LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

ÁLVARO PICO TAPIAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÀTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

ÁLVARO PICO TAPIAS

Trabajo de grado para optar al titulo de
ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Directora
ROSARIO IGLESIAS BÁRCENAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÀTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

RESUMEN

TÍTULO: La relación entre las notas musicales y las matemáticas: una herramienta para comprender la función exponencial[*]

AUTOR: Álvaro Pico Tapias[**]

PALABRAS CLAVES: notas cromáticas, medidas, función exponencial, constante, platinas, aluminio,

DESCRIPCIÓN

Partiendo de Industrias PIM (instrumentos musicales de percusión, xilófonos, metalófonos, sistros) se abrió el camino para desarrollar el proyecto de investigación.

Los siete estudiantes de 9º grado del Centro Educativo La Victoria, municipio de Lebrija, realizaron talleres desde el 3 de octubre de 2006, comenzando con un diagnóstico acerca del conocimiento de sonidos de notas musicales. Se trabajó con un grupo de notas cromáticas desafinadas, caja roja y otra afinada, caja verde. Se destacó la actividad del 18 de octubre: realizar cortes de una platina de aluminio para obtener notas musicales, que sirvieron en la construcción de un xilófono.

Fase I: hipótesis del modelo lineal. El 25 de octubre los estudiantes graficaron la función lineal en el plano cartesiano con 13 datos de las medidas de notas musicales cromáticas desafinadas, que disminuían constantemente en 0,3 cm, desde DO grave 12,2 cm hasta DO agudo 8,6 cm, sacando conclusiones.

Fase II: hipótesis del modelo exponencial. El 1 de de noviembre descubrieron que al tocar las notas de la caja verde, el registro del afinador electrónico mostró en cada una desviación 0 cents, afinadas; pero al tocar las notas de la caja roja mostró desviación entre -40 y + 5 cents, desafinadas. El 8 de noviembre graficaron en el plano cartesiano la función exponencial y el 29 de noviembre concluyeron por medio de divisiones entre el dato de la longitud de una nota aguda, y el dato de la longitud de la nota anterior, grave; su cociente es una constante igual a 0,971

Fase III: introduciendo matriz de datos a la calculadora graficadora para obtener las gráficas de las funciones lineal y exponencial. Finalmente, el 5 de diciembre los estudiantes usaron la calculadora introduciendo los datos respectivos y encontraron las formas algebraicas y las gráficas para ambas funciones.

[*] Monografía

[**] especialización en educación matemática. Escuela de matemáticas. Directora: Rosario Iglesias Bárcenas.

SUMMARY

TITLE: Relation between musical notes and mathematics: a tool to understand the exponential function[*]

AUTHOR: Alvaro Pico Tapias[**]

KEYWORDS: chromatics notes, measures, exponential function, constant, aluminum plates.
CONTENT

Starting from PIM industries, we found a way to develop this investigation project.

Seven students of 9 degree (from La Victoria Educative Center, Lebrija, Santander), made workshops since october 3 of 2006, beginning with a diagnostic about sounds knowledge of musical notes. We worked with a group of chromatic notes out of tune, red box and other, one sharpened, green box. The activity stands out on october 18: to make cuts on aluminum plate to get musical notes that works on a xylophone construction.

Phase I: hypothesis of the linear model. In october 25 the students made a graphic of the linear function in the Cartesian plane with 13 data of the measures of the chromatic musical notes out of tune that constantly decrease in 0.3 cm, from DO flat (12.2 cm) to DO sharp (8.6 cm); they made their own conclusions.

Phase II: hypothesis of the exponential model. In november 1 they discover than when touching notes of the green box, the registry of the electronic tuner shows in each one a deviation of 0 cents, on tune; but when touching the notes of the red box, it shows a deviation between -40 and + 5 cents, out of tune. In november 8 they made a graphic of the exponential function in the Cartesian plane and in november 29 they concluded by means of divisions between the data of the length of the note (sharp) and the data of the length of the previous note (flat) its quotient is a constant, equal to 0.971

Phase III: Introducing the data matrix to the graphic calculator to obtain the graphics of the linear function and exponential function. Finally, in december 5, the students used the calculator, introducing the respective data; they found the algebraic forms and the graphics for both functions.

[*] Monograph
[**] Specialization in mathematics Education, Mathematics school; adviser: Rosario Iglesias Bárcenas

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de 9º grado Alexis, Leidy Marcela, Deyssi, Brayan Antonio, Genny Paola, Yury Andrea y José Eduardo, por su interés y su participación, por el deseo de superación en el desarrollo del aprendizaje y talleres realizados; así como a sus madres, quienes autorizaron para que los nombres de los estudiantes se registraran en el proyecto; de igual manera, a la directora del plantel Gloria Isabel Jiménez Colmenares, quién me brindó apoyo hasta su culminación.

Al maestro de música Libardo Barrero Castro (adscrito a la facultad de música de la UIS) por los aportes recibidos en el año 1993 acerca de la afinación de notas musicales, los cuales me sirvieron mucho para abrir mi investigación desde esa época.

A la profesora Rosario Iglesias, directora del proyecto de investigación.`por su gran colaboración y mucha paciencia que hizo posible las mejoras en la presentación de este trabajo.

A los profesores y compañeros de estudio de la UIS, por haber compartido las enseñanzas a lo largo del desarrollo del programa de especialización en Educación Matemática.

A Guillermo Arenas Pineda, Michael Pérez Fernández, Yolanda Eslava Bueno, a los profesores María Elena Pabón Pabón, Fabiola Suárez Galvis, Carlos Andrés Iglesias, a los estudiantes Silvio Ferney Hernández Suárez y María Camila Vélez Román, quienes de una u otra manera contribuyeron a la culminación de mi proyecto.

A mi esposa María Martha Márquez Castro y a mi hija Lina María Pico Márquez, quienes me dieron entusiasmo para adelantar los estudios de especialización en Educación Matemática hasta la culminación del proyecto.

A mi hermana Martha Pico Tapias le agradezco de una manera especial por la ayuda económica a lo largo de la especialización desde septiembre de 2005.

Finalmente al arquitecto del universo por permitirme esta inolvidable experiencia, que alimenta mi espíritu y amor por la música y las matemáticas, tanto en mis estudios de ingeniería industrial como en la especialización en Educación Matemática en la Universidad Industrial de Santander.

CONTENIDO

	Pág.
1. PRESENTACIÓN	11
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	12
2. JUSTIFICACIÓN	13
3. MARCO REFERENCIAL	14
3.1 ANTECEDENTES	14
3.2 FUNDAMENTACIÓN DESDE LA MÚSICA	17
3.3 FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA	24
3.4 FUNDAMENTACIÓN DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS	33
3.5 FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA	33
3.5.1 Constructivismo De Ausubel	34
3.5.2 El Constructivismo Piagetiano	34
3.6 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	34
4. OBJETIVOS	36
4.1 OBJETIVO GENERAL	36
4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	36
4.3 OBJETO DE ESTUDIO	36
5. METODOLOGÍA	37
6. CRONOGRAMA	64
7. CONCLUSIONES	65
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
ANEXOS	68

LISTA DE TABLAS

Pág

TABLA 1 DE DATOS INICIALES EN INDUSTRIAS PIM 27
TABLA 2 DE MEDIDAS OBTENIDAS EN LA PRIMERA CUERDA DE LA GUITARRA QUE CORRESPONDE DESDE LA NOTA MI GRAVE TOCADA AL AIRE, HASTA LA NOTA MI AGUDA TOCADA PULSANDO EL 12° TRASTE 31

LISTA DE GRAFICAS

Pág.

Gráfica 1 función lineal 28
Gráfica 2 función exponencial 29

LISTA DE ANEXOS

	Pág
Anexos A. Talleres y Actividades en el aula de clase	68

1. PRESENTACIÓN

El Principal propósito de este proyecto se centra en el pensamiento variacional, sin dejar de utilizar los pensamientos métrico, numérico y geométrico.

El desarrollo de las experiencias previas a este proyecto está basado en la creación de mi pequeña industria denominada INDUSTRIAS PIM, fábrica dedicada a la construcción de instrumentos musicales de percusión (xilófonos, metalófonos, y sistros), iniciada el 11 de abril de 1991 en la ciudad de Bucaramanga.

Por la importancia del pensamiento variacional en el programa curricular de matemáticas del grado 9º, el proyecto se desarrolla con siete estudiantes del Centro Educativo La Victoria del municipio de Lebrija (Santander), distante 21 Km de la ciudad de Lebrija, 14 Km por carretera pavimentada vía a Barrancabermeja, y luego a la derecha desde el restaurante Brisas 7 Km por carretera destapada (mal estado en época de invierno).

Por lo anterior entraría en el proyecto de investigación puntualizando con el tema

LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES CROMÁTICAS CON LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA MODELAR Y GRAFICAR LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN 9º GRADO.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El pensamiento variacional tiene como uno de sus principales propósitos el desarrollo de competencias cognitivas que permitan la modelación de fenómenos de la vida y no solamente la solución de ejercicios y resolución de problemas, como sucede con el enfoque que le da la mayoría de los profesores de matemáticas de las diferentes instituciones, porque ellos no han ido al manejo de los modelamientos matemáticos que surgen de las funciones, como una manera de desarrollar esta competencia, Los profesores se han limitado a explicar como resolver las variables que aparecen en las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, etc. Simplemente con desarrollos algorítmicos, fríamente en un tablero, o dejando tareas a los estudiantes sin trascender para que el propósito del desarrollo del pensamiento variacional sea mas motivador. Los profesores no se han apoyado con el desarrollo de otros pensamientos como el métrico o geométrico para comprender mejor lo variacional.

Por lo anterior, surge un problema:

A nivel general, muchos estudiantes presentan dificultades en precisar medidas tanto en la práctica del uso de herramientas como: escuadra, metro, calibrador,…para ubicar los datos que resultan al desarrollar una unción, tabular y graficar en hoja milimetrada, refiriéndome a los estudiantes de educación media. También muchos estudiantes desconocen el uso de nuevas tecnologías como la calculadora graficadora, así los estudiantes estén ubicados en lo urbano, y con mayor razón en lo rural.
Ahora bien, entre los fenómenos de las ciencias, al igual que en la música (las notas musicales cromáticas), para los estudiantes no es fácil llegar a modelar un fenómeno, ni tampoco simularlo por medio del uso de nuevas tecnologías (calculadora graficadora) para llegar a comprender funciones que resultan en el desarrollo del pensamiento variacional, desde una función lineal hasta una función no lineal, como la función exponencial; pero sin dejar de utilizar los pensamientos numérico, métrico y geométrico, que se involucrarán a lo largo del desarrollo de actividades, porque van a servir de apoyo para una buena experiencia docente con los estudiantes. Por consiguiente, surge la siguiente

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo pueden los estudiantes de 9º grado del Centro Educativo La Victoria modelar, graficar y comprender la función exponencial mediante la construcción de las notas musicales cromáticas?

2. JUSTIFICACIÓN

Como la matemática tiene muchas aplicaciones, es indispensable hacer comprender a los estudiantes que el pensamiento variacional tiene mucho que ver con problemas de la vida cotidiana, que aparecen en: las ciencias sociales, Biología, Física, economía, y en las artes como la música; es precisamente aquí donde se centrará el proyecto de investigación con el fin de encontrar la relación entre las notas musicales y las matemáticas. Con el desarrollo del pensamiento variacional los estudiantes representan y describen fenómenos de variación y cambio; también aplican conceptos sobre modelos matemáticos, así como los conceptos sobre relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas. (MEN)

Como respuesta a los propósitos de formación, se hace necesario cumplir con los lineamientos curriculares en relación con el desarrollo del pensamiento variacional y lograr uno de los estándares de 9º grado: “Representa gráficamente funciones exponenciales y saca conclusiones “(MEN).

Así mismo, los estudiantes de 9º grado del Centro Educativo La Victoria no conocen el uso de las nuevas tecnologías como la calculadora graficadora, lo que permite afirmar que la presente monografía aportará una propuesta que favorezca el uso de esta herramienta tecnológica en el aula para simular allí funciones lineales y funciones no lineales como la exponencial.

De otro lado, el Ministerio de Educación Nacional hace énfasis en el desarrollo de las competencias laborales y con este trabajo de monografía, se presenta una alternativa para que los estudiantes elaboren un xilófono que surge de la construcción de notas musicales, porque sirve como material didáctico para el mismo centro educativo, además puede impactar para llevar la propuesta a otros pares educativos rurales y urbanos, para el área de artística.

Finalmente, con este proyecto de investigación, estoy cumpliendo con uno de los requisitos para obtener el título de Especialista en Educación Matemática.

3. MARCO REFERENCIAL

3.1 ANTECEDENTES

Mi fábrica de instrumentos musicales de percusión: xilófonos, metalófonos y sistros, denominada INDUSTRIAS PIM, quedó registrada ante la Cámara de Comercio de Bucaramanga con el No. de matrícula 05-033554-1 el 11 de abril de 1991

En un comienzo, por no tener referencia bibliográfica respecto de cómo deben ser los cortes tomados de una platina de aluminio P-18 (1 pulg. de ancho por 1/8 de espesor), o de una platina de aluminio P-19 (1 pulg. de ancho por 3/16 de espesor) para obtener longitudes exactas que generen las notas diatónicas de DO (grave) a DO (aguda), la fabricación de los instrumentos musicales fue de manera experimental. Inicialmente se elaboró un metalófono de 8 notas, modelo CC-8 diatónico -sólo lleva las notas naturales desde DO grave hasta DO aguda—. Posteriormente fue necesario producir los cortes para todas las notas musicales cromáticas, con las que se fabricó un metalófono modelo CC-13 cromático por tener 13 notas musicales (incluye las notas DO grave, DO aguda y todas las notas tanto naturales como sostenidas).

Al no encontrar referencia bibliográfica, por sólo estimación de cortes dados en cm y 1 décima de cm, se producían los instrumentos con ayuda de un patrón dado DO grave y DO agudo, los cuales dieron las medidas iniciales tomados de la platina de aluminio P-18, así: para DO grave = 12 cm y DO agudo = 8,40 cm simplemente lo que hice fue tomar la diferencia entre 12 y 8.4 y dividirla por 12, porque son 12 notas cromáticas, dando 0,3 cm de diferencia entre una nota y otra. Así, tome mi primer modelo como una función lineal de la forma

$$f(x) = mx + b,$$

Siendo *m* la pendiente negativa = - 0,3 y b = 12 como punto de partida en el corte con el eje Y. Entonces mi primer modelo para producir xilófonos, metalófonos o sistros resultó con el siguiente modelo matemático:

$$f(x) = -0,3x + 12,$$

tomando valores para *x* desde O hasta 12 para producir 13 cortes ó 13 notas cromáticas (Álvaro Pico Tapias[5], 1991; ver gráfico en el documento de fundamentación matemática).

En 1993 conocí al maestro de música Libardo Barrero Castro[1], actualmente adscrito al Departamento de Música de la UIS, a quien le pareció bien la idea de seguir fabricando xilófonos, haciéndome la observación de que debía producirlos más afinados; para esto conseguí un afinador cromático electrónico. Continué con mis cortes estimativos y noté que el modelo de la función lineal no se ajustaba.

Continué con mi experimentación y me di cuenta de que los datos inicial y final de 12 cm y 8,42 cm, respectivamente, sí estaban ajustados pero las notas intermedias entre RE y SI se oían un poco desafinadas, y más específicamente en las del centro, como las notas FA y SOL. Esto me llevó a buscar otro modelo matemático, encontrando que a cambio del modelo lineal el modelo exponencial afinaba todas las notas (ver gráfico en la fundamentación matemática).

Una vez concluida mi experiencia de calidad por afinación, procedí a incrementar mi producción de instrumentos a nivel nacional, hoy muy conocidos.

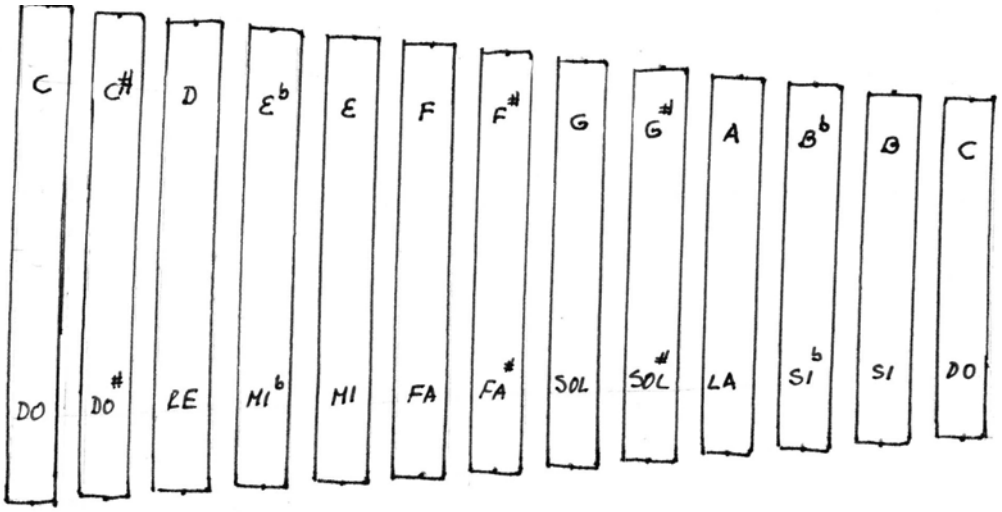
Como vi que existe una relación entre las notas musicales y las matemáticas, consideré llevar esto a un proyecto de investigación; sin embargo, como no había encontrado referencias de autores que me señalaran patrones para cortes en la platina de aluminio que sirvan para fabricar metalófonos o sistros, me vi en la necesidad de investigar para corroborar que, siguiendo el modelo exponencial, las notas se escuchan muy bien afinadas.

El modelo matemático que satisface la construcción afinada de los instrumentos, su función exponencial algebraica se explicará mas adelante en el marco referencial con relación a la fundamentación matemática.

A continuación se puede observar el dibujo a mano alzada como son lo cortes con platinas (ref. P-18) inicial y final

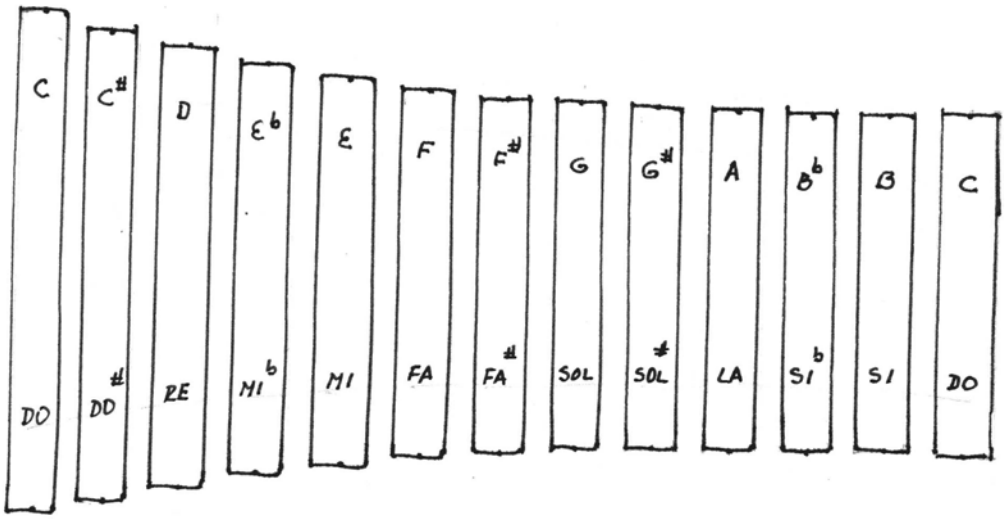
Modelo inicial

Corte de platinas de aluminio que cumplen la función lineal (notas desafinadas
DO1 = C = 12 cm (nota grave)
DO2 = C = 8,4 cm (nota aguda)



Modelo final

Corte de platinas de aluminio que cumplen la función exponencial (notas afinadas)
Nota: el dibujo presenta medidas aparentemente más cortas en la parte central, para mostrar con más claridad la curva exponencial.
DO 1 = C = 12 cm (nota grave)
DO 2 = C = 8,43 cm (nota aguda)



3.2 FUNDAMENTACIÓN DESDE LA MÚSICA

¿Tenía razón Pitágoras sobre la relación de la música con las matemáticas? (basado en un texto de Carlos Julio Luque Arias)[3].

Para llegar a comprender si tenía razón Pitágoras acerca de la relación de la música con las matemáticas, se ven las relaciones simples entre los números naturales usadas por Pitágoras, y la contraparte de Bach y D'Alembert.

¿Cómo surge esta relación de la música con las matemáticas?

La música está formada por un conjunto de sonidos seleccionados con algún criterio que los califica como agradables. La cultura griega eligió algunos sonidos, llamados notas, a los que le corresponden determinadas frecuencias, y con relación al objeto de estudio las notas musicales cromáticas fabricadas con trozos de aluminio, al golpear con un percutor una sola placa de aluminio, emite un conjunto de armónicos con su timbre característico de un metal agradable. Junto con estas determinadas frecuencias, la cultura griega consideró que las notas correspondientes a los múltiplos de esas frecuencias, llamados armónicos, también sonaban agradable si se tocaban simultáneamente (armonía: por ejemplo, DO con MI, RE con FA, MI con SOL, FA con LA, SOL con SI, LA con DO, SI con RE) ó sucesivamente (melodía).

Uno de los primeros descubrimientos pitagóricos fue la relación entre las notas emitidas por una cuerda y la longitud de ella; para este caso de investigación, será por lo tanto la relación entre las notas emitidas por placas de aluminio y la longitud de éstas. Descubrieron que si una cuerda de longitud L, emite una frecuencia f (llamada la Tónica), cuando su longitud se reduzca a la mitad emitirá una nota armónica con ella de frecuencia doble de la anterior, es decir, 2f; esta nota es el primer armónico de la tónica (suena de la misma forma pero su frecuencia es más alta).

Dividieron el intervalo entre una nota y su segundo armónico en siete partes, y a 2f la llamaron la octava; de esta manera, entre cada nota y su primer armónico se colocaron otras siete notas.

Si la longitud de la cuerda se reduce a $\frac{2}{3}L$, la nota que emite es la quinta en la división hecha; si la longitud de la cuerda se reduce a $\frac{3}{4}L$, la nota que emite es la cuarta. Esto significa que la armonía musical es expresable como razones de números naturales.

¡La armonía es número!

La nota que se ha escogido como base, en la mayoría de los países occidentales es La 3, a la que se asigna una frecuencia de 440 hertzios.

Los sonidos audibles por los humanos (entre 20 y 20000 hertzios) pueden acomodarse entre LA 2 (es la segunda nota de LA con 27,5 Hz) y MI 9 (es la novena nota de MI correspondiente a 21120 Hz). Sin embargo la música, es decir, los sonidos agradables abarcan un rango menor; un piano normal tiene un registro entre LA 2 y DO 7 (séptima nota de DO con una frecuencia de 4186 Hz. (Se aclara que LA 2 es muy grave, DO 7 muy aguda y MI 9 más aguda que DO 7).

En los intervalos mayores y menores es posible intercalar notas bajando o subiendo un semitono con respecto a ellos, bemol (b) y sostenido (#) respectivamente. Subir un semitono a una nota significa hacer 16/15 de ella, por ejemplo:

$$DO\,\# = \frac{16}{15} DO\,.$$

Bajar un semitono de una nota significa hacer 15/16 de ella, por ejemplo:

$$RE\,b = \frac{15}{16} RE\,.$$

Como podemos observar, entre DO y RE hay otras dos notas; lo mismo sucede entre RE y MI, entre FA y SOL, entre SOL y LA, y entre LA y SI, para un total de 17 notas en una escala (puesto que entre mi y fa y entre si y do no hay nota), todas entrelazadas en hermosas y simples relaciones de números naturales.

Sin embargo, esta escala tiene problemas cuando deseamos cambiar la tónica para repetir una melodía a partir de una nueva nota, lo que dificulta la ejecución de instrumentos que emiten notas fijas como el piano, el órgano y en nuestro caso de investigación en un xilófono, o cuando pretendemos ejecutar varios instrumentos a la vez.

Este problema dio origen a una nueva escala conocida como la **escala temperada,** elaborada esencialmente por Johann Sebastián BACH (1685-1750), y Jean Phillippe RAMEAU (1683-1764) y perfeccionada por Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). En ella, la octava se divide en 12 intervalos iguales llamados semitonos temperados, identificando el sostenido de una nota con el bemol de la siguiente y manteniendo la relación armónica

$$DO_2 = 2\ DO_{1;}$$

1 significa el subíndice para la nota 1 Do grave. 2 significa el subíndice para la nota 2 Do aguda.
Lo que obliga a la siguiente relación:

$$\frac{\mathrm{Do}^{\#}}{\mathrm{Do}_1} = \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Do}^{\#}} = \frac{\mathrm{Re}^{\#}}{\mathrm{Re}} = \frac{\mathrm{Mi}}{\mathrm{Re}^{\#}} = \frac{\mathrm{Fa}}{\mathrm{Mi}} = \frac{\mathrm{Fa}^{\#}}{\mathrm{Fa}} = \frac{\mathrm{Sol}}{\mathrm{Fa}^{\#}} = \frac{\mathrm{Sol}^{\#}}{\mathrm{Sol}} = \frac{\mathrm{La}}{\mathrm{Sol}^{\#}} = \frac{\mathrm{La}^{\#}}{\mathrm{La}} = \frac{\mathrm{Si}}{\mathrm{La}^{\#}} = \frac{\mathrm{Do}_2}{\mathrm{Si}}$$

Si llamamos t a la razón común, y multiplicamos todas las razones anteriores, debe cumplirse que el semitono temperado corresponde a

$$t^{12} = \frac{Do_2}{Do_1} = 2\,,$$

de donde

$$t = \sqrt[12]{2} \cong 1{,}059463.$$

que no es un número natural, ni es la razón de dos números naturales; es un número irracional y no es un número construible con regla y compás. A pesar de todo es el que gobierna las relaciones entre las notas musicales cromáticas.

Aunque en la escala temperada no se trabaja en las notas intermedias con números enteros, no puedo pasar inadvertido el gran aporte de Pitágoras, puesto que él fue quien dio inicio a la relación que existe entre las notas musicales y las matemáticas, y tiene razón cuando dice, que existe la relación entre las notas emitidas por una cuerda y la longitud de ella, porque es bien cierto, que al tocar una cuerda de longitud L cuyo sonido es una nota cualquiera, si ésta longitud se reduce exactamente a la mitad se produce el sonido de la octava superior, es decir, la misma nota aguda.

Experimentalmente se comprueba al tocar la primera cuerda de la guitarra al aire denominada MI grave y volver a tocar la misma cuerda pisando el doceavo traste, se obtiene la nota MI aguda. Se tomaron las medidas de longitudes de cuerdas que resultaron pisando los trastes en las distintas posiciones cromáticas, es decir, entre cada puente de traste y el puente inferior de sostén de las 6 cuerdas de la guitarra. Sus medidas correspondientes a cada nota cromática partiendo de MI grave y terminando en MI aguda, medidas que están tabuladas junto con las conclusiones en la fundamentación matemática.

Los sonidos de la música[1]

La música se crea a partir de la combinación de distintos sonidos, que pueden ser más graves o más agudos. Para poder representar estos sonidos existen las notas musicales.

¿QUÉ SON LAS NOTAS MUSICALES?

Las notas son los nombres que se les asignan a determinados sonidos de frecuencia constante. Un intervalo es la relación de frecuencias que existe entre dos notas musicales. Puede resultar algo complicado de entender en principio, pero es un sistema bastante claro para interpretar, leer y escribir piezas musicales.

Las notas musicales representan la altura de los sonidos, es decir, si son más graves o más agudos.

"Los intervalos pueden medirse en unidades llamadas cents, habiendo en cada octava 1.200 cents. Los intervalos típicos de la música occidental son múltiplos de 100 cents (semitonos), pero en otras culturas musicales también pueden encontrarse intervalos de alrededor de 50, 150 o 240 cents, por poner algunos ejemplos. El oído humano puede distinguir intervalos tan pequeños como de 14 cents, pero no desempeñan un papel significativo en ningún sistema musical"[2].

Gráfico de las notas cromáticas, tomando como referencia 100 cents

o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
DO	DO#	RE	Mib	MI	FA	FA$^{\#}$	SOL	SOL$^{\#}$	LA	SI b	SI	DO
C	C$^{\#}$	D	E b	E	F	F$^{\#}$	G	G$^{\#}$	A	B b	B	C

Bach hizo referencia al término "bien temperado", (también como lo explica [6]) como el sistema de afinación o temperamento igual, consistente en hacer coincidir dos sonidos que en un principio deberían ser ligeramente distintos, como pueden ser las notas enarmónicas sol sostenido y la bemol, que acústicamente no se encuentran en la misma longitud de onda, pero que en este tipo de afinación se las hace coincidir. El temperamento igual es casi exclusivo de los instrumentos de tecla, ya que en una

[1] Enciclopedia Encarta,2006
[2] Ibíd.

misma tecla se deben encontrar dos tonos enarmónicos (mismo sonido pero distinto nombre)".[3]

Origen del nombre: notas cromáticas

Cromatismo (del griego, chroma, 'color'), en una composición musical, es el uso de notas que no pertenecen a la escala musical sobre la que se basa la composición. En esencia, un tono cromático es aquel producido por la elevación o descenso de un semitono, sobre una de las notas individuales de la escala diatónica básica de siete notas (en DO mayor, por ejemplo, estas notas son DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI). Cuando se dice elevación de un semitono, va por ejemplo de DO a DO sostenido, RE a RE sostenido, FA a FA sostenido, SOL a SOL sostenido, LA a LA sostenido; y cuando se dice descenso de un semitono, va por ejemplo de SI a SI bemol, LA a SOL sostenido, SOL a FA sostenido, MI a MI bemol, RE a DO sostenido. En el canto medieval y en la polifonía (música a varias voces) antigua, algunas notas eran a veces alteradas (la más habitual, SI a SI bemol) para adaptarse a unas reglas estéticas establecidas. El uso del cromatismo aumentó radicalmente en el siglo XIX, creando las expresivas armonías de la música del romanticismo tardío. Pero, al mismo tiempo, despertó el sentido de la tonalidad en el oyente. Alrededor de 1900 este cromatismo extendido llevó a una ruptura con el sistema de tonalidades mayores y menores, y al desarrollo de un nuevo concepto de escala cromática: el sistema dodecafónico.[4]

El sistema dodecafónico corresponde al total de 12 notas cromáticas, sus sonidos son agradables al oído y son la base de casi todas las composiciones musicales del mundo.

"Las **armonías** y las **progresiones armónicas** que sólo contienen las notas propias de una tonalidad dada se llaman diatónicas, y cromáticas cuando utilizan notas extrañas a la tonalidad. Las notas alteradas cromáticamente, es decir, aquellas que no pertenecen a dicha tonalidad, modifican acordes enteros así como notas individuales dentro de un acorde. Las notas cromáticas, en general, sirven para conducir una melodía o pieza musical de una tonalidad a otra".[5]

ESCALAS DIATÓNICAS

Cuando observamos un piano o un órgano electrónico, las teclas blancas corresponden a las notas de la escala diatónica. Estas escalas poseen una serie repetida de semitonos (en las teclas blancas, MI-FA y SI-DO) y tonos enteros (entre las otras parejas de notas adyacentes). Tienen siete notas por octava (la octava nota de estas

[3] Ibíd.
[4] Ibíd.
[5] Ibíd.

series es simplemente la repetición de la primera, pero situada una octava más arriba). Las escalas mayores y menores han dominado la música occidental desde alrededor de 1650 y son, hablando en sentido estricto, dos modos de la escala diatónica básica: el modo jónico, representado por la serie DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI (y DO), que se ha convertido en la escala mayor; y el modo eólico, representado por la serie LA, SI, DO, RE, MI, FA, SOL (y LA), que se ha convertido en la escala menor. Ambos modos suenan diferentes por la distinta ubicación de los semitonos en ellos".[6]

ESCALAS NO DIATÓNICAS

A finales del siglo XIX, y dado el uso cada vez mayor de notas sostenidas y bemolizadas, la música occidental comenzó a basarse no ya en las escalas diatónicas, sino en la cromática: 12 notas en una octava, separadas por un semitono: DO, DO sostenido, RE, RE sostenido, MI, FA, FA sostenido, SOL, SOL sostenido, LA, LA sostenido, SI (y DO). [7]

Sistemas de afinación, sistemas teóricos o prácticos para determinar la correcta afinación de los intervalos de una escala. Cuando una octava está afinada, corresponde a un intervalo de 1200 cents. dado que existe cierto retardo hasta que el oído reconoce dos notas como un intervalo dado, los conceptos culturales de tono o intervalo varían. Por ejemplo, tanto el intervalo de 200, como el de 204 y el de 182 cents se oyen como tonos enteros. En los intervalos que concuerdan mucho, las frecuencias de las ondas sonoras de las notas superior e inferior se conforman a unas relaciones matemáticas simples, como son 2:1 (octava), 5:4 (tercera mayor) o 3:2 (quinta). Esta última relación, la quinta justa, es la base de la afinación pitagórica, usada en la antigua Grecia, la antigua China, los países islámicos en la edad media y la Europa medieval.[8]

En desarrollo del proyecto se trabajó con el uso del afinador cromático electrónico. Cuando el afinador se encuentra en perfectas condiciones, este nos conduce a identificar una nota bien afinada, y es cuando el registro señala la aguja centrada, 0 cents. de desviación produciendo una luz verde. Cuando la nota está desafinada, el registro señala la aguja desviada entre –50 y 0 cents. ó entre 0 y +50 cents., produciendo una luz roja. Por lo tanto, el intervalo total en el registro del afinador señala entre –50 y + 50 cents., igual a 100 cents., intervalo entre dos notas cromáticas; así por ejemplo, entre DO y DO sostenido existen 100 cents.

[6] Ibíd.
[7] Ibíd.
[8] Ibíd.

¿De dónde proviene la identificación de las notas con las primeras 7 letras del alfabeto?

Son las primeras sílabas de un himno a Juan el Bautista:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tourum
Solve polluti
Labil reatum
Sancti Johannes

Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, SJ,

propuesta hecha por el monje de nombre Guido d'Arezzo (e. 993-1033), de la Abadía de Pomposa (Italia), en el siglo XI.

Posteriormente se cambiaron la primera y la última por DO y SI, respectivamente, para facilitar su canto.

En países como Alemania e Inglaterra se nombran las notas con las letras del abecedario comenzando en LA, a la que se le asigna la letra A, a SI se le asigna B, a DO se le asigna C, y así sucesivamente:

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
C	D	E	F	G	A	B	C

Otros términos musicales utilizados en este proyecto:

METALÓFONO: término genérico que engloba a todos aquellos instrumentos musicales de percusión constituidos por una serie de placas de metal afinadas y colocadas verticalmente sobre una caja de madera hueca, que hace de caja de resonancia.

En el desarrollo de los talleres se utilizó el aluminio, y se aclara que cuando la caja de resonancia es alta se denomina metalófono, y se usan platinas de aluminio P-19 (1 pulg. de ancho x 3/16 pulg. de espesor).

SISTRO: Cuando la caja de resonancia es baja se denomina sistro, y se usan platinas de aluminio P-18 (1 pulg. de ancho x 1/8 pulg. de espesor) o platinas de aluminio P-12 (3/4 pulg. de ancho x 1/8 pulg. de espesor)

Estos instrumentos se emplean con frecuencia, junto con otros de percusión, en la enseñanza-aprendizaje infantil de la música.

3.3 FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA

Antes de hablar de la función exponencial, veamos el concepto de exponente.

Exponente: es un número entero que indica el número de veces que una cantidad se ha de multiplicar por sí misma. Un exponente se escribe normalmente como un pequeño número o letra en la parte superior derecha de la expresión, como

$$x^2$$

leído " x al cuadrado" y que representa el producto del número x (en general real) por sí mismo. También se lee "x a la potencia 2".

El significado de la expresión a^m se puede extender al caso en que el exponente m no sea un entero positivo; es decir, los exponentes pueden ser enteros positivos o negativos o cero, números racionales, irracionales o complejos.

La función en la cual un número real positivo cualquiera (fijo) a se eleva a una potencia x variable, es decir, a^x, se denomina **función exponencial de base** a.

Aspectos y temas requeridos en la presente investigación

La modelación inicial para la hipótesis del modelo lineal:

f(x) = m x + b
siendo *m = - 0,3* *b = 12 cm* (longitud de la nota inicial DO grave)

f(x) = -0,3 X + 12

Los datos aparecen en la tabla anexa.

La función exponencial, como ya se dijo, se define mediante la expresión

$$f(x) = a^x,$$

Para a > 0 donde x toma cualquier valor real.

El dominio de toda función exponencial es el conjunto de todos los números reales.

El recorrido en una función exponencial son los reales positivos.

La función es creciente cuando *a>1,* constante (uno) cuando $a = 1$ y decreciente si

$a < 1$.

La modelación final para la hipótesis del modelo exponencial,

$$f(x) = b\ K^x,$$

siendo b (corte con el eje Y) el valor inicial correspondiente a la medida de 12 cm, que es la longitud de la placa de aluminio P-18 que produce el sonido DO grave.

K es la constante que surge de las 12 relaciones, como se explica a continuación, y x el valor exponencial que va desde 0 hasta 12, es decir, es el número de orden de las notas si se hacen 13 cortes.

¿DE DÓNDE SURGE LA CONSTANTE K EN EL MODELO EXPONENCIAL?

La relación de las notas musicales en nuestro modelo, surge del cociente entre las longitudes de las notas musicales cromáticas afinadas. Con estas longitudes, el afinador cromático electrónico muestra que todas las notas están afinadas, lo que conduce a la siguiente relación (en la que L indica longitud):

$$\frac{\mathrm{LDO}^{\#}}{\mathrm{LDO}_1} = \frac{\mathrm{LRE}}{\mathrm{LDO}^{\#}} = \frac{\mathrm{LMIb}}{\mathrm{LRE}} = \frac{\mathrm{LMI}}{\mathrm{LMIb}} = \frac{\mathrm{LFA}}{\mathrm{LMI}} = \frac{\mathrm{LFA}^{\#}}{\mathrm{LFA}} =$$

$$\frac{\mathrm{LSOL}}{\mathrm{LFA}^{\#}} = \frac{\mathrm{LSOL}^{\#}}{\mathrm{LSOL}} = \frac{\mathrm{LLA}}{\mathrm{LSOL}^{\#}} = \frac{\mathrm{LSIb}}{\mathrm{LLA}} = \frac{\mathrm{LSI}}{\mathrm{LSIb}} = \frac{\mathrm{LDO}_2}{\mathrm{LSI}} = \mathrm{K}$$

Ahora bien, la relación entre la longitud de la placa correspondiente a la nota DO2 (nota aguda) y la longitud de la placa correspondiente a la nota DO1 (nota grave) se da experimentalmente así:

Con platina P-18 $\rightarrow$ *DO2 = 8,62 y DO1 = 12,2 ,* $\Rightarrow \frac{DO2}{DO1} = 0.7065$

Con platina P-19 $\rightarrow$ *DO2 = 10.62 y DO1 = 15.02* $\Rightarrow \frac{DO2}{DO1} = 0.7070$

lo mismo se comprobó con otras placas de aluminio como las referencias P-12 o P-26.

Como $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.7071$, los valores experimentales anteriores se aproximan a este valor. Con un calibrador se tomaron medidas con 2 cifras decimales. Como en total se dan 12

relaciones, el cociente entre las notas musicales cromáticas da una constante y por lo tanto,

$$K^{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \qquad K \cong 0.9715$$

Para efectos de cálculos en el proyecto de investigación, la constante K se tomará con 3 cifras decimales; esto garantiza una excelente afinación, ya que el oído humano no detecta una diezmilésima de error.

Para observar y analizar la función exponencial, los estudiantes mediante el uso de la calculadora graficadora, realizaron una tabla de datos, la gráfica correspondiente a los datos recolectados, y encontraron la fórmula de la función.

Cabe destacar por lo anterior dentro de los procesos matemáticos, parte a: Planteamiento y resolución de problemas, tomado de los estándares para el grado 9º, numeral 3, "Utiliza de manera creativa una calculadora científica o graficadora para llevar a cabo experimentos, probar conjeturas y resolver problemas". (Ministerio de Educación Nacional).

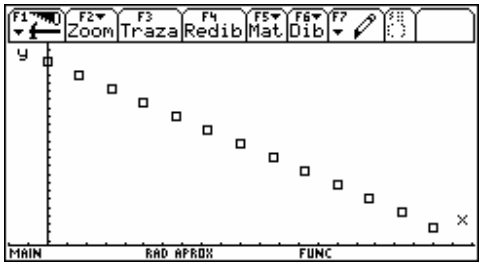
La constante K es la que encontraron los estudiantes mediante diagnósticos de las notas musicales y un taller en su fase II, modelando la función exponencial.

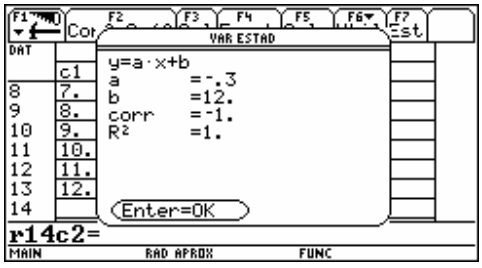
TABLA 1 DE DATOS INICIALES EN INDUSTRIAS PIM

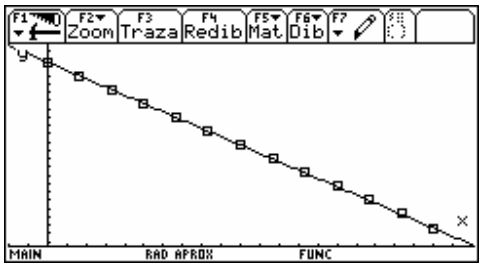
Nota musical	Símbolo	Modelo lineal (1991)	Modelo exponencial (1993)
		Medida (cm)	Medida (cm)
DO	C	12,00	12,00
DO#	C#	11,70	11,65
RE	D	11,40	11,31
MI b	E b	11,10	10,99
MI	E	10,80	10,67
FA	F	10,50	10,36
FA#	F#	10,20	10,06
SOL	G	9,90	9,77
SOL#	G#	9,60	9,48
LA	A	9,30	9,21
SI b	B b	9,00	8,94
SI	B	8,70	8,68
DO	C	8,40	8,43

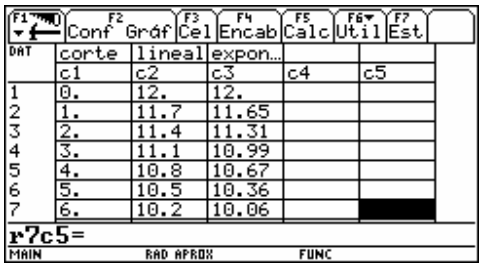
Nota: El símbolo # indica una nota sostenida, Ej.: F # = Fa sostenido
El símbolo b significa bemol, Ej.: B b = Si bemol

Gráfica 1 función lineal

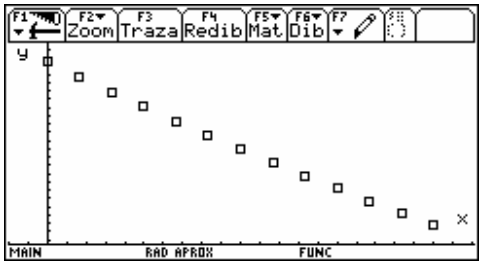


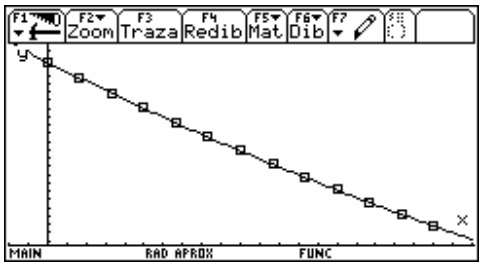


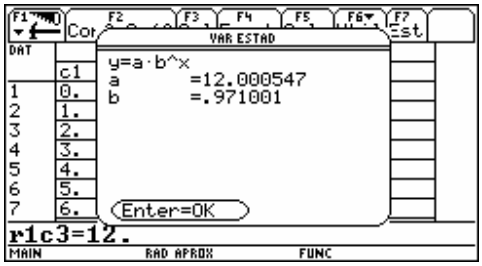




Gráfica 2 función exponencial







La modelación final para la hipótesis del modelo exponencial, objeto de estudio, queda de la siguiente manera:

$$f(x) = bk^{x}$$

En donde b = 12 cm (longitud de la nota inicial DO grave) con platina P-18,

b = 15 cm (longitud de la nota inicial DO grave) con platina P-19,

K = la constante 0,971, X = orden de la nota desde 0 para la nota DO grave

Hasta *x* = 13 para la segunda nota DO aguda,

f(x) = 12 (0,971)^{x} ó f(x) = 15 (0,971)^{x}.

Como 0 < k < 1 y X 1 < X 2, la función es decreciente

Nota: El valor de b = 12 cm o b = 15 cm es un valor promedio que arrojan las platinas de aluminio en las referencias P-18 o P-19, respectivamente, para la nota Do grave afinada; por consiguiente cuando es necesario partir de una medida ligeramente mayor o menor a 12 cm ó a 15 cm, se debe hacer para cumplir estrictamente con la afinación de las demás notas. Esta observación se hace porque cada lote de producción de platinas de aluminio no siempre garantiza el mismo espesor, pero sí lo es en todo el tramo de la platina original de 6 m.

Experimentalmente se pudo comprobar que es así, de manera que al observar y tocar la primera cuerda de la guitarra al aire denominada MI grave, y volver a tocar la misma cuerda pisando el doceavo traste, se obtiene la nota MI aguda. Se tomaron las medidas de longitudes de cuerdas que resultaron pisando los trastes en las distintas posiciones cromáticas, quiere decir, entre cada puente de traste y el puente inferior de sostén de las 6 cuerdas de la guitarra. Sus medidas correspondientes a cada nota cromática partiendo de MI grave y terminando en MI aguda, aparecen tabuladas en las conclusiones en la fundamentación matemática.

TABLA 2 DE MEDIDAS OBTENIDAS EN LA PRIMERA CUERDA DE LA GUITARRA QUE CORRESPONDE DESDE LA NOTA MI GRAVE TOCADA AL AIRE, HASTA LA NOTA MI AGUDA TOCADA PULSANDO EL 12° TRASTE

Nota musical	Modelo exponencial (2008)
	Medida (cm)
MI	64,30
FA	60,69
FA$^{\#}$	57,28
SOL	54,07
SOL$^{\#}$	51,03
LA	48,17
SI b	45,47
SI	42,92
DO	40,51
DO$^{\#}$	38,23
RE	36,09
MI b	34,06
MI	32,15

Resultando las siguientes relaciones entre las longitudes de cuerda, siendo L la longitud para cada una dada en cm

L FA	FA#	SOL	SOL#	LA	SI b	SI	DO	DO#	RE	MI b	MI
L MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	SI b	SI	DO	DO#	RE	MI b

$$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \cong 0{,}943874.$$

Ahora bien, al remitirnos a las 12 relaciones donde llamamos t a la razón común, concluyeron D'Alembert y Rameau que

$$t^{12} = \frac{DO_2}{DO_1} = 2,$$

es lo mismo decir que

$$\mathrm{t}^{12} = \frac{\mathrm{MI}_2}{\mathrm{MI}_1} = 2,$$

de donde

$$\mathrm{t} = \sqrt[12]{2}$$

Como ya lo habíamos observado antes.

Esta expresión corresponde a la frecuencia emitida entre las notas cromáticas, y como las longitudes de las cuerdas son inversamente proporcionales a las frecuencias emitidas, la nueva razón nos da

$$T^{12} = \frac{1}{2},$$

$$T = \sqrt[12]{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{T} \cong 0{,}943874.$$

De esta forma se puede fundamentar otra relación que existe entre las notas musicales y las matemáticas como otra función exponencial de la forma

$$f(x) = a\,T^x,$$

siendo a la longitud de la cuerda que emite la nota MI grave, T la constante 0,94387 y *x* el valor exponencial que va desde 0 hasta 12, es decir, el número de orden de las notas correspondiente a los 13 sonidos que resultan tocando la primera cuerda de la guitarra

al aire y luego pulsando en cada uno de los 12 trastes. A manera de ejemplo, la longitud para la nota MI aguda resulta

$$F(12) = 64,3\ (0,94387)^{12}=32,15$$

Por tanto, las medidas de las longitudes de cuerda de la guitarra también obedecen al modelo exponencial, tal como lo corroboran las medidas dadas en la tabla, y coincidiendo, como decía Pitágoras, que la longitud de la cuerda que emite el sonido de la nota correspondiente a la octava tiene como medida es la mitad de la misma nota grave.

3.4 FUNDAMENTACIÓN DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Vale la pena tener en cuenta en la monografía lo siguiente:

El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Uso de la calculadora graficadora (Carlos Eduardo Vasco).

Las nuevas potencialidades de las tecnologías electrónicas para desarrollar y refinar el pensamiento variacional y la modelación.

"La actitud apropiada no es pues la del deslumbramiento y la exageración, sino la de la apropiación laboriosa y creativa, la de la investigación cognitiva, socio-afectiva y evaluativa, seria y permanente y la de la reserva crítica que acompañe el entusiasmo y la diversión que permite el uso de estas tecnologías, especialmente en el desarrollo del pensamiento variacional y de las capacidades de modelación matemática por parte de los estudiantes de todos los grados escolares".[9]

3.5 FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA

En el desarrollo de las actividades con los estudiantes en el aula está basado en la teoría del constructivismo.

[9] Biembengut M, 1999..

3.5.1 Constructivismo De Ausubel

Ausubel resumió el núcleo central de su concepción del proceso enseñanza y aprendizaje en la insistencia sobre la importancia de conocer previamente qué sabe el alumno antes de pretender enseñar algo. No es extraño, por tanto, que la destacada importancia que el constructivismo da a las ideas previas haya generado una gran cantidad de investigación educativa y didáctica sobre el tema.

En el marco de las teorías constructivitas, David Paúl Ausubel denomina aprendizaje verbal significativo al que s produce cuando se relacionan los nuevos conocimientos que se van a aprender con conocimientos ya existentes en la estructura cognitiva de los estudiantes, los cuales pueden ser el resultado de experiencias educativas anteriores, escolares y extraescolares, o también de aprendizajes espontáneos.

3.5.2 El Constructivismo Piagetiano

Jean Piaget presenta una relación con la epistemología evolutiva, es decir, el conocimiento sobre la forma de construir el pensamiento. Para Piaget, la idea de asimilación es clave, ya que la nueva información que llega a una persona es “asimilada” en función de lo que previamente hubiera adquirido.

Muchas veces se necesita luego una acomodación de lo aprendido, por lo que debe haber una transformación de los esquemas del pensamiento en función de las nuevas circunstancias.

3.6 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En la monografía se tuvieron en cuenta elementos como los estándares del Ministerio de Educación Nacional, sobre el tema puntual de la función exponencial, y otros aspectos normativos: leyes, decretos, resoluciones que haya expedido el gobierno nacional o departamental en torno a competencias laborales que están relacionadas con el resultado de la experiencia en el aula.

Se cuenta entre los lineamientos curriculares y estándares para 9º grado:

“Reconoce una función lineal, construye su gráfica en el plano cartesiano y halla sus principales atributos (pendiente, intersecciones con los ejes, etc.)”.

“Representa gráficamente funciones no lineales como las exponenciales, y saca conclusiones “.

“Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones exponenciales logarítmicas”.

“Reconoce una función exponencial, construye su gráfica en el plano cartesiano, describe sus características e identifica sus componentes principales”.

“Utiliza de manera creativa una calculadora científica o graficadora para llevar a cabo experimentos, probar conjeturas y resolver problemas”.

“Explica y justifica cómo llegó a una conclusión o a la solución de un problema”.
(Ministerio de Educación Nacional)

4. OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL

Explorar por medio de la construcción de las notas musicales cromáticas, cómo estas herramientas permiten al estudiante de 9º grado modelar, graficar y comprender la función exponencial.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar en el estudiante los pensamientos métrico y numérico mediante cortes precisos partiendo de una platina de aluminio para una correcta toma de datos de las longitudes de las notas cromáticas.

- Encontrar los modelos matemáticos de las funciones lineal y exponencial por medio de la variación de cortes utilizando platinas de aluminio.

- Utilizar la calculadora graficadora para visualizar y analizar las diferentes formas de representación (tabla, gráfica, expresión algebraica) de las funciones lineal y exponencial.

- Desarrollar habilidades en la construcción del instrumento musical de percusión metalófono, y donar un nuevo material didáctico para el Centro Educativo La Victoria.

4.3 OBJETO DE ESTUDIO

Las notas musicales cromáticas son el objeto de estudio, porque por medio de su construcción el estudiante de 9º grado puede llegar a encontrar un modelo matemático que le permita modelar y graficar para comprender desde la función lineal hasta llegar a la función no lineal, en este caso, la función exponencial.

5. METODOLOGÍA

La investigación se hará con un grupo de estudiantes de posprimaria del Centro Educativo La Victoria, vereda La Victoria, municipio de Lebrija (Santander).

Para su desarrollo en el aula, se utilizará la metodología de investigación cualitativa de tipo de estudio fenomenológico-hermenéutico.

Durante el desarrollo del proyecto, de los 47 estudiantes que conformaban los grupos de 6°, 7°, 8° y 9° grado, se seleccionaron los 7 estudiantes de 9º grado que realizarían algunas actividades para llegar a comprender la importancia del pensamiento variacional, y concretamente con las funciones lineal y exponencial, a saber:

Grupo 1: 3 estudiantes (José Eduardo, Brayan Antonio y Alexis)
Grupo 2: 2 estudiantes (Yury Andrea y Deyssi)
Grupo 3: 2 estudiantes (Leidy Marcela y Genny Paola)

En cada una de las siguientes fases participarán todos los estudiantes con talleres programados para su finalidad

- Estudio de casos: toma de datos para las fases 1 y 2
- Modelación: fase 3
- Evaluación: fase 4
- Conclusiones finales: fase 5
- Evidencias de las fases 1 a 4 que serán anexadas en la fase 6 del proyecto.

FASE 1: Probando la hipótesis del modelo de la función lineal.

Realización de talleres para hacer cortes estimativos partiendo de una platina de aluminio de 6 m ref.: P-18 (1 pulg. de ancho x 1/8 pulg. de espesor) para obtener un sonido igual a la nota cortada DO grave (ej. 12,25 cm) que sirve de patrón para la altura del sonido DO grave con ayuda del afinador cromático electrónico. A su vez, se va a obtener un sonido igual a la nota cortada DO aguda (ej. 8,65 cm) que sirve de patrón para la altura del sonido DO aguda.

FASE 2: Probando la hipótesis del modelo de la función exponencial

Igualmente se realizarán talleres partiendo de otra platina de aluminio de 6 m de longitud, apoyándose en las notas patrones de DO y el probador electrónico.

FASE 3:

Modelación final, introduciendo datos a la calculadora graficadora para obtener la gráfica de la función exponencial

FASE 4: Evaluación

- Trabajo colaborativo en grupo en busca del desarrollo de los pensamientos métrico, numérico y geométrico previos al desarrollo del pensamiento variacional.

- Apropiación del conocimiento de la función exponencial.

- Uso de la calculadora graficadora para graficar y analizar la función exponencial.

FASE 5: CONCLUSIONES FINALES ESPERADAS

- Comprenderán que la música tiene relación con las matemáticas al descubrir la función exponencial con los cortes tomados de una platina de aluminio ref. P-18 o P-19 para construir las notas musicales cromáticas.

- Manejarán adecuadamente la calculadora graficadora para introducir datos y simular modelos matemáticos.

- Tendrán un mejor conocimiento para la aplicabilidad de los distintos pensamientos desarrollados a través del proyecto de investigación, y de esta forma lograrán ser creativos en la construcción con calidad de un instrumento musical de percusión como son el xilófono, el metalófono y el sistro, contribuyendo así al desarrollo de competencias laborales.

FASE 6: Anexos de actividades realizadas durante el desarrollo del proyecto de investigación

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN NOVENO GRADO

FASE I: HIPÓTESIS DE UNA MODELACIÓN LINEAL

DISEÑO DE TALLERES

TALLER I

DIAGNÓSTICO ACERCA DE CONOCIMIENTO DE SONIDOS DE NOTAS MUSICALES

ACTIVIDAD MARTES 3 Y 4 DE OCTUBRE

ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Materiales
- 1 caja de resonancia roja con 13 notas cromáticas
- 1 caja de resonancia verde con 13 notas cromáticas
- 2 grupos de 8 notas diatónicas – incluyendo SI bemol –
- 2 percutores

Procedimiento
Se organizaron tres grupos con los siete estudiantes de 9º grado así:
Grupo 1: José Eduardo, Brayan Antonio y Alexis
Grupo 2: Yury Andrea y Deyssi
Grupo 3: Leidy Marcela y Genny Paola

Se programó una entrevista semiestructurada apoyada en un material de la experiencia a lo largo de 12 años de trabajo con instrumentos musicales de percusión Metalófonos y Sistros.

Primera Parte:

Se dan a conocer 2 grupos de 13 cortes de platinas cada uno, los cuales son apoyados independientemente sobre 2 cajas de resonancia, una de color rojo y la otra de color verde.

Para conocer si los estudiantes saben de afinación de notas musicales, pasa cada uno

en privado en orden de códigos para dar las respuestas de un diagnóstico acerca de la formulación de 3 preguntas iniciales basadas en todas las notas cromáticas de la música, a saber:

DO, DO#, RE, MIb, MI, FA, FA# ,SOL SOL#, LA, SIb, SI, DO.

Se golpean independientemente los dos grupos de notas, las de la caja roja primero, las de la caja verde después, o viceversa.

Formulación de preguntas:

1. ¿Dónde escucha mejor la escala musical básica?; es decir, cuando se golpean las notas sucesivas desde DO grave hasta DO aguda, a saber:

DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO,

¿en la caja roja o en la caja verde?

2. ¿Dónde escucha mejor la escala cromática?; es decir, cuando se golpean las notas sucesivas desde DO grave hasta DO aguda, a saber:

DO, DO#, RE, MI B, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, SI B, SI, DO,

¿en la caja roja o en la caja verde?

3. ¿Dónde escucha mejor la melodía “Cumpleaños feliz”?

Golpeando las notas: DO, DO, RE, DO, FA, MI,
DO, DO, RE, DO, SOL, FA
DO, DO, DO (aguda), LA, FA, MI, RE
SI b, SI b, LA, FA, SOL, FA,

¿en la caja roja o en la caja verde?

Código 9-1 Alexis:

Se inician las entrevistas semiestructuradas, basadas en la siguiente actividad.
Alexis, en primer lugar usted va a escuchar la escala musical básica tocada en estricto orden desde DO grave hasta DO aguda (8 notas) en cada caja de resonancia, roja o verde. Luego, va a escuchar la escala cromática tocada en estricto orden desde DO grave hasta DO aguda (13 notas) en cada caja de resonancia roja o verde, y finalmente Ud. va a escucharla y responderá en cuál de las dos escucha mejor la escala musical tradicional DO, RE, MI, FA, SOL, LA SI, DO (se hace un pequeño canto de la escala, o

tocando un xilófono totalmente afinado previamente).
Se inicia golpeando en la caja roja, luego en la caja verde, o viceversa para que concluya en cuál caja se escucha mejor de acuerdo al tipo de formulación de cada una de las 3 preguntas.

Así continúan pasando en privado los demás estudiantes, a quienes se les hacen las mismas preguntas, para que concluyan como lo hace Alexis, a saber:

Código 9-2 Leidy Marcela
Código 9-4 Brayan Antonio
Código 9-6 Yury Andrea
Código 9 – 3 Deyssi
Código 9 – 5 Genny Paola
Código 9 – 7 José Eduardo

Los resultados son los siguientes:

NOMBRE ESTUDIANTES	PREGUNTA I ESCALA BASICA		PREGUNTA II ESCALA CROMATIVA		PREGUNTA III CUMPLEAÑOS FELIZ	
	ROJA	VERDE	ROJA	VERDE	ROJA	VERDE
Alexis		X		X		X
Leidy Marcela		X		X		X
Deyssi		X		X	X	
Brayan Antonio		X		X	X	
Genny Paola		X		X		X
Yury Andrea	X			X	X	
José Eduardo		X	X			X

Para finalizar esta entrevista, se les hace la siguiente pregunta en privado a cada uno de los 7 estudiantes:

¿Encontró alguna dificultad, y por qué, para responder exactamente en dónde escuchaba mejor, si en la caja roja o en la caja verde?
Alexis: No encontré dificultad porque noté que la verde era la más afinada.

Leidy Marcela: No encontré dificultad, porque me di cuenta de que en la verde se escuchaban más agudas.

Deyssi: Encontré dificultades, porque escuchaba las notas como iguales.

Brayan Antonio: No encontré dificultad, porque noté diferencias de sonidos

Genny Paola: Encontré algunas dificultades, porque los sonidos eran similares.

Yury Andrea: No encontré dificultades, porque los sonidos eran diferentes.

José Eduardo: Encontré algunas diferencias de sonidos, y esa era la dificultad.

Conclusiones:

Se pudo observar que cuando se golpea una platina afinada y luego otra no afinada, el oído humano detecta en dónde está la nota afinada. En este caso experimental, se tuvo el resultado siguiente:

Pregunta 1: de los siete estudiantes, seis dijeron que está ubicada en la verde (afinada)

Pregunta 2: de los siete estudiantes, seis dijeron que está ubicada en la verde (afinada)

Pregunta 3: de los siete estudiantes, cuatro dijeron que está ubicada en la verde (afinada)

Cuando escucharon la melodía Cumpleaños Feliz, como es muy conocida, se desubicaron un poco, pero la mayoría concluyó que las notas afinadas estaban en la caja verde.

Con estos resultados, los estudiantes siguen motivados para preparase a posteriores actividades.

ACTIVIDAD MARTES 10 DE OCTUBRE

¿Qué tan precisos somos para definir una nota musical, que al tocarla corresponda a una nota patrón?

Materiales:

- Las 8 notas básicas de DO grave a DO aguda
- 1 caja de resonancia
- 1 percutor
- 1 diapasón con nota definida – LA -

Procedimiento:

Se extienden las 8 notas básicas de DO grave a DO aguda; se golpea una a una y se compara su sonido con el producido al golpear suavemente un diapasón de una nota

previamente definida, nota LA (conocida solamente por el profesor). El estudiante lleva al oído el diapasón y compara con el sonido producido por la nota básica.

Resultados:

Alexis: Descarta 6 notas y deja las notas LA y SI; finalmente dice que es la nota LA.

Leidy Marcela: Descarta 5 notas y deja las notas LA, SI, DO (aguda), finalmente dice que es la nota LA.

Deyssi: Descarta 6 notas y deja las notas SOL y LA. Afirma que es como la nota LA.

Brayan: Descarta las notas RE, MI, FA, y DO aguda. Inicialmente insiste que está entre las notas DO grave, SOL y SI; posteriormente dice que está entre las notas DO grave y SI, insistiendo que podía estar en la primera nota pero que parecía más como la nota SI.

Genny Paola: Descarta las notas DO grave, RE, MI, FA, DO alto; luego la nota SOL, y finalmente decide entre las notas LA y SI y afirma que es la nota LA.

Yury Andrea: No precisa cuál nota puede ser entre las 8 notas extendidas; finalmente dice “no sé”.

José Eduardo: Descarta 6 notas dejando las notas FA y LA, y dice que puede ser la nota FA o la nota LA.

Nota: Esta apreciación la tuvo José Eduardo porque musicalmente hablando las notas FA y LA forman un dúo armónico, así como también cada vez que se golpean al tiempo dos notas alternas, como por ejemplo: DO grave - MI, RE - FA, MI – SOL, SOL – SI, LA – DO alto.

Conclusión: Cuatro estudiantes identificaron la nota LA (A) en el diapasón, siendo esta la nota patrón, y además es la sexta nota del xilófono de 8 notas.

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 11 DE OCTUBRE

¿Qué tan precisos somos para definir la medida de una platina de aluminio correspondiente a una nota musical?

Materiales:

- 1 flexómetro
- 1 calibrador
- 1 nota DO (grave)

Procedimiento 1:

Se pregunta:

1. ¿Alguna vez han tomado medidas para cortar un trozo de metal utilizando la segueta y la lima?

Todos contestaron que no.

2. ¿Alguna vez han utilizado un metro para medir objetos en centímetros?

Todos contestaron que sí.

3. ¿Alguna vez han medido con un metro para precisar objetos que indiquen centímetros con milímetros?

La mayoría contestaron que sí.

4. ¿Alguna vez han medido con un metro para precisar objetos que indiquen centímetros con milímetros y a su vez con décimas de milímetro?

Todos contestaron que no.

Se concluyó que los estudiantes han tomado medidas que indiquen centímetros con milímetros, pero ninguno ha tomado medidas que indique centímetros con milímetros y a su vez con décimas de milímetro, y que no conocen el manejo de un calibrador que les pueda indicar una medida de esta característica, como por ejemplo: 12,20 cm, 12.25 cm.

Procedimiento 2:

Se da a conocer un trozo de platina con una medida (X) previamente conocida sólo por el profesor (11,93 cm.). Se pregunta a cada estudiante: ¿cuánto mide la nota DO grave? La medida la deben dar en centímetros y décimas de centímetro.

Se aclara que por experiencia cuando se cortan notas de platinas de aluminio de una misma referencia P-12 (3/4 pulg. ancho x 1/8 pulg. espesor) o referencia P-18 (1 pulg. ancho x 1/8 espesor) o P-19 (1 pulg. ancho x 3/16 espesor), una nota determinada

puede variar inclusive en décimas de centímetro, porque depende de los lotes de producción de las platinas procedentes de las fábricas y aún más si se cambia de marca de aluminio.

Los resultados fueron:

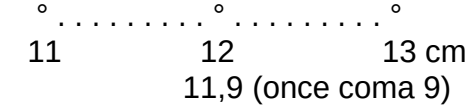
Alexis	12,1 cm
Leidy Marcela	11,7 cm
Deyssi	12,1 cm
Brayan	12,0 cm
Genny	11,7 cm
Yury Andrea	12,0 cm
José Eduardo	12,0 cm

Conclusión:

La mayoría de las respuestas es 12,0 y la medida patrón es de 11,93 cm siendo 12,0 la respuesta más cercana a la real, concluyendo que a todos les falta experiencia para precisar medidas.

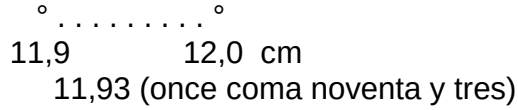
Finalmente se les hizo un dibujo para que comprendieran cómo se lee una medida en el metro con décimas y centésimas de centímetro. Se le dibujó el zoom de 1 centímetro y comprendieron cómo leer 11,93 cm en el metro y luego en un calibrador.

El siguiente es el dibujo del zoom de 1 cm ubicado entre 11 cm y 12 cm



Quedando 11,9 cm en la raya 9 entre 11 y 12 cm.

El zoom de un milímetro (10 veces agrandado) que está ubicado entre 11,9 y 12,0 cm:



Queda 11,93 cm ubicado muy aproximadamente a la vista en la tercera parte de un milímetro entre la raya 9 después de 11 cm y la raya 10 (coincidente con 12 cm).

De esta forma, todos los estudiantes tuvieron una bonita experiencia de conocer cómo

ser más precisos al tomar una medida, y enseguida se les dio a conocer el calibrador y con ayuda de una lupa vieron cómo se precisan claramente décimas y centésimas de centímetro.

ACTIVIDAD MARTES 17 DE OCTUBRE

El Centro Educativo la Victoria programó para la semana comprendida entre el martes 17 y el jueves 19 de octubre la semana cultural integrando las 4 sedes: La Victoria, Zaragoza, Sardinas y Filo de Cruces. Se había planeado no interrumpir las actividades del proyecto de investigación en cualquier momento de este día martes, pero por motivos de fuerte aguacero de 3 horas, no pudimos ir los profesores a la vereda de Zaragoza donde se iniciaba la semana cultural; por lo tanto, se programó la actividad con los estudiantes de noveno para el siguiente día.

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 18 DE OCTUBRE

¿Qué tan precisos somos para realizar cortes de notas musicales para un xilófono partiendo de una platina de aluminio utilizando la segueta y otros elementos?

Materiales:

- 1 tramo de 1,50 m de platina ref. P-18 (1 pulg. ancho x 1/8 pulgada espesor)
- 1 tabla de valores previos para cortes
- 1 mesa de madera
- 1 segueta
- 1 flexómetro
- 1 calibrador
- 1 lápiz con buena punta
- 1 escuadra
- 1 lima

Procedimiento:

Los estudiantes dispusieron de una mesa alargada donde se apoyó la platina de aluminio, esta vez de referencia P-18 (1 pulg. ancho x 1/8 pulg. espesor), un flexómetro, una segueta, un lápiz con punta fina, una escuadra, una lima y una tabla de medidas de las notas musicales básicas.

Los estudiantes cortaron las 8 notas que conforman la escala básica.

ESTUDIANTES	NOTA	MEDIDA REAL (cm)	MDIDA CORTE (cm)	DIFERENCIA (cm)
Alexis	**DO grave (C)**	**12,15**	**11,97**	**-0,18**
Leidy Marcela	**RE (D)**	**11,46**	**11,31**	**-0,15**
Deyssi	**MI (E)**	**10,80**	**10,64**	**-0,16**
Brayan Antonio	**FA (F)**	**10,49**	**10,33**	**-0,16**
Genny Paola	**SOL (G)**	**9,89**	**9,87**	**-0,02**
Yury Andrea	**LA (A)**	**9,32**	**9,22**	**-0,10**
José Eduardo	**SI (B)**	**8,79**	**8,63**	**-0,16**
José Eduardo	**DO aguda (C)**	**8,54**	**8,39**	**-0,15**

Conclusión:

Después de la instrucción acerca de cómo tomar medidas precisas para efectuar cortes en un tramo de aluminio, cada estudiante tomó para el corte la medida de la nota que le correspondió. Cortaron este día las notas de un xilófono básico que al interpretar melodías conocidas se oían aparentemente afinadas, pues las variaciones estuvieron entre 1 y 2 décimas de centímetro por debajo; así por ejemplo, Alexis presentó la mayor desviación en el corte de la nota DO grave, debía ser 12,15 y cortó 11,97 cm, 18 centésimas por debajo. Genny Paola precisó mejor el corte en la nota SOL, quedando sólo con 2 centésimas por debajo.

Esta fue una primera experiencia donde los estudiantes utilizaron los elementos: metro, segueta, lápiz (punta fina), escuadra y lima. Fue muy interesante, ya que pudieron escuchar melodías en estas 8 notas.

FASE I - TALLER II

MODELANDO UNA FUNCIÓN LINEAL PARA NOTAS MUSICALES

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 25 DE OCTUBRE

Objetivo: Graficar la función lineal tomando las medidas de las notas musicales cromáticas de la caja roja

Estándar: “Reconoce una función lineal, construye su gráfica en el plano cartesiano y halla sus principales atributos (pendiente, intersecciones con los ejes, etc.)”. Ministerio de Educación Nacional

Materiales

- Calibrador
- Papel milimetrado
- Lápiz y micropunta
- Tabla de datos

Procedimiento

Con base en la actividad desarrollada los días martes 3 y miércoles 4 de octubre, los estudiantes tomaron las medidas de las notas cromáticas de la caja roja obteniendo los siguientes datos:

DO = 12,2	**DO sostenido = 11,9**
RE = 11,6	**MI bemol = 11,3**
MI = 11,0	
FA = 10,7	**FA sostenido = 10,4**
SOL = 10,1	**SOL sostenido = 9,8**
LA = 9,5	**SI bemol = 9,2**
SI = 8,9	
DO = 8,6	

Se solicitó a los estudiantes hacer una gráfica en el plano cartesiano con los siguientes datos:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(x)	12,2	11,9	11,6	11,3	11,0	10,7	10,4	10,1	9,8	9,5	9,2	8,9	8,6

Luego se les pidió hallar la ecuación de esta función lineal

Resultados:

Los tres grupos localizaron correctamente los puntos, utilizando para el efecto papel milimetrado.

Conclusión

Después de repasar los estudiantes el tema visto en clase al comienzo del III período sobre la función lineal, donde $f(x) = mx + b$, obtuvieron el logro de graficarla. También pudieron observar que el valor de la pendiente m corresponde a la diferencia constante de los cortes entre notas sucesivas, es decir, de –0,30, porque cada vez iba disminuyendo 0,3 cm. y los valores de x correspondían al orden de los cortes de cada nota cromática.

X = 0 posición de la nota C = DO 1 (do grave)
X = 1 posición de la nota C# = DO sostenido
X = 2 posición de la nota D = RE
X = 3 posición de la nota Eb = MI bemol
X = 4 posición de la nota E = MI
X = 5 posición de la nota F# = FA
X = 6 posición de la nota F = FA sostenido
X = 7 posición de la nota G = SOL
X = 8 posición de la nota G# = SOL sostenido
X = 9 posición de la nota A = LA
X = 10 posición de la nota Bb = SI bemol
X = 11 posición de la nota B = SI
X = 12 posición de la nota C = DO 2 (do aguda)

Y finalmente, que el valor de b corresponde al corte con el eje Y, es decir, 12,2 cm, quedando la ecuación de la recta, así:
$f(x) = -0,3x + 12,2$
Pudieron comprobar que cualquier nota se ajustaba a un modelo lineal, y dieron como ejemplo que el valor de la nota La (A),correspondió en el eje X = 9, y reemplazaron:

$$f(x) = -0,3\ (9) + 12,2\ ,$$

$$f(x) = -2,7 + 12,2 ,$$

$$f(x) = 9,5 .$$

Se concluyó finalmente que los estudiantes cumplieron con el estándar esperado.

FASE II

PROBANDO LA HIPÓTESIS DEL MODELO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 1 DE NOVIEMBRE

Objetivo: Descubrir mediante el uso del afinador electrónico cromático el grupo de notas que corresponden a un modelo exponencial

Materiales:

- Notas cromáticas de la caja roja (actividad días 3 y 4 de octubre)
- Notas cromáticas de la caja verde (actividad días 3 y 4 de octubre)
- Afinador electrónico cromático (marca Belcat BC-850), en perfecto estado de funcionamiento.
- 2 percutores

Procedimiento:

Ubicadas todas las notas cromáticas de las cajas roja y verde y con la participación de los siete estudiantes, ellos golpearon una a una y muy cerca del afinador, comenzando por las de la caja roja, dando como resultado que estas notas mostraron en su mayoría la aguja en el registro del afinador hacia el lado izquierdo –50 a 0 cents (bemol, tendencia grave en su sonido), y con una luz roja, y aunque mostraba la letra correspondiente a la nota esperada todas las veces que se tocaba; mostró cents que fueron negativos, estableciéndose que las notas no estaban afinadas. Estas notas correspondieron al modelo lineal, porque la diferencia de longitudes de las notas era una constante de –0,3 cm.

Acto seguido golpearon las notas de la caja verde; el afinador mostró la aguja centrada, quiere decir, 0 cents de desviación con una luz verde; indicaba siempre la letra correspondiente a la nota que se tocaba, probando que estaban afinadas. Como la diferencia de las medidas de longitudes de las notas era cada vez menor y el cociente de las notas es constante, estas notas corresponden a un modelo no lineal, en este

caso, el modelo exponencial.

Se explicó a los estudiantes que cuando la nota está grave, indica luz roja y la aguja del afinador se ubica entre –50 cents y 0 (bemol); y cuando la nota está aguda, indica luz roja y la aguja se ubica entre 0 y +50 cents (sostenido)

A continuación aparece la tabla que muestra los resultados en el registro del afinador cuando se golpean las notas, tanto de la caja roja, como de la caja verde.

Nombre Estudiante	Nota	medida caja roja	registro afinador	luz	medida caja verde	registro afinador	Luz
Alexis	**DO**	**12,20**	**C**	**V**	**12,20**	**C**	**V**
	DO#	**11,90**	**C# - 5 cents**	**R**	**11,85**	**C#**	**V**
Leidy Marcela	**RE**	**11,90**	**D-10 cents**	**R**	**11,52**	**D**	**V**
	MI b	**11,30**	**D#-15 cents**	**R**	**11,19**	**D#**	**V**
Deyssi	**MI**	**11,00**	**E-25 cents**	**R**	**10,87**	**D**	**V**
Brayan Antonio	**FA**	**10,70**	**F-35 cents**	**R**	**10,56**	**F**	**V**
	FA#	**10,40**	**F#-40 cents**	**R**	**10,26**	**F#**	**V**
Genny Paola	**SOL**	**10,10**	**G- 35 cents**	**R**	**9,97**	**G**	**V**
	SOL#	**9,80**	**G#-25 cents**	**R**	**9,,68**	**G#**	**V**
Yury Andrea	**LA**	**9,50**	**A-15 cents**	**R**	**9,41**	**A**	**V**
	SI b	**9,20**	**A#-10 cents**	**R**	**9,14**	**A#**	**V**
José Eduardo	**SI**	**8,90**	**B-5 cents**	**R**	**8,88**	**B**	**V**
	DO	**8,60**	**C+ 5 cents**	**R**	**8,63**	**C**	**V**

Conclusión: Los estudiantes quedaron muy motivados por la experiencia de comprobar cuándo una nota estaba afinada y cuándo no lo estaba; esto los llevó a examinar con las notas que cortaron el día18 de octubre qué tan acertados estuvieron, observando el registro en la pantalla del afinador, para lo cual cada estudiante pasó a golpear la nota en completo silencio arrojando los siguientes resultados:

ESTUDIANTE	NOTA	REGISTRO PANTALLA AFINADOR	LUZ
Alexis	**NOTA C = DO**	**C + 35 cents**	**R**
Leidy Marcela	**NOTA D = RE**	**D + 30 cents**	**R**
Deyssi	**NOTA E = MI**	**E + 35 cents**	**R**
Brayan Antonio	**NOTA F = FA**	**F + 35 cents**	**R**
Genny Paola	**NOTA G = SOL**	**G + 5 cents**	**R**
Yury Andrea	**NOTA A =LA**	**A + 35 cents**	**R**
José Eduardo	**NOTA B = SI**	**C - 40 cents**	**R**
José Eduardo	**NOTA C = DO (aguda)**	**C# - 40 cents**	**R**

Conclusión: La estudiante que cortó más cercano a la realidad fue Genny Paola, con muy poca desviación en cents, mientras que José Eduardo se alejó más, tanto que las notas SI y DO resultaron muy agudas. No obstante, cuando escucharon la melodía Mi Cafetal –del folclor costeño- ,a pesar de estar un poco desafinadas las notas, lograron identificar la melodía, motivo por el cual los estudiantes quedaron satisfechos.

Como se pudo investigar en la experiencia, cabe aclarar lo siguiente: cuando la diferencia en la medida de corte es igual entre dos notas de distinto sonido, presenta mayor desviación en cents la nota más aguda, y en caso contrario, presenta menor desviación en cents la nota mas grave. Si la medida resulta ligeramente por encima de la medida real, el registro del afinador electrónico muestra cents negativos, - 50 a + 0 cents; y si está ligeramente por debajo, muestra cents positivos, 0 a + 50 cents, y en ambos casos aparece la letra correspondiente a la nota que se desea cortar. Si la diferencia de corte no es tan ligera y está por encima de la medida real, puede aparecer en el registro la letra de la nota cromática anterior -grave- con cents positivos, caso contrario, que esté por debajo de la medida real, puede aparecer en el registro la letra de la nota cromática posterior -aguda- con cents negativos.

Obsérvese en el caso de José Eduardo, a quien le correspondió efectuar cortes para las notas más agudas y de ahí que la letra que salió en la pantalla fue la correspondiente a la siguiente nota y la aguja marcó su signo negativo, a pesar de que la diferencia de medida en el corte fue similar a las de Leidy y Deyssi, con 15 centésimas por debajo, porque la notas que le correspondieron a José Eduardo son más agudas, presentando mayor desviación en cents.

ACTIVIDAD MIERCOLES 8 DE NOVIEMBRE

Objetivo: Graficar la función exponencial teniendo una tabla de datos correspondiente a notas afinadas de platina de aluminio ref. P-19

Estándar aplicado: “Reconoce una función exponencial, construye su gráfica en el plano cartesiano, describe sus características e identifica sus componentes principales” (Ministerio de Educación Nacional)
Materiales: papel milimetrado;
Lápiz, micropunta;
Tabla de datos tomados de 13 notas cromáticas afinadas.

Procedimiento: Llegaron 6 estudiantes a clase y cada uno trabajó en su hoja milimetrada con lápiz de buena punta, teniendo en cuenta la tabla con los 13 datos ; finalmente resaltaron la gráfica con micropunta en el plano cartesiano.

Conclusiones:

- Los estudiantes comprobaron que con las notas afinadas al medirlas con un calibrador, se obtenían las medidas que correspondían con la tabla de datos, y por lo tanto confiaron en la gráfica obtenida en el plano cartesiano. No obstante, les faltó un poco de estética en la presentación.

- Establecieron que al unir los puntos extremos nota DO grave con medida 15,02 y DO aguda con medida 10,62 en línea recta, en el trayecto de los puntos intermedios encontraron una ligera curvatura en forma descendente y cóncava hacia arriba.

- También notaron que la curva de la función hizo corte con el eje Y con el valor 15,02 y los otros valores de Y iban disminuyendo hasta llegar a 10,59, dando ligera curvatura para cada valor en el eje X desde 0 hasta 12.

- La alumna Deyssi faltó este día a clase, pero realizó su gráfica con mejor estética en fecha posterior, con resultado similar al de sus compañeros.

MIÉRCOLES 15 DE NOVIEMBRE

Hubo programación de actividades académicas con relación a evaluaciones de fin de año en todas las áreas. Se le explicó a cada uno de los estudiantes de 9º grado uno de los temas pendientes, la ecuación cuadrática y las posibles soluciones con 2 raíces.

MIERCOLES 22 DE NOVIEMBRE

Se realizó la evaluación de matemáticas para los grados de 8º y 9º con excepción del estudiante Alexis Bueno por accidentarse en moto el pasado 19 de noviembre.

Dentro de las preguntas de 9º estaba incluida la siguiente:

En el proyecto de investigación: “La relación entre las notas musicales y las matemáticas: una herramienta para comprender la función exponencial”, se han desarrollado talleres a excepción de uno de ellos. Cuál falta aplicar?
a) Diagnóstico acerca del conocimiento de los sonidos de notas musicales utilizando notas cromáticas, diapasón y afinador electrónico.

b) Apropiación acerca de tomar medidas precisas en centímetros, décimas y centésimas para una buena toma de datos en los diferentes cortes de platinas para obtener notas musicales.

c) Uso de papel milimetrado para graficar función lineal y función exponencial,

tabulando datos obtenidos según cada caso.

d) Uso de la calculadora graficadora para introducir una matriz de datos y obtener la gráfica y la ecuación de la función mediante regresiones lineal y exponencial.

Conclusión:

- La pregunta permitió medir a los estudiantes sus conocimientos e interés, pues todos acertaron la respuesta.

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 29 DE NOVIEMBRE

Objetivo: Encontrar la relación que existe entre las longitudes de las notas musicales cromáticas, cuando están bien afinadas.

Materiales: 13 notas cromáticas de DO grave a DO aguda
1 tabla de medidas
1 afinador electrónico
1 calibrador

Tabla de medidas (en cm con 2 cifras decimales), teniendo en cuenta la denominación internacional para las notas, desde la letra A hasta la letra G.

Nota	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	C
Medida	15,02	14,59	14,18	13,77	13,38	13,00	12,63	12,27	11,92	11,58	11,25	10,93	10,62

Procedimiento: Se organizaron en 3 grupos, así:

Grupo 1: Yury Andrea y Deyssi
Grupo 2: Leidy Marcela y Genny Paola
Grupo 3: José Eduardo y Brayan Antonio

Como los estudiantes de 6º grado no estaban en clase, aprovechamos éste salón para la actividad, en razón de que en este día el salón de 8º y 9º (uno sólo para ambos grados) estaba ocupado con una jornada médica veredal.

Conclusiones:

- Yury y Deyssi concluyeron utilizando los algoritmos de restas sucesivas, en donde no encontraron constante, pero observando que su valor absoluto cada vez se iba haciendo menor. Cuando llegaron a la división, concluyeron que se presentó una constante 0,971.

- Leidy Marcela y Genny Paola utilizaron los algoritmos de resta, suma, multiplicación y división. No concluyeron qué había pasado con la resta, suma o multiplicación entre cada par de datos, mostrando resultados todos diferentes. Finalmente cuando utilizaron la división mostraron un cociente igual a 0,971.

- José Eduardo y Brayan Antonio utilizaron resta, y concluyeron que los resultados no son constantes. Utilizaron divisiones y concluyeron que los resultados si son constantes dividiendo. Les faltó escribir que la constante es 0,971, aunque sí se observó en los cocientes.

- Sigue faltando el estudiante Alexis por la incapacidad médica presentada.

- Con ayuda del calibrador, los estudiantes pudieron comprobar que los datos de la tabla coincidieron en sus medidas y que estas notas estaban bien afinadas, puesto que el afinador electrónico mostró luz verde al golpear en cada una de las notas.

- Finalmente se concluyó que los estudiantes cumplieron con un estándar de 9º grado dentro de los procesos matemáticos de la parte b, razonamiento matemático: “Explica y justifica cómo llegó a una conclusión o a la solución de un problema” (Ministerio de Educación Nacional).

FASE III

MODELACIÓN FINAL, INTRODUCIENDO MATRIZ DE DATOS A LA CALCULADORA GRAFICADORA PARA OBTENER LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES LINEAL Y EXPONENCIAL

Actividad viernes 1, lunes 4 y martes 5 de diciembre.

OBJETIVO: Utilizar la calculadora graficadora para visualizar y analizar las diferentes formas de representación (tabla, gráfica, expresión algebraica) de las funciones lineal y exponencial.

ESTÁNDAR: “Utiliza de manera creativa una calculadora científica o graficadora para llevar a cabo experimentos, probar conjeturas y resolver problemas” (Ministerio de Educación Nacional).

Materiales:

- Calculadora graficadora
- Tabla de datos para introducir una matriz (modelo lineal)
- Tabla de datos para introducir una matriz (modelo exponencial)
- Guía de clase para comprender los pasos necesarios que faciliten el manejo de la calculadora graficadora)
- Expógrafo y marcador

Procedimiento:

Se dio a conocer a los estudiantes sobre herramientas de las nuevas tecnologías que facilitan la comprensión matemática de una manera divertida. Con este proyecto de investigación, los estudiantes se concentraron en la práctica de los pasos necesarios para facilitar el uso de la calculadora graficadora.

Tabla de datos utilizada para introducir matriz de datos (modelo lineal y modelo exponencial)

Data	Corte	Lineal	Exponencial
	C1	C2	C3
1	0	12,2	12,20
2	1	11,9	11,85
3	2	11,6	11,52
4	3	11,3	11,19
5	4	11,0	10,87
6	5	10,7	10,56
7	6	10,4	10,26
8	7	10,1	9,97
9	8	9,8	9,68
10	9	9,5	9,41
11	10	9,2	9,14
12	11	8,9	8,88
13	12	8,6	8,63

GUÍA DE CLASE

OBJETIVO: Comprender de manera fácil y amena los pasos necesarios que deben seguir los estudiantes de 9º grado para introducir los datos que modelan una función lineal, una función exponencial y llegar a obtener las ecuaciones de la función y las gráficas correspondientes con los datos previamente obtenidos de las longitudes de las notas musicales cromáticas, de talleres anteriores.

Procedimiento:

Actividad A:

Para el modelo lineal, los estudiantes tuvieron en cuenta el primer dato, medida 12,2 cm correspondiente a la nota DO 1 (grave), afinada. Los demás datos disminuían en 0,3 cm cada longitud de nota hasta llegar al dato No.13, medida 8,60 cm correspondiente a la nota DO 2 (aguda), casi afinada.

Los datos correspondientes aparecen en la tabla anterior.

Para el modelo exponencial, partiendo de la nota DO 1 (grave, afinada en la medida de 12,20 cm) aplicaron la constante 0,97153, descubierto en la clase del 29 de noviembre, multiplicando cada una de las longitudes de las notas sucesivas cromáticas hasta llegar al dato No. 13, nota DO 2 (aguda) en la medida de 8,63 cm, afinada, al

igual que las demás 11 notas cromáticas. Los datos correspondientes aparecen en la misma tabla.

Pudieron comprobar nuevamente con el afinador electrónico cromático, para el modelo lineal, que el registro del afinador mostraba la aguja hacía la izquierda, cents negativos: luz roja en todas las notas con excepción de la primera, punto de partida objeto de estudio. En cambio, con las notas cromáticas de la segunda parte de la tabla (modelo exponencial) el registro del afinador mostró la aguja centrada, desviación 0 cents: luz verde en todas las notas.

Como esto sucedió, se procedió para que los estudiantes comenzaran a conocer los pasos necesarios que los llevó a practicar de manera fácil y amena el uso de la calculadora graficadora.

Actividad B: (I parte, modelo lineal)

Pasos claves para introducir matriz de datos modelo de función lineal y exponencial

- Se prende la calculadora graficadora con la tecla ON
- APPS → 6 → Data/matrix editor → 1 current
- Se ubica en la celda correspondiente a la fila 1 y columna 1 (C1), digita los valores correspondientes a la variable X (parte con 0 en el dato 1 y termina con 12 en el dato 13)
- Se ubica en la celda correspondiente a la fila 1 y columna 2 (C2), digita los valores correspondientes a la variable Y (inicia con el dato No. 1 igual a 12,2 para la nota DO 1 (grave) y termina con el dato No. 13 igual a 8,6 para la nota DO 2 (aguda)
- Pulsar F2 →(se busca plot desocupado)
- Pulsar F1 → x → c1
  → y → c2 → enter
- Pulsar F5 → buscar tipo de regresión de la función (calculation type) (en este caso 5 lineal reg → x → c1
  → y → c2 → none → ratón a la derecha buscar y1 (x) doble enter
- Aparece en la pantalla la ecuación de la función lineal
  Y = ax + b
  Siendo a el valor de la pendiente –0,3
  b el valor independiente corte con el eje y = 12,20
  x el valor de orden de la nota cromática de 0 a 12 (número entero)

aparece otra información como correlación –1,0 (correlación ajustada la expresión algebraica de la función lineal)

- Para visualizar la gráfica se pulsa diamante graph
- F2 en 9, zoom data: se visualiza la animación de la función lineal donde aparecen

los puntos correspondientes a los 13 datos.

Actividad C (II parte, modelo exponencial)

Se realizan los pasos muy similares efectuados en la actividad B con algunas diferencias:

- Los 3 primeros pasos de la actividad B, y continua.

- Se ubica en la celda correspondiente a la fila 1 y columna 3 (C3) y digita los valores correspondientes a la variable Y (parte con 12,2 para la nota DO 1 (grave) y termina con la nota DO 2 (aguda) dato 13 en 8,63
- Pulsar F2 → plot 2 (desocupado)
- Pulsar F1 → x → c1
  → y → c3 → enter
- Pulsar F5 → buscar tipo de regresión de la función (calculation type) (en este caso 5 expreg → x → c1
  → y → c2 → none → ratón a la derecha buscar y2 (x) doble enter
- Aparece en la pantalla la ecuación de la función exponencial

$$Y = ab^{x}$$

Siendo a = valor de la longitud de la nota DO 1 (grave) = 12,20
b = valor de la constante 0,971541
x = valor de orden de la nota cromática de 0 a 12

aparece otra información como correlación –1,0 (quiere decir que se ajusta muy bien la expresión algebraica a la función exponencial).

- Para visualizar la gráfica se pulsa diamante graph
- F2 en 9, zoom data se visualiza la animación de la función exponencial donde aparecen los 13 datos.

Actividad D:

Participación de los estudiantes en el uso de la calculadora graficadora, para obtener las gráficas de las funciones lineal y exponencial. Esta actividad se puede ver en un video realizado el martes 5 de diciembre.

Deyssi: Utilizó dos marcadores para escribir las tablas de los valores que conforman las matrices de datos, así: con color rojo los correspondientes para el modelo lineal y con color azul los correspondientes al modelo exponencial . De esta manera, los demás compañeros notaron las diferencias de valores en las 2 tablas, para la lineal y la

exponencial.

José Eduardo: Pasó al frente del tablero junto con la calculadora graficadora, lo mismo hizo Brayan Antonio.

Conclusiones:

- Deyssi, al igual que Genny Paola mostraron interés en aprender nuevas tecnologías y lograron introducir matriz de datos para ambos modelos lineal y exponencial.

- Brayan Antonio: demostró a sus compañeros que pudo obtener tanto la función lineal como la función exponencial.

- José Eduardo: también participó activamente y logró después de introducir los datos obtener las gráficas de las funciones lineal y exponencial. Aparece en una foto y en el video que registra este momento.

- Leidy Marcela y Yury Andrea pudieron observar que las expresiones algebraicas se pueden obtener exactamente cuando se introducen los datos correctamente a las respectivas celdas como si se estuviera trabajando en el programa excel del computador.

- Alexis estaba aún incapacitado el día 5 de diciembre, pero logró aprender los pasos necesarios para introducir los datos y llegar a ver las gráficas lineal y exponencial en dos clases recibidas a domicilio en el apartamento de una tía; la primera clase recibida el 28 de noviembre por encontrarse en recuperación del trauma del accidente, y la segunda el domingo 3 de diciembre. Le pareció muy interesante aprender nuevas tecnologías (calculadora graficadora). Aparece en una foto.

FASE IV

EVALUACIÓN

Trabajo colaborativo de grupo en busca del desarrollo de la realización de los pensamientos métrico, numérico y geométrico previos al desarrollo del pensamiento variacional a través de los talleres durante las 3 primeras fases que tuvo el proyecto de investigación.

Desde el día 3 de octubre, fecha cuando iniciaron las actividades, y hasta el día 5 de diciembre, fecha cuando terminaron, se evaluó a los 7 estudiantes por su participación y aprendizaje tanto individual como grupal. También se tuvo en cuenta el trabajo colaborativo.

Evaluación en el diagnóstico acerca de conocimiento de sonidos de notas musicales.

- En las actividades de los días 3 y 4 de octubre, cuando los siete estudiantes respondieron muy bien a las entrevistas semiestructuradas.

- El día 10 de octubre, cuando se realizó la actividad: ¿Qué tan precisos somos para definir una nota musical, que al tocarla corresponda a una nota patrón?

Todos estuvieron atentos a golpear el diapasón con la nota definida LA y la mayoría acertó que era la nota LA correspondiente al conjunto de notas básicas de un xilófono coincidiendo con la nota patrón LA del diapasón.

- El día 11 de octubre se realizó la actividad: ¿Qué tan precisos somos para definir la medida de una nota musical cortada de una platina de aluminio?

Al principio pude darme cuenta de que todos tenían muy poco conocimiento o casi nada acerca de la utilización de un calibrador para tomar medidas precisas en centímetros, milímetros y hasta décimas de milímetro partiendo de un objeto (en este caso la longitud de un trozo de platina de aluminio). Fue necesario practicar hasta observar que la medida 11,93 se pudo leer en el calibrador.

- El día 18 de octubre se realizó la actividad de cortar notas musicales partiendo de una platina de aluminio.

Gustó la buena precisión que tuvieron, siendo esta la primera vez que un estudiante de 9º grado realiza la operación. Participaron los 7 estudiantes con buenos resultados.

Evaluación en la fase I probando la hipótesis del modelo de la función lineal.

- El día 25 de octubre se realizó la actividad de graficar la función lineal tomando las medidas de las notas musicales cromáticas de la caja roja (notas no afinadas). Verificaron las medidas con el calibrador para darse cuenta que disminuía en 0,3 cm la longitud de la nota.

Trabajaron individualmente y en grupos, y dibujaron la gráfica en papel milimetrado de la función lineal, y como se les había pedido que hallaran la ecuación de la función lineal, comprendieron la pendiente y el término independiente para escribirla.

Evaluación en la fase II probando la hipótesis del modelo de la función exponencial.

- El día miércoles 1 de noviembre se inicia con la actividad: comprobación de afinación de notas utilizando el afinador cromático electrónico, y a su vez las notas cortadas por los estudiantes el día 18 de octubre.

Muy entusiasmados todos al ver este pequeño instrumento electrónico muy sensible a los sonidos por el movimiento de la aguja y la presencia de luz roja o verde en la pantalla. Comprendieron que cuando la nota está un poco grave su registro está entre –50 y 0 cents. Y cuando la nota está un poco aguda su registro está entre 0 y +50 cents. Comprendieron que si la nota estaba afinada, su registro daba luz verde (0 cents.), y de lo contrario cuando está entre –50 y 0 cents. Su registro daba luz roja, al igual que cuando está entre 0 y + 50 cents.

- El día miércoles 8 de noviembre cumplieron con el trabajo propuesto de graficar en una hoja milimetrada la función exponencial.

- El miércoles 22 de noviembre hubo evaluación general de matemáticas a todos los estudiantes de los grados 8º y 9º del Centro Educativo La Victoria, y entre estas preguntas se efectuó una relacionada con el proyecto de investigación.

Se evaluó en forma aislada al estudiante Alexis Bueno por la incapacidad médica al haberse accidentado en una moto.

- El miércoles 29 de noviembre se evaluó a los estudiantes al encontrar la relación que existe entre las notas musicales cromáticas cuando estaban bien afinadas. Se tuvo en cuenta otra referencia de platina de mayor espesor, la cual también cumplió la norma de encontrarse sus medidas sujetas a la forma exponencial. Se les dio tabla de valores, y los 3 grupos deliberaron para concluir que existe la constante de 0,971 que las

relacionaba.

Evaluación en la fase III: modelación final, introduciendo matriz de datos a la

calculadora graficadora para obtener las gráficas de las funciones lineal y exponencial

- El viernes 1 de diciembre los estudiantes comenzaron a recibir la inducción acerca del conocimiento de nuevas tecnologías, y entre ellas la de cómo usar la calculadora graficadora. Finalmente el martes 5 de diciembre aprendieron los pasos necesarios para introducir una matriz de datos y obtener las gráficas lineal y exponencial, y sus expresiones algebraicas. José Eduardo, Brayan Antonio y Deyssi colaboraron en esta última actividad; sin embargo, con la realización del video todos mostraron entusiasmo, y aunque al principio se presentaron algunas dificultades en la secuencia de pasos, luego fueron superadas.

6. CRONOGRAMA

Actividad	semanas	Julio		Agosto				Septiembre				Octubre				Noviembre				Diciembre	
		3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Ref. bibliográfica																					
Elaboración Inicial																					
Diseño Talleres																					
Aplicación Talleres Fases 1 a 4																					
Conclusiones Talleres																					
Elaboración Y Presentación Final proyecto																					

FASE V

7. CONCLUSIONES

Mi experiencia desarrollada en la propia microempresa denominada Industrias PIM, desde el año 1991 y hasta la fecha, sirvió para llevar a cabo la realización del Proyecto de Investigación de aula con los siete estudiantes de 9º del Centro Educativo La Victoria, sede A, donde trabajo como docente.

El grupo de estudiantes de 9º grado compartió clases en un mismo salón junto con los 8 estudiantes de 8º grado, y esto no fue motivo para que se interrumpiera en ningún momento el desarrollo de clases para terminar con éxito el proyecto.

El trabajo con los estudiantes de 9º grado arrojó resultados positivos en la comprensión de las funciones lineal y exponencial mediante los datos tomados de cortes de platinas de aluminio, ref. P-18, en todas las notas musicales cromáticas y para cada caso, llegando a obtener un buen diagnóstico acerca del conocimiento de los sonidos de las notas musicales, punto de partida en el proyecto de investigación.

Durante todos los talleres, los estudiantes desarrollaron los pensamientos métrico, numérico, geométrico y variacional. Aprendieron a leer medidas con décimas y centésimas de centímetro en un calibrador; conocimiento que ninguno de ellos tenía anteriormente. Esta experiencia fue muy importante para mejorar el pensamiento métrico, involucrado de gran manera para una buena toma de datos.

Los estudiantes aprendieron a cortar con segueta trozos de aluminio (notas musicales) que los llevó a la construcción de un instrumento musical, utilizando platina de aluminio ref. P-18 (platinas de 1 pulg. ancho x 1/8 pulg. espesor).

Los estudiantes comprobaron con el afinador electrónico cromático que con las notas afinadas ref. P-18 o con las notas afinadas ref. P-19 (platinas de 1 pulg. ancho x 3/16 pulg. espesor) que el registro mostraba la aguja centrada - 0 cents de desviación, - afinación total.

También pudieron comprobar que sus medidas estaban relacionadas con la constante 0,971 para cualquier referencia de platina, descubierta en clase del 29 de noviembre; así por ejemplo, multiplicando el dato de la medida de la nota DO grave por la constante 0,971, sucesivamente obtenían las medidas de las demás notas cromáticas.

También, se comprobó que si se desea llegar a la medida de la nota SI grave (para la

expresión algebraica x = -1), se parte del dato de la medida de la nota DO y se divide entre 0,971, porque entre DO grave y SI grave no hay nota intermedia. De esta manera se concluye el título del proyecto de investigación: “ La relación entre las notas musicales y las matemáticas: una herramienta para comprender la función exponencial ”.

Los estudiantes trabajaron con la constante real de 0,97153 para encontrar las medidas, con las cuales crearon una matriz datos en la calculadora graficadora.

Los estudiantes comprendieron los pasos necesarios para llegar a encontrar la expresión algebraica

$f(x) = ab^{x}$ y su gráfica de la función exponencial.

A su vez, diferenciaron cuando introdujeron otra matriz de datos para encontrar la expresión algebraica

$f(x) = ax + b$ y su gráfica de la función lineal.

Los estudiantes de 9º grado Alexis, Leidy Marcela, Deyssi, Brayan Antonio, Genny Paola, Yury Andrea y José Eduardo, trabajaron en la entrega de trabajos durante el desarrollo de talleres, y participaron en la realización del video del 5 de diciembre.

Ellos aprendieron y quedaron capacitados para efectuar cortes de platinas de aluminio para la elaboración de un xilófono empleando los materiales utilizados en el desarrollo de los talleres.

Los estudios realizados en el programa de Especialización en Educación Matemática y los conocimientos propios de nuevas tecnologías, las enseñanzas de los profesores y los aportes significativos de mis compañeros me sirvieron para el continuo mejoramiento en el proyecto de investigación.

Finalmente quiero complementar el trabajo con 2 frases célebres: una relacionada con la música y otra relacionada con las matemáticas:

“A mí como músico me gustan las cosas silenciosas. Ellas contienen al igual que el momento que existe entre el relámpago y el trueno, el suceso majestuoso del silencio “. (pensamiento oriental)

“Enseñar y aprender matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita la felicidad dentro de los objetivos educativos, pero es bastante evidente que sólo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando alcancemos un grado de felicidad satisfactorio”.(C. Alsina, 1991).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1].BARRERO CASTRO Libardo. (Profesor de la Escuela de Música UIS). Comunicaciones orales desde 1993
.

[2].MEN. Ley General de la Educación 115 de 1994, Bogotá.

[3].LUQUE ARIAS Carlos Julio ¿"Tenía razón Pitágoras sobre la relación de la música con las matemáticas? (tomado de un documento CD confiable dado por Michael Pérez Fernández, del semillero de la Escuela de Matemáticas UIS).

[4].MICROSOFT ENCARTA 2006. 1993-2005 Microsoft Corporation.

[5].PICO TAPIAS Álvaro. (Apuntes tomados de datos experimentales de la microempresa Industrias PIM, 1991-2006, Bucaramanga).

[6].SHILON G.E. *Gama Simple*. Editorial MIR, Moscú, 1978

[7].RUIZ Héctor, GIL Plutarco. *Matemáticas básicas*. Bucaramanga, USTA, 1992.

Anexos A. Talleres y Actividades en el aula de clase

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN NOVENO GRADO "

AUTORIZACIÓN

Para la realización de este proyecto de investigación en el aula, nosotras las madres de los estudiantes de noveno grado del Centro Educativo la Victoria, vereda La Victoria, municipio de Lebrija, autorizamos al profesor ÁLVARO PICO TAPIAS, docente de Matemáticas de esta institución en la sección de posprimaria, para que los nombres de nuestros hijos aparezcan en las actividades y talleres necesarios para lograr el objetivo del proyecto entre los meses de septiembre y diciembre de 2006.

Nombres y Apellidos	c.c.	Nombre del hijo (a)	Firma
Rosalba Herrera Liévano	28.217.565	Alexis Bueno Herrera	Rosalba Herrera
Ana Mercedes Jerez R.	63.316.488	Leidy Marcela Bueno J.	Ana mercedes Jerez
Candelaria Reyes G.	28.211.914	Deissy Herrera Reyes	Candelaria R
Olga Ruiz Garavito	63.280.080	Brayan Antonio Mora R.	
Luz Marina Uribe Amado	28.214.132	Genny paola Morgado U.	Luz marina Uribe
Anatolia Torres	28.213.614	Yury Andrea Rodríguez T.	Anatolia Torres
Emperatriz Román R.	63.324.579	José Eduardo Vélez R.	Emperatriz Román

ÁLVARO PICO TAPIAS
Docente Posprimaria

GLORIA ISABEL JIMÉNEZ C.
Directora

Lebrija, Septiembre 13 de 2006

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"LA RELACIÓN ENTRE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN NOVENO GRADO "

AUTORIZACIÓN

Con el fin de participar en la realización de este proyecto de investigación en el aula, nosotros los estudiantes de noveno grado del Centro Educativo la Victoria, vereda La Victoria, municipio de Lebrija, autorizamos al profesor ÁLVARO PICO TAPIAS, docente de Matemáticas de esta institución en la sección de posprimaria, para que nuestros nombres aparezcan en las actividades y talleres necesarios para lograr el objetivo del proyecto de investigación, entre los meses de septiembre y diciembre de 2006

Código	Nombre y apellidos	Firma
9-1	ALEXIS BUENO HERRERA	Alex Bueno Herrera.
9-2	LEIDY MARCELA BUENO JEREZ	Leidy Marcela Bueno Jerez.
9-3	DEISSY HERRERA REYES	Deissy Herrera R.
9-4	BRAYAM ANTONIO MORA RUIZ	Brayan Antonio M.
9-5	GENNY PAOLA MORGADO URIBE	Genny Paola Morgado U.
9-6	YURY ANDREA RODRIGUEZ TORRES	Yury Andrea Rodríguez T
9-7	JOSÉ EDUARDO VÉLEZ ROMÁN	José Eduardo Vélez R.

ÁLVARO PICO TAPIAS
Docente Posprimaria

Gloria I. Jiménez Colmenares
GLORIA ISABEL JIMENEZ COLMENARES
Directora

Lebrija, septiembre 14 de 2006

IDENTIFICACION DE LOS 7 ESTUDIANTES DE 9º GRADO DEL CENTRO EDUCATIVO LA VICTORIA, SEDE A QUE PARTICIPARON EN EL PROYECTO DE INVESTIGACION

Aparecen en la foto 19 estudiantes y el profesor ÁLVARO PICO TAPIAS en la parte de atrás.

En la fila superior de izquierda a derecha,

Posición 2: GENNY PAOLA MORGADO URIBE
Posición 7: LEIDY MARCELA BUENO JEREZ
Posición 8: ALEXIS BUENO HERRERA
Posición 9: YURY ANDREA RODRIGUEZ TORRES
Posición 10: DEYSSI HERRERA REYES

En la fila inferior: de izquierda a derecha.

Posición 5: JOSE EDUARDO VELEZ ROMAN
Posición 6: BRAYAN ANTONIO MORA RUIZ

METALÓFONO MODELO CC-13 CROMÁTICO

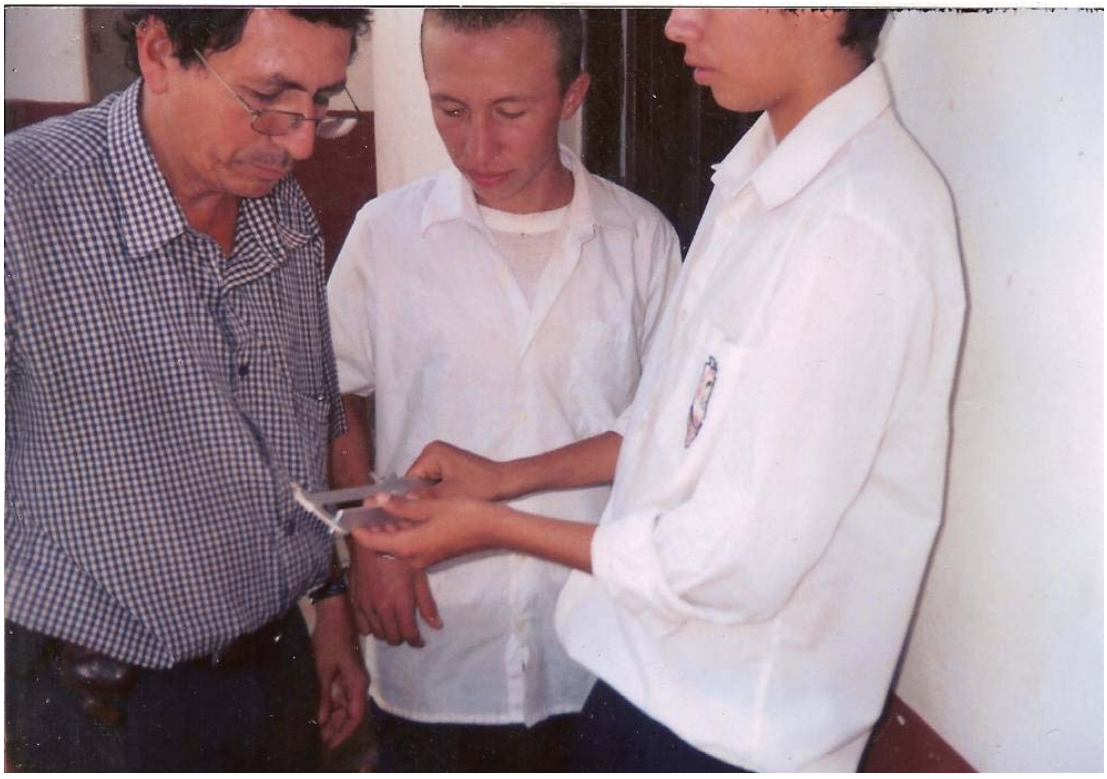
Objeto de estudio: las 13 notas musicales cromáticas, porque por medio de ellas, se llegó a la conclusión que la relación entre las longitudes de las Notas musicales cromáticas cumple el modelo de la función exponencial.

DIAGNÓSTICO ACERCA DEL CONOCIMIENTO DE SONIDOS DE NOTAS MUSICALES

Actividad:del martes 3 de octubre: Deyssi Herrera está identificando en dónde escucha mejor la escala musical Básica, es decir, cuando se golpean las 8 notas sucesivas desde DO (1) Grave, hasta DO (2) aguda: ¿en la caja roja o en la caja verde?

DIAGNÓSTICO ACERCA DEL CONOCIMIENTO DE SONIDOS DE NOTAS MUSICALES

Actividad del Miércoles 4 de octubre; Yury Andrea Rodríguez está identificando en dónde escucha mejor la escala musical cromática, es decir, cuando se golpean las 13 notas sucesivas desde DO (1) grave, hasta DO (2) aguda: ¿en la caja roja o en la caja verde?



ACTIVIDAD DEL MIERCOLES 11 DE OCTUBRE

¿QUÉ TAN PRECISOS SOMOS PARA DEFINIR LA MEDIDA DE UNA PLATINA DE ALUMINIO CORRESPONDIENTE A UNA NOTA MUSICAL?.

Los estudiantes no tienen experiencia en tomar medidas con un calibrador. Posteriormente, BRAYAN y JOSÉ EDUARDO (en la foto) y demás compañeros aprenden a medir con décimas y centésimas de centímetro. Están comprobando la medida de 11,93 cm.

ACTIVIDAD DEL MIERCOLES 18 DE OCTUBRE

¿QUÉ TAN PRECISOS SOMOS PARA REALIZAR CORTES DE NOTAS MUSICALES PARA UN XILÓFONO PARTIENDO DE UNA PLATINA DE ALUMINIO?

Los 7 estudiantes realizaron cortes tomados de una tabla de valores que sirvieron para el análisis de las fases I y II, modelos lineal y exponencial. Aparece Brayan Antonio cortando la nota FA, medida 10,39 cm.

CENTRO EDUCATIVO LA VICTORIA LEBRIJA (SANTANDER)
Resolución de fusión No. 06851 Agosto 19 de 2003
Código DANE No. 268406000250
Nit: 804-016-113

FASE I – TALLER II

MODELANDO UNA FUNCIÓN LINEAL PARA NOTAS MUSICALES

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 25 DE OCTUBRE

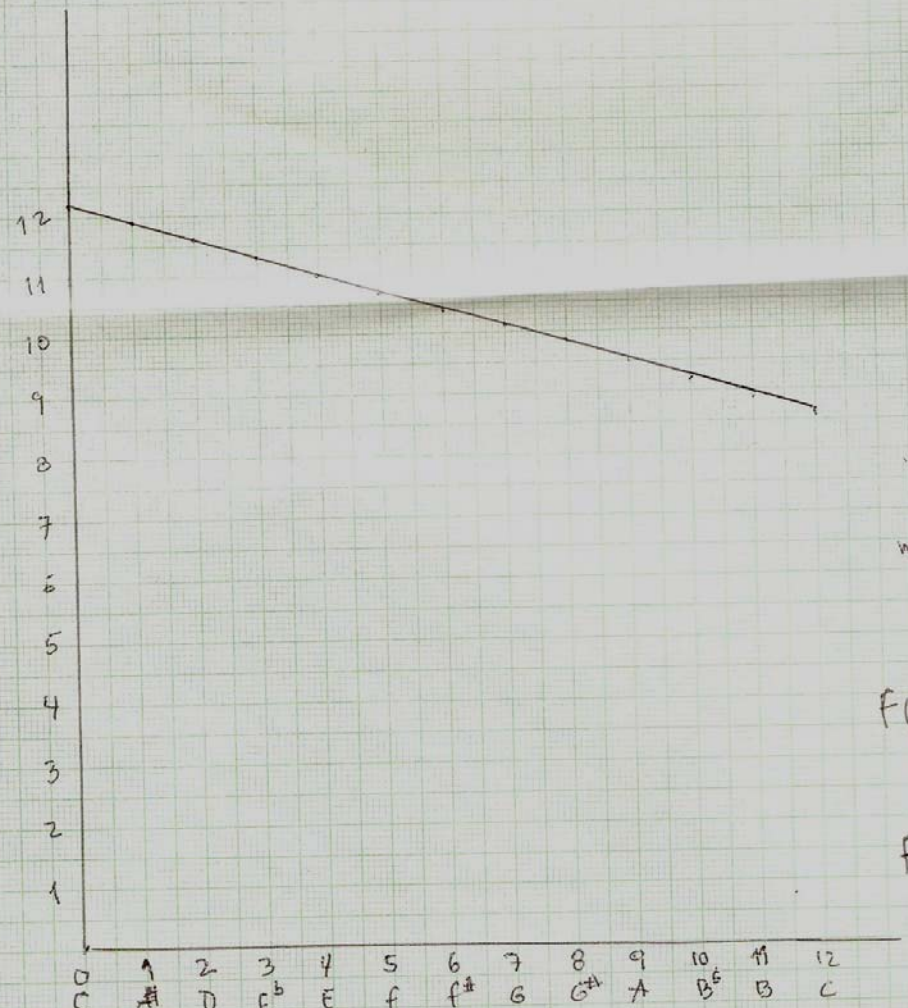
Objetivo: Graficar la función lineal tomando las medidas de las notas musicales cromáticas de la caja roja.

A continuación se aprecia una gráfica realizada por José Eduardo Vélez Román.

Nota: Las medidas utilizadas correspondieron a las de la caja roja en el diagnóstico de conocimiento de sonidos de notas musicales los días 3 y 4 de octubre.

Nota	C	C#	D	Eb	E	f	f#	G	G#	A	Bb	B	C
Medida en Cm:	12.2	11.9	11.6	11.3	11.0	10.7	10.4	10.1	9.8	9.5	9.2	8.9	8.6

Platina P-18



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11.9 - 12.2}{1 - 0}$$

$$m = \frac{-0.3}{1} = -0.3$$

$f(x) = mx + b$

b = corte con y = 12.2

$f(x) = -0.3x + 12.2$

INSTITUCIÓN	ASIGNATURA	PROFESOR	CODIGO
Centro Educativo la victoria	Matematicas	Alvaro Pico Tapias	9-7
	TEMA: Funcion lineal	ALUMNO: Jose Eduardo Velez Rondu	CALIFICACION: Oct 25-06

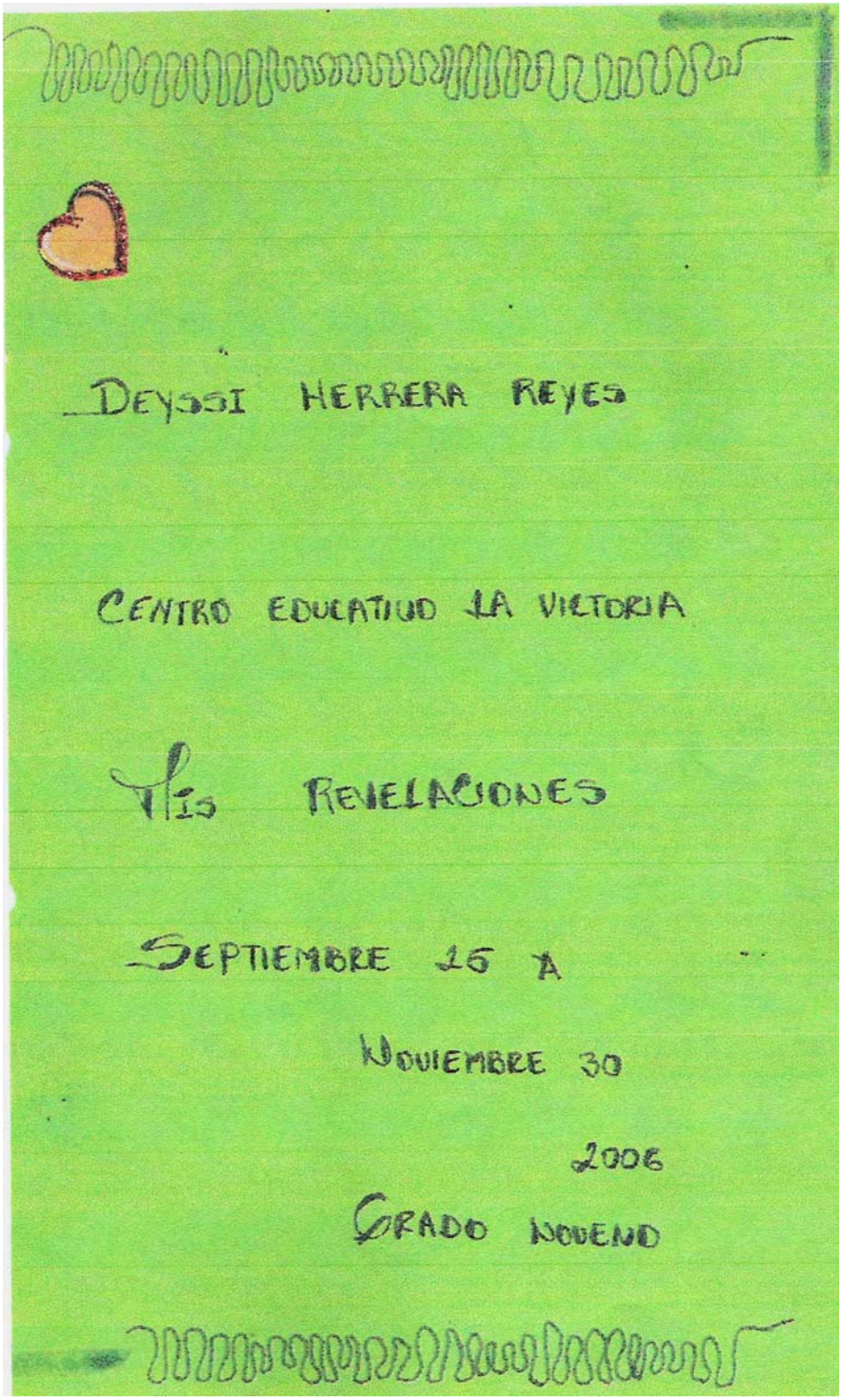
FASE II

PROBANDO LA HIPÓTESIS DEL MODELO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Las estudiantes Yury Andrea Rodríguez y Deyssi Herrera Reyes presentan un recuento de actividades a través de un instrumento denominado “Mis revelaciones” en el último período del año 2006.

Obsérvese que Yury comenta sobre la función exponencial, clase recibida el 1º de noviembre.

Nota: Más adelante aparece otra hoja de “Mis revelaciones”, haciendo referencia al trabajo realizado el 29 de noviembre.



DEYSSI HERRERA REYES

CENTRO EDUCATIVO LA VICTORIA

MIS REVELACIONES

SEPTIEMBRE 15 A

NOVIEMBRE 30

2006

GRADO NOVENO

MARTES 03 oct

* En las primeras horas estuvimos en Ensayo y aprendi muchos pasos que no Sabia Ensayando estuvimos con los chicos de pos-Primaria Grado 6°7y8° ensayando la Revista para la semana ~~cast~~ cultural.

Despues con la directora Fuimos a Mirar el Vivero, arreglamos el Jardin y lo limpiamos.

MIÉRCOLES 04

* Continuamos con el ensayo y se areglaron algunos pasos.
* En Religión Vimos acerca de los milagros de Jesus despues continuamos con el Taller. Un grupo de Estudiante Fueron a mirar el trabajo de don Nelson estaba haciendo para comprobar si estaba bien hecho el Ahoyado, trazado y terraceado.
* Despues en la clase de Matemáticas trabajamos sobre el proyecto de las notas musicales donde se relacionaban. El Tema se llama: LA RELACIÓN DE LAS NOTAS MUSICALES Y LAS MATEMÁTICAS una herramienta para comprender una función exponencial

"Fue una clase Muy bonita y importante"

JUEVES 05

* Continuamos con el ensayo en las dos primeras horas aprendimos nuevos paso.

Semana octubre 30 al 5 NOV

Oct-30-3

Lunes: No hubo día de clase porque estovamos arreglando las cuentos del bazar y hacren de aseo en la Institución.

Martes: Día de clase
En ambiental con un tema muy interesante "el ahorro del agua".
Inglés, Tecnología, comunicación, calculo, regreso a clase, ayudar con los oficios, hacer tareas, noche y a descansar.

Miercoles: E.d física ejercicios muy chebres, sociales un tema muy interesante, religión con el tema el pecado rompe con el plan de Dios para el hombre, Matemáticas con el tema de la función exponencial regreso a casa, y otras actividades.

Jueves: Evaluación de sociales
Ingles = Repaso de temas
Etica, Descanso regreso a clase, estudiar en otras áreas y regreso a nuestro dulce hogra

Viernes: No hubo clase, salida a Bucaramanga en la mañana, en la tarde ayude a mi tía en la cuestión de zapatos, llegado donde mi nona, comida, ida a San Andresito Islas, salida a Santa Marta

FASE II

PROBANDO LA HIPÓTESIS DEL MODELO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL,

Actividad miércoles 1 de noviembre.

Participan los 7 estudiantes para comprobar que da luz verde (desviación O cents) en el registro del afinador electrónico BELCAT BC-850, es decir, que las notas están bien afinadas en la fase II modelo exponencial.

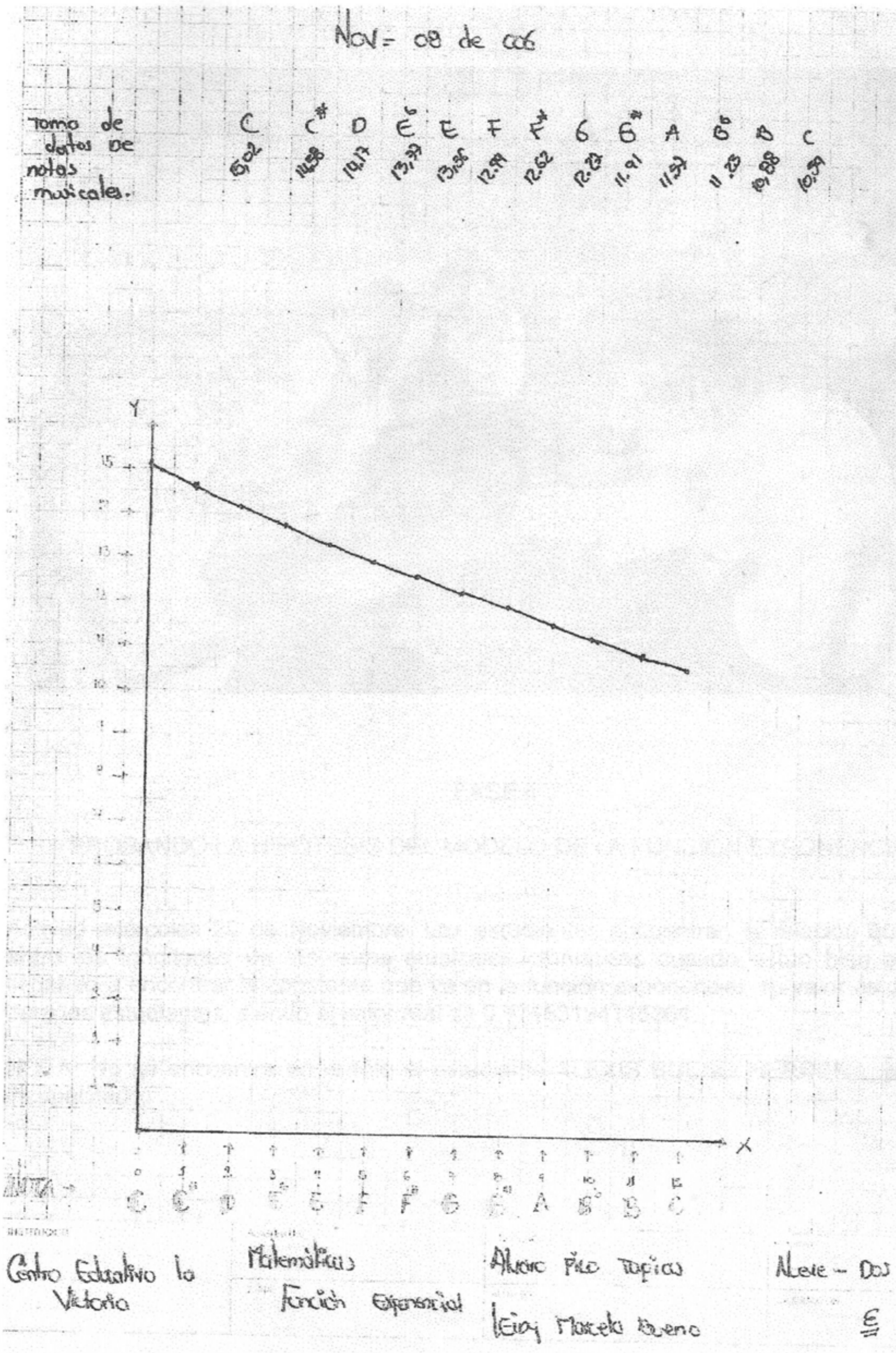
Con el modelo inicial de la fase I modelo lineal, da luz roja (desviación - 50 a O cents, ó O a + 50 cents) en el registro del afinador.

Yury Andrea Rodríguez se encuentra comprobando con las notas musicales bien afinadas para obtener luz verde en el registro del afinador. A su vez, comprueba que cuando está desafinada da luz roja.

ACTIVIDAD MIÉRCOLES 8 DE NOVIEMBRE

Objetivo: Graficar la función exponencial tomando una tabla de datos correspondientes a notas afinadas de placas de aluminio ref. P-19.

Leidy Marcela Bueno presenta la gráfica en el plano cartesiano.


Nov= 08 de 006
Toma de datos de notas musicales.
C C# D E♭ E F F# G G# A B♭ B C
15,02 14,58 14,17 13,79 13,36 12,99 12,62 12,27 11,91 11,57 11,25 10,88 10,59
Y
X
Centro Educativo la Victoria
Matemáticas
Función Exponencial
Alvaro Pico Tapias
Leidy Marcela Bueno

FASE II

PROBANDO LA HIPOTESIS DEL MODELO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Actividad del miércoles 29 de Noviembre. Los estudiantes encuentran la relación que existe entre las longitudes de las notas musicales cromáticas cuando están bien afinadas, llegando a encontrar la constante que va en la función exponencial; su valor es de 0,971 para los estudiantes, siendo el valor hasta las millonésimas de 0.971532.

NOTA: No se encuentra en la foto el estudiante ALEXIS BUENO HERRERA, por estar incapacitado.

CENTRO EDUCATIVO LA VICTORIA LEBRIJA (SANTANDER)
Resolución de fusión No. 06851 Agosto 19 de 2003
Código DANE No. 268406000250
Nit: 804-016-113

FASE II : HIPOTESIS DEL MODELO FUNCION EXPONENCIAL EN NOTAS CROMATICAS

ACTIVIDAD: RELACION ENTRE LAS NOTAS MUSICALES CROMATICAS

Nombre del Estudiante: Deyss: Herrera y yury Andrea e
Grado: 9°
Nov-29-2006

OBJETIVO: Encontrar la relacion que existe entre las longitudes de las notas MUSICALES CROMATICAS CUANDO ESTAN BIEN AFINADAS

MATERIALES: 13 PLATINAS DE ALUMINIO P-19 Previamente recortadas
1 Tabla de medidas
1 afinador electronico.
1 calibrador.

Las siguientes medidas corresponden a las longitudes de las notas dadas en Cm, con 2 cifras decimales.
Encuentre que relacion existe entre una nota Posterior y anterior

Nota	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	C
Medida	15.02	14.59	14.18	13.77	13.38	13.00	12.63	12.27	11.92	11.58	11.25	10.93	10.62

14.59 − 15.02 = −00,43
15.02 − 14.59 = 00,43

13.77 − 14.18 = −00,41
14.18 − 13.77 = 00.41

13.00 − 13.38
13.38 − 13.00 = 00.38

12.27 − 12.63 = −00.36
12.63 − 12.27 = 00.36

11.58 − 11.92 = −00.34
11.92 − 11.58 = 00.34

10.93 − 11.25 = −00,3
11.25 − 10.93 = 00.32

10.62 − 10.93 = −00,31
10,93 − 10.62 = 00.31

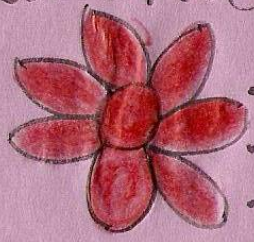
Conclusión = obtuvimos por medio de la resta no hubo ninguna Constante. pero la diferencia entre notas va siendo menor

14.59 ÷ 15.02 = 0,971
13.77 ÷ 14.38 = 0.971
13.00 ÷ 13.38 = 0.971
12.27 ÷ 12.63 = 0.971
11.58 ÷ 11.92 = 0.971

10.93 ÷ 11.25 = 0,971
10.62 ÷ 10.93 = 0,971

Conclusion: Por medio de la división entre las notas musicales sucesivas encontramos una Constante.

NOV-29-06 Miercoles · Gracias a Dios tuve otro día de vida



· Llegada a la escuela
· Trabajamos en naturales
· Descanso.
· Regreso a clase
· Trabajamos en un taller de matemáticas sobre el proyecto de investigación del Profesor Alvaro. Luego nos tomaron una foto
· Regreso a casa
· Almuerzo
· Descanso
· En las horas de la tarde estuvimos con Deyssi en donde la profe Fabiola trabajando en el proyecto de vida
· Trabajamos haciendo Collares y aretes de chucho seco, Silvio nos dio una rica comida
· Regresamos a clase en las horas de la noche
· Miramos T.V
· Dormimos.

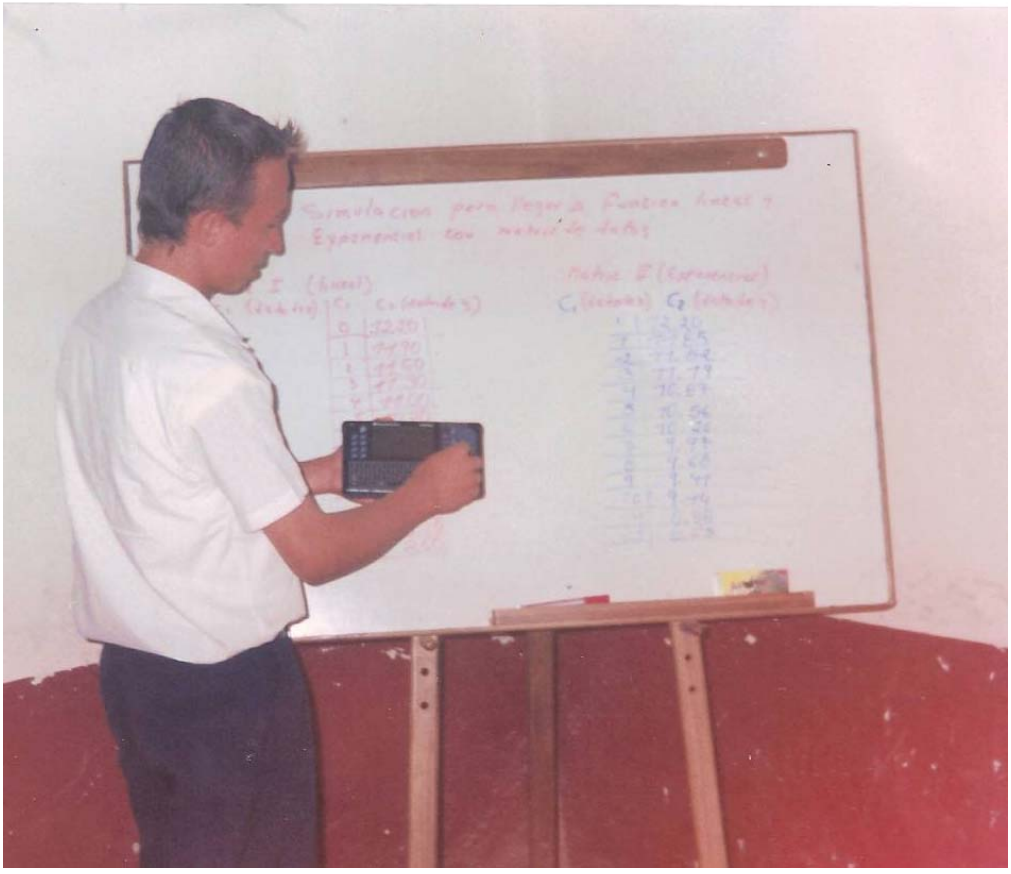
Jueves: · Con Deyssi nos levantamos a las 4:30 A Para responder unas preguntas de ciencias

· Nos alistamos para ir al Colegio
· Llegamos a trabajar naturales, hicimos algunos expicimentos. Descanso, luego trabajamos en Calculo el profe nos explico algunas operaciones
· Regreso a casa
· Almuerzo, descanso, Ayude en la casa "Yury"

FASE III

MODELACIÓN FINAL, INTRODUCIENDO DATOS A LA CALCULADORA GRAFICADORA PARA OBTENER LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Actividad realizada el 3 de diciembre, por el estudiante Alexis Bueno Herrera, encontrándose incapacitado en un apartamento del barrio Campo Hermoso. Se encuentra introduciendo una matriz de datos en la calculadora graficadora TEXAS INSTRUMENTS TI 92 Plus, y posteriormente visualiza la gráfica de la función exponencial.



FASE III

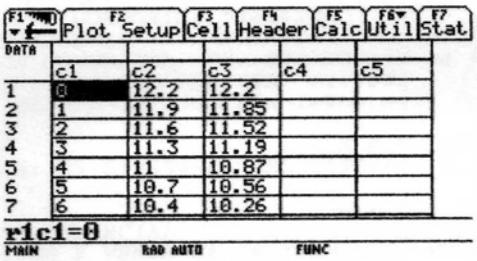
MODELACIÓN FINAL, INTRODUCIENDO DATOS A LA CALCULADORA GRAFICADORA PARA OBTENER LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

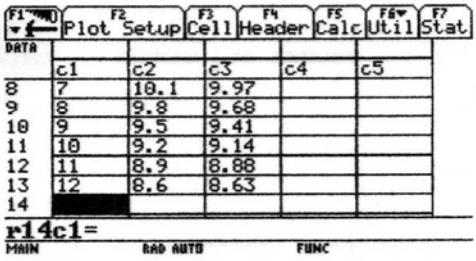
Actividad del martes 5 de diciembre. El estudiante José Eduardo Vélez explica a los demás compañeros los pasos necesarios para introducir una matriz de datos y obtener la gráfica de la función exponencial y la forma algebraica.

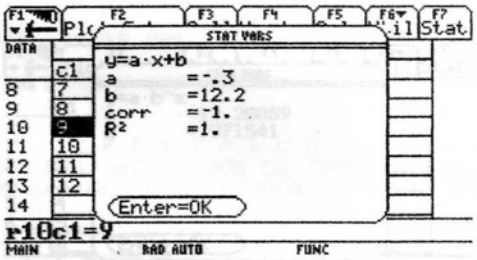
ACTIVIDAD DICIEMBRE 05 2006

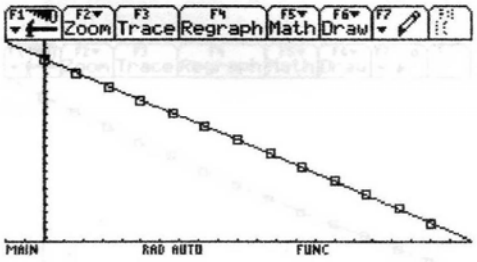
FASE III

MODELACIÓN INICIAL, INTRODUCIENDO MATRIZ DE DATOS A LA CALCULADORA GRAFICADORA (MODELO LINEAL)





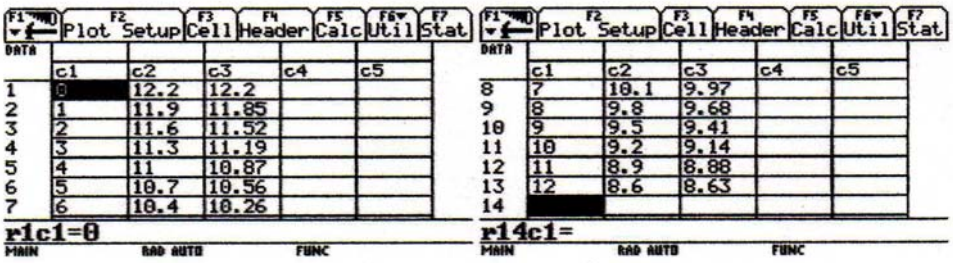


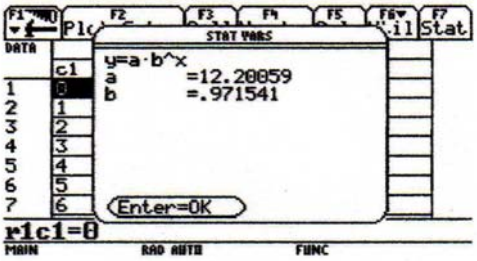


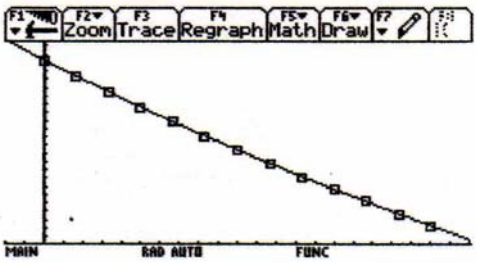
ACTIVIDAD DICIEMBRE 05 2006

FASE III

MODELACIÓN FINAL, INTRODUCIENDO MATRIZ DE DATOS
A LA CALCULADORA GRAFICADORA
(MODELO EXPONENCIAL)







No. 4956147

CAMARA
DE COMERCIO DE BUCARAMANGA

CERTIFICADO DE MATRICULA MERCANTIL DE:
PICO TAPIAS ALVARO

EL SECRETARIO DE LA CAMARA DE COMERCIO DE BUCARAMANGA, CON FUNDAMENTO EN LAS MATRICULAS E INSCRIPCIONES DEL REGISTRO MERCANTIL

C E R T I F I C A

RENOVACION: 2006/07/05

C E R T I F I C A

NOMBRE:
PICO TAPIAS ALVARO
CEDULA DE CIUDADANIA: 13824298
NIT: 13824298-1
DIRECCION COMERCIAL: CL. 63A NO. 4W-04 PISO 3 BARRIO LOS HEROES
DOMICILIO: BUCARAMANGA TEL: 6443886
EMAIL: xilofonosindustriapim@hotmail.com

C E R T I F I C A

MATRICULA: 05-033554-01 DEL 1991/04/11

C E R T I F I C A

ACTIVIDAD COMERCIAL:
FABRICACION Y VENTA DE INSTRUMENTOS MUSICALES DE PERCUSION: METALOFONOS, SISTROS, XILOFONOS. VENTA DE MATERIAL DIDACTICO.

C E R T I F I C A

MATRICULA ESTABLECIMIENTO: 33339 DEL 1991/04/11
INDUSTRIAS PIM
CL. 63A NO. 4W-04 PISO 3 BARRIO LOS HEROES BUCARAMANGA

C E R T I F I C A

PROCEDENCIA DE LOS ANTERIORES DATOS: QUE LA INFORMACION ANTERIOR HA SIDO TOMADA DIRECTAMENTE DE LOS FORMULARIOS DE MATRICULA DILIGENCIADOS POR EL COMERCIANTE

EXPEDIDO EN BUCARAMANGA, A 2006/09/19 16:02:46

LOS ACTOS DE REGISTRO AQUI CERTIFICADOS QUEDAN EN FIRME CINCO DIAS HABILES DESPUES DE LA FECHA DE INSCRIPCION, SIEMPRE QUE, DENTRO DE DICHO TERMINO, NO SEAN OBJETO DE LOS RECURSOS DE REPOSICION ANTE ESTA ENTIDAD, Y / O DE APELACION ANTE LA SUPERINTENDENCIA DE INDUSTRIA Y COMERCIO.

EL SECRETARIO,
NO CAUSA IMPUESTO DE TIMBRE 20254721