes puedan establecer antes de realizar el experimento.

El experimento

Acto seguido se dio lugar al experimento físico, en donde los estudiantes tuvieron la opción de aplicar sus estrategias o hacerles los cambios necesarios para poder adivinar el contenido de una urna. Sólo dos estudiantes (12.5%) realizaron sus extracciones de forma continua, ya que los demás (87.5%) optaron por realizar grupos de extracciones del mismo tamaño como estrategia para dar solución al problema, es decir, realizaron bloques de muestras para luego comparar los resultados obtenidos en cada uno de ellos. Esta idea de los bloques surgió, muy seguramente, por haber establecido que el Jugador tenía dos chances para adivinar el contenido de la urna, lo que hizo que muchos de ellos realizaran un grupo de extracciones, estimaran una cierta cantidad de bolas y procedieran con otro grupo de extracciones para obtener una estimación diferente.

Las estrategias utilizadas por los estudiantes se clasificaron según las siguientes categorías:

1. Uso del tacto y/o del sentido del oído, la observación de detalles que permitieran diferenciar las bolas.

Casi la mitad de los profesores (siete) se ubicaron en esta categoría mostrando un claro reconocimiento de la imposibilidad de controlar el azar. Ejemplo de este tipo de argumento es el dado por Eduardo*: "La cantidad la estimé por tacto ya que eran poquitas bolas"*. Otro ejemplo es la respuesta dada por *Ana: "La estrategia que utilicé fue la marca o número de la bola"* Este estudiante atribuye su acierto a una circunstancia externa, dejando de lado cualquier argumento probabilístico.

2. Extrapolación de la relación de colores extraídos a la relación de colores en la urna.

Los restantes profesores (nueve), luego de haber realizado tablas de frecuencia, organizaron sus datos, calcularon frecuencias absolutas o relativas y dieron estimaciones de las bolas en la urna. Ejemplo de esto es la respuesta dada por Daniel: *"Traté de buscar la probabilidad de acuerdo al color de las bolas extraídas y así calculé el posible número, a mayor cantidad de un color se puede determinar de cuál hay más, haciendo la tabla de frecuencia".* Otro ejemplo de este tipo de razonamiento es el dado por Pedro: *"Analicé el número de extracciones y las veces que apareció cada color y mediante el porcentaje de cada color que aparece determiné el número de bolas de cada color existentes en la urna"*

Luego de realizar la experiencia del casino, cada pareja se reúne a sesionar alrededor de las estrategias utilizadas por ambos para realizar sus estimaciones con la intención de llegar a un acuerdo que les permitiera construir la mejor estrategia.

Entre las conclusiones logradas por las parejas se destacan las siguientes ideas:

- La necesidad de realizar la mayor cantidad de extracciones.

Seis de las ocho parejas consideraron la importancia del número de ensayos en las estimaciones frecuenciales de probabilidad, asegurando que al realizar un mayor número de extracciones podrían llegar a la proporción correcta. Un ejemplo de este tipo de conclusión fue el dado por Viviana: *“Entre las dos entonces decidimos que la estrategia era la mayor cantidad posible de extracciones para poder mirar la repetición de la ocurrencia, con 6 nada más es insuficiente”.*

Aunque estas parejas concluyeron que era importante hacer un *gran número* de extracciones, lo cual se convertía en un término bastante ambiguo ya que al parecer para algunos de ellos ese valor en realidad era un número insuficiente que oscilaba alrededor de 20.

- La variabilidad es cuestión de suerte.

Esta es una interpretación muy particular de una estudiante quien atribuía sus resultados variables a su “suerte mágica”: *“Yo pensaba trabajar con sólo seis lanzamientos y en mi caso por ejemplo de las seis veces, 5 me salió blancas y 1 negra y la combinación que yo tenía 4 bolas negras y 2 bolas blancas, que de seis lanzamientos me salgan más veces la que menos hay, es que yo tengo una suerte muy mágica”.*

Este razonamiento, sin duda muy particular, muestra que para la estudiante el no cumplimiento del determinismo definido por la composición de la urna es una manifestación no de la naturaleza aleatoria del experimento sino, más bien, una manifestación de su propia mala suerte. Como quien dice, el determinismo se da con las personas de buena suerte y no se da con las personas de mala suerte.

- El problema no tiene solución única.

Solamente una estudiante manifestó en su argumento la idea de que el problema de estimar el número de bolas de cada color existentes en la urna es indeterminado ya que existen infinitas soluciones. Este argumento fue el dado por Viviana: *"El problema de estimar el número de las bolas de cada color dentro de la urna no tiene solución ya que lo único que se puede conocer son la razones entre las cantidades de las bolas mas no su cantidad".* Viviana identificó la idea clave del ejercicio, al decir que, lo único que se podría determinar no es el número de bolas de cada color sino la relación entre ellas, por lo tanto, asociando de esta manera el ejercicio no con cantidad sino con proporciones.

A manera de conclusión, se puede afirmar que si bien es cierto que los estudiantes no llegaron a experimentar la estabilidad de las frecuencias relativas al largo plazo -tampoco se pretendía que lo hicieran-, sí se puede afirmar que experimentaron en carne propia la gran variabilidad de las pequeñas muestras y la imposibilidad de tratar de controlarla con pocas repeticiones.

Es interesante, sin duda, el hecho de que los profesores en lugar de asumir el experimento en forma unidimensional considerando todas las repeticiones como realizaciones diferentes del experimento, lo asumieron en forma multidimensional al considerar bloques de resultados del mismo tamaño que repitieron con el ánimo de observar regularidades, preparando el camino para un proceso de estimación puntual del parámetro p de una distribución binomial.

Finalmente, si bien es cierto que esta experiencia pudo haber dejado más dudas que certezas, también lo es que allanó el camino para el trabajo computacional y para iniciar la que en el capítulo anterior se identificó como fase deductiva.

Parte 2. ***En búsqueda de regularidades***

Para rematar esta experiencia se les solicitó a los profesores que formaran grupo con lo que tuvieran el mismo tipo de urna para analizar en conjunto todos los datos obtenidos con el ánimo de descubrir regularidades que les permitieran diseñar una mejor estrategia de estimación de la composición de la urna. A continuación se exponen las conclusiones a las que llegaron los diferentes grupos:

Modelo de igualdad (igual cantidad de bolas de ambos colores)	*Modelo doble (bolas blancas el doble que las negras)*	*Modelo triple (bolas blancas el triple que las negras)*
Realizar al menos 20 extracciones para poder hacer una estimación o encontrar un patrón	*Realizar un gran número de extracciones ya que hay mayor variabilidad cuando la muestra es pequeña. (Más o menos 48)*	*Realizar el mayor número de extracciones tomando registro de ellas. (30 extracciones)*
Analizar el número de bolas de cada color en cada muestra de extracciones, para saber si hay más de un color que del otro	*Establecer la relación del total de extracciones con el número de veces que sale cada color*	*Analizar la relación de las bolas de cada color, teniendo en cuenta la cantidad de bolas en total*
Observar los resultados obtenidos en grupos de 10 extracciones, si la relación se conserva, se podrá dar una estimación, si no, podemos realizar otro grupo y observar los resultados en general de las extracciones que llevamos hasta el momento	*Buscar patrones de regularidad entre los colores de las bolas extraídas ya sea observando el conteo general o armando grupos*	*Hacer varias series con el mismo número de extracciones y mirar si hay patrones en los resultados*

En general, aunque los estudiantes sugieren realizar un gran número de extracciones, en realidad aplican la ley de los pequeños números al intentar descubrir el espacio muestral realizando pocas extracciones. De todas maneras sí suponen que en alguna forma debe aparecer la información necesaria para poder “adivinar” el contenido de la urna, nunca pensaron en términos de una aproximación o estimación.

En consecuencia, se considera fundamental incluir las herramientas necesarias que ayuden a que el número de repeticiones sea elevado, y no se fije la atención en las rachas y fluctuaciones del proceso estocástico generado, para poder superar este sesgo, tal como lo sugieren Tversky y Kahneman (1982).

3.3 SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

El uso de las herramientas tecnológicas en el aula crea la posibilidad de que los estudiantes visualicen la variabilidad y la analicen, gracias a que facilita la realización de un mayor número de repeticiones que por cuestiones de tiempo no se podría realizar manualmente, favoreciendo así un aprendizaje significativo.

Como se afirma en los Estándares y Principios de la NCTM (2000), el uso de las distribuciones de muestras generadas a través de simulaciones físicas, deberían ser seguidas por simulaciones computacionales usando el software disponible, permitiendo un entendimiento más profundo de estas ideas. Las actividades que aquí se analizan se realizaron con Fathom (Finzer, 2000), un software dinámico de estadística cuyo diseño ha sido dirigido hacia la facilitación de procesos educativos.

El software Fathom ofrece la oportunidad para transformar la metodología del proceso de enseñanza aprendizaje, ya que permite evaluar el razonamiento probabilístico de los estudiantes mediante el manejo de parámetros y de datos, la simulación en la extracción de muestras y el cambio de ejes en las gráficas para resolver problemas específicos, extraer conclusiones y generalizar resultados.

Heitele (1975), citado por Batanero (2001), compara el rol que desempeña la simulación en estadística como análogo al rol desempeñado por el concepto de el isomorfismo en otras ramas de las matemáticas, pues por medio de la simulación se ponen en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, de forma que los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables.

En este caso, la simulación del problema tenía como objetivo el trabajar de manera deductiva, ya que a diferencia del experimento físico donde el problema fue planteado de manera inductiva, la composición de la urna fue establecida desde el inicio, buscando que los estudiantes identificaran si la relación existente entre la cantidad de bolas de cada color se veía reflejada en los resultados obtenidos en las extracciones hechas a largo plazo.

Para la simulación de este experimento aleatorio, primero se realizó un acercamiento al programa para conocer algunas de sus características básicas y algunas de las ventajas que ofrecía en términos de simulación y representación de datos, simulando el experimento básico del lanzamiento de una moneda. Acto seguido los profesores realizaron la siguiente actividad:

> *Con ayuda del programa Fathom simule las extracciones de una urna en cuyo interior hay dos bolas blancas y una bola negra y analice los resultados obtenidos en busca de relaciones que le pudieran permitir realizar una mejor predicción del contenido de una urna cuando éste no se conoce.*

Entre los aspectos significativos que se generaron en esta actividad se destacan los siguientes:

- Gran cantidad de los profesores (trece) se dieron cuenta que al aumentar el número de extracciones, la relación entre los resultados de los dos colores se acercaba a la relación existente dentro de la urna, en este caso es de 2 a 1.

Ejemplo de este razonamiento es el dado por Viviana: *“Decidí trabajar con 1000 casos, lo cual me permitió ver con más claridad la relación, al mirar los gráficos de barras. En ese momento decidí calcular la relación existente y mirar la variación, y con esta operación, determinar el porcentaje de ocurrencia de la aparición de color blancas contra la cantidad de eventos, fue esclarecedor, en la Urna1, donde la relación es con exactitud 66,66% de blancas y 33.33% de negras, los datos obtenidos fueron muy estables y cercanos al porcentaje establecido al determinar la composición de la urna”.*

Las palabras de Viviana resaltan, adicionalmente, el papel que jugó en su descubrimiento los gráficos de barras permitiéndole, gracias a la facultad que tiene Fathom de generar muestras del mismo tamaño y observar el efecto que se produce en el mismo gráfico, percibir que con una gran cantidad de datos las frecuencias absolutas asociadas a los dos resultados no presentaban mayor variabilidad. Como es claro que dar los resultados en términos absolutos no tiene mayor sentido, optó por las frecuencias relativas para llegar a la conclusión que los resultados estaban en la misma relación que en la urna, descubriendo de paso la ley de los grandes números y concediéndole total sentido al enfoque frecuencial de la probabilidad.

Otro ejemplo es la respuesta dada por Sonia: *“Entre mayor sea el número de extracciones más fácil es llegar a concluir la relación que hay entre ellas; el* *sistema nos permite realizar un gran número de extracciones ya que es una herramienta fácil de manejar y de observar, los gráficos también nos orientan hacia las conclusiones. Además, es un programa donde no intervienen factores como el sonido o el tacto, sólo cifras que nos proporciona a los estudiantes la posibilidad y la motivación para reunir, explorar y analizar datos a profundidad gráficamente, y comprender conceptos de matemáticas y estadística como nunca antes".*

Como Sonia dice, el trabajo en el computador permite que los estudiantes se concentren exclusivamente en los resultados y no se pongan a pensar en trucos físicos para llegar a las respuestas, como ocurrió con la experimentación física cuando afinaban el oído y la vista en procura de información.

- La mayoría de los profesores percibieron que los resultados de las extracciones no permiten conocer exactamente el contenido de la urna, lo único que se puede conocer es la relación entre las cantidades de bolas de los dos colores, más no las cantidades exactas de ellas dentro de la urna.

Ejemplo de este razonamiento es el Julio: *"Fathom me permitió modelar experimentos y encontrar la regularidad cuando realicé mayor número de extracciones que cuando realicé extracciones de 10 y 100 en cambio cuando hice las extracciones de 1000 encontré la relación de 1:1, lo que no pude fue determinar el número de bolas en la urna porque sólo pude calcular la relación"*

Otro ejemplo es el razonamiento de Laura: "*Entre más muestras, más se acerca uno a la razón pero al final me hacía la pregunta: por el proceso anterior puedo saber la relación pero no el número exacto de bolas de colores por ejemplo si hubiera sido (6, 2) me da la relación pero no el número exacto de bolas".*

- La persistencia del sesgo de los pequeños números.

Aunque este sesgo que era una característica del grupo en la fase de experimentación física, ya no lo fue en la fase de simulación (solamente tres profesores lo manifestaron), no se puede afirmar que todos los profesores lo superaron. Veamos, por ejemplo, el razonamiento de Daniel: "*El programa después de 20 extracciones me sacó 8 amarillas y doce moradas lo que no es una relación exacta; con el simulador me puede dar muchas más probabilidades en una muestra de 20 pero no me dice nada para llegar al resultado final ya que las posibilidades son muchas (variabilidad) pero no me asegura con certeza la respuesta"*.

Daniel, sin usar el poder del computador que le permitía aumentar el número de extracciones a discreción, se limitó a trabajar con muestras de apenas 20 extracciones, lo que si bien le permitió darse cuenta de la variabilidad de los resultados posibles y por ende de las diversas relaciones posibles entre el número de blancas y negras extraídas, no le permitió apreciar el efecto que sobre esta variabilidad tiene el aumento del tamaño muestral.

En resumen se puede afirmar, con base en lo realizado y expresado por los profesores estudiantes, que la simulación computacional les permitió darse cuenta que el azar si se puede controlar pero con muchas repeticiones del experimento, que no basta con pocas para sacar conclusiones acertadas y que lo único que se manifiesta a largo plazo es la relación entre las cantidades de bolas de los dos colores presentes en la urna, que las cantidades en la urna pueden variar pero sí se mantiene la misma razón, la distribución de los resultados es exactamente la misma.

Estos logros destacan el papel del trabajo con el computador, más exactamente con Fathom, que permite la confrontación de las intuiciones primeras, con los resultados de las experiencias y con el conocimiento formal, dando lugar a un enriquecimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Resultado de la experiencia, se considera que fue un acierto el abordar en primera instancia los experimentos aleatorios por medio de la experimentación física antes de hacer uso de Fathom ya que, tal como lo sugiere Shaughnessy (2002), esto permite que los estudiantes generen ciertas intuiciones (acertadas o no) sobre la aleatoriedad, lo cual potencia el papel de la simulación computacional como un laboratorio de comprobación o refutación de las ideas que de alguna forma se formaron en la experimentación física.

3.4 HOSPITALES

Después del aparente logro acerca de la ley de los grandes números alcanzado por los profesores estudiantes con la simulación computacional, se les propuso el famoso problema de los hospitales para conocer hasta qué punto eran conscientes de los elementos que caracterizan este clásico resultado.

Para facilitarle las cosas al lector, se enuncia nuevamente el problema:

> *En una cierta ciudad existen dos hospitales: el hospital A que es un hospital grande y el hospital B que es un hospital pequeño. Se sabe que la probabilidad de que un bebé que nace sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer. Se pregunta por cuál de las siguientes afirmaciones es más probable:*
>
> *a) Que en el hospital A de cada 100 nacimientos nazcan 80 ó más varones*
>
> *b) Que en el hospital B de cada 10 nacimientos nazcan 8 ó más varones*
>
> *c) Son igualmente probables*

Las repuestas obtenidas fueron clasificadas de acuerdo a la opción escogida por el estudiante.

a) *Que en el hospital A de cada 100 nacimientos nazcan 80 ó más varones*

Tres (18.75%) estudiantes escogieron esta opción guiados por una idea errónea asociada a la ley de los grandes números, ya que aseguraban en sus respuestas que al haber un mayor número de nacimientos era más probable que se presentara la relación planteada.

Ejemplo de este tipo de razonamiento es el dado por Pedro: *"Cuando la probabilidad tiene una relación ésta se da más con esa tendencia cuando hay mayor número de opciones, a mayor cantidad de eventos la relación guarda más su equilibrio"*. Aquí se puede identificar que el estudiante olvida que la convergencia de las frecuencias relativas es hacia $^1/_2$ (probabilidad de que nazca un varón) y no hacia $^4/_5$.

Se puede decir que estos estudiantes no se dieron cuenta que se trataba de *eventos* diferentes asociados con tamaños muestrales diferentes y que la probabilidad hace referencia a la frecuencia de estos eventos dentro de cada uno de sus respectivos espacios muestrales. Una cosa es repetir el experimento 10 veces y observar qué tan frecuente es obtener 8 o más éxitos, y otra cosa muy distinta es repetirlo 100 veces y observar qué tan frecuente es obtener 80 o más éxitos, no importa que la probabilidad de obtener un éxito sea la misma para ambos casos.

Los estudiantes asumieron las frecuencias dadas no como asociadas a eventos particulares si no como frecuencias relativas en sí mismas acercándose a un valor de probabilidad 4/5 en una errada interpretación de la ley de los grandes números.

b) *Que en el hospital B de cada 10 nacimientos nazcan 8 ó más varones*

Solamente una estudiante escogió esta opción, dando muestra de una cabal comprensión de la ley de los grandes números. La respuesta dada por Viviana fue la siguiente: *"Entre más extracciones, se estabilizan más cerca de la probabilidad, entonces es más probable el evento de 8 de 10 porque hay menor cantidad de extracciones hay más variabilidad en cambio 80 de 100 o 80 o más de 100 hay más extracciones, luego empieza a estabilizarse cerca de la probabilidad".*

c) *Son igualmente probables*

Once (68.75%) estudiantes eligieron esta opción como respuesta, justificándola con el también acostumbrado razonamiento aritmético: las fracciones 8/10 y 80/100 son equivalentes. En estudios previos realizados por Kahneman y Tversky (1982), Martínez y Mantilla (2007), Vergara (2008) aparecen resultados como los anteriores, que son erróneos y evidencian una mala interpretación de la ley de los grandes números por parte de los estudiantes. Al no entender que en muestra pequeñas hay mayor variabilidad en los resultados. Claramente los estudiantes, igual que los que respondieron la opción a) asumieron un argumento de linealidad para comparar eventos de diferentes espacios muéstrales.

Este tan popularizado razonamiento no aplicable en este caso, puede ser reflejo de la necesidad de un estudio detallado de los diferentes espacios muestrales que permita observar que el comportamiento de las funciones de probabilidad en cada uno de ellos está lejano de ser una función lineal. En pocas palabras, es necesario el estudio de los modelos binomiales, aspecto que se cubrió en el curso y que empezó con la generación de bloques de muestras tal como se analiza en la próxima sesión.

La respuesta dada por Sara es ejemplo de esto: *“Son igualmente probables ya que la frecuencia en el hospital A de nacer un varón es 80/100 y es igual a 8/10 de la frecuencia de nacimiento de varón en el hospital B, por consiguiente las dos afirmaciones son igualmente probables”.*

Uno de los estudiantes (Roberto) no escogió ninguna de las respuestas argumentando que las proporciones planteadas en el problema carecían de sentido ya que no era posible que se alejaran tanto del ½ que representaba tanto la probabilidad de nacer varón como de nacer mujer. Su razonamiento es el siguiente: “*Aunque ambas afirmaciones mantienen la razón reafirman que hay más probabilidad de que nazca un varón y no una mujer porque es de 80 ó más o menos de 20, entonces no tienen igual número de probabilidades”.* Como se observa, Roberto ni siquiera admite la posibilidad de obtener resultados que se alejen del valor de la probabilidad.

En resumen, la mayoría de estudiantes prestó atención a la igualdad de proporciones de las muestras e ignoraron la cuestión del tamaño de las mismas, idea central vinculada a la estabilidad de las frecuencias relativas, lo que los condujo a escoger respuestas erróneas, constatando que las intuiciones sobre la variabilidad de los fenómenos aleatorios es pobre en los estudiantes. Otra categoría que resultó significativa en porcentaje fue la que reunió a las preferencias por la opción a) con justificaciones basadas en una idea correcta de que a mayor tamaño de muestra menor error de estimación. Esta justificación no permitió que los estudiantes visualizaran la cuestión central del problema, de que el alejamiento de los valores de la variable aleatoria cantidad de varones en *n* nacimientos respecto de su valor esperado es más probable en muestras de menor tamaño precisamente porque la variabilidad es menor para pequeñas muestras.

En general, en las respuestas dadas por los estudiantes, al igual que en los resultados obtenidos por Mantilla y Martínez (2007): *"Le atribuyeron igual probabilidad al hecho de que de 10 nacimientos 8 ó más sean varones y que de 100 nacimientos 80 ó más sean varones. Sustentando esta idea en el hecho de encontrar una igualdad entre las razones, sin considerar el efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad de las frecuencias relativas, es decir, es un razonamiento netamente aritmético sin ninguna connotación aleatoria".*

Es posible entonces observar que si bien la situación presentada en este problema es de sencilla formulación en el lenguaje natural, es decir, los estudiantes entendieron de qué se trataba el problema, no ocurrió de igual forma con los conceptos e ideas que son necesarios para dar la respuesta correcta. Al parecer, los estudiantes no distinguieron que el efecto de la repetición de los nacimientos daba origen a una variable, la cual registraba la cantidad de nacimientos de varones cuyos valores no son equiprobables. Además, los estudiantes erradamente manejaron el problema como si se tratara de proporciones aritméticas y no de probabilidades, por lo cual algunos de ellos asignan igual probabilidad a las dos proposiciones, confundiendo así, el espacio muestral asociado al experimento con la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Acerca de esto se refieren Attorresi, García y Pralong (2008), donde afirman que este hecho no debería confundirse con que cada serie de *n* nacimientos tenga la misma probabilidad ya que se compone de *n* ensayos aleatorios tipo Bernoulli con probabilidad de éxito 0.5 y que a distintos números de nacimientos de un determinado sexo les corresponden distintas cantidades de estas series o configuraciones, aportando de este modo distinta probabilidad. El no tener en cuenta estas consideraciones puede llevar a respuestas equivocadas.

3.5 GENERANDO BLOQUES DE MUESTRAS EN FATHOM

Como se comentó en el numeral anterior, se trata ahora de afrontar la construcción del modelo binomial. Para ello, se les pidió a los profesores estudiantes que generaran diversas muestras del mismo tamaño y que calcularan las frecuencias relativas para todos los resultados posibles del número de bolas blancas. En últimas se trataba de motivar el estudio de la variable aleatoria binomial, que como se vio en el problema de los hospitales requería ser estudiada, además de que el problema del contenido de la urna se resuelve a través de la estimación del parámetro *p* (probabilidad de un éxito) en un experimento de tipo binomial. El modelo que se utilizó siguió siendo el de dos bolas blancas y una bola negra.

Con ayuda de Fathom, los estudiantes obtuvieron de manera individual un número determinado de muestras de tamaño definido, con las cuales determinaron distribuciones de probabilidad. La totalidad de los estudiantes presentaron buenos resultados en el proceso de simulación, ya que cada uno generó correctamente en el programa diversa cantidad de muestras de tamaños diferentes y lograron realizar el gráfico que caracteriza la distribución binomial.

A manera de ilustración del manejo de Fathom se muestra la forma como Sara realizó la simulación del experimento, estableciendo como primera medida el espacio muestral y generando una muestra de tamaño 500. En la figura 1 se muestra, en la primera tabla de la izquierda, una muestra de seis extracciones de la urna1; en la siguiente figura aparece el inspector de medidas donde se observa que Sara generó 500 muestras, es decir, 500 medidas de una característica, y finalmente, aparece la distribución del número de blancas obtenidas.

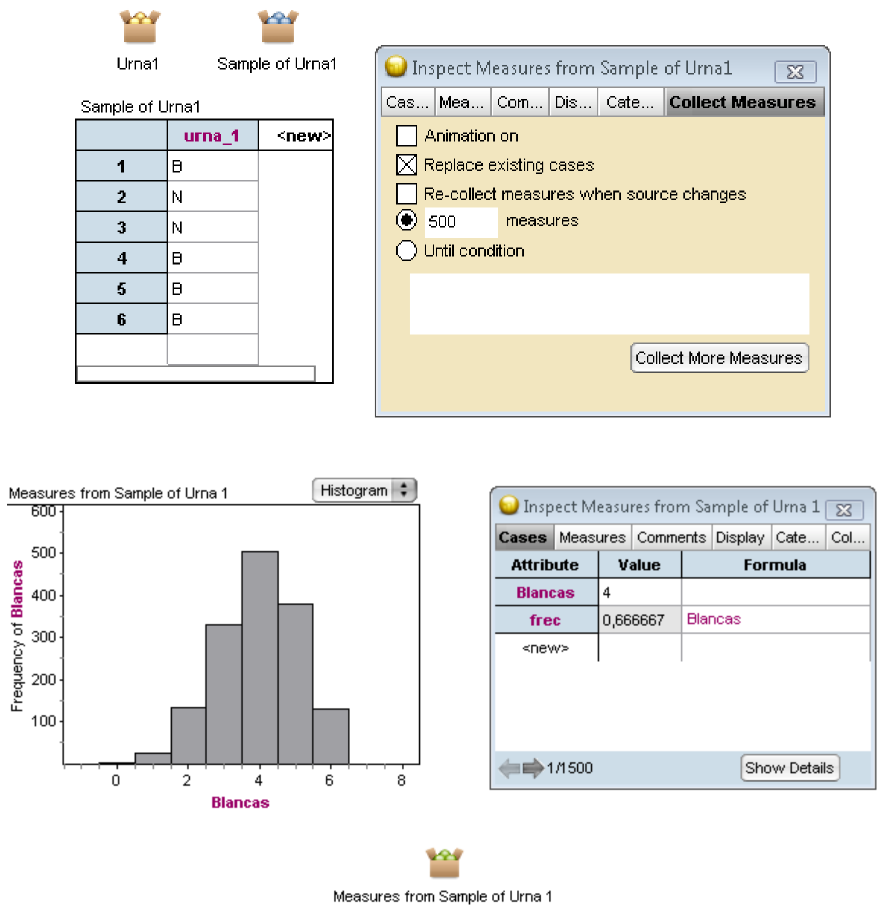


Figura 1. Simulación del experimento aleatorio en Fathom realizada por Sara.

Gracias a las herramientas ofrecidas por Fathom, los estudiantes tuvieron oportunidad de manejar diferentes representaciones de forma fácil y rápida para realizar un análisis más profundo del proceso que estaban realizando, y lograr así una mejor comprensión de los conceptos. En la figura 2 se presentan la tabla de las medidas obtenidas y dos representaciones gráficas de ellas: el histograma y el diagrama de puntos.

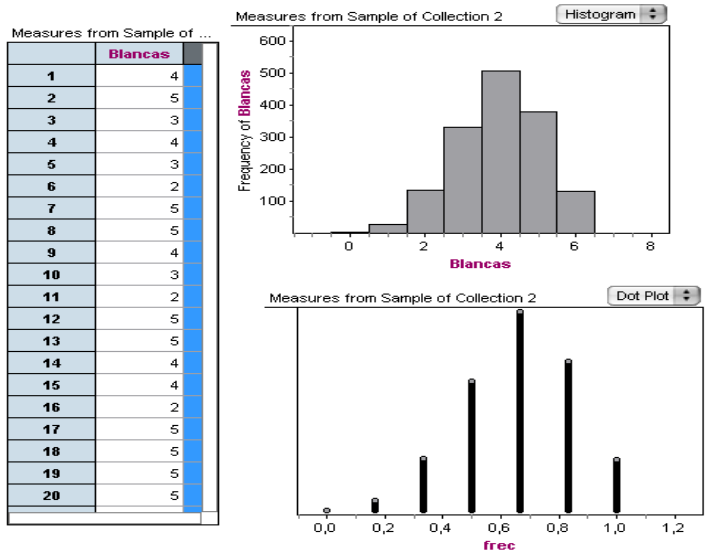


Figura 2. Tabla de medidas, histograma y diagrama de puntos.

En general, los profesores-estudiantes realizaron el gráfico que mostraba la distribución de las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas para cada valor posible de la variable que contaba el número de bolas blancas en las muestras del tamaño correspondiente. Utilizaron adecuadamente la función Proportion y el objeto Summary Table para calcular las frecuencias relativas para cada uno de estos valores. A continuación se muestra las gráficas y tablas generadas por Laura:

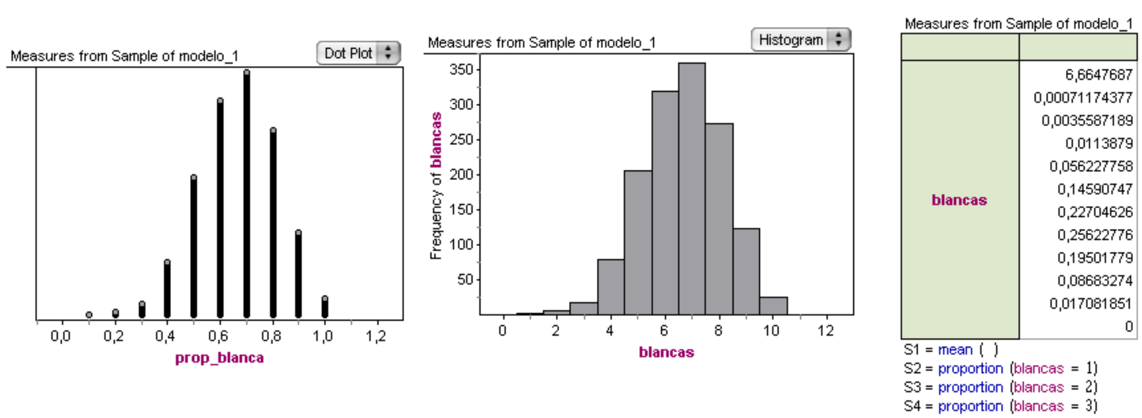


Fig. 3. Gráfico de frecuencias absolutas y relativas y la tabla resumen.

A través de la función Graph se facilitó el análisis de los resultados obtenidos ya que, en general, los estudiantes identificaron la variabilidad presente en las muestras de tamaño reducido y cómo al largo plazo las frecuencias relativas se estabilizan alrededor del valor de la probabilidad, reafirmando sus intuiciones acerca de la ley de los grandes números. Ejemplo de estas respuestas es la dada por Viviana:*"Mejora la gráfica, dado que se observan más datos y mejor agrupados alrededor de la probabilidad".* Otro ejemplo es el razonamiento de Daniel: "*Cuando tomamos paquetes pequeños se nota una mayor variabilidad en las frecuencias lo que no permite establecer una estimación probable".*

A pesar, de haber generado gran número de muestras de diversos tamaños, algunos estudiantes aún manifestaban que el valor hallado empíricamente se alejaba considerablemente del valor teórico de la probabilidad, en sus razonamientos hace presencia la idea de que por medio del enfoque frecuencial sólo se halla un valor aproximado al valor de la probabilidad teórico, confiriéndole por tanto mayor confiabilidad al cálculo de probabilidades por medio del enfoque clásico. Ejemplo de este razonamiento es el de Viviana: *"Entre los dos valores hay una gran diferencia, ya que el valor teórico es 2/3 y el de la simulación es 0.361, tengo mayor confianza en el resultado obtenido por el cálculo aritmético".*

Con la última pregunta, se buscaba identificar de qué manera había evolucionado su pensamiento probabilístico desde la primera sesión donde plantearon diferentes estrategias previas a la experimentación física y a la simulación. Ejemplo de las estrategias dadas por los estudiantes para estimar la composición de bolas en una urna, es la dada por Sara: "*La estrategia de tomar grupos o series es válida, ya que lo podemos corroborar con el trabajo de la clase, permitiéndonos acercarnos a un valor aproximado a la relación de bolas que existan en la urna".* Otro ejemplo es la conclusión dada por Viviana: "*Reconocer el dato que más se repite, con ese dato se puede intuir la probabilidad*". Esta posibilidad de confrontación de ideas, es la que produce el verdadero conocimiento en los estudiantes.

A continuación se presenta las conclusiones y estrategias finales dadas por los estudiantes:

Grupo 1	En el infinito la coincidencia entre las extracciones y el valor teórico es perfecta	Abordar el problema teniendo varias muestras, que a su vez sean acumulativas	Reconocer el dato que más se repite, con ese dato se puede intuir la probabilidad
Grupo 2	Revisando las gráficas de 50, 200, 500 extracciones había similitud	Similitud entre la gráfica de la distribución de las frecuencias y la Campana de Gauss	por la similitud en las gráficas se deduce que no importa el número de repeticiones
Grupo 3	Con un número mayor de extracciones se estabilizó más rápido la proporción	Entre más repeticiones más se acerca al número que se está buscando	Sin importar el tamaño de la muestra, si este proceso se repite simulándolo varias veces se puede llegar a la probabilidad
Grupo 4	En los bloques de muestra pequeños hay mayor variabilidad	El valor que más se repetía en los bloques de 10, 20 y 500 extracciones se asimilaba a la probabilidad	Si se incrementa el número total de extracciones se observa que estos resultados tienden a acercarse a la probabilidad real

- Necesidad de realizar un mayor número de extracciones

Aunque la mayoría de los estudiantes manifiestan la importancia de realizar un número mayor de extracciones y cómo estos resultados se acercan al valor teórico de la probabilidad, sólo el grupo uno logra plasmar en su razonamiento la idea de que en el infinito se estabilizan las frecuencias.

El segundo grupo no logró establecer la incidencia del tamaño muestral en la variabilidad de las frecuencias relativas por lo que, a pesar de la simulación física y computacional, persiste en afirmar que no importa el número de extracciones ya que las gráficas de las muestras de diferentes tamaños guardan bastante relación entre si. El razonamiento presentado por este grupo es el siguiente: *"Al analizar las gráficas de las muestras de 50, 200 y 500 extracciones, había una gran similitud, por lo que, no importa el número de repeticiones del experimento era lo mismo"*

En el argumento anterior se ve cómo el razonamiento de los estudiantes fue influenciado negativamente por la mala interpretación de las gráficas generadas en Fathom, ya que a los otros grupos, esta opción sí les permitió ver la variabilidad presente en las muestras y así mismo, la estabilización de las frecuencias.

- *Generar bloques de muestra para lograr una mejor estimación*

Tres de los grupos de estudiantes, plasmaron en sus estrategias la importancia de generar bloques de muestra, lo cual evidencia que gracias a todo el proceso realizado a través de las diferentes actividades aquí planteadas, la presencia en sus razonamientos de concepciones válidas alrededor de la variabilidad muestral. Ejemplo de estos argumentos son los dados por el grupo 4: *"Observando las gráficas, cuando se tomaron bloques pequeños de datos se notó una mayor variabilidad en las frecuencias, lo que no permitía establecer una buena* *estimación"* Otro ejemplo de este razonamiento es el dado por el grupo 1: *"Analizar el problema no con una muestra al contrario realizar el problema teniendo varias muestras, que a su vez sean acumulativas".*

- Intuiciones ocultas alrededor de la distribución normal y la distribución binomial

Una conclusión algo particular, fue la del segundo grupo, quienes encontraron gran similitud entre la gráfica de la distribución de sus datos y la gráfica llamada Campana de Gauss, lo que indica que de forma bastante intuitiva y nada formal, los estudiantes daban un primer paso hacia un caso particular del Teorema Central del Límite conocido como Teorema de De Moivre-Laplace, el cual afirma que "*La curva de la variable normal debe ajustarse estrechamente al histograma de probabilidades binomiales mediante el área bajo la curva; para ello la media y la varianza de la variable normal y la variable binomial deben ser iguales".*

El razonamiento dado por el segundo grupo es el siguiente*:"La gráfica de distribución de frecuencias de las extracciones de bolas blancas era muy similar a la gráfica conocida como Campana de Gauss".*

A manera de conclusión, luego de la experiencia con la simulación en Fathom, se puede afirmar que este proceso permitió a los estudiantes ver las características importantes de los experimentos aleatorios y facilitó una mejor comprensión de la estimación del valor de probabilidad asociada a las frecuencias relativas, ya que por medio de la generación de diversas muestras con diferentes tamaños y la construcción de gráficos, ayudó a que los estudiantes identificaran la variabilidad presente y encontraran en la realización de un número elevado de muestras la forma de manejarla.

Además, a través de las actividades desarrolladas en esta investigación se logró que, por medio de la integración entre teoría y práctica en las simulaciones tanto física como computacional, los estudiantes dedujeran la expresión matemática de la distribución binomial y le encontraran aplicabilidad a todo el proceso hecho a lo largo del curso, es decir, establecieron una conexión entre la actividad adivinando el contenido de una urna y la distribución binomial.

3.7 EXAMEN FINAL

Su finalidad era analizar si los estudiantes identificaban correctamente los parámetros de la distribución binomial y la regla del producto para eventos independientes, además se pretendía evaluar el proceso de la aproximación de la distribución binomial a la normal e intervalos de confianza.

A continuación se presenta el primer punto del examen:

1. *Una persona muy distraída ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7. Sabiendo además que el primer digito debe ser par, distinto de 0 y que la última cifra es impar mayor que 4 ¿Cuál es la probabilidad de acertar el número de teléfono de su amigo?*

a) $\frac{1}{10}$ ***b)*** $\frac{1}{12}$ ***c)*** $\frac{2}{13}$ ***d)*** $\frac{1}{2}$ ***e)*** *Ninguna de las anteriores*

Sólo uno de los estudiantes no resolvió correctamente este ejercicio, ya que aunque identificó que el experimento era compuesto y calculó la probabilidad de cada evento, asumió que estos eran dependientes el uno del otro y por tanto sumó ambos valores.

El segundo punto del examen presentaba una situación problema modelada por la distribución con media 4 y con probabilidad 1/2. El interés principal de esta pregunta fue identificar la capacidad que tenían los estudiantes para modelarla mediante una variable aleatoria binomial identificando correctamente sus parámetros: el componente combinatorio probabilístico inmerso en la expresión binomial, la probabilidad de ocurrencia y el número de repeticiones.

2. *Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4? ¿Cual es la probabilidad de que acierte dos o menos? ¿Cual es la probabilidad de que acierte cinco o más? ¿Cuanto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?*

Solamente Ana, aunque identificó la situación como binomial, determinó incorrectamente el parámetro p. El no identificar el experimento Bernoulli en la situación de la evaluación llevó a que Ana estableciera incorrectamente el valor de probabilidad de éxito. Además no realizó los cálculos de media y varianza que se pedían en el problema. Su procedimiento fue el siguiente:

$$P(x = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.000000057$$

$$P(x \leq 2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^8 + \left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^7 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^6 = 3.0000962^{-5}$$

$$P(x \geq 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{5}{8}\right)^5\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{5}{8}\right)^6\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^7\left(\frac{3}{8}\right)^1 + \left(\frac{5}{8}\right)^8\left(\frac{3}{8}\right)^0$$

En el proceso realizado por Ana se puede ver como, a pesar de que para $x = 4$ planteó correctamente la ecuación asignando el valor indicado de la probabilidad de éxito y de fracaso, el valor dado en la respuesta es incorrecto. Además, para $x \leq 2$ y para $x \geq 5$, no estableció correctamente los parámetros p y q.

El 69.23% de los estudiantes identificaron correctamente los parámetros n, p y q, y además hallaron la media y la varianza de forma adecuada. Ejemplo de esto es el procedimiento hecho por Julio:

$$P(x = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.27 = 27\%$$

$$P(x \leq 2) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.1443 = 14.43\%$$

$$P(x \geq 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{8}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.36 = 36\%$$

$$\mu = pn = 8 * 1/2 = 4$$

$$\sigma = npq = 8 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 2$$

El 23.07% de los estudiantes aunque identificaron los parámetros de la distribución binomial, aplicaron correctamente la fórmula y hallaron correctamente la probabilidad para P ($x = 4$), en el momento de realizar la suma de las probabilidades para P($x \leq 2$) y P($x \geq 5$) dieron como respuesta un valor incorrecto, lo que indica que posiblemente se les dificulta desarrollar el componente combinatorio. Ejemplo de esto es la respuesta dada por Susana:

$$P(x \leq 2) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.17$$

$$P(x \geq 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{8}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.65$$

A continuación se presenta el tercer punto del examen:

3. *Los niveles de colesterol total en la población general se distribuyen normalmente* con $\mu = 200$ *y* $\sigma = 20$. *Si de esta población se selecciona un sujeto al azar.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que tenga un valor entre 170 y 230?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que tenga un valor de 270 ó más?*

En la parte a) del problema, sólo tres estudiantes respondieron de forma incorrecta ya que aunque estandarizaron de manera adecuada, no habían logrado interiorizar la finalidad de este proceso, pues no sabían qué hacer con los valores hallados, ejemplo de esto es la respuesta dada por Ana:

$$Z_1 = \frac{170-200}{20} = -1.5 \quad ; \quad Z_2 = \frac{230-200}{20} = 1.5$$

de lo que, $0.4332 + 1.5 = 1.95$

P = $(0.4332, 1.95)$

Otro ejemplo de respuesta es el dado por Óscar:

$$z_1 = \frac{170-200}{20} = \frac{-30}{20} = -1.5 \quad ; \quad Z_2 = \frac{230-200}{20} = \frac{30}{20} = 1.5$$

Por la tabla: $Z_1 = 0.4332 = 43.3\%$; $Z_2 = 0.4333 = 43.3\%$

$$P = Z_1 - Z_2 = 4333\% - 3.33\% = 0$$

De lo anterior se ve que los estudiantes no asociaron el problema con el cálculo de área bajo la curva, por lo que no saben interpretar la tabla del área bajo la curva de la distribución de probabilidad normal estándar al buscar los valores obtenidos en la estandarización. Los estudiantes restantes, hicieron la estandarización de forma correcta y además identificaron acertadamente el área bajo la curva normal entre la media y el valor de la variable aleatoria normalmente distribuida.

En la segunda parte del problema solamente un estudiante realizó correctamente el ejercicio, ya que además de estandarizar, interpretó adecuadamente los valores de la tabla para hallar el valor de la probabilidad. El procedimiento realizado por Olga es el siguiente:

$P(x \geq 270) = P = (Z \geq 3.5) = 0.5 - 0.4998 = 0.0002$

Los demás estudiantes no hallaron el valor de la probabilidad, a pesar de que algunos de ellos realizaron el procedimiento de estandarización, pues no identificaron el área bajo la curva apropiadamente. Ejemplo de esto es la respuesta dada por Óscar:

$$Z_1 = \frac{270 - 200}{20} = 3.5$$

Por tabla $Z_1 = 3.5 = 0.4989\,; \quad Z_1 = 49.8\% + 50\% = 99.8\%$

Por lo que la probabilidad es del 99.8%

En este razonamiento se ve claramente que son muchas las concepciones erradas que maneja alrededor del cálculo de probabilidades y la estandarización de distribuciones normal.

De manera general, nueve de los estudiantes que respondieron acertadamente la primera parte del problema, presentaron inconsistencias en los procedimientos realizados para dar solución a la segunda parte, por lo que dieron respuestas equivocadas. Al parecer el que en la parte b) del ejercicio no aparecieran dos valores luego de haber estandarizado, les representó dificultad en el momento de hallar el área bajo la curva.

Ya que una población binomial está estrechamente relacionada con la distribución muestral de proporciones, el cuarto punto del examen no basaba su importancia en el cálculo de la media de la muestra, sino que se trataba del cálculo de proporciones, por lo que los estudiantes debían calcular el estadístico de proporción en lugar del estadístico media. A continuación se presenta el cuarto punto del examen final:

4. *Un medicamento para malestar estomacal tiene la advertencia de que algunos usuarios pueden presentar una reacción adversa a él, más aún, se piensa que alrededor del 3% de los usuarios tienen tal reacción. Si una muestra aleatoria de 150 personas con malestar estomacal usa el medicamento, encuentre la probabilidad de que la proporción de la muestra de los usuarios que realmente presentan una reacción adversa, exceda el 4%.*

Ocho estudiantes no dieron respuesta alguna a este problema.

De los estudiantes restantes, sólo tres lograron resolver el problema con éxito, al no sólo estandarizar adecuadamente, sino que además, pudieron dar una interpretación precisa del valor que obtuvieron, ejemplo de estas respuestas es la dada por Laura: *"Existe la probabilidad del 17% de que la muestra de los usuarios que presenten reacción exceda el 4%"*

A manera de conclusión, el examen evidenció la complejidad, que representa para la mayoría de los estudiantes, la aproximación binomial a la normal y de su aplicación en la resolución de problemas. A pesar de esto, hubo quienes lograron reconocer la variable aleatoria binomial como suma de variables de Bernoulli; comprendieron el efecto de los parámetros sobre la precisión de aproximación (forma de la distribución, sensibilidad de los parámetros y variabilidad para distintos tamaños muestrales), pudieron calcular y comparar probabilidades aproximadas y exactas para valores del número y proporción de éxitos y calculan el tamaño de muestra para una precisión dada. Aunque también aparece una multiplicidad de equivocaciones en el momento de solucionar el problema, lo que los lleva a dar una solución incorrecta del mismo.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

“Después de escalar una montaña muy alta, descubrimos que hay muchas otras montañas por escalar”

Mandela

Finalizada la descripción y análisis de las diferentes actividades que componen esta investigación cuyo objetivo era analizar cómo a partir de la comprensión del concepto de variabilidad, los estudiantes se acercan al concepto del teorema de la Ley de los Grandes Números en un ambiente computacional, se dedica este capítulo a la exposición de una síntesis de los resultados obtenidos y algunas recomendaciones para futuras investigaciones:

- El haber encaminado las actividades hacia el enfoque frecuencial permitió que los estudiantes no asociaran el valor de probabilidad no sólo con una proporción aritmética, sino que lo relacionen con las frecuencias relativas asociadas a un evento cuando se repite un experimento n veces. Aunque no alcanzaron el significado formal de la probabilidad frecuencial. Expresiones tales como "Repetir un gran número de veces el experimento"; "Realizar el mayor número de extracciones", evidencian la ambigüedad de su razonamiento, demostrando que esta intuición no está sólidamente constituida y que puede conducir a interpretaciones erróneas de la ley de los grandes números.

- Al final del proceso de experimentación física y computacional, se concluye que aunque la mayoría de las concepciones erradas acerca de la variabilidad y la aleatoriedad fueron modificadas y superadas, aún persisten de forma arraigada ideas erradas tales como la suerte asociada a la variabilidad y en algunos casos la ley de los pequeños números . Evidenciando que los errores y los sesgos presentados por los estudiantes son modificables y tienen su origen en la tendencia del ser humano de controlar la incertidumbre que genera la aleatoriedad. Tal como lo manifiesta Konold (1995) "*La existencia de estas ideas fuertemente arraigadas pueden explicar en parte por qué el aprendizaje de la probabilidad y la estadística es especialmente problemático*".

- A pesar del trabajo realizado con la experimentación física y computacional, en el caso particular del problema de los hospitales, los estudiantes ignoraron la importancia del tamaño de las muestras y la variabilidad presente en ellas, tomando por el contrario, los datos ofrecidos por el problema como razones aritméticas asumiendo el problema por medio de un razonamiento no probabilístico. Lo cual indica que aún estaba presente en sus razonamientos la dificultad para manejar sus nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad. Estos resultados también se pueden observar en el trabajo realizado por Wild y Pfannkuch (1999), donde se refieren a la variabilidad como uno de los componentes esenciales del razonamiento estadístico y aclaran que la comprensión y el manejo de esta son difíciles para la mayoría.

- Una vez realizada la actividad *generando bloques de muestras*, los estudiantes manifestaron en sus razonamientos, ideas claras alrededor de la comprensión de la variabilidad muestral y como esta es reducida, sin dejar de estar siempre presente, al aumentar el tamaño de las muestras. Indicando así, la importancia de generar el número de muestras necesario para que los estudiantes logren identificar la estabilización de las frecuencias alrededor del valor de la probabilidad. Un aspecto importante en el proceso de simulación fue la representación gráfica de los datos ofrecida por Fathom, la cual les permitió que observar la relación de las frecuencias relativas con el numero de casos generado.

- El trabajo con la simulación computacional ayudó a los estudiantes en su proceso de transformación de sus concepciones, al permitirles confrontar sus primeras intuiciones con los resultados obtenidos en la simulación, lo cual los ayudó a entender la noción de la ley de los grandes números al identificar la presencia de la variabilidad en las diferentes muestras generadas y la tendencia de las frecuencias relativas asociadas al experimento. Antes de realizar la experimentación computacional, la totalidad de los estudiantes adjudicaban causas deterministas a los resultados que obtenían de las extracciones realizadas físicamente; sin embargo, la experimentación computacional condujo a que reconocieran la incontrolabilidad del azar y por tanto la variabilidad presente en las muestras.

- Aunque en un principio los estudiantes se desconcertaron por la variabilidad, el que se identificara su presencia en las muestra, representó un primer paso hacia la visualización de la estabilización en el infinito de las frecuencias relativas alrededor del valor de probabilidad. Es decir, al lograr identificar y conjugar la variabilidad y la estabilidad de las frecuencias, la mayoría de los estudiantes pudieron construir el significado de la ley de los grandes números rompiendo la aparente contradicción entre variabilidad y estabilidad.

- Otro aporte importante de la simulación computacional fue que los estudiantes lograron establecer la conexión existente entre la variabilidad presente en los datos obtenidos en las repeticiones del experimento y los resultados que esperan basados en el conocimiento del espacio muestral. Además, facilitó que los estudiantes realizaran una confrontación entre las concepciones frecuencial y Laplaceana de la probabilidad.

Con base en los resultados obtenidos en esta investigación se formulan las siguientes recomendaciones:

- La preparación didáctica de los profesores de matemáticas debe capacitarlos para plantear situaciones como las presentadas ya que son muy necesarias en la enseñanza para permitir que los estudiantes confronten sus intuiciones erróneas y ayudarlos en su transformación.

- El enfoque frecuencial de la probabilidad contribuyó a que los estudiantes mejoraran sus intuiciones erradas alrededor de la variabilidad en los procesos estocásticos. Por lo que, se recomiendan nuevas investigaciones sobre el razonamiento probabilístico, como un paso esencial para ayudar a que el profesor seleccione las situaciones didácticas adecuadas.

- Abordar la aleatoriedad desde la experimentación física y la simulación computacional, discutiendo la variabilidad y su control, debería darse desde los primeros años de escuela, para poder generar intuiciones en los estudiantes que luego les ayudará en la comprensión de los teoremas matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

Attorresi, H., García, A., Pralong, H. Sesgos en la Estimación de Probabilidades para Dos Situaciones Secuenciales Aleatorias. Summa Psicológica UST. 2008, vol. 5, Nº 1, 3-12. Revista de Psicología de la Universidad Santo Tomás de Chile. ISSN 0718-0446.

Batanero, C., (2001) Didáctica de Estadística. 1ed.Granada.: Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada España.

Bohorquez, J., Zárate, J., (2009) Abstracciones situadas en un entorno experimental para la comprensión de la ley de los grandes números en niños de quinto primaria. Trabajo de Grado Licenciatura en Matemáticas. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander

Brousseau, G., (1986), Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115

Finzer, W., Erickson, T., Binker, J., (2000), Fathom: Dynamic Statistics. Key Curriculum Press

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *Educacional Studies in Mathematics*. p. 12

García J., Sánchez E. (2007), El desarrollo de nociones de variabilidad estadística en profesores de secundaria con apoyo de actividades de simulación. Trabajo de grado publicado. CINVESTAV-IPN, México

Jaimes, E., Martínez, J. (2007). Probability Explorer: un socio cognitivo en la construcción del significado de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de puente Nacional. Trabajo de grado no publicado en la Especialización en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

James, B. (1981) Probabilidade: Um curso en nível intermediário. Projeto Euclídes. IMPA, Rio Janeiro, Brasil.

Kahneman, D., Tversky, A., (1982). Representatividad. En: *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (eds). p.40

Konold, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statiscs. Massachusetts: University of Massachusetts, [on line] http:// www.amstat.org7publications7JSE/v3n1/konold.html

Mantilla, M., Martínez, M. (2007). Construcción de significados del concepto de probabilidad frecuencial en un ambiente computacional. Una experiencia con profesores en formación. Trabajo de Grado Licenciatura en Matemáticas. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics.

Reátiga, A. (2004). Confrontación entre realidad y modelo teórico: una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en niños de sexto grado. Trabajo de grado no publicado en Especialización en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Shaughnessy, J. (1992). Research in probability and statistics: Reflection and Directions. En d. Grouws (ed.), *Handbook on Research in Mathematics Education*, 465-494. London: McMillan Publishing Co.

Shaughnessy, J., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. In B. Phillips (Ed.), CD *of the Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a statistically literate society, Cape Town, South Africa.* Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Vergara, M. (2008). Concepciones personales de la distribución binomial en un ambiente computacional: Un estudio con profesores en formación. Trabajo de Grado Licenciatura en Matemáticas. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-265.

Yáñez, G. (2003). Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN, México.

ANEXOS

ANEXO 1: ADIVINANDO EL CONTENIDO DE UNA URNA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACION MATEMATICA
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
PRIMERA SESIÓN

Parte 1. Adivinando el contenido de una urna.

Imagine que una urna contiene una cierta cantidad de bolas blancas y de bolas negras de tal forma que la suma de ellas es menor o igual a 12, y se trata de "adivinar" el número de bolas negras y bolas blancas. Para ello, la única acción válida que se puede realizar consiste en extraer una bola sin mirar hacia dentro de la urna, observar su color y devolverla antes de sacar otra bola después de haber barajado la urna.

1. *Antes de realizar cualquier experiencia, describa la estrategia que utilizaría para obtener una buena "adivinanza" de las bolas dentro de la urna.*
2. *Forme pareja con un compañero.*
3. *Definan los roles de CASINO y JUGADOR dentro de la pareja.*
4. *El jugador CASINO solicite una urna al profesor con la cantidad de bolas de dos colores que correspondan.*
5. *Acto seguido el compañero JUGADOR debe comenzar a extraer una bola de la urna, observar su color y después devolverla antes de volver a extraer otra.*
6. *El JUGADOR debe tener una hoja de registro donde debe registrar las extracciones realizadas y el color obtenido.*
7. *Cuando el JUGADOR considere conveniente debe suspender las extracciones y elaborar un diagnóstico escrito del número de bolas de cada color dentro de la urna argumentando las razones para su estimación. Sin contarle a su compañero su estrategia, le comunica su primera estimación.*

8. *Si el JUGADOR no acierta, puede con base en sus datos realizar otro análisis y dar otra estimación, o bien, realizar algunas otras extracciones al final de las cuales debe dar un nuevo diagnóstico, sin comentarle nada de su estrategia al compañero CASINO.*
9. *Inviertan los roles: el JUGADOR pasa a ser CASINO y el jugador CASINO para ser JUGADOR, y vuelvan a repetir los pasos anteriores a partir del paso 4.*
10. *Después de haber terminado la segunda ronda, los componentes de cada pareja se reúnen a discutir alrededor de las estrategias utilizadas por ambos para realizar sus estimaciones con la intención de llegar a un acuerdo que les permita construir la "mejor estrategia" de la pareja. Esta estrategia debe estar sólidamente argumentada con base en los resultados obtenidos en las extracciones realizadas por ambos jugadores.*
11. *La pareja selecciona un relator de la estrategia quien deberá exponerla ante los compañeros del curso.*

MODELOS:

- *2-2 y 4-2 3-3 y 2-1   4-4 y 6-3   5-5 y 3-1 6-2 y 8-4   9-3*

2. En búsqueda de regularidades. Ahora se trata de que los estudiantes con el mismo tipo de urna se reúnan y analicen los datos obtenidos con el ánimo de descubrir regularidades que les permitan diseñar una mejor estrategia de estimación de la composición de la urna. Esta estrategia de grupo debe plasmarse en un texto escrito y ser presentada ante todo el grupo.

ANEXO 2: PROCEDIMIENTO PARA HACER LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL EN FATHOM

PROCEDIMIENTO PARA HACER LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL EN FATHOM

Se tiene una urna que contiene dos bolas blancas y una bola negra. El experimento consiste en realizar con sustitución cierto número de extracciones, n, y contar la bolas blancas obtenidas.

1. Ubicar el ratón sobre el icono Collection (ubicado en la barra de herramientas) y arrastrar al espacio en blanco.
2. Dar doble clic sobre la caja (collection 1) para cambiar el nombre (problema 1).
3. Manteniendo sombreada la caja se ubica el ratón sobre el icono Table (ubicado en la barra de herramientas) y se arrastra hasta el espacio en blanco.
4. Aparece una tabla. Donde dice New escribimos el nombre del atributo que queramos, en nuestro casos escribimos (urna). De igual forma se pueden seguir agregando atributos de acuerdo a las necesidades requeridas.
5. En los espacios después del nombre del atributo, escribimos el color de las bolas presentes en la urna, tantas como bolas de cada color existan. Si identificamos a las bolas negras como N y las bolas blancas como B, en nuestro caso escribimos dos veces B y una vez N.
6. Hacemos clic sobre nuestra caja con el nombre (problema 1) la dejamos seleccionada y hacemos clic en collection ubicado en la barra de contenidos y hacemos clic en Sample Cases.
7. Aparece una caja con el nombre Sample of problema 1; hacemos doble clic sobre esta caja y nos aparecerá una ventana con varias opciones. Una de

ellas es Sample que al activarla conduce a un cuadro donde aparecen varios aspectos que hay que definir, y que definiremos a continuación.

8. En la misma ventana Inspect sample of problema 1; aparece otra opción Measures que al activarla conduce a un cuadro donde especificaremos lo que queremos medir de la muestra. En nuestro caso se trata de contar el número de bolas blancas extraídas, esa medida la podemos identificar con la palabra blancas, donde dice New escribimos el nombre de esa medida, paso seguido, la caracterizamos con una formula, para esto damos clic derecho sobre la palabra blancas y seleccionamos Edit formula. Donde la formula correspondiente en nuestro caso es Count (urna="B")
9. Seleccionamos la caja con el nombre Sample of problema 1, y hacemos clic en Collection ubicada en la barra de contenidos y hacemos clic en Collect Measures.
10. Aparece una caja con el nombre Measures from sample of problema 1 y hacemos doble clic sobre ella, nos aparecerá una ventana con varias opciones, de ella escogeremos la opción; collect Measures y en ella colocaremos el número de repeticiones que queremos que haga,(no olvidar deshabilitar la opción Animation), hacemos clic en Collect More Measures y cerramos la ventana.
11. Seleccionamos la caja Measures from sample of problema 1 manteniendo la caja sombreada se da clic en el icono Table ubicado en la barra de herramientas y se arrastra hacia el espacio en blanco.
12. En la barra de herramientas hay un icono con forma de grafica llamado Graph hacemos clic sobre el y lo arrastramos al escritorio y nos aparecerá una ventana con una figura similar al primer cuadrante del plano cartesiano, luego escogemos los datos de la tabla anterior y los ubicamos en el eje que nos convenga.

ANEXO 3: HOSPITALES

HOSPITALES

En una cierta ciudad existen dos hospitales: el hospital A que es el hospital grande y el hospital B que es el hospital pequeño. Se sabe que la probabilidad de que un bebé que nace sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es más probable?

d) Que en el hospital A de cada 100 nacimientos nazcan 80 o más varones
e) Que en el hospital B de cada 10 nacimientos nazcan 8 o más varones
f) Son igualmente probables

Escoja una de las opciones y justifique su respuesta.

ANEXO 4: GENERANDO BLOQUES DE MUESTRAS EN FATHOM

GENERANDO BLOQUES DE MUESTRAS EN FATHOM

En Fathom va a generar muestras de tamaño n (el profesor le asignará el valor correspondiente) de una urna que tiene dos bolas blancas y una bola negra, en cada muestra se trata de calcular el número de bolas blancas.

Genere todas las muestras que sean necesarias para poder responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el resultado (número de blancas) que más se obtiene?

2. De acuerdo al Enfoque Frecuencial de la probabilidad, ¿Cuál es la probabilidad de obtener ese valor que más aparece?

3. ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener ese valor? Es decir, a priori, ¿Cuál es la probabilidad de obtener ese número de blancas a realizar n extracciones? ¿Qué tanto se parece esa respuesta a la dada por usted a la pregunta anterior? Si difiere mucho ¿A cuál le tiene más confianza?

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los demás valores posibles?

5. Realice un gráfico que dé cuenta de las frecuencias absolutas (para las muestras que usted generó) y relativas para cada uno de los valores posibles.

6. Comparta sus resultados con otro compañero que haya tomado muestras de tamaño diferente al suyo. Resalten los aspectos comunes y las diferencias.

7. ¿Qué se puede observar cuando el tamaño de la muestra (el número de extracciones) aumenta?

8. Utilice estos resultados para diseñar una estrategia que le permita estimar con una buena aproximación la relación que existe entre bolas blancas y negras de una urna de la cual se realizan extracciones sin conocer su contenido.

ANEXO 5: EXAMEN FINAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACION MATEMATICA
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
Examen final

5. Una persona muy distraída ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7. Sabiendo además que el primer digito debe ser par, distinto de 0 y que la última cifra es impar mayor que 4 ¿Cuál es la probabilidad de acertar el número de teléfono de su amigo?

a) $\frac{1}{10}$ **b**) $\frac{1}{12}$ **c**) $\frac{2}{13}$ **d**) $\frac{1}{2}$ **e**) Ninguna de las anteriores

6. Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4? ¿Cual es la probabilidad de que acierte dos o menos? ¿Cual es la probabilidad de que acierte cinco o más? ¿Cuanto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

7. Los niveles de colesterol total en la población general se distribuyen normalmente con $\mu = 200 \text{ y } \sigma = 20$. Si de esta población se selecciona un sujeto al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un valor entre 170 y 230?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un valor de 270 ó más?

8. Un medicamento para malestar estomacal tiene la advertencia de que algunos usuarios pueden presentar una reacción adversa a él, más aún, se piensa que alrededor del 3% de los usuarios tienen tal reacción. Si una muestra aleatoria de 150 personas con malestar estomacal usa el medicamento, encuentre la probabilidad de que la proporción de la muestra de los usuarios que realmente presentan una reacción adversa, exceda el 4%.