

INFLACIÓN VECTORIAL A PARTIR DE CAMPOS DE
GAUGE NO ABELIANOS

CARLOS MAURICIO NIETO GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

INFLACIÓN VECTORIAL A PARTIR DE CAMPOS DE
GAUGE NO ABELIANOS

CARLOS MAURICIO NIETO GUERRERO¹

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}, PH.D.

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

Para mi madre Elizabeth Guerrero

Contenido

Resumen	11
Abstract	13
Introducción	15
1. Características de un universo homogéneo e isótropo	18
1.1. Geometría del espaciotiempo	18
1.2. Evolución de un universo de FRW	20
1.3. Problemas de la Cosmología Estándar	24
1.3.1. Problema de Horizonte	24
1.3.2. Problema de Planitud	27
2. Paradigma inflacionario	30
2.1. Solución del Problema de Planitud	31
2.2. Solución del Problema de Horizonte	31
2.3. Inflación Escalar	32

2.4. Inflación Vectorial	35
3. Modelo inflacionario basado en campos de Gauge no Abelianos	37
3.1. Escogencia de la forma de los campos vectoriales	38
3.2. Ecuaciones de Einstein y de evolución	39
3.3. Lagrangiano del modelo	41
3.4. Inflación del tipo Rodadura-Lenta	43
4. Solución numérica de las ecuaciones de evolución	49
5. Generación de una dinámica inflacionaria	57
Conclusiones	59
Bibliografía	62
Apéndices	67
A. Homomorfismo entre $O(3)$ y $SU(2)$	68
A.1. Grupo $O(3)$	68
B. Teorías de Gauge	73
B.1. Grupo $U(1)$	73
B.2. Grupo $SU(2)$	79
B.3. Tratamiento general	82
C. Ecuación de evolución para campos vectoriales de Gauge	88

D. Tensor momentum-energía para un lagrangiano invariante de Gauge en un universo de FRW	97
E. Obtención de las ecuaciones de campo para el modelo vectorial de Gauge	99
E.1. Ecuación de Friedmann	99
E.2. Ecuaciones de evolución para los campos A_μ	103
F. Parámetros de rodadura lenta del modelo	107
G. Algoritmo utilizado	109

Índice de figuras

1.1.	Esquema de la región asociada al horizonte de partículas en la actualidad cuyo radio, de acuerdo con 1.2.17, es inversamente proporcional al parámetro de Hubble hoy en día, i.e., $r = CH_0^{-1}$	25
1.2.	Este esbozo ilustra la proporción entre la región física correspondiente a la máxima distancia coordinada del Universo actual, en el momento de la última dispersión, (círculo grande) cuyo radio es λ_S y los horizontes de partículas, en el momento de la última dispersión, (círculos pequeños) cuyo radio es H_S . Sólo se han dibujado las regiones correspondientes al horizonte de partículas en los bordes del círculo grande para mostrar que, de existir correlaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo en las mediciones actuales, debería observarse únicamente una misma temperatura en el interior del cono cuyo ángulo es α	26
1.3.	Este esbozo muestra el posible comportamiento del parámetro $ \Omega_K $ para que se dé explicación al problema de planitud. Aquí, se aprecia un rápido decrecimiento (generado por algún mecanismo) de $ \Omega_K $ en función de a y una subsecuente evolución de acuerdo con la cosmología estándar hasta llegar al valor actual.	28
2.1.	En este esquema se desea mostrar el comportamiento temporal del radio de Hubble comóvil: al principio de inflación éste contenía a las escalas del Universo homogéneo (zona sombreada) y luego de un rápido período de evolución, se tendrá el comportamiento estándar hasta el día de hoy.	33

4.1. Trayectoria obtenida para ψ (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$	54
4.2. Trayectoria obtenida para ϵ (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$	54
4.3. Trayectoria obtenida para ρ_κ/ρ_{YM} (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$	55
4.4. Trayectoria obtenida para el número de e-folds N (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$. Aquí se puede ver que se alcanza el valor estándar de N (alrededor de 60) que resuelve los problemas de la cosmología estándar	56
B.1. Trayectoria cerrada a través de la cual se hace el transporte paralelo.	85
B.2. Primera trayectoria cerrada a través de la cual se hace el transporte paralelo, las otras son hechas según la dirección dada en el texto pero los puntos referenciados son los mismos mostrados en esta figura.	86

Resumen

TÍTULO: INFLACIÓN VECTORIAL A PARTIR DE CAMPOS DE GAUGE NO ABELIANOSⁱ.

AUTOR: NIETO GUERRERO, Carlos Mauricioⁱⁱ.

PALABRAS CLAVES: Cosmología, Paradigma inflacionario, Teorías de Gauge, Grupo de rotaciones espaciales, Parámetros de rodadura lenta.

DESCRIPCIÓN: A partir de la propuesta de Alan Guth sobre la existencia de una era temprana de expansión exponencial, muchos modelos inflacionarios han sido estudiados. Un campo escalar primordial corresponde, en general, al modelo más conocido; sin embargo, la ausencia de un campo escalar fundamental descubierto dentro del Modelo Estándar de Partículas Elementales ha provocado que los mecanismos inflacionarios se extiendan al uso de campos vectoriales. El uso de este tipo de campos no alteraría la homogeneidad e isotropía del espacio haciendo una adecuada escogencia de ellos, e.g., una triada de campos vectoriales mutuamente ortogonales. La anterior escogencia, desafortunadamente, proviene de un ajuste fino. Así, surge el interés de trabajar en el marco de las Teorías de Gauge No Abelianas pues, como se hace en este trabajo, al considerar una teoría de Gauge $SU(2)$ surgen tres campos vectoriales que generan una dinámica inflacionaria en un fondo rotacionalmente invariante. El ajuste fino y la invariancia rotacional son explicadas trabajando en un Gauge temporal, usando el homomorfismo entre $O(3)$ y $SU(2)$ y efectuando un ansatz sobre la forma de los campos (fundamentado en el hecho de que esta configuración es el atractor de un modelo de inflación anisótropa); por otro lado, escogiendo un término de Yang-Mills mínimamente

ⁱTrabajo de grado.

ⁱⁱFacultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

acoplado a la gravedad y un término adicional no estándar, se produce una dinámica inflacionaria deseada. Todo lo anterior se soporta por una solución numérica de las ecuaciones permitiendo inferir que es posible producir inflación con campos vectoriales cuya naturaleza no es ajena a los campos experimentalmente conocidos. No obstante, el modelo propuesto no es el único en su especie: al final del estudio se agregó un comentario que podría servir para edificar otro modelo inflacionario, esto, en cuanto al lagrangiano, pues en esencia retoma los elementos importantes del modelo vectorial de Gauge no Abelian.

Abstract

TITLE: VECTOR INFLATION FROM NON-ABELIAN GAUGE FIELDSⁱⁱⁱ.

AUTHOR: NIETO GUERRERO, Carlos Mauricio^{iv}.

KEYWORDS: Cosmology, Inflationary Paradigm, Gauge Theory, Rotations Group, $SU(2)$ Group, Slow-Roll Parameters.

DESCRIPTION: From the Alan Guth idea about the existence of an early period in which the Universe expanded exponentially, lots of accelerated expansion models have been constructed. A primordial scalar field is usually taken as a generator of accelerated expansion. Nevertheless, detectors have not found yet a fundamental scalar field within the Standard Model of Elementary Particles, so inflationary models have extended to the use of vector fields. These fields do not violate the rotation symmetry of space when a special choice is made about them, e.g., a triplet of orthogonal vectors. Unfortunately, this choice is a fine-tuned assumption. Thus, non-Abelian gauge theories become useful because, as we did in the text below, considering a $SU(2)$ Gauge theory introduces three vector fields that make the action invariant under $SU(2)$ transformations and produce a Slow-Roll inflation in a homogeneous and isotropic background; fine-tuning found in the triad model and rotational invariance are explained in the following way: we work in temporal Gauge, we take an ansatz about the form of fields and then we use the relation between the rotation and $SU(2)$ group (formally, we use the homomorphism between $SU(2)$ and $O(3)$). On the other hand, we choose a Yang-Mills term minimally coupled to gravity and a non-standard additional term in order to produce an inflationary era. All the analytical treatment is supported by a numerical solution of equations of

ⁱⁱⁱDegree project.

^{iv}Faculty of science, School of physics, Yeinzon Rodríguez García (Director).

motion which allows us to state we can construct vector inflationary models without fine-tuned procedures. Nonetheless, the model introduced in the work is not the only one we can build: at the end of the text we introduce a different model, i.e., another lagrangian that could generate the expected characteristics and a future embedding with phenomenology.

Introducción

El *universus*, como unión de todo lo que nos rodea, ha guardado para el ser humano misterios y sorpresas que suscitan profundas inquietudes, interrogantes que devienen en arduas investigaciones. Es éste el caso del estudio de las interacciones presentes en la naturaleza, parcialmente desconocidas hasta principios del siglo XX. Tras varias décadas de investigación teórica y experimental, se llegó al hecho de que la naturaleza tiene una preferencia por las teorías que son invariantes de Gauge, más exactamente, la teoría cuántica que describe el comportamiento de las partículas elementales conocidas presenta una simetría ante el grupo de transformaciones $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [1, 2]. Este hecho predijo la existencia de algunas partículas desconocidas hasta la época y reforzó la visión que se tiene de las interacciones a través de la existencia de partículas mediadoras. De esta manera, las Teorías de Gauge no Abelianas adquieren una gran importancia en física. Sin embargo, esta teoría, llamada Modelo Estándar de Partículas Elementales, posee algunas falencias, e.g., no contiene la interacción gravitacional, no explica el problema de la jerarquía, no se ha descubierto una de sus partículas fundamentales necesaria para explicar la existencia de masas (Bosón de Higgs), entre otras [3, 4, 5, 6]. Estas conclusiones acerca del comportamiento de la naturaleza a pequeñas escalas han surgido a partir de eternas preguntas: ¿De qué estamos hechos? ¿Cómo es la estructura de las componentes de nuestro mundo? ¿Hasta donde podemos llegar en su interior?...

Igualmente, en el caso de la física a grandes escalas se está invirtiendo bastante tiempo y dedicación. Aquí, las preguntas tampoco cesan pero hay una que es inherente a nuestra condición de habitantes del universo: ¿cómo se generó el universo en el que vivimos? En el proceso de estudio del universo, de nuestro Universo en expansión, surge la idea de tener una época temprana precedente a la era dominada por la radiación, una época caracterizada por una expansión exponencial. Se piensa en la existencia de un

mecanismo llamado *Inflacionario* que produce una expansión acelerada de tal manera que se da solución a los tres problemas clásicos de la cosmología estándar, a saber, problema de planitud, problema de horizonte y problema de reliquias no deseadas (este problema no será abordado en el trabajo pues requiere conocimientos sobre Teorías de Gran Unificación) [7, 8, 9]. Además de resolver estos problemas, con la ayuda de inflación se predice la existencia de las estructuras a gran escala [10, 11, 12, 13, 14] (e.g. Galaxias) y la presencia de fluctuaciones en la temperatura en los mapas de la radiación cósmica de fondo [15, 16]. El mecanismo inflacionario fue inicialmente propuesto por Alan Guth [7] y asume la existencia de una era temprana en la cual el universo se expandió exponencialmente. Generalmente, este hecho se atribuye a la existencia de un campo escalar primordial llamado *Inflatón* que genera expansión acelerada y eventualmente decae en las partículas conocidas actualmente [17, 18, 19, 20]. El modelo de inflación escalar es altamente preferido por su simplicidad y por ende la facilidad para comparar con los datos calculados a partir de las observaciones hechas por los satélites [10, 12, 13, 14]. Pero, debido a que no se ha detectado todavía un campo escalar en los aceleradores de partículas, los mecanismos inflacionarios han desviado su mirada hacia el uso de campos vectoriales [21, 22, 23, 24, 25].

El uso de campos vectoriales es muy llamativo pues ellos están presentes en el Modelo Estándar de Partículas Elementales mencionado anteriormente. En principio, el uso de estos campos generaría anisotropía espacial, i.e., indicaría una dirección preferencial en el Universo. Aún así, se conocen estudios sobre inflación vectorial y se ha mostrado que se producen las condiciones necesarias para solucionar los problemas clásicos de la cosmología preservando la isotropía [23, 25, 26]. Por ejemplo, escoger tres campos vectoriales de la misma magnitud y mutuamente ortogonales provee un buen modelo inflacionario [23, 25, 27]. Empero, esta escogencia además de tener un aire de ajuste fino, no produce un exitoso modelo de inflación vectorial: con ellos, se llega a inestabilidades dentro de la teoría ya sea en el régimen clásico o cuántico [28, 29]. Se debe señalar también que el modelo de los tres campos vectoriales carece de naturalidad, pues no hay una razón de peso para creer que se tenga dicho arreglo y a pesar de conseguirse resultados relevantes, no existe una explicación para esta disposición de los campos en el espacio. Por lo tanto quedan dos opciones: plantear otro modelo con un número de campos diferente o dar una explicación a la orientación de los tres campos vectoriales de igual norma.

Ahora, escudriñando en las Teorías de Gauge no Abelianas conocidas en las teorías de física de partículas, tal como se comentó anteriormente, se puede dar una elegante solución al problema del ajuste fino presentado en la disposición de los campos vectoriales generadores de inflación. Gracias a la naturaleza no Abeliana de la teoría,

surge de manera natural que cada uno de los tres campos de Gauge utilizados se orienta en una de las direcciones principales del espacio respectivamente [30, 31]. Así, aparte de solucionar los problemas de la inflación vectorial con tres campos, se llega a un tratamiento parecido al efectuado en el estudio de las interacciones presentes en la naturaleza (Modelo Estándar de Partículas elementales). En el presente trabajo se propone un modelo inflacionario en el marco de las Teorías de Gauge no Abelianas. Básicamente, se considera una Teoría de Gauge $SU(2)$ y por lo tanto tres campos vectoriales que retienen la invariancia de la acción ante transformaciones del grupo $SU(2)$. Estos campos vectoriales son los responsables de la expansión acelerada y para preservar la homogeneidad e isotropía del fondo de la teoría se harán algunas asunciones: primero, se trabajará en el Gauge temporal fijando así la simetría ante transformaciones de Gauge independientes del tiempo. Segundo, se efectuará un ansatz en la forma de los campos de tal manera que se identifica cada índice espacial con un índice del álgebra de Gauge. Este aspecto es clave para retener la simetría rotacional en un fondo con campos vectoriales si se tiene en cuenta el homomorfismo existente entre los grupos $O(3)$ y $SU(2)$ ^v y aunque parezca una fijación muy fina se debe tener en cuenta que ésta solución para la forma de los campos vectoriales es un atractor. Es decir, si se trabaja dentro de una teoría de Gauge $SU(2)$ con campos vectoriales orientados de cualquier manera, por lo tanto con una métrica diferente a la de FRW, se llega después de pocos e-folds de expansión a al ansatz asumido [32] dándole de esta manera soporte a la suposición hehca. Por último, se debe asegurar que se produce una dinámica inflacionaria, i.e., $\rho + 3P < 0$, para esto se escoge una acción de Yang-Mills en la cual los campos vectoriales están acoplados de forma mínima a la gravedad y se añade un término extra vital para producir una dinámica inflacionaria. Se obtendrán analíticamente las ecuaciones de movimiento, los parámetros de rodadura lenta para el modelo y, a través de un método numérico se observará la evolución temporal de las cantidades físicas relevantes del modelo, e.g., ψ , ε , ρ . Para terminar, se debe tener claro que el modelo vectorial de Gauge estudiado puede no ser el único que permita producir una dinámica inflacionaria, pues queda abierto el campo para investigación de otro tipo de lagrangianos, tal es el caso de lo comentado en el capítulo 5.

^vVer apéndice A

1

Características de un universo homogéneo e isótropo

1.1. Geometría del espaciotiempo

La geometría del espaciotiempo está determinada por un conjunto de observaciones astronómicas hechas desde mediados del siglo XX [33, 34] y reunidas en el Principio Cosmológico [35, 36]. Según este principio, el Universo manifiesta una homogeneidad e isotropía a grandes escalas (i.e. observaciones hechas en regiones de volumen $10^6 Mpc$). Además, resulta difícil pensar que se está en un punto específico del Universo, cualquier punto debería ser igualmente posible. Entonces se llega a la conclusión de que el Universo debe ser isótropo para observadores a través del Universo. Sin embargo, no es válido para todos: se debe especificar que el Universo luce igual en todas las direcciones para una familia de observadores *típicos* en caída libre [11, 37]. Las características del espacio son iguales para los observadores típicos y se puede ir de un punto a otro a través de rotaciones en el espacio aprovechando la isotropía del mismo. Así, teniendo isotropía respecto a todos los puntos (o invariancia ante rotaciones espaciales) se obtiene que las propiedades del espacio son invariantes ante traslaciones espaciales, por lo tanto el espacio es homogéneo. El sólo hecho de tener un espacio isótropo respecto a todos los puntos garantiza homogeneidad [37].

Por otra parte, en relatividad general, la cantidad que contiene las propiedades geométricas del espaciotiempo es un tensor de dos índices llamado el tensor métrico, denotado $g_{\mu\nu}$. El tensor métrico presenta todas las características espaciotemporales

requeridas y deseadas de acuerdo con el sistema que se quiera modelar y a partir de este, se puede definir el elemento de línea, i.e., la forma de medir distancias en el espaciotiempo

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1.1)$$

En el caso de un universo homogéneo e isótropo, la métrica que contiene estas dos propiedades es la conocida métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [38, 39, 40]. Esta métrica representa tres tipos posibles de universos homogéneos e isótropos: abierto (geometría hiperbólica), cerrado (geometría esférica) o plano (geometría plana), y su forma es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[d\vec{x}^2 + \frac{K(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \right], \quad (1.1.2)$$

en donde \vec{x} representa las coordenadas cartesianas, $a(t)$ un parámetro que depende del tiempo y K es conocido como parámetro de curvatura. Este parámetro K toma los valores 1, 0, -1 y define la geometría espacial del universo:

$$K = \begin{cases} 1, \text{ cerrado} \\ 0, \text{ plano} \\ -1, \text{ abierto} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Ahora, si se escribe la métrica de FRW en coordenadas esféricas, se obtiene

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - K\vec{x}^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (1.1.4)$$

en donde el parámetro $a(t)$ será denominado factor de expansión y de esta manera se diferenciará nuestro Universo de un espaciotiempo estático. Con él se muestra que las distancias están incrementando, i.e., hay un aumento en el volumen físico del universo y su valor depende del tiempo, por lo tanto la expansión no es la misma en todos los momentos de la historia. Por ejemplo, la distancia medida por un observador típico desde su origen de coordenadas hasta un punto coordenado r en coordenadas esféricas se calcula tomando la parte espacial de la métrica $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$ e integrando

$$\text{Distancia}(r, t) = a(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1 - K\vec{x}^2}}. \quad (1.1.5)$$

De esta manera, se ve que el valor $a(t)$ magnifica las distancias coordenadas (llamadas de ahora en adelante distancias comóviles y denotadas como \bar{d}). Así, las distancias reales físicas se expresan mediante las distancias comóviles y el factor de expansión como sigue

$$d(r, t) = a(t)\bar{d}(r). \quad (1.1.6)$$

Por otra parte, el cambio en el tiempo de las distancias físicas se expresa así:

$$\dot{d}(r, t) = \dot{a}(t)\bar{d}(r) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d(r, t). \quad (1.1.7)$$

Esta ecuación expresa la famosa ley de Hubble [41], formulada por Edwin Hubble hacia el año 1929 y con la cual establecía que existía un corrimiento al rojo (por efecto Doppler) en los espectros de emisión de las galaxias estudiadas en la época. Hubble mostró que entre más alejada está una galaxia de nosotros, mayor es su corrimiento al rojo, i.e., se aleja más rápido. La expresión original hecha por el astrónomo para este hecho fue descrito así:

$$V = Hd, \quad (1.1.8)$$

en donde V es la velocidad del cuerpo, d la distancia medida desde la tierra y H el coeficiente de proporcionalidad entre estas dos cantidades llamado parámetro de Hubble. Con esta relación entre las observaciones y la teoría, se empieza a edificar un modelo para nuestro Universo en el marco de la relatividad general. Para terminar la sección, se aclarará que el parámetro de Hubble se relacionará con el parámetro de expansión así:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.1.9)$$

1.2. Evolución de un universo de FRW

En el aparte anterior sólo se tocaron aspectos geométricos del espaciotiempo, los cuales están fundamentados por las observaciones hechas desde el siglo pasado. No obstante, las mediciones hechas por los satélites provienen de las propiedades del contenido energético del universo el cual está íntimamente ligado con la geometría, es por esto que se debe tener en cuenta qué clase de materia está llenando todo el Universo y cómo es su evolución temporal. La relación entre geometría y materia está dada a través de las ecuaciones de campo de Einstein, ecuaciones obtenidas aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos [10, 11, 12, 13] a la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{m_p^2}{2} R + \mathcal{L}_{E-M} \right], \quad (1.2.1)$$

en donde R es el escalar de Ricci, \mathcal{L}_{E-M} es el lagrangiano de materia-energía, g es el determinante el tensor métrico y m_p es la masa reducida de Planck. De esta manera,

se encuentran las ecuaciones de evolución para la materia presente en el universo y su relación con las propiedades geométricas del espaciotiempo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{1}{m_p^2}T_{\mu\nu}, \quad (1.2.2)$$

en donde la cantidad $T_{\mu\nu}$ es llamada tensor momentum-energía y se define como sigue

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}_{E-M}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{E-M}. \quad (1.2.3)$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ definido en 1.2.3 posee una importante propiedad: su derivada covariante $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}$ es siempre cero sin importar qué tipo de gravedad se tenga, es decir, existe una carga conservada asociada al tensor momentum energía. Paralelamente, se sabe que la acción es invariante ante transformaciones de Lorentz por lo tanto hay simetría rotacional y translacional. Entonces, de acuerdo con el teorema de Noether, la cantidad conservada relacionada con el tensor $T_{\mu\nu}$ es el cuádrimomentum p^μ . Ahora, teniendo en cuenta los argumentos dados sobre la homogeneidad e isotropía del universo, es posible escribir el tensor momentum-energía (para un espaciotiempo plano) así:

$$T^{00} = \rho, T^{0i} = 0, T^{ij} = P\delta^{ij}, \quad (1.2.4)$$

en donde ρ y P son la densidad de energía y la presión ejercida por la materia (fluido) que constituye al Universo. Sin embargo, el tensor momentum energía se puede generalizar para cualquier métrica si se tiene en cuenta un observador comóvil que se mueve con la expansión cuyo cuádrivector velocidad es $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. De esta manera, se obtiene

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (1.2.5)$$

Así, la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ deviene en

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (1.2.6)$$

la cual recibe el nombre de ecuación de continuidad para la densidad de energía. Por otra parte, retomando la ecuaciones de campo de Einstein 1.2.2, la métrica de FRW y el tensor definido en 1.2.5, se llega a la ecuación más importante en cosmología: la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.2.7)$$

en la cual se aprecia la relación entre el contenido energético del Universo (ρ) y la geometría del espacio (K). Esta relación materia-geometría puede ser ilustrada más

claramente si se define el parámetro de densidad de energía $\Omega = \rho/3m_p^2H^2$. De esta manera

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2H^2}, \quad (1.2.8)$$

en donde se ve que el valor de $3m_p^2H^2$ caracteriza el tipo de geometría del Universo pues:

si $\rho > \rho_{Cri} \rightarrow K > 0$ (Universo cerrado),

si $\rho = \rho_{Cri} \rightarrow K = 0$ (Universo plano),

si $\rho < \rho_{Cri} \rightarrow K < 0$ (Universo abierto),

y por lo tal razón éste término es denominado comúnmente *densidad de energía crítica*. Del mismo modo, definiendo la cantidad $\Omega_K = -\frac{K}{a^2H^2}$, se llega a una ecuación que expresa de manera compacta lo comentado anteriormente (la relación energía-geometría)

$$\Omega + \Omega_K = 1. \quad (1.2.9)$$

Ahora, si se desea encontrar una expresión para la densidad de energía del Universo, se debe dar solución a la ecuación de continuidad para la densidad de energía 1.2.6. Suponiendo la existencia de una ecuación de estado $P = \omega\rho$, la expresión para ρ con ω constante es

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{a}{a_0} \right]^{-3(1+\omega)}, \quad (1.2.10)$$

en donde los subíndices $_0$ indican valores conocidos de a y ρ . Por otro lado, la mecánica estadística nos enseña que, para un conglomerado de partículas, la presión ejercida por el sistema se relaciona con su densidad de energía de la forma [42]:

$$P = \left[\frac{\rho}{3} \right] \left[\frac{\bar{v}}{c} \right]^2, \quad (1.2.11)$$

en donde \bar{v} es la velocidad promedio de las partículas y c es la velocidad de la luz en el vacío. Entonces, de acuerdo con lo anterior, se pueden tener diferentes tipos de fluido llenando el Universo:

- Partículas relativistas ($v \approx c$): en este caso se tiene la ecuación de estado $P = \rho/3$, es decir, $\omega = 1/3$ o

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{a}{a_0} \right]^{-4}. \quad (1.2.12)$$

Al conjunto de partículas con esta característica se le llamará *Radiación*.

- Partículas no relativistas ($v \ll c$): en este caso se tiene la ecuación de estado $P \ll \rho/3$ o $P \approx 0$, es decir, $\omega = 0$ o

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{a}{a_0} \right]^{-3}. \quad (1.2.13)$$

Al conjunto de partículas con esta característica se le llamará *Materia*.

No obstante, el Universo puede estar compuesto de algo más que partículas relativistas y no relativistas. En el caso en el que la densidad volumétrica de partículas (relativistas o no) sea prácticamente cero, ¿qué compone al Universo? La respuesta es: una energía de vacío o energía de punto cero conocida en áreas como la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos. La energía de vacío puede ser visualizada desde la acción definida en 1.2.1, añadiendo a ella una constante $-m_p^2 \Lambda$:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{m_p^2}{2} R - m_p^2 \Lambda + \mathcal{L}_{E-M} \right]. \quad (1.2.14)$$

De esta manera, el tensor momentum-energía toma la forma:

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \Lambda m_p^2, \quad (1.2.15)$$

y el valor de la densidad de energía ρ está relacionado con Λ (denominada comúnmente Constante Cosmológica) como sigue $\rho = \Lambda m_p^2$ y la presión puede ser deducida a partir de la ecuación de continuidad $\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$. En este caso, la presión se encuentra a través de 1.2.6 y se llega a la ecuación de estado:

$$\rho = -P. \quad (1.2.16)$$

Entonces, el Universo está constituido por tres tipos de “fluido”: radiación, materia y constante cosmológica (energía de vacío) por lo que $\rho_{Total} = \rho_R + \rho_M + \rho_\Lambda$ y, si además los fluidos no son interactuantes, cada uno de ellos tiene una ecuación de continuidad propia ($\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + P_i) = 0$), en donde i indica el tipo de fluido.

Para terminar, cabe señalar que existe un aspecto clave para conocer más sobre la cosmología moderna: esto es el Horizonte de Partículas definido como límite sobre las distancias a las cuales los eventos pasados pueden ser observados. Cada observador comóvil define un horizonte de partículas y se escribe como sigue

$$d_{m\acute{a}x} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.2.17)$$

el cual es H^{-1} para un universo dominado por radiación, $2H^{-1}$ para un universo dominado por materia e ∞ para un universo dominado por constante cosmológica.

1.3. Problemas de la Cosmología Estándar

Hasta el momento, la formulación teórica del comportamiento dinámico del Universo luce bastante satisfactoria: hay una correspondencia entre teoría y observaciones [33, 34, 41, 43]. Se ha observado que la métrica de FRW describe muy bien un universo homogéneo e isótropo de acuerdo con el principio cosmológico y la ley de Hubble ha sido deducida de una manera simple lo cual permite comparar las mediciones con las posibles predicciones que se realicen. Sin embargo, han surgido tres problemas importantes dentro de la cosmología: problemas relacionados con la existencia de monopolos magnéticos, la geometría del espacio y su isotropía [10, 11, 12, 13]. Las siguientes situaciones serán tomadas como problemas dentro de la teoría pues exigen un set de condiciones iniciales muy especiales en tiempos tempranos.

1.3.1. Problema de Horizonte

El alto grado de isotropía observado en el fondo cósmico de microondas [33, 34] trae consigo ciertos inconvenientes. De acuerdo con la dinámica de expansión clásica del universo, la región física correspondiente a la máxima distancia coordenada del Universo actual, en el momento de la última dispersión, contiene alrededor de 10^5 horizontes de partículas. Es decir, en el momento de la última dispersión el volumen físico V_H de la región causalmente conectada (con radio igual al horizonte de partículas) y el volumen físico V_S asociado a la máxima distancia coordenada actual cumplen

$$\frac{V_S}{V_H} \approx 10^5, \quad (1.3.1)$$

lo cual evidencia que no es posible tener las correlaciones en los valores de temperatura observados en los mapas de la radiación cósmica de fondo ya que la radiación generada en cada horizonte de partículas tiene en principio un valor de temperatura diferente. Para poder apreciar lo anteriormente dicho, se considera el horizonte de partículas en la actualidad representado en la Fig.1.1: de donde se deduce que la distancia coordenada $\bar{d}_{m\acute{a}x}$ asociada al horizonte de partículas en la actualidad es $C(H_0^{-1}/a_0)$, en donde C caracteriza el tipo de fluido presente en el Universo y el subíndice “0” indicará que se trabaja con los valores de estas cantidades hoy en día. Ahora, en el momento de la última dispersión la distancia física asociada a $\bar{d}_{m\acute{a}x}$ es $\lambda_S = a_S \bar{d}_{m\acute{a}x}$, lo cual es equivalente a

$$\lambda_S = CH_0^{-1} \left[\frac{a_S}{a_0} \right] = CH_0^{-1} \left[\frac{T_0}{T_S} \right], \quad (1.3.2)$$

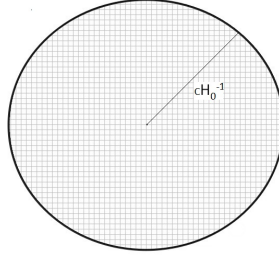


Figura 1.1: Esquema de la región asociada al horizonte de partículas en la actualidad cuyo radio, de acuerdo con 1.2.17, es inversamente proporcional al parámetro de Hubble hoy en día, i.e., $r = CH_0^{-1}$.

en donde T_0 y T_S indican los valores de la temperatura promedio del Universo en la actualidad y en el momento de la última dispersión respectivamente. Además, si se tiene en cuenta que la época de recombinación estuvo dominada por la materia, lo cual es equivalente a decir que la densidad de energía decae como a^{-3} , se puede obtener una relación para dos épocas (denotadas 1 y 2) con las mismas características:

$$H_1^{-1}T_1^{3/2} = H_2^{-1}T_2^{3/2}, \quad (1.3.3)$$

de tal manera que para el caso de la última dispersión y la época actual se cumple

$$H_S^{-1} = H_0^{-1} \left[\frac{T_0}{T_S} \right]^{3/2}. \quad (1.3.4)$$

Luego, es factible encontrar la razón entre el volumen físico de la región comóvil correspondiente al Universo hoy en día V_S y el volumen físico de la región observable en aquella época V_{H_S} :

$$\frac{V_S}{V_{H_S}} = \frac{\lambda_S^3}{(2H_S^{-1})^3} \propto \left[\frac{T_S}{T_0} \right]^{3/2} \approx 10^5, \quad (1.3.5)$$

la cual es esquematizada en la Fig. 1.2, en donde el círculo grande representa la distancia física λ_S y los círculos pequeños son los horizontes de partículas en el momento de la última dispersión (en este caso se han dibujado aquellos que están en los bordes). De esta manera, sólo debería observarse una correlación en los valores de temperatura para la radiación presente en el cono cuyo ángulo es α . En la actualidad, las distancias son más grandes (todo se ha expandido) sin embargo, el ángulo para el cual se deben observar correlaciones en la temperatura (e.g. θ) es igual al ángulo α .

Se sigue que es posible calcular el ángulo α o θ , si se considera el esquema anterior pero en la actualidad: en este caso, el radio del círculo grande es CH_0^{-1} y el radio del

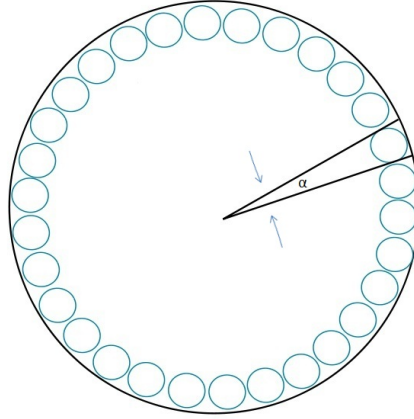


Figura 1.2: Este esbozo ilustra la proporción entre la región física correspondiente a la máxima distancia coordinada del Universo actual, en el momento de la última dispersión, (círculo grande) cuyo radio es λ_S y los horizontes de partículas, en el momento de la última dispersión, (círculos pequeños) cuyo radio es H_S . Sólo se han dibujado las regiones correspondientes al horizonte de partículas en los bordes del círculo grande para mostrar que, de existir correlaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo en las mediciones actuales, debería observarse únicamente una misma temperatura en el interior del cono cuyo ángulo es α .

círculo pequeño es $(2H_S^{-1}/a_S)a_0$, por lo tanto el ángulo es:

$$\theta = \text{Arco}/\text{Radio}, \quad (1.3.6)$$

es decir,

$$\theta = \frac{2(2H_S^{-1}/a_S)a_0}{CH_0^{-1}} = \frac{2(2H_S^{-1}a_0)}{CH_0^{-1}a_S} \approx 1,72^\circ. \quad (1.3.7)$$

Entonces, no debería existir ningún vínculo entre los valores de temperatura observados en el cielo: sólo se deberían observar correlaciones en dichos valores para regiones subtendidas en ángulo de $1,72^\circ$ [10, 13].

Hasta ahora, se ha analizado el problema en el espacio físico, sin embargo, si hace un análisis desde el punto de vista de coordenadas comóviles, se puede hacer un empalme entre el problema de horizonte y de planitud. Además, se obtiene una visión más clara de los dos mismos. Para hacer esto, se tiene en cuenta el horizonte de partículas comóvil ($\tau = d_{m\acute{a}x}/a(t)$) definido a través de la 1.2.17 así

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a d \ln a \left(\frac{1}{aH} \right), \quad (1.3.8)$$

de donde se encuentran

$$\tau \propto \begin{cases} a & \text{Mat.} \\ a^{1/2} & \text{Rad.} \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Por lo tanto, se aprecia que las escalas comóviles entrando al horizonte en la actualidad estuvieron desconectadas en el momento de la última dispersión; esto se debe básicamente a que la cantidad $(aH)^{-1}$ crece monóticamente con el tiempo haciendo que la integral 1.3.8 tenga un comportamiento creciente. Empero, la homogeneidad e isotropía observada en los mapas de la radiación cósmica de fondo muestran que el universo presentaba una gran homogeneidad en el momento de la última dispersión, incluso sobre escalas que no estaban en contacto causal. De esta manera, se infiere que el comportamiento de $(aH)^{-1}$ es clave para entender el problema de horizonte y dar por ende una futura solución al mismo.

1.3.2. Problema de Planitud

Las observaciones hechas en la actualidad por los distintos satélites muestran que la curvatura del espacio es prácticamente cero [16]. Técnicamente, el valor del parámetro de “densidad” para la curvatura del espacio es $|\Omega_{K_0}| < 10^{-2}$. Es decir, vivimos en un espacio plano. Ahora, ¿cuál habrá sido este valor en tiempos tempranos?

De la ecuación de Friedmann,

$$\dot{a}^2 = \frac{\rho a^2}{3m_{p^2}} - K = \frac{(\rho_R + \rho_M)a^2}{3m_{p^2}} - K, \quad (1.3.10)$$

es apreciable que la contribución de la materia relativista (ρ_R) y no relativista (ρ_M) al término ρa^2 en tiempos tempranos ($a \rightarrow 0$) hace que K sea prácticamente despreciable, i.e.,

$$H^2 \propto \rho. \quad (1.3.11)$$

Se ve entonces que en tiempos remotos, cuando se tiene materia, radiación o ambas, el parámetro de Hubble al cuadrado es proporcional a la densidad de energía. Dicho de otra manera, ρ es igual a la densidad crítica en ese momento. Casualmente, en la actualidad el parámetro de densidad de energía es igual a uno con una gran precisión como se comentó anteriormente, entonces, ¿cómo es posible que los valores de Ω sean tan cercanos después de tantos años de evolución? ¿qué proceso ha ocurrido entre las dos épocas? El problema puede ser obviado si se fija Ω igual a uno desde el principio y por lo tanto no habría ningún inconveniente. Sin embargo este ajuste tan particular en las cantidades ρ y ρ_{cri} no es deseado, como no lo es ningún ajuste fino dentro de la física. A este hecho se le conoce como Problema de Planitud.

En cuanto al nombre del problema, éste puede ser comprendido si se estudia la cantidad $|\Omega_K| = \frac{K}{a^2 H^2}$ en tiempos tempranos

$$|\Omega_K| = \begin{cases} \frac{|K|}{a^2 H^2} \propto \frac{|K|}{a^2 \rho_R} \propto \frac{|K|}{a^2 a^{-4}} \propto a^2. \\ \frac{|K|}{a^2 H^2} \propto \frac{|K|}{a^2 \rho_M} \propto \frac{|K|}{a^2 a^{-3}} \propto a. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

En ambos casos se ve que $|\Omega_K|$ aumenta rápidamente con el tiempo. Por lo tanto, su valor debería ser bastante grande en la actualidad. Aún así, su valor es prácticamente cero. Entonces, ¿cómo es posible tener un valor tan pequeño después de tantos años de evolución? ¿Qué explicación se puede dar a este hecho? La opción más sencilla para hacer coincidir el valor de $|\Omega_K|$ en tiempos tempranos con el actual es hacer $K = 0$ (i.e. trabajar en un espacio plano). Pero esto, además de ser una adjudicación muy particular, no provee una solución estable, ya que se está escogiendo el valor central entre dos extremos que hacen diverger $|\Omega_K|$ para tiempos cortos de evolución. Así, ajustar el valor $K = 0$ para el parámetro de curvatura no soluciona satisfactoriamente la situación comentada anteriormente, por esto, el problema es llamado de planitud.

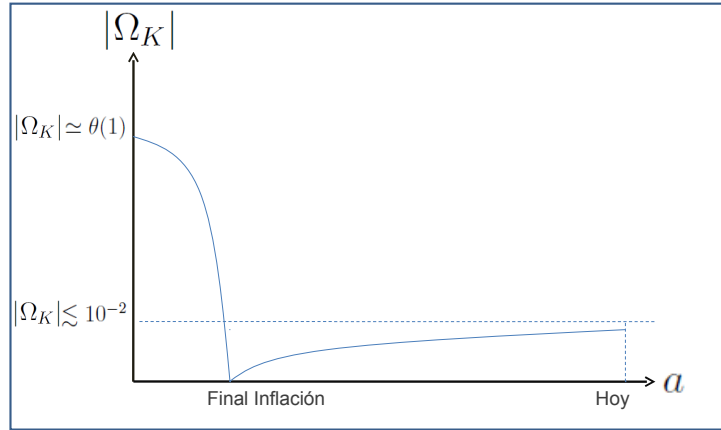


Figura 1.3: Este esbozo muestra el posible comportamiento del parámetro $|\Omega_K|$ para que se dé explicación al problema de planitud. Aquí, se aprecia un rápido decrecimiento (generado por algún mecanismo) de $|\Omega_K|$ en función de a y una subsecuente evolución de acuerdo con la cosmología estándar hasta llegar al valor actual.

Paralelamente, a partir de la ec. 1.3.12, se evidencia la importancia del término $(aH)^{-1}$ pues éste es el que determina la evolución de $|\Omega_K|$. Por lo tanto, si se desea dar una explicación al problema de planitud, se debe hacer un análisis del llamado el radio de Hubble comóvil $((aH)^{-1})$ ya que se requeriría que el parámetro de densidad de energía asociado a la geometría del universo tuviera un comportamiento similar al dado en la Fig. 1.3, en donde se aprecia una época en la cual $|\Omega_K|$ cae a un valor muy pequeño y luego tiene su evolución estándar hasta llegar al valor obtenido hoy en día ($|\Omega_K| < 10^{-2}$).

2

Paradigma inflacionario

Los dos problemas mencionados hasta ahora y el problema de las reliquias no deseadas tienen una particularidad: ellos pueden ser resueltos de la misma manera, con un único mecanismo, el conocido mecanismo inflacionario [7, 8, 9, 44, 45, 46]. De este modo, se evita tomar condiciones iniciales muy especiales para el Universo temprano y por el contrario, se hace uso de un mecanismo dinámico para dar explicación a estos hechos. Teniendo en cuenta lo dicho en el capítulo anterior, i.e., la importancia del radio de Hubble comóvil en la definición del problema de horizonte y planitud, se introduce la idea más importante del paradigma inflacionario: invertir el comportamiento de $(aH)^{-1}$. Dicho de otra manera, se supone que existió una era temprana en el Universo en la cual el radio de Hubble comóvil tiene un valor grande (principio de inflación t_i) y luego presenta un comportamiento decreciente de tal manera que después de t_f (final de inflación) retome su evolución estándar. En las siguientes secciones, se mostrará por qué esta suposición da solución a los problemas de la cosmología estándar. Por ahora, se revisarán las implicaciones de tener

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \quad (2.0.1)$$

La primera conclusión obtenida de la condición anterior es que en la época inflacionaria, la expansión fue acelerada pues se encuentra que

$$\ddot{a} > 0, \quad (2.0.2)$$

lo cual conduce a una relación entre ρ y P de la forma:

$$\rho + 3P < 0. \quad (2.0.3)$$

De esta manera, se observa que durante inflación el Universo estuvo dominado por energía de vacío pues se obtiene un sistema con presión negativa. Por otra parte, es notable que las condiciones 2.0.1 y 2.0.2 son satisfechas cuando se tiene un parámetro de Hubble constante o, lo que es equivalente, un comportamiento exponencial del factor de escala a ; un Universo con estas características es llamado de *de Sitter* y de ahora en adelante se definirá Inflación como la época del Universo en la cual la expansión es exponencial y está dominada por una energía de vacío. Entonces, si se tiene una era inflacionaria suficientemente larga, se puede explicar por qué la curvatura del espacio es prácticamente cero en la actualidad y por qué se tiene una correlación entre los valores de temperatura de la radiación cósmica de fondo medidos en la actualidad en todo el cielo tal como se verá a continuación.

2.1. Solución del Problema de Planitud

Se puede notar que tener un comportamiento del radio de Hubble decreciente hace que el parámetro de densidad $|\Omega_K|$ caiga rápidamente a un valor extremadamente pequeño (muy cercano a cero) pues

$$|\Omega_K| = \frac{K}{a^2 H^2} = K(aH)^{-2} \quad (2.1.1)$$

Así, si se supone la existencia de una era inflacionaria en la cual el factor de expansión $a(t)$ aumentó en un factor de e^N (en donde $N \equiv H_f(t_f - t_i)$, y t_i y t_f representan el inicio y final de inflación respectivamente), se puede evitar la necesidad de adjudicar $K = 0$ como condición inicial en el Universo temprano. Adicionalmente, para que se de una solución satisfactoria al problema de planitud, i.e., se tenga un buen ajuste con el valor conocido hoy en día, se debe conocer el número de e-folds de expansión N .

2.2. Solución del Problema de Horizonte

Si se considera ahora el problema de horizonte, se encontrará que él es resuelto con la misma idea de tener un comportamiento decreciente del radio de Hubble comóvil. Además, la condición necesaria para resolverlo depende igualmente de el número de e-folds de expansión pues se requiere que el horizonte de partículas durante inflación contenga a las escalas que no están comunicadas hoy en día, i.e., se desea establecer un contacto causal en eras tempranas. Para comprender la solución del problema de

horizonte y la idea básica de inflación se debe tener en cuenta el bosquejo de la Fig. 2.1; en esta figura se aprecia que el horizonte de partículas al inicio de inflación contenía las escalas que hoy se conocen como homogéneas e isotropas del Universo y por lo tanto se tenía un contacto causal a pesar de que al final de inflación y en la actualidad las partículas no puedan comunicarse en estas regiones. Luego de una reducción del horizonte de partículas comóvil, se tendrá la evolución estándar de $(aH)^{-1}$, es decir, un crecimiento monótono respecto a $a(t)$. No obstante, en el momento de la última dispersión, las 10^5 regiones no comunicadas ya habrán estado en contacto causal dando cabida a la homogeneidad e isotropía observadas en los mapas de la RCF.

En síntesis, se puede decir que la existencia de una era con expansión exponencial precedente a la época dominada por la radiación resuelve simultáneamente los problemas de la cosmología estándar y, de acuerdo con 2.0.3, está dominada por una energía de vacío. Sin embargo, se conocen estudios que afirman que la cantidad de e-folds necesaria para resolver los dos problemas son diferentes pues se encuentra que $N_H > N_F$ [47] (en donde los subíndices H y F representan el número de e-folds necesarios para resolver los problemas de horizonte y planitud respectivamente). De esta manera, se concluye que dar solución al problema de horizonte implica resolver el problema de planitud y además, se ha tomado como estándar un valor de N al rededor de 60 ($N \sim 60$) para la solución de ambos problemas.

2.3. Inflación Escalar

Para generar una era inflacionaria se debe producir la inecuación $\rho + 3P < 0$ y para esto se debe escoger el contenido del universo. La primera respuesta para el agente generador de inflación se encuentra en los campos escalares: se piensa en un espacio con un promedio de partículas aproximadamente cero, un campo escalar ϕ (llamado *inflatón*) que evoluciona con el tiempo y un potencial que controla el comportamiento del campo [10, 14, 46]. Esta primera explicación de inflación utilizando un campo escalar ϕ produce de entrada homogeneidad e isotropía y además, su tratamiento teórico es bastante sencillo lo cual permite hacer comparaciones con los datos obtenidos de la observación. La dinámica del universo con un campo escalar ϕ está determinado por la acción [1, 2, 10, 12, 13, 14, 46, 48]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.3.1)$$

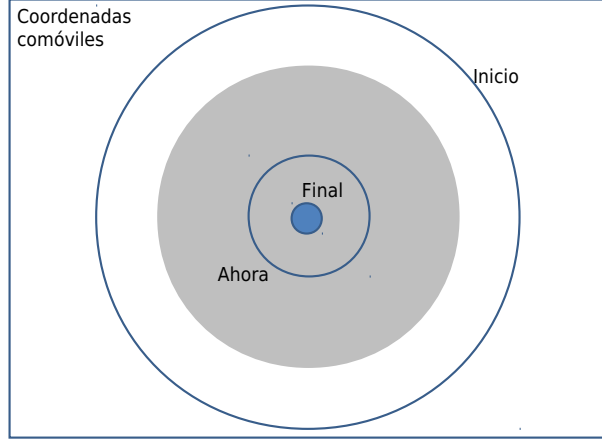


Figura 2.1: En este esquema se desea mostrar el comportamiento temporal del radio de Hubble comóvil: al principio de inflación éste contenía a las escalas del Universo homogéneo (zona sombreada) y luego de un rápido período de evolución, se tendrá el comportamiento estándar hasta el día de hoy.

en donde el primer término de la integral corresponde a la acción de Einstein-Hilbert para la gravedad y los otros dos términos corresponden al lagrangiano de materia-energía \mathcal{L}_{EM} . Entonces, de acuerdo con la definición del tensor momentum energía 1.2.3, para el inflatón se obtiene:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - g^{\mu\nu} V(\phi), \quad (2.3.2)$$

y si además se tiene en cuenta la homogeneidad e isotropía del espacio, i.e., un tensor de la forma 1.2.5 y un universo descrito por la métrica de FRW, se encuentra que

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.3.3)$$

Adicionalmente, de la ecuación de continuidad para la densidad de energía se obtiene la ecuación dinámica para el campo escalar:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.3.4)$$

en donde la prima ' indica derivada respecto al campo escalar.

Ahora, volviendo a las bases de inflación: se debe tener una expansión exponencial y por ende un parámetro de Hubble prácticamente constante, lo cual se traduce de manera cuantitativa en la condición

$$\left| \frac{\Delta H}{H} \right| \ll 1, \quad |\dot{H}| \ll H^2. \quad (2.3.5)$$

Por otra parte, a partir de la primera derivada temporal de la ecuación de Friedmann $\dot{H} = -\dot{\phi}^2/2m_p^2$, la condición 2.3.5 deviene en

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (2.3.6)$$

evidenciando que la variación del campo escalar dentro de su potencial es muy pequeña, pictóricamente se ve como si el campo rodara lentamente a lo largo de la curva de potencial. Este resultado, producto de asumir una era con expansión exponencial (i.e., H prácticamente constante), se complementa con una asunción acerca de la variación de $\dot{\phi}$: se toma una pequeña variación de la derivada temporal del campo, i.e.

$$\left| -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right| \ll 1, \quad (2.3.7)$$

definiéndose de esta manera la *Inflación de tipo Slow-Roll o rodadura lenta* [10, 14]. Este tipo especial de inflación está motivada por dos aspectos: primero, permite tener un tiempo suficiente de expansión acelerada para resolver los problemas de la cosmología ya mencionados y segundo, es un hecho consistente con las observaciones hechas sobre la estadística de la estructura a gran escala [14, 49]. Enseguida, el hecho de tener la condición 2.3.6 reproduce la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3m_p^2}, \quad (2.3.8)$$

la cual, derivando respecto al tiempo y usando la ecuación $\dot{H} = -\dot{\phi}^2/2m_p^2$, conduce a

$$V'(\phi) \simeq 3\dot{\phi}H, \quad (2.3.9)$$

y, usando la ecuación de continuidad, reproduce las condiciones:

$$|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, \quad |\ddot{\phi}| \ll |V'(\phi)|. \quad (2.3.10)$$

Con los resultados anteriores, se pueden definir los parámetros de la inflación del tipo rodadura lenta ε y η (el parámetro ε da cuenta de la pequeña variación de H a lo largo del tiempo y η nos dice que la variación de $\dot{\phi}$ es muy pequeña) así

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1, \quad |\eta - \varepsilon| = \left| -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right| \ll 1, \quad (2.3.11)$$

en donde

$$\eta \approx m_p^2 \left[\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right]. \quad (2.3.12)$$

Adicionalmente, estos parámetros pueden ser escritos en términos del potencial $V(\phi)$ y sus derivadas, con el fin de comprender por qué reciben este nombre [10, 14, 46]

$$\varepsilon \simeq \frac{m_p^2}{2} \left[\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right]^2 \ll 1, \quad |\eta| \simeq \left| m_p^2 \left[\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right] \right| \ll 1, \quad (2.3.13)$$

pues se observa que tanto la primera como la segunda derivada de $V(\phi)$ son muy pequeñas comparadas con el mismo $V(\phi)$, lo que se conoce como un potencial suficientemente plano (a través del cual el campo ϕ “rueda lentamente”).

2.4. Inflación Vectorial

Haber pensado en un campo escalar como generador de inflación garantiza homogeneidad e isotropía y además permite llegar a cálculos sencillos que permiten una fácil comparación con la observación [14, 16]. Sin embargo, existen al menos dos factores que no dan soporte al modelo de inflación escalar: primero, dentro de la física de partículas no se ha observado hasta la fecha un campo escalar fundamental [50]; segundo, los recientes mapas de la Radiación Cómica de Fondo muestran la posible existencia de una dirección preferencial en el universo [51, 52, 53]. Es aquí donde surge la idea de usar campos vectoriales pues ellos introducirían una dirección preferencial en el universo y sí han sido detectados en los aceleradores de partículas, e.g., los campos de Gauge W^\pm y Z_0 [54, 55, 56]. Paralelamente, si se desea modelar un espacio homogéneo y a su vez isótropo, los campos vectoriales podrían ser igualmente utilizados, dicho de otra manera, una combinación adecuada de ellos permitiría producir un espacio con tales características [23, 25, 26].

Queda entonces abierto el terreno de trabajo con los campos vectoriales, terreno amplio ya que el número de campos posibles a emplear no tiene límite. Ahora, ¿cuál es el número indicado de vectores para producir las condiciones requeridas (homogeneidad, isotropía y una posible dirección preferencial en el universo) y cómo están dispuestos en el espacio? En principio, se podría proponer un modelo basado en una sólo campos vectorial, pues este evidenciaría claramente una dirección preferencial en el universo. Sin embargo, con este campo vectorial se generaría una gran expansión anisótropa, lo cual va en contra de una gran número de observaciones. En cambio, con tres campos vectoriales mutuamente ortogonales y orientados cada uno en una dirección del espacio

[23, 25], podría cancelarse la expansión anisótropa generada por cada uno de ellos debido a la disposición que presentan [23, 27]. Sin embargo, este modelo carece de naturalidad pues no hay un soporte sólido para asegurar que los campos están dispuestos de esta manera. Además, se requiere modificar la gravedad lo cual traería cuestionamientos acerca de su validez a escalas del sistema solar. De esta manera, los modelos de inflación vectorial requieren una reevaluación. En primer lugar, deben evitarse los ajustes finos, y en segundo lugar, se debe trabajar en lo posible con la gravedad de Einstein. En el siguiente capítulo se presentará un modelo que permitirá dar solución al problema de ajuste fino en los modelos de inflación vectorial y acercar los modelos cosmológicos inflacionarios a las teorías de física de partículas.

3

Modelo inflacionario basado en campos de Gauge no Abelianos

La falta de naturalidad del modelo inflacionario con tres campos vectoriales de igual norma y mutuamente ortogonales hace que se busquen otros mecanismos que no involucren ajustes finos. Aunque este conjunto de vectores con dichas características es útil para plantear un modelo inflacionario, ellas deberían surgir de algún principio físico o implicación matemática propia de la teoría y, de esta manera, sentar unas bases sólidas para el modelo. Siguiendo esta filosofía, en [30, 31] se propone un modelo que da una elegante explicación para la disposición de los campos vectoriales trabajando en el marco de las teorías de Gauge no Abelianas. De esta manera, además de resolverse el problema de ajuste fino, se empieza a edificar un modelo cosmológico inflacionario que está dentro de una teoría bien conocida en el campo de la física de partículas.

En este capítulo se mostrará un modelo inflacionario basado en campos vectoriales de Gauge (lo cual es bueno pues los campos vectoriales sí han sido observados en la naturaleza, a diferencia de los campos escalares) con el fin de obtener diferentes aspectos deseados: un fondo homogéneo e isótropo, inflación del tipo Rodadura-Lenta, un modelo dentro de un marco común a las teorías físicas de partículas conocidas en la actualidad, una similitud en la naturaleza de los agentes generadores de inflación y los campos vectoriales presentes en el modelo estándar de partículas elementales y una posible explicación a las últimas observaciones hechas acerca de la existencia de una dirección preferencial en el universo [51, 52, 53]. Básicamente, se desea trabajar dentro de una teoría de Gauge $SU(2)$ por lo que son necesarios tres campos vectoriales A^a_μ que mantengan la teoría invariante ante el grupo de transformaciones $SU(2)$. La idea

del modelo es tomar dichos campos como los generadores de inflación y a través de algunos pasos poder justificar el uso de la métrica de FRW, resolver el problema de ajustes finos de la propuesta de tres campos vectoriales y gravedad modificada, obtener un fondo invariante ante rotaciones espaciales y por su puesto producir inflación del tipo Rodadura-Lenta.

3.1. Escogencia de la forma de los campos vectoriales

La escogencia de la forma de los campos vectoriales debe ser tal que se pueda obtener una expansión isótropa y se logren las condiciones geométricas deseadas del espacio tiempo, i.e., homogeneidad e isotropía con respecto a todos los puntos. Aunque se pueda pensar que se trata nuevamente de un ajuste fino, éste no es el caso pues la escogencia estará bien fundamentada. Primero, se trabajará en un Gauge temporal, i.e., debido a que se trabaja dentro de una teoría invariante ante transformaciones de Gauge, se tiene la libertad de asignar el valor de alguna de las componentes del campo pues las cantidades físicas no se ven afectadas ante este hecho. Así, la primera condición para los campos A^a_μ se traduce en:

$$A^a_0 = 0. \tag{3.1.1}$$

Ahora, sólo resta asignar las componentes espaciales de los campos vectoriales, esto será hecho a través de un ansatz, el cual es justificado a través del hecho de que es un atractor [32]. Dicho de otra manera, si al principio de inflación se trabaja con una métrica de Bianchi tipo I y tres campos que no generen inflación isótropa, después de pocos e-folds de expansión la solución de las ecuaciones de campo convergen al sistema que produce expansión isótropa y por lo tanto se obtiene un universo descrito por la métrica de FRW. De este modo, la forma escogida es:

$$A^a_i = \phi \delta^a_i, \tag{3.1.2}$$

pues de esta manera se pueden identificar los índices del álgebra de Gauge con los índices espaciales, dicho de otra manera, cada uno de los vectores de Gauge se ubican en las tres direcciones del espacio en coordenadas cartesianas coincidiendo con las componentes del vector A^a_i en un espacio internoⁱ. Así, sabiendo que el grupo de las rotaciones espaciales $O(3)$ es una imagen homomórfica del grupo $SU(2)$ ⁱⁱ, se concluye que el modelo basado en este tipo de campos es rotacionalmente invariante. Si se hace una rotación en el espacio

ⁱVer apéndice A

ⁱⁱEn el apéndice A se tratará este aspecto en detalle.

abstrato (espacio de Isospín) y las propiedades del sistema no cambian, entonces en el espacio físico (real) se tendrá igualmente invariancia rotacional. En breve, el hecho de tener cada campo en cada una de las direcciones del espacio hace que se tenga inflación isótropa. Además, se puede probar que la forma escogida para los campos A^a_μ satisface las ecuaciones de movimiento (tanto las ecuaciones de campo de Einstein, como las ecuaciones de evolución para los campos) junto con la métrica de FRW. En la siguiente sección, será notable que el tensor momentum-energía toma la forma de un fluido perfecto cuando se trabaja con el ansatz comentado y la métrica de FRW.

3.2. Ecuaciones de Einstein y de evolución

En esta sección se desea mostrar la consistencia del ansatz escogido en 3.1.2, esto se hará a través del estudio de la dinámica de un sistema caracterizado por el lagrangiano $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$, en donde $F^a_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos definidos para una teoría de Gauge $SU(2)$ ⁱⁱⁱ definido a través de A^a_μ así: $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\epsilon^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu$, en donde g es la constante de acoplamiento entre la materia y los campos de Gauge $SU(2)$ y ϵ^a_{bc} es el símbolo de Levi-Civita de tres índices. Primero, se observa la forma que adquiere la ecuación de evolución para los campos de Gauge no Abelianos^{iv}

$$D_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial F^a_{\mu\nu}} = 0, \quad (3.2.1)$$

en donde D_μ es la derivada covariante y $F^a_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos definidos para una teoría de Gauge $SU(2)$, cuando son evaluados la métrica de FRW y la ec. 3.1.2. Así, la expresión obtenida después de dicho proceso es:

$$\frac{d}{a^3 dt} \left(a^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.2.2)$$

la cual es equivalente a la ecuación de movimiento de un modelo inflacionario compuesto por un campo escalar ϕ y con un lagrangiano $\mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi, a(t))$ y se debe notar que el resultado es válido para cualquier métrica que no dependa de A^a_μ (i.e., se puede reemplazar a^3 por $\sqrt{-g}$). En otras palabras, la ecuación de movimiento del modelo de inflación vectorial (con lagrangiano reducido $\mathcal{L}_{red} = \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi, a(t))$) es idéntica a la ecuación de movimiento de un modelo de expansión isótropa: un aspecto clave para motivar el uso de la expresión 3.1.2 pues éste es uno de los objetivos principales del modelo vectorial basado en campos de Gauge no Abelianos.

ⁱⁱⁱVer apéndice B para un estudio más detallado.

^{iv}Ver discusión del apéndice C

Por otra parte, se observa que el tensor momentum-energía obtenido tiene las mismas componentes que un tensor asociado a un fluido perfecto. Esto es, las componentes diferentes de cero son $T_{00} = \rho$ y $T_{ij} = P g_{ij}$, en donde ρ y P son la densidad de energía y la presión del fluido respectivamente. Para llegar a este resultado, se parte de la definición usual para el tensor momentum energía, i.e., en términos de variaciones respecto a la métrica:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.2.3)$$

en donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espaciotiempo utilizado, g su determinante y $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$ es el lagrangiano de materia que caracteriza el modelo físico. Ahora, después de algunos procedimientos algebraicos^v, se puede probar que el tensor momentum-energía puede ser escrito de las siguientes maneras:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (3.2.4)$$

y

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^a_{\sigma\mu}} F^a_{\sigma\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (3.2.5)$$

Así, si se evalúa la última ecuación en un universo de FRW y se utiliza el ansatz escogido (de donde se obtiene $F^a_{0i} = \dot{\phi}\delta^a_i$ y $F^a_{ij} = -g\phi^2\varepsilon^a_{ij}$), se encuentran las expresiones para la densidad de energía y presión del fluido:

$$\rho = \frac{\partial\mathcal{L}_{red}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}_{red}, \quad (3.2.6)$$

$$P = \frac{\partial(a^3\mathcal{L}_{red})}{\partial a^3}, \quad (3.2.7)$$

confirmándose de esta manera que el Universo compuesto por este tipo de campos se puede modelar como un fluido homogéneo e isótropo. Es importante notar que todos los procedimientos hechos hasta el momento son válidos para cualquier Lagrangiano $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$ siempre y cuando se haga uso del ansatz y la métrica de FRW. Por lo tanto, el Gauge escogido y la forma utilizada para las componentes espaciales de los campos resultan satisfactorias pues reproducen las propiedades requeridas por el principio cosmológico, conllevan una era inflacionaria isótropa y además, todo esto es independiente del Lagrangiano escogido para el modelo.

^vVer discusión del apéndice D

3.3. Lagrangiano del modelo

Hasta ahora se ha mostrado que el ansatz efectuado produce expansión isótropa y se preserva la invariancia rotacional del sistema. Sin embargo, para obtener un satisfactorio modelo inflacionario, se debe dar una forma específica al Lagrangiano, lo cual no anula lo dicho en la sección anterior pues todos los resultados son válidos para cualquier \mathcal{L} .

El primer término a escoger para este lagrangiano es $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$, y existen varias razones para hacerlo: a) Simplicidad pues es el término invariante de Gauge y de Lorentz de menor grado posible; b) analogía con la teoría de Gauge $U(1)$, la cual describe las interacciones electromagnéticas; c) debido a que no se tienen términos de masa, al igual que en el caso de $U(1)$, la parte del tensor momentum energía $T_{\mu\nu}$ asociado a este término es equivalente a la de un fluido de radiación ($P = \rho/3$, lo cual es bueno pues se espera que después de inflación se tenga una era dominada por materia relativista). No obstante, si se trabaja únicamente con este término F^2 , no se reproduce la condición 2.0.3 requerida para tener una dinámica inflacionaria ($\ddot{a} > 0$), por lo que es necesario seguir introduciendo más términos dentro del lagrangiano.

La segunda componente a tener en cuenta es, igualmente por simplicidad, un término de orden F^4 , e.g., $-\frac{1}{16}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} F_b^{\alpha\beta} F_b^{\alpha\beta}$ y se espera que su contribución al tensor $T_{\mu\nu}$ lleve a la inecuación requerida. Sin embargo, no se llega una expresión clara que permita establecer al menos una condición para ρ y P de tal manera que se obtenga la ec. 2.0.3^{vi} y por ende se debe elegir entre dos opciones: hacer una modificación al término F^4 o tomar términos de órdenes superiores como F^6 , F^8 , etc. Empero, debido a que los términos F^6 o superiores son menos usuales en física, se tomará una variación del término F^4 de tal manera que se obtenga $\rho + 3P < 0$: una adecuada escogencia es la siguiente:

$$\frac{\kappa}{384}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\sigma}^a)^2, \quad (3.3.1)$$

en donde se ha hecho $8\pi G = m_p^{-2} = 1$, κ es una constante y $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ es un tensor contravariante definido a través de una densidad tensorial contravariante, $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ (símbolo de Levi-civita), y el determinante de la métrica así $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}/\sqrt{-g}$. Con este nuevo término, el lagrangiano total queda escrito como sigue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\sigma}^a)^2, \quad (3.3.2)$$

con el cual es posible calcular el tensor momentum-energía, i.e., las expresiones para ρ

^{vi}Ver propuesta y discusión del capítulo 5.

y P^{vii}

$$\rho = \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) + \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6}, \quad (3.3.3)$$

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) - \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6}. \quad (3.3.4)$$

Ahora, si se definen las densidades de energía ρ_{YM} y ρ_κ asociadas al término de Yang-Mills y al término específico F^4 respectivamente como sigue

$$\rho_{YM} = \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right), \quad (3.3.5)$$

$$\rho_\kappa = \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6}, \quad (3.3.6)$$

entonces la densidad de energía y la presión tomarían la forma

$$\rho = \rho_{YM} + \rho_\kappa, \quad (3.3.7)$$

y

$$P = \frac{1}{3} \rho_{YM} - \rho_\kappa, \quad (3.3.8)$$

de donde se puede observar que la ecuación de estado asociada al término κ es $P = -\rho$, la cual hace que este término sea bastante apropiado para generar una era de expansión acelerada. No obstante, se debe poner una condición sobre estas las densidades ρ_{YM} y ρ_κ para poder obtener $\rho + 3P < 0$: para el modelo de estudio, la suma entre ρ y $3P$ totales es

$$\rho + 3P = 2(\rho_{YM} - \rho_\kappa) \quad (3.3.9)$$

de donde se puede ver que para tener la dinámica inflacionaria deseada se debe cumplir que $\rho_{YM} < \rho_\kappa$. Es decir, al principio de inflación la componente de la densidad de energía relacionada con el término F^4 va a dominar sobre la componente del término usual de Yang-Mills, lo cual es bueno pues así se podría dar una cota sobre el valor del parámetro libre del modelo, κ . Luego, después de la evolución temporal de cada término, se espera que ρ_{YM} incremente más rápido que ρ_κ de tal manera que al final de inflación se tenga $\rho_{YM} > \rho_\kappa$ y una subsecuente era dominada por la radiación.

Por último, se encontrará la ecuación de Friedmann y la ecuación de evolución para los vectoriales o ecuación de evolución para ϕ^{viii} . La ecuación de Friedmann, tal como

^{vii}Revisar el apéndice E para cálculos más detallados

^{viii}Revisar el apéndice E para cálculos más detallados.

se encontró en el capítulo 1 (tomando $m_p^2 = 1$) se escribe como sigue :

$$H^2 = \frac{\rho}{3}, \quad (3.3.10)$$

y haciendo uso de la expresión para la densidad de energía, ec. 3.3.3 se obtiene

$$H^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6} \right) = \frac{1}{3} (\rho_{YM} + \rho_\kappa). \quad (3.3.11)$$

Por otra parte, la derivada de la ecuación de Friedmann, la cual puede ser útil en cálculos posteriores, se expresa así:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho + P), \quad (3.3.12)$$

o para el caso de nuestro modelo

$$\dot{H} = - \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) = -\frac{2}{3} \rho_{YM}. \quad (3.3.13)$$

Para terminar con las ecuaciones que serán objeto de análisis tanto analítico como numérico, se calcula las ecuaciones de campo para A^a_μ , las cuales se reducen a una debido al ansatz efectuado^{ix}:

$$\left(1 + \kappa \frac{g^4 \phi^4}{a^4} \right) \frac{\ddot{\phi}}{a} + \left(1 + \kappa \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \right) \frac{2g^2 \phi^3}{a^3} + \left(1 - 3\kappa \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) \frac{H \dot{\phi}}{a} = 0. \quad (3.3.14)$$

Con las ecuaciones obtenidas, ec. 3.3.11, ec. 3.3.13 y ec. 3.3.14, se puede empezar a hacer un análisis completo de la dinámica inflacionaria del tipo Rodadura-Lenta: uno de los principales objetivos de este modelo.

3.4. Inflación del tipo Rodadura-Lenta

En esta última sección se tratará un tema de vital importancia: inflación del tipo Rodadura-Lenta. Este tipo de inflación es importante por dos razones: primero, permite obtener un tiempo apreciable de expansión acelerada de tal manera que se puedan resolver los problemas de la cosmología estándar y segundo, estaría de acuerdo con últimas predicciones hechas, a partir de las observaciones, sobre la invariancia de

^{ix}Revisar el apéndice E para cálculos más detallados.

escala [10]. Para empezar, se reintroducen los parámetros que caracterizan este tipo de inflación [10, 14, 46], i.e., ε y η , los cuales fueron definidos de la siguiente manera:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad |\eta - \varepsilon| = \left| -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right|. \quad (3.4.1)$$

Sin embargo, para hacer el estudio un poco más general, estos parámetros se escribirán sólo en términos de H y sus derivadas como sigue^x

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta \equiv -\frac{\ddot{H}}{2\dot{H}H}, \quad (3.4.2)$$

de donde se puede obtener una relación entre los dos parámetros

$$\eta = \varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon H}. \quad (3.4.3)$$

Ahora, antes de encontrar las expresiones para ε y η concernientes al modelo de estudio, se examinarán las condiciones que deben existir sobre estos parámetros y sus implicaciones. Del capítulo 2 se sabe que se exige $\varepsilon, |\eta| \ll 1$ para poder tener una dinámica de Rodadura-Lenta, por lo tanto, para el modelo en específico (usando 3.3.11 y 3.3.13) se encuentra que

$$\varepsilon = \frac{2\rho_{YM}}{\rho_{YM} + \rho_\kappa} \ll 1, \quad (3.4.4)$$

de donde se deduce que ρ_κ debe dominar sobre ρ_{YM} , o $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$ para poder tener la dinámica deseada. Después de un tiempo de evolución, ρ_{YM} aumentará más rápidamente que ρ_κ de tal manera que la inflación del tipo Rodadura-Lenta finalice cuando $\rho_{YM} \sim \rho_\kappa$ y la era de expansión acelerada vea su fin cuando $\rho_{YM} > \rho_\kappa$. Algo similar había sido encontrado anteriormente, donde se discutía de la viabilidad de usar un término F^4 en el lagrangiano de materia; en tal caso se había concluido que se requería $\rho_\kappa > \rho_{YM}$ para poder obtener $\rho + 3P < 0$. Sin embargo, aquí se exige que un término sea mucho mayor que el otro por lo que se infiere que la expresión $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$ es una condición suficiente más no necesaria para que se produzca una era de expansión acelerada.

Volviendo a las condiciones necesarias para lograr una dinámica de Rodadura-Lenta: se había comentado hasta ahora que los parámetros ε y η deben ser muy pequeños comparados con 1, no obstante, estos parámetros fueron escritos en términos de H y sus derivadas y no hay una relación explícita con el campo escalar físico que caracteriza

^xVer apéndice F para un análisis más profundo.

al modelo. Por esto, además de asegurarse de tener una variación pequeña de H (el cual está relacionado con $a(t)$), se impondrá una condición sobre el campo ψ ^{xi} a través del siguiente parámetro:

$$\delta \equiv -\frac{\dot{\psi}}{\psi H}. \quad (3.4.5)$$

Así, con este nuevo parámetro se completa el conjunto de parámetros de Rodadura-Lenta del modelo basado en campos de Gauge $SU(2)$:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta \equiv -\frac{\ddot{H}}{2\dot{H}H}, \quad \delta \equiv -\frac{\dot{\psi}}{\psi H}. \quad (3.4.6)$$

Ahora, los parámetros ε y η pueden ser escritos en términos del nuevo parámetro δ y del campo escalar ψ de tal manera que las condiciones de rodadura lenta sean más fáciles de aplicar. Entonces, usando las ec. 3.3.11 y 3.3.13 en la definición del parámetro ε se obtiene

$$\varepsilon = 2 - 2\frac{\rho_\kappa}{\rho_{YM} + \rho_\kappa} = 2 - \frac{\kappa g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6 H^2}, \quad (3.4.7)$$

lo cual puede ser convertido en

$$\varepsilon = 2 - \kappa g^2 \psi^6 (1 - \delta)^2, \quad (3.4.8)$$

si se tiene en cuenta que $\delta = \dot{\phi}/a$ y $\delta = 1 - \dot{\phi}/H\phi$. De esta manera, es posible encontrar un expresión para η pues se conoce, de la ec. 3.4.3, una relación entre él y el parámetro ε

$$\eta = \varepsilon - (2 - \varepsilon) \left[\frac{\dot{\delta}}{H(1 - \delta)\varepsilon} + \frac{3\delta}{\varepsilon} \right]. \quad (3.4.9)$$

Así, con las ecuaciones para ε y η , se pueden tener un idea acerca del orden de magnitud de cada parámetro y a su vez revisar si efectivamente los tres son mucho menores que 1. Se empieza exigiendo que $\varepsilon \ll 1$ y a través de la ecuación 3.4.3 se concluye que para evitar ajustes finos en el valor de η , la derivada de ε debe tener el siguiente orden de magnitud

$$\dot{\varepsilon} \sim H\varepsilon^2, \quad (3.4.10)$$

de donde se deduce igualmente que $\eta \sim \varepsilon$. En cuanto al parámetro δ , se puede utilizar la ecuación 3.4.9 y el resultado anterior para inferir que

$$\delta \sim \varepsilon^2. \quad (3.4.11)$$

^{xi}Ver apéndice F.

Hasta ahora se han encontrado los órdenes de magnitud de η y δ en términos de ε . Por lo tanto, sólo resta encontrar las expresiones explícitas para los tres parámetros definidos en 3.4.6 dentro del régimen de rodadura lenta. Anteriormente se había llegado a la conclusión de que $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$, luego la ecuación de Friedmann se ve alterada de la siguiente manera

$$H^2 \simeq \frac{1}{3}\rho_\kappa, \quad (3.4.12)$$

o explícitamente

$$H^2 \simeq \frac{\kappa g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4}{2 a^6}. \quad (3.4.13)$$

Por ende, el parámetro ε queda expresado como sigue

$$\varepsilon \simeq \frac{2}{\kappa g^2 \psi^4} + \frac{g^2 \psi^4}{H^2}. \quad (3.4.14)$$

Sin embargo, de la expresión 3.4.7 se puede deducir que en el régimen de rodadura lenta $\kappa \simeq 2/g^2 \psi^6$ y de esta manera se obtiene:

$$\varepsilon \simeq \psi^2 + \frac{g^2 \psi^4}{H^2}, \quad (3.4.15)$$

lo cual es equivalente a

$$\boxed{\varepsilon \simeq \psi^2(\gamma + 1)}, \quad (3.4.16)$$

si se define $\gamma = \psi^2 g^2 / H^2$. Siguiendo la misma línea de análisis se puede encontrar la expresión para el parámetro η en el régimen de rodadura lenta: para esto se debe utilizar la ec. 3.4.3 y la última expresión encontrada para ε , en donde ya se han hecho las aproximaciones necesarias. Así, si se reemplaza 3.4.16 en 3.4.3, se llega a que

$$\eta \simeq \psi^2 + \delta, \quad (3.4.17)$$

pero de acuerdo con los análisis hechos en renglones anteriores sobre los órdenes de magnitud, la contribución de δ no es tan relevante y se puede concluir que

$$\boxed{\eta \simeq \psi^2}. \quad (3.4.18)$$

Por último, se analiza el parámetro definido como δ . Entonces, si se introducen las expresiones para ε y η en la ec. 3.4.9, se llega a una relación entre ε , γ , δ y su primera derivada temporal

$$\boxed{\left[\frac{\dot{\delta}}{H\delta} + 3 \right] \simeq \frac{\gamma}{2(\gamma + 1)} \varepsilon^2}, \quad (3.4.19)$$

de donde se puede ver que si $\dot{\delta}/H\delta \ll 1$, se infiere que $\delta \sim \varepsilon^2$, lo cual es consecuente con el análisis hecho acerca de los órdenes de magnitud de cada parámetro y con el análisis numérico del siguiente capítulo.

Una de las motivaciones para el uso de las condiciones de rodadura lenta es la cantidad de e-folds producida al final de inflación. Por ende, se debe revisar si se producen los e-folds necesarios para resolver los problemas de la cosmología estándar [47]. Para esto, se debe tener en cuenta que $\delta \equiv -\dot{\psi}/H\psi$ y $\delta \sim \varepsilon^2$, lo cual permite establecer que $g^2\psi^2$ o γH^2 permanecen prácticamente constantes durante el régimen de rodadura lenta y de esta manera obtener que

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \simeq \frac{\gamma + 1}{\gamma_i + 1}, \quad (3.4.20)$$

y

$$\frac{\gamma}{\gamma_i} \simeq \frac{H^2}{H_i^2}, \quad (3.4.21)$$

en donde el subíndice i indica el inicio de inflación. Ahora, teniendo en cuenta que al final de inflación del tipo Rodadura-Lenta $\varepsilon = 1$, se llega a que

$$\gamma \simeq \frac{\gamma_i + 1}{\varepsilon_i}, \quad (3.4.22)$$

y

$$\frac{H_i^2}{H^2} \simeq \frac{\gamma_i}{\gamma_i + 1} \varepsilon_i, \quad (3.4.23)$$

de donde es posible encontrar el número de e-folds pues se necesitan los valores inicial y final del parámetro de Hubble, ya que el número de e-folds de expansión en un periodo comprendido entre t_i y t_f definido como

$$N_e \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (3.4.24)$$

puede ser expresado en términos del parámetro de Hubble en lugar del tiempo, a través del cambio de variable $dt = dH/\dot{H}$, como sigue

$$N_e = - \int_{H_i}^{H_f} \frac{dH}{H\varepsilon}. \quad (3.4.25)$$

Por último, se aplicarán todas las aproximaciones hechas para poder obtener una expresión para N_e : primero, se hará un cambio de variable a través de γ y el hecho de que ψ varíe lentamente durante rodadura lenta, i.e., se usará $\gamma = g^2\psi^2/H^2$ (y $dH = -\frac{H^3}{2g^2\psi^2}d\gamma$) para llegar a

$$N_e \simeq -\frac{1}{2\psi^2} \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} \frac{-1/\gamma^2}{(\gamma + 1)/\gamma}. \quad (3.4.26)$$

Segundo, se efectúa el cambio de variable $U = 1 + 1/\gamma$ para poder resolver la integral y encontrar finalmente:

$$N_e \simeq \frac{\gamma_i + 1}{2\varepsilon_i} \text{Ln} \left[\frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i} \right]. \quad (3.4.27)$$

De esta manera, el número de e-folds depende de los valores iniciales de γ y ε y no de la evolución que se tenga en el transcurso de inflación. Entonces, para poder resolver los problemas de la cosmología estándar se deben fijar los valores iniciales de ψ , H , g y κ , los cuales deben estar dentro del rango conocido por otro tipo de modelos, observaciones hechas en los últimos años y deben producir las características típicas de los modelos inflacionarios, una vez sean usados para resolver numéricamente las ecuaciones de campo como será visto en el siguiente capítulo.

4

Solución numérica de las ecuaciones de evolución

En este capítulo se desea mostrar la solución numérica del sistema de ecuaciones formado por 3.3.11, 3.3.13 y 3.3.14. Esto es hecho para revisar si las variables físicas presentan las propiedades esperadas durante inflación y más aún, si se dan las condiciones necesarias para que se obtenga una era inflacionaria. A partir del capítulo 3, se puede notar que el modelo posee dos parámetros libres (κ y g). Además, una solución de las tres mencionadas ecuaciones requiere el conocimiento de los valores iniciales de los dos grados de libertad del modelo ($\phi(t)$ y $a(t)$) y sus derivadas. Sin embargo, se debe hacer énfasis en que ϕ no es el campo físico pues si se tomara en cuenta un término de masa, en un universo de FRW se tendría la acción

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a \right\} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{3}{2} m^2 \frac{\phi^2}{a^2} \right\} \quad (4.0.1)$$

la cual no transforma de la manera usual en que lo hace un campo escalar, mientras que si se define $\psi = \phi/a$, se tiene que

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{3}{2} m^2 \psi^2 \right\} \quad (4.0.2)$$

y por lo tanto en un sistema primado $S = \int dx'^4 \sqrt{-g'} \left\{ \frac{3}{2} m^2 \psi'^2 \right\}$. De esta manera, se pasa de tener ϕ a ψ y de tener $a(t)$ a $H(t) = \dot{a}/a$, pues es mejor trabajar con el parámetro de Hubble ya que es una cantidad física y medible, mientras que el factor de expansión puede ser reescalado como se desee. Así, teniendo en cuenta que

$$\frac{\dot{\phi}}{a} = \dot{\psi} + \psi H, \quad \frac{\ddot{\phi}}{a} = \ddot{\psi} + 2\dot{\psi}H + \psi\dot{H} + \psi H^2, \quad (4.0.3)$$

las ecuaciones de movimiento se escriben como sigue

$$2H^2 = (\dot{\psi} + \psi H)^2(1 + \kappa g^2 \psi^4) + g^2 \psi^4, \quad (4.0.4)$$

$$\dot{H} = -(\dot{\psi} + \psi H)^2 - g^2 \psi^4, \quad (4.0.5)$$

$$(1 + \kappa g^2 \psi^4)(\ddot{\psi} + 2\dot{\psi}H + \psi\dot{H} + \psi H^2) + (1 + \kappa(\dot{\psi} + \psi H)^2)2g^2\psi^3 + (1 - 3\kappa g^2 \psi^4)(\dot{\psi} + \psi H)H = 0. \quad (4.0.6)$$

Ahora, en cuanto a las condiciones iniciales de ψ , $\dot{\psi}$ y H , y los valores de los parámetros κ y g , se debe tener en cuenta los últimos análisis de los datos provenientes WMAP. Las cantidades pertenecientes a esos análisis y tenidas en cuenta para ajustar el modelo a las observaciones son: la potencia espectral $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$, el índice espectral $n_{\mathfrak{R}}$ y a la relación tensor-a-escalar r [10]. Entonces, teniendo en cuenta las últimas estimaciones hechas, e.g., en [16] sobre estas cantidades

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathfrak{R}} &\simeq 2,5 \times 10^{-9}, \\ n_{\mathfrak{R}} &= 0,968 \pm 0,012, \\ r &< 0,24, \end{aligned} \quad (4.0.7)$$

se encuentran los intervalos posibles para los parámetros y valores iniciales del modelo inflacionario de Gauge [31]

$$\begin{aligned} \psi &= (3,5 - 8,0) \times 10^{-2} M_{pl}, \quad H \simeq 3,5 \times 10^{-5} M_{pl}, \\ \frac{g^2}{4\pi} &= (0,13 - 5,0) \times 10^{-7}, \quad \kappa = (4,6 - 17) \times 10^{13} M_{pl}^{-4}. \end{aligned} \quad (4.0.8)$$

De esta manera, teniendo las condiciones iniciales de las variables físicas, se procede a implementar un método de integración para encontrar el comportamiento de cada una de ellas. El método numérico a implementar es bastante simple pero provee, al menos en este caso, buenos resultados. La idea del algoritmo es utilizar las condiciones iniciales ψ_i , $\dot{\psi}_i$, y H_i para calcular los valores de H , \dot{H} , $\dot{\psi}$ y ψ en un tiempo cercano (próximo). Luego de esto, los valores calculados son tomados como condiciones iniciales y se repite el proceso cuantas veces sea necesario para observar un comportamiento claro de las variables; el intervalo de tiempo tomado entre cada proceso de aproximación será llamado Δt y tomará un valor de $\Delta t = 0,5 \times 10^1$ pues debido a la pequeña variación de las cantidades, es posible observar aspectos importantes de cada una de ellas con este tiempo. Ahora, para escribir el algoritmo de una manera más sencilla y por lo tanto el

software ejecute más fácilmente las iteraciones, se harán algunos cálculos necesarios. Primero, se despejará H de la ec. 4.0.4, la cual puede ser escrita como sigue

$$H^2(2 - \psi^2 - \kappa g^2 \psi^6) - H2\dot{\psi}\psi(1 + \kappa g^2 \psi^4) - (\dot{\psi}^2(1 + \kappa g^2 \psi^4) + g^2 \psi^4) = 0, \quad (4.0.9)$$

de donde se obtiene una expresión para H sólo en términos de ψ y su derivada temporal

$$H = \frac{2\dot{\psi}\psi(1 + \kappa g^2 \psi^4) + \sqrt{4\dot{\psi}^2\psi^2(1 + \kappa g^2 \psi^4)^2 + 4(\dot{\psi}^2(1 + \kappa g^2 \psi^4) + g^2 \psi^4)(2 - \psi^2 - \kappa g^2 \psi^6)}}{2(2 - \psi^2 - \kappa g^2 \psi^6)}. \quad (4.0.10)$$

Sin embargo, esta ecuación puede tomar una forma más manejable si se define

$$\begin{aligned} m &= 2(2 - \psi^2 - \kappa g^2 \psi^6), \\ q &= \dot{\psi}^2(1 + \kappa g^2 \psi^4) + g^2 \psi^4, \\ r &= 2\dot{\psi}\psi(1 + \kappa g^2 \psi^4), \end{aligned} \quad (4.0.11)$$

de tal manera que

$$H = \frac{r}{m} + \frac{\sqrt{r^2 + 2mq}}{m}. \quad (4.0.12)$$

Así, con este H se puede calcular \dot{H} con ayuda de 4.0.5 (lo cual no es necesario hacer pues puede ser implementado directamente en el algoritmo) y también se puede obtener la segunda derivada de ψ (de donde se encontrará $\dot{\psi}$ y seguidamente ψ). Entonces, retomando la ec. 4.0.6, se puede obtener la expresión

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\frac{(1 + \kappa(\dot{\psi} + \psi H)^2)2g^2\psi^3}{(1 + \kappa g^2 \psi^4)} - \frac{(1 - 3\kappa g^2 \psi^4)(\dot{\psi} + \psi H)H}{(1 + \kappa g^2 \psi^4)} \\ &\quad - 2\dot{\psi}H - \psi\dot{H} - \psi H^2, \end{aligned} \quad (4.0.13)$$

la cual puede ser escrita de una manera más manejable si se definen las tres variables

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 + \kappa g^2 \psi^4), \\ a_2 &= (1 + \kappa(\dot{\psi} + \psi H)^2)2g^2\psi^3 + (1 - 3\kappa g^2 \psi^4)(\dot{\psi} + \psi H)H, \\ p &= \frac{a_2}{a_1} + \psi\dot{H} + \psi H^2. \end{aligned} \quad (4.0.14)$$

de tal manera que

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}H - p. \quad (4.0.15)$$

De este modo, es fácil despejar $\dot{\psi}$ pues la primera aproximación será tomar

$$\ddot{\psi}_n = \frac{\dot{\psi}_n - \dot{\psi}_{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.0.16)$$

en donde n indica de ahora en adelante el momento actual y $n - 1$ un tiempo cercanamente anterior; por lo tanto

$$\dot{\psi}_n = \frac{\dot{\psi}_{n-1} - p\Delta t}{1 + 2H\Delta t}. \quad (4.0.17)$$

Algo similar es hecho para encontrar ψ_n pues se tomará

$$\psi_n = \psi_{n-1} + \dot{\psi}_n \Delta t. \quad (4.0.18)$$

Habiendo definido adecuadamente las variables, se dispone a obtener los resultados de todas las iteracionesⁱ. Ya que los resultados son gráficos, sería interesante observar: el comportamiento de ψ (pues es el campo escalar del modelo), ε (pues es necesario para tener inflación del tipo rodadura lenta), N (pues uno de los objetivos es solucionar los problemas de la cosmología estándar) y la observar cómo evolucionan ρ_{YM} y ρ_κ (pues en el capítulo 3 se encontró que para obtener una era inflacionaria $\rho_\kappa > \rho_{YM}$). Ya que las cantidades ε , ρ_{YM} y ρ_κ dependen del parámetro de Hubble, el campo escalar y su primera derivada temporal, no es necesario hacer algún cambio o aproximación para obtenerlos. No obstante, N (el cual está definido como una integral, de acuerdo con la ec. 3.4.24) será calculado por el método de integración por trapecios, i.e., $N_n = N_0 + (H_n + H_0)\Delta t/2$. Así, se puede observar en la parte izquierda de la Fig. 4.1 que en tiempos tempranos ψ varia muy lentamente, lo cual es consecuente con tener $\delta \ll 1$, por lo tanto se evidencia la existencia una era inflacionaria y además del tipo rodaduralenta. Luego, a determinado tiempo de evolución, el campo empieza a variar y por lo tanto su derivada, lo cual conlleva a un periodo de oscilación en el cual el campo ψ decae en las partículas existentes en la naturaleza [18, 19, 20].

Paralelamente, el parámetro ε parte de un valor pequeño (ver Fig. 4.2), varía lentamente y luego empieza a crecer (al mismo momento en que ψ varia y empieza a decrecer) hasta llegar a uno, cuando inflación del tipo rodadura lenta ha terminado pues $\rho_{YM} \sim \rho_\kappa$, lo cual lleva a que $\rho + 3P = 0$. Luego de esto, el parámetro llega hasta su límite máximo pues en ese momento $\rho_{YM} > \rho_\kappa$ y por ende $\varepsilon(t) = 2$ o $P = \rho/3$, i.e., ha finalizado la era inflacionaria y empieza el dominio de la radiación. Estas últimas conclusiones pueden ser soportadas por el comportamiento de ρ_κ/ρ_{YM} de la Fig. 4.3 , pues se evidencia que en tiempos tempranos ρ_κ era bastante mayor comparada con ρ_{YM} , al menos en dos órdenes de magnitud. Sin embargo, ρ_κ cae rápidamente de tal manera que al final de inflación ha llegado a cero, permitiendo que ρ_{YM} domine en tiempos futuros. De esta manera, se justifica haber supuesto que $\rho_\kappa > \rho_{YM}$ de tal manera

ⁱVer algoritmo del apéndice G.

que se produjera $\rho + 3P < 0$, dicho de otra manera, la solución de las ecuaciones de evolución conducen a ese tipo de comportamiento en las componentes de la densidad de energía. Por último, en la Fig. 4.4 se tiene la gráfica del número de e-folds en función del tiempo. Allí, se observa que durante inflación N aumenta rápidamente hasta conseguir el número requerido para poder resolver los problemas de la cosmología estándar [47], luego, su aumento es lento pues la expansión del universo deja de ser exponencial.

De esta manera, se muestra que hay un empalme entre la solución numérica de las ecuaciones y los resultados obtenidos en la inflación del tipo rodadura lenta. Por lo tanto, se evidencia la relevancia de asumir las condiciones de rodadura lenta pues ellas permiten obtener una idea acerca del comportamiento de las variables físicas en este momento y además permite conocer el número de e-folds sin necesidad de conocer el comportamiento de N a lo largo del tiempo; basta simplemente con usar la expresión 3.4.27 del capítulo 3 para saber si se resuelven los problemas de la cosmología estándar. Sin embargo, esto no se dará en todos los modelos; en el siguiente capítulo se propone un modelo que en principio parece más simple que el expuesto en el trabajo, pero requiere igualmente todo un análisis para saber si se obtiene $\rho + 3P < 0$. De esta manera, queda abierto el campo de estudio y la posibilidad de generar una era inflacionaria que solucione los problemas de la cosmología estándar pero que a su vez encaje con las observaciones actuales.

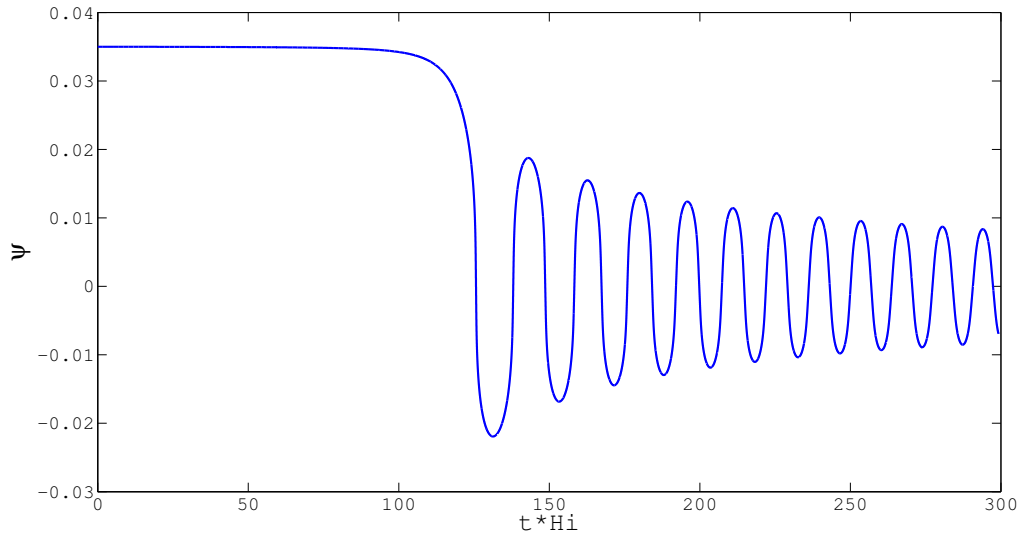


Figura 4.1: Trayectoria obtenida para ψ (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$.

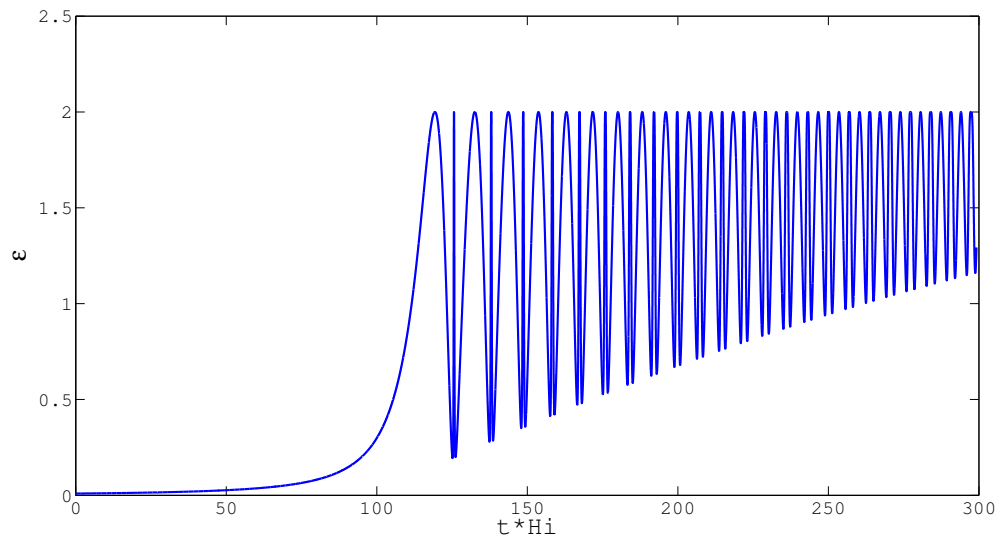


Figura 4.2: Trayectoria obtenida para ϵ (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$.

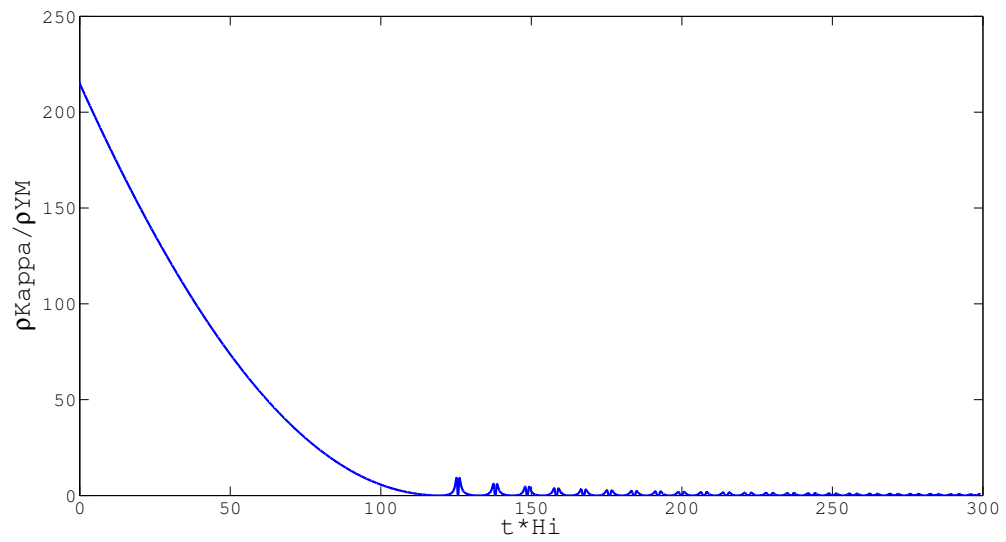


Figura 4.3: Trayectoria obtenida para ρ_κ/ρ_{YM} (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$.

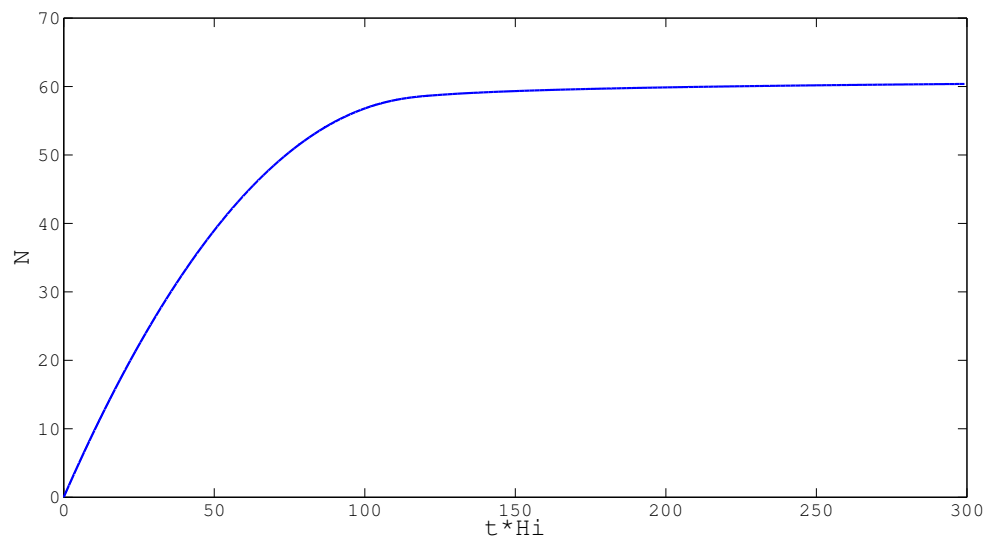


Figura 4.4: Trayectoria obtenida para el número de e-folds N (en función de tH_i) con el algoritmo propuesto, los valores iniciales $\psi_i = 0,035$, $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$, $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$, $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$. Aquí se puede ver que se alcanza el valor estándar de N (alrededor de 60) que resuelve los problemas de la cosmología estándar

5

Generación de una dinámica inflacionaria

En este capítulo se desea dejar una pregunta abierta de tal manera que sirva de base para una futura investigación. En el capítulo 3, se propuso un modelo de inflación vectorial de Gauge caracterizado por el lagrangiano 3.3.2 [31]. Este lagrangiano es propuesto de esa manera porque es fácil ver que la contribución del término $k(\varepsilon F^2)^2$ al tensor momentum-energía es de la forma $P = -\rho$ y por lo tanto, se puede obtener alguna condición para establecer que $\rho + 3P < 0$. Sin embargo, aquí se propone otra componente (con el mismo ansatz) que no involucre al tensor ε y que no incluya otro parámetro al modelo inflacionario. De esta manera, la componente propuesta es

$$\mathcal{L} = -\frac{\Lambda}{16} F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}^b F_b^{\lambda\sigma}, \quad (5.0.1)$$

en donde Λ es un parámetro requerido por cuestiones dimensionales y un futuro análisis fenomenológico. Ahora, se calcula el tensor momentum-energía para observar que establecer una relación que garantice una dinámica inflacionaria no resulta trivial. Pero antes de encontrar $T_{\mu\nu}$, se calcula el producto

$$F_{\lambda\sigma}^b F_b^{\lambda\sigma} = -6 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right), \quad (5.0.2)$$

con el cual se puede calcular el lagrangiano reducido

$$\mathcal{L} = -\frac{9\Lambda}{4} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right)^2. \quad (5.0.3)$$

Por ende, de acuerdo con lo encontrado en el apéndice D, se tiene

$$\rho = -\frac{9\Lambda}{4} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) \left(3 \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right), \quad (5.0.4)$$

y

$$P = \frac{3\Lambda}{4} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - 5g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right), \quad (5.0.5)$$

con las cuales puede ser calculada la relación $\rho + 3P < 0$

$$\rho + 3P = -\frac{9\Lambda}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + 3g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right). \quad (5.0.6)$$

Ahora, si se le agrega la contribución del término F^2 , se obtiene

$$\rho + 3P = 3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) - \frac{9\Lambda}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + 3g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right). \quad (5.0.7)$$

Entonces, para tener una dinámica inflacionaria se debe cumplir $\rho + 3P < 0$, por lo tanto se obtiene la desigualdad

$$2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) < 3\Lambda \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + 3g^2 \frac{\phi^4}{a^4} \right). \quad (5.0.8)$$

Sin embargo, no se sabe hasta qué punto esto es cierto (si llega a serlo); no es trivial encontrar una relación entre las cantidades involucradas pues hay varios términos y se tiene la presencia de un signo “menos”. Entonces, la viabilidad de usar un factor F^4 está sujeta a un análisis numérico del modelo y un subsecuente estudio en teoría de perturbaciones.

Conclusiones

Teniendo por objetivo dar explicación a los problemas de la cosmología estándar, surge la idea de tener una era caracterizada por una expansión acelerada. En dicha época, se eliminaría la necesidad de suponer desde tiempos tempranos una curvatura plana para el Universo; a su vez, las distancias aumentarían tan rápido que en el momento de la última dispersión, el horizonte de partículas contendría a la región física correspondiente a las distancias coordenadas actuales. Así, se explicaría por qué los mapas de la radiación cósmica de fondo presentan la isotropía y homogeneidad conocida. Si a esto se le suma el hecho de que a grandes escalas (i.e. observaciones hechas en regiones de volumen $10^6 Mpc^3$) el universo luce homogéneo e isótropo, el mecanismo llamado inflacionario deberá preservar dichas características espaciales. Así, surgió la idea de proponer un modelo inflacionario vectorial de Gauge pasando por encima del modelo escalar [10, 14, 46], pues carece de soporte en el campo de física de partículas, y del modelo vectorial [23, 25, 27], ya que requiere modificar la gravedad. La propuesta descrita en [30, 31], genera inflación en un marco de teorías de Gauge permitiendo que el modelo encaje dentro del marco de la teoría de física de partículas.

En este caso se trabajó dentro de la teoría de Gauge $SU(2)$ pues de esta manera es posible garantizar un fondo rotacionalmente invariante porque el número de campos vectoriales requeridos para garantizar la invariancia de Gauge es tres y además, se efectúan dos procedimientos: primero, se hace una escogencia del Gauge adecuada ($A_0^a = 0$) y segundo, se toma un ansatz para la forma de los campos $A_i^a = \phi \delta_i^a$ (cuya consistencia fue mostrada de diferentes maneras a lo largo del texto) para poder usar la relación que existe entre el grupo de transformaciones $SU(2)$ y $O(3)$ (técnicamente, el homomorfismo existente entre los dos grupos). Debido a la naturaleza de la teoría, el lagrangiano que permanece invariante ante transformaciones de $SU(2)$ es aquél que presenta la forma $\mathcal{L}(F_{\mu\nu}^a \cdot g_{\mu\nu})$ y de esto resulta que las ecuaciones de movimiento para

$A^a{}_\mu$ (las cuales son obtenidas mediante el principio de acción mínima con extremos fijos) se expresan en función de $F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu - g\epsilon^a{}_{bc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu$ así

$$D_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} = 0, \quad (5.0.9)$$

las cuales se reducen a la ecuación de movimiento para un modelo compuesto por un campo escalar, ver ec. 3.3.14. Por lo tanto, el tensor momentum-energía representa un fluido perfecto y todas las ecuaciones de movimiento (i.e., la ecuación de Friedmann, su derivada y la ecuación de movimiento para el campo escalar) son encontradas utilizando el lagrangiano 3.3.2, pues se verifica fácilmente que con él se obtiene $\rho + 3P < 0$.

Así, fue posible empezar a hacer un análisis dinámico del modelo, pues la posible anisotropía inducida por trabajar con campos vectoriales fue abordada teniendo en cuenta la relación entre el grupo $SU(2)$ y las rotaciones en el espacio, i.e., el homomorfismo. En el proceso, se encontró una condición necesaria ($\rho_\kappa > \rho_{YM}$) para que existiera una era inflacionaria: esta no fue sustentada al principio, pero trabajar en el régimen de rodadura lenta asegura que $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$ por lo tanto $\rho_\kappa > \rho_{YM}$ también se cumple. Además, cuando se resolvieron analíticamente las ecuaciones, se hizo un análisis acerca de la variación de las dos componentes de la densidad de energía y se encontró que ρ_κ era mucho más grande que ρ_{YM} , en el régimen de rodadura lenta. Por otra parte, el valor de N , es decir, el número de e-folds de expansión producidos al final de inflación, es

$$N_e \simeq \frac{\gamma_i + 1}{2\varepsilon_i} Ln \left[\frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i} \right], \quad (5.0.10)$$

de donde se aprecia que N no depende de su evolución temporal sino de los valores iniciales de $\gamma = g^2\psi^2/H^2$ y $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$. Por lo tanto, éste es ajustado al intervalo conocido por otros modelos u observaciones, de tal manera que se calcula γ_i y ε_i . Por último, se hace un análisis de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento y se observa que las propiedades de la era inflacionaria son en su mayoría obtenidas: pequeñas variaciones del campo en tiempos tempranos y un subsecuente periodo de oscilación; parámetro de rodadura lenta ε con pequeñas variaciones en tiempos tempranos y un máximo de 2 (era dominada por la radiación); y un número de e-folds necesario para resolver los problemas de la cosmología estándar ($N \simeq 58$). Se concluye entonces que un modelo enmarcado dentro de una teoría de Gauge $SU(2)$, con el Gauge temporal y el ansatz escogido (independientemente del lagrangiano tomado) da solución al problema de ajuste fino presente en los modelos conocidos de inflación vectorial y mantiene un fondo rotacionalmente invariante. No obstante, si se desea obtener una dinámica inflacionaria ($\rho + 3p < 0$), el lagrangiano es fundamental y la forma escogida en [30, 31] reproduce muy bien las propiedades de inflación, sin embargo, como ya se ha

mencionado no puede ser el único. Por tanto es pertinente tener en cuenta la propuesta presentada en el capítulo 5, en donde se propone otro lagrangiano cuya forma es un poco parecida al lagrangiano estudiado anteriormente sin involucrar el tensor $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Para este nuevo lagrangiano, se hace necesario retomar todo el análisis realizado en este trabajo de grado para luego comparar con los datos observacionales y con el modelo ya trabajado.

Bibliografía

- [1] G. L. Kane, *Modern elementary particle physics, the fundamental particles and forces*, Boston, USA: Addison-Wesley Press (1993).
- [2] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1985).
- [3] V. T. Kim et al., *BFKL jets: Search for Higgs boson and graviton at the LHC*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **198**, 220 (2010).
- [4] M. de Vries, *The Z2 two Higgs doublet model and the hierarchy problem*, arXiv:1109.0409 [hep-ph].
- [5] J. S. Gainer, K. Kumar, I. Low, and R. Vega-Morales, *Improving the sensitivity of Higgs boson searches in the golden channel*, arXiv:1108.2274 [hep-ph].
- [6] S. V. Chekanov, *Precision tests of the standard model using the ATLAS detector at the LHC*, Acta. Phys. Polon. **B42**, 1365 (2011).
- [7] A. H. Guth, *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [8] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, Phys. Lett. **B108**, 389 (1982).
- [9] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [10] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford, UK: Oxford University Press (2008).

- [11] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby, *General relativity: an introduction for physicists*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2006).
- [12] S. Dodelson, *Modern cosmology*, Amsterdam, Netherlands: Academic Press (2003).
- [13] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2005).
- [14] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2009).
- [15] N. Jarosik, C. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. Greason, et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*, *Astrophys.J.Suppl.* **192**, 14 (2011).
- [16] E. Komatsu et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).
- [17] L. Abbott, E. Farhi, and M. B. Wise, *Particle Production in the New Inflationary Cosmology*, *Phys. Lett.* **B117**, 29 (1982).
- [18] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, and F. Wilczek, *Reheating an inflationary universe*, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1437 (1982).
- [19] J. Kripfanz and E.-M. Ilgenfritz, *Reheating after anflation*, *Class. Quant. Grav.* **3**, 811 (1986).
- [20] R. Allahverdi, R. Brandenberger, F.-Y. Cyr-Racine, and A. Mazumdar, *Reheating in inflationary cosmology: theory and applications*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60**, 27 (2010).
- [21] M. C. Bento, O. Bertolami, P. V. Moniz, J. M. Mourao, and P. M. Sa, *On the cosmology of massive vector fields with $SO(3)$ global symmetry*, *Class. Quant. Grav.* **10**, 285 (1993).
- [22] T. Chiba, *Initial conditions for vector inflation*, *JCAP* **0808**, 004 (2008).
- [23] A. Golovnev, V. Mukhanov, and V. Vanchurin, *Vector inflation*, *JCAP* **0806**, 009 (2008).
- [24] G. Esposito-Farese, C. Pitrou, and J.-P. Uzan, *Vector theories in cosmology*, *Phys. Rev.* **D81**, 063519 (2010).

- [25] C. Armendariz-Picon, *Creating statistically anisotropic and inhomogeneous perturbations*, JCAP **0709**, 014 (2007).
- [26] L. Ford, *Inflation driven by a vector field*, Phys. Rev. **D40**, 967 (1989).
- [27] C. Sierra, *Inflación vectorial*, Trabajo de Grado **Universidad Industrial de Santander** (2010).
- [28] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Ghost instabilities of cosmological models with vector fields nonminimally coupled to the curvature*, Phys. Rev. **D80**, 123530 (2009).
- [29] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Instability of anisotropic cosmological solutions supported by vector fields*, Phys. Rev. Lett. **102**, 111301 (2009).
- [30] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari, *Gauge-flation: inflation from non-abelian gauge fields*, arXiv:1102.1513 [hep-ph].
- [31] A. Maleknejad and M. Sheikh-Jabbari, *Non-Abelian gauge field inflation*, Phys. Rev. **D84**, 043515 (2011).
- [32] A. Maleknejad, M. Sheikh-Jabbari, and J. Soda, *Gauge-flation and Cosmic No-Hair Conjecture*, JCAP **1201**, 016 (2012).
- [33] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080- Mc/s*, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [34] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, *Cosmic black-body radiation*, Astrophys. J. **142**, 414 (1965).
- [35] K. K. S. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees, *The large-scale smoothness of the Universe*, Nature **397**, 225 (1999).
- [36] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri, *Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey data release one*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **364**, 601 (2005).
- [37] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- [38] A. Friedmann, *Über die krümmung des raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [39] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure I*, Astrophys. J. **82**, 248 (1935).

- [40] A. G. Walker, *On Milnes's theory of world structure*, Proc. London Math. Soc. **42**, 90 (1936).
- [41] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [42] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, New York, USA: McGraw-Hill, Inc. (1965).
- [43] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. **73**, 803 (1948).
- [44] D. Baumann and H. V. Peiris, *Cosmological inflation: theory and observations*, Adv. Sci. Lett. **2**, 105 (2009).
- [45] D. Baumann et al., *CMBPol Mission concept study: probing inflation with CMB polarization*, AIP Conf. Proc. **1141**, 10 (2009).
- [46] D. Baumann, *TASI Lectures on inflation*, arXiv:0907.5424 [hep-th].
- [47] C. W. Kim and P. Murphy, *On the minimum amount of inflation to solve the flatness and horizon problems*, Phys. Rev. **D32**, 3303 (1985).
- [48] S. Weinberg, *The quantum theory of fields, Volume 1: foundations*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1995).
- [49] K. Dimopoulos, *The quantum origin of cosmic structure: theory and observations*, J. Phys. Conf. Ser. **283**, 012010 (2011).
- [50] K. Nakamura et al., *Review of particle physics*, J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [51] N. E. Groeneboom and H. K. Eriksen, *Bayesian analysis of sparse anisotropic universe models and application to the 5-year WMAP data*, Astrophys. J. **690**, 1807 (2009).
- [52] C. Armendariz-Picon and L. Pekowsky, *Bayesian limits on primordial isotropy breaking*, Phys. Rev. Lett. **102**, 031301 (2009).
- [53] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen, *Bayesian analysis of an anisotropic universe model: systematics and polarization*, Astrophys. J. **722**, 452 (2010).
- [54] P. Bagnaia et al., *Evidence for $Z^0 \rightarrow e^+ e^-$ at the CERN anti-p p collider*, Phys. Lett. **B129**, 130 (1983).

- [55] B. Grzadkowski, Z. Hioki, and J. H. Kuhn, *On the W boson mass determination in the total cross-section of $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$ process*, Phys. Lett. **B205**, 388 (1988).
- [56] S. D. Ellis, R. Kleiss, and W. J. Stirling, *W's, Z's and Jets*, Phys. Lett. **B154**, 435 (1985).
- [57] M. Hall, *The theory of groups*, New York, USA: Chelsea Pub. Co. (1959).
- [58] S. Pokorski, *Gauge field theory*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2000).
- [59] G. Altarelli et al., *Theory and Experiments, Landolt-Börnstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms, Volume A*, Berlin, Germany: Springer Pub. Co. (2008).
- [60] S. Kluth, *Tests of quantum chromo dynamics at $e^+ e^-$ colliders*, Rept. Prog. Phys. **69**, 1771 (2006).
- [61] S. Bethke, *The 2009 world average of $\alpha_s(M_Z)$* , Eur. Phys. J. **C64**, 689 (2009).
- [62] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta*, Annals Phys. **2**, 22 (1925).
- [63] K. Huang, *Quarks, leptons and gauge fields 2nd edition*, Singapore, Singapore: World Scientific Pub. Co., Inc. (1991).
- [64] W. Greiner and B. Müller, *Gauge theory of weak interactions*, Berlin, Germany: Springer Pub. Co. (1995).

Apéndice

A

Homomorfismo entre $O(3)$ y $SU(2)$

La teoría de grupos muestra que existe una correspondencia 2 a 1 entre el grupo $SU(2)$ (grupo de transformaciones especiales unitarias representado por matrices 2×2) y $O(3)$ (rotaciones espaciales), dicho de otra manera, $O(3)$ es una imagen homomorfa de $SU(2)$ [2]. Este hecho puede ser apreciado si se analizan las propiedades de cada grupo:

A.1. Grupo $O(3)$

Una rotación espacial general de un vector \vec{r} en el espacio tridimensional es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.1})$$

en donde R es la matriz de rotación y cumple las siguientes propiedades:

$$R^T R = 1, \quad \det R = 1. \quad (\text{A.1.2})$$

Ahora, si se toma el caso de una rotación pasiva (i.e. un rotación de los ejes dejando el vector fijo) en un ángulo θ alrededor del eje z , se tiene la matriz de transformación

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.3})$$

De manera similar se tienen las matrices para las rotaciones alrededor del eje x y el eje y :

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sen\phi \\ 0 & -\sen\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sen\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sen\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.4})$$

Dadas estas matrices se puede notar que dentro del grupo no se presenta la propiedad de conmutatividad, por ejemplo, $R_x(\phi)R_y(\psi) \neq R_y(\psi)R_x(\phi)$ por lo que es llamado No Abelian. Igualmente, se puede ver que una rotación general depende sólo de tres parámetros independientes; R tiene nueve elementos y la ecuación $R^T R = 1$ proporciona seis condiciones sobre ellas, entonces el número de parámetros es tres, correspondiendo cada uno con los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) .

Si se tiene una transformación infinitesimal, las matrices de transformación toman la forma

$$R_x(\delta\phi) = \mathbf{1} + iJ_x\delta\phi, R_y(\delta\psi) = \mathbf{1} + iJ_y\delta\psi, R_z(\delta\theta) = \mathbf{1} + iJ_z\delta\theta, \quad (\text{A.1.5})$$

en donde J_x, J_y y J_z son conocidos como los generadores de la transformación:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.6})$$

y cumplen la siguiente propiedad

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijl}J_l, \quad (\text{A.1.7})$$

en donde $i = x, y, z$ y ε_{ijl} es el tensor de Levi-Civita. Ahora, si se desea conocer la matriz de transformación finita para un ángulo θ alrededor del eje z , se deben efectuar N rotaciones infinitesimales sucesivas tal que $\theta = N\delta\theta$, i.e.

$$R_z(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} (R_z(\delta\theta))^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + iJ_z \frac{\theta}{N} \right)^N, \quad (\text{A.1.8})$$

lo cual implica que

$$R_z(\theta) = e^{iJ_z\theta}. \quad (\text{A.1.9})$$

Efectuando el mismo procedimiento para la rotación alrededor del eje x y eje y se obtiene: $R_x(\phi) = e^{iJ_x\phi}$ y $R_y(\psi) = e^{iJ_y\psi}$. Así, una transformación general alrededor de cualquier eje toma la forma:

$$R_n(\theta) = e^{i\vec{J} \cdot \vec{n}\theta}. \quad (\text{A.1.10})$$

Grupo $SU(2)$

Este grupo está formado por las matrices unitarias 2×2 con determinante uno. Es decir, las matrices U cumplen las características:

$$UU^\dagger = I \text{ y } \det U = 1. \quad (\text{A.1.11})$$

Además de esto, el número de parámetros independientes de la transformación es tres, lo cual puede ser visto teniendo en cuenta el siguiente elemento del grupo:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.12})$$

en donde $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Así, si se tiene en cuenta la condición de unitariedad, $U^\dagger = U^{-1}$, la matriz U se expresa como sigue

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.13})$$

en donde se puede ver que hay cuatro parámetros reales independientes, pero, teniendo en cuenta que $\det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$, el número queda reducido a tres. Se podría decir que la transformación $SU(2)$ es vista como la generalización de la rotación espacial, pero en este caso no hay rotación de un vector 3-D \vec{r} sino de un vector complejo ξ en un espacio 2-dimensional definido así $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, en donde ξ_1 y ξ_2 son valores complejos. Claramente, la transformación del tipo $SU(2)$ preserva la norma, una razón más para compararla con $O(3)$:

$$\xi^\dagger \xi = \xi'^\dagger \xi' = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2. \quad (\text{A.1.14})$$

Por otra parte, es posible contruir una matriz $-H$ con los vectores $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$ de tal manera que transforme bajo $SU(2)$ así:

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow U H U^\dagger. \quad (\text{A.1.15})$$

Ahora, si se utilizan tres parámetros reales (x, y, z)

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), y = \frac{1}{2i}(\xi_1^2 + \xi_2^2), z = \xi_1 \xi_2, \quad (\text{A.1.16})$$

para expresar la componentes de H se llega a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.17})$$

la cual es útil para mostrar la relación entre los grupos $O(3)$ y $SU(2)$. Nótese lo que sucede con la matriz $H' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = UHU^\dagger$ cuando se calcula su determinante: se sabe que $\det H' = \det(UHU^\dagger) = \det U \det H \det U^\dagger$ y además U es una matriz unitaria entonces $\det H' = \det H$ o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (\text{A.1.18})$$

es decir, hay una rotación inducida al efectuar una transformación de $SU(2)$. Resumiendo:

■ Una transformación $SU(2)$ sobre un vector $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ es equivalente a efectuar una transformación $O(3)$ sobre un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Para apreciar más a fondo las implicaciones del resultado, se calculan los valores de x , y y z cuando se ha realizado una transformación unitaria, es decir, se encuentran los parámetros x' , y' y z'

$$x' = \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})y - (a^*b^* + ab)z, \quad (\text{A.1.19})$$

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x - \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z \quad (\text{A.1.20})$$

$$z' = (ab^* + ba^*)x + (ba^* - ab^*)iy + (|a|^2 - |b|^2)z. \quad (\text{A.1.21})$$

Ahora, si se le da un valor específico a los elementos a, b de la matriz unitaria U , se podrá obtener una clara relación entre los dos grupos de transformaciones:

1) Si $a = e^{i\alpha/2} \implies b = 0$ y se obtiene una rotación alrededor del eje z en un ángulo α , i.e., existe una correspondencia entre la matriz unitaria U_z de $SU(2)$ y la matriz R_z de $O(3)$

$$U = e^{i\sigma_z\alpha/2}, R = e^{iJ_z\alpha}, \quad (\text{A.1.22})$$

en donde $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y J_z es el generador de la rotación alrededor del eje z encontrado anteriormente.

2) Si $a = \cos\beta/2 \implies b = \sin\beta/2$ y se encuentra la correspondencia

$$U = e^{i\sigma_y\beta/2}, R = e^{iJ_y\beta}, \quad (\text{A.1.23})$$

en donde $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y J_y es el generador de la rotación alrededor del eje y encontrado anteriormente.

3) Si $a = \cos\gamma/2 \longrightarrow b = i\sin\gamma/2$ y se encuentra la correspondencia

$$U = e^{i\sigma_x\gamma/2}, R = e^{iJ_x\gamma}, \quad (\text{A.1.24})$$

en donde $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y J_x es el generador de la rotación alrededor del eje x encontrado anteriormente.

En general, una correspondencia entre una transformación $SU(2)$ de un espinor ξ y una transformación $O(3)$ en el espacio de un vector \vec{r} se da así:

$$U = e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}/2} \longrightarrow R = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}. \quad (\text{A.1.25})$$

Este importante resultado trae consigo algunos resultados relevantes:

1) Debido a la correspondencia entre los grupos, ellos tienen una estructura parecida lo cual puede ser visto a través de las relaciones de conmutación de los generadores σ_i :

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = \varepsilon_{ijk} i \frac{\sigma_k}{2}. \quad (\text{A.1.26})$$

2) El factor $1/2$ en la matriz U de la ecuación A.1.25 muestra que una rotación del espinor ξ en medio ángulo ($\theta/2$) se representa como una rotación del vector \vec{r} a través del ángulo completo (θ). Es decir, mientras que para una partícula de spin 1 su estado inicial se recupera haciendo una rotación de 2π (una vuelta), para una partícula de spin $1/2$ su estado inicial se recupera haciendo una rotación de 4π (dos vueltas).

3) El hecho anterior evidencia que la correspondencia entre $SU(2)$ y $O(3)$ es *dos-a-uno*, e.g. un aumento de α en 2π implica, debido a A.1.22, que $R_z(\alpha + 2\pi) = R_z(\alpha)$ y $U_z(\alpha/2\pi) = -U_z(\alpha)$. Es decir, U y $-U$ corresponden a R .

Se concluye entonces que los grupos $SU(2)$ y $O(3)$ son homomórficos [2, 57].

B

Teorías de Gauge

Las partículas de la naturaleza parecen tener algo en especial, ciertas simetrías internas, i.e., el Lagrangiano usado para describir su evolución dinámica presenta invariancias ante ciertos grupos de transformaciones. Específicamente, se presenta una invariancia ante los grupos de transformaciones $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [1, 2, 58, 59]. No se sabe por qué se requiere que haya invariancia sólo ante estos tres grupos de transformación para poder describir tres de las cuatro interacciones conocidas hasta el momento: interacción electromagnética, interacción débil e interacción fuerte, pero los experimentos son consistentes con la idea de tener tres simetrías para lograr una descripción física de las partículas conocidas hasta el momento y sus interacciones [60, 61].

B.1. Grupo $U(1)$

La mecánica cuántica nos dice que la naturaleza presenta un caracter estocástico y no un caracter determinista propio de la mecánica clásica; es por esto que las propiedades físicas de una partícula se estudian a través de su función de onda Ψ asignada a ella a raíz de la dualidad onda-partícula introducido por Louis de Broglie [62]. Para empezar, se analizará el caso de un campo escalar complejo, una función de onda ϕ , con dos componentes ϕ_1 y ϕ_2 . Así, se puede escribir el campo escalar y su complejo conjugado como sigue

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \tag{B.1.1}$$

$$\phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2}, \tag{B.1.2}$$

y ya que el lagrangiano es una cantidad real, se define

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi, \quad (\text{B.1.3})$$

de tal manera que se pueda obtener la ecuación de Klein-Gordon para los campos ϕ y ϕ^* a partir de las ec. de Euler-Lagrange, si estos son tomados como independietes

$$(\square^2 + m^2)\phi = 0, \quad (\text{B.1.4})$$

$$(\square^2 + m^2)\phi^* = 0. \quad (\text{B.1.5})$$

Por otra parte, es claro que para el lagrangiano definido en la ec. B.1.3 se presenta una invariancia ante la transformación

$$\phi \longrightarrow e^{-i\Lambda} \phi, \quad \phi^* \longrightarrow e^{i\Lambda} \phi^*, \quad (\text{B.1.6})$$

en donde $\Lambda \in \mathbb{R}$. Debido a que Λ es un valor constante, la transformación B.1.6 que genera

$$\mathcal{L}' = (\partial_\mu e^{i\Lambda} \phi)(\partial^\mu e^{-i\Lambda} \phi^*) - m^2 e_{i\Lambda} \phi e_{-i\Lambda} \phi^* = \mathcal{L} \quad (\text{B.1.7})$$

es llamada una *transformación de Gauge Global*. Luego, si se toma sólo la parte infinitesimal de cada transformación, se llega a que el cambio en cada uno de los campos es

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi, \quad \delta\phi^* = i\Lambda\phi^*, \quad (\text{B.1.8})$$

de donde se puede concluir también que

$$\delta(\partial_\mu \phi) = -i\Lambda\partial_\mu \phi, \quad \delta(\partial_\mu \phi^*) = i\Lambda\partial_\mu \phi^*. \quad (\text{B.1.9})$$

Si, se definen ahora las variaciones totales de ϕ y x^μ como sigue

$$\Delta\phi = \delta\phi + (\partial_\mu \phi)\delta x^\mu = \Phi_\mu \delta w^\mu, \quad (\text{B.1.10})$$

$$\Delta x^\mu = \mathbb{X}^\mu_\nu \delta w^\nu, \quad (\text{B.1.11})$$

en donde δx^μ y δw^μ son cantidades infinitesimales y \mathbb{X}^μ_ν y Φ_μ son funciones complejas, se puede encontrar por el caso concerniente que

$$\Phi = -i\phi, \quad \Phi^* = i\phi^*, \quad \mathbb{X} = 0. \quad (\text{B.1.12})$$

Ahora, del teorema de Noether se sabe que para un sistema que presenta invariancias existe una corriente conservada J_μ^ν , la cual está caracterizada por $\partial_\mu J_\mu^\nu$ y se define como

$$J_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - T^\mu_\kappa \mathbb{X}^\nu_\kappa, \quad (\text{B.1.13})$$

en donde T^μ_κ es el tensor momentum-energía para el modelo. Así, reemplazando el lagrangiano definido en B.1.3 y los valores de encontrados en B.1.12 se obtiene la corriente

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (\text{B.1.14})$$

de donde se ve claramente que $\partial_\mu J^\mu = 0$ y además se encuentra una carga conservada: integrando $\partial_\mu J^\mu$ en el espacio y utilizando el teorema de la divergencia, se puede notar que

$$\frac{d}{dt} \left[\int J^0 d^3x \right] = 0, \quad (\text{B.1.15})$$

o

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (\text{B.1.16})$$

definiendo $Q = \int J^0 d^3x$.

Hasta el momento, se ha mostrado que tener una invariancia ante una transformación de Gauge Global garantiza una cantidad conservada Q , sin embargo, para darle una mayor claridad al tipo de transformación en cuestión, se hará una analogía geométrica: Si las definiciones dadas en B.1.1 y B.1.2 son reemplazadas en el lagrangiano B.1.3, se obtiene la siguiente expresión

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (\text{B.1.17})$$

la cual puede ser escrita de una manera más compacta si se define el vector $\phi = \hat{i}\phi_1 + \hat{j}\phi_2$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi \cdot \phi. \quad (\text{B.1.18})$$

Ahora, recordando las transformaciones definidas en B.1.6, se obtienen las ecuaciones

$$\phi'_1 + i\phi'_2 = e^{-i\Lambda}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (\text{B.1.19})$$

y

$$\phi'_1 - i\phi'_2 = e^{i\Lambda}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (\text{B.1.20})$$

las cuales adquieren una forma más compacta a través de propiedades de $e^{i\Lambda}$

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \text{sen}\Lambda \\ -\text{sen}\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.21})$$

de donde se aprecia claramente una analogía con una rotación en el plano en un ángulo Λ . De esta manera, se concluye que hay una relación entre la transformación B.1.6, llamada $U(1)$ pues las matrices de transformación son unitarias y de orden 1, y el grupo de rotaciones en el plano $SO(2)$. Dicho de otra manera, la transformación del

tipo $U(1)$ puede ser vista como una rotación de un vector complejo ϕ en un espacio abstracto de dos dimensiones. Este hecho será importante pues se encontrarán analogías entre transformaciones unitarias y grupos de rotaciones.

Para hacer el estudio más general, se tomará el caso en el que $\Lambda = \Lambda(x, t)$. Es decir, cuando *la transformación de Gauge es Local*. Al igual que para el caso de una transformación global se obtienen las expresiones

$$\phi \longrightarrow e^{-i\Lambda}\phi, \quad \phi^* \longrightarrow e^{i\Lambda}\phi^*, \quad (\text{B.1.22})$$

y para el caso infinitesimal

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi, \quad \delta\phi^* = i\Lambda\phi^*. \quad (\text{B.1.23})$$

Sin embargo, las variaciones de la derivada del campo presenta un cambio pues Λ ya no es constante

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\partial_\mu\Lambda\phi - i\Lambda\partial_\mu\phi, \quad (\text{B.1.24})$$

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i\partial_\mu\Lambda\phi^* + i\Lambda\partial_\mu\phi^*. \quad (\text{B.1.25})$$

Así, se puede ver que la derivada $\partial_\mu\phi$ no transforma como ϕ pues surge un término adicional: cuando esto sucede se dice que $\partial_\mu\phi$ no transforma covariantemente. No obstante, si se desea que la teoría (lagrangiano y ecuaciones de movimiento) que se está trabajando sea invariante ante transformaciones locales del grupo $U(1)$, se requiere que todas las cantidades transformen como ϕ . Por lo tanto se deberá hacer algún cambio en alguna de las cantidades utilizadas, pero antes de esto, sería útil observar que la transformación de Gauge local no garantiza una la invariancia del lagrangiano B.1.3 pues se obtiene

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda)J^\mu, \quad (\text{B.1.26})$$

en donde se ha usado el vector $J^\mu = -i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi$ encontrado en B.1.14. De esta manera, un cambio en el lagrangiano es motivado para poder eliminar el término extra encontrado: para restablecer la invariancia de Gauge, se introduce un cuadvivector A_μ el cual se acopla directamente con J^μ como sigue

$$\mathcal{L}_1 = eJ^\mu A_\mu. \quad (\text{B.1.27})$$

Además, se exige que bajo una transformación local de Gauge del grupo $U(1)$, el vector A_μ transforme así

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \quad (\text{B.1.28})$$

de tal manera que la variación del lagrangiano \mathcal{L}_1 sea

$$\delta\mathcal{L}_1 = -(\partial_\mu\Lambda)J^\mu - 2e\phi\phi^*A_\mu\partial^\mu\Lambda, \quad (\text{B.1.29})$$

y por lo tanto de la variación total del langrangiano (\mathcal{L} y \mathcal{L}_1) resulte

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi\phi^*A_\mu\partial^\mu\Lambda. \quad (\text{B.1.30})$$

Como se puede apreciar en la expresión anterior, el hecho de haber introducido el término dado en B.1.27 remueve el término que impide tener invariancia de Gauge, sin embargo, surge otro en términos de ϕ , A_μ y Λ . Por lo tanto, otra modificación debe ser hecha sobre el lagrangiano total:

$$\mathcal{L}_2 = e^2\phi\phi^*A^\mu A_\mu, \quad (\text{B.1.31})$$

de tal manera que su variación sea

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e\phi\phi^*A_\mu\partial^\mu\Lambda, \quad (\text{B.1.32})$$

y de esta manera, la variación total se dé como

$$\delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 + \delta\mathcal{L} = 0. \quad (\text{B.1.33})$$

De lo anterior, se observa que para mantener la invariancia de la teoría fue necesario introducir dos términos al lagrangiano y una cantidad especial A_μ que presenta varias particularidades: ante transformaciones de Gauge Locales, su variación está dada por B.1.28 y no lo hace como ϕ ; presenta un acople directo con la corriente de ϕ , lo cual estaría dando un indicio de interacción entre el campo escalar ϕ y este nuevo campo A_μ ; está relacionado con el campo electromagnético pues su contribución al lagrangiano se construye de igual manera que en electromagnetismo: se define un tensor de esfuerzos $F_{\mu\nu}$. Ahora bien, ya que en el lagrangiano se tienen términos relacionados con ϕ y con la interacción entre ϕ y A_μ , se ha de esperar que exista igualmente una contribución que involucre sólo a A_μ . Por lo tanto, es definido el tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{B.1.34})$$

el cual es invariante de Gauge pues se encuentra que ante B.1.23

$$\delta F_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.1.35})$$

y de esta manera sea un buen candidato para crear un término invariante de Lorentz y de Gauge en el lagrangiano total \mathcal{L} . Entonces, la nueva componente propuesta para \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.1.36})$$

en donde el factor $1/4$ es puesto para tener concordancia con las ecuaciones de Procca [2] y se nota claramente que $\delta\mathcal{L}_3 = 0$. Así, el Lagrangiano completo que describe el comportamiento de ϕ , asumiendo invariancia de Gauge es

$$\mathcal{L}_{Total} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \quad (\text{B.1.37})$$

explícitamente

$$\mathcal{L}_{Total} = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.1.38})$$

Ahora, si se define la cantidad

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi, \quad (\text{B.1.39})$$

llamada derivada covariante pues $\delta(D_\mu\phi) = -i\Lambda(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) = -i\Lambda(D_\mu\phi)$, se puede llegar a una forma más compacta del lagrangiano

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.1.40})$$

De este modo, se puede concluir que para tener una teoría invariante ante $U(1)$ y además describir la interacción electromagnética es necesario: introducir una derivada covariante D_μ que involucre un campo vectorial A_μ , de tal manera que se acople con el campo escalar. Además de esto, el campo vectorial debe transformar de una manera especial para poder generar $\delta\mathcal{L} = 0$.

Por último, es importante notar dos hechos que surgen a través de todos los procedimientos realizados hasta el momento: primero, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0, \quad (\text{B.1.41})$$

se obtiene que

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -ie(\phi^* D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*), \quad (\text{B.1.42})$$

de donde se observa que existe una corriente similar a la encontrada en la ec. B.1.14 pero con una estructura covariante

$$\mathcal{J}^\mu = i(\phi^* D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*), \quad (\text{B.1.43})$$

pues se cumple que $\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = 0$ ya que $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, i.e., \mathcal{J}^μ es la corriente conservada cuando es introducido el campo A_μ . Segundo, el campo A_μ no es masivo pues si se

introduce un término de masa en el lagrangiano se rompe la invariancia de Gauge, i.e., agregar la componente

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu \quad (\text{B.1.44})$$

produciría $\delta\mathcal{L} \neq 0$. Dicho de otra manera, el hecho de exigir una invariancia ante $U(1)$ local implica que el campo vectorial tenga masa cero, lo cual es consecuente con el electromagnetismo pues se sabe que la partícula portadora de la interacción no posee masa, el fotón. Tercero, debe existir una carga conservada pues se pudo ver que para un teoría invariante de Gauge, existe una carga conservada relacionada con A_μ . Entonces, es de esperar que el factor de acople entre ϕ y A_μ , es decir, el parámetro e sea la carga conservada pues él mostraría el rango de interacción entre las partículas masivas y el campo electromagnético [1, 2, 58].

B.2. Grupo $SU(2)$

En la sección anterior, se revisaron las condiciones necesarias para garantizar que un lagrangiano compuesto por campo escalar sea invariante ante transformaciones del grupo $U(1)$. Ahora, se desea generalizar un poco este tratamiento analizando el caso del grupo $SU(2)$. En esta oportunidad, se avanzará un poco más rápido pues se sabe que es necesario definir una derivada covariante, un campo vectorial A_μ que esté implícito en la nueva derivada, un tensor de esfuerzos análogo a $F_{\mu\nu}$ y se hará igualmente un enfoque geométrico. Así, si anteriormente se tenía un vector ϕ con dos componentes en un espacio interno $2D$ en el cual se efectuaba una rotación, ver Ec. B.1.21, ahora se supondrá un vector con tres componentes en un espacio tridimensional. Suponiendo un espacio con ejes coordenados 1, 2, 3, la transformación del nuevo vector ϕ alrededor del eje 3 está dada por

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \text{sen}\Lambda & 0 \\ -\text{sen}\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2.1})$$

o en el caso infinitesimal

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda & 0 \\ -\Lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2.2})$$

No obstante, el esta última relación puede ser escrita en notación vectorial como sigue

$$\phi' = \phi - \mathbf{\Lambda} \times \phi, \quad (\text{B.2.3})$$

la cual presenta una forma más general y describe una rotación del vector en un ángulo $\mathbf{\Lambda}$, i.e., el ángulo de rotación es $|\mathbf{\Lambda}|$ y el eje es $\mathbf{\Lambda}/|\mathbf{\Lambda}|$. De esta manera, la variación del vector ϕ está dada por

$$\delta\phi = -\mathbf{\Lambda} \times \phi, \quad (\text{B.2.4})$$

y por lo tanto se concluye que el grupo de transformaciones $SU(2)$ es no Abelian, tal como se vio en el apéndice A, pues se está haciendo una analogía con las rotaciones en el espacio pertenecientes al grupo $O(3)$.

Como era de esperarse, al igual que en el caso de una transformación local de Gauge $U(1)$, la derivada $\partial_\mu\phi$ no transforma covariantemente, i.e., como lo hace ϕ pues

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -(\partial_\mu\mathbf{\Lambda}) \times \phi - \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu\phi. \quad (\text{B.2.5})$$

Por lo tanto, se define una derivada covariante siguiendo el espíritu de la Ec. B.1.39, pero en este caso con una notación vectorial pues se trabaja con ϕ en lugar de ϕ . Entonces, la nueva derivada se escribe

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + g\mathbf{A}_\mu \times \phi, \quad (\text{B.2.6})$$

en donde g es la constante de acople y \mathbf{A}_μ es un vector en el espacio interno requerido para garantizar invariancia de Gauge, sin embargo, la cantidad \mathbf{A}_μ es vista en el espacio real como tres campos vectoriales A^1_μ , A^2_μ y A^3_μ . Al igual que en el caso de $U(1)$, se requiere que \mathbf{A}_μ transforme de una manera especial de tal manera que la derivada D_μ sea realmente covariante. Así, la adecuada variación de del vector es

$$\mathbf{A}'_\mu \longrightarrow \mathbf{A}_\mu - \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{A}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\mathbf{\Lambda}, \quad (\text{B.2.7})$$

pues se puede obtener que

$$\delta(D_\mu\phi) = -\mathbf{\Lambda} \times (D_\mu\phi), \quad (\text{B.2.8})$$

y de esta manera la teoría permanece invariante ante un transformación local de Gauge $SU(2)$.

Ahora, el paso restante es definir un tensor de esfuerzos a análogo al de la Ec. B.1.34, pues de esta manera se contruye un término invariante de Lorentz y de Gauge que dé cuenta de la contribución individual del campo \mathbf{A}_μ . Entonces, se podría pensar que la cantidad

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu, \quad (\text{B.2.9})$$

es un buen candidato para este objetivo, sin embargo, se puede inferir que

$$\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} = -(\partial_\mu\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{A}_\nu - (\partial_\nu\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{A}_\mu, \quad (\text{B.2.10})$$

por lo cual es necesario hacer una modificación a $\mathbf{A}_{\mu\nu}$. Una buena escogencia sería

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu, \quad (\text{B.2.11})$$

pues éste presenta la propiedad de que $\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu}) = -\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{F}_{\mu\nu}$ y de esta manera un término del tipo $\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu}$ dentro del lagrangiano produciría $\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu}) = 0$. Así, habiendo definido el tensor de esfuerzos, se puede escribir el lagrangiano completo de la teoría

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \phi) \cdot (D^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi \cdot \phi - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu}, \quad (\text{B.2.12})$$

en el cual un término de masa no puede ser incluido pues $\delta(\frac{1}{2} \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{A}^\mu) \neq 0$.

Para terminar esta sección, se hará un análisis de la ecuación de movimiento para los campos A_μ , denotados también como A^a_μ , en donde μ representa los índices espaciotemporales y a son llamados los índices del espacio interno o índices del álgebra de Gauge. A partir de las ecuaciones de movimiento (para un espaciotiempo plano)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] = 0, \quad (\text{B.2.13})$$

se pueden obtener importantes propiedades para este tipo de sistema invariante ante $SU(2)$, y a su vez algunas diferencias con el caso de invariancia ante $U(1)$. Así, si el lagrangiano escrito en B.2.12 es reemplazado en las ecuaciones de movimiento B.2.13, se llega una expresión bastante compacta que relaciona a \mathbf{A}^a_μ y a ϕ

$$\partial_\nu \mathbf{F}^{\mu\nu} + g \mathbf{A}_\nu \times \mathbf{F}^{\mu\nu} = g(\partial^\mu \phi) \times \phi + g^2 (\mathbf{A}^\mu \times \phi) \times \phi, \quad (\text{B.2.14})$$

o

$$D^\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = g(D_\mu \phi) \times \phi, \quad (\text{B.2.15})$$

de donde se puede concluir que $g(D_\mu \phi) \times \phi = g \mathbf{J}_\mu$ es una cantidad conservada análoga a B.1.43, pues es fácil de notar que la derivada covariante de J_μ es igual a cero ya que $D^\mu D^\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, el vector J^μ es la corriente conservada cuando se exige invariancia ante $SU(2)$.

De las ecuaciones B.1.42 y B.2.15, obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es posible observar una relación entre la divergencia de los tensores de esfuerzos $F_{\mu\nu}$, $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ y las corrientes correspondientes a la materia J^μ , \mathbf{J}^μ pues

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -e J^\mu, \quad D^\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = g \mathbf{J}^\mu. \quad (\text{B.2.16})$$

Así, con esta analogía se deducen directamente algunas diferencias entre los dos casos de transformación: si se toma el caso en el que hay ausencia de materia, se encuentra por el lado de $U(1)$ que

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.2.17})$$

de donde se obtienen dos de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (\text{B.2.18})$$

y se nota que ellas corresponden a las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuente para el campo electromagnético. Sin embargo, en el caso de $SU(2)$ se observa algo totalmente diferente pues en ausencia de materia se tiene

$$D^\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \partial^\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = -g \mathbf{A}^\nu \times \mathbf{F}_{\mu\nu}, \quad (\text{B.2.19})$$

de donde, por analogía con el caso anterior, se concluye que los campos \mathbf{A}_μ actúan como fuentes de ellos mismos. Este hecho se debe a que el campo A_μ no transporta carga, solamente la interacción a través del fotón, mientras que el campo \mathbf{A}_μ si transporta carga, la carga de isospin [1, 2, 58, 59, 63, 64]. Así, para el caso electromagnético se tiene que sólo los campos ϕ pueden emitir partículas mediadoras, mientras que en el caso no Abelianos tanto ϕ como \mathbf{A}_μ lo hacen. En lo que sigue, se hará un análisis más general de las transformaciones de Gauge para que lo anteriormente hecho sea válido para cualquier grupo: esto será realizado a través de un enfoque geométrico.

B.3. Tratamiento general

Hasta ahora, una transformación local de Gauge $SU(2)$ hecha al campo escalar ϕ se daba por la siguiente expresión

$$\phi' = \phi - \mathbf{A} \times \phi. \quad (\text{B.3.1})$$

Sin embargo, la forma general de la transformación es

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}}\phi, \quad (\text{B.3.2})$$

en donde \mathbf{I} representa las matrices de Pauliⁱ

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3.3})$$

las cuales pueden ser escritas de la siguiente manera

$$(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{imn}, \quad (\text{B.3.4})$$

ⁱVer apéndice A

en donde ε_{imn} es el símbolo de Levi-Civita, i marca cada matriz y los índices i, m, n van de 1 a 3. Además, las matrices \mathbf{I} cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}i_k. \quad (\text{B.3.5})$$

Ahora, para hacer el tratamiento más general no se utilizará $e^{i\mathbf{I}\cdot\Lambda}$ sino se escribirá $S(x)$ para denotar la transformación. Esta cantidad $S(x)$ va a ser definida como sigue

$$S(x) = e^{iM^a\Lambda_a}, \quad (\text{B.3.6})$$

en donde M_a representa los generadores, matrices de orden $n \times n$, y Λ_a el monto de la transformación cuyo número depende de la transformación en especial. Así, la transformación estaría aplicada sobre vectores $\psi(x)$ de orden n de la siguiente manera

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{iM^a\Lambda_a}\psi, \quad (\text{B.3.7})$$

de donde es deducible el hecho de que la derivada de ψ no transforma covariantemente pues se obtiene que

$$\partial_\mu\psi' = S(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu S)\psi, \quad (\text{B.3.8})$$

y por lo tanto

$$\delta(\partial_\mu\psi) = (S - 1)\partial_\mu\psi + (\partial_\mu S)\psi. \quad (\text{B.3.9})$$

La razón para no tener una derivada $\partial_\mu\psi$ que transforme covariantemente es la omisión del siguiente hecho: la transformación $S(x)$ al ser local es diferente en cada punto del espacio y por lo tanto, como se vio en los casos de $U(1)$ y $SU(2)$ en donde la transformación es análoga a una rotación de los ejes coordenados, ϕ y su derivada están siendo analizados en sistemas coordenados diferentes. De esta manera se está obviando el hecho de que $\psi(x)$ y $\psi(x+dx) = \psi(x) + d\psi$ están medidos respecto a ejes diferentes; pues la cantidad $d\psi$ está dando información acerca del cambio del campo con la distancia, pero también del cambio en la orientación de los ejes en el espacio interno cuando se ha cambiado de coordenadas x a $x + dx$. Por ende, para formar una derivada que transforme covariantemente se debe tener en cuenta en el proceso que los ejes cambian punto a punto. Así, no se debería comparar $\psi(x + dx)$ con $\psi(x)$, sino $\psi(x + dx)$ con el valor de $\psi(x)$ valor cuando se ha hecho una transformación de x a $x + dx$ manteniendo los ejes fijos. Al vector obtenido después de hacer este proceso de transporte paralelo se lo denotará $\psi(x) + \delta\psi$. La pregunta ahora es cuánto debe valer $\delta\psi$: la respuesta más simple será pensar en un término proporcional a $\psi(x)$ y a dx^4 , el cual puede ser escrito como sigue

$$\delta\psi = igM^a A_\mu^a dx^4\psi, \quad (\text{B.3.10})$$

en donde g es una constante y A^a_μ es un campo auxiliar, ya familiar por estudios anteriores. Entonces, la verdadera derivada covariante será

$$D\psi = (\psi + d\psi) - (\psi + \delta\psi), \quad (\text{B.3.11})$$

de la cual se obtiene finalmente

$$\boxed{\frac{D\psi}{dx^\mu} = D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - igM^a A^a_\mu\psi}. \quad (\text{B.3.12})$$

Una de las razones para escoger la forma de $\delta\psi$ dada en la Ec. B.3.10 es que, una vez reemplazados los valores de M^a y g en B.3.12, $M = -1$ para el caso $U(1)$ y $(M^a)_{mn} = -i\varepsilon_{amn}$ para el caso $SU(2)$, se llega a los resultados derivados en las secciones anteriores

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ieA_\mu\psi, \quad (\text{B.3.13})$$

y

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ig\mathbf{A}_\mu \times \psi. \quad (\text{B.3.14})$$

Por otra parte, es necesario garantizar que la derivada B.3.12 sea realmente invariante, lo que se traduce en asegurar que

$$(D_\mu\psi)' = SD_\mu\psi. \quad (\text{B.3.15})$$

Antes de mostrar esto, se hace un cambio de notación para facilitar los cálculos: se llamará A_μ a $M^a A^a_\mu$ pues esto lleva a

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - igA_\mu)\psi. \quad (\text{B.3.16})$$

Así, a partir de la ecuación B.3.15 encuentra que el campo de Gauge debe transformar de la siguiente manera

$$\boxed{A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1}}, \quad (\text{B.3.17})$$

lo cual conduce en el caso de $U(1)$ y $SU(2)$ (caso infinitesimal) respectivamente a

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \quad (\text{B.3.18})$$

y

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu - \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{A}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\mathbf{\Lambda}. \quad (\text{B.3.19})$$

Hasta el momento, se han obtenido expresiones generales para la derivada covariante $D_\mu\psi$ y la transformación del campo de Gauge A_μ . Ahora, se llegará a una expresión

general para el tensor de esfuerzos $F_{\mu\nu}$ a partir del efecto producido al efectuarse una trayectoria cerrada infinitesimal. Se harán pequeños desplazamiento a través de la Fig. B.1 respetando la regla del transporte paralelo ya comentada, i.e., involucrando derivadas covariantes. Empezando desde el punto A , en donde el campo es denota $\psi_{A,0}$, y transportando el vector alrededor de toda la trayectoria hasta llegar otra vez a A , en donde el campo se denota $\psi_{A,1}$ se obtiene (trabajando a segundo orden en δx^μ y Δx^μ):

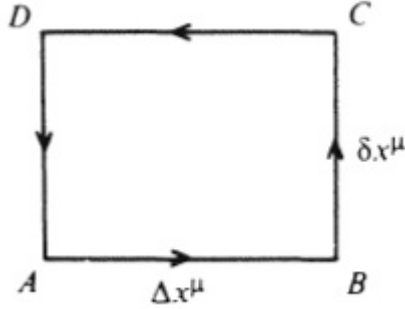


Figura B.1: Trayectoria cerrada a través de la cual se hace el transporte paralelo.

$$\psi_{A,1} = \{1 + ig\delta x^\mu \Delta x^\mu [D_\mu, D_\nu]\} \psi_{A,0}, \quad (\text{B.3.20})$$

en donde $[D_\mu, D_\nu]$ representa el conmutador entre D_μ y D_ν . El resultado de este conmutador es encontrado con ayuda de la Ec. B.3.16

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -ig\{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]\}\psi. \quad (\text{B.3.21})$$

Pero, si se define el tensor $F_{\mu\nu}$ como sigue

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]}, \quad (\text{B.3.22})$$

el conmutador adquiere una forma más compacta

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}, \quad (\text{B.3.23})$$

llevando igualmente a la expresión para el campo ψ después de ser efectuada la trayectoria cerrada

$$\psi_{A,1} = \{1 + ig\delta x^\mu \Delta x^\mu F_{\mu\nu}\} \psi_{A,0}. \quad (\text{B.3.24})$$

De este modo, el cambio en el valor del campo ψ después de efectuada la trayectoria es

$$\Delta\psi_A = -ig\delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu} \psi_A, \quad (\text{B.3.25})$$

de donde se observa una dependencia del valor de $F_{\mu\nu}$, i.e., si el valor del tensor de esfuerzos es cero, un transporte paralelo a lo largo de una trayectoria cerrada no tiene un efecto físico sobre ψ_A . Algo similar ocurre en relatividad general, en cuyo caso el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ es el análogo a $F_{\mu\nu}$, pues si $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ entonces la curvatura del espacio será plana sin importar un cambio de coordenadas, i.e., no se evidencia la existencia de un campo gravitacional. Por otra parte, se pueden encontrar los valores de $F_{\mu\nu}$, definido en B.3.22, para los casos de $U(1)$ y $SU(2)$ a través de M^a : dichos tensores coinciden con los encontrados en las secciones anteriores:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{B.3.26})$$

y

$$\mathbf{F}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}^a{}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}^a{}_\mu + g\varepsilon_{abc} \mathbf{A}^b{}_\mu \mathbf{A}^c{}_\nu. \quad (\text{B.3.27})$$

Por último, se deriva una propiedad importante para el tensor $F_{\mu\nu}$: una relación similar a la identidad de Bianchi en relatividad general $R^\kappa{}_{\mu\nu\lambda;\sigma} + R^\kappa{}_{\mu\sigma\nu;\lambda} + R^\kappa{}_{\mu\lambda\sigma;\nu}$. En

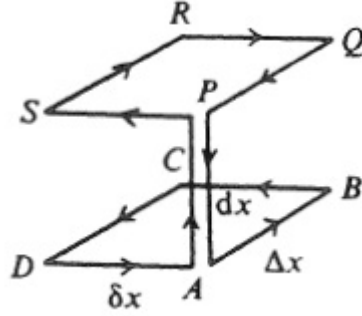


Figura B.2: Primera trayectoria cerrada a través de la cual se hace el transporte paralelo, las otras son hechas según la dirección dada en el texto pero los puntos referenciados son los mismos mostrados en esta figura.

este caso, la relación no será obtenida a través de un transporte paralelo a lo largo de la Fig. B.1 sino a través de las tres trayectorias mostradas en la Fig. B.2, una tras otra (de manera seguida). Empezando en el punto A, en donde ψ se denotará $\psi_{A,0}$, y realizando un recorrido a lo largo de la primera trayectoria $ABCDAPSRQPA$ se obtiene la ecuación

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu} = dx^\mu \delta x^\mu \Delta x^\mu D_\rho F_{\mu\nu}) \psi_{A,0}, \quad (\text{B.3.28})$$

en donde $\Delta V^{\rho\mu\nu} = dx^\mu \delta x^\mu \Delta x^\mu$ es el volumen del cubo y D_ρ sólo aplica sobre $F_{\mu\nu}$. Luego, utilizando la trayectoria $ADSPABQRCBBA$ y haciendo un transporte paralelo

del vector $\psi_{A,1}$ encontrado en B.3.28 se llega a

$$\psi_{A,2} = (1 - ig\Delta V^{\rho\mu\nu} = dx^\mu \delta x^\mu \Delta x^\mu \{D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu}\})\psi_{A,0}, \quad (\text{B.3.29})$$

en donde nuevamente las derivadas covariantes actúan sobre los tensores F . Por último, se utiliza la trayectoria $APQBADCRSDA$ para poder encontrar el siguiente resultado

$$\psi_{A,3} = (1 - ig\{D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu}\})\psi_{A,0}. \quad (\text{B.3.30})$$

en donde se observa claramente un cambio en el valor de $\psi_{A,0}$. Sin embargo, se puede fácilmente chequear que al efectuar todas las trayectorias cerradas, el transporte del vector ψ produce que cada una de las aristas del cubo sea atravezada el dos veces y en sentidos contrarios. Por lo tanto el vector $\psi_{A,0}$ no cambiará al final de los tres recorridos

$$\psi_{A,3} = \psi_{A,0}, \quad (\text{B.3.31})$$

y de esta manera se obtiene la relación

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (\text{B.3.32})$$

la cual puede ser escrita sólo en términos de derivadas covariantes y conmutadores entre ellos, si se recuerda que $[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}$, así

$$D_\rho [D_\mu, D_\nu] + D_\mu [D_\nu, D_\rho] + D_\nu [D_\rho, D_\mu] = 0, \quad (\text{B.3.33})$$

o

$$\boxed{[D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] = 0}. \quad (\text{B.3.34})$$

C

Ecuación de evolución para campos vectoriales de Gauge

Las ecuaciones de evolución para los campos vectoriales de Gauge de un teoría física, i.e., las ecuaciones de Euler-Lagrange, son obtenidas de la forma usual, es decir, a través de variaciones hechas a la acción S ; dichas variaciones son efectuadas respecto a los campos A^a_μ y sus derivadas $\partial_\nu A^a_\mu$. Así, para el caso $SU(2)$, como para cualquier lagrangiano que involucre campos vectoriales y primeras derivadas, las ecuaciones de Euler-Lagrange son escritas como sigue

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \right] = 0, \quad (\text{C.0.1})$$

en donde \mathcal{L} es el lagrangiano de materia, A^a_μ es el campo vectorial de Gauge definido en el Apéndice B y $\sqrt{-g}$ es la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico utilizado. No obstante, estas ecuaciones pueden ser escritas de una manera más elegante y compacta, en la cual se involucre la derivada covariante (uno de los aspectos claves en la construcción de las teorías de Gauge). En lo que sigue, se mostrará que para un lagrangiano $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$, en donde $F^a_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos definido en la sección 2 del apéndice B, las ecuaciones de Euler-Lagrange C.0.1 pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$D_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} = 0. \quad (\text{C.0.2})$$

La demostración se hará a través de dos caminos: el primero es ciertamente una prueba más que una demostración pues se tomará el caso del grupo $SU(2)$ y se hará una

expansión al estilo de una serie de potencias en \mathcal{L} para analizar el comportamiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange; ya que un término de la forma $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ ya es conocido en física, se tomarán términos similares pero de órdenes superiores tales como F^4 y F^6 para poder inferir algunas sentencias modo de conclusión. Aunque esta prueba parezca carecer de generalidad, el resultado obtenido proba varias conclusiones y proporciona admeás luces de cómo establecer una demostración (la cual no se limitaría al caso de $SU(2)$). El segundo camino surge después de un análisis del primer camino y se basa en el hecho de que la única dependencia de A_μ^a y $\partial_\nu A_\mu^a$ en el lagrangiano se encuentra en $F_{\mu\nu}^a$, pues $g_{\mu\nu}$ no depende de los campos vectoriales.

Primer camino

Para esta prueba se tomarán términos F^2 , F^4 y F^6 (pues los términos de orden impar no serían invariantes de Lorentz) en el lagrangiano y se observará si cada uno de ellos conlleva a una expresión que involcure la derivada covariante tal como se ve en C.0.2. Para el término F^2 se tomará el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^b F_b^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.0.3})$$

el cual puede ser transformado en

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^b g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} F_{\lambda\sigma}^b, \quad (\text{C.0.4})$$

y a través de la definición de F

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha A_\beta^b - \partial_\beta A_\alpha^b - g \epsilon_{cd}^b A_\alpha^c A_\beta^d) (\partial_\lambda A_\sigma^b - \partial_\sigma A_\lambda^b - g \epsilon_{ef}^b A_\lambda^e A_\sigma^f). \quad (\text{C.0.5})$$

De esta manera, se puede encontrar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} = -\frac{1}{4} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} \{ (\delta^\nu_\alpha \delta^b_a \delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta \delta^b_a \delta^\mu_\alpha) F_{\lambda\sigma}^b + (\delta^\nu_\lambda \delta^b_a \delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma \delta^b_a \delta^\mu_\lambda) F_{\alpha\beta}^b \}, \quad (\text{C.0.6})$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} = -\frac{1}{4} (F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu}) \quad (\text{C.0.7})$$

y a través de un adecuado cambio de índices

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} = F_a^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (\text{C.0.8})$$

Por otra parte, se obtiene la derivada de \mathcal{L} respecto a los campos A^a_μ como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} &= \frac{1}{4}g(\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\beta}A^d_\beta + \epsilon^b_{ca}F_b^{\alpha\mu}A^c_\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{4}g(\epsilon^b_{af}F_b^{\mu\sigma}A^f_\sigma + \epsilon^b_{ea}F_b^{\lambda\mu}A^e_\lambda), \end{aligned} \quad (\text{C.0.9})$$

la cual, con un adecuado cambio de índices se escribe como

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} = -g\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\beta}A^d_\beta \sqrt{-g}. \quad (\text{C.0.10})$$

De esta manera, con los resultados C.0.8 y C.0.10 se escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange C.0.1 de la siguiente manera

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F_a^{\mu\nu}) - g\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\nu}A^d_\nu \sqrt{-g} = 0, \quad (\text{C.0.11})$$

de donde se observa que aparece una derivada covariante, pues para el caso $SU(2)$ $D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a - g\epsilon^a_{bc}A^b_\mu\phi^c$, entonces

$$D_\nu(F_a^{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{C.0.12})$$

Ahora, para el caso de un término F^4 se tiene el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16}F^a_{\mu\nu}F^b_{\lambda\sigma}F_a^{\mu\nu}F_b^{\lambda\sigma}, \quad (\text{C.0.13})$$

en el cual se pueden bajar todos los índices de $F^a_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16}F^a_{\mu\nu}F^b_{\lambda\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}gF^a_{\alpha\beta}g^{\omega\lambda}g^{\varepsilon\sigma}F^b_{\omega\varepsilon}, \quad (\text{C.0.14})$$

y utilizando su definición se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{16}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\epsilon^a_{de}A^d_\mu A^e_\nu)(\partial_\lambda A^b_\sigma - \partial_\sigma A^b_\lambda - g\epsilon^b_{fg}A^f_\lambda A^g_\sigma) \\ &\quad g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\omega\lambda}g^{\varepsilon\sigma}(\partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - g\epsilon^a_{hi}A^h_\alpha A^i_\beta)(\partial_\omega A^b_\varepsilon - \partial_\varepsilon A^b_\omega - g\epsilon^b_{jk}A^j_\omega A^k_\varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{C.0.15})$$

de donde se obtiene primeramente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^c_\phi} &= \frac{1}{16}(g\epsilon^a_{de}\delta^d_c\delta^\phi_\mu A^e_\nu + g\epsilon^a_{de}\delta^e_c\delta^\phi_\nu A^d_\mu)F^b_{\lambda\sigma}F_b^{\mu\nu}F_b^{\lambda\sigma} \\ &\quad \frac{1}{16}(g\epsilon^b_{fg}\delta^f_c\delta^\phi_\lambda A^g_\sigma + g\epsilon^b_{fg}\delta^g_c\delta^\phi_\sigma A^f_\mu)F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}F_b^{\lambda\sigma} \\ &\quad \frac{1}{16}(g\epsilon^a_{hi}\delta^h_c\delta^\phi_\alpha A^i_\beta + g\epsilon^a_{hi}\delta^i_c\delta^\phi_\beta A^h_\alpha)F_a^{\alpha\beta}F_b^{\lambda\sigma}F_b^{\lambda\sigma} \\ &\quad \frac{1}{16}(g\epsilon^b_{jk}\delta^j_c\delta^\phi_\omega A^k_\varepsilon + g\epsilon^b_{jk}\delta^k_c\delta^\phi_\varepsilon A^j_\omega)F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}F_b^{\omega\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.16})$$

Así, haciendo un adecuado cambio de índices, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^c_\phi} = & \frac{1}{16} g (\epsilon^a_{ce} A^e_\nu F^b_{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\phi\nu} + \epsilon^a_{dc} A^d_\mu F^b_{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\mu\phi}) \\
& \frac{1}{16} g (\epsilon^b_{cg} A^g_\sigma F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\phi\sigma} + \epsilon^b_{fc} A^f_\lambda F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\phi}) \\
& \frac{1}{16} g (\epsilon^a_{ci} A^i_\beta F^b_{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\phi\beta} + \epsilon^a_{hc} A^h_\alpha F^b_{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\alpha\phi}) \\
& \frac{1}{16} g (\epsilon^b_{ck} A^k_\varepsilon F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\phi\varepsilon} + \epsilon^b_{jc} A^j_\omega F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\omega\phi}), \tag{C.0.17}
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial A^c_\phi} = \left\{ \frac{g}{2} \epsilon^b_{fc} A^f_\lambda F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\phi} \right\} \sqrt{-g}. \tag{C.0.18}$$

De manera similar se puede encontrar la derivada de \mathcal{L} respecto a la derivada de los campos vectoriales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A^c_\phi)} = & -\frac{1}{16} (\delta^{\gamma a\phi}_{\mu c\nu} - \delta^{\gamma a\phi}_{\nu c\mu}) F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} - \frac{1}{16} (\delta^{\gamma b\phi}_{\lambda c\sigma} - \delta^{\gamma b\phi}_{\sigma c\lambda}) F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{16} (\delta^{\gamma a\phi}_{\alpha c\beta} - \delta^{\gamma a\phi}_{\beta c\alpha}) F_a^{\alpha\beta} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} - \frac{1}{16} (\delta^{\gamma b\phi}_{\omega c\varepsilon} - \delta^{\gamma b\phi}_{\varepsilon c\omega}) F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\omega\varepsilon}, \tag{C.0.19}
\end{aligned}$$

la cual es reducible si se hacen los cambios de índices requeridos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A^c_\phi)} = -\frac{1}{8} F^b_{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} (F_c^{\gamma\phi} - F_c^{\phi\gamma}) - \frac{1}{16} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} (F_c^{\gamma\phi} - F_c^{\phi\gamma}), \tag{C.0.20}$$

para obtener por último

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A^c_\phi)} = \left\{ -\frac{1}{2} F_c^{\gamma\phi} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g}. \tag{C.0.21}$$

De este modo, las ecuaciones de Euler-Lagrange C.0.1 se escriben

$$\partial_\gamma \left[\frac{1}{2} F_c^{\gamma\phi} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] + \frac{g}{2} \epsilon^b_{fc} A^f_\lambda F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\phi} \sqrt{-g} = 0, \tag{C.0.22}$$

o lo que es equivalente

$$\partial_\lambda \left[\frac{1}{2} F_c^{\lambda\phi} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] - \epsilon^c_{fb} A^f_\lambda \left[\frac{g}{2} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\phi} \sqrt{-g} \right] = 0, \tag{C.0.23}$$

de donde se puede apreciar la definición de derivada covariante para una teoría invariante ante transformaciones de $SU(2)$

$$D_\lambda \left[\frac{1}{2} F_c^{\lambda\phi} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] = 0. \tag{C.0.24}$$

Para terminar la prueba se toma un término de orden F^6 , i.e., un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{64} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.0.25})$$

el cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{64} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon^a_{ef} A_\mu^e A_\nu^f) (\partial_\lambda A_\sigma^b - \partial_\sigma A_\lambda^b - g\epsilon^b_{gh} A_\lambda^g A_\sigma^h) \\ & (\partial_\alpha A_\beta^c - \partial_\beta A_\alpha^c - g\epsilon^c_{ij} A_\alpha^i A_\beta^j) g^{\omega\mu} g^{\nu\epsilon} (\partial_\omega A_\epsilon^a - \partial_\epsilon A_\omega^a - g\epsilon^a_{kl} A_\omega^k A_\epsilon^l) g^{\rho\lambda} \\ & g^{\rho\lambda} (\partial_\rho A_\gamma^b - \partial_\gamma A_\rho^b - g\epsilon^b_{mn} A_\rho^m A_\gamma^n) g^{\theta\alpha} g^{\delta\beta} (\partial_\theta A_\delta^c - \partial_\delta A_\theta^c - g\epsilon^c_{pq} A_\theta^p A_\delta^q). \end{aligned} \quad (\text{C.0.26})$$

Así, es posible encontrar la derivada de \mathcal{L} respecto a los campos vectoriales

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\pi A_\phi^d)} = & -\frac{1}{64} (\delta_{\mu d\nu}^{\pi a\phi} - \delta_{\nu d\mu}^{\pi a\phi}) F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{64} (\delta_{\lambda d\sigma}^{\pi b\phi} - \delta_{\sigma d\lambda}^{\pi b\phi}) F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{64} (\delta_{\alpha d\beta}^{\pi c\phi} - \delta_{\beta d\alpha}^{\pi c\phi}) F_c^{\alpha\beta} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} \\ & -\frac{1}{64} (\delta_{\omega d\epsilon}^{\pi a\phi} - \delta_{\epsilon d\omega}^{\pi a\phi}) F_a^{\epsilon\omega} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{64} (\delta_{\rho d\gamma}^{\pi b\phi} - \delta_{\gamma d\rho}^{\pi b\phi}) F_b^{\rho\gamma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{64} (\delta_{\theta d\delta}^{\pi c\phi} - \delta_{\delta d\theta}^{\pi c\phi}) F_c^{\theta\delta} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.27})$$

la cual es reducible, a través varios cambios de índices, a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\pi A_\phi^d)} = & -\frac{1}{16} F_d^{\pi\phi} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} - \frac{1}{16} F_d^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{16} F_d^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.28})$$

y por último a

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\pi A_\phi^d)} = \left\{ -\frac{3}{16} F_d^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \right\}. \quad (\text{C.0.29})$$

Siguiendo la misma línea, se encuentra que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^d_\phi} &= \frac{1}{64}g(\epsilon_{ef}^a \delta^e_d \delta^\phi_\mu A^f_\nu + \epsilon_{ef}^a \delta^f_d \delta^\phi_\nu A^e_\mu) F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{64}g(\epsilon_{gh}^b \delta^g_d \delta^\phi_\lambda A^h_\sigma + \epsilon_{gh}^b \delta^h_d \delta^\phi_\sigma A^g_\mu) F_b^{\lambda\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{64}g(\epsilon_{ij}^c \delta^i_d \delta^\phi_\alpha A^j_\beta + \epsilon_{ij}^c \delta^j_d \delta^\phi_\beta A^i_\alpha) F_c^{\alpha\beta} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} \\
&+ \frac{1}{64}g(\epsilon_{kl}^a \delta^k_d \delta^\phi_\omega A^l_\epsilon + \epsilon_{kl}^a \delta^l_d \delta^\phi_\epsilon A^k_\omega) F_a^{\epsilon\omega} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{64}g(\epsilon_{mn}^b \delta^m_d \delta^\phi_\rho A^n_\gamma + \epsilon_{mn}^b \delta^n_d \delta^\phi_\gamma A^m_\rho) F_b^{\rho\gamma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{64}g(\epsilon_{pq}^c \delta^p_d \delta^\phi_\theta A^q_\delta + \epsilon_{pq}^c \delta^q_d \delta^\phi_\delta A^p_\theta) F_c^{\theta\delta} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma}, \tag{C.0.30}
\end{aligned}$$

lo cual se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^d_\phi} &= \frac{g}{32} \epsilon_{ed}^a A^e_\mu F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} + \frac{g}{32} \epsilon_{gd}^b A^g_\lambda F_b^{\lambda\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{g}{32} \epsilon_{id}^c A^i_\alpha F_c^{\alpha\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} + \frac{g}{32} \epsilon_{kd}^a A^k_\omega F_a^{\omega\phi} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{g}{32} \epsilon_{mn}^b A^m_\rho F_b^{\rho\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} + \frac{g}{32} \epsilon_{pd}^c A^p_\theta F_c^{\theta\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma}, \tag{C.0.31}
\end{aligned}$$

y se observa que es posible compactar el resultado como sigue

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A^d_\phi} = \frac{3}{16}g\epsilon_{ed}^a A^e_\mu F_a^{\mu\nu} F_b^{\lambda\sigma} F_b^{\lambda\sigma} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \tag{C.0.32}$$

Con estos resultados, se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{3}{16}\partial_\pi(F_d^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) + \frac{3}{16}g\epsilon_{ed}^b A^e_\pi F_b^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = 0, \tag{C.0.33}$$

las cuales son expresadas como

$$\frac{3}{16}\partial_\pi(F_d^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) - \frac{3}{16}g\epsilon_{eb}^d A^e_\pi F_b^{\pi\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = 0, \tag{C.0.34}$$

De esta manera, es posible identificar la derivada covariante para una teoría con simetría ante $SU(2)$ y por ende, establecer que las ecuaciones de movimiento se escriben así

$$D_\lambda \left[\frac{3}{16} F_d^{\lambda\phi} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \right] = 0. \tag{C.0.35}$$

Ahora, reuniendo todos los resultados, i.e., las ecuaciones obtenidas para cada uno de los términos (F^2, F^4 y F^6), se obtiene

$$D_\lambda \left\{ F_d^{\lambda\phi} \sqrt{-g} + \frac{1}{2} F_d^{\lambda\phi} F_{\mu\nu}^b F_b^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \frac{3}{16} F_a^{\lambda\phi} F_{\mu\nu}^b F_b^{\mu\nu} F_c^{\alpha\beta} F_c^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \right\} = 0. \quad (\text{C.0.36})$$

Sin embargo, se debe notar que la derivada de \mathcal{L} respecto a $F_{\mu\nu}^a$ es igual a

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F_{\lambda\gamma}^d} = \left\{ F_d^{\lambda\phi} \sqrt{-g} + \frac{1}{2} F_d^{\lambda\phi} F_{\mu\nu}^b F_b^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \frac{3}{16} F_a^{\lambda\phi} F_{\mu\nu}^b F_b^{\mu\nu} F_c^{\pi\rho} F_c^{\pi\rho} \sqrt{-g} \right\}, \quad (\text{C.0.37})$$

de donde se concluye que la ecuaciones de movimiento para A_μ^a son

$$D_\lambda \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F_{\lambda\gamma}^d} = 0, \quad (\text{C.0.38})$$

y se puede decir que de forma general presentan esta forma pues si alguno de los términos F^n , $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ es acompañado por un escalar o tensor, no se verá ningún cambio en el proceso mostrado anteriormente ya que las únicas derivadas involucradas son efectuadas con respecto a A y sus derivadas. Este hecho, da un indicio para poder establecer una demostración propiamente dicha, en donde además se generaliza para cualquier grupo de transformación.

Segundo camino

Para esta demostración se partirá de las ecuaciones de Euler-Lagrange para cualquier set de campos vectoriales A_μ^a , donde a depende del grupo de transformación. Estas ecuaciones son escritas, al igual que C.0.1, como

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\mu^a} - \partial_\nu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} \right] = 0, \quad (\text{C.0.39})$$

en donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F_{\mu\nu}^a, g_{\mu\nu})$ y $F_{\mu\nu}^a$ está definido, tal como se vio en la sección 3 del apéndice B, de la siguiente manera

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ig f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (\text{C.0.40})$$

en donde f_{abc} son las constantes de estructura de grupo, i.e., si las matrices M^a son los generadores de la transformación Local de Gauge entonces

$$[M^a, M^b] = f_{abc} M^c. \quad (\text{C.0.41})$$

Así, se puede notar que la única dependencia de A^a_μ en \mathcal{L} se encuentra en el tensor F , por lo tanto se aplica regla de la cadena para escribir las ecuaciones C.0.1 como sigue

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\alpha\beta}} \frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\alpha\beta}} \frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \right] = 0. \quad (\text{C.0.42})$$

Paralelamente, se pueden obtener las derivadas

$$\frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial A^a_\mu} = -ig f_{bad} A^d_\beta \delta^\mu_\alpha - ig f_{bca} A^c_\alpha \delta^\mu_\beta, \quad (\text{C.0.43})$$

y

$$\frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = \delta^{\nu b\mu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu b\mu}_{\beta a\alpha}, \quad (\text{C.0.44})$$

con las cuales se puede escribir

$$\begin{aligned} & -ig \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\beta}} f_{bac} A^c_\beta - ig \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\alpha\mu}} f_{bca} A^c_\alpha \\ & - \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\alpha\mu}} \right) + \partial_\beta \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\beta}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.0.45})$$

Ahora, con un cambio de índices se llega a la ecuación

$$-2ig \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\beta}} f_{bac} A^c_\beta + 2\partial_\beta \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\beta}} \right) = 0, \quad (\text{C.0.46})$$

la cual puede ser multiplicada por M^a

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} M^a \right) - ig \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\nu}} f_{bac} M^a A^c_\nu = 0, \quad (\text{C.0.47})$$

y de esta manera, sirviéndose de la ec. C.0.41, obtener

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} M^a \right) - ig \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\nu}} A^c_\nu [M^b, M^c] = 0. \quad (\text{C.0.48})$$

Luego, expandiendo el conmutador, se llega a

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} M^a \right) - ig M^c A^c_\nu M^b \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\nu}} + ig M^b \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^b_{\mu\nu}} M^c A^c_\nu = 0, \quad (\text{C.0.49})$$

en donde se puede identificar la definición de derivada covariante para cualquier tipo de invariancia, pero en este caso está aplicada sobre sobre un escalar ψ sino sobre un vector B^c acompañado por una matriz M^c . Entonces, se infiere que

$$D_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} M^a \right] = 0, \quad (\text{C.0.50})$$

de donde se concluye que para una lagrangiano $F^a_{\mu\nu}$ invariante ante cualquier transformación Local de Gauge, las ecuaciones de movimiento de los correspondientes campos de Gauge A^a_μ son

$$D_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F^a_{\mu\nu}} = 0. \quad (\text{C.0.51})$$

Por último, volviendo al modelo, se desea mostrar que si el anstaz tomado para la forma de los campos A^a_μ y la métrica de FRW son aplicados a la ecuación anterior, se llega a

$$\sqrt{-g}D_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^a_{i0}} = 0, \quad (\text{C.0.52})$$

y

$$D_0 \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^a_{0i}} \right\} + \sqrt{-g}D_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^a_{ji}} = 0. \quad (\text{C.0.53})$$

Ahora, si se evalúan las componentes de $F^a_{\mu\nu}$, se obtiene sólomente una ecuación

$$\partial_0 \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial\mathcal{L}}{\delta^a_i \partial\dot{\phi}} \right\} + g\epsilon^a_{bc} A^b_j \frac{\partial\mathcal{L}}{2g^c_{ji} \partial\phi} = 0, \quad (\text{C.0.54})$$

de donde finalmente se deduce la expresión

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left[a^3 \frac{\partial\mathcal{L}_{red}}{\partial\dot{\phi}} \right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (\text{C.0.55})$$

la cual es equivalente a la ecuación de movimiento de un sistema compuesto de un campo escalar (el cual presenta homogeneidad e isotropía). Es decir, el modelo basado en campos vectoriales con un ansatz dado y un lagrangiano $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$, se reduce a tener una ecuación de movimiento para un campo escalar y por ende un tensor de momentum energía para una fluido perfecto. Así, se está mostrando que el ansatz escogido reproduce muy bien las propiedades requeridas desde un principio: homogeneidad e isotropía.

D

Tensor momentum-energía para un lagrangiano invariante de Gauge en un universo de FRW

En este apéndice se desea mostrar una deducción acerca del tensor momentum energía para un sistema caracterizado por el lagrangiano invariante de Gauge \mathcal{L} ; aunque se sepa a partir del apéndice C que el tensor representa un fluido perfecto, se puede encontrar una forma para T en la cual se involucre F en lugar de g . La forma general para el tensor momentum energía en función de \mathcal{L} está dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{D.0.1})$$

Además, si se aplica la propiedad de la derivada (variación) de un producto, se encuentra

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} - 2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{D.0.2})$$

en donde

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.0.3})$$

y por lo tanto

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{D.0.4})$$

Ahora, si se tiene en cuenta el hecho de que la dependencia de $g^{\mu\nu}$ en el lagrangiano se encuentra en los términos $F_{\mu}^{\alpha \nu}$, la variación respecto al tensor métrico se escribe como

$$-2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha}^{\beta}} \frac{\partial F_{\alpha}^{\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (\text{D.0.5})$$

y por ende se tiene que

$$-2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_\alpha^b} \frac{\partial g^{\beta\lambda}}{\partial g^{\mu\nu}} F^b_{\alpha\lambda} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_\alpha^b} \delta^\beta_\mu \delta^\lambda_\nu F^b_{\alpha\lambda} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_\alpha^b} F^b_{\alpha\nu}. \quad (\text{D.0.6})$$

De esta manera, se establece que el tensor momentum-energía para un lagrangiano $\mathcal{L}(F^a_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$, se escribe como sigue

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F^a_{\sigma\mu}} F^a_{\sigma\nu} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{D.0.7})$$

Ahora, si se utiliza el ansatz escogido y la métrica de FRW, se obtendrán las expresiones para la presión y la densidad de energía idénticas a las del caso de un sistema compuesto por un campo escalar (pues ya se observó que la ecuación de evolución para los campos es la misma):

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}_{red}, \quad (\text{D.0.8})$$

$$P = \frac{\partial(a^3 \mathcal{L}_{red})}{\partial a^3}. \quad (\text{D.0.9})$$

E

Obtención de las ecuaciones de campo para el modelo vectorial de Gauge

En este apéndice se desean mostrar los cálculos detallados realizados para la obtención de la ecuación de Friedmann y las ecuaciones de evolución de los campos vectoriales de Gauge $SU(2)$. Paralelamente, se hará énfasis en el hecho de que hay dos caminos para encontrar cada una de las ecuaciones, demostrándose de esta manera la generalidad de los resultados estudiados en los apéndices D y C.

E.1. Ecuación de Friedmann

La ecuación de Friedmann encontrada en el capítulo 1 (con $K = 0$ y $m_p^2 = 1$) se escribe como

$$H^2 = \frac{\rho}{3}, \quad (\text{E.1.1})$$

en donde ρ es la densidad de energía del fluido que compone el Universo. Por lo tanto, el cálculo de la ecuación de Friedmann se reduce a encontrar la expresión para ρ . Así, como se dijo líneas atrás, esto es posible por dos caminos diferentes: primero, se trabajará con los resultados del apéndice D para el lagrangiano descrito en la ec. 3.3.2 y segundo, se usará el método estándar, i.e., a través de la obtención de ρ y P a partir del tensor momentum energía de la ec. 1.2.3.

Primer camino

Recordando las expresiones para ρ y P encontradas en el apéndice D

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}_{red}, \quad P = \frac{\partial(a^3 \mathcal{L}_{red})}{\partial a^3}, \quad (\text{E.1.2})$$

se puede notar que se requiere obtener el lagrangiano reducido $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, a(t))$, i.e., evaluar el ansatz $A^a_i = \phi \delta^a_i$ y utilizar la métrica de FRW en el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a{}^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma})^2. \quad (\text{E.1.3})$$

Así, si se tiene en cuenta el ansatz evaluado en el tensor $F^a_{\mu\nu}$ produce las componentes

$$F^a_{00} = 0, \quad F^a_{0i} = \dot{\phi} \delta^a_i, \quad F^a_{ij} = -g \dot{\phi}^2 \epsilon^a_{ij}, \quad (\text{E.1.4})$$

el lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^a_{0i} F^a{}^{0i} - \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a{}^{ij} + \frac{\kappa}{384} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma})^2, \quad (\text{E.1.5})$$

o bajando adecuadamente todos los índices de los tensores $F^a_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^a_{0i} g^{\mu 0} g^{\nu i} F^a{}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^a_{ij} g^{\mu i} g^{\nu j} F^a{}_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma})^2. \quad (\text{E.1.6})$$

De esta manera, usando las respectivas componentes del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ se llega a la expresión

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \delta^a_i \delta_{ai} - \frac{1}{4} \frac{g^2 \dot{\phi}^4}{a^4} \epsilon_{akj} \epsilon_{akj} + \frac{\kappa}{384} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma})^2, \quad (\text{E.1.7})$$

de donde se advierte que es necesario calcular separadamente el valor de $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma}$ para el ansatz utilizado; dicho valor puede ser encontrado en un par de líneas así

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma} &= \varepsilon^{0\nu\lambda\sigma} F^a_{0\nu} F^a_{\lambda\sigma} + \varepsilon^{i\nu\lambda\sigma} F^a_{i\nu} F^a_{\lambda\sigma} \\ &= 2\varepsilon^{0i\lambda\sigma} F^a_{0i} F^a_{\lambda\sigma} + \varepsilon^{ij0\sigma} F^a_{ij} F^a_{0\sigma} \\ &= 2\varepsilon^{0ijk} F^a_{0i} F^a_{jk} + 2\varepsilon^{ijk0} F^a_{ij} F^a_{k0} \\ &= 4\varepsilon^{ijk0} F^a_{k0} F^a_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{E.1.8})$$

y finalmente

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\lambda\sigma} = -4\varepsilon^{ijk0} g \dot{\phi}^2 \epsilon^k_{ij}. \quad (\text{E.1.9})$$

Teniendo en cuenta esto último el lagrangiano reducido se escribe como sigue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \delta^a_i \delta_{ai} - \frac{1}{4} \frac{g^2 \dot{\phi}^4}{a^4} \epsilon_{akj} \epsilon_{akj} + \frac{\kappa}{24} \varepsilon^{ijk0} \varepsilon^{mnp0} g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp}, \quad (\text{E.1.10})$$

en donde se debe aclarar que ϵ_{ijk} (cantidad con tres índices) corresponde al símbolo de Levi-Civita, mientras que $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ (cantidad con cuatro índices) es un tensor relacionado con este símbolo así $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}/\sqrt{-g}$ o $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\sqrt{-g}$. Así, se obtiene finalmente que

$$\mathcal{L}_{red} = \frac{3}{2} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right], \quad (\text{E.1.11})$$

en donde se ha usado la propiedad del tensor de Levi-Civita, $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

Por último, se debe hacer uso de las expresiones dadas en E.1.2 y el lagrangiano reducido para encontrar

$$\rho = 3\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + 3\kappa\frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right),$$

$$\boxed{\rho = \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right)}, \quad (\text{E.1.12})$$

y

$$P = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial a^3} \left(\dot{\phi}^2 a - \frac{g^2\phi^4}{a} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^3} \right),$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2\phi^4}{a^4} \right) - \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6}}. \quad (\text{E.1.13})$$

de donde se obtiene directamente la ecuación de Friedmann para el modelo

$$H^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right), \quad (\text{E.1.14})$$

al igual que su derivada

$$\dot{H} = - \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2\phi^4}{a^4} \right). \quad (\text{E.1.15})$$

Segundo camino

El segundo camino es el usual en este tipo de estudios: se calculan las componentes del tensor

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{E.1.16})$$

para el lagrangiano \mathcal{L} definido en la ec. 3.3.2. Sin embargo, se deben subir todos los índices espaciotemporales de los tensores F y aplicar la defición de $\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}$, es decir, usar el símbolo de Levi-Civita de cuatro índices y el determinante del tensor métrico así

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}F^a_{\lambda\sigma} + \frac{\kappa}{384(\sqrt{-g})^{-2}}(\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}F^a_{\alpha\beta}F^a_{\lambda\sigma})^2, \quad (\text{E.1.17})$$

pues se desea derivar el lagrangiano respecto al tensor métrico $g^{\mu\nu}$. De esta manera, el tensor momentum-energía toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F^a_{\mu\beta}g^{\beta\alpha}F^a_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}F^a_{\alpha\mu}g^{\alpha\lambda}F^a_{\lambda\nu} - \frac{\kappa}{196} \frac{\partial(\sqrt{-g})^2}{\partial g^{\mu\nu}} (\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}F^a_{\alpha\beta}F^a_{\lambda\sigma})^2 + g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (\text{E.1.18})$$

la cual puede ser transformada a través de un cambio de índices y el uso de la derivada de $\sqrt{-g}$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}}{2}, \quad (\text{E.1.19})$$

así

$$T_{\mu\nu} = F^a_{\mu\beta}g^{\beta\sigma}F^a_{\nu\sigma} - \frac{\kappa}{196} \frac{g_{\mu\nu}}{(\sqrt{-g})^2} (\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}F^a_{\alpha\beta}F^a_{\lambda\sigma})^2 + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (\text{E.1.20})$$

Ahora, si se utiliza el resultado de la ec. E.1.9 y la métrica de FRW, se obtiene

$$T_{\mu\nu} = F^a_{\mu\beta}g^{\beta\sigma}F^a_{\nu\sigma} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (\text{E.1.21})$$

y por lo tanto cada una de sus componentes son

$$\begin{aligned} T_{00} &= F^a_{0i}g^{ij}F^a_{0j} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6}g_{00} + g_{00}\mathcal{L}, \\ T_{00} &= 3\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} - \frac{3}{2} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right], \\ T_{00} &= \frac{3}{2} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.1.22})$$

$$\begin{aligned} T_{0i} &= F^a_{0m}g^{ml}F^a_{il} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6}g_{0i} + g_{0i}\mathcal{L}, \\ T_{0i} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.1.23})$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= F^a_{i0}g^{00}F^a_{j0} + F^a_{ik}g^{kl}F^a_{jl} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^6}g_{ij} + g_{ij}\mathcal{L}, \\ T_{ij} &= \dot{\phi}^2\delta_{ij} + 2\frac{g^2\phi^4}{a^4}\delta_{ij} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^4}\delta_{ij} + \delta_{ij} \frac{3}{2} \left[\dot{\phi}^2 - \frac{g^2\phi^4}{a^2} + \kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^4} \right], \\ T_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 + \frac{g^2\phi^4}{a^2} - 3\kappa \frac{g^2\dot{\phi}^2\phi^4}{a^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.1.24})$$

Así, las expresiones para densidad de energía y la presión del fluido (en correspondencia con el primer camino) son

$$\rho = \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4}{a^6} \right), \quad (\text{E.1.25})$$

y

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) - \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4}{a^6}, \quad (\text{E.1.26})$$

de donde se obtiene directamente la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4}{a^6} \right). \quad (\text{E.1.27})$$

E.2. Ecuaciones de evolución para los campos A_μ

Al igual que en el caso de ecuación de Friedmann, se tomarán dos caminos para llegar al mismo resultado y por ende mostrar la validez de los resultados del apéndice C.

Primer camino

El primer camino consiste en tomar la última expresión encontrada para las ecuaciones de evolución de A_μ^a , i.e., la ecuación de movimiento para el campo escalar ϕ

$$\frac{d}{a^3 dt} \left(a^3 \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{E.2.1})$$

y calcular cada termino por separado para poder llegar directamente a la expresión adecuada. Primero, se encuentra

$$a^3 \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} = 3\dot{\phi}a + \frac{3\kappa g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^3}, \quad (\text{E.2.2})$$

con lo cual se puede obtener

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left[a^3 \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} \right] = 3 \frac{\ddot{\phi}}{a^2} + \frac{3\dot{\phi}H}{a^2} + \frac{12\kappa g^2 \phi^3 \dot{\phi}^2}{a^6} + \frac{3\kappa g^2 \phi^4 \ddot{\phi}^2}{a^6} - \frac{9\kappa g^2 \phi^4 \dot{\phi}H}{a^6}. \quad (\text{E.2.3})$$

Segundo, se deriva \mathcal{L}_{red} respecto a ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \phi} = -\frac{6g^2\phi^3}{a^4} + \frac{6\kappa g^2\phi^3\dot{\phi}^2}{a^6}, \quad (\text{E.2.4})$$

y de esta manera es fácil chequear que la ecuación de movimiento queda escrita como sigue

$$\left(1 + \kappa \frac{g^4\phi^4}{a^4}\right) \ddot{\phi} + \left(1 + \kappa \frac{\dot{\phi}^2}{a^2}\right) \frac{2g^2\phi^3}{a^2} + \left(1 - 3\kappa \frac{g^2\phi^4}{a^4}\right) \dot{\phi}H = 0. \quad (\text{E.2.5})$$

Segundo camino

El segundo camino para llegar a la ecuación de movimiento para ϕ será evidentemente más extenso: se parte de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)} \right] = 0, \quad (\text{E.2.6})$$

se reemplaza el lagrangiano dado en 3.3.2 y finalmente se utiliza el ansatz realizado sobre la forma de $A^a{}_\mu$, mostrándose de esta manera la relevancia de los resultados del apéndice C. Para empezar, se escribe el lagrangiano con todos los índices de $F^a{}_{\mu\nu}$ abajo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^b{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}F^b{}_{\lambda\sigma} + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}F^b{}_{\alpha\beta}F^b{}_{\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F^c{}_{\rho\omega}F^c{}_{\gamma\kappa}, \quad (\text{E.2.7})$$

luego, se utiliza la definición de $F^a{}_{\mu\nu}$ para el caso $SU(2)$, cual está en términos de $A^a{}_\mu$, para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}(\partial_\alpha A^b{}_\beta - \partial_\beta A^b{}_\alpha - g\epsilon_{cd}^b A^c{}_\alpha A^d{}_\beta)(\partial_\lambda A^b{}_\sigma - \partial_\sigma A^b{}_\lambda - g\epsilon_{ef}^b A^c{}_\lambda A^d{}_\sigma) \\ & + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}(\partial_\alpha A^b{}_\beta - \partial_\beta A^b{}_\alpha - g\epsilon_{de}^b A^d{}_\alpha A^e{}_\beta)(\partial_\lambda A^b{}_\sigma - \partial_\sigma A^b{}_\lambda - g\epsilon_{fg}^b A^f{}_\lambda A^g{}_\sigma) \\ & (\partial_\rho A^c{}_\omega - \partial_\omega A^c{}_\rho - g\epsilon_{hi}^c A^h{}_\rho A^i{}_\omega)(\partial_\gamma A^c{}_\kappa - \partial_\kappa A^c{}_\gamma - g\epsilon_{jl}^c A^j{}_\gamma A^l{}_\kappa). \end{aligned} \quad (\text{E.2.8})$$

Ahora, sabiendo que el tensor métrico no depende de $A^a{}_\mu$, se establece que

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)} = \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^a{}_\mu)}, \quad (\text{E.2.9})$$

y de esta manera, es fácil encontrar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = & -\frac{1}{4}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}(\delta^\nu_\alpha\delta^b_a\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^b_a\delta^\mu_\alpha)F^b_{\lambda\sigma} - \frac{1}{4}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}(\delta^\nu_\lambda\delta^b_a\delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma\delta^b_a\delta^\mu_\lambda)F^b_{\alpha\beta} \\
& + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}(\delta^\nu_\alpha\delta^b_a\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^b_a\delta^\mu_\alpha)F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} \\
& + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}(\delta^\nu_\lambda\delta^b_a\delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma\delta^b_a\delta^\mu_\lambda)F^b_{\alpha\beta}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} \\
& + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}(\delta^\nu_\rho\delta^c_a\delta^\mu_\omega - \delta^\nu_\omega\delta^c_a\delta^\mu_\rho)F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\gamma\kappa} \\
& + \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}(\delta^\nu_\gamma\delta^c_a\delta^\mu_\kappa - \delta^\nu_\kappa\delta^c_a\delta^\mu_\gamma)F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}. \quad (\text{E.2.10})
\end{aligned}$$

En seguida, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = & -\frac{1}{4}(F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}(F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu}) + \frac{\kappa}{192}\varepsilon^{\nu\mu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F^a_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} \\
& + \frac{\kappa}{192}\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F^a_{\alpha\beta}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} + \frac{\kappa}{192}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\nu\mu\gamma\kappa}F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^a_{\gamma\kappa} + \frac{\kappa}{192}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\nu\mu}F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^a_{\rho\omega}, \quad (\text{E.2.11})
\end{aligned}$$

y haciendo un cambio adecuado de índices mudos, se llega a

$$\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = \left\{ F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{48}\varepsilon^{\nu\mu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F^a_{\lambda\sigma}F^b_{\rho\omega}F^b_{\gamma\kappa} \right\} \sqrt{-g}. \quad (\text{E.2.12})$$

Por otra parte, se puede deducir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} = & \frac{1}{4}g(\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\beta}A^d_\beta + \epsilon^b_{ca}F_b^{\alpha\mu}A^c_\alpha) + \frac{1}{4}g(\epsilon^b_{af}F_b^{\mu\sigma}A^f_\sigma + \epsilon^b_{ea}F_b^{\lambda\mu}A^e_\lambda) \\
& - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\mu\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{ae}A^e_\beta F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{da}A^d_\alpha F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} \\
& - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{ag}A^g_\sigma F^b_{\alpha\beta}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{fa}A^f_\lambda F^b_{\alpha\beta}F^b_{\rho\omega}F^b_{\gamma\kappa} \\
& - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\mu\omega\gamma\kappa}g\epsilon^c_{ai}A^i_\omega F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\gamma\kappa} - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\mu\gamma\kappa}g\epsilon^c_{ha}A^h_\rho F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\gamma\kappa} \\
& - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\mu\kappa}g\epsilon^c_{al}A^l_\kappa F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega} - \frac{\kappa}{384}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\mu}g\epsilon^c_{ja}A^i_\gamma F^b_{\alpha\beta}F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}, \quad (\text{E.2.13})
\end{aligned}$$

para llegar finalmente a

$$\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} = \left\{ g\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\beta}A^d_\beta - \frac{\kappa}{48}\varepsilon^{\mu\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{ae}A^e_\beta F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa} \right\} \sqrt{-g}. \quad (\text{E.2.14})$$

Así, con los resultados E.2.14 y E.2.12 se puede escribir la ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue

$$\begin{aligned}
\partial_\nu(\sqrt{-g}F_a^{\mu\nu}) + \frac{\kappa}{48}\partial_\nu(\varepsilon^{\nu\mu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F^a_{\lambda\sigma}F^b_{\rho\omega}F^b_{\gamma\kappa}\sqrt{-g}) - g\epsilon^b_{ad}F_b^{\mu\beta}A^d_\beta\sqrt{-g} \\
+ \frac{\kappa}{48}\varepsilon^{\mu\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b_{ae}A^e_\beta F^b_{\lambda\sigma}F^c_{\rho\omega}F^c_{\gamma\kappa}\sqrt{-g} = 0, \quad (\text{E.2.15})
\end{aligned}$$

las cuales pueden ser de la siguiente manera haciendo un adecuado cambio de índices

$$\begin{aligned} \partial_\nu(\sqrt{-g}F_a^{\mu\nu}) - g\epsilon^b{}_{ad}F_b^{\mu\nu}A^d{}_\nu\sqrt{-g} - \frac{\kappa}{48}\partial_\nu(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F_{\lambda\sigma}^aF_{\rho\omega}^bF_{\gamma\kappa}^b\sqrt{-g}) \\ + \frac{\kappa}{48}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}g\epsilon^b{}_{ad}A^d{}_\nu F_{\lambda\sigma}^b F_{\rho\omega}^c F_{\gamma\kappa}^c \sqrt{-g} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2.16})$$

De estas últimas ecuaciones, se puede apreciar que aparece la derivada covariante, pues la derivada covariante de un vector B^a cualquiera en el espacio abstracto de isospín es $D_\mu B^a = \partial_\mu B^a - g\epsilon^a{}_{bc}A^b{}_\mu B^c$. Entonces, la ecuación anterior toma la forma

$$D_\nu(\sqrt{-g}F_a^{\mu\nu}) - \frac{\kappa}{48}D_\nu(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F_{\lambda\sigma}^aF_{\rho\omega}^bF_{\gamma\kappa}^b\sqrt{-g}) = 0, \quad (\text{E.2.17})$$

y finalmente

$$D_\nu \left[\left(F_a^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{48}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F_{\lambda\sigma}^aF_{\rho\omega}^bF_{\gamma\kappa}^b \right) \sqrt{-g} \right] = 0. \quad (\text{E.2.18})$$

Aunque, el anterior resultado parezca diferente al obtenido en el primer camino, se debe notar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^a} = -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{92}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa}F_{\lambda\sigma}^aF_{\rho\omega}^bF_{\gamma\kappa}^b, \quad (\text{E.2.19})$$

de donde se deduce directamente que la ecuación E.2.18 es equivalente a

$$D_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial F_{\mu\nu}^a} = 0. \quad (\text{E.2.20})$$

Por lo tanto, no es necesario reemplazar el ansatz escogido y la métrica de FRW en las ecuaciones E.2.18 pues sería equivalente a evaluarlos en E.2.20. Así, se volvería a obtener

$$\frac{d}{a^3 dt} \left(a^3 \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{red}}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{E.2.21})$$

y como se vio en el primer camino, se inferiría que

$$\left(1 + \kappa \frac{g^4 \phi^4}{a^4} \right) \ddot{\phi} + \left(1 + \kappa \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \right) \frac{2g^2 \phi^3}{a^2} + \left(1 - 3\kappa \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) \dot{\phi} H = 0. \quad (\text{E.2.22})$$

De esta manera, se prueba la validez de los resultados de los apéndices C y D y se observa que un término F^4 o superior puede estar acompañando de un tensor pues, tal como se vio en todos los cálculos, las definiciones de las ecuaciones de movimiento y el tensor momentum-energía (en un marco de Gauge) son válidas para cualquier $\mathcal{L}(F_{\mu\nu}^a, g_{\mu\nu})$.

F

Parámetros de rodadura lenta del modelo

En este apéndice serán tratados las relaciones existentes entre los parámetros de rodadura lenta definidos para la inflación del tipo escalar y los parámetros utilizados en el modelo inflacionario vectorial de Gauge. La idea es partir de las definiciones dadas en 3.4.2, exigir $\varepsilon \ll 1$ y a través de las ecuaciones 2.3.3 y 2.3.4 del modelo inflacionario escalar poder llegar a las condiciones dadas en 2.3.13. Dicho de otra manera, se desea probar que los parámetros utilizados en el modelo siguen siendo válidos para el modelo compuesto por un campo escalar, y de esta manera tomarlos como definiciones generales (independientes del modelo).

Para empezar, se toma el parámetro ε

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (\text{F.0.1})$$

en donde H y \dot{H} para el modelo inflacionario escalar son (tomando $m_p^2 = 1$)

$$H^2 = \frac{\rho}{3} = \frac{(1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi))}{3}, \quad (\text{F.0.2})$$

y

$$\dot{H} = -\frac{(\rho + P)}{2} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (\text{F.0.3})$$

de tal manera que

$$\varepsilon = \frac{3\dot{\rho}^2}{2(1/2\dot{\rho}^2 + V(\phi))}. \quad (\text{F.0.4})$$

Ahora, aplicando la condición $\varepsilon \ll 1$ se encuentra la desigualdad

$$V(\phi) \gg \dot{\phi}^2, \quad (\text{F.0.5})$$

la cual puede ser derivada para llegar a

$$V'(\phi) \gg \ddot{\phi}. \quad (\text{F.0.6})$$

Por otra parte, con ayuda de la ecuación de Klein-Gordon encontrada en 2.3.4 y el resultado de la ec. F.0.6, se obtiene

$$V'(\phi) \simeq -3H\dot{\phi}, \quad (\text{F.0.7})$$

lo cual es derivado para inferir que

$$V''(\phi) \simeq -3\dot{H} - 3H\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}. \quad (\text{F.0.8})$$

De esta manera, es posible encontrar las expresiones para ε y η en términos del potencial y sus derivadas. En el caso de ε , se obtiene lo mismo que se observó en el capítulo 2

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right]^2 \ll 1. \quad (\text{F.0.9})$$

No obstante, para el caso de η , se llega a la expresión

$$|\eta| \simeq \left| \varepsilon - \left[\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right] \right| \ll 1, \quad (\text{F.0.10})$$

evidenciando que el parámetro η definido para el modelo vectorial de Gauge no es el mismo definido en el modelo vectorial; sin embargo, están relacionados y es también mucho menor que uno. Por lo tanto, se tomará $\tilde{\eta}$ (tildado en esta sección para diferenciarlo del parámetro usual) como parámetro de rodadura lenta pues está relacionado con ε y η , haciéndose la aclaración de que no es exactamente igual al η conocido en la literatura [10, 14, 46]. Así, el segundo parámetro de rodadura lenta utilizado en el capítulo 3 es en realidad $\tilde{\eta}$, el cual se define como $|\tilde{\eta}| = |\varepsilon - \eta|$.

G

Algoritmo utilizado

En este apéndice se desea mostrar el algoritmo utilizado para resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento. El orden en la declaración de las variables influye notablemente en el resultado obtenido. Por esto, se debe tener especial cuidado en la secuencia del algoritmo.

```
clc
close all
% Parametros
K = 1.733e14;
g = 2.5e-3;
% Condiciones iniciales
Y = 0.035;
d_Y = -1e-10; %-10.000e-10;
H = 3.4e-5; Hi = H;
% Intervalo de tiempo
dt = 0.5e1; %1e0; %H;
d_H = -(d_Y+Y*H)^2 - g^2 * Y^4;
E = -d_H/H^2;
RhoYM = -3*d_H/2;
RhoKappa = (3*K*g^2*Y^4*(d_Y+H*Y)^2)/2;
N = 0;

vH = H;
vdH = d_H;
```

```

vdY = d_Y;
vY = Y;
vE = E;
vRhoYM = RhoYM;
vRhoKappa = RhoKappa;
vN = N;
vt = 0;

tHi = 300; % Máximo valor para el eje de las abscisas

Nk2 = 10e3;
Nk1 = fix(tHi/(dt*Hi)/Nk2);
sum_b = 0;
figure
for k1 = 1:Nk1
    tic
    for k2 = 1:Nk2

        Ho = H; % Gurada el valor anterior de H para poder integrar y obtener N
        m = 2*(2-Y^2-K*g^2*Y^6);
        q = g^2*Y^4 + d_Y^2*(1+K*g^2*Y^4);
        r = 2*d_Y*Y*(1+K*g^2*Y^4);
        H = r/m + sqrt(r^2+2*m*q)/m;
        d_H = -(d_Y+Y*H)^2 - g^2 * Y^4;
        a1 = 1 + K*g^2*Y^4;
        a2 = (1+K*(d_Y+Y*H)^2)*2*g^2*Y^3 + (1-3*K*g^2*Y^4)*(d_Y + Y*H)*H;
        p = Y*d_H + Y*H^2 + a2/a1;
        d_Y = (d_Y - dt*p)/(1+2*H*dt);
        Y = Y + dt * d_Y; % Integracion de primer orden
        E = -d_H/H^2;
        RhoYM = -3*d_H/2;
        RhoKappa = (3*K*g^2*Y^4*(d_Y+H*Y)^2)/2;
        N = N + (H+Ho)/2;

        vt = [vt dt+vt(end)];
        vdH = [vdH d_H];
        vH = [vH H];
        vdY = [vdY d_Y];
    end
end

```

```

    vY = [vY Y];
    vE = [vE E];
    vRhoYM = [vRhoYM RhoYM];
    vRhoKappa = [vRhoKappa RhoKappa];
    vN = [vN N];
end
%disp(sprintf('save dat_cosmo_%d.mat vt vdH vH vdY vY',k1))

figure(1)
plot(vt*Hi,vY)
hold on
xlabel('t*Hi')
ylabel('\psi')

figure(2)
plot(vt*Hi,vE)
hold on
xlabel('t*Hi')
ylabel('\epsilon')

figure(3)
plot(vt*Hi,vN)
hold on
xlabel('t*Hi')
ylabel('N')

figure(4)
plot(vt*Hi,vRhoYM)
hold on
xlabel('t*Hi')
ylabel('\rhoYM')

figure(5)
plot(vt*Hi,vRhoKappa)
hold on
xlabel('t*Hi')
ylabel('\rhoKappa')

```

```

vt(1:end-1) = [];
vdH(1:end-1) = [];
vH(1:end-1) = [];
vdY(1:end-1) = [];
vY(1:end-1) = [];
vE(1:end-1) = [];
vRhoYM(1:end-1) = [];
vRhoKappa(1:end-1) = [];
vN(1:end-1) = [];
clc
b = toc;
sum_b = sum_b + b;
rem_time = (0.2*b + 0.8*sum_b/k1)*(Nk1-k1);
prog_elap=sprintf('Progress %g%s (elapsed time = %0.1f s, remaining time = %0
disp(prog_elap)
title(prog_elap)
end

```