

ANÁLISIS DE FISURAS EN UNA VIGA A PARTIR DE LAS CURVATURAS DE LA
DEFLEXIÓN Y LA FORMA MODAL

RUBÉN DARÍO FORERO CARRILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL
BUCARAMANGA
2017

ANÁLISIS DE FISURAS EN UNA VIGA A PARTIR DE LAS CURVATURAS DE LA
DEFLEXIÓN Y LA FORMA MODAL

RUBÉN DARÍO FORERO CARRILLO

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magister en Ingeniería Estructural

Director: Oscar Javier Begambre Carrillo
MsC. Ingeniería Civil - Estructuras
PhD. Ingeniería Civil - Estructuras

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL
BUCARAMANGA
2017

Dedico este trabajo a mis hijos Juan Manuel y Juan José, espero vivir lo suficiente para ver el día en que lleguen más lejos que su padre.

Agradezco primero que todo a Dios por haberme dado tanto en la vida. A mi familia por el tiempo que no les dedique mientras realizaba mis estudios. Al profesor Oscar Begambre por el tiempo dedicado en las valiosas consultas durante la elaboración del presente trabajo de grado. A los profesores Sinha, Friswell y Edwards, por elaborar la teoría sobre la que este trabajo de grado se fundamenta, en especial al profesor Friswell por tener la gentileza de aclararme dudas las veces que le escribí.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	21
1. JUSTIFICACIÓN	23
2. OBJETIVOS	25
2.1. OBJETIVO GENERAL	25
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	25
2.3. ALCANCE	25
3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	27
3.1. EL PROBLEMA ESTÁTICO, LA CURVATURA DE LA DEFLEXIÓN	28
3.2. EL PROBLEMA DINÁMICO, LAS CURVATURAS DE LAS FORMAS MODALES	28
3.3. OBTENCIÓN DE LAS CURVATURAS DE LA DEFLEXIÓN Y DE LAS FORMAS MODALES	32
3.4. PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS GENERALIZADO EN DINÁMICA DE ESTRUCTURAS	32
3.5. OTROS MODELOS SIMPLIFICADOS DE DAÑO EN VIGAS Y USO DE CURVATURAS DE DEFLEXIÓN Y FORMAS MODALES	34
3.6. METODOLOGÍA	35
3.7. MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	36
4. MODELO DE VIGA SIN FISURAS DE EULER-BERNOULLI	38
4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN DESPLAZAMIENTO	38
4.2. FUNCIONES DE FORMA	39
4.2.1. Función de forma 1	40
4.2.2. Función de forma 2	41
4.2.3. Función de forma 3	41
4.2.4. Función de forma 4	42
4.3. MATRIZ DE RIGIDEZ SIN FISURAS	42
4.3.1. Elementos de la matriz de rigidez	42
4.3.2. Matriz de rigidez [K]	45
4.4. VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTES	45
4.5. CONDICIONES DE APOYO	47
4.6. MATRIZ DE MASA	49
4.6.1. Matriz de masa concentrada	49
4.6.2. Matriz de masa distribuida	49
5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS DE DEFLEXIONES Y FORMAS MODALES PARA MODELO SIN FISURAS	51
5.1. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA DEFLEXIONES	52
5.2. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA FORMAS MODALES	55

6.	MODELO DE VIGA FISURADA DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS	65
6.1.	VARIACIÓN DE LA INERCIA CERCANA A LA FISURA.....	66
6.2.	MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ELEMENTO FISURADO	69
6.3.	DEDUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ	72
6.4.	FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTOS FINITOS INCLUYENDO FISURAS	74
6.4.1.	Función de forma 1	74
6.4.2.	Función de forma 2	74
6.4.3.	Función de forma 3	74
6.4.4.	Función de forma 4	74
6.5.	DEDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[k_{cj}]$ rs DEL MODELO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS	75
6.5.1.	Elemento $[k_{cj}]_{11}$	75
6.5.2.	Elemento $[k_{cj}]_{12}$	77
6.5.3.	Elemento $[k_{cj}]_{14}$	79
6.5.4.	Elemento $[k_{cj}]_{22}$	81
6.5.5.	Elemento $[k_{cj}]_{24}$	83
6.5.6.	Elemento $[k_{cj}]_{44}$	85
6.6.	LIMITACIONES DEL MODELO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS....	87
7.	MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS	89
7.1.	VARIACIÓN DE LA INERCIA	90
7.1.1.	Variación de la inercia a la izquierda de la fisura, en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$...	91
7.1.2.	Variación de la inercia a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	93
7.2.	VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ	95
7.2.1.	Variación de la rigidez a la izquierda de la fisura, en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$...	96
7.2.2.	Variación de la rigidez a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	97
7.3.	DEDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ.....	97
7.3.1.	Elemento $[k_{cj}]_{11}$	98
7.3.1.1.	Elemento $[k_{cj}]_{11}$ en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$, a la izquierda de la fisura	98
7.3.1.2.	Elemento $[k_{cj}]_{11}$ en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$, a la derecha de la fisura.....	99
7.4.	RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE RIGIDEZ	100
7.4.1.	Variación de la rigidez en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$	101
7.4.2.	Variación de la rigidez en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	102
7.5.	CREACION DE NODOS ADICIONALES.....	103
7.6.	EL PROBLEMA DE LA CERCANÍA A LOS BORDES DE LA VIGA	103
7.7.	EL PROBLEMA DE LA CERCANÍA ENTRE FISURAS	105
7.8.	ELIMINACIÓN DE RESULTADOS EN LOS NODOS ADICIONALES	108
8.	VALIDACIÓN DEL MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS.....	110
8.1.	VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA MODELO DE FISURA EXTENDIDO	111

8.1.1.	Caso 1 Sinha, Friswell y Edwards	111
8.1.2.	Caso 2a Sinha, Friswell y Edwards	119
8.1.3.	Caso 2b Sinha, Friswell y Edwards	127
8.1.4.	Caso 3 Sinha, Friswell y Edwards	135
8.2.	CONCLUSIONES DE LOS CASOS DE VALIDACION ANALIZADOS ...	141
9.	EL PROBLEMA DEL ERROR DE MEDICIÓN	143
9.1.	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:	143
9.2.	TIPOS DE ERRORES:	143
9.2.1.	El error humano.....	143
9.2.2.	El error en los equipos de medición	144
9.3.	SIMULACIÓN DEL ERROR.....	144
9.4.	MODELO CON UNA SOLA FISURA UTILIZADO PARA ANALIZAR EL PROBLEMA DE ERROR DE MEDICIÓN	144
9.4.1.	Derivación numérica sin regresión datos.....	146
9.4.2.	Derivación numérica con regresión datos.....	150
9.5.	MODELO CON CINCO FISURAS CERCANAS ENTRE SI, UTILIZADO PARA ANALIZAR EL PROBLEMA DE ERROR DE MEDICIÓN.....	153
9.5.1.	Derivación numérica sin regresión datos.....	155
9.5.2.	Derivación numérica con regresión datos.....	158
9.6.	CONCLUSIONES SOBRE EL ERROR DE MEDICIÓN.....	161
10.	EJEMPLOS NUMERICOS	162
10.1.	PRIMER EJEMPLO NUMÉRICO, UNA LUZ, APOYOS SIMPLES Y TRES FISURAS	162
10.2.	SEGUNDO EJEMPLO NUMÉRICO, DOS LUCES, APOYOS SIMPLES EN LOS EXTREMOS, APOYO CON RESORTE LINEAL INTERMEDIO Y DOS FISURAS CERCANAS A LOS BORDES DE LA VIGA.....	165
10.3.	TERCER EJEMPLO NUMÉRICO, TRES LUCES, APOYOS SIMPLES, CARGA CONCENTRADA Y TRES FISURAS, UNA EN CADA LUZ.	168
10.4.	CUARTO EJEMPLO ADICIONAL, UNA LUZ, APOYOS SIMPLES Y TRES FISURAS CERCANAS.	171
11.	VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS.....	178
11.1.	VENTAJAS DE LAS ECUACIONES REPLANTEADAS	178
11.2.	DESVENTAJAS DE LAS ECUACIONES REPLANTEADAS	178
12.	CONCLUSIONES.....	179
	BIBLIOGRAFÍA.....	181
	ANEXOS.....	183

LISTA DE FIGURAS

Figura 1, Caso general de vigas a analizar.....	27
Figura 2, Funciones de forma, presentación clásica del MEF en vigas	39
Figura 3: Fuerzas nodales equivalentes, para una carga uniformemente distribuida	46
Figura 4: Fuerzas nodales equivalentes, para una carga puntual.....	46
Figura 5, Viga con múltiples fisuras	65
Figura 6: Comparación entre la variación de la rigidez (EI), en cercanía de una fisura	67
Figura 7, Variación de la rigidez en el elemento e-ésimo, alrededor de la fisura...	68
Figura 8: División de elementos finitos, según las limitaciones del modelo de Sinha, Friswell y Edwards	89
Figura 9: División de la viga en elementos de igual longitud	90
Figura 10: Variación de la inercia en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$	92
Figura 11: Elemento finito en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$	92
Figura 12: Variación de la inercia a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	94
Figura 13: Elemento finito en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	94
Figura 14: Ubicación de fisuras en los extremos de la viga	104
Figura 15: Rango para calcular la reducción de rigidez para fisuras ubicadas en los extremos de la viga	105
Figura 16: Superposición de efectos por dos fisuras cercanas entre sí.....	106
Figura 17: Suma de efectos por dos fisuras cercanas entre sí	106
Figura 18: Suma de efectos por dos fisuras muy cercanas entre sí	106

Figura 19: Planteamiento para superposición de efectos por dos fisuras cercanas	107
Figura 20: Posible superposición de efectos por dos fisuras cercanas, con alturas de fisura diferente	108
Figura 21: Esquema de viga, primer caso de Sinha, Friswell y Edwards.....	111
Figura 22: Esquema de viga, segundo caso de Sinha, Friswell y Edwards, con una sola fisura.....	119
Figura 23: Esquema de viga, segundo caso de Sinha, Friswell y Edwards, con dos fisuras	127
Figura 24: Esquema de viga, tercer caso de Sinha, Friswell y Edwards.....	135
Figura 25: Error constante y error variable	143
Figura 26: Esquema de viga, primer caso de análisis de error de medición.....	145
Figura 27: Variación por pequeños errores en la derivación numérica	148
Figura 28: Esquema de viga, segundo caso de análisis de error de medición	154
Figura 29: Esquema de viga, primer ejemplo numérico.....	163
Figura 30: Esquema de viga, segundo ejemplo numérico	166
Figura 31: Esquema de viga, tercer ejemplo numérico.....	169
Figura 32: Esquema de viga, cuarto ejemplo numérico, a) con reducción general de rigidez porcentual y b) con tres fisuras.....	172

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1: Validación de deflexiones del programa AVIF, para viga de una sola luz con diferentes condiciones de apoyo	54
Gráfica 2: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-libre	59
Gráfica 3: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos simple-simple.....	60
Gráfica 4: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-empotrado.....	61
Gráfica 5: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-simple	62
Gráfica 6: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos libre-libre	63
Gráfica 7: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards	113
Gráfica 8: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards	114
Gráfica 9: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards.....	115
Gráfica 10: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards.....	116
Gráfica 11: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards	117
Gráfica 12: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards.....	120
Gráfica 13: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards.....	121
Gráfica 14: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards.....	122

Gráfica 15: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards	123
Gráfica 16: Quinta Forma Modal y Curvatura de la Quinta Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards	124
Gráfica 17: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards.....	128
Gráfica 18: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards.....	129
Gráfica 19: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards.....	130
Gráfica 20: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards	131
Gráfica 21: Quinta Forma Modal y Curvatura de la Quinta Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards	132
Gráfica 22: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards.....	136
Gráfica 23: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards.....	137
Gráfica 24: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards.....	138
Gráfica 25: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards	139
Gráfica 26: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con una sola fisura.....	147
Gráfica 27: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con una sola fisura	149
Gráfica 28: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con una sola fisura.....	151
Gráfica 29: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con una sola fisura	152

Gráfica 30: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí.....	156
Gráfica 31: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí	157
Gráfica 32: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí.....	159
Gráfica 33: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí	160
Gráfica 34: Deflexión y su curvatura, para el primer ejemplo numérico.....	163
Gráfica 35: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el primer ejemplo numérico.....	164
Gráfica 36: Deflexión y su curvatura, para el segundo ejemplo numérico	166
Gráfica 37: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el segundo ejemplo numérico.....	167
Gráfica 38: Deflexión y su curvatura, para el tercer ejemplo numérico.....	169
Gráfica 39: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el tercer ejemplo numérico.....	170
Gráfica 40: Deflexión y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos.....	173
Gráfica 41: Primera forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos	174
Gráfica 42: Segunda forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos	175
Gráfica 43: Tercera forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos	176

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Fórmulas de Taylor para la segunda derivada numérica	32
Tabla 2: Elementos de la matriz de rigidez, para una viga de Euler-Bernoulli sin fisurar	44
Tabla 3: Condiciones de apoyo en nodos para vigas, tenidas en cuenta en el programa AVIF	47
Tabla 4: Condiciones de apoyo en tramos de viga, tenidas en cuenta en el programa AVIF	48
Tabla 5: Características de viga para validación de resultados sin fisurar.....	51
Tabla 6: Características de viga para validación de resultados de deflexiones sin fisurar	52
Tabla 7: Deflexiones para vigas de una sola luz y carga distribuida con diferentes condiciones de apoyo	53
Tabla 8: Resumen de resultados, diferencias entre las deflexiones halladas con el programa AVIF y las formulas exactas	54
Tabla 9: Características de viga para validación de resultados de formas modales sin fisurar.....	55
Tabla 10: Formas modales para vigas de una sola luz con diferentes condiciones de apoyo	57
Tabla 11: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-libre	59
Tabla 12: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos simple-simple	60
Tabla 13: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-empotrado.....	61

Tabla 14: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-simple	62
Tabla 15: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos libre-libre	63
Tabla 16: Elementos de la matriz de reducción de rigidez para un elemento de viga fisurada, por el modelo extendido de Sinha, Friswell y Edwards Ecuaciones a la izquierda de la fisura, intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$	102
Tabla 17: Elementos de la matriz de reducción de rigidez para un elemento de viga fisurada, por el modelo extendido de Sinha, Friswell y Edwards Ecuaciones a la derecha de la fisura, intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$	103
Tabla 18: Casos experimentales analizados por Sinha, Friswell y Edwards	110
Tabla 19: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	112
Tabla 20: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	118
Tabla 21: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	125
Tabla 22: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	126
Tabla 23: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	133
Tabla 24: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	134
Tabla 25: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	140
Tabla 26: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)	141
Tabla 27: Datos caso utilizado en el análisis de error, dos extremos con apoyo simple. Se simulo una única fisura	145

Tabla 28: Datos caso utilizado en el análisis de error, dos extremos con apoyo simple, se simulan cinco fisuras cercanas entre sí	153
Tabla 29: Datos de viga para el primer ejemplo resuelto de forma numérica.....	162
Tabla 30: Datos de viga para el segundo ejemplo resuelto de forma numérica ..	165
Tabla 31: Datos de viga para el tercer ejemplo resuelto de forma numérica	168
Tabla 32: Datos de viga para el primer ejemplo resuelto de forma numérica	171

LISTA DE ANEXOS

Anexo A: Instrucciones para el uso del programa AVIF, elaborado en MATLAB®.....	183
Anexo B: Código fuente en MATLAB®. Entrada de Datos.....	186
Anexo C: Código fuente en MATLAB®. Creación de elementos Finitos.....	188
Anexo D: Código fuente en MATLAB®. Creación de matrices principales.....	189
Anexo E: Código fuente en MATLAB®. Solución de sistemas matriciales.....	190
Anexo F: Código fuente en MATLAB®. Creación de gráficas.....	191
Anexo G: Código fuente en MATLAB®. Derivación numérica.....	192

RESUMEN

TITULO: ANÁLISIS DE FISURAS EN UNA VIGA A PARTIR DE LAS CURVATURAS DE LA DEFLEXIÓN Y DE LA FORMA MODAL

AUTOR: FORERO CARRILLO, Rubén Darío**

PALABRAS CLAVE: Euler-Bernoulli, Viga, Curvaturas, Deflexión, Formas Modales, Fisuras.

DESCRIPCIÓN:

Las estructuras a través de los años de uso pueden llegar a presentar fisuras que no fueron tenidas en cuenta en los análisis iniciales. Por ello resulta importante el desarrollo de herramientas que permitan modelar y analizar la presencia de fisuras en las estructuras.

Teniendo como base la teoría de vigas de Euler Bernoulli, y el trabajo desarrollado por Sinha, Friswell y Edwards¹, (el cual es un método que tiene la ventaja de localizar la fisura, dentro de un modelo numérico, dando su posición y su altura), se propone una extensión de las formulas planteadas por estos autores, con el fin de poder superar las limitaciones del planteamiento inicial de los mismos, a saber: el tamaño de los elementos finitos; la cercanía entre fisuras y la cercanía de las fisuras a los puntos extremos de la viga.

Posteriormente, empleando las formulas modificadas, se desarrolló un procedimiento para determinar y graficar las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, con la finalidad de identificar posibles variaciones en las mismas.

Igualmente se simuló el efecto de errores de medición sobre las curvaturas determinadas y se analizó como afectan estos errores las gráficas de curvaturas de deflexión y de formas modales.

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: PhD. Oscar Begambre.

¹ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. En: Journal of Sound and Vibration, 2002, vol. 251, no. 1, p. 13-38.

ABSTRACT

TITLE: ANALYSIS OF CRACKS IN A BEAM FROM THE DEFLECTION AND MODAL FORM CURVATURES

AUTHOR: FORERO CARRILLO, Rubén Darío**

KEYWORDS: Euler-Bernoulli, Beam, Curvatures, Deflection, Modal Shapes, Cracks

DESCRIPTION:

Aging civil infrastructure through the years of use, may come to present cracks that were not taken into account in the initial analyzes. Therefore, it is important to develop tools to model and analyze the presence of this type of cracks in structures.

Based on the beam theory of Euler Bernoulli, and the work developed by Sinha, Friswell and Edwards², this is method has the advantage of locating cracks, within a numerical model, giving its position and height. It is proposed then an extension of the formulas of these authors, in order to overcome its initial limitations, namely: the size of the finite elements; the proximity between cracks and the proximity of cracks to the extreme points of the beam.

Later was developed a procedure to determine and graph the curvatures of the deflection and the modal forms, with the help of the extended formulas, in order to identify possible variations in them.

Also, the possible variation due to measurement errors was taken into account, in the analysis of the deflection and modal curvatures graphics.

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: PhD. Oscar Begambre.

² Ibíd., p. 13-38.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de grado se busca estudiar de manera numérica si es posible detectar los cambios producidos en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, debidos a la presencia de fisuras en las vigas. Esta detección se realizó comparando las curvaturas de la deflexión y de las formas modales de la viga fisurada y sin fisurar. Este trabajo se limitará a vigas prismáticas de sección recta rectangular bajo la teoría de Euler-Bernoulli.

Se parte de la hipótesis que las variaciones en la rigidez debidas a las fisuras, producirán variaciones en las curvaturas de deflexión y de las formas modales de la viga. Para el desarrollo del presente trabajo de grado se utiliza como base el artículo ***“Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data”***^(*), el cual se fundamenta en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, realizando modificaciones en la rigidez de la viga en la cercanía de las fisuras. Este modelo tiene como ventaja la localización directa de la fisura, con una posición dentro de la viga y una altura determinadas.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se exponen los objetivos y el alcance del presente trabajo de grado.

En el capítulo 3, se hace una exposición general del problema a solucionar y la metodología empleada.

En el capítulo 4, se hace una descripción general de las bases teóricas utilizadas posteriormente, incluyendo, las funciones de forma, la matriz de rigidez, vector de fuerzas nodales equivalentes y la matriz de masa.

En el capítulo 5, se validan los resultados para vigas sin fisurar, obtenidos con un programa desarrollado para el presente trabajo ^(**), (programado en MATLAB[®]^(***)), y comparándolos con los resultados de las formulas analíticas.

En el capítulo 6, se hace una descripción del modelo de variación de inercia sobre la que se basa el presente trabajo de grado, señalando sus ventajas y limitaciones.

(*)SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. En: Journal of Sound and Vibration, 2002, vol. 251, no. 1, p. 13-38.

(**)Al programa se le dio por nombre AVIF, por Análisis de Vigas Fisuradas, el código fuente de dicho programa, la relación entre las funciones del mismo y una breve descripción de sus funciones se puede consultar en los Anexos A al G, igualmente se entregan en el CD anexo los archivos fuente en formato de MATLAB[®]

(***)MATLAB es una marca registrada de MathWorks Inc. MATLAB R2017a, Licencia # 40550867 Academic – Total Headcount

Debido a las limitaciones de las ecuaciones de este modelo, el cual exige que la reducción de rigidez sea desarrollada en su totalidad dentro de un solo elemento finito, y a que no permite el modelamiento de más de una fisura en el mismo elemento finito, fue necesario replantear las ecuaciones del mismo, para obtener una expresión más general, que permita superar dichas limitaciones. Esta propuesta se desarrolla en el capítulo 7.

Para la validación del nuevo modelo de fisura en vigas, se tomaron como base 3 casos de vigas desarrollados dentro del artículo de Sinha, Friswell y Edwards³, en el cual los autores obtuvieron datos de frecuencias naturales numérica y experimentalmente. Con esta información se realizó la validación del modelo presentado en el capítulo 7. Los resultados correspondientes se presentaron en el capítulo 8.

En el capítulo 9, se tuvo en cuenta que los sistemas de medición (por ejemplo: vibrómetro laser), tienen un porcentaje de error, sumado a posibles errores humanos en la toma de mediciones. El efecto de errores en la medición sobre las curvaturas de la deflexión y las formas modales, se simuló como una variación aleatoria dentro de un porcentaje de error máximo. Seguidamente se procedió a determinar si dicho error en los datos alteraba los efectos producidos en las curvaturas por la presencia de fisuras en las vigas estudiadas.

En el capítulo 10, se elaboraron cuatro ejemplos resueltos únicamente de manera numérica, con el fin observar el funcionamiento del modelo propuesto en el capítulo 7, ante diferentes condiciones de apoyo y número de fisuras. Para estos ejemplos numéricos no se realizó comparación en contra datos experimentales, ya que la realización de experimentos en laboratorio esta fuera del alcance del presente trabajo de grado.

Se enumeraron algunas ventajas y desventajas del modelo de fisura extendido de Sinha, Friswell y Edwards, las cuales pueden ser consultadas en el capítulo 11.

En el capítulo 12, se presentaron las conclusiones del trabajo de grado.

Por último, en los Anexos, se entrega el código fuente de las funciones desarrolladas en el programa AVIF, los cuales están planteados para trabajar con vigas de cualquier número de luces y apoyos. El código fuente es entregado, debidamente comentado, para que puedan ser modificados y utilizados por quien así lo requiera, esperando que sirvan como base para otros trabajos futuros.

³ Ibíd., p. 21-26.

1. JUSTIFICACIÓN

Poder analizar los efectos de fisuras en estructuras, a partir de su modelamiento directo con la ubicación y tamaño de las mismas puede ayudar a la evaluación del comportamiento de dichas estructuras, permitiendo determinar posibles fallas y dando herramientas de análisis que permitan conocer el estado de las mismas.

Con el presente trabajo de aplicación se busca comprobar, de manera numérica, si es posible detectar cambios de las curvaturas de deflexión y formas modales, debidos a la presencia de fisuras en vigas. Se parte de la hipótesis que las fisuras generan cambios en las mencionadas curvaturas de las vigas, y que estos cambios son cuantificables de manera numérica.

Este estudio se realiza con el fin de aportar una herramienta a la teoría de análisis simplificado de vigas fisuradas, y poder determinar de manera gráfica la relación entre las fisuras y las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

Se propone también ir un paso más allá de trabajos similares, como por ejemplo el trabajo de Begambre & Laier⁴, o el trabajo de Dessi & Camerlengo⁵, donde se simula el daño en un elemento como la reducción porcentual de la rigidez en un elemento. En este trabajo de aplicación, la fisura se simula localizándola con una posición y una altura definidas, bajo el modelo desarrollado por Sinha, Friswell y Edwards⁶, avanzando este modelo un paso más al extender la reducción de rigidez en una serie de elementos finitos, (tal como se puede apreciar en el capítulo 7, pág. 89), y no en uno sólo como estaba limitado en el modelo original, superando de esta manera una serie de limitaciones presentes en el planteamiento de Sinha Friswell y Edwards (ver sección 6.6, pág. 87).

El trabajo desarrollado analiza igualmente el efecto del error en las mediciones como una variación de tipo aleatorio a los resultados teóricos de las curvaturas de deflexión y formas modales, (ver capítulo 9, pág. 143), con el fin de poder visualizar el efecto de esta variación sobre las mencionadas curvaturas y si las fisuras siguen siendo detectables a pesar de dicho error de medición. En los trabajos de Begambre & Laier, y de Dessi & Camerlengo, se encontró el uso de las curvaturas de deflexión y de formas modales en relación a un daño localizado como una reducción de rigidez de un elemento finito, pero sin tener en cuenta el efecto del ruido en los datos producto del error de medición.

⁴ BEGAMBRE, O.; LAIER, J. Detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura: estudo analítico com aplicação a estruturas do tipo viga. En: Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Paulo, Universidade de São Paulo, 2006, vol. 8 no. 35, p. 29-45.

⁵ DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Damage identification techniques via modal curvature analysis: Overview and comparison. En: Mechanical systems and signal processing, 2015, Elsevier, vol. 52, n. 53, p. 181-205.

⁶ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 13-38.

Finalmente en la sección 10.4, (pág. 171), se realiza una comparación numérica entre el método de reducción de rigidez en porcentaje y el modelo de fisura extendido de Sinha, Friswell y Edwards, pudiendo observarse como el modelo utilizado para simular la figuración, incide directamente en la forma de los cambios observados en las gráficas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Elaborar una propuesta para el análisis numérico de fisuras en vigas, basándose en el modelo de fisura de Sinha, Friswell y Edwards⁷, a partir de las curvaturas de la deflexión y de la forma modal, como método numérico de análisis de daño.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comprobar de manera numérica si la presencia de fisuras en una viga produce cambios en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales de la misma.
- Simular el efecto de error debido a los aparatos de medición y al factor humano, el cual se simula como un error de tipo aleatorio dentro de un rango de variación máximo, evaluando los efectos de los mismos sobre las gráficas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.
- Proponer un programa en MATLAB® que grafique las curvaturas de la deflexión y de las formas modales de una viga en estado fisurado y sin fisurar para poder efectuar comparaciones de las mismas.

2.3. ALCANCE

El presente trabajo se limitará a un estudio de tipo numérico a partir del modelo de viga fisurada de Sinha, Friswell y Edwards⁸. Las características de las vigas en estudio son:

- Se analizarán vigas de una a tres luces.
- Las vigas se comportan dentro del rango lineal.
- Las vigas en estudio son prismáticas y de sección recta rectangular.
- Las vigas se modelan bajo la teoría de Euler-Bernoulli⁹.

⁷ Ibíd., p. 13-38.

⁸ Ibíd., p. 13-38.

⁹ CARRERA, E.; GIUNTA, G.; PETROLO, M. Beam structures, classical and advanced theories. New Delhi, Wiley, 2011, p. 9-16.

- Se supone un amortiguamiento bajo $0 < \xi < 5\%$.
- Se simularan como materiales aluminio y acero, tal como se desarrolló en el paper de Sinha, Friswell y Edwards¹⁰. No obstante se pueden utilizar otro tipo de materiales Isotrópicos, variando sus características (módulo de Young E, en el programa AVIF, ver anexo B4. EntradaDatos.m).
- Las fisuras modeladas son abiertas, las fisuras que se abren y cierran (breathing cracks), no son consideradas dentro del modelo de fisuras de Sinha, Friswell y Edwards.¹¹
- No se considera que el tamaño de las fisuras varié, (la altura de las fisuras no aumenta).
- Se considera que las fisuras no hacen variar la masa de la viga.

Con base en el trabajo de Sinha, Friswell y Edwards¹², se planteará el análisis de fisuras en vigas de una a tres luces, con diferentes condiciones de apoyo. Partiendo de la hipótesis que las fisuras en las vigas producen cambios en la curvatura de deflexión y de las formas modales, que la ubicación de estos cambios dentro de las gráficas de las curvaturas corresponde con la ubicación de las fisuras en la viga analizada.

¹⁰ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 21.

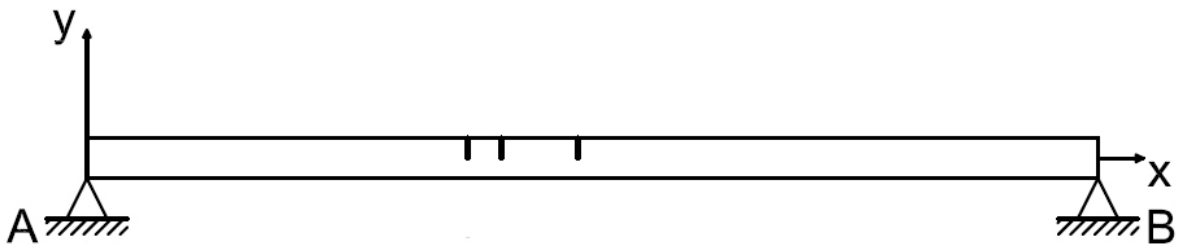
¹¹ Ibíd., p. 15.

¹² Ibíd., p. 13-38.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este estudio se analizó el efecto que tienen fisuras verticales en el comportamiento de una viga, ver Figura 1, y el efecto que dichas fisuras producen sobre las curvaturas de la deflexión y de las formas modales. Se modelaron vigas de hasta tres luces, con diferentes condiciones de apoyo, (apoyos simples, empotrados, libres, rotulas, resortes lineales y rotacionales), como se puede ver en la sección, 4.5. También se plantearon dos tipos de carga, distribuida a todo lo largo de la viga y puntual, como se puede ver en la sección, 4.4.

Figura 1, Caso general de vigas a analizar



Fuente: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 16.

Para el modelamiento de las vigas con fisuras y sin fisuras, se desarrolló un programa con rutinas en el lenguaje de programación MATLAB®. Este programa recibió por nombre AVIF, por Análisis de Vigas Fisuradas, (ver Anexos A al G).

En el programa AVIF se ingresan en un archivo las características de materiales, apoyos, cargas, geometría, tamaño y ubicación de las fisuras y número de elementos finitos a modelar (ver Anexo B4. EntradaDatos.m). Con estos datos el programa monta las matrices de rigidez sin fisurar y fisurada; la matriz de masa y el vector de fuerzas nodales equivalentes, y con estas, obtiene las deflexiones y las formas modales, para posteriormente hallar de forma numérica las curvaturas, (segunda derivada), de las mismas. Estos datos son graficados y comparados (con fisura y sin fisura), para poder observar visualmente si a partir de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales y sus cambios, es posible determinar la presencia de fisuras en una viga.

3.1. EL PROBLEMA ESTÁTICO, LA CURVATURA DE LA DEFLEXIÓN

A partir de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes, obtener las deflexiones de la viga, se reduce a resolver la ecuación:

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \quad (1)$$

De donde

$$\{\Delta\} = \{F\}[K]^{-1} \quad (2)$$

En MATLAB® esta operación se puede realizar con la división de matrices:

$$\{\Delta\} = [K] \backslash \{F\}$$

La ecuación (2) es válida para el caso sin fisura y con fisura, variando únicamente la matriz K, utilizando la matriz sin fisurar o fisurada, respectivamente. La rutina utilizada para hallar los valores de deflexión se puede consultar en el Anexo E1. DeflectionSolution.m. Vale la pena mencionar que todas las operaciones se efectuaron con las matrices (no se realizaron cálculos con submatrices).

3.2. EL PROBLEMA DINÁMICO, LAS CURVATURAS DE LAS FORMAS MODALES

Para hallar las curvaturas formas modales y las frecuencias naturales se requiere resolver la ecuación de movimiento sin amortiguamiento¹³, al suponer un amortiguamiento bajo $0 < \xi < 5\%$, las formas modales se aproximan al caso ideal sin amortiguamiento:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = 0 \quad (3)$$

Donde:

[M]: Matriz de masa

[K]: Matriz de rigidez

{u(t)}: Vector de desplazamientos

¹³ SUÁREZ, L. E. Análisis de estructuras con cargas dinámicas. Tomo II: Sistemas de múltiples grados de libertad. Mayagüez, Puerto Rico, CreateSpace, 2014, p. 12-2 – 12-7.

$\{\ddot{u}(t)\}$: Segunda derivada del vector de desplazamientos (aceleración).

Una solución para la ecuación (3), está dada por:

$$\{u(t)\} = \{\Phi\}\sin(\omega t + \theta) \quad (4)$$

La segunda derivada de la ecuación (4), está dada por:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2\{\Phi\}\sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4) y (5), en la ecuación (3), se obtiene:

$$-\omega^2[M]\{\Phi\}\sin(\omega t + \theta) + [K]\{\Phi\}\sin(\omega t + \theta) = 0$$

De donde:

$$-\omega^2[M]\{\Phi\} + [K]\{\Phi\} = 0$$

Factorizando $\{\Phi\}$

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\Phi\} = 0 \quad (6)$$

Sea:

$$\lambda = \omega^2 \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación (7), en la ecuación (6), se obtiene:

$$[[K] - \lambda[M]]\{\Phi\} = 0 \quad (8)$$

Este es el problema de los valores propios o auto-valores, donde:

$[K]$: Matriz de rigidez

$[M]$: Matriz de masa

ω : Frecuencia circular natural.

$\{\Phi\}$: Formas modales

La solución de la ecuación (8), tiene soluciones no triviales si¹⁴:

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0 \quad (9)$$

Se aclara que la ecuación (9), funciona igualmente para vigas sin fisurar y fisuradas, variándose únicamente la matriz de rigidez K, sin fisurar y fisurada, respectivamente.

Para hallar las frecuencias naturales se debe tener en cuenta que:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (10)$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} \quad (11)$$

De donde:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (12)$$

El programa AVIF, tiene integrado la función **eig()** para la solución del problema de los valores propios; en la sección 3.4, (pág. 32), se realiza una descripción más detallada del problema de los valores y los vectores propios. En el Anexo E2. ModalSolution.m), se puede consultar la rutina utilizada para hallar las frecuencias naturales y las formas modales.

Como resultado, esta rutina entrega las frecuencias naturales ordenadas de menor a mayor, en este mismo orden se obtienen las formas modales asociadas. Debido a que en la solución del problema de los vectores y valores propios, ver sección 3.4, (pág. 32), la rutina toma únicamente las formas modales cuya frecuencia natural este en el rango real, y que la suma de los elementos del vector de forma modal no sea cercana a cero.

A continuación realiza el proceso de normalización de las formas modales, ya que como se puede ver en la sección 3.4, (pág. 32), cualquier vector propio puede ser multiplicado por un escalar y el resultado será también un vector propio. Por esta razón se acostumbra a realizar el proceso de normalización, con el fin de presentar escalados los vectores propios obtenidos (formas modales).

¹⁴ CHOPRA, A. K. Dinámica de estructuras. Ciudad de México, Pearson, 2014, p. 407.

En el programa AVIF, se programaron dos tipos de normalización por Masa y por mayor valor igual a 1. El tipo de normalización a utilizar se controla con la variable TipoNormalizacion, en el archivo de entrada de datos, ver Anexo B4. EntradaDatos.m).

Con la Variable TipoNormaliozacion=1, en el archivo de entrada de datos, ver Anexo B4. EntradaDatos.m), se realiza la normalización de datos, con base en la matriz de masa, para esto se debe multiplicar la forma modal por un factor que se halla teniendo en cuenta la matriz de masa¹⁵:

$$M_n = \phi_n^T [M] \phi_n = 1 \quad (13)$$

$$C_n = \phi_n^T [M] \phi_n \quad (14)$$

$$\phi_{n,normalizado} = \frac{1}{\sqrt{C_n}} \phi_n \quad (15)$$

Con la variable TipoNormalizacion=2, en el archivo en que se ingresan los datos, ver Anexo B4. EntradaDatos.m), se realiza la normalización con base en el mayor valor igual a 1. Con esta opción se busca el mayor valor de los componentes verticales de la forma modal y divide sobre este valor, todos los elementos de la forma modal, de tal manera que el mayor valor de la componente vertical de la forma modal sea iguala a 1. En todos los casos y ejemplos analizados en el presente trabajo se utilizó únicamente la normalización por mayor valor igual a 1.

Por último la rutina ModalSolution.m, (ver Anexo E2), toma solamente los efectos sobre los desplazamientos de las formas modales, los efectos sobre las rotaciones se descartan. Este procedimiento puede consultarse en libros de dinámica estructural^{16 17 18}.

¹⁵ Ibíd., p. 410-411, 415-416.

¹⁶ Ibíd., p. 410-416.

¹⁷ SUÁREZ, L. Op. cit., p. 12-33 – 12-40.

¹⁸ PAZ, M. Matrix structural analysis & dynamics, theory and computation. Berkeley, Computers and Structures Inc., 2009, p. 68-72.

3.3. OBTENCIÓN DE LAS CURVATURAS DE LA DEFLEXIÓN Y DE LAS FORMAS MODALES

Una vez obtenidas las deflexiones y las formas modales, las curvaturas de las mismas, se hallan con la segunda derivada numérica de los valores de la deflexión y de las formas modales, respectivamente, en cada uno de los nodos. Para ello se utilizaron las funciones de Taylor de la segunda derivada hacia adelante, con punto medio y hacia atrás, las cuales se pueden ver en la Tabla 1, y fueron programadas en la función Derivada2Taylor4p.m, la cual puede ser consultada en el Anexo G2.

Tabla 1: Fórmulas de Taylor para la segunda derivada numérica

Sentido de la derivación	Formula
Hacia adelante	$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$
Centrada	$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) - 16f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$
Hacia atrás	$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$

Fuente: CHAPRA, S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. New York, McGraw Hill, 2012, p. 527-529.

3.4. PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS GENERALIZADO EN DINÁMICA DE ESTRUCTURAS

El problema de los valores y vectores propios para dinámica estructural, puede resumirse, como la solución no trivial de la ecuación¹⁹:

$$[A]\{\phi_i\} = \lambda_i[B]\{\phi_i\} \quad (16)$$

Donde:

[A] y [B]: son matrices cuadradas simétricas

¹⁹ EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. Differential Equations & Linear Algebra. New York, Pearson, 2008, p. 366-372.

λ_i : Vector de valores propios

$\{\phi_i\}$: Matriz de Vectores propios, asociados a los valores propios, λ_i

Utilizando las matrices de rigidez y masa:

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad (17)$$

Donde:

$[K]$: Matriz de rigidez, matriz cuadrada simétrica.

$[M]$: Matriz de masa, matriz cuadrada simétrica.

λ : Vector de valores propios, asociado a las frecuencias naturales.

$\{\phi\}$: Matriz de Vectores propios, asociados a las frecuencias naturales y las formas modales.

Reescribiendo la ecuación (17), se obtiene la ecuación (8), vista anteriormente:

$$[K - \lambda M]\{\phi\} = 0$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución no trivial, si y sólo si, se cumple la ecuación característica:

$$|[K] - \lambda[I]| = 0 \quad (18)$$

Para solucionar este tipo de problemas se debe solucionar primero, la ecuación característica, ecuación (18), luego para cada valor propio obtenido, se debe resolver el sistema lineal, para hallar los vectores propios asociados con cada valor propio:

$$([K] - \lambda[I])\{\phi\} = 0 \quad (19)$$

La solución de este sistema matricial no siempre da como resultado valores propios en el rango de los números Reales, por lo que se debe tener en cuenta no tomar los valores en el rango de los números Complejos.

El programa MATLAB®, tiene integrado dentro de sus rutinas, la función **eig()**, la cual halla la solución del problema de los valores y vectores propios. Esta función es utilizada por el programa AVIF, en la función, ModalSolution.m, (ver Anexo E2).

La función **eig()**, toma como argumentos de entrada la matriz de rigidez y la matriz de masa, y devuelve como resultados, el vector de frecuencias circulares y la matriz de formas modales asociadas, esta función se llama en MATLAB® con la expresión:

$$[\phi, \omega] = \text{eig}(K, M);$$

Donde:

K: Matriz de rigidez

M: Matriz de masa

ω : Frecuencias naturales circulares

ϕ : Formas modales asociadas a las frecuencias naturales

3.5. OTROS MODELOS SIMPLIFICADOS DE DAÑO EN VIGAS Y USO DE CURVATURAS DE DEFLEXIÓN Y FORMAS MODALES

Durante el proceso de recopilación de información para la elaboración del presente estudio, se encontraron diferentes métodos para simular el daño dentro de una viga, dentro de los cuales podemos nombrar:

El trabajo de Begambre & Laier²⁰, en donde el daño es simulado como una reducción porcentual de la rigidez de los elementos finitos. En ese trabajo se hallaron también curvaturas de la flexibilidad, obteniendo estos autores igualmente cambios bruscos en estas curvaturas.

Es destacable el trabajo de Garcés et al.²¹, en el cual los autores plantean unas ecuaciones para realizar una regresión partiendo con datos de formas modales con error de medición y obteniendo las inercias en diferentes tramos de vigas.

En el artículo de Mehrjoo et al.²², se buscan solucionar el problema del análisis de vigas fisuradas mediante el cambio del elemento finito fisurado, por un elemento finito sin fisurar, pero con la rigidez reducida, y modelando la fisura como un resorte rotacional sin masa.

En el trabajo realizado por Dessi & Camerlengo²³, el cual es una revisión del año 2015, se modela el daño como un cambio en la rigidez de un elemento finito, similar

²⁰ BEGAMBRE, O.; LAIER, J. Op. cit., p. 29-45.

²¹ GARCÉS, F.; GENATIOS, C.; GARCÍA, P.; LAFUENTE, M.; ASCANIO, W. Identificación del daño en vigas simplemente apoyadas usando datos dinámicos. En: Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Elsevier, 2008, vol. 24, no. 4, p. 357-368.

²² MEHRJOO, M.; KHAJI, N.; GHAFORY-ASHTIANY, M. Application of genetic algorithm in crack detection of beam-like structures using a new cracked Euler-Bernoulli beam element. En: Applied Soft Computing, Elsevier, 2013, vol. 13, no. 2, p. 867-880.

²³ DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Op. cit., p. 181-205.

a lo planteado por Begambre & Laier²⁴. En ese artículo hallan las curvaturas para las primeras tres formas modales de una viga simplemente apoyada, encontrándose cambios abruptos en las mismas, de manera similar a los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado. Es destacable que en el trabajo de Dessi & Camerlengo, no obstante ser una revisión reciente, no llevaron a cabo análisis de datos con ruido debido a errores de medición. Como se verá en el capítulo 9, el ruido en los datos de entrada puede comprometer seriamente el uso de las curvaturas de la deflexión y las formas modales como indicador de la presencia de fisuras en una viga.

No se puede dejar de mencionar el trabajo de Christides & Barr²⁵, sobre el cual se basa el trabajo elaborado por Sinha, Friswell y Edwards, ya que en ese artículo se desarrolla la reducción de inercia como una función exponencial y en el de Sinha, Friswell y Edwards realizan una aproximación a una variación lineal, ver sección 6.1.

Comparado con los métodos anteriormente expuestos, el modelo de Sinha, Friswell y Edwards, tiene la ventaja de modelar directamente la posición y tamaño de la fisura, como en el modelo de Christides & Barr, pero con la diferencia de tener una formula lineal a la reducción de inercia ocasionada por la fisura en vez de una reducción exponencial, por estas dos razones, se tomó la decisión de utilizar este modelo como base para el desarrollo del presente trabajo de grado.

Se destaca también que en los artículos estudiados el desarrollo de la reducción de rigidez se realiza en un elemento finito únicamente. En contraste, el presente trabajo aproxima la reducción de rigidez como una reducción lineal de la inercia, según lo desarrollado por la teoría de Sinha, Friswell y Edwards²⁶, avanzando un paso más al desarrollar la reducción de rigidez en varios elementos finitos. Como puede verse en el ejemplo numérico de la sección 10.4, la aproximación utilizada para simular el efecto de la fisura, incide en la forma de las gráficas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

3.6. METODOLOGÍA

El presente es un trabajo numérico de aplicación, que busca comprobar si las fisuras en vigas producen variaciones en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales de las mismas.

²⁴ BEGAMBRE, O.; LAIER, J. Op. cit., p. 29-45.

²⁵ CHRISTIDES, S.; BARR, A. D. One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. En: International Journal of Mechanical Science, USA, Pergamon, 1984, vol. 26 no. 11-12, p. 639-648.

²⁶ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 13-38.

Para ello se realizó inicialmente un análisis de las teorías básicas requeridas para el desarrollo de las ecuaciones del modelo de Sinha, Friswell y Edwards²⁷, ver capítulo 4. Seguidamente se efectuó una validación de resultados para el modelo sin fisurar en el capítulo 5.

Posteriormente se realizó una explicación del modelo de viga fisurada de Sinha Friswell y Edwards, ver capítulo 6. En este capítulo se analizan las ventajas y desventajas del mismo.

Ante las dificultades planteadas por las limitaciones del modelo de fisuras, ver sección 6.6, fue necesario replantear las ecuaciones de Sinha, Friswell y Edwards. El desarrollo de estas nuevas ecuaciones se realizó en el capítulo 7.

En el capítulo 8, se efectuó la validación para los resultados de deflexiones y formas modales usando el modelo de fisura extendido (capítulo 7). Igualmente con base en los resultados experimentales obtenidos en la investigación de Sinha, Friswell y Edwards²⁸, se llevó a cabo validación del modelo de fisura tomando como dato de comparación las frecuencias naturales.

En el capítulo 9, se realizó un análisis del efecto que tienen posibles errores de medición sobre las gráficas de curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

Se elaboraron cuatro ejemplos numéricos adicionales, los cuales no pudieron ser validados por carecer de datos experimentales, aclarando que la realización de experimentos está por fuera del alcance del presente trabajo de grado, estos resultados se pueden consultar en el capítulo 10.

En el capítulo 11, se enumeraron ventajas y desventajas del replanteamiento del modelo de fisura de Sinha, Friswell y Edwards²⁹.

Por último se analizaron los resultados obtenidos y se elaboraron las conclusiones del trabajo, ver capítulo 12.

3.7. MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

El modelamiento de los casos estudiados, (casos para validación de resultados sin fisuras, validación del modelo extendido, análisis de error de medición y ejemplos numéricos), se llevó a cabo en el programa AVIF. En este se ingresaron los datos básicos de la viga, así como la ubicación y tamaño de las fisuras, el número de

²⁷ Ibid., p. 13-38.

²⁸ Ibid., p. 22, 24, 25.

²⁹ Ibid., p. 13-38.

luces^(*), la cantidad de elementos finitos por cada luz o tramo de viga y las condiciones de apoyo de la misma.

A partir de estos datos, presentó de manera gráfica las variaciones en la deflexión y formas modales y sus curvaturas, para las vigas bajo estudio.

Los archivos en MATLAB® y las hojas de cálculo utilizadas en el presente trabajo de grado, se pueden consultar en el CD adjunto. Igualmente la transcripción del código fuente del programa AVIF, desarrollado en el lenguaje de programación MATLAB® se puede consultar en los Anexos A al G.

Con las gráficas de curvaturas de la deflexión y de las formas modales obtenidas se busca detectar variaciones en las mismas que indiquen la presencia de las fisuras.

Igualmente para el análisis de sensibilidad por error de medición, se busca observar el efecto del ruido (por error de medición) sobre las curvaturas de la deflexión y de las formas modales y si dicho ruido permite la visualización en las mencionadas curvaturas del efecto de fisuras, o si están son ocultadas por dicho ruido.

(*) Aun cuando en el alcance del presente trabajo de grado estaba analizar el efecto de las fisuras en vigas de hasta tres luces, se dejó el programa AVIF abierto para trabajar con n número de luces.

4. MODELO DE VIGA SIN FISURAS DE EULER-BERNOULLI

En este capítulo se presenta la teoría clásica de vigas de Euler-Bernoulli, (la cual es aplicable a vigas sin fisurar), se realizó un repaso sobre las matriz de rigidez (sección 4.3), casos de carga (sección 4.4), condiciones de apoyo (sección 4.5) y matriz de masa (sección 4.6).

4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN DESPLAZAMIENTO

En este trabajo se emplea la formulación clásica del MEF en desplazamientos, la cual consiste en la subdivisión de la estructura a analizar en elementos más pequeños, (elementos finitos), a los cuales se le hallan la matriz de rigidez $[K]$, y el vector de fuerzas nodales $\{F\}$, con este sistema matricial se pueden aproximar de manera numérica los desplazamientos al resolver la ecuación (1):

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}$$

En donde la matriz $[K]$ es la matriz de rigidez global de la estructura y el vector $\{F\}$ es el vector de fuerzas nodales globales, los cuales se ensamblan a partir de la matriz local de rigidez y el vector local de fuerzas nodales de cada elemento finito, de forma similar al ensamblaje utilizado en el método matricial³⁰. La solución de esta ecuación permite obtener el vector de desplazamientos nodales $\{\Delta\}$.

En el caso de vigas bajo la teoría de Euler-Bernoulli, la matriz de rigidez local sin fisurar está dada por la ecuación³¹:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

El proceso de ensamble de las matrices locales, y el posterior desarrollo de la solución del sistema de matrices puede ser automatizado mediante programas de computador, siendo esta una de las grandes ventajas del método de elementos finitos y la principal razón de su popularidad, ya que hoy en día puede decirse que prácticamente todos los programas de análisis estructural se basan en la teoría de los elementos finitos.

³⁰ PAZ, M. Op. cit., p. 7-10.

³¹ DOYLE, J. F. Static and Dynamic Analysis of Structures. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 45.

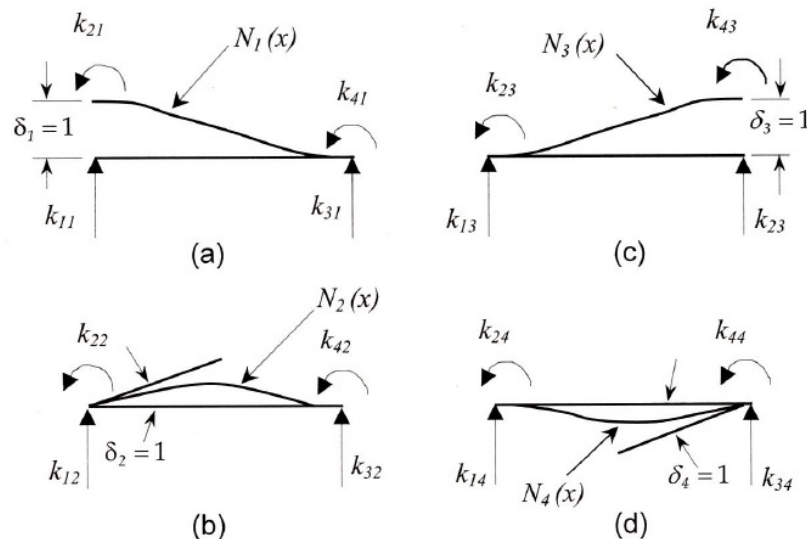
En el presente trabajo de grado para las rutinas de ensamblaje y solución de las diferentes ecuaciones se utilizó el lenguaje de programación MATLAB®, (el código fuente del programa AVIF se puede consultar en los anexos A - G).

4.2. FUNCIONES DE FORMA

Las funciones de forma corresponden a la ecuación de la forma que adquiere la viga al realizar un desplazamiento unitario de cada uno de sus grados de libertad en los extremos, correspondientes a un desplazamiento o una rotación de los nodos 1 o 2.

En la Figura 2, podemos observar las diferentes funciones de forma: (a) Función de forma 1, correspondiente a un desplazamiento unitario en el nodo 1, (b) Función de forma 2, correspondiente a un rotación unitaria en el nodo 1, (c) Función de forma 3, correspondiente a un desplazamiento unitario en el nodo 2, (d) Función de forma 4, correspondiente a un rotación unitaria en el nodo 2

Figura 2, Funciones de forma, presentación clásica del MEF en vigas



Fuente: PAZ, M. Matrix structural analysis & dynamics, theory and computation. Berkeley, Computers and Structures Inc., 2009, p. 4.

Y siguiendo el planteamiento desarrollado por Paz³², para una viga sin cargas, la ecuación de la deflexión está dada por:

³² PAZ, M. Op. cit., p. 4-5.

$$\frac{d^4 y}{dx^4}(x) = 0 \quad (21)$$

Integrando,

$$\frac{d^3 y}{dx^3}(x) = C_1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (22)$$

$$y(x) = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (23)$$

4.2.1. Función de forma 1. Para la primera función de forma, correspondiente a un desplazamiento vertical del nodo 1:

En $x = 0$ $y(0) = 1$, sustituyendo en la ecuación (23):

$$y(0) = 1 = \frac{C_1 0^3}{6} + \frac{C_2 0^2}{2} + C_3 0 + C_4$$

$$C_4 = 1$$

En $x = 0$ $\frac{dy(0)}{dx} = 0$, sustituyendo en la ecuación (22):

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0 = \frac{C_1 0^2}{2} + C_2 0 + C_3$$

$$C_3 = 0$$

En $x = L$ $\frac{dy(L)}{dx} = 0$, sustituyendo en la ecuación (22):

$$\frac{dy}{dx}(L) = 0 = \frac{C_1 L^2}{2} + C_2 L$$

$$C_2 = -\frac{C_1 L}{2}$$

En $x = L$ $y(L) = 0$, sustituyendo en la ecuación (23):

$$y(L) = 0 = \frac{C_1 L^3}{6} + \frac{C_2 L^2}{2} + 1$$

$$y(L) = 0 = \frac{C_1 L^3}{6} - \frac{C_1 L^3}{4} + 1$$

$$C_1 = \frac{12}{L^3}$$

$$C_2 = -\frac{6}{L^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (23), los valores de C_1 , C_2 , C_3 y C_4

$$y(x) = N_1(x) = \left(\frac{12}{L^3}\right)\left(\frac{x^3}{6}\right) + \left(-\frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) + (0)(x) + 1$$

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (24)$$

4.2.2. Función de forma 2. De manera similar a como se obtuvo la primera función de forma, ver numeral 4.2.1, se halla la segunda función de forma, correspondiente a una rotación del nodo 1:

$$N_2(x) = x\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \quad (25)$$

4.2.3. Función de forma 3. De manera similar a como se obtuvo la primera función de forma, ver numeral 4.2.1, se halla la tercera función de forma, correspondiente a un desplazamiento vertical del nodo 2:

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (26)$$

4.2.4. Función de forma 4. De manera similar a como se obtuvo la primera función de forma, ver numeral 4.2.1, se halla la cuarta función de forma, correspondiente a una rotación del nodo 2:

$$N_4(x) = L \left(\frac{x^3}{L^3} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (27)$$

4.3. MATRIZ DE RIGIDEZ SIN FISURAS

La matriz de rigidez nos permite relacionar matricialmente los desplazamientos con las fuerzas aplicadas³³, como se puede observar en la ecuación (1):

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}$$

Donde:

$\{F\}$: Vector de Fuerzas Nodales

$[K]$: Matriz de rigidez

$\{\Delta\}$: Vector de desplazamientos nodales (desplazamientos y rotaciones)

En el presente trabajo de grado se ordenó el vector de desplazamientos de la siguiente manera, primero el desplazamiento y después la rotación para cada uno de los nodos.

La matriz $[K]$ se define cómo³⁴:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Cada uno de los elementos de la matriz de rigidez para una viga bajo la teoría de Euler-Bernoulli está dada por³⁵:

$$k_{ij} = \int_0^L E I N_i''(x) N_j''(x) dx \quad (29)$$

4.3.1. Elementos de la matriz de rigidez. En el desarrollo de cada uno de los elementos de la matriz de rigidez se requiere la segunda derivada de cada función de forma:

³³ Ibíd., p. 6.

³⁴ Ibíd., p. 6.

³⁵ Ibíd., p. 5.

De la ecuación (24), tenemos la primera función de forma y derivando dos veces, obtenemos el término $N_1''(x)$:

$$N_1''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad (30)$$

De la ecuación (25), tenemos la segunda función de forma y derivando dos veces, obtenemos el término $N_2''(x)$:

$$N_2''(x) = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad (31)$$

De la ecuación (26), tenemos la tercera función de forma y derivando dos veces, obtenemos el término $N_3''(x)$:

$$N_3''(x) = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} = -N_1''(x) \quad (32)$$

De la ecuación (27), tenemos la tercera función de forma y derivando dos veces, obtenemos el término $N_4''(x)$:

$$N_4''(x) = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \quad (33)$$

4.3.1.1. Elemento k_{11} . Sustituyendo el valor de $N_1''(x)$, ecuación (30), en la ecuación (29):

$$\begin{aligned} k_{11} &= \int_0^L EI N_1''(x) N_1''(x) dx \\ k_{11} &= EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) dx \\ k_{11} &= EI \int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right) dx \\ k_{11} &= \frac{12EI}{L^3} \end{aligned} \quad (34)$$

De manera similar a como se obtuvo el elemento k_{11} , ver numeral 4.3.1.1, y utilizando las ecuaciones (29) a la (33) y por simetría, se hallan los elementos restantes, tal como se resume en la Tabla 2:

Tabla 2: Elementos de la matriz de rigidez, para una viga de Euler-Bernoulli sin fisurar

$k_{11} = \frac{12EI}{L^3}$	De la ecuación: (34)
$k_{12} = \frac{6EI}{L^2}$	(35)
$k_{13} = -k_{11} = -\frac{12EI}{L^3}$	
$k_{14} = \frac{6EI}{L^2}$	(36)
$k_{21} = k_{12} = \frac{6EI}{L^2}$	
$k_{22} = \frac{4EI}{L}$	(37)
$k_{23} = -k_{21} = -k_{12} = -\frac{6EI}{L^2}$	
$k_{24} = \frac{2EI}{L}$	(38)
$k_{31} = k_{13} = -k_{11} = -\frac{12EI}{L^3}$	
$k_{32} = k_{23} = -k_{12} = -\frac{6EI}{L^2}$	
$k_{33} = k_{11} = \frac{12EI}{L^3}$	
$k_{34} = -k_{14} = -\frac{6EI}{L^2}$	
$k_{41} = k_{14} = \frac{6EI}{L^2}$	
$k_{42} = k_{24} = \frac{2EI}{L}$	
$k_{43} = k_{34} = -k_{14} = -\frac{6EI}{L^2}$	
$k_{44} = \frac{4EI}{L}$	(39)

Fuente: PAZ, M. Matrix structural analysis & dynamics, theory and computation. Berkeley, Computers and Structures Inc., 2009.

4.3.2. Matriz de rigidez [K]. De la ecuación (28), la matriz de rigidez está dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo, los valores simétricos e iguales, la matriz de rigidez [K] queda entonces definida cómo:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores de cada elemento de viga³⁶, se obtiene la matriz de rigidez de Euler-Bernoulli para vigas, dada en la ecuación (20) :

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

4.4. VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTES

El vector de fuerzas nodales, representa las fuerzas aplicadas en los nodos de cada elemento finito, equivalentes a las fuerzas actuantes concentradas o distribuidas dentro de ese elemento finito³⁷.

En los archivos de entrada de datos, (ver Anexo B4. EntradaDatos.m), se pueden ingresar las fuerzas a tener en cuenta como una matriz, debe existir una fila por cada tipo de fuerza que se desee tener en cuenta. El archivo citado está debidamente comentado sobre los tipos de fuerzas que se programaron y como modificar está matriz para tener en cuenta más fuerzas.

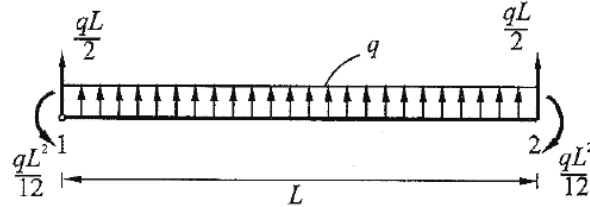
En este trabajo de grado se tuvieron en cuenta solamente dos tipos de fuerzas aplicadas, una fuerza distribuida uniforme general sobre toda la viga y fuerzas puntuales concentradas, el código fuente para el tratamiento de las fuerzas nodales

³⁶ DOYLE, J. F. Op. cit., p. 45.

³⁷ LAIBLE, J. P. Análisis estructural. Naucalpan, McGraw-Hill/Interaéfrica de México, 1992, p. 835-837.

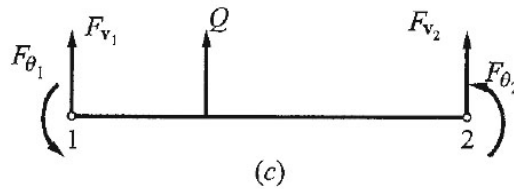
puede consultarse en el Anexo D5. FNodales.m. Dentro de este archivo se citan dos funciones internas FDistribuida y FPuntual, para el manejo de las fuerzas distribuidas y puntuales, respectivamente. Las fórmulas para estos dos tipos de carga se pueden apreciar en la Figura 3 y Figura 4, respectivamente.

Figura 3: Fuerzas nodales equivalentes, para una carga uniformemente distribuida



Fuente: VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ, E. El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural. Madrid, Noela, 2001, p. 138.

Figura 4: Fuerzas nodales equivalentes, para una carga puntual



$$F_{v_1} = Q \left(1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} \right), \quad F_{\theta_1} = \frac{Qab^2}{L^2},$$

$$F_{v_2} = Q \left(\frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} \right), \quad F_{\theta_2} = -\frac{Qa^2b}{L^2}.$$

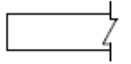
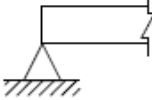
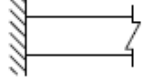
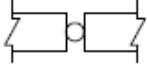
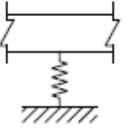
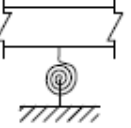
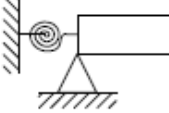
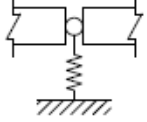
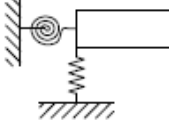
Fuente: VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ, E. El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural. Madrid, Noela, 2001, p. 139.

Es posible agregar otros tipos de cargas adicionales a las aquí expuestas, para esto debería modificarse la función de fuerzas nodales, ver Anexo D5. FNodales.m), y programar funciones internas para cada tipo de fuerza adicional que se desee tener en cuenta.

4.5. CONDICIONES DE APOYO

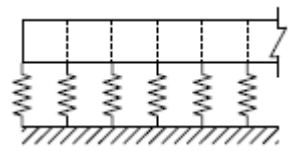
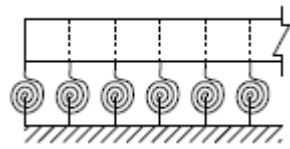
En el presente trabajo de grado se tuvieron en cuenta diferentes condiciones de apoyo para las vigas, como se puede apreciar en la Tabla 3, se programaron 8 condiciones de apoyo para nodos, los cuales se aplican a los extremos de los tramos de viga definidos. (Ver Anexos: B4. EntradaDatos.m, C6. CondApoyo.m, C7. ResortesPuntuales.m, E1. DeflectionSolution.m, E2. ModalSolution.m).

Tabla 3: Condiciones de apoyo en nodos para vigas, tenidas en cuenta en el programa AVIF

Tipo Apoyo	Opción en el programa AVIF	Imagen
Libre	0	
Simple	1	
Empotrado	2	
Rótula	3	
Resorte Lineal	4	
Resorte Rotacional	5	
Apoyo simple Resorte Rotacional	6	
Rótula Resorte Lineal	7	
Resorte Lineal Resorte Rotacional	8	

Adicionalmente a estos apoyos, se programaron casos para resortes distribuidos sobre tramos de viga, esto puede servir para simular superficies de apoyo semirrígidas como en el caso de las fundaciones de suelo. En la Tabla 4, se muestran las 2 condiciones de resortes distribuidos, los cuales se aplican a los tramos de viga completos, esta condición se aplica solamente cuando la variable RDistr=1. (Ver Anexos: B4. EntradaDatos.m, C6. CondApoyo.m, C8. ResortesDistribuidos.m).

Tabla 4: Condiciones de apoyo en tramos de viga, tenidas en cuenta en el programa AVIF

Tipo Apoyo	Opción en el programa AVIF	Imagen
Resortes Lineales, distribuidos sobre un tramo de viga	Si la variable RDistr=1	
Resortes Rotacionales, distribuidos sobre un tramo de viga	Si la variable RDistr=1	

Los valores posibles para la variable RDistr, son = 0 y 1, en caso de ser 0, no se tienen en cuenta resortes distribuidos, en caso de ser 1 estos se tienen en cuenta, y se deben crear valores para los vectores de rigideces de los resortes por tramos KresorteDV, para los resortes lineales y KresorteDR, para los resortes rotacionales. Se debe colocar un valor de rigidez para cada tramo de viga, tanto para resortes lineales como rotacionales, estos deben coincidir con la posición del tramo de viga de izquierda a derecha. En los tramos donde no se deseen simular resortes se deben colocar valores en 0.

Para el caso en que en dos tramos de viga adyacentes se hayan simulado resortes, en el nodo que comparten los dos tramos de viga, el programa AVIF tomara automáticamente la constante de rigidez del resorte de mayor valor.

Los apoyos con restricción total se programaron teniendo en cuenta su posición dentro de la matriz de rigidez y dejando esa posición en cero en la matriz de rigidez³⁸, (ver Anexo C6. CondApoyo.m).

³⁸ YANG, T. Y. Finite element structural analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1986, p. 122-135.

Los apoyos con restricciones parciales de rigidez (resortes), se programaron sumando su rigidez directamente en la matriz de rigidez sin fisurar, en la ubicación del grado de libertad donde produce su restricción³⁹, (ver Anexo C7. ResortesPuntuales.m y Anexo C8. ResortesDistribuidos.m).

4.6. MATRIZ DE MASA

La matriz de masa es utilizada en los análisis dinámicos, en el presente trabajo de grado se utiliza para obtener las formas modales y las frecuencias naturales. Para el caso de vigas de Euler-Bernoulli, existen dos tipos de matriz de masa, la concentrada y la distribuida:

4.6.1. Matriz de masa concentrada. En esta forma de la matriz de masa se asume que los efectos de la masa se concentran únicamente en los nodos de los elementos finitos, y que los mismos afectan únicamente la componente de desplazamiento, se desprecia así el efecto de la rotación⁴⁰:

$$[M] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Siendo m , la masa distribuida por unidad de longitud $m = \rho A$:

$$[M] = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

4.6.2. Matriz de masa distribuida. En esta forma de la matriz de masa se considera que la masa se distribuye en toda la viga y que la misma afecta el comportamiento de las rotaciones de los nodos⁴¹:

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 54 & -6L & 12 & -6L \\ -13L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

³⁹ Ibíd., p. 135-137.

⁴⁰ CLOUGH, R.; PENZIEN, J. Dynamics of Structures. Berkeley, Computer and Structures, Inc., 2010, p. 184-185.

⁴¹ WEAVER, W.; JOHNSTON, P. R. Structural Dynamics by Finite Elements. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987, p. 91.

Siendo m , la masa distribuida por unidad de longitud⁴² $m = \rho A$:

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 54 & -6L & 12 & -6L \\ -13L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

El programa AVIF puede manejar los dos tipos de matriz de masa, tanto concentrada como distribuida, el cambio se realiza variando el valor de la variable MTipo, el valor de 0, corresponde a la matriz de masa concentrada y el valor de 1 corresponde a la matriz de masa distribuida. (Ver Anexo B4. EntradaDatos.m).

En el presente estudio se utilizó únicamente la matriz de masa distribuida en los ejemplos desarrollados, no obstante se tiene programada la opción de utilizar la matriz de masa concentrada, (ver Anexo D4. MMasa.m).

⁴² CLOUGH, R.; PENZIEN, J. Op. cit., p. 187.

5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS DE DEFLEXIONES Y FORMAS MODALES PARA MODELO SIN FISURAS

Para la validación de resultados obtenidos con el programa AVIF, usando el modelo sin fisurar se tuvo en cuenta una viga de una sola luz, en aluminio, con una carga por peso propio, tal como aparece en la Tabla 5:

Tabla 5: Características de viga para validación de resultados sin fisurar

Características de viga para validación de resultados sin fisurar	
Condiciones de apoyo	Empotramiento parcial
Material:	Aluminio
Módulo de Young, E	69.79 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	2600 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33
Longitud de la viga, L	996 mm
Ancho de la viga, b	50 mm
Altura de la viga, h	25 mm
Carga distribuida,	32 N/m

Fuente: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 21-22.

Para la validación de los resultados de las deflexiones y las formas modales, no se tuvieron en cuenta los efectos de las fisuras, ya que no existe una formulación teórica con resultados exactos para vigas fisuradas con las cuales comparar.

La viga fue modelada en el programa AVIF mediante elementos de Euler Bernoulli, utilizando 250 elementos finitos para todos los casos, se puede elegir un número de elementos finitos menor o mayor, la elección de esta cantidad de elementos finitos fue realizada simplemente para obtener una gráfica con una gran cantidad de puntos, en la sección 10.4, (pág. 171), se elaboró un ejemplo en el cual se varían la cantidad de elementos finitos modelados.

Se procedió entonces a tabular en una hoja de cálculo en EXCEL^{®(*)}, los resultados obtenidos por medio del programa AVIF.

(*)SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. En: Journal of Sound and Vibration, 2002, vol. 251, no. 1, p. 13-38.

Con los resultados obtenidos por las fórmulas analíticas exactas, para las deflexiones y para las formas modales, obteniendo el porcentaje de error para cada punto. Se obtuvo igualmente la deflexión máxima y las frecuencias naturales para cada caso, comparando el resultado aproximado del programa AVIF con el resultado de las formulas analíticas exactas para deflexiones (Tabla 7) y formas modales (Tabla 8).

Los esquemas de las condiciones de apoyo modeladas pueden observarse en las Tablas 7 y 10.

Los resultados obtenidos por el programa AVIF y las formulas analíticas están tan cercanos entre sí, que los puntos se superponen para el caso deflexiones, (ver Gráfica 1) y de formas modales (ver Gráficas 2 a 6). Por esta razón no se aprecian puntos de color azul, correspondientes a la gráfica en MATLAB®.

5.1. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA DEFLEXIONES

Para la validación de las deflexiones se tomó una viga con las características mostradas en la Tabla 5, variando las condiciones de apoyo, tal como se indica en la Tabla 6, en esta misma tabla se relaciona el Anexo de entrada de datos del programa AVIF.

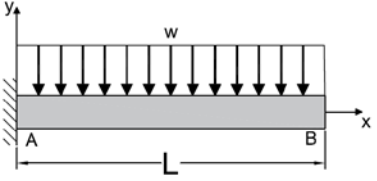
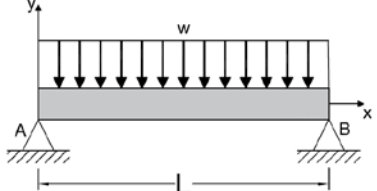
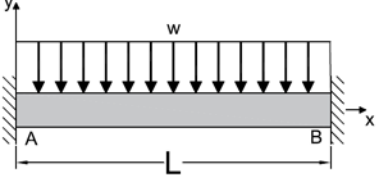
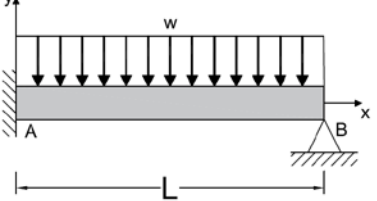
Tabla 6: Características de viga para validación de resultados de deflexiones sin fisurar

Condiciones de apoyo modeladas para validación de deflexiones sin fisurar	
Condición de apoyo	Anexo de entrada de datos en el programa AVIF
Empotrado-Libre	B9. EntradaDatosValidacionSinDano1.m
Simple-Simple	B10. EntradaDatosValidacionSinDano2.m
Empotrado-Empotrado	B11. EntradaDatosValidacionSinDano3.m
Empotrado-Simple	B12. EntradaDatosValidacionSinDano4.m

Las variables de MATLAB® utilizadas en la gráfica son NodosIniciales en el eje X, y Ui en el eje Y, estas variables quedan como un archivo de MATLAB®, después de correr la respectiva rutina. En la hoja de cálculo en EXCEL®, ver archivo VALIDACION DEFLEXIONES.xls en el CD Anexo, se obtienen los valores teóricos de la deflexión para los mismos valores de X de MATLAB® y se comparan los resultados en una serie de gráficas.

En la Gráfica 1 se pueden observar que los resultados obtenidos con las formulas exactas y los resultados obtenidos el programa AVIF se superponen. Los casos de apoyo analizados fueron: Cantilever (Empotrada-Libre), Simple-Simple, Empotrada-Empotrada, Empotrada-Simple.

Tabla 7: Deflexiones para vigas de una sola luz y carga distribuida con diferentes condiciones de apoyo

Tipo de Viga	Deflexión	Δ_{\max}
Empotrada - Libre 	$y(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$	$\Delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI}$
Simple – Simple 	$y(x) = \frac{wx}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$	$\Delta_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI}$
Empotrada – Empotrada 	$y(x) = \frac{wx^2}{24EI} (L - x)^2$	$\Delta_{\max} = \frac{wL^4}{384EI}$
Empotrada – Simple 	$y(x) = \frac{wx^2}{48EI} (2x^2 - 5Lx + 3L^2)$	$\Delta_{\max} = \frac{0.0054wL^4}{EI}$

Fuente: PILKEY, W. D. Formulas for stress, strain, and structural matrices. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2005.

En la Tabla 8, se puede observar la relación entre los datos de deflexiones obtenidos por medio del programa AVIF, y los obtenidos por medio de las formulas exactas de la Tabla 7.

En la Gráfica 1, se pueden observar las deflexiones de la viga en estudio para las diferentes condiciones de apoyo observadas en la Tabla 7.

Gráfica 1: Validación de deflexiones del programa AVIF, para viga de una sola luz con diferentes condiciones de apoyo

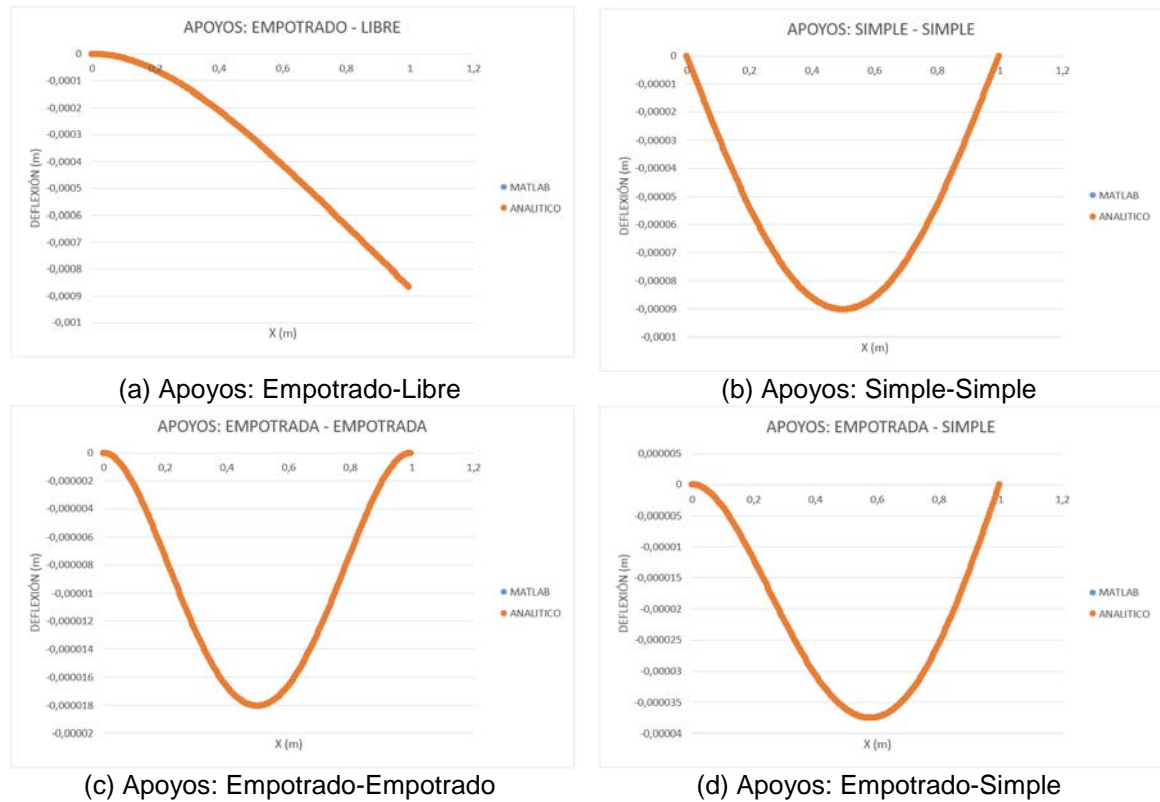


Tabla 8: Resumen de resultados, diferencias entre las deflexiones halladas con el programa AVIF y las formulas exactas

Condiciones de apoyo	Empotrado-Libre		Simple-Simple		Empotrado-Simple		Empotrado-Empotrado	
Δ_{\max} teórico	-8.66E-04	m	-9.02E-05	m	-1.80E-05	m	-3.74E-05	m
Δ_{\max} MATLAB	-8.66E-04	m	-9.02E-05	m	-1.80E-05	m	-3.75E-05	m
Error Δ_{\max}	0.0007%	%	-0.0012%	%	0.0003%	%	-0.2966%	%
Error máximo Deflexiones	0.0000%	%	0.0014%	%	0.0005%	%	0.0006%	%

Se puede concluir que los resultados de deflexiones obtenidos por el programa AVIF para el caso de viga sin fisurar, son aproximadamente iguales a los resultados analíticos obtenidos por las formulas exactas.

5.2. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA FORMAS MODALES

Para la validación de las formas modales calculadas con el programa AVIF, se tomó una viga con las características mostradas en la Tabla 5, variando las condiciones de apoyo, tal como se indica en la Tabla 9, en esta misma tabla se relaciona el Anexo de entrada de datos del programa AVIF.

Tabla 9: Características de viga para validación de resultados de formas modales sin fisurar

Condiciones de apoyo modeladas para validación de formas modales sin fisurar	
Condición de apoyo	Anexo de entrada de datos en el programa AVIF
Empotrado-Libre	B9. EntradaDatosValidacionSinDano1.m
Simple-Simple	B10. EntradaDatosValidacionSinDano2.m
Empotrado-Empotrado	B11. EntradaDatosValidacionSinDano3.m
Empotrado-Simple	B12. EntradaDatosValidacionSinDano4.m
Simple-Simple	B13. EntradaDatosValidacionSinDano5.m

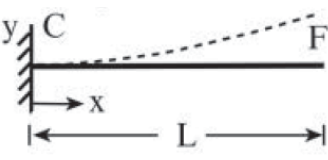
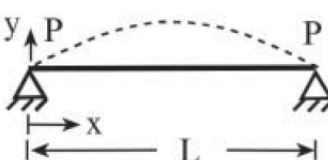
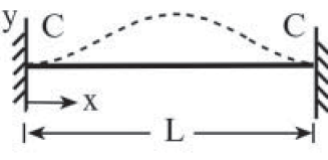
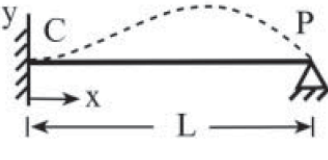
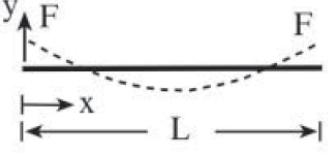
Para la validación de los resultados de las formas modales, no se tuvieron en cuenta los efectos de las fisuras, ya que no existe una formulación teórica con resultados exactos para vigas fisuradas con las cuales comparar.

La viga fue modelada en el programa AVIF mediante elementos de Euler Bernoulli, utilizando 250 elementos finitos para todos los casos, la elección del número de elementos finitos es arbitraria, pudiéndose utilizar un número menor o mayor, sin embargo se debe tener en cuenta que cuando la longitud de los elementos finitos se acerque a cero, se pueden obtener resultados erróneos, debido a que este es un método numérico.

Se procedió entonces a tabular en una hoja de cálculo en EXCEL®, los resultados obtenidos por medio del programa AVIF, con los resultados obtenidos por las fórmulas analíticas exactas, (ver Tabla 10), obteniendo el porcentaje de error para cada punto. Se comparó igualmente la deflexión máxima para cada caso, comparando el resultado aproximado con el resultado exacto.

Las variables de MATLAB® utilizadas en la gráfica son NodosIniciales en el eje X, y phi en el eje Y, estas variables quedan como un archivo de MATLAB®, después de correr la respectiva rutina. En la hoja de cálculo, ver archivo VALIDACION FORMAS MORALES.xls en el CD Anexo, se obtienen los valores teóricos de la deflexión para los mismos valores de X de MATLAB® y se comparan los resultados en una serie de gráficas.

Tabla 10: Formas modales para vigas de una sola luz con diferentes condiciones de apoyo

Condiciones de Borde	$\lambda_i, i=1,2,3\dots$	Forma Modales ($\lambda_i x/L$)	$\sigma_i, i=1,2,3\dots$
<p>Empotrado - Libre</p> 	<p>1.87510407 4.69409113 7.85475744 10.99554073 14.13716839 (2i-1)$\pi/2, i>5$</p>	<p>$\cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L}$ $-\sigma_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right)$ (44)</p>	<p>0.734095514 1.018467319 0.999224497 1.000033553 1 para $i>5$</p>
<p>Simple - Simple</p> 	<p>$i\pi, i=1,2,3\dots$</p>	<p>$\sin \frac{i\pi x}{L}$ (45)</p>	<p>0.734095514 1.018467319 0.999224497 1.000033553 1 para $i>5$</p>
<p>Empotrado - Empotrado</p> 	<p>4.73004074 7.85320462 10.9956079 14.1371655 17.2787597 (2i+1)$\pi/2, i>5$</p>	<p>$\cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L}$ $-\sigma_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right)$ (46)</p>	<p>0.982502207 1.000777312 0.999966450 1.000001450 1 para $i>5$</p>
<p>Empotrado - Simple</p> 	<p>3.92660231 7.06858275 10.21017612 13.35176878 16.49336143 (4i+1)$\pi/4, i>5$</p>	<p>$\cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L}$ $-\sigma_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right)$ (47)</p>	<p>1.000777304 1.000001445 1.000000000 1 para $i>3$</p>
<p>Libre - Libre</p> 	<p>4.73004074 7.85320462 10.9956078 14.1371635 17.2787597 (2i+1)$\pi/2, i>5$</p>	<p>$\cosh \frac{\lambda_i x}{L} + \cos \frac{\lambda_i x}{L}$ $-\sigma_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} + \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right)$ (48)</p>	<p>0.982502215 1.000777312 0.999966450 1.000001450 1 para $i>5$</p>

Fuente: BLEVINS, R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. New York. Van Nostrand Reinhold, 1979, p. 139-140.

Para todos los casos, la fórmula analítica para las frecuencias naturales, está dada por⁴³:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2} ; i = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

Donde:

E: Módulo de elasticidad

I: Inercia

L: Longitud de la viga

m: masa por unidad de longitud de la viga

λ_i : Constante que varía según los tipos de apoyo y el modo de vibración que se quiera hallar, ver Tabla 10.

σ_i : Constante que varía según los tipos de apoyo y el modo de vibración que se quiera hallar, ver Tabla 10.

En las Gráficas 2 a la 6, se relacionan las tres primeras formas modales, para las condiciones de apoyo, Empotrado-Libre, Simple-Simple, Empotrado-Empotrado, Empotrado-Simple y Libre-Libre, respectivamente. Se pueden observar que los resultados obtenidos con las formulas exactas y los resultados obtenidos el programa AVIF se superponen.

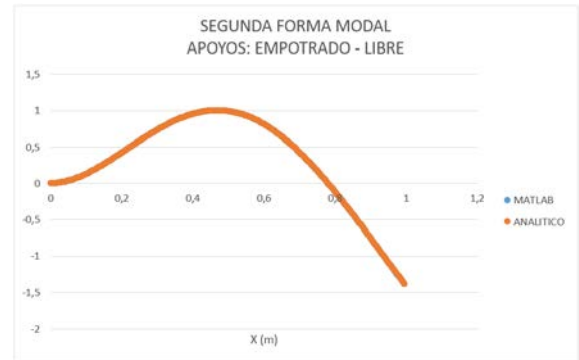
En las Tablas 11 a la 15, se puede observar la relación entre los datos de frecuencias naturales obtenidos por medio del programa AVIF, y los obtenidos por medio de las formulas exactas de la Tabla 10.

⁴³ BLEVINS, R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. New York. Van Nostrand Reinhold, 1979, p. 108.

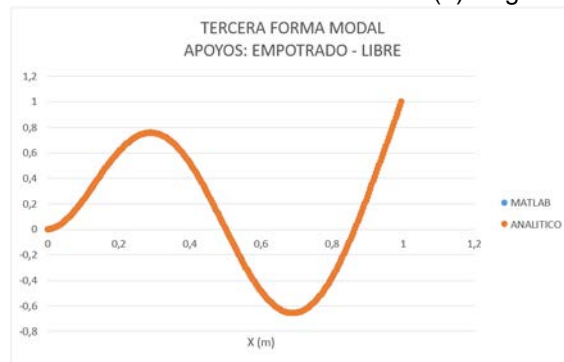
Gráfica 2: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-libre



(a) Primera Forma Modal



(b) Segunda Forma Modal



(c) Tercera Forma Modal

Tabla 11: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-libre

Empotrado – Libre	Forma Modal 1		Forma Modal 2		Forma Modal 3	
fn Analítico	21.0917	Hz	132.1794	Hz	370.1062	Hz
fn MATLAB	21.2587	Hz	132.1858	Hz	370.1187	Hz
Error fn	0.785%	%	0.005%	%	0,003%	%

Gráfica 3: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos simple-simple

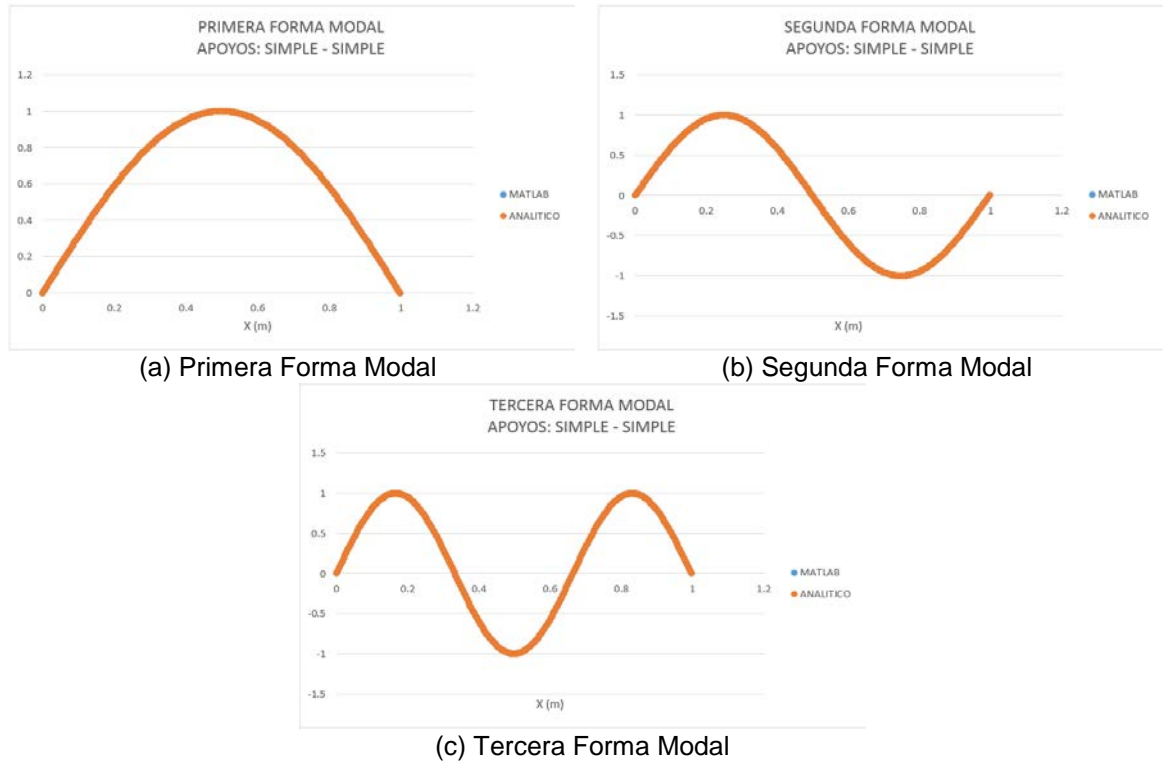
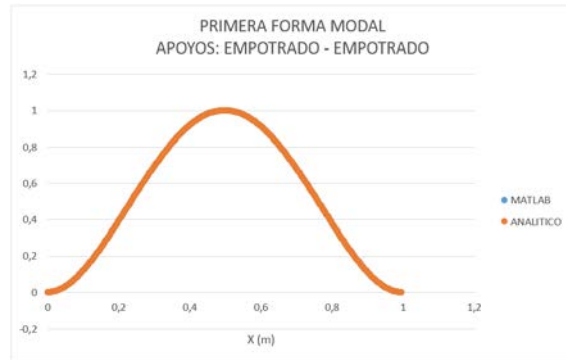


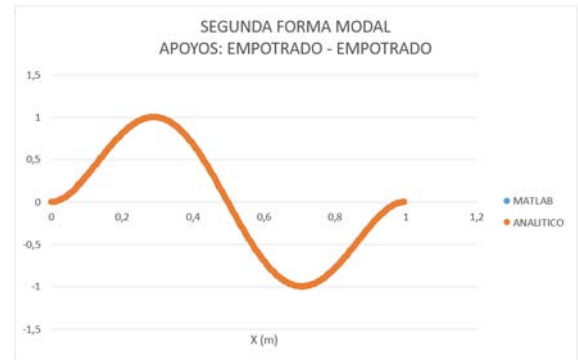
Tabla 12: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos simple-simple

Simple – Simple	Forma Modal 1		Forma Modal 2		Forma Modal 3	
fn Analítico	59.2053	Hz	236.8212	Hz	532.8476	Hz
fn MATLAB	59.2066	Hz	236.8213	Hz	532.8468	Hz
Error fn	0.002%	%	0.000%	%	0.000%	%

Gráfica 4: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-empotrado



(a) Primera Forma Modal



(b) Segunda Forma Modal

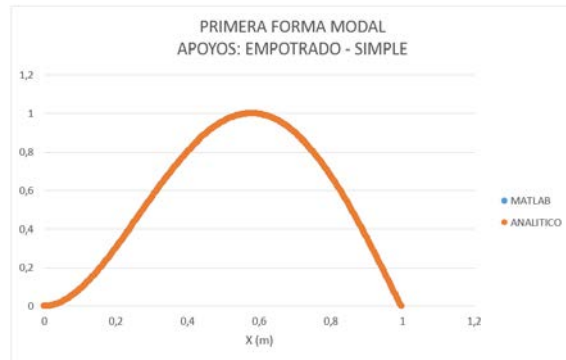


(c) Tercera Forma Modal

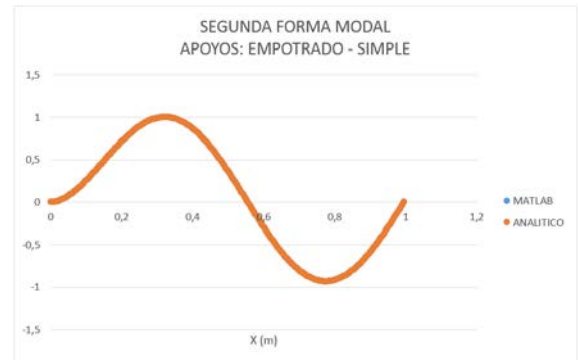
Tabla 13: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-empotrado

Empotrado - Empotrado	Forma Modal 1		Forma Modal 2		Forma Modal 3	
fn Analítico	134.2117	Hz	369.9598	Hz	725.2692	Hz
fn MATLAB	134.2107	Hz	369.9590	Hz	725.2689	Hz
Error fn	0.001%	%	0.000%	%	0.000%	%

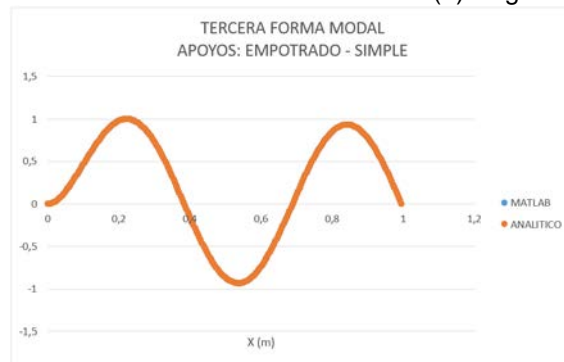
Gráfica 5: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos empotrado-simple



(a) Primera Forma Modal



(b) Segunda Forma Modal



(c) Tercera Forma Modal

Tabla 14: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos empotrado-simple

Empotrado - Simple	Forma Modal 1		Forma Modal 2		Forma Modal 3	
fn Analítico	92.4900	Hz	299.7267	Hz	625.3559	Hz
fn MATLAB	92.4899	Hz	299.7293	Hz	625.3558	Hz
Error fn	0.000%	%	0.001%	%	0.000%	%

Gráfica 6: Validación de formas modales del programa AVIF, para apoyos libre-libre

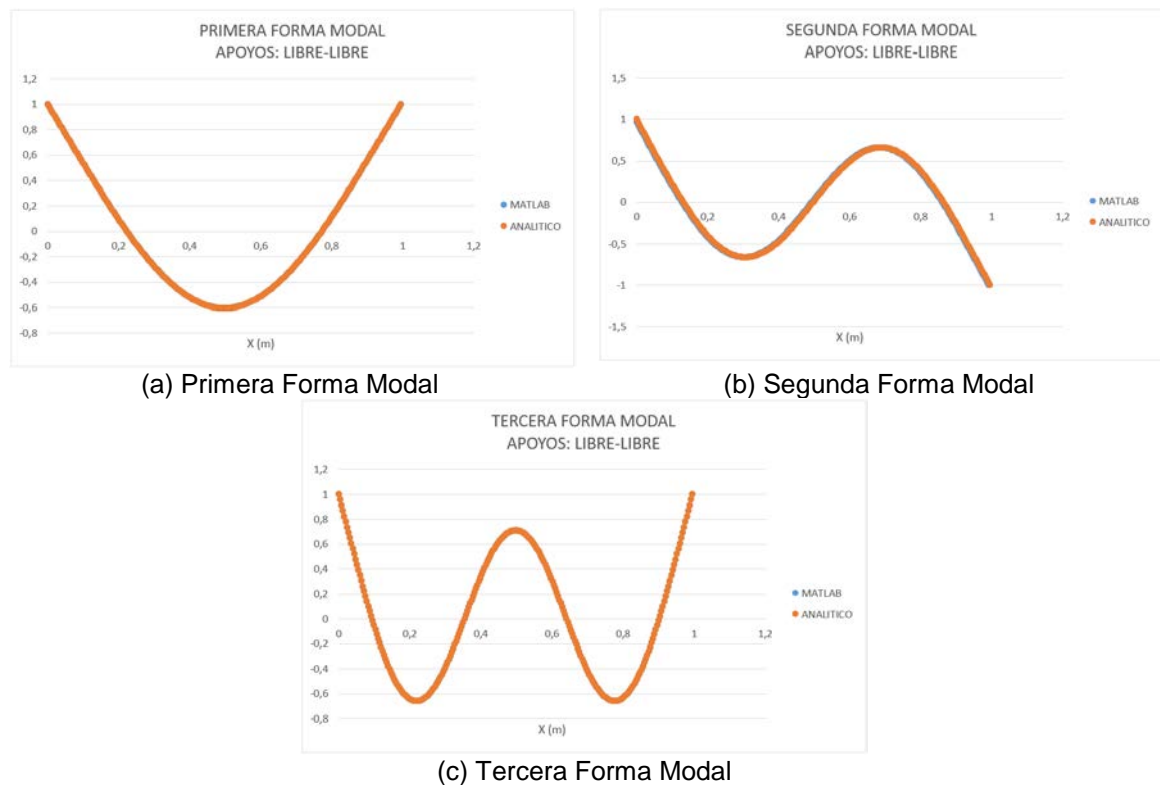


Tabla 15: Resumen de resultados, diferencias entre las frecuencias naturales halladas con el programa AVIF y las formulas exactas, para apoyos libre-libre

Libre - Libre	Forma Modal 1		Forma Modal 2		Forma Modal 3	
fn Analítico	134.2117	Hz	369.9598	Hz	725.2692	Hz
fn MATLAB	134.1767	Hz	369.9564	Hz	725.2647	Hz
Error fn	0.026%	%	0.001%	%	0.001%	%

Los datos obtenidos con estas fórmulas deben ser normalizadas de la misma manera en que se normalizaron los datos obtenidos con el programa AVIF. Para el presente caso se normalizaron los datos con base en el elemento de mayor valor, se dividieron todos los elementos de las formas modales por el de mayor valor, por lo que en la tabla de la hoja de cálculo, ver archivo VALIDACION FORMAS MODALES.XLS en el CD Anexo, se realiza el mismo procedimiento antes de graficar y comparar con los datos obtenidos en el programa AVIF.

Se puede observar que los datos de las Gráficas 2 a 6 se superponen y adicionalmente, las frecuencias naturales obtenidas mediante el programa AVIF, elaborado en el lenguaje de programación MATLAB® y las formulas analíticas son muy similares, con un error de máximo 0.785%, (ver Tablas 11 a la 15). La hoja de cálculo en EXCEL®, VALIDACION FORMAS MODALES.xls, con los resultados se puede consultar como un anexo en el CD adjunto. El código fuente del programa AVIF, puede consultarse en los anexos, A al G, o revisar los archivos en el CD adjunto.

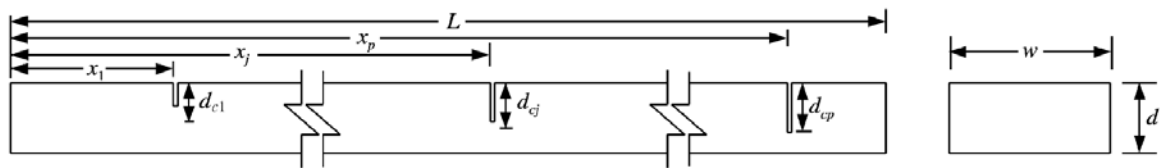
Se puede concluir que los resultados de formas modales obtenidos por el programa AVIF para el caso de viga sin fisurar, para los casos de apoyo modelados (empotrado-libre, simple-simple, empotrado-empotrado, empotrado-simple y libre-libre), son aproximadamente iguales a los resultados analíticos obtenidos por las formulas exactas.

6. MODELO DE VIGA FISURADA DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

Tal como se mencionó en la sección 3.5. (pág. 34), existen otros métodos simplificados de análisis de daño en vigas, sin embargo se escogió el modelo de Sinha, Friswell y Edwards, porque permite la ubicación directa de la fisura, con una posición y una altura de la misma. La variación de la inercia planteada es lineal, lo cual facilita la obtención de la variación de inercia en elementos finitos más pequeños, (ver sección 7, pág. 89).

El modelo matemático sobre el que se basa el presente trabajo de grado fue presentado en un artículo publicado en el año 2002⁴⁴. La principal ventaja del mismo, es la posibilidad de modelar directamente con la ubicación y la altura de la fisura, permitiendo un modelamiento directo de las mismas, como se observa en la Figura 5.

Figura 5, Viga con múltiples fisuras



Fuente: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 16.

El modelo plantea la reducción de rigidez como una variación lineal de la inercia, el mismo asume lo siguiente:

- Las vigas se comportan dentro del rango lineal.
- Las vigas en estudio son prismáticas y de sección recta rectangular.
- Las vigas se modelan bajo la teoría de Euler-Bernoulli.
- Las fisuras son fisuras abiertas, las fisuras que se abren y cierran (breathing cracks), no son consideradas dentro de este modelo de fisuras.

⁴⁴ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 13-38.

- No se considera que el tamaño de las fisuras varía, (la altura de las fisuras no aumenta).
- Se considera que las fisuras no hacen variar la masa de la viga.
- La reducción de rigidez se desarrolla dentro de un solo elemento finito (esto pone algunos límites a la posición de la fisuras y a la cercanía entre las mismas, que serán analizados más adelante).
- No se puede modelar más de una fisura por elemento finito.

6.1. VARIACIÓN DE LA INERCIA CERCANA A LA FISURA

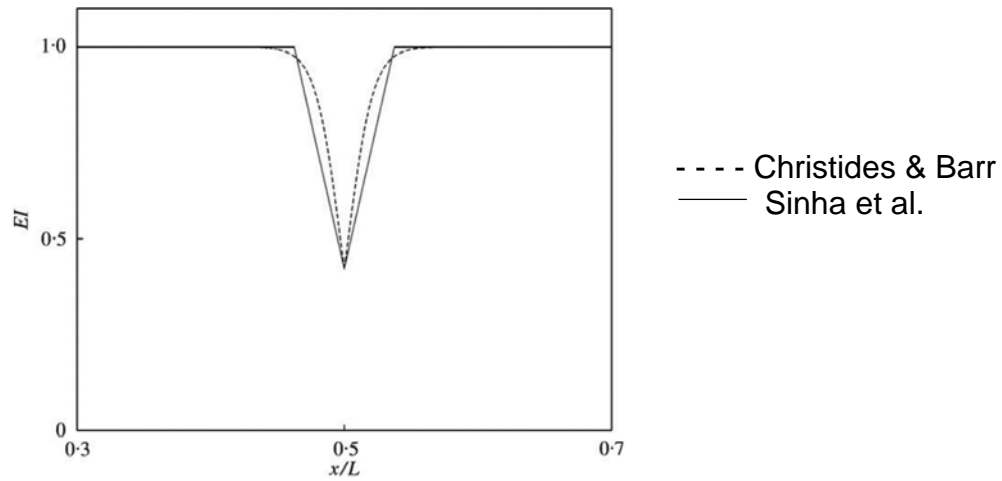
En este modelo se plantea la variación de inercia cercana a la fisura como una variación aproximada de tipo triangular, la cual es comparada con la variación de la rigidez propuesta por Christides y Barr⁴⁵:

En la Figura 6, se puede observar la comparación entre la variación de la rigidez (EI), en cercanía de una fisura, entre el modelo propuesto por Christides y Barr, (en línea punteada), y el modelo de Sinha, Friswell y Edwards, (línea completa).

La diferencia principal entre estos dos modelos está en la forma en que plantea la variación de la inercia, ya que la variación de inercia planteada por Christides & Barr es exponencial, y la planteada por Sinha, Friswell y Edwards, es lineal.

⁴⁵CHRISTIDES, S.; BARR. Op. cit., p. 639-648.

Figura 6: Comparación entre la variación de la rigidez (EI), en cercanía de una fisura



Fuente: CHRISTIDES, S.; BARR, A. D. One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. International Journal of Mechanical Science, USA, Pergamon, 1984, vol. 26 no. 11-12, p. 639-648. Tomado de: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 17.

El modelo de Christides y Barr⁴⁶, utiliza para la estimación de la rigidez la siguiente ecuación:

$$EI(x) = \frac{EI_o}{1 + Ce^{-2\alpha|x-x_j|/d}} \quad (50)$$

Donde,

$$C = \frac{I_o - I_{cj}}{I_{cj}} \quad (51)$$

$$I_o = \frac{wd^3}{12} \quad (52)$$

$$I_{cj} = \frac{w(d - d_{cj})^3}{12} \quad (53)$$

Siendo,

E: Módulo de elasticidad

I_o = Momento de inercia de la viga sin fisurar.

I_{cj} = Momento de inercia de la viga en la fisura j.

w = Ancho de la viga.

⁴⁶ Ibíd., p. 639-648.

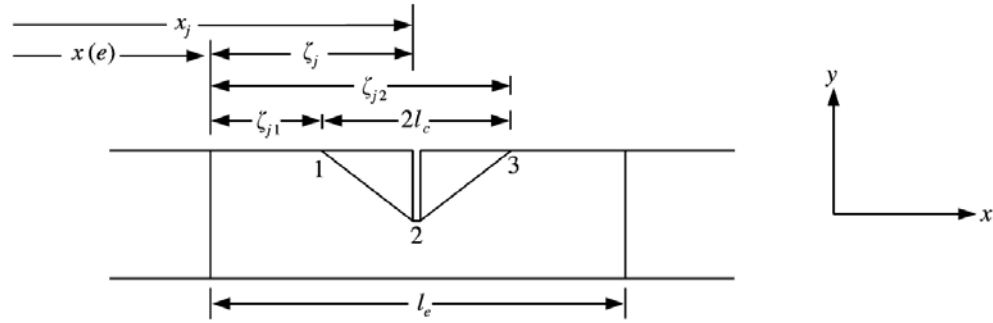
d = Altura de la viga.

d_{cj} = Altura de la fisura j .

α = constante experimental encontrada por Christides y Barr⁴⁷, cuyo valor es de 0.667.

Por otra parte, la variación lineal de inercia planteada por el modelo de Sinha, Friswell y Edwards⁴⁸, (ver Figura 6). Propone que esta reducción de rigidez se realiza a una distancia l_c a cada lado de la fisura, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7, Variación de la rigidez en el elemento e -ésimo, alrededor de la fisura



Fuente: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 17.

La variación de la rigidez, según el modelo de Sinha, Friswell y Edwards está dada por:

$$EI_e(\zeta) = EI_o, \quad \text{si } 0 \leq \zeta \leq \zeta_{j1} \quad (54)$$

$$EI_e(\zeta) = EI_o - E(I_o - I_{cj}) \frac{(\zeta - \zeta_{j1})}{(\zeta_j - \zeta_{j1})}, \quad \text{si } \zeta_{j1} \leq \zeta \leq \zeta_j \quad (55)$$

$$EI_e(\zeta) = EI_o - E(I_o - I_{cj}) \frac{(\zeta_{j2} - \zeta)}{(\zeta_{j2} - \zeta_j)}, \quad \text{si } \zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j2} \quad (56)$$

$$EI_e(\zeta) = EI_o, \quad \text{si } \zeta_{j2} \leq \zeta \leq 0 \quad (57)$$

$$\zeta_{j1} = \zeta_j - l_c \quad (58)$$

⁴⁷ Ibíd., p. 639-648.

⁴⁸ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 17-18.

$$\zeta_{j2} = \zeta_j + l_c \quad (59)$$

Donde,

E: Módulo de elasticidad

I_0 : Inercia sin fisurar

ζ_j : ubicación de la fisura j dentro del elemento e.

ζ_{j1} , ζ_{j2} : ubicación a cada lado de la fisura donde empieza la variación de rigidez.

l_c : longitud efectiva de reducción de rigidez debida a la fisura, aproximadamente:

$$l_c = \frac{d}{\alpha} = \frac{d}{0.667} \approx 1.5d \quad (60)$$

Donde d es la altura de la viga.

Lo anteriormente expuesto implica que la rigidez se reduce en un intervalo de 1.5d a cada lado de la fisura, y toda esta reducción de rigidez debe ser desarrollada dentro de un solo elemento finito. Por lo tanto la longitud mínima del elemento finito que tenga incorporada la reducción de rigidez debe ser de 3 veces la altura de la viga.

Esto también quiere decir que la fisura debe estar colocada a una distancia mínima de 1.5*d del borde de la viga, en caso de colocar una fisura a una distancia menor se obtendrían resultados erróneos, ya que se estaría teniendo parte de la reducción de rigidez por fuera de la viga.

Otra limitante debida a esta situación es que solo puede modelarse una fisura por elemento finito, ya que si se coloca más de una fisura por elemento finito los efectos de los mismos se superpondrían, obteniéndose resultados erróneos.

Por lo tanto las fisuras deben estar separadas un mínimo de $2*l_c=3*d$, entre si y deben estar en elementos finitos separados

6.2. MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ELEMENTO FISURADO

La matriz de rigidez con fisura, es la matriz de rigidez calculada por el método de Euler-Bernoulli menos una matriz donde se tiene en cuenta la reducción en la rigidez causada por la fisura:

$$K_{e,crack} = K_e - K_{cj} \quad (61)$$

Donde,

\mathbf{K}_e = Matriz de rigidez sin fisurar.

\mathbf{K}_{cj} = Matriz de reducción de rigidez debida a la fisura.

$\mathbf{K}_{e,crack}$ = Matriz de rigidez de elemento e, teniendo en cuenta el efecto de la fisura.

El modelo de Sinha, Friswell y Edwards⁴⁹, utiliza como base el modelo de viga de Euler Bernoulli⁵⁰. Solamente se considera flexión en un solo plano y cada nodo tiene dos grados de libertad, por desplazamiento y rotación debidos a la flexión.

Como ya se observó en el capítulo 4.3, la matriz de rigidez de una viga sin fisurar está dada por la ecuación (20):

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

De manera similar para un elemento finito de Inercia sin fisurar I_o y longitud l_e , la matriz \mathbf{K}_e , está dada por:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI_o}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

La matriz \mathbf{K}_{cj} , está dada por:

$$\mathbf{K}_{cj} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Donde los elementos de la matriz de rigidez de la matriz \mathbf{K}_{cj} , están dados por:

$$k_{11} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^4} \left[\frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left(\frac{2\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right] \quad (64)$$

$$k_{12} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^3} \left[\frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left(2 - \frac{7\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right] \quad (65)$$

⁴⁹ Ibíd., p. 13-38

⁵⁰ CARRERA, E.; GIUNTA, G.; PETROLO, M. Op. cit., p. 9-16

$$k_{14} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^3} \left[\frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left(1 - \frac{5\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right] \quad (66)$$

$$k_{22} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{l_e^2} \left[\frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left(\frac{3\zeta_j}{l_e} - 2 \right)^2 \right] \quad (67)$$

$$k_{24} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{l_e^3} \left[\frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left(2 - \frac{9\zeta_j}{l_e} + \frac{9\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right] \quad (68)$$

$$k_{44} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{l_e^2} \left[\frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left(\frac{3\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right] \quad (69)$$

Se deja constancia que en el artículo de Sinha, Friswell y Edwards, se cometió un error tipográfico en la transcripción de las fórmulas para los elementos k_{22} , k_{24} y k_{44} , en este artículo se observa que el factor que multiplica las ecuaciones (67), (68) y (69), es 12, cuando el valor real es de 2, este error tipográfico aparece referenciado en la fe de erratas del mismo^{51 52}, en las secciones 6.5.4, 6.5.5 y 6.5.6 del presente trabajo, se lleva a cabo la deducción matemática de estos factores.

⁵¹ FRISWELL, M. I. Publications - Michael I Friswell, Errata for Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data, 2002. (Recuperado el 14 de 4 de 2017.)
Disponible en: http://michael.friswell.com/PDF_Files/J77.html

⁵² SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 13-38.

6.3. DEDUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Los elementos de la matriz de rigidez se obtienen de la ecuación (29), variando la inercia como una función de la posición:

$$[k_{e,crack}]_{rs} = \int_0^{le} E I_e(\zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta \quad (70)$$

Donde:

$[k_{e,crack}]_{rs}$: elemento de la matriz de rigidez fisurada, con los subíndices r y s.

E: Módulo de elasticidad

$I_e(\zeta)$: Inercia del elemento finito de la viga fisurada

$N_{er}''(\zeta)$, $N_{es}''(\zeta)$: Segunda derivada de la forma modal del elemento finito, r y s corresponden al primer y segundo subíndice del elemento analizado

Ya que, la variación de la rigidez, según el modelo de Sinha está dada por las ecuaciones (54) a la (59):

$$\begin{aligned} EI_e(\zeta) &= EI_o, \quad \text{si } 0 \leq \zeta \leq \zeta_{j1} \\ EI_e(\zeta) &= EI_o - E(I_o - I_{cj}) \frac{(\zeta - \zeta_{j1})}{(\zeta_j - \zeta_{j1})}, \quad \text{si } \zeta_{j1} \leq \zeta \leq \zeta_j \\ EI_e(\zeta) &= EI_o - E(I_o - I_{cj}) \frac{(\zeta_{j2} - \zeta)}{(\zeta_{j2} - \zeta_j)}, \quad \text{si } \zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j2} \\ EI_e(\zeta) &= EI_o, \quad \text{si } \zeta_{j2} \leq \zeta \leq 0 \\ \zeta_{j1} &= \zeta_j - l_c \\ \zeta_{j2} &= \zeta_j + l_c \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} [k_{e,crack}]_{rs} &= \int_0^{\zeta_{j1}} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta \\ &\quad - \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E \frac{(I_o - I_{cj})}{l_c} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta \\ &\quad - \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E \frac{(I_o - I_{cj})}{l_c} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_{j2}}^{le} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Reagrupando:

$$\begin{aligned}
[k_{e,crack}]_{rs} &= \int_0^{\zeta_{j1}} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
&+ \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_{j2}}^{le} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
&- \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
&- \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
[k_{e,crack}]_{rs} &= \int_0^{le} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta - \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
&- \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación (61):

$$[k_{e,crack}]_{rs} = [k_e]_{rs} - [k_{cj}]_{rs} \quad (71)$$

Donde:

$[k_e]_{rs}$: Matriz de rigidez sin fisurar.

$[k_{cj}]_{rs}$: Matriz de efectos de reducción de rigidez por efecto de las fisuras.

$$[k_e]_{rs} = \int_0^{le} E I_o N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
[k_{cj}]_{rs} &= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\
&+ \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta
\end{aligned} \quad (73)$$

6.4. FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTOS FINITOS INCLUYENDO FISURAS

Las funciones de forma para los elementos finitos son iguales a las ya estudiadas en la sección 4.2, cambiando únicamente la notación, para facilidad de la exposición se presentan aquí nuevamente:

6.4.1. Función de forma 1. Corresponde al desplazamiento unitario del nodo i, para un elemento finito, la función de forma está dada por:

$$N_{e1}(\zeta) = 1 - \frac{3\zeta^2}{le^2} + \frac{2\zeta^3}{le^3}$$

La primera derivada está dada por:

$$N'_{e1}(\zeta) = \frac{\partial N_{e1}(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{6\zeta}{le^2} + \frac{6\zeta^2}{le^3}$$

La segunda derivada está dada por:

$$N''_{e1}(\zeta) = \frac{\partial N'_{e1}(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \quad (74)$$

6.4.2. Función de forma 2. Corresponde a la rotación unitaria del nodo i, de manera similar a lo estudiado en la sección 6.4.1, la segunda derivada de la función de forma 2 está dada por:

$$N''_{e2}(\zeta) = \frac{\partial N'_{e2}(\zeta)}{\partial \zeta} = le \left(-\frac{4}{le^2} + \frac{6\zeta}{le^3} \right) = -\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \quad (75)$$

6.4.3. Función de forma 3. Corresponde al desplazamiento unitario del nodo j, de manera similar a lo estudiado en la sección 6.4.1, la segunda derivada de la función de forma 2 está dada por:

$$N''_{e3}(\zeta) = \frac{\partial N'_{e3}(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{6}{le^2} - \frac{12\zeta}{le^3} = -N''_{e1}(\zeta) \quad (76)$$

6.4.4. Función de forma 4. Corresponde a la rotación unitaria del nodo j, de manera similar a lo estudiado en la sección 6.4.1, la segunda derivada de la función de forma 2 está dada por:

$$N_{e4}''(\zeta) = \frac{\partial N_{e4}'(\zeta)}{\partial \zeta} = le \left(-\frac{2}{le^2} + \frac{6\zeta}{le^3} \right) = -\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \quad (77)$$

6.5. DEDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[k_{cj}]_{rs}$ DEL MODELO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

A continuación se realizara la deducción matemática de las ecuaciones del modelo de Sinha, Friswell y Edwards, desarrollando las respectivas integrales.

1. Partiendo de la integral obtenida en la ecuación (73):

$$[k_{cj}]_{rs} = \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \\ + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta$$

2. Factorizando:

$$[k_{cj}]_{rs} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \right. \\ \left. + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) \partial \zeta \right) \quad (78)$$

6.5.1. Elemento $[k_{cj}]_{11}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{11} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) \partial \zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) \partial \zeta \\ = \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \partial \zeta$$

$$= \frac{6(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^6} (6\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 4\zeta_j \zeta_{j1} + 3le^2 - 4le\zeta_{j1} + 2\zeta_{j1}^2)$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

$$= \frac{6lc^2}{le^6} (6\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 4\zeta_j \zeta_{j1} + 3le^2 - 4le\zeta_{j1} + 2\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta = \frac{6lc^2}{le^6} (12\zeta_j^2 - 8\zeta_j lc - 12\zeta_j le + 2lc^2 - 4lc le + 3le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) d\zeta \\ &= \frac{6(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^6} (6\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + \zeta_j \zeta_{j2} + 3le^2 - 4le\zeta_{j2} + 2\zeta_{j2}^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{6lc^2}{le^6} (6\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + \zeta_j \zeta_{j2} + 3le^2 - 4le\zeta_{j2} + 2\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta = \frac{6lc^2}{le^6} (12\zeta_j^2 + 8\zeta_j lc - 12\zeta_j le + 2lc^2 - 4lc le + 3le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6lc^2}{le^6} (24\zeta_j^2 - 24\zeta_j le + 4lc^2 + 6le^2) \\
&= \frac{12lc^2}{le^4} \left(\frac{12\zeta_j^2}{le^2} - \frac{12\zeta_j}{le} + \frac{2lc^2}{le^2} + 3 \right) \\
&= \frac{12lc^2}{le^4} \left(\frac{2lc^2}{le^2} + 3 \left(\frac{4\zeta_j^2}{le^2} - \frac{4\zeta_j}{le} + 1 \right) \right) \\
&= \frac{12lc^2}{le^4} \left(\frac{2lc^2}{le^2} + 3 \left(\frac{2\zeta_j}{le} - 1 \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

4. $[k_{cj}]_{11}$

$$\begin{aligned}
[k_{cj}]_{11} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e1}''(\zeta) d\zeta \right) \\
[k_{cj}]_{11} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{12lc^2}{le^4} \left(\frac{2lc^2}{le^2} + 3 \left(\frac{2\zeta_j}{le} - 1 \right)^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{11}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards⁵³ en la ecuación (64):

$$[k_{cj}]_{11} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^4} \left[\frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left(\frac{2\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

6.5.2. Elemento $[k_{cj}]_{12}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{12} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta$$

⁵³ Ibíd., p. 19.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial\zeta \\
&= \frac{2(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 14\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 6le^2 - 7le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

$$= \frac{2lc^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 14\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 6le^2 - 7le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial\zeta = \frac{2lc^2}{le^5} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j lc - 21\zeta_j le + 3lc^2 + 7lc le + 6le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial\zeta \\
&= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial\zeta \\
&= \frac{2(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 14\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 6le^2 - 7le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{2lc^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 14\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 6le^2 - 7le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial\zeta = \frac{2lc^2}{le^5} (18\zeta_j^2 + 12\zeta_j lc - 21\zeta_j le + 3lc^2 - 7lc le + 6le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta \\
&= \frac{2lc^2}{le^5} (36\zeta_j^2 - 42\zeta_j le + 6lc^2 + 12le^2) \\
&= \frac{12lc^2}{le^5} (6\zeta_j^2 - 7\zeta_j le + lc^2 + 2le^2)
\end{aligned}$$

4. $[k_{cj}]_{12}$

$$\begin{aligned}
[k_{cj}]_{12} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta \right) \\
[k_{cj}]_{12} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{12lc^2}{le^5} (lc^2 + 2le^2 - 7\zeta_j le + 6\zeta_j^2) \right)
\end{aligned}$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{12}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards⁵⁴ en la ecuación (65):

$$[k_{cj}]_{12} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^3} \left[\frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left(2 - \frac{7\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

6.5.3. Elemento $[k_{cj}]_{14}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{14} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta \\
&= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial \zeta
\end{aligned}$$

⁵⁴ Ibíd., p. 19.

$$= \frac{2(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 10\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 3le^2 - 5le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

$$= \frac{2lc^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 10\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 3le^2 - 5le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta = \frac{2lc^2}{le^5} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j lc - 15\zeta_j le + 3lc^2 + 5lc le + 3le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta}{le^3} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{2(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 10\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 3le^2 - 5le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{2lc^2}{le^5} (9\zeta_j^2 - 10\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 3le^2 - 5le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta = \frac{2lc^2}{le^5} (18\zeta_j^2 + 12\zeta_j lc - 15\zeta_j le + 3lc^2 - 5lc le + 6le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2lc^2}{le^5} (36\zeta_j^2 - 30\zeta_j le + 6lc^2 + 6le^2) \\
&= \frac{12lc^2}{le^5} (6\zeta_j^2 - 5\zeta_j le + lc^2 + le^2)
\end{aligned}$$

4. $[k_{cj}]_{14}$

$$\begin{aligned}
[k_{cj}]_{14} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e1}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta \right) \\
[k_{cj}]_{14} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{12lc^2}{le^5} (6\zeta_j^2 - 5\zeta_j le + lc^2 + le^2) \right)
\end{aligned}$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{14}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards⁵⁵ en la ecuación (66):

$$[k_{cj}]_{14} = \frac{12E(I_o - I_{cj})}{l_e^3} \left[\frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left(1 - \frac{5\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right]$$

6.5.4. Elemento $[k_{cj}]_{22}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{22} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) \partial \zeta \\
&= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial \zeta \\
&= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 16\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 8le^2 - 8le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

⁵⁵ Ibíd., p. 19.

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 16\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 8le^2 - 8le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j lc - 24\zeta_j le + 3lc^2 + 8lc le + 8le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 16\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 8le^2 - 8le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 16\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 8le^2 - 8le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 + 12\zeta_j lc - 24\zeta_j le + 3lc^2 - 8lc le + 8le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{lc^2}{le^4} (36\zeta_j^2 - 48\zeta_j le + 6lc^2 + 16le^2) \\ &= \frac{2lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 24\zeta_j le + 3lc^2 + 8le^2) \end{aligned}$$

4. $[k_{cj}]_{22}$

$$[k_{cj}]_{22} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e2}''(\zeta) d\zeta \right)$$

$$[k_{cj}]_{22} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc^2}{le^4} (3lc^2 + 18\zeta_j^2 - 24\zeta_j le + 8le^2) \right)$$

$$[k_{cj}]_{22} = \frac{E(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc}{le^2} \right) \left(\frac{lc}{le^2} (3lc^2 + 2(9\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 4le^2)) \right)$$

$$[k_{cj}]_{22} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{le^2} \left(\frac{3lc^3}{le^2} + 2lc \left(\frac{9\zeta_j^2}{le^2} - \frac{12\zeta_j}{le} + 4 \right) \right)$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{22}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards^{56 57} en la ecuación (67):

$$[k_{cj}]_{22} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{le^2} \left[\frac{3lc^3}{le^2} + 2lc \left(\frac{3\zeta_j}{le} - 2 \right)^2 \right]$$

6.5.5. Elemento $[k_{cj}]_{24}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{24} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) d\zeta \end{aligned}$$

⁵⁶ Ibíd., p. 19.

⁵⁷ FRISWELL, M. I. Op. cit.

$$= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 16\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 8le^2 - 8le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 4le^2 - 6le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j lc - 18\zeta_j le + 3lc^2 + 6lc le + 4le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{4}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 4le^2 - 6le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 4le^2 - 6le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 + 12\zeta_j lc - 18\zeta_j le + 3lc^2 - 6lc le + 4le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{lc^2}{le^4} (36\zeta_j^2 - 36\zeta_j le + 6lc^2 + 8le^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{2lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 18\zeta_j le + 3lc^2 + 4le^2)$$

4. $[k_{cj}]_{24}$

$$[k_{cj}]_{24} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e2}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \right)$$

$$[k_{cj}]_{24} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc^2}{le^4} (3lc^2 + 18\zeta_j^2 - 18\zeta_j le + 4le^2) \right)$$

$$[k_{cj}]_{24} = \frac{E(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc}{le^2} \right) \left(\frac{lc}{le^2} (3lc^2 + 2(4le^2 + 9\zeta_j^2 - 9\zeta_j le)) \right)$$

$$[k_{cj}]_{24} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{le^2} \left(\frac{3lc^3}{le^2} + 2lc \left(\frac{9\zeta_j^2}{le^2} - \frac{12\zeta_j}{le} + 4 \right) \right)$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{24}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards^{58 59} en la ecuación (68):

$$[k_{cj}]_{24} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{le^3} \left[\frac{3lc^3}{le^2} + 2lc \left(2 - \frac{9\zeta_j}{le} + \frac{9\zeta_j^2}{le^2} \right) \right]$$

6.5.6. Elemento $[k_{cj}]_{44}$. De la ecuación (78):

$$[k_{cj}]_{44} = E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta \right)$$

1. Despeje de la primera integral:

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) d\zeta$$

⁵⁸ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 19.

⁵⁹ FRISWELL, M. I. Op. cit.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial\zeta \\
&= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j1})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 2le^2 - 4le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $\zeta_j - \zeta_{j1} = lc$

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j1} + 2le^2 - 4le\zeta_{j1} + 3\zeta_{j1}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j1} = \zeta_j - lc$

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j lc - 12\zeta_j le + 3lc^2 + 4lc le + 2le^2)$$

2. Despeje de la segunda integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial\zeta \\
&= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \left(-\frac{2}{le} + \frac{6\zeta}{le^2} \right) \partial\zeta \\
&= \frac{(\zeta_j - \zeta_{j2})^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 2le^2 - 4le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(\zeta_j - \zeta_{j2})^2 = (\zeta_j - \zeta_j - lc)^2 = (-lc)^2 = lc^2$

$$= \frac{lc^2}{le^4} (9\zeta_j^2 - 8\zeta_j le + 6\zeta_j \zeta_{j2} + 2le^2 - 4le\zeta_{j2} + 3\zeta_{j2}^2)$$

Sustituyendo: $\zeta_{j2} = \zeta_j + lc$

$$\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial\zeta = \frac{lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 + 12\zeta_j lc - 12\zeta_j le + 3lc^2 - 4lc le + 2le^2)$$

3. Sumando las integrales:

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta \\
&= \frac{lc^2}{le^4} (36\zeta_j^2 - 24\zeta_j le + 6lc^2 + 4le^2) \\
&= \frac{2lc^2}{le^4} (18\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 3lc^2 + 2le^2)
\end{aligned}$$

4. $[k_{cj}]_{44}$

$$\begin{aligned}
[k_{cj}]_{44} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j1}) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta + \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j2}} (\zeta_{j2} - \zeta) N_{e4}''(\zeta) N_{e4}''(\zeta) \partial \zeta \right) \\
[k_{cj}]_{44} &= E \frac{(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc^2}{le^4} (3lc^2 + 18\zeta_j^2 - 12\zeta_j le + 2le^2) \right) \\
[k_{cj}]_{44} &= \frac{E(I_o - I_{cj})}{lc} \left(\frac{2lc}{le^2} \left(\frac{lc}{le^2} (3lc^2 + 2(9\zeta_j^2 - 6\zeta_j le + le^2)) \right) \right) \\
[k_{cj}]_{44} &= \frac{2E(I_o - I_{cj})}{le^2} \left(\frac{3lc^2}{le^2} + 2lc \left(\frac{9\zeta_j^2}{le^2} - \frac{6\zeta_j}{le} + 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Obteniéndose así la fórmula del elemento $[k_{cj}]_{44}$, de la Matriz de reducción de rigidez, que es igual a la obtenida por Sinha, Friswell y Edwards^{60 61} en la ecuación (69):

$$[k_{cj}]_{44} = \frac{2E(I_o - I_{cj})}{l_e^2} \left[\frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left(\frac{3\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]$$

6.6. LIMITACIONES DEL MODELO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

El modelo planteado por Sinha, Friswell y Edwards, presenta siguientes limitaciones:

1. La reducción de rigidez se desarrolla dentro de un solo elemento finito, esto quiere decir que debe existir un elemento de longitud mínima de $2 \cdot l_c = 2 \cdot 1.5 \cdot d =$

⁶⁰ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 19.

⁶¹ FRISWELL, M. I. Op. cit.

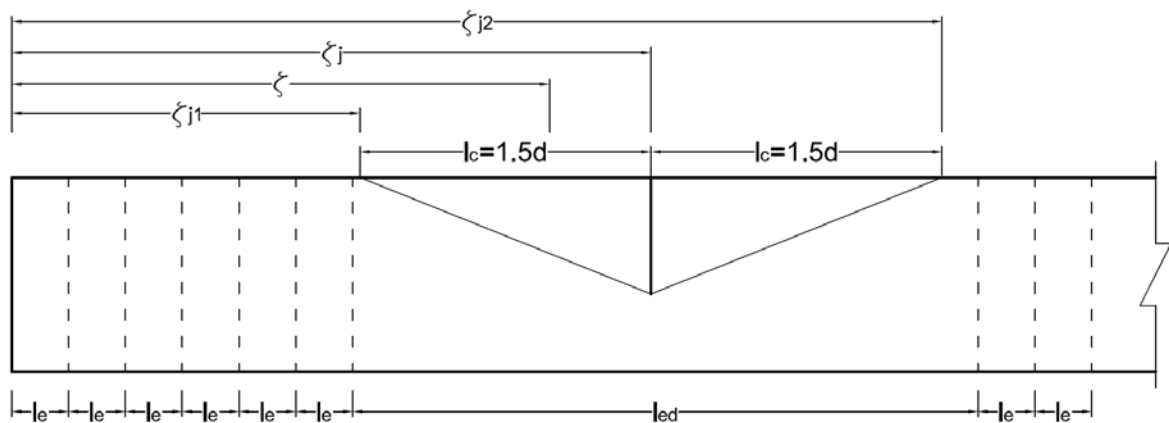
$3.0*d$, donde d es la altura de la viga. En este elemento se debe realizar la reducción de la totalidad de la rigidez.

2. No pueden modelarse fisuras en la proximidad de los extremos de la viga (deben estar mínimo a una distancia de $l_c = 1.5*d$, donde d es la altura de la viga. Esto debido a que la reducción de rigidez se extiende esta distancia desde la fisura hacia ambos lados de la misma, y a cualquier distancia menor, desde el borde de la fisura, la reducción de inercia se desarrollaría por fuera de la viga, este problema se trata en la sección: 7.6. (pág. 103).
3. Dos fisuras no pueden modelarse en el mismo elemento finito, modelar fisuras dentro de un mismo elemento finito, con las limitaciones de tamaño del elemento finito planteadas anteriormente, plantea el problema de superposición de efectos de rigidez de las fisuras, esta dificultad es tratada en la sección: 7.7.(pág. 105)
4. La división de la viga en un número determinado de elementos finitos de igual longitud, teniendo las limitaciones en el tamaño de los elementos que contengan fisuras planteadas anteriormente. Solo podría hacerse en casos muy específicos; por lo que para efectos prácticos es difícil obtener vigas con elementos finitos iguales. Esto dificulta la elaboración de las gráficas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, ya que implican realizar derivaciones numéricas, en las cuales para obtener unos resultados satisfactorios se necesitan que los puntos estén igualmente espaciados.

7. MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

El modelo de fisuras estudiado en el capítulo anterior, es válido para el caso en el que la variación de inercia se desarrolla dentro de un solo elemento finito. Como se puede apreciar en la Figura 8, al tener un solo elemento finito no se puede apreciar la variación de rigidez dentro de dicho elemento, adicionalmente se tiene un elemento de una longitud diferente a los otros, lo que creara dificultades en el momento de obtener las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, ya que estas se hallan con derivadas numéricas, y las fórmulas de Taylor para derivación numérica requieren que el espaciamiento entre puntos sea uniforme⁶², ver sección 3.3. (pág. 32). Se podría llegar a realizar la derivación numérica utilizando los polinomios de Lagrange⁶³, sin embargo la literatura al respecto es escasa y en el presente trabajo de grado se optó por utilizar las fórmulas de Taylor.

Figura 8: División de elementos finitos, según las limitaciones del modelo de Sinha, Friswell y Edwards



Otra dificultad encontrada es que con las ecuaciones propuestas por Sinha, Friswell y Edwards^{64 65} no se pueden modelar fisuras a menos de una distancia $l_c = 1.5d$, desde el borde de la viga, esta dificultad y la solución planteada a la misma, se trata en la sección 7.6, (pág. 103).

Igualmente se debe tener en cuenta que el modelo de Sinha, Friswell y Edwards, permite una única fisura por elemento finito. Lo cual crea una dificultad en el

⁶² CHAPRA, S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. New York, McGraw Hill, 2012, p. 525-529.

⁶³ Ibíd., p. 530-531.

⁶⁴ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 19.

⁶⁵ FRISWELL, M. I. Op. cit.

modelamiento, ya que muchas veces las fisuras tienden a estar cercanas unas de otras, y estas para poderlas modelar dicha teoría deben estar a una distancia mínima de 2 veces la longitud de reducción de inercia $2 \cdot l_c = 2 \cdot 1.5d = 3.0d$, es decir 3 veces la altura de la viga. Esta dificultad y una posible solución a la misma se plantearon en la sección 7.7, (pág. 105).

Por lo anteriormente expuesto es necesario reformular las ecuaciones del modelo, de forma tal que permitan superar estas dificultades.

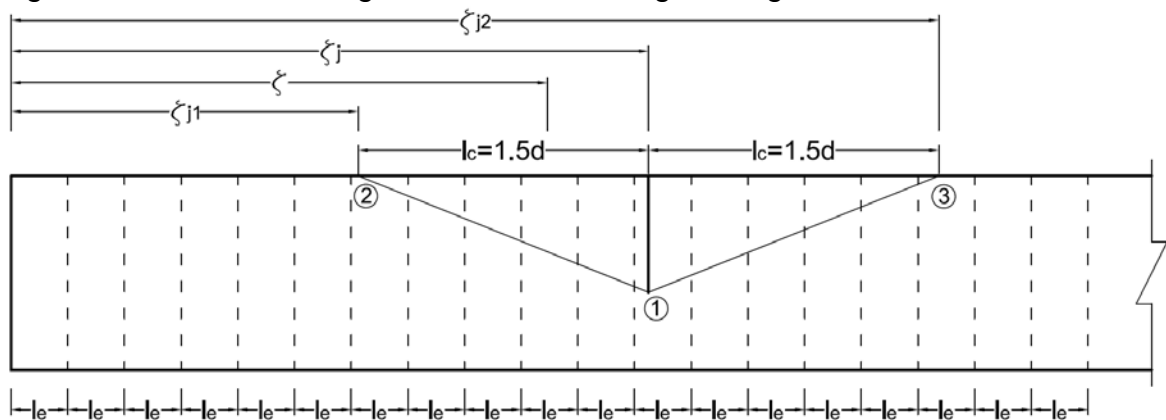
7.1. VARIACIÓN DE LA INERCIA

Para poder resolver las dificultades que plantean las limitaciones de las ecuaciones iniciales, se planteó una subdivisión de la viga en n elementos finitos de igual longitud, independientemente de la localización de las fisuras.

Como se puede observar en la Figura 9, la rigidez varía de forma lineal, por medio de dos ecuaciones distintas, una entre el intervalo ζ_{j1} y ζ_j , a la izquierda de la fisura, y otra entre el intervalo ζ_j y ζ_{j2} , a la derecha de la fisura.

Por simplicidad en el desarrollo de las ecuaciones se crearon nodos adicionales en la ubicación de la fisura y en los extremos de la reducción de rigidez, puntos 1, 2 y 3 de la Figura 9.

Figura 9: División de la viga en elementos de igual longitud



Es importante resaltar que estos nodos extra se crean independientemente de la longitud de Elemento Finito escogida, y se hace a nivel de programación, ver sección 7.5. (pág. 103 y Anexo C3. NodoExtra.m).

Se aclara que los triángulos dibujados en esta viga (Figura 9), representan la reducción en la inercia por el efecto de la fisura, es decir, el punto más bajo del triángulo, mostrado en la Figura por el número 1, no representa la altura de la fisura, si no la reducción de la inercia en el punto de la fisura.

También se debe tener en cuenta que los resultados obtenidos en estos puntos extra, deben ser retirados antes de realizar la derivación numérica, ver sección 7.8. (pág. 108), ya que las longitudes de los elementos finitos no serían todas iguales, y las fórmulas de derivación numérica de Taylor, requieren espaciamientos homogéneos de los datos.⁶⁶ Por lo que se deben tener en cuenta para ser eliminados de los resultados obtenidos, antes de hallar las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

Teniendo en cuenta que:

$$I_o = \frac{bd^3}{12} \quad (79)$$

$$I_{cj} = \frac{b(d - d_{cj})^3}{12} \quad (80)$$

Siendo,

I_o = Momento de inercia de la viga sin fisurar.

I_{cj} = Momento de inercia de la viga en la fisura j.

b = Ancho de la viga.

d = Altura de la viga.

d_{cj} = Altura de la fisura j.

Que son las mismas ecuaciones (52) y (53), cambiando la notación del ancho de la viga de $w=b$. Ver Figura 5.

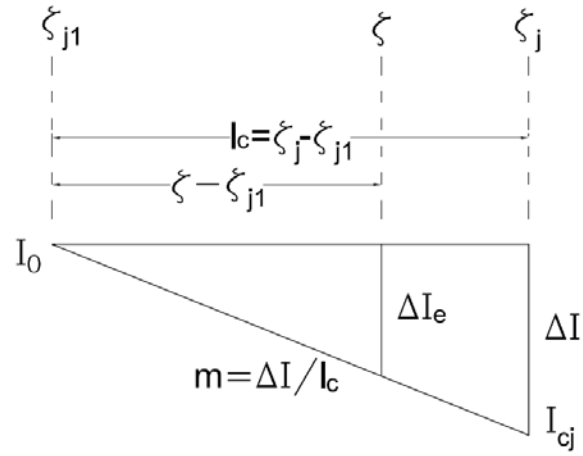
Se procedió a hallar la variación de la inercia a ambos lados de la fisura.

7.1.1. Variación de la inercia a la izquierda de la fisura, en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$.

La variación de la inercia a la izquierda de la fisura, se puede observar en la Figura 10, está se puede calcular por una relación de triángulos, la inercia varía desde el punto ζ_{j1} , en donde no hay reducción de inercia por efecto de la fisura, hasta el punto ζ_j , donde está ubicada la fisura y la inercia es menor.

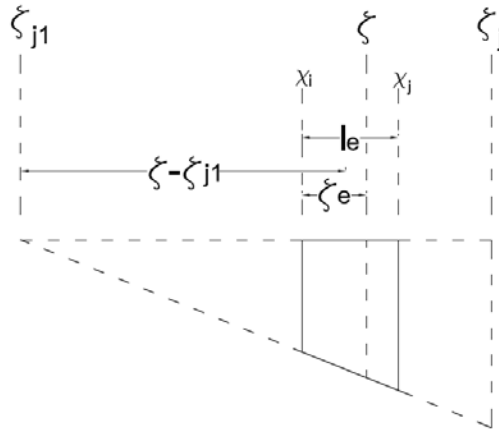
⁶⁶ CHAPMAN, S. J. MATLAB Programming with applications for engineers. Stanford, Cenage Learning, 2013, p. 521-532.

Figura 10: Variación de la inercia en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$



La variación de la inercia para un elemento finito dentro de este rango, se puede ver en la Figura 11.

Figura 11: Elemento finito en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$



La variación máxima de inercia está dada por:

$$\Delta I = I_o - I_{cj} \quad (81)$$

Sean:

X_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde ζ_{j1}

X_j : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_j : Distancia del punto final del elemento finito medida desde ζ_{j1}

$$\chi_i = X_i - \zeta_{j1} \quad (82)$$

$$\chi_j = X_j - \zeta_{j1} \quad (83)$$

La inercia en cualquier punto se puede hallar por relación de triángulos:

$$\frac{\Delta I_e}{\Delta I} = \frac{\chi_i + \zeta_e}{l_c} \quad (84)$$

$$\Delta I_e = \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) (\chi_i + \zeta_e) \quad (85)$$

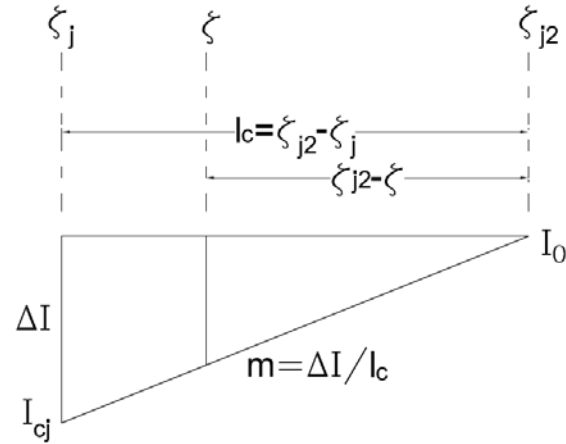
La ecuación (85), da el valor de la inercia calculada dentro del elemento finito, es decir:

$$I_e(\zeta_e) = \Delta I_e = \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) (\chi_i + \zeta_e) \quad (85)$$

7.1.2. Variación de la inercia a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$.

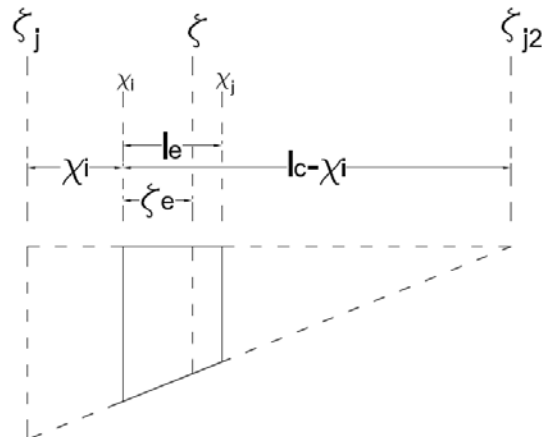
La variación de la inercia a la derecha de la fisura, se puede observar en la Figura 12, está se puede calcular por una relación de triángulos, la inercia varía desde el punto ζ_j , donde está ubicada la fisura y la inercia es menor, hasta el punto ζ_{j2} , en done no hay reducción de inercia por el efecto de la fisura.

Figura 12: Variación de la inercia a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$



La variación de la inercia para un elemento finito dentro de este rango, se puede ver en la Figura 13.

Figura 13: Elemento finito en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$



La variación máxima de inercia está dada por la ecuación (81):

$$\Delta I = I_o - I_{cj}$$

Sean:

X_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-
 χ_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde ζ_j
 X_j : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-
 χ_j : Distancia del punto final del elemento finito medida desde ζ_j

$$\chi_i = X_i - \zeta_j \quad (86)$$

$$\chi_j = X_j - \zeta_j \quad (87)$$

La inercia en cualquier punto se puede hallar por relación de triángulos:

$$\frac{\Delta I_e}{\Delta I} = \frac{(l_c - \chi_i) - \zeta_e}{l_c} \quad (88)$$

$$\Delta I_e = \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) ((l_c - \chi_i) - \zeta_e) \quad (89)$$

La ecuación (89) (85), da el valor de la inercia calculada dentro del elemento finito, es decir:

$$I_e(\zeta_e) = \Delta I_e = \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) ((l_c - \chi_i) - \zeta_e) \quad (89)$$

7.2. VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ

Como se indicó anteriormente, debido a las limitaciones del modelo de fisura propuesto por Sinha, Friswell y Edwards, es necesario replantear las ecuaciones de rigidez Partiendo de la ecuación general (ver ecuación (70)) para hallar los elementos de la matriz de rigidez:

$$[k_{e,crack}]_{rs} = \int_0^{le} E I_e(\zeta) N_{er}''(\zeta) N_{es}''(\zeta) d\zeta$$

Realizando cambio de nomenclatura:

$$[k_{cj}]_{rs} = \int_0^{le} E I_e(\zeta_e) N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) d\zeta_e \quad (90)$$

Donde:

$[k_{e,crack}]_{rs}$: elemento de la matriz de rigidez fisurada, con los subíndices r y s.

E: Módulo de elasticidad

$I_e(\zeta)$: Inercia del elemento finito de la viga fisurada

$N''_{er}(\zeta)$, $N''_{es}(\zeta)$: Segunda derivada de la forma modal del elemento finito, r y s corresponden al primer y segundo subíndice del elemento analizado

Las funciones de forma varían con cada elemento finito, independientemente del tamaño de este. Y la inercia varía dependiendo de la posición del elemento finito analizado respecto a la fisura.

7.2.1. Variación de la rigidez a la izquierda de la fisura, en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$.

De la ecuación rigidez (90), y sustituyendo el valor de la inercia para este intervalo (ecuación (85)):

$$[k_{cj}]_{rs} = \int_0^{le} E \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) (\chi_i + \zeta_e) N''_{er}(\zeta_e) N''_{es}(\zeta_e) \partial \zeta_e \quad (91)$$

Sea:

$$F_1 = \frac{E(I_o - I_{cj})}{l_c} \quad (92)$$

De donde:

$$[k_{cj}]_{rs} = F_1 \left(\chi_i \int_0^{le} N''_{er}(\zeta_e) N''_{es}(\zeta_e) \partial \zeta_e + \int_0^{le} \zeta_e N''_{er}(\zeta_e) N''_{es}(\zeta_e) \partial \zeta_e \right) \quad (93)$$

Se deben resolver dos integrales

$$\int_0^{le} N''_{er}(\zeta_e) N''_{es}(\zeta_e) \partial \zeta_e \quad (94)$$

$$\int_0^{le} \zeta_e N''_{er}(\zeta_e) N''_{es}(\zeta_e) \partial \zeta_e \quad (95)$$

Y reemplazar en la ecuación (93), para encontrar cada elemento de la matriz de rigidez en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$.

7.2.2. Variación de la rigidez a la derecha de la fisura, en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$.
De la ecuación rigidez (90), y sustituyendo el valor de la inercia para este intervalo (ecuación (89)):

$$[k_{cj}]_{rs} = \int_0^{le} E \left(\frac{I_o - I_{cj}}{l_c} \right) ((l_c - \chi_i) - \zeta_e) N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) \partial \zeta_e \quad (96)$$

Ya que de la ecuación (92), se define:

$$F_1 = \frac{E(I_o - I_{cj})}{l_c}$$

De donde:

$$[k_{cj}]_{rs} = F_1 \left((l_c - \chi_i) \int_0^{le} N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) \partial \zeta_e - \int_0^{le} \zeta_e N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) \partial \zeta_e \right) \quad (97)$$

Se deben resolver dos integrales vistas anteriormente en las ecuaciones (94) y (95).

$$\int_0^{le} N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) \partial \zeta_e$$

$$\int_0^{le} \zeta_e N_{er}''(\zeta_e) N_{es}''(\zeta_e) \partial \zeta_e$$

Y reemplazar en la ecuación (97), para encontrar cada elemento de la matriz de rigidez en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$.

7.3. DEDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Para el desarrollo de las ecuaciones de rigidez de cada elemento de la matriz, debemos tener presente las segundas derivadas de las funciones de forma, como se mostró en la sección 4.2, y realizando un cambio de variable de L por le y x por ζ_e :

$$N_{e1}''(\zeta_e) = -\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta_e}{le^3} \quad (98)$$

$$N_{e2}''(\zeta_e) = -\frac{4}{le} + \frac{6\zeta_e}{le^2} \quad (99)$$

$$N_{e3}''(\zeta_e) = \frac{6}{le^2} - \frac{12\zeta_e}{le^3} = -N_{e1}''(\zeta_e) \quad (100)$$

$$N_{e4}''(\zeta_e) = -\frac{2}{le} + \frac{6\zeta_e}{le^2} \quad (101)$$

7.3.1. Elemento $[k_{cj}]_{11}$

1. Primera integral, sustituyendo los valores de la ecuación (98), en la ecuación (94), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{le} N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e &= \int_0^{le} \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta_e}{le^3} \right) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta_e}{le^3} \right) \partial \zeta_e \\ &= \int_0^{le} \left(\frac{36}{le^4} - \frac{144\zeta_e}{le^5} + \frac{144\zeta_e^2}{le^6} \right) \partial \zeta_e \\ \int_0^{le} N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e &= \frac{12}{le^3} \end{aligned} \quad (102)$$

2. Segunda integral, sustituyendo los valores de la ecuación (98), en la ecuación (95), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{le} \zeta_e N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e &= \int_0^{le} \zeta_e \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta_e}{le^3} \right) \left(-\frac{6}{le^2} + \frac{12\zeta_e}{le^3} \right) \partial \zeta_e \\ &= \int_0^{le} \left(\frac{36\zeta_e}{le^4} - \frac{144\zeta_e^2}{le^5} + \frac{144\zeta_e^3}{le^6} \right) \partial \zeta_e \\ \int_0^{le} \zeta_e N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e &= \frac{6}{le^2} \end{aligned} \quad (103)$$

7.3.1.1. Elemento $[k_{cj}]_{11}$ en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$, a la izquierda de la fisura.

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (102) y (103), en la ecuación (93), se obtiene:

$$[k_{cj}]_{11} = F_1 \left(\chi_i \int_0^{le} N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e + \int_0^{le} \zeta_e N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e \right)$$

Ya que de la ecuación (92), se define:

$$F_1 = \frac{E(I_o - I_{cj})}{l_c}$$

Sustituyendo:

$$[k_{cj}]_{11} = F_1 \left(\chi_i \left(\frac{12}{le^3} \right) + \frac{6}{le^2} \right)$$

$$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} \left(2 \left(\frac{\chi_i}{le} \right) + 1 \right)$$

Sea:

$$F_2 = \frac{\chi_i}{le} \quad (104)$$

Entonces para el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$:

$$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} (2F_2 + 1) \quad (105)$$

7.3.1.2. Elemento $[k_{cj}]_{11}$ en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$, a la derecha de la fisura.
Sustituyendo los valores de las ecuaciones (102) y (103), en la ecuación (97), se obtiene:

$$[k_{cj}]_{11} = F_1 \left((l_c - \chi_i) \int_0^{le} N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e - \int_0^{le} \zeta_e N_{e1}''(\zeta_e) N_{e1}''(\zeta_e) \partial \zeta_e \right)$$

Ya que de la ecuación (92), se define:

$$F_1 = \frac{E(I_o - I_{cj})}{l_c}$$

Sustituyendo:

$$[k_{cj}]_{11} = F_1 \left((l_c - \chi_i) \left(\frac{12}{le^3} \right) - \frac{6}{le^2} \right)$$

$$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} \left(2 \left(\frac{l_c - \chi_i}{le} \right) - 1 \right)$$

Sea:

$$F_3 = \frac{l_c - \chi_i}{le} \quad (106)$$

Entonces para el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$:

$$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} (2F_3 - 1) \quad (107)$$

La deducción de los elementos $[k_{cj}]_{12}$, $[k_{cj}]_{14}$, $[k_{cj}]_{22}$, $[k_{cj}]_{24}$ y $[k_{cj}]_{44}$ se realizó de manera similar y se resumen en las Tablas 16 y 17.

7.4. RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE RIGIDEZ

Las ecuaciones de rigidez, teniendo en cuenta el efecto de las fisuras para cualquier tipo de división de elementos finitos está dada por la ecuación (61):

$$K_{e,crack} = K_e - K_{cj}$$

La matriz de rigidez sin fisurar está dada por la ecuación (62):

$$K_e = \frac{EI_o}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

La reducción de rigidez por las fisuras está dada por la ecuación (63):

$$K_{cj} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Donde,

K_e = Matriz de rigidez sin fisurar.

K_{cj} = Matriz de reducción de rigidez debida a la fisura.

$K_{e,crack}$ = Matriz de rigidez de elemento e, teniendo en cuenta el efecto de la fisura.

Para un elemento finito de cualquier longitud, la longitud crítica (ecuación (60)), inercia sin fisurar (ecuación (79)) e Inercia en el punto de la fisura (ecuación (80)), están dadas por:

$$l_c = 1.5d$$

$$I_o = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{cj} = \frac{b(d - d_{cj})^3}{12}$$

Siendo,

l_c = longitud critica, longitud en la que se desarrolla la reducci3n de inercia por la fisura.

I_o = Momento de inercia de la viga sin fisurar.

I_{cj} = Momento de inercia de la viga en la fisura j.

b = Ancho de la viga.

d = Altura de la viga.

d_{cj} = Altura de la fisura j.

Ya que de la ecuaci3n (92), se define:

$$F_1 = \frac{E(I_o - I_{cj})}{l_c}$$

7.4.1. Variaci3n de la rigidez en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$

Sean:

X_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde ζ_{j1}

X_j : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_j : Distancia del punto final del elemento finito medida desde ζ_{j1}

De la ecuaci3n (82):

$$\chi_i = X_i - \zeta_{j1}$$

De la ecuaci3n (83):

$$\chi_j = X_j - \zeta_{j1}$$

Ya que de la ecuaci3n (104), se define:

$$F_2 = \frac{\chi_i}{le}$$

Los elementos de la matriz de rigidez en el intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$, se resumen en la Tabla 16:

Tabla 16: Elementos de la matriz de reducción de rigidez para un elemento de viga fisurada, por el modelo extendido de Sinha, Friswell y Edwards Ecuaciones a la izquierda de la fisura, intervalo $\zeta_{j1} - \zeta_j$

$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} (2F_2 + 1)$	De la ecuación (105)
$[k_{cj}]_{12} = \frac{2F_1}{le} (3F_2 + 1)$	(108)
$[k_{cj}]_{14} = \frac{2F_1}{le} (3F_2 + 2)$	(109)
$[k_{cj}]_{22} = F_1(4F_2 + 1)$	(110)
$[k_{cj}]_{24} = F_1(2F_2 + 1)$	(111)
$[k_{cj}]_{44} = F_1(4F_2 + 3)$	(112)

7.4.2. Variación de la rigidez en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$

Sean:

X_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_i : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde ζ_j

X_j : Distancia del punto inicial del elemento finito medida desde el origen-

χ_j : Distancia del punto final del elemento finito medida desde ζ_j

De la ecuación (86):

$$\chi_i = X_i - \zeta_j$$

De la ecuación (87):

$$\chi_j = X_j - \zeta_j$$

Ya que de la ecuación (106) se define:

$$F_3 = \frac{l_c - \chi_i}{le}$$

Los elementos de la matriz de rigidez en el intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$, se resumen en la Tabla 17:

Tabla 17: Elementos de la matriz de reducción de rigidez para un elemento de viga fisurada, por el modelo extendido de Sinha, Friswell y Edwards Ecuaciones a la derecha de la fisura, intervalo $\zeta_j - \zeta_{j2}$

$[k_{cj}]_{11} = \frac{6F_1}{le^2} (2F_3 - 1)$	De la ecuación (107)
$[k_{cj}]_{12} = \frac{3F_1}{le} (3F_3 - 1)$	(113)
$[k_{cj}]_{14} = \frac{3F_1}{le} (3F_3 - 2)$	(114)
$[k_{cj}]_{22} = F_1(4F_3 - 1)$	(115)
$[k_{cj}]_{24} = F_1(2F_3 - 1)$	(116)
$[k_{cj}]_{44} = F_1(4F_3 - 3)$	(117)

7.5. CREACION DE NODOS ADICIONALES

Cómo se vio anteriormente en la Figura 9, (pág. 90), en el planteamiento de las nuevas ecuaciones es necesario la creación de nodos extra en los puntos correspondientes a la posición de la fisura, ζ_j , y los puntos extremos de la reducción de rigidez debida a la fisura, a la izquierda ζ_{j1} y a la derecha ζ_{j2} , de la misma.

Para la creación de estos nodos, se utiliza la rutina NodoExtra.m, cuyo código fuente se encuentra en el Anexo C3. NodoExtra.m, antes de crear dichos nodos se debe revisar si la posición dada a la fisura está dentro de la longitud de la viga o se cometió un error de digitación; si el nodo coincide con un nodo existente, caso en el cual no debe adicionarse; o si está lo suficientemente cercano a los extremos de la viga, como para que la reducción de rigidez se desarrolle por fuera de la misma, ver sección 7.6, (pág. 103), o se presente otra fisura lo suficientemente cercana para que se presente superposición de efectos de reducción de la rigidez, ver sección 7.7, (pág. 105).

El código fuente con el proceso de creación de nodos se encuentra debidamente comentado en el Anexo C3. NodoExtra.m

7.6. EL PROBLEMA DE LA CERCANÍA A LOS BORDES DE LA VIGA

Recordando que, l_c es la distancia a la cual se desarrolla la reducción de inercia desde la posición de la fisura y a cada lado de la misma, de la ecuación (60):

$$l_c = \frac{d}{\alpha} = \frac{d}{0.667} \approx 1.5d$$

Siendo d la altura de la viga, tal como se explicó en el numeral 6.2. (pág. 69).

Como se puede observar en la Figura 14, cuando la fisura se encuentra a una distancia menor a l_c , de los extremos de la viga, parte de la reducción de inercia se desarrollaría por fuera de la misma, lo cual es obviamente ilógico.

Por esta razón es necesario en estos casos, limitar el rango en el cual se reduce la rigidez, en la función RangoFisura.m, Ver Anexo C2, se programó que en el caso que por proximidad al inicio o al final de la viga el rango en el cual se reduce la rigidez sea 0 y la longitud de la viga, respectivamente, como se muestra en la Figura 15.

Figura 14: Ubicación de fisuras en los extremos de la viga

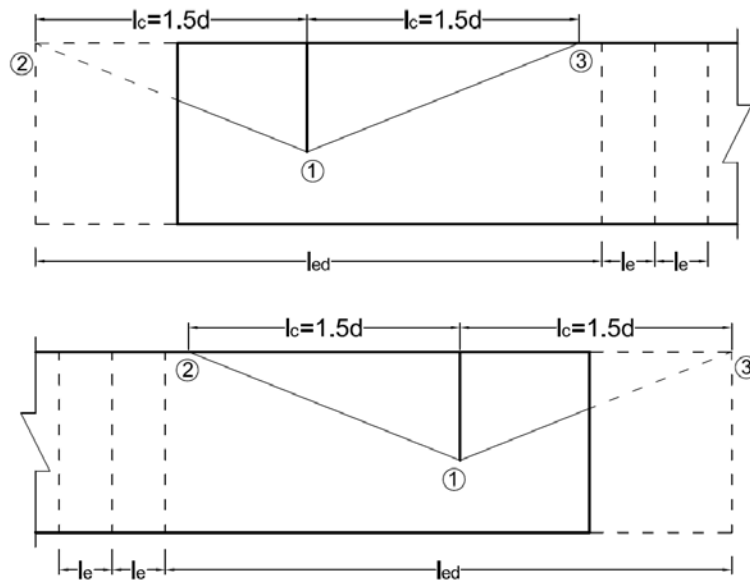
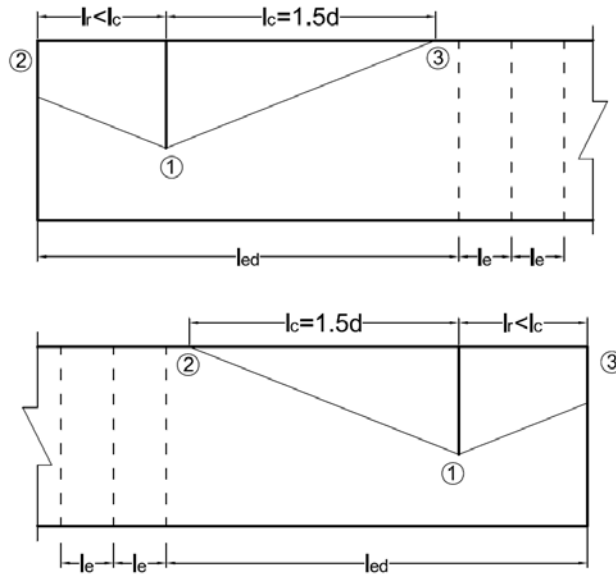


Figura 15: Rango para calcular la reducción de rigidez para fisuras ubicadas en los extremos de la viga



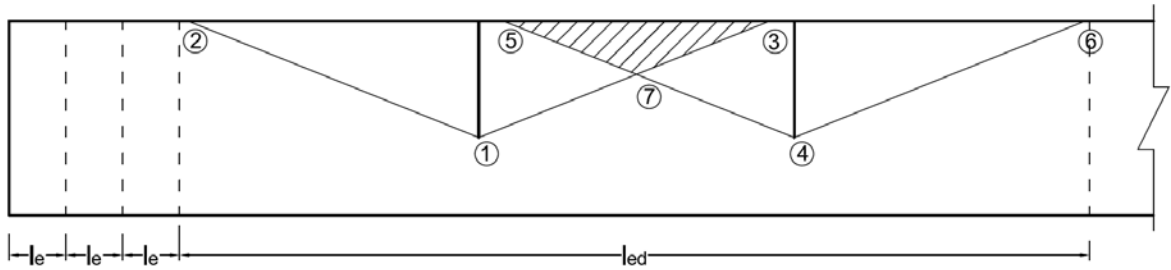
7.7. EL PROBLEMA DE LA CERCANÍA ENTRE FISURAS

Tal cómo se resume en la sección 6.6, (pág. 87), las ecuaciones obtenidas por Sinha, Friswell y Edwards permiten modelar únicamente una fisura dentro de cada elemento finito, con las adicionales limitaciones en cuanto al tamaño de los elementos finitos que contengan una fisura.

Esta situación limita la cantidad de fisuras que se pueden modelar y la ubicación de las mismas. El modelar más de una fisura dentro de un mismo elemento crea la dificultad de superposición de efectos de reducción de inercia, tal como se aprecia en la Figura 16.

El área achurada en la Figura 16, corresponde a la superposición de efectos de reducción de inercia, no tener en cuenta esta situación puede llevar a resultados erróneos. Y además las ecuaciones de Sinha, Friswell y Edwards no son válidas para este caso.

Figura 16: Superposición de efectos por dos fisuras cercanas entre sí



Si suponemos que estos efectos se suman, tendríamos una situación como se observa en la Figura 17, el cual parece ser el comportamiento real de la viga en este caso, sin embargo en el caso en que las fisuras se encuentren muy cercanas entre sí, se presentaría la situación mostrada en la Figura 18, llegándose a presentar incluso una reducción de inercia mayor a la inercia total de la sección de viga.

Figura 17: Suma de efectos por dos fisuras cercanas entre sí

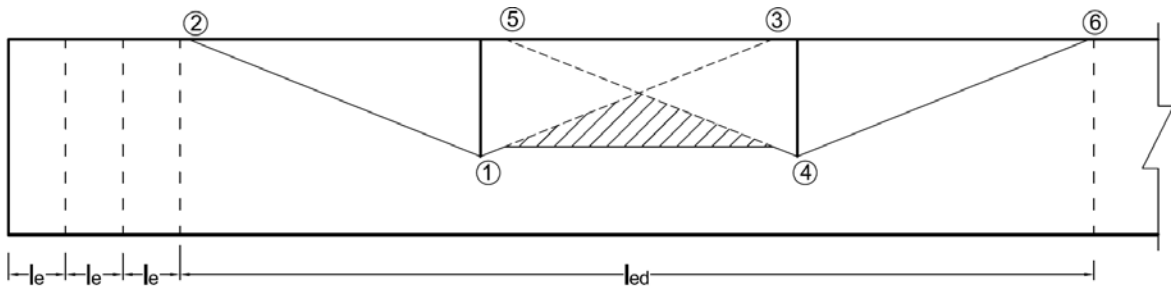
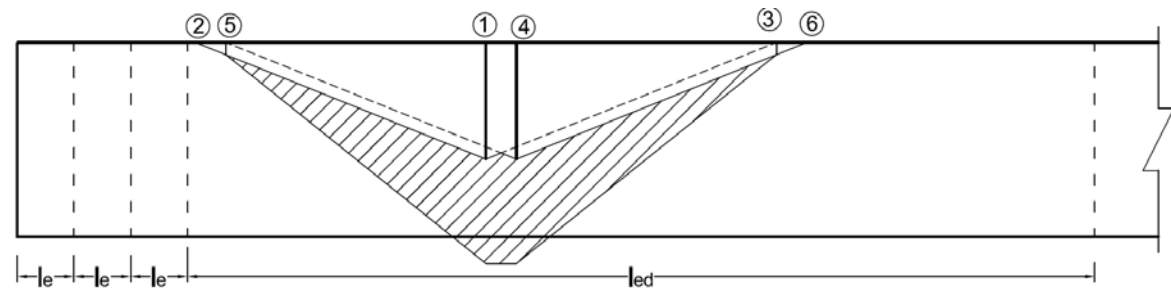


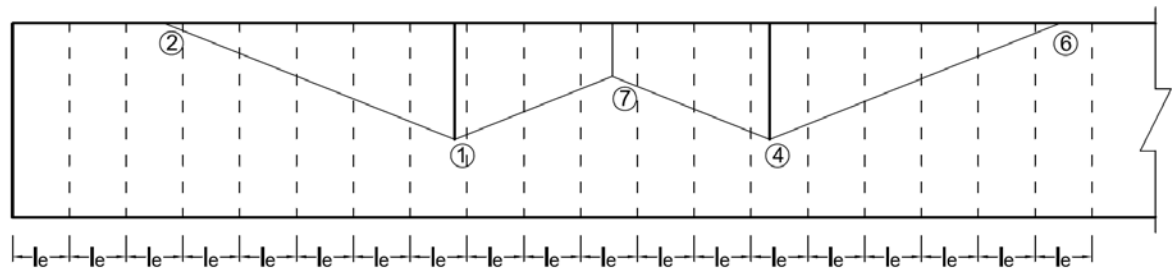
Figura 18: Suma de efectos por dos fisuras muy cercanas entre sí



Dada la imposibilidad de tener una reducción de inercia mayor a la inercia total de la sección recta de la viga, en este trabajo se utilizó el planteamiento que se observa

en la Figura 19, en el cual se halla el punto en que se intersectan las reducciones de inercia de cada una de las fisuras y en este punto agregar un nodo extra adicional, (ver sección 7.5, pág. 103). De forma tal que no se sumen las reducciones de rigidez de las fisuras.

Figura 19: Planteamiento para superposición de efectos por dos fisuras cercanas



La hipótesis sobre la que se trabaja en este caso de fisuras cercanas entre sí, es que existe un punto en el cual se intersectan las reducciones de rigidez, y que los efectos de la reducción de rigidez no se suman con los de la otra fisura, es decir como aparece en la Figura 19, entre el punto 1 y 7, se reduce la inercia, de acuerdo a los parámetros de la fisura de la izquierda, y entre los puntos 7 y 4, se reduce la inercia de acuerdo a los parámetros de la fisura de la derecha, sin que se presente superposición de los efectos de reducción de inercia.

Como se muestra en la Figura 19, se agregaría un nodo en el punto 7, en la función RangoFisura.m, Ver Anexo C2, se programó que en el caso que dos o más fisuras estén próximas entre sí, encuentre el punto de intersección de las reducciones de rigidez y se agrega al listado de nodos.

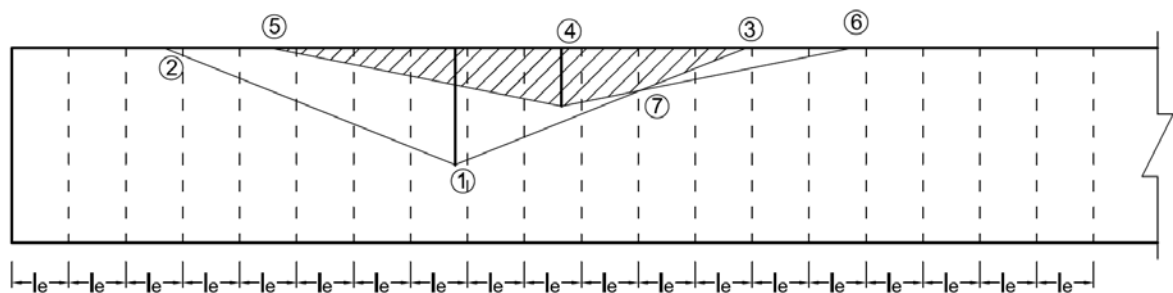
Se aclara que esta hipótesis se presenta como una opción cuya validez debe ser comprobada de manera experimental, en el caso del presente trabajo los experimentos en laboratorio están por fuera del alcance del mismo y no se llevaron a cabo. Por lo que posiblemente en trabajos posteriores se puedan realizar experimentos de laboratorio que comprueben la validez o no de esta hipótesis y en caso de no ser válida plantear otra hipótesis que se acerque a los resultados experimentales.

Se limita en este caso el programa AVIF en el sentido que las fisuras que estén cercanas entre sí, tengan todas una misma altura para el modelamiento, buscando no obtener resultados erróneos, en casos donde una fisura muy grande este muy cercana a otra muy pequeña, lo cual puede llegar a generar casos difíciles de

modelar, como se muestra en la Figura 20, caso este que no se presentaría si las fisuras fueran de igual altura.

Es importante recordar que los triángulos dibujados en estas vigas, representan la reducción en la inercia por el efecto de la fisura, es decir, el punto más bajo del triángulo, mostrado en la Figura 19, por los números 1 y 4, no representa la altura de la fisura, si no la reducción de la inercia en el punto de la fisura.

Figura 20: Posible superposición de efectos por dos fisuras cercanas, con alturas de fisura diferente



7.8. ELIMINACIÓN DE RESULTADOS EN LOS NODOS ADICIONALES

Cómo se mencionó anteriormente en las secciones 7.5. y 7.7., para poder aplicar las ecuaciones de Sinha, Friswell y Edwards, replanteadas, ver sección 7.4., es necesario la creación de nodos adicionales, para la posición de las fisuras y sus puntos extremos de reducción de rigidez, y para aquellos casos en los cuales existan fisuras cercanas entre sí.

Estos nodos adicionales hacen que las longitudes de los elementos finitos no sean todas iguales, lo que plantea un problema a la hora de aplicar las ecuaciones de derivación numérica de Taylor⁶⁷, ver sección 3.3 (pág. 32), ya que estas requieren que los puntos a derivar estén espaciados todos de manera uniforme.

Para solucionar esta dificultad en la rutina *VigaFisurada.m*, (ver Anexo B3), se crea una variable, con los nodos iniciales, antes de agregar nodos extras, de nombre *NodosIniciales*. Posteriormente en la misma rutina del programa AVIF se hace una comparación, con la función *setdiff*, entre los nodos iniciales y los nodos después de adicionar nodos extra, obteniendo así el listado de nodos adicionados y su posición dentro del listado de nodos.

⁶⁷ CHAPRA, S. C. Op. cit., p. 525-529.

Con esta información después de obtener los resultados de las deflexiones y las formas modales, se eliminan los valores de las deflexiones y las formas modales, en esos nodos extra, volviendo a tener así datos igualmente espaciados, pudiendo utilizar las ecuaciones de Taylor para derivación numérica, (ver Anexo G2. Derivada2Taylor4p.m).

8. VALIDACIÓN DEL MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

Para la validación del modelo propuesto en el capítulo 7, se emplearon los ejemplos presentados en el trabajo de Sinha, Friswell y Edwards⁶⁸ en el cual analizaron 3 casos de vigas de una sola luz. En la Tabla 18 se describen las propiedades de materiales, las condiciones de apoyo y la posición y tamaño de las fisuras de estos casos:

Tabla 18: Casos experimentales analizados por Sinha, Friswell y Edwards

	Caso 1	Caso 2a	Caso 2b	Caso 3
Condiciones de apoyo	Empotramiento parcial	Libre – Libre	Libre – Libre	Libre – Libre
Material:	Aluminio	Aluminio	Aluminio	Acero
Módulo de Young, E	69.79 GN/m ²	69.79 GN/m ²	69.79 GN/m ²	203.91 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	2600 kg/m ³	2600 kg/m ³	2600 kg/m ³	7800 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33	0.33	0.33	0.33
Longitud de la viga, L	996 mm	1832 mm	1832 mm	1330 mm
Ancho de la viga, b	50 mm	50 mm	50 mm	25.30 mm
Altura de la viga, h	25 mm	25 mm	25 mm	25.30 mm
Carga por peso propio w	32 N/m	32 N/m	32 N/m	49 N/m
Rigidizadores de apoyo	kt = 26.5 MN/m ko = 150 kN/rad	N.A.	N.A.	N.A.
# Elementos Finitos	300 E.F.	300 E.F.	400 E.F.	400 E.F.
	4mm	4mm		4mm
d _{c1}	8mm	8mm	12mm	8mm
	12mm	12mm		12mm
X ₁	275mm	595mm	595mm	
			4mm	
d _{c2}			8mm	
			12mm	
X ₂			800mm	

Fuente: SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 21-22.

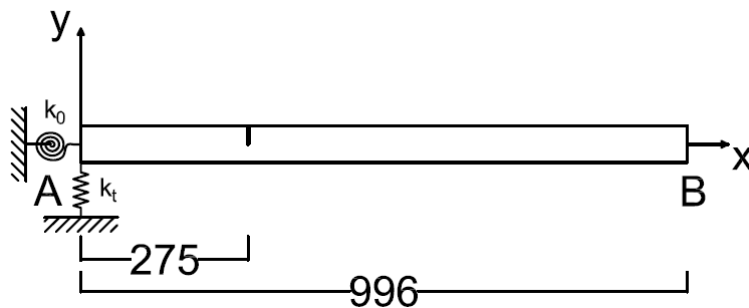
⁶⁸ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 21-25.

8.1. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA MODELO DE FISURA EXTENDIDO

La validación del modelo propuesto se realizó con los datos experimentales y del modelo numérico de frecuencias naturales obtenidos por los tres casos estudiados por Sinha, Friswell y Edwards⁶⁹, y cuyos datos de entrada están resumidos en la Tabla 18, a continuación se describen en detalle estos casos.

8.1.1. Caso 1 Sinha, Friswell y Edwards. Este caso consiste en una viga en aluminio, con un empotramiento parcial, realizado con un resorte rotacional y otro lineal. Tal como se puede apreciar en la Figura 21. Se analizaron tres tamaños de fisura, $d_{c1}=4\text{mm}$, $d_{c1}=8\text{mm}$, $d_{c1}=12\text{mm}$; ubicadas a $X_1=275\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga.

Figura 21: Esquema de viga, primer caso de Sinha, Friswell y Edwards



En el programa AVIF se simuló los resortes como una modificación de la matriz de rigidez⁷⁰, tal como se explicó en la sección 4.5. (pág. 47). En la Tabla 18, caso 1, pueden observarse las características de la viga analizada.

Los datos de entrada del programa AVIF se pueden consultar en los Anexos (ver anexos B14. EntradaDatosSFECaso1A.m, B15. EntradaDatosSFECaso1B.m y B16. EntradaDatosSFECaso1C.m), para una fisura ubicada a $X_1 = 275\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga y con tamaños de viga: $d_{c1} = 4\text{mm}$, $d_{c1} = 8\text{mm}$ y $d_{c1} = 12\text{mm}$, respectivamente.

⁶⁹ Ibíd., p. 21-25.

⁷⁰ YANG, T. Y. Op. cit., p. 135-137.

Los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de fisuras se pueden ver en las Gráficas 7 a la 11, se pueden encontrar variaciones bruscas en las curvaturas, correspondientes al efecto que tiene la fisura sobre la rigidez de la viga.

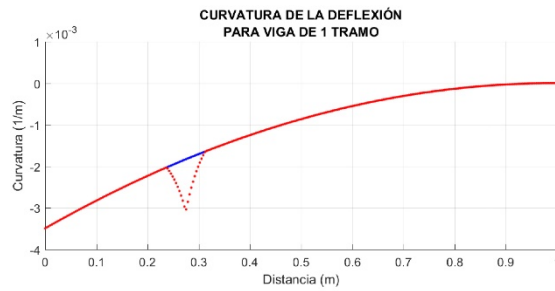
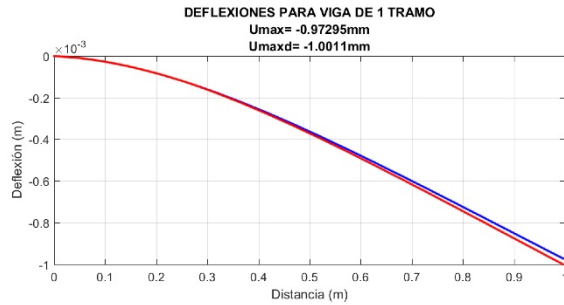
Los datos obtenidos de frecuencias naturales se tabularon y compararon con los resultados analíticos del modelo matemático, (ver Tabla 19, pág. 112), y experimentales medidos en laboratorio, (ver Tabla 20, pág. 118) obtenidos por Sinha, Friswell y Edwards⁷¹.

Tabla 19: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

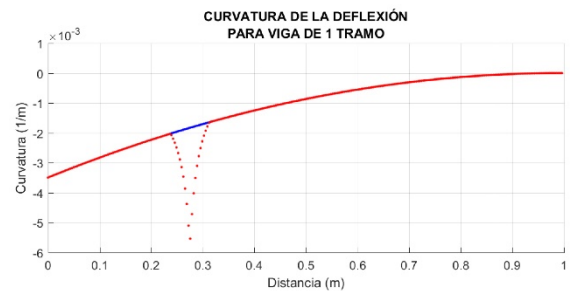
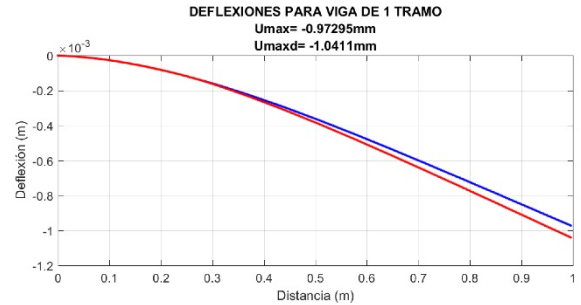
Frecuencias naturales (Hz)			
dc1 = 4mm en X ₁ = 275mm			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	19,641	19,6116	0,15%
2	124,106	124,0543	0,04%
3	340,758	340,1251	0,19%
4	663,02	662,5824	0,07%
dc1 = 8mm en X ₁ = 275mm			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	19,382	19,2228	0,82%
2	123,689	123,427	0,21%
3	336,094	333,1432	0,88%
4	660,584	658,8786	0,26%
dc1 = 12mm en x ₁ = 275mm			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	19,164	18,6939	2,45%
2	123,343	122,5916	0,61%
3	332,383	324,4805	2,38%
4	658,641	654,5241	0,63%

⁷¹ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 22.

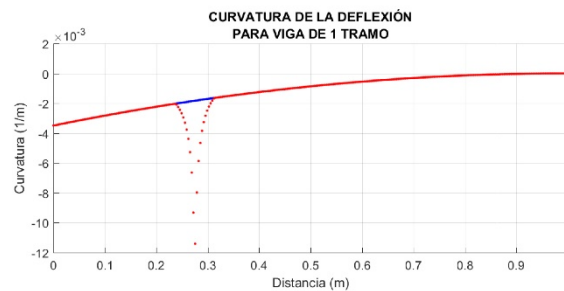
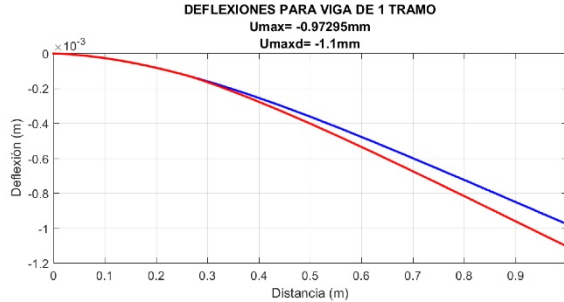
Gráfica 7: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards



(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$



(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$



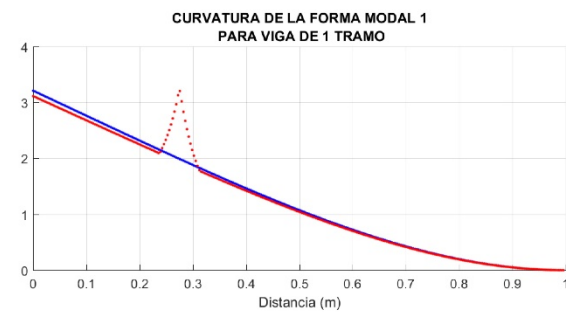
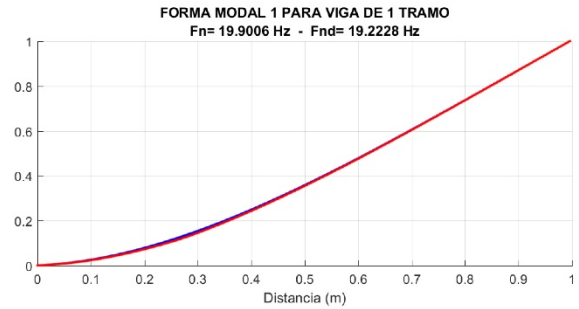
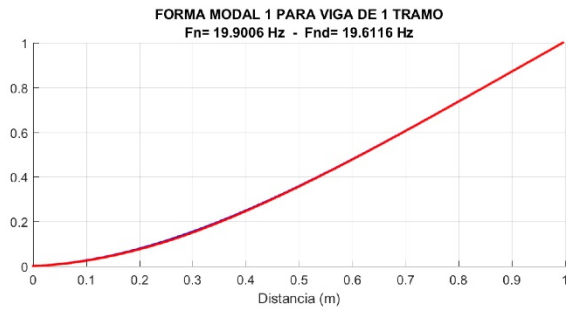
(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

• Deflexión sin fisura
• Deflexión con fisura

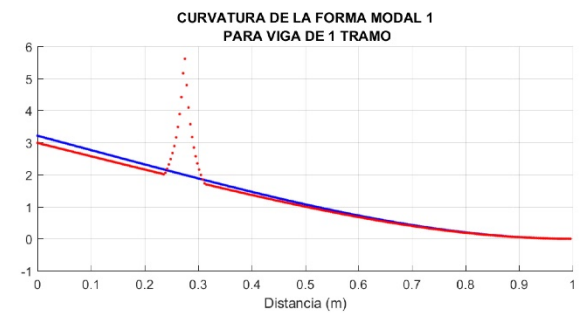
• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

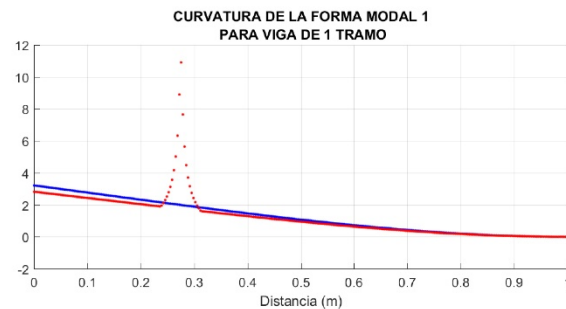
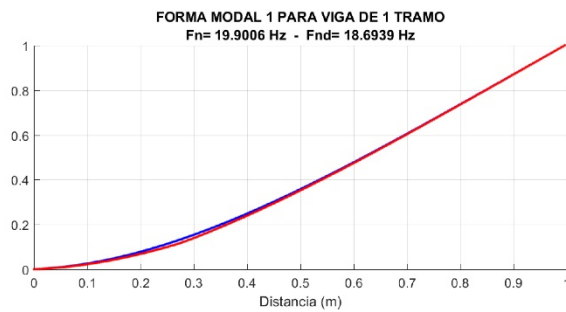
Gráfica 8: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards



(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$



(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$

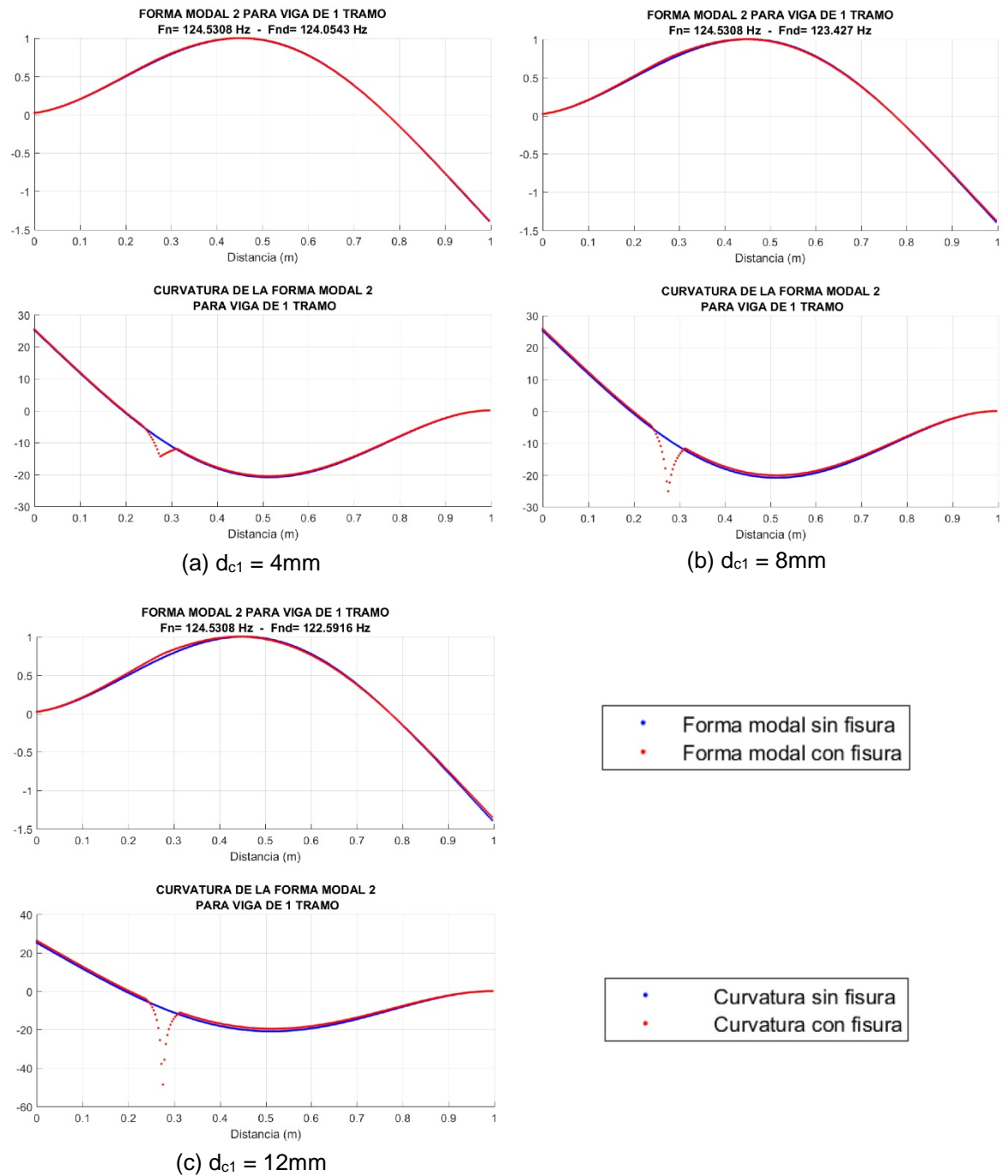


(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

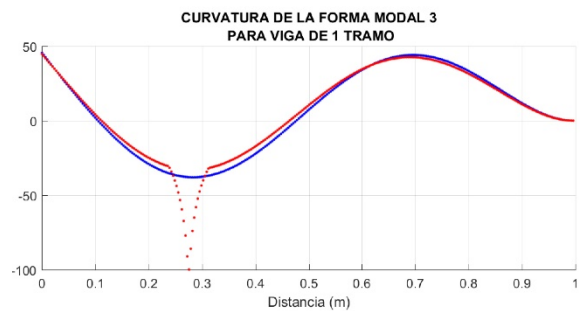
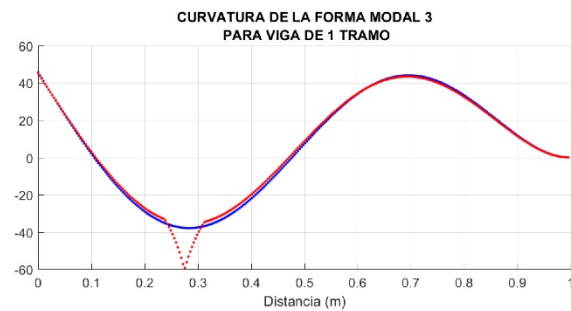
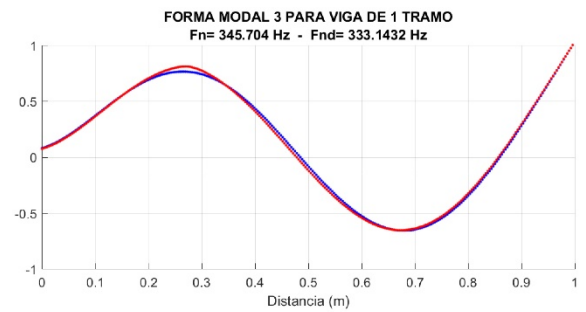
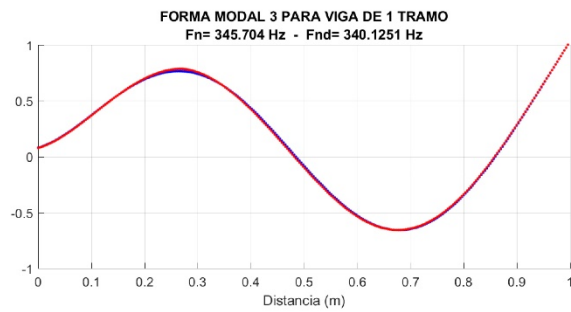
• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura

• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

Gráfica 9: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards

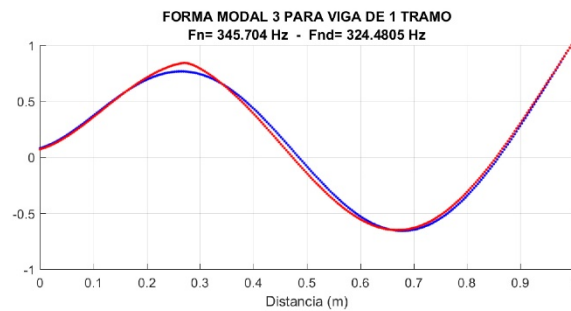


Gráfica 10: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards

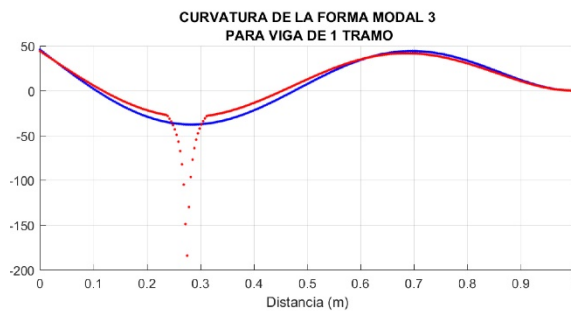


(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$

(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$



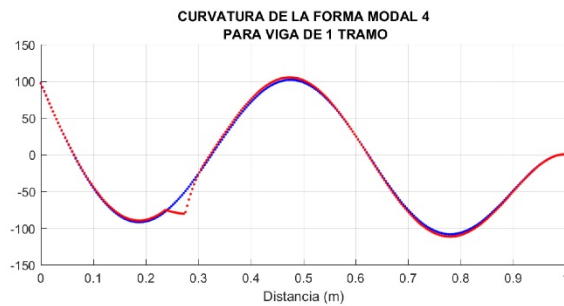
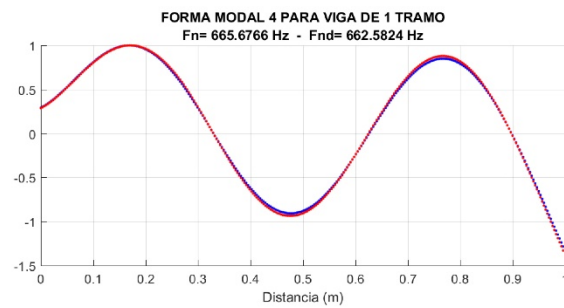
• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura



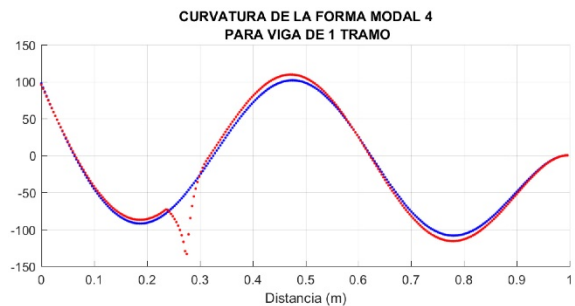
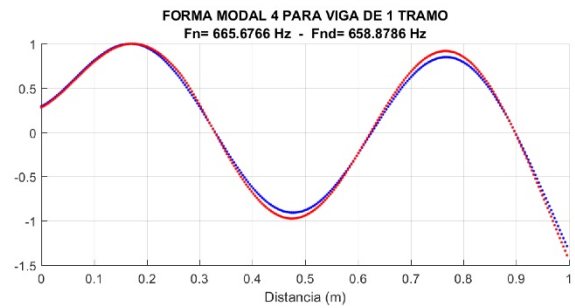
• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

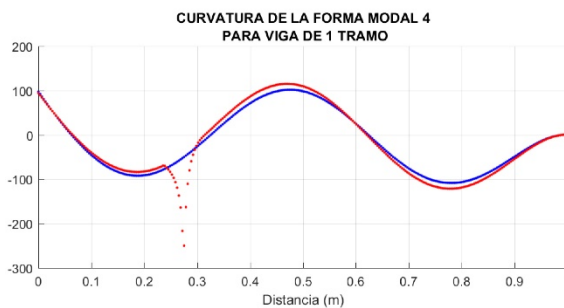
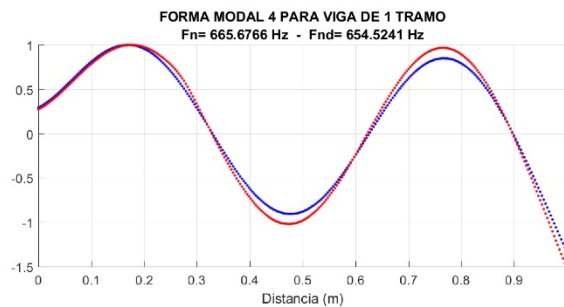
Gráfica 11: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards



(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$



(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$



(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura

• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

Tabla 20: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 1 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 4\text{mm}$ en $X_1 = 275\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	20	19,6116	1,94%
2	124,25	124,0543	0,16%
3	340,813	340,1251	0,20%
4	662,813	662,5824	0,03%
$d_{c1} = 8\text{mm}$ en $X_1 = 275\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	19,75	19,2228	2,67%
2	124,063	123,427	0,51%
3	336,875	333,1432	1,11%
4	662,313	658,8786	0,52%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 275\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	19	18,6939	1,61%
2	123	122,5916	0,33%
3	326,563	324,4805	0,64%
4	660,313	654,5241	0,88%

Se puede observar similitud de los datos obtenidos experimentalmente, por Sinha, Friswell y Edwards (SFE), con los obtenidos por el modelo de fisura extendido planteado, (ver Tablas 19 y 20).

Para este caso, en las gráficas 7 a 11, se observa que la presencia de fisuras origina un cambio brusco en las curvaturas tanto de la deflexión como de las formas modales. En este último punto, la presencia de las fisuras se evidencia en las cuatro formas modales estudiadas.

8.1.2. Caso 2a Sinha, Friswell y Edwards. El segundo caso corresponde a una viga libre – libre, en aluminio, (viga sin apoyos que es suspendida de dos cables). Tal como se puede apreciar en la Figura 22, se analizaron tres tamaños de fisura, $d_{c1}=4\text{mm}$, $d_{c1}=8\text{mm}$, $d_{c1}=12\text{mm}$; ubicadas a $X_1=595\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga.

Figura 22: Esquema de viga, segundo caso de Sinha, Friswell y Edwards, con una sola fisura



En la Tabla 18, (pág. 110 , Caso 2a), pueden observarse las características de la viga analizada.

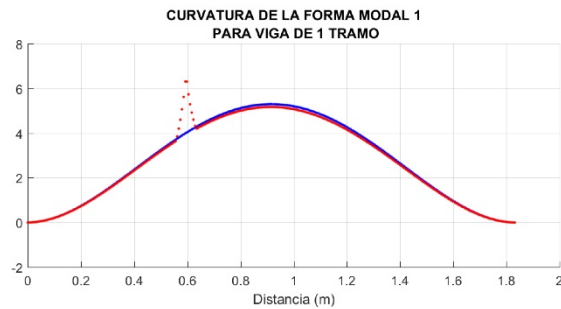
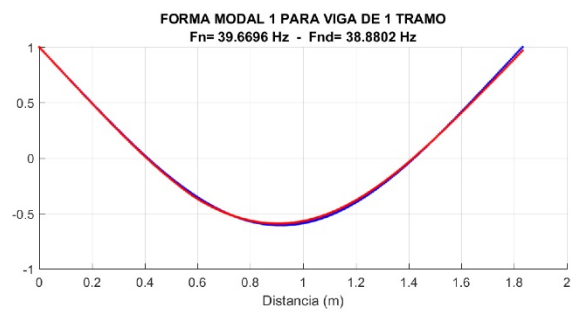
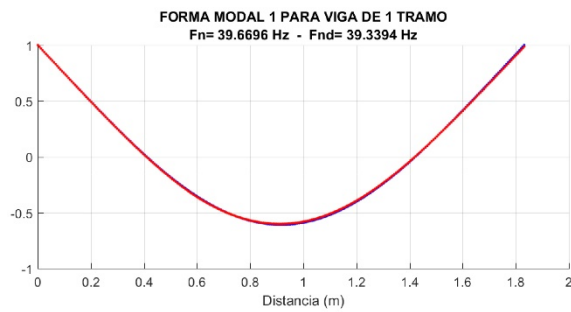
Los datos de entrada del programa AVIF se pueden consultar en los Anexos (ver anexos B17. EntradaDatosSFECaso2A.m, B18. EntradaDatosSFECaso2B.m y B19. EntradaDatosSFECaso2C.m), para una fisura ubicada a $X_1 = 595\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga y con tamaños de viga: $d_{c1} = 4\text{mm}$, $d_{c1} = 8\text{mm}$ y $d_{c1} = 12\text{mm}$, respectivamente.

Los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de fisuras se pueden ver en las Gráficas 12 a 16, se pueden observar las variaciones bruscas en las curvaturas, correspondientes al efecto que tiene la fisura sobre la rigidez de la viga.

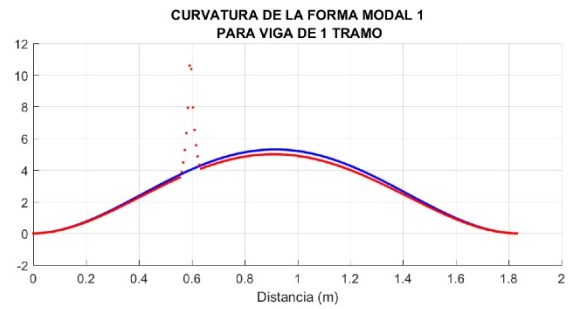
Los datos obtenidos de frecuencias naturales se tabularon y compararon con los resultados numéricos del modelo matemático, (ver Tabla 21, pág. 125), y experimentales medidos en laboratorio, (ver Tabla 22, pág. 126) obtenidos por Sinha, Friswell y Edwards⁷².

⁷² Ibíd., p. 24.

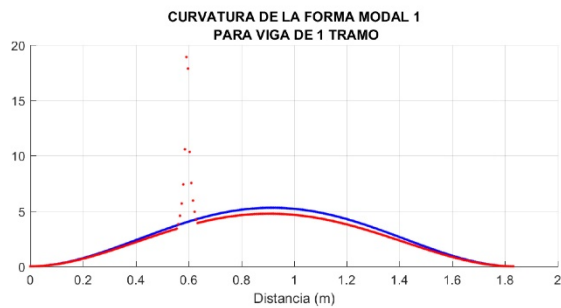
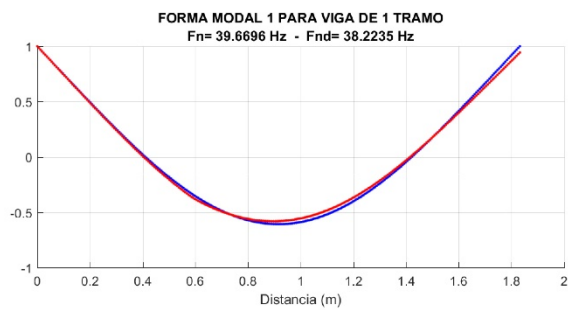
Gráfica 12: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards



(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$



(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$

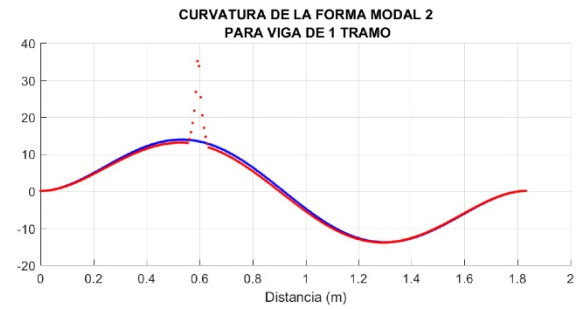
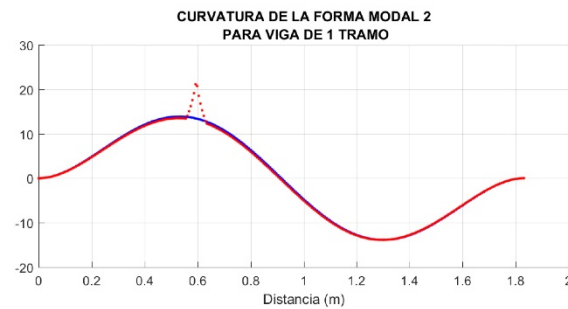
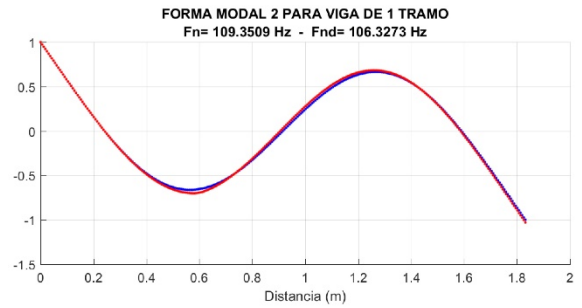
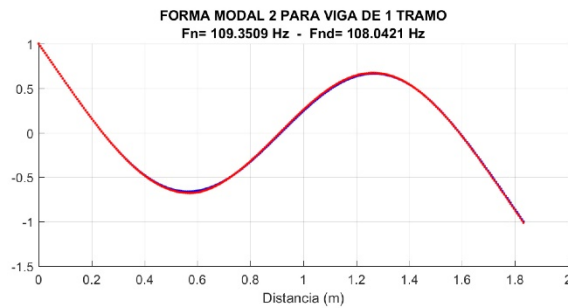


(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura

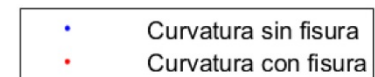
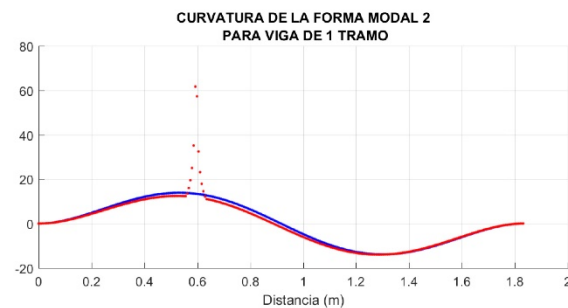
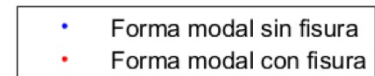
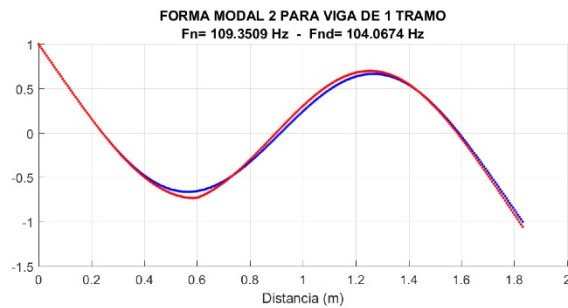
• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

Gráfica 13: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards



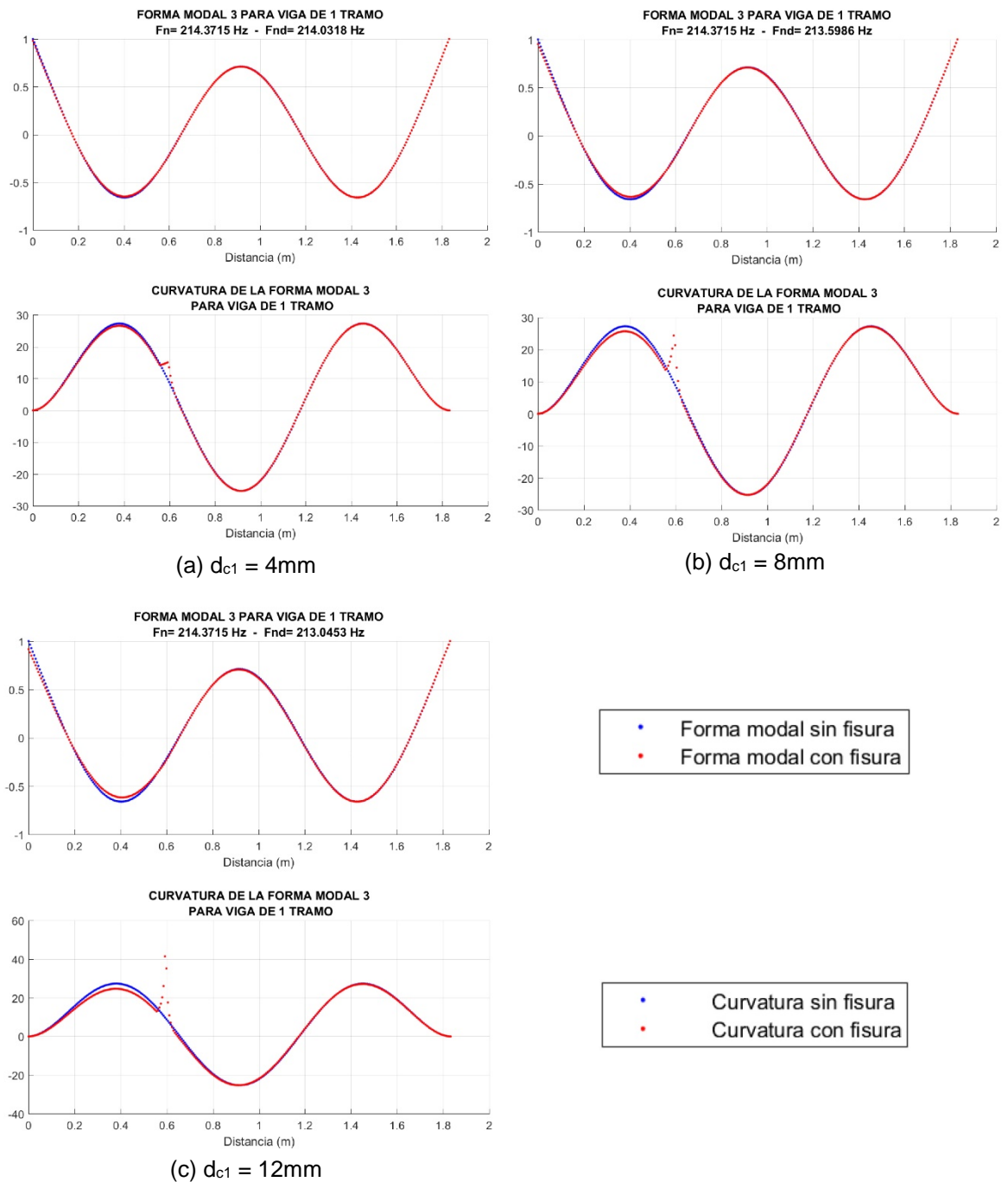
(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$

(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$

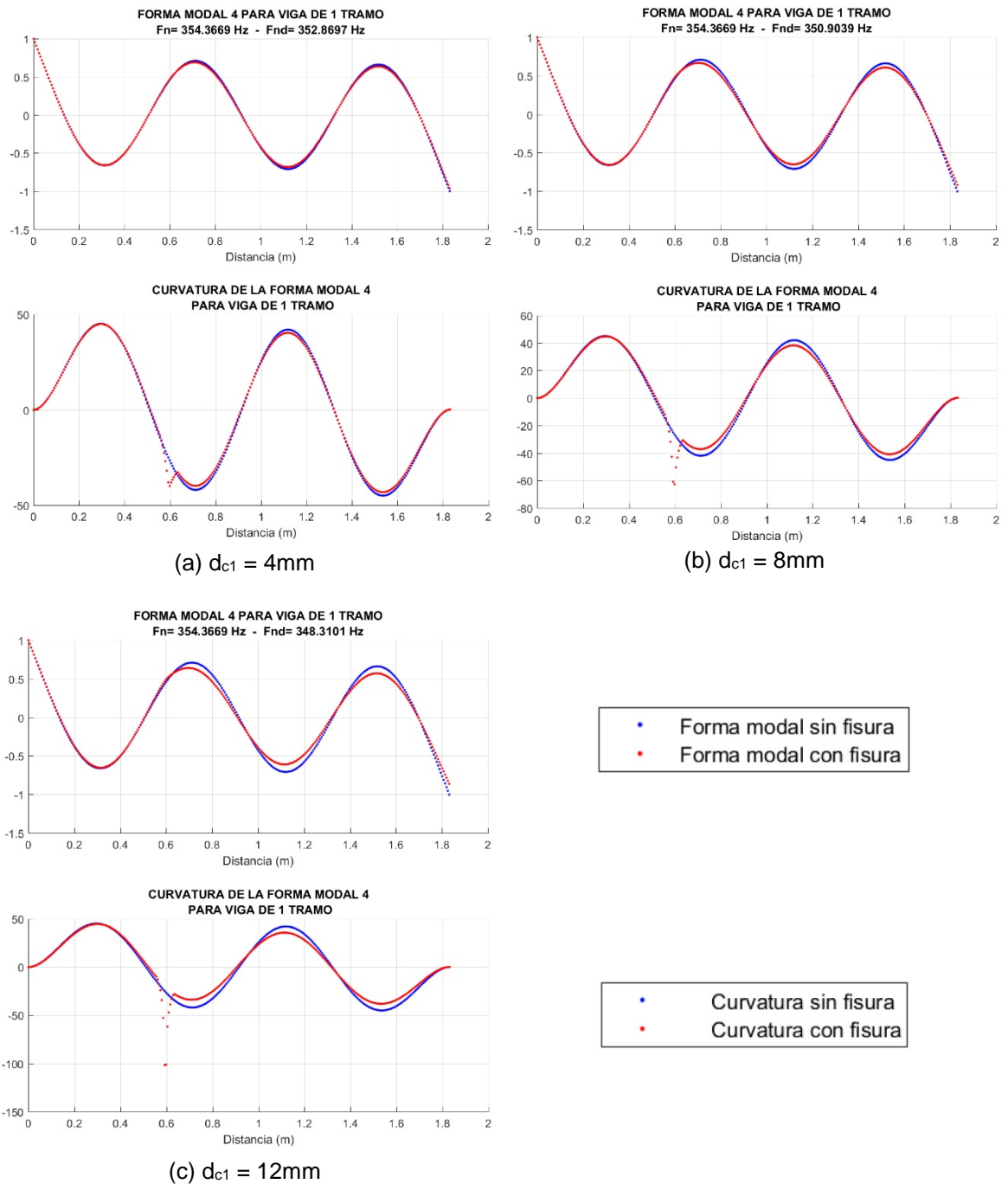


(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

Gráfica 14: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards



Gráfica 15: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards



Gráfica 16: Quinta Forma Modal y Curvatura de la Quinta Forma Modal, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards

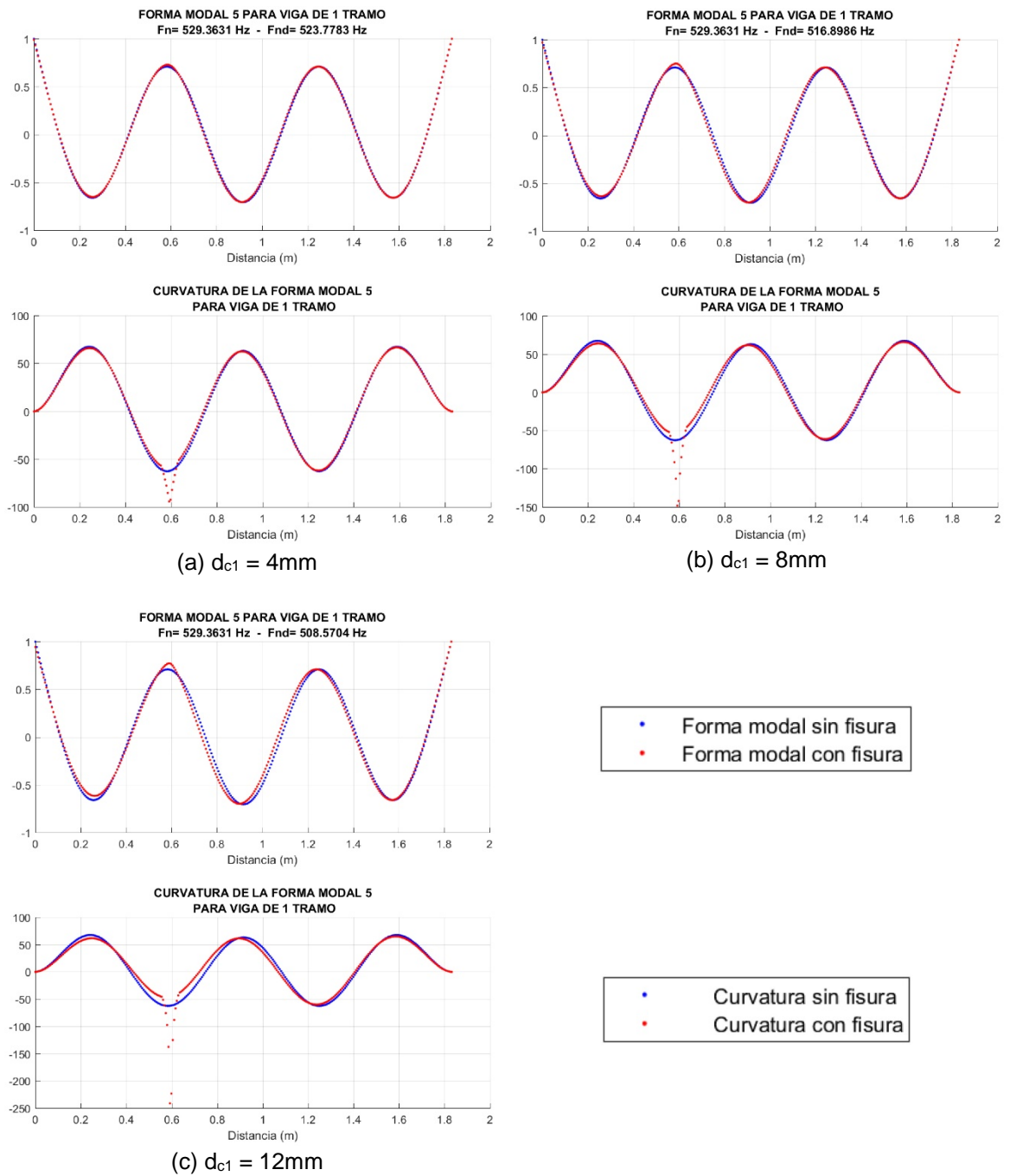


Tabla 21: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 4\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	39,379	39,3394	0,10%
2	108,206	108,0421	0,15%
3	214,087	214,0318	0,03%
4	353,107	352,8697	0,07%
5	524,696	523,7783	0,17%
$d_{c1} = 8\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	39,094	38,8802	0,55%
2	107,132	106,3273	0,75%
3	213,825	213,5986	0,11%
4	351,872	350,9039	0,28%
5	520,452	516,8986	0,68%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	38,857	38,2235	1,63%
2	106,278	104,0674	2,08%
3	213,622	213,0453	0,27%
4	350,881	348,3101	0,73%
5	517,219	508,5704	1,67%

Tabla 22: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 2a de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 4\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	39,688	39,3394	0,88%
2	109,063	108,0421	0,94%
3	215	214,0318	0,45%
4	354,688	352,8697	0,51%
5	527,188	523,7783	0,65%
$d_{c1} = 8\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	39,375	38,8802	1,26%
2	108,125	106,3273	1,66%
3	214,688	213,5986	0,51%
4	353,438	350,9039	0,72%
5	522,812	516,8986	1,13%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	39,063	38,2235	2,15%
2	105,938	104,0674	1,77%
3	214,375	213,0453	0,62%
4	350,625	348,3101	0,66%
5	513,125	508,5704	0,89%

De los resultados reportados en las Tablas 21 y 22, se puede concluir que existe similitud de los datos obtenidos experimentalmente y numéricamente en el trabajo de Sinha, Friswell y Edwards (SFE), con los obtenidos por el modelo de fisura extendido, (ver capítulo 7, pág. 89).

Finalmente, vale la pena mencionar que en todos los gráficos de variación de curvatura de las formas modales analizadas, (ver Gráficas 12 a 16), se observa un cambio brusco coincidente con los lugares donde está presente la fisura.

8.1.3. Caso 2b Sinha, Friswell y Edwards. Este caso corresponde a una viga libre – libre, en aluminio, (viga sin apoyos que es suspendida de dos cables). Tal como se puede apreciar en la Figura 23, se analizaron dos fisuras, una fisura $d_{c1}=12\text{mm}$; ubicada a $X_1=595\text{mm}$ y otra fisura con tres tamaños diferentes, $d_{c2}=4\text{mm}$, $d_{c2}=8\text{mm}$, $d_{c2}=12\text{mm}$; ubicadas a $X_2=800\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga.

Figura 23: Esquema de viga, segundo caso de Sinha, Friswell y Edwards, con dos fisuras



En la Tabla 18, (pág. 110 , Caso 2b), pueden observarse las características de la viga analizada.

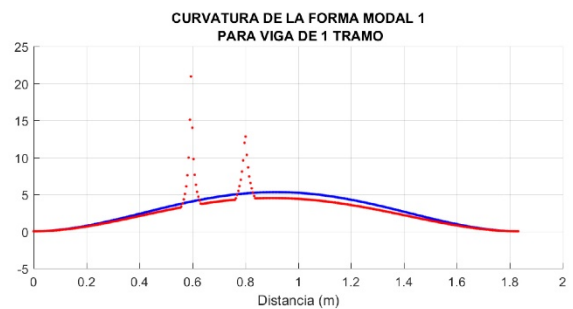
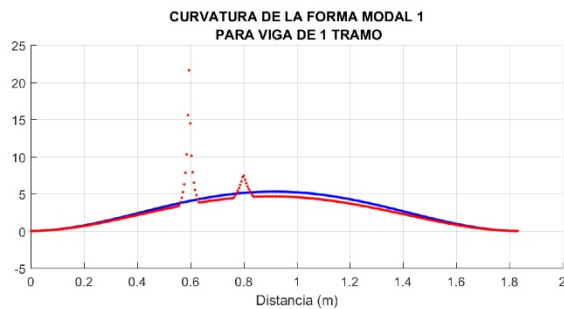
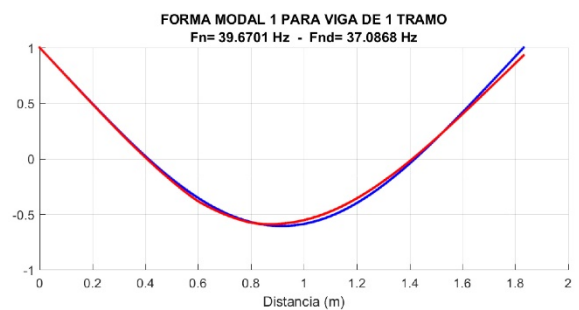
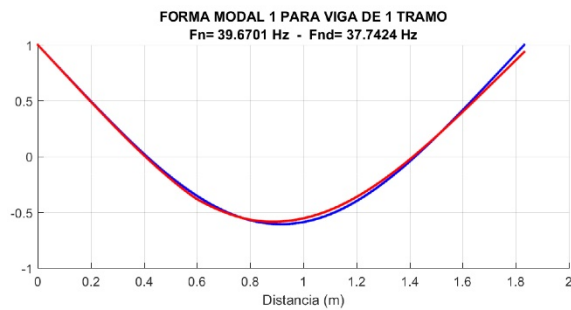
Los datos de entrada del programa AVIF se pueden consultar en los Anexos (ver anexos B20. EntradaDatosSFECaso2D.m, B21. EntradaDatosSFECaso2E.m y B22. EntradaDatosSFECaso2F.m), para una fisura ubicada a $X_1 = 595\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga y con tamaños de viga: $d_{c1} = 4\text{mm}$, $d_{c1} = 8\text{mm}$ y $d_{c1} = 12\text{mm}$, respectivamente.

Los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de fisuras se pueden ver en las Gráficas 17 a 21, se pueden observar las variaciones bruscas en las curvaturas, correspondientes al efecto que tienen las fisuras sobre la rigidez de la viga.

Los datos obtenidos de frecuencias naturales se tabularon y compararon con los resultados numéricos del modelo matemático, (ver Tabla 23, pág. 133), y experimentales medidos en laboratorio, (ver Tabla 24, pág. 134) obtenidos por Sinha, Friswell y Edwards⁷³.

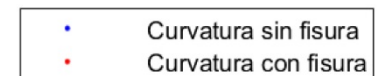
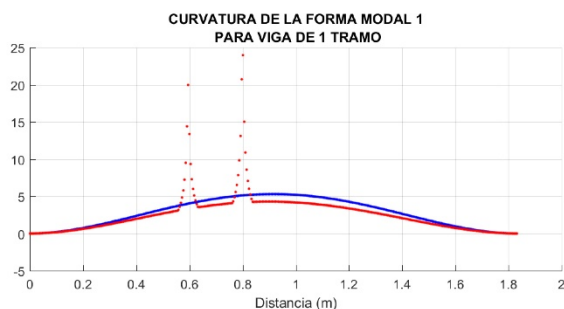
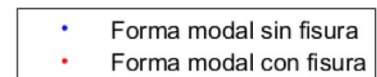
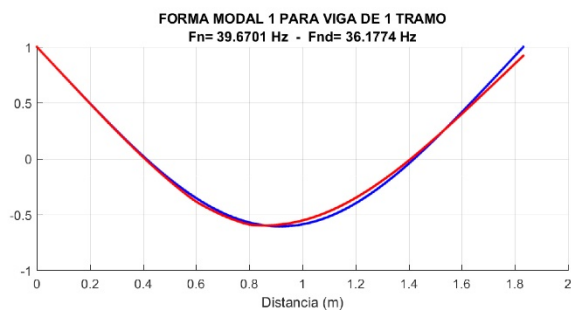
⁷³ Ibíd., p. 24.

Gráfica 17: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards



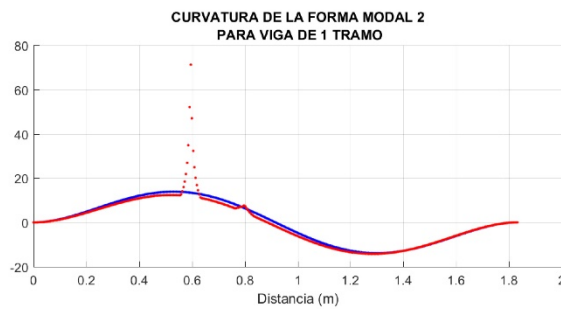
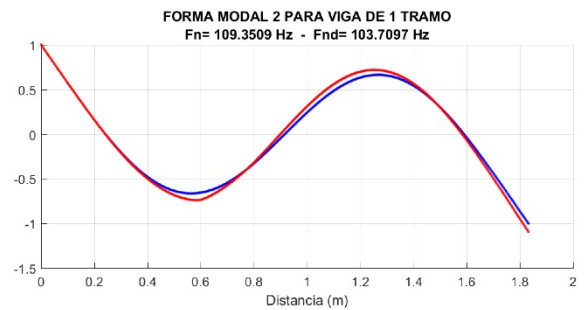
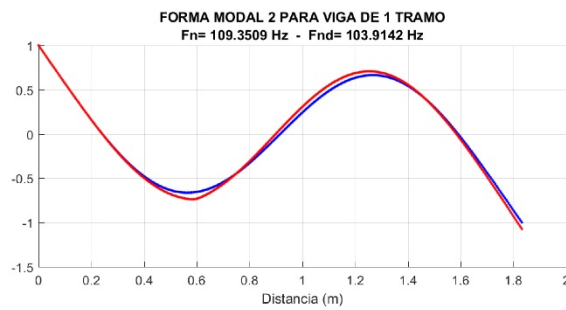
(a) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 4\text{mm}$

(b) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 8\text{mm}$

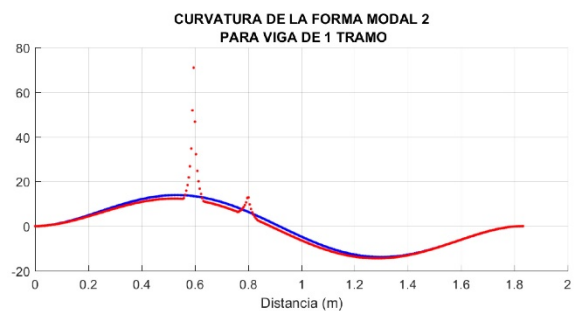


(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 12\text{mm}$

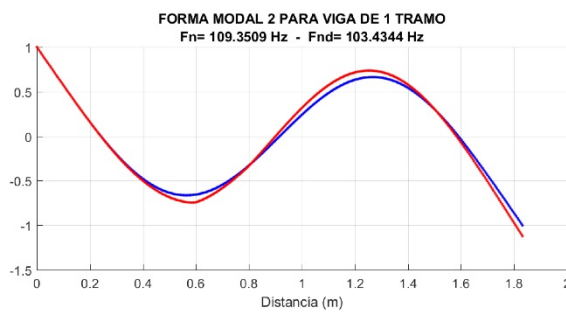
Gráfica 18: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards



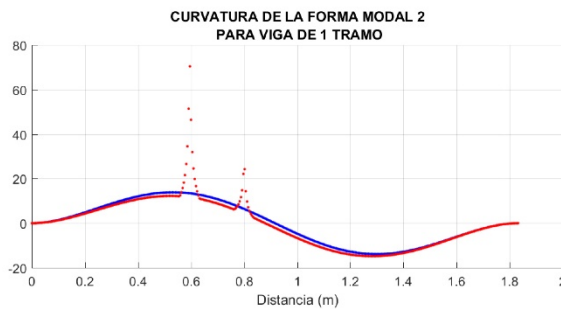
(a) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 4\text{mm}$



(b) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 8\text{mm}$



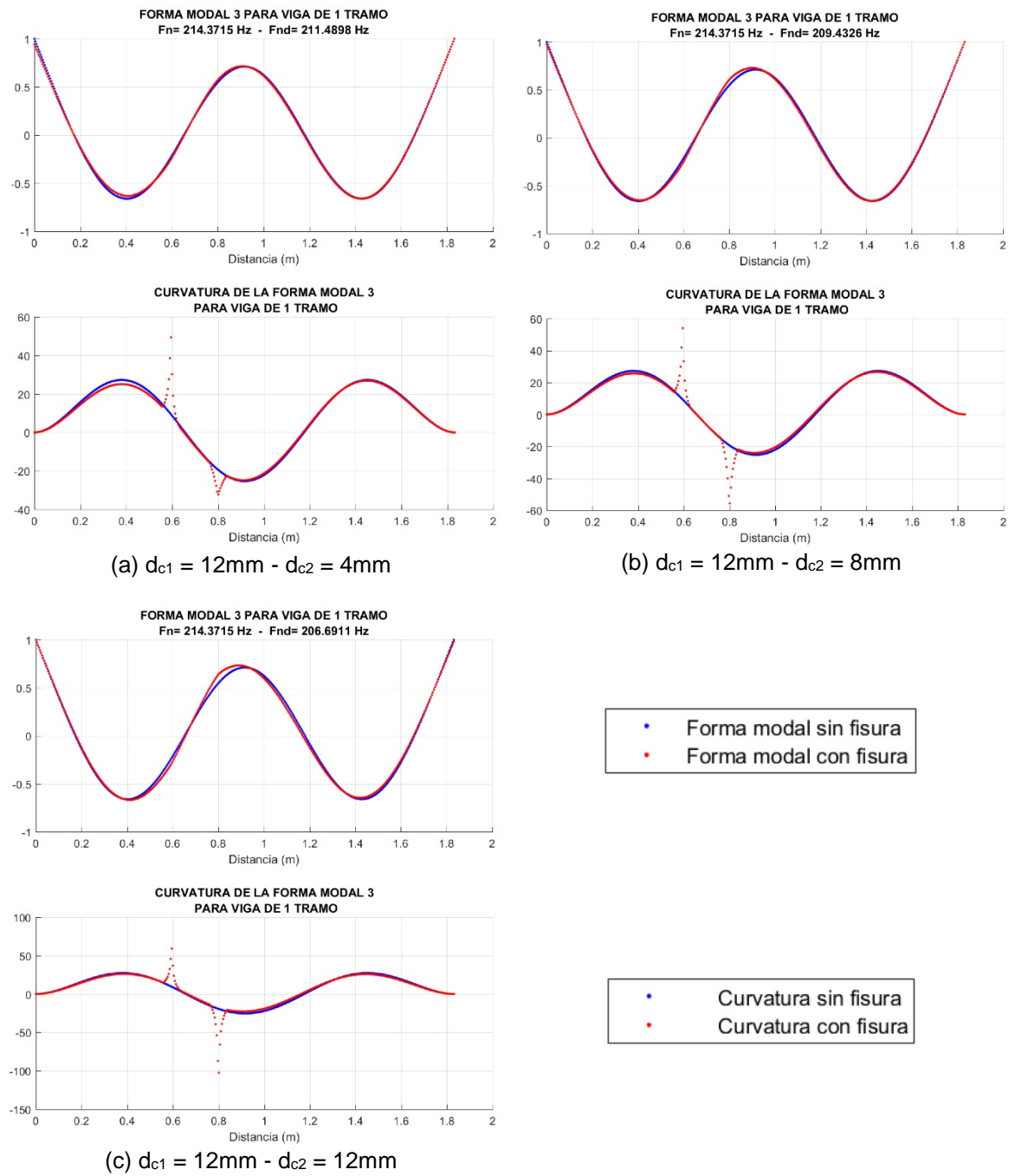
• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura



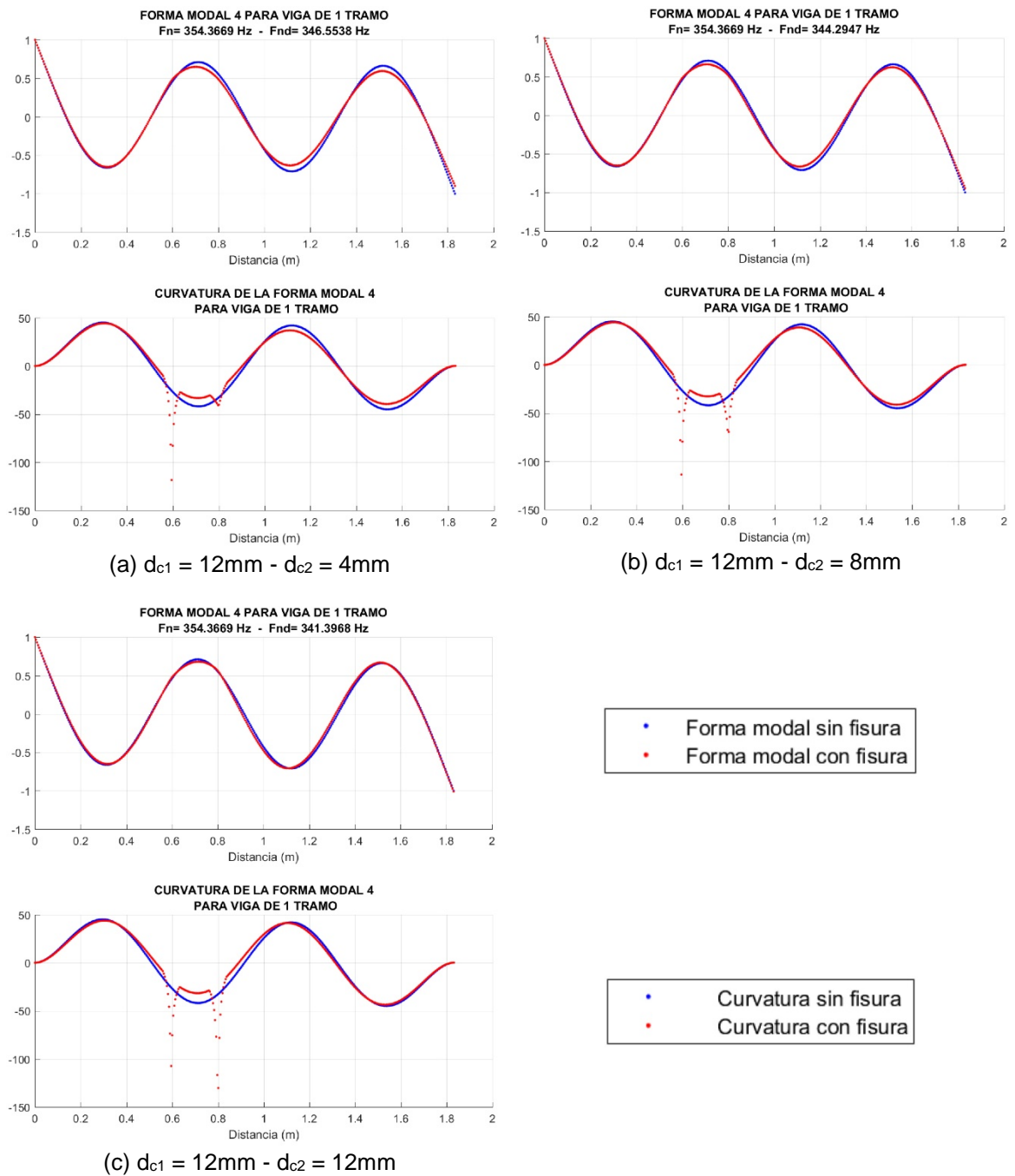
(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$ - $d_{c2} = 4\text{mm}$

• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

Gráfica 19: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards



Gráfica 20: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards



Gráfica 21: Quinta Forma Modal y Curvatura de la Quinta Forma Modal, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards

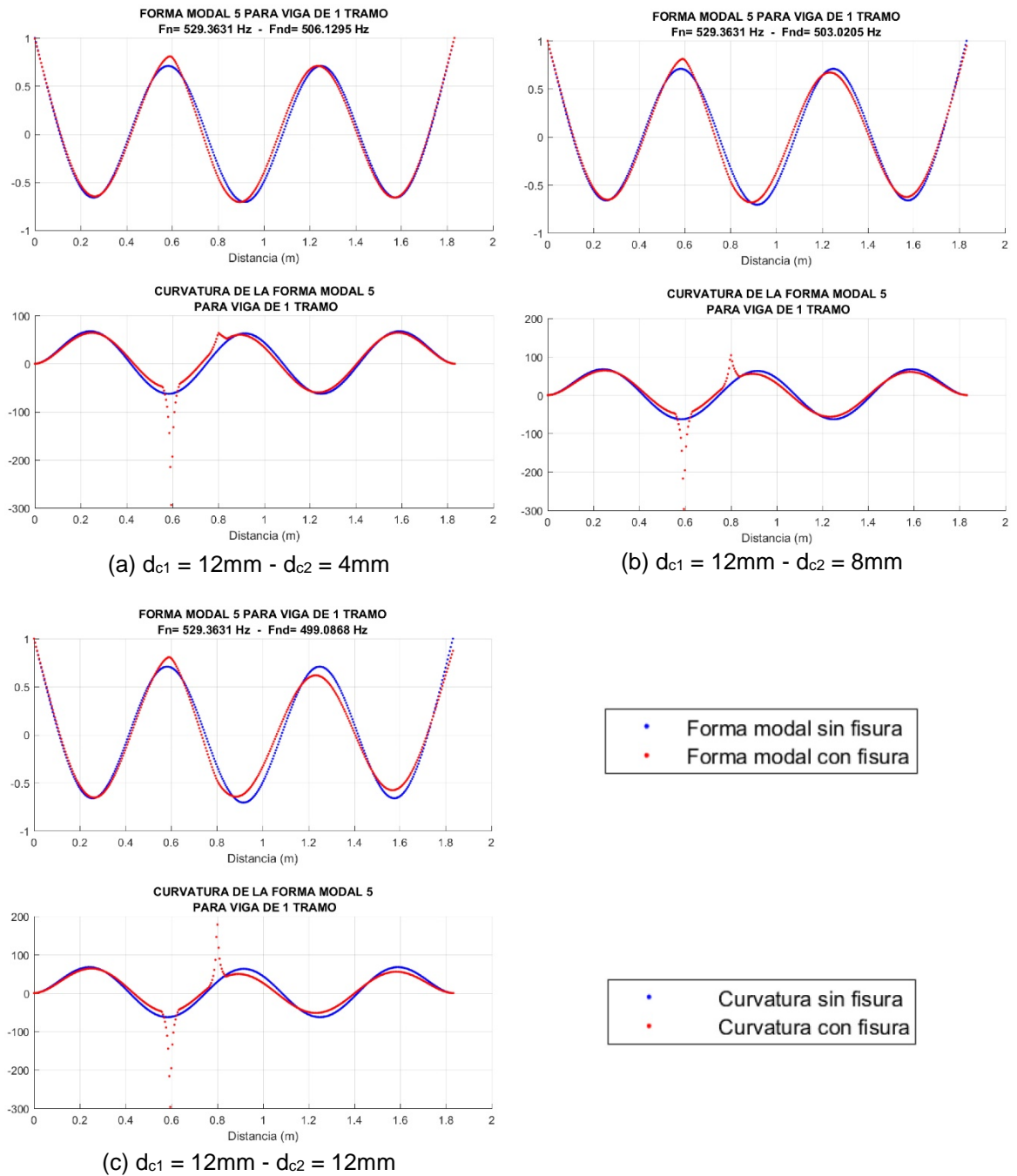


Tabla 23: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 4\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	38,352	37,7424	1,59%
2	105,89	103,9142	1,87%
3	212,207	211,4898	0,34%
4	348,92	346,5538	0,68%
5	514,575	506,1295	1,64%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 8\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	37,897	37,0868	2,14%
2	105,51	103,7097	1,71%
3	210,897	209,4326	0,69%
4	347,235	344,2947	0,85%
5	512,903	503,0205	1,93%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 12\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	37,513	36,1774	3,56%
2	105,559	103,4344	2,01%
3	209,815	206,6911	1,49%
4	345,876	341,3968	1,30%
5	510,56	499,0868	2,25%

Tabla 24: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 2b de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

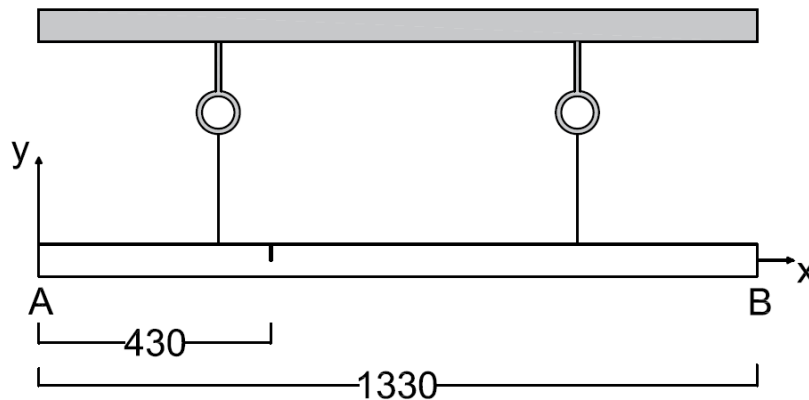
Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 4\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	38,75	37,7424	2,60%
2	105,938	103,9142	1,91%
3	213,75	211,4898	1,06%
4	350	346,5538	0,98%
5	512,5	506,1295	1,24%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 8\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	38,437	37,0868	3,51%
2	105,938	103,7097	2,10%
3	212,813	209,4326	1,59%
4	349,063	344,2947	1,37%
5	511,25	503,0205	1,61%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 595\text{mm}$ y $d_{c2} = 12\text{mm}$ en $X_2 = 800\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	37,5	36,1774	3,53%
2	105,625	103,4344	2,07%
3	210	206,6911	1,58%
4	345,625	341,3968	1,22%
5	507,5	499,0868	1,66%

Se encontró que los errores calculados entre las frecuencias naturales experimentales, calculadas por Sinha, Friswell y Edwards (SFE), y las obtenidas con el modelo de fisura extendido son inferiores a 3.53%.

En las curvaturas de las cinco formas modales analizadas (ver Gráficas 17 a 21), se observaron cambios abruptos en las mismas, los cuales corresponden con la localización de las fisuras modeladas.

8.1.4. Caso 3 Sinha, Friswell y Edwards. El tercer caso es una viga libre – libre, en acero, (viga sin apoyos que es suspendida de dos cables). Tal como se puede apreciar en la Figura 24, se analizaron tres tamaños de fisura, $d_{c1}=4\text{mm}$, $d_{c1}=8\text{mm}$, $d_{c1}=12\text{mm}$; ubicadas a $X_1=430\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga.

Figura 24: Esquema de viga, tercer caso de Sinha, Friswell y Edwards



En la Tabla 18, (pág. 110 , Caso 3), pueden observarse las características de la viga analizada.

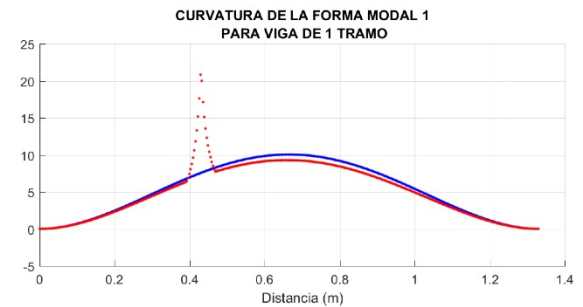
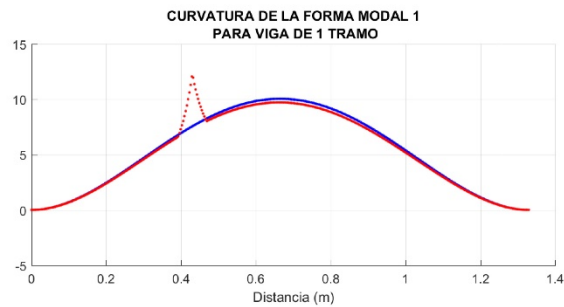
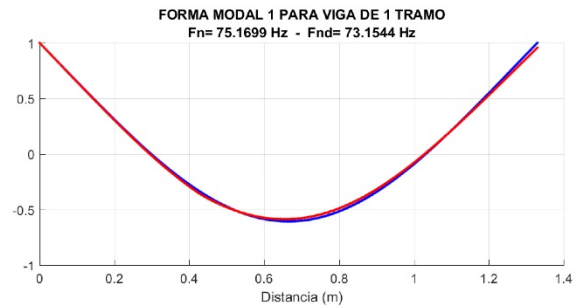
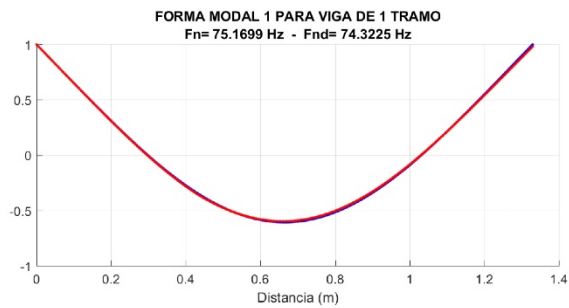
Los datos de entrada del programa AVIF se pueden consultar en los Anexos (ver anexos B23. EntradaDatosSFECaso3A.m, B24. EntradaDatosSFECaso3B.m y B25. EntradaDatosSFECaso3C.m), para una fisura ubicada a $X_1 = 430\text{mm}$ del borde izquierdo de la viga y con tamaños de viga: $d_{c1} = 4\text{mm}$, $d_{c1} = 8\text{mm}$ y $d_{c1} = 12\text{mm}$, respectivamente.

Los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de fisuras se pueden ver en la Gráfica 22 a la Gráfica 25, se pueden observar las variaciones bruscas en las curvaturas, correspondientes al efecto que tiene la fisura sobre la rigidez de la estructura.

Los datos obtenidos de frecuencias naturales se tabularon y compararon con los resultados numéricos del modelo matemático, (ver Tabla 25, pág. 140), y experimentales medidos en laboratorio, (ver Tabla 26, pág. 141) obtenidos por Sinha, Friswell y Edwards⁷⁴.

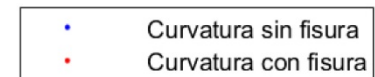
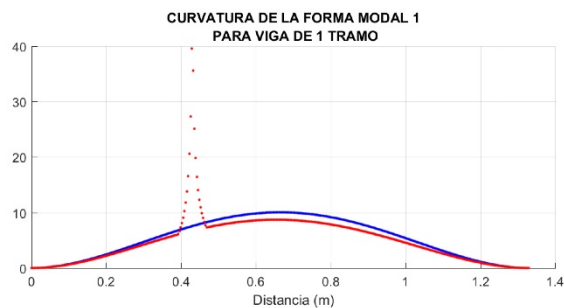
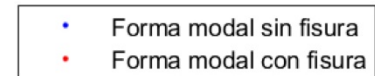
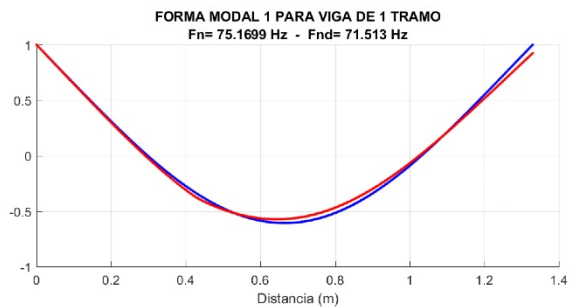
⁷⁴ Ibíd., p. 22.

Gráfica 22: Primera Forma Modal y Curvatura de la Primera Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards



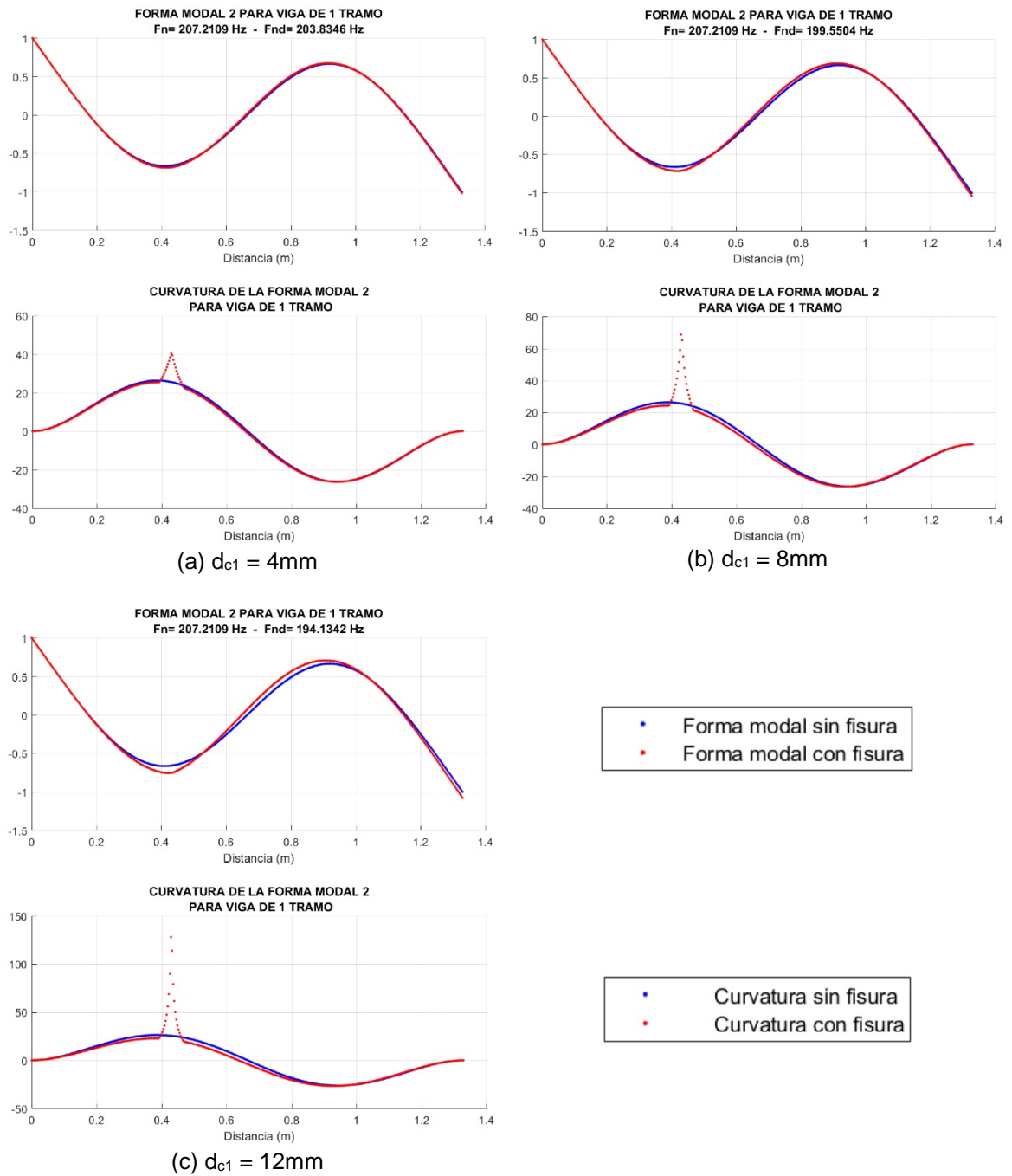
(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$

(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$

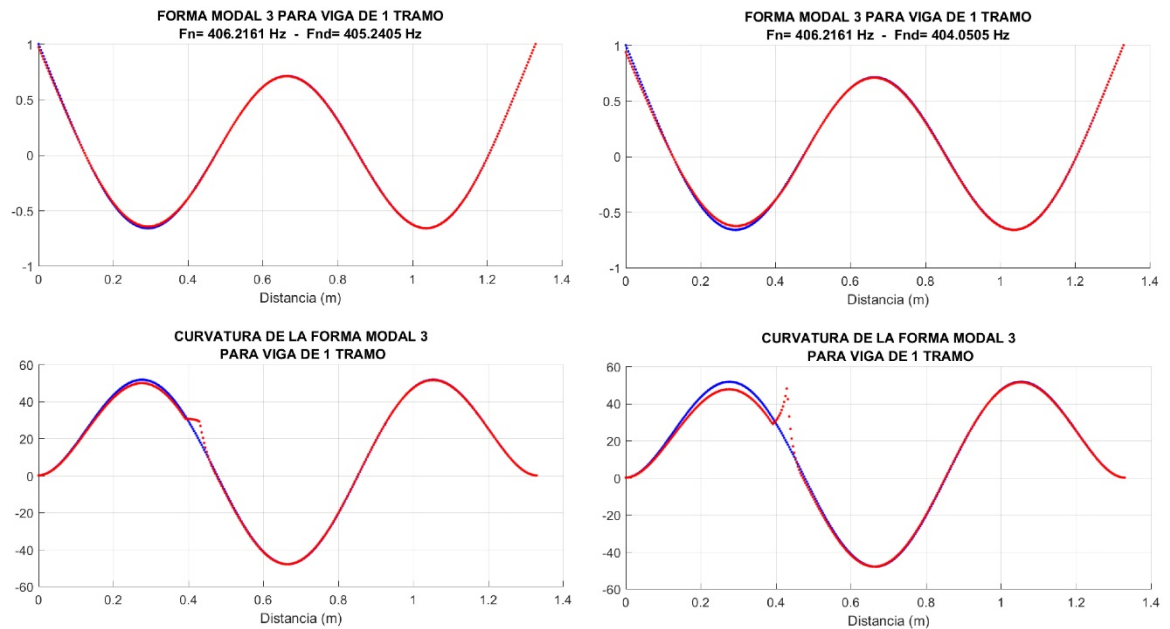


(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

Gráfica 23: Segunda Forma Modal y Curvatura de la Segunda Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards

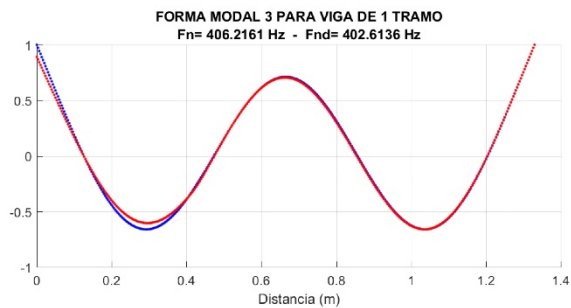


Gráfica 24: Tercera Forma Modal y Curvatura de la Tercera Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards

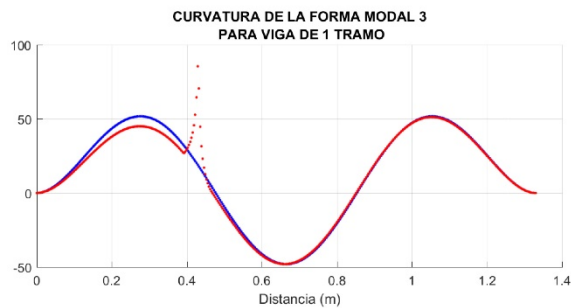


(a) $d_{c1} = 4\text{mm}$

(b) $d_{c1} = 8\text{mm}$



• Forma modal sin fisura
• Forma modal con fisura



• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura

(c) $d_{c1} = 12\text{mm}$

Gráfica 25: Cuarta Forma Modal y Curvatura de la Cuarta Forma Modal, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards

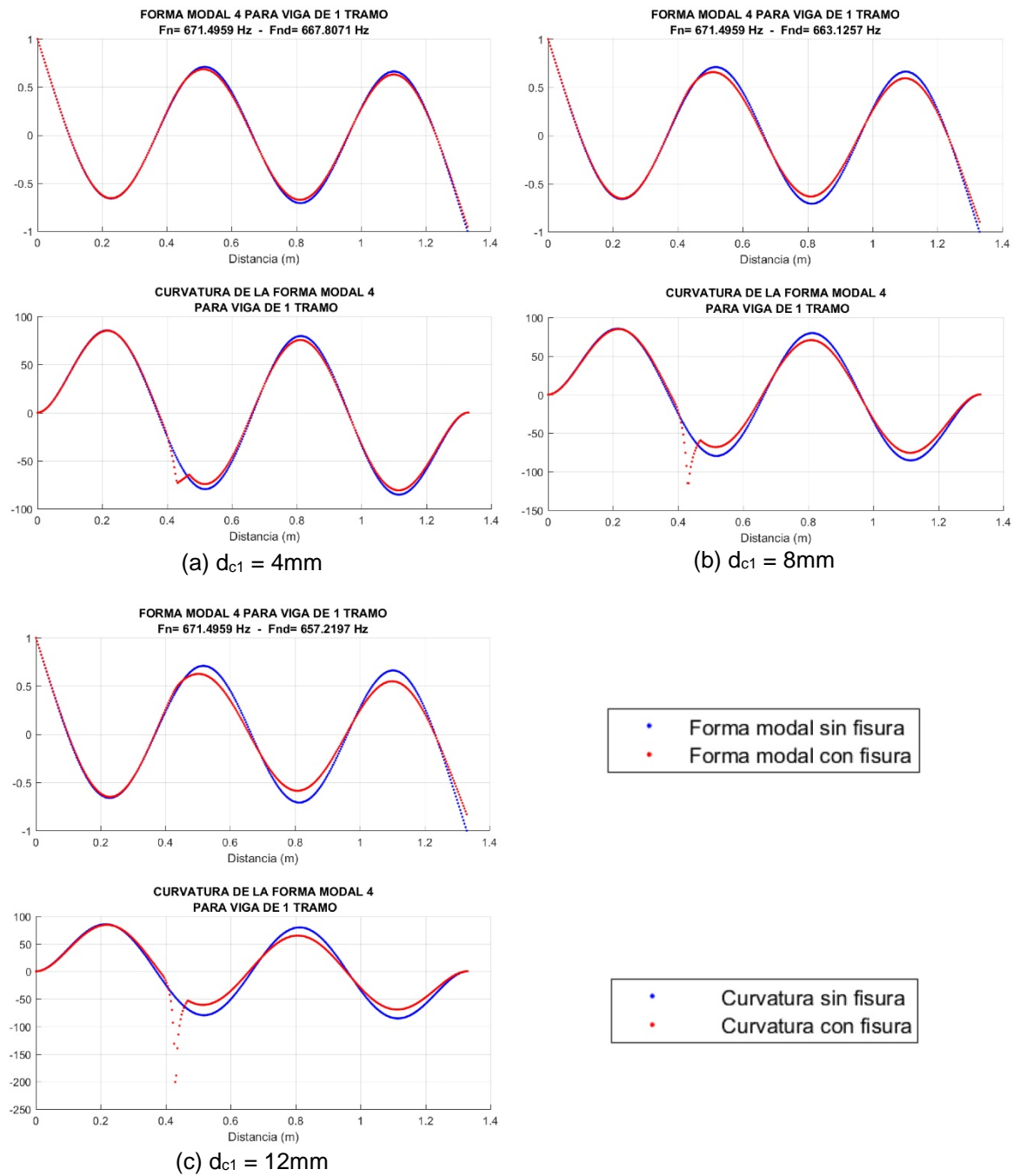


Tabla 25: Frecuencias naturales comparadas con resultado numérico, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 4\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	74,406	74,3225	0,11%
2	204,183	203,8346	0,17%
3	405,368	405,2405	0,03%
4	668,429	667,8071	0,09%
$d_{c1} = 8\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	73,628	73,1544	0,64%
2	201,283	199,5504	0,86%
3	404,557	404,0505	0,13%
4	665,356	663,1257	0,34%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Numérico SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	72,958	71,513	1,98%
2	198,928	194,1342	2,41%
3	403,916	402,6136	0,32%
4	662,874	657,2197	0,85%

Tabla 26: Frecuencias naturales comparadas con resultado experimental, para Caso 3 de Sinha, Friswell y Edwards (SFE)

Frecuencias naturales (Hz)			
$d_{c1} = 4\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	74,688	74,3225	0,49%
2	205,625	203,8346	0,87%
3	405,625	405,2405	0,09%
4	666,25	667,8071	0,23%
$d_{c1} = 8\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	74,063	39,3394	1,23%
2	202,5	108,0421	1,46%
3	404,688	214,0318	0,16%
4	662,813	523,7783	0,05%
$d_{c1} = 12\text{mm}$ en $X_1 = 430\text{mm}$			
Modo	Experimental SFE	Nuevo Modelo Extendido	Error (%)
1	72,813	71,513	1,79%
2	197,188	194,1342	1,55%
3	403,125	402,6136	0,13%
4	655,938	657,2197	0,20%

Con los resultados obtenidos en las Tablas 25 y 26, se encontró un error inferior 1.79% contra los datos experimentales del trabajo de Sinha, Friswell y Edwards (SFE).

En todos los gráficos de variación de curvatura de las cuatro formas modales analizadas, (ver Gráficas 22 a 25), se observó un cambio brusco coincidente con los lugares donde está presente la fisura.

8.2. CONCLUSIONES DE LOS CASOS DE VALIDACION ANALIZADOS

De los cuatro casos considerados en esta sección es posible concluir que:

La diferencia máxima entre las frecuencias naturales obtenidas con el modelo inicial de Sinha, Friswell y Edwards y el modelo de fisura extendido fue de 3.56% (ver tablas 19, 21, 23 y 25), igualmente comparando con los resultados experimentales

obtenidos por estos autores la diferencia máxima fue de 3.53% (ver tablas 20, 22, 24 y 26), por lo que se observa que el nuevo modelo obtiene resultados fiables para los casos analizados.

Finalmente, vale la pena mencionar que, con los datos sin error de medición, las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, pueden ser empleadas para inferir la presencia de fisuras como se ha reportado en la literatura desarrollada al respecto^{75 76}, (ver sección 3.5, pág. 34).

En el siguiente capítulo se estudia la influencia de los errores de medición sobre el comportamiento de las curvaturas de la deflexión y formas modales, y su relación con las fisuras modeladas.

⁷⁵ DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Op. cit., p. 181-205.

⁷⁶ BEGAMBRE, O.; LAIER, J. Op. cit., p. 29-45.

9. EL PROBLEMA DEL ERROR DE MEDICIÓN

9.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:

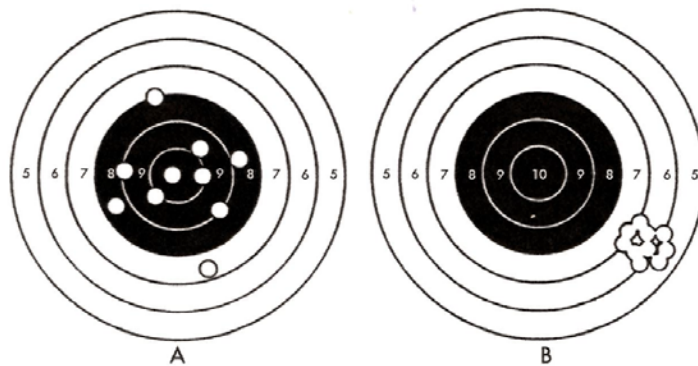
En el presente trabajo de grado se quiso simular la realidad de la existencia de los errores de medición, los cuales son debidos a errores en los equipos de medición, o a errores cometidos por la persona que realiza la medición. Y mostrar de manera gráfica como pueden influenciar estos errores el comportamiento de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

9.2. TIPOS DE ERRORES:

9.2.1. El error humano. Este tipo de error se refiere a los errores cometidos por la persona que realiza la medición, aun cuando se tenga un operario debidamente capacitado en el manejo de los equipos de medición empleados, es inevitable que se presenten errores cometidos por el operario de los mismos.

Los errores humanos pueden ser clasificados como errores variables o errores constantes⁷⁷, en el error constante, la persona tiende a cometer un error con una menor dispersión, mientras que en el error variable se presenta una gran dispersión del error. En la Figura 25 se observa que en el patrón A, no hay ningún error constante y mucho error variable. Y en el patrón B, un gran error constante y poco error variable.

Figura 25: Error constante y error variable



Fuente: REASON, J. El error humano. Madrid, Modus Laborandi, 2009, p. 28., tomado a su vez de, CHAPANIS, A. Theory and method for analyzing errors in man-machine systems. Annals of the Nueva York Academy of Science. Wiley, 1951, vol. 51, no. 7, p. 1179-1203.

⁷⁷ REASON, J. El error humano. Madrid, Modus Laborandi, 2009, p. 28.

9.2.2. El error en los equipos de medición. Para que un equipo de medición pueda obtener resultados aceptables, estos deben estar calibrados, adicionalmente. Las medidas debe poder ser reproducido o replicado, por otra medición realizada por otra persona. La repetitividad se refiere a la capacidad de un instrumento de dar el mismo resultado en diferentes mediciones.

Por lo anteriormente expuesto se sigue que un equipo en óptimas condiciones, debe estar calibrado, y sus resultados se puedan volver a obtener dentro de un rango de error aceptable.

9.3. SIMULACIÓN DEL ERROR

Para el presente trabajo, se simuló el error como un porcentaje aleatorio del resultado teórico obtenido por el modelo numérico, tanto para los resultados de las deflexiones como de las formas modales.

Para hacer esto se utilizó la función de generación de números aleatorios integrada en MATLAB®.

El efecto del error se calcula mediante la ecuación:

$$\{\emptyset_{con\ error}\} = \{\emptyset_{sin\ error}\} * \{Error\}$$

Donde:

$\{\emptyset_{con\ error}\}$: Vector de datos con variación debida a error de medición

$\{\emptyset_{sin\ error}\}$: Vector de datos sin variación debida a error de medición

$\{Error\}$: Vector de porcentajes de error de medición, el cual se varia con números aleatorios entre un intervalo, con un valor máximo y mínimo.

9.4. MODELO CON UNA SOLA FISURA UTILIZADO PARA ANALIZAR EL PROBLEMA DE ERROR DE MEDICIÓN

Para la simulación del error se modelo una viga simplemente apoyada de una sola luz, en aluminio, en este caso se simulo una única fisura, como se muestra en la figura Figura 26, para determinar si el efecto del error permite observar variaciones apreciables en las curvaturas de la deflexión y las formas modales, o este error enmascara los efectos de la fisura. Suponiendo que los equipos de medición están en óptimas condiciones y que el personal encargado de realizar las mediciones es experto en el manejo del equipo y en la toma de las mismas. En la Tabla 27, se pueden consultar los datos de la viga a analizar.

Figura 26: Esquema de viga, primer caso de análisis de error de medición

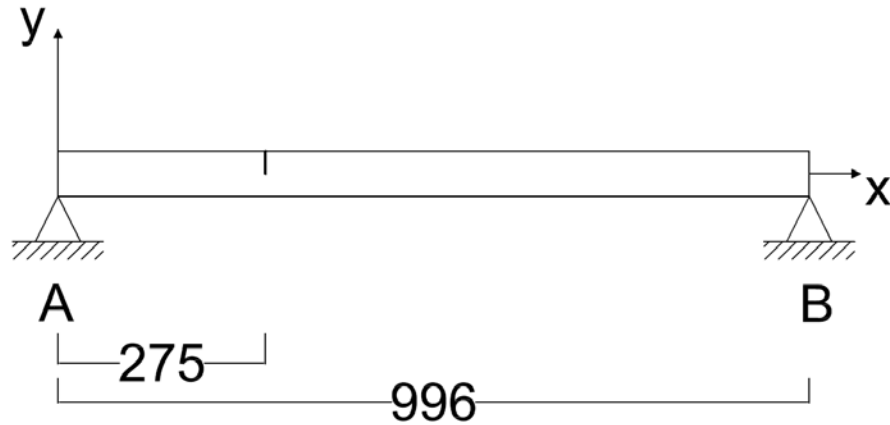


Tabla 27: Datos caso utilizado en el análisis de error, dos extremos con apoyo simple. Se simuló una única fisura

DATOS DE LA VIGA		
# Elementos Finitos	300	Elementos
b	0,05	M
h	0,025	M
I	6,51042E-08	m ⁴
E	6,98E+10	Pa
L	0,996	M
w	-32	N/m
d _{c1}	4	Mm
X ₁	275	Mm
error	0.05	%

El error se simula entonces, variando de manera aleatoria, los datos de la deflexión con fisuras y las formas modales con fisuras en el eje Y. Esta variación aleatoria se realiza dentro del rango de error 0 al error máximo supuesto (0.05%). Se utilizó este error mínimo de 0.05%, para analizar el efecto de un error prácticamente despreciable sobre las curvaturas de la deflexión y de la forma modal. El código fuente donde se hace la variación por error para la deflexión se puede revisar en el Anexo F3. DeflectionGraphicsError.m. Y el código fuente para la variación por error de las formas modales se puede consultar en el Anexo F6. ModalGraphicsError.m.

Se utilizaron para la obtención de las derivadas ecuaciones de la derivada de Taylor⁷⁸, para cuatro puntos, para puntos intermedios se utilizó la ecuación de valor medio, para los bordes se utilizó la ecuación hacia adelante para los nodos iniciales y hacia atrás para los nodos finales, ver sección 3.3. (pág. 32). El código fuente de esta función se puede consultar en el Anexo G2. Derivada2Taylor4p.m).

Por último se planteó el efecto de hacer una regresión a los datos obtenidos antes de realizar las derivaciones numéricas, con el fin de poder evaluar el posible efecto sobre la curvatura de la deflexión.

En el Anexo B4. EntradaDatos.m, se controlan los datos de entrada y las variables del programa; los análisis de error de medición se realizan, cuando la variable VarError es igual a 1, Si VarError es igual a 0, esté análisis no se realiza. Esta Variable se encuentra en los archivos de entrada de datos, Anexo B4. EntradaDatos.m.

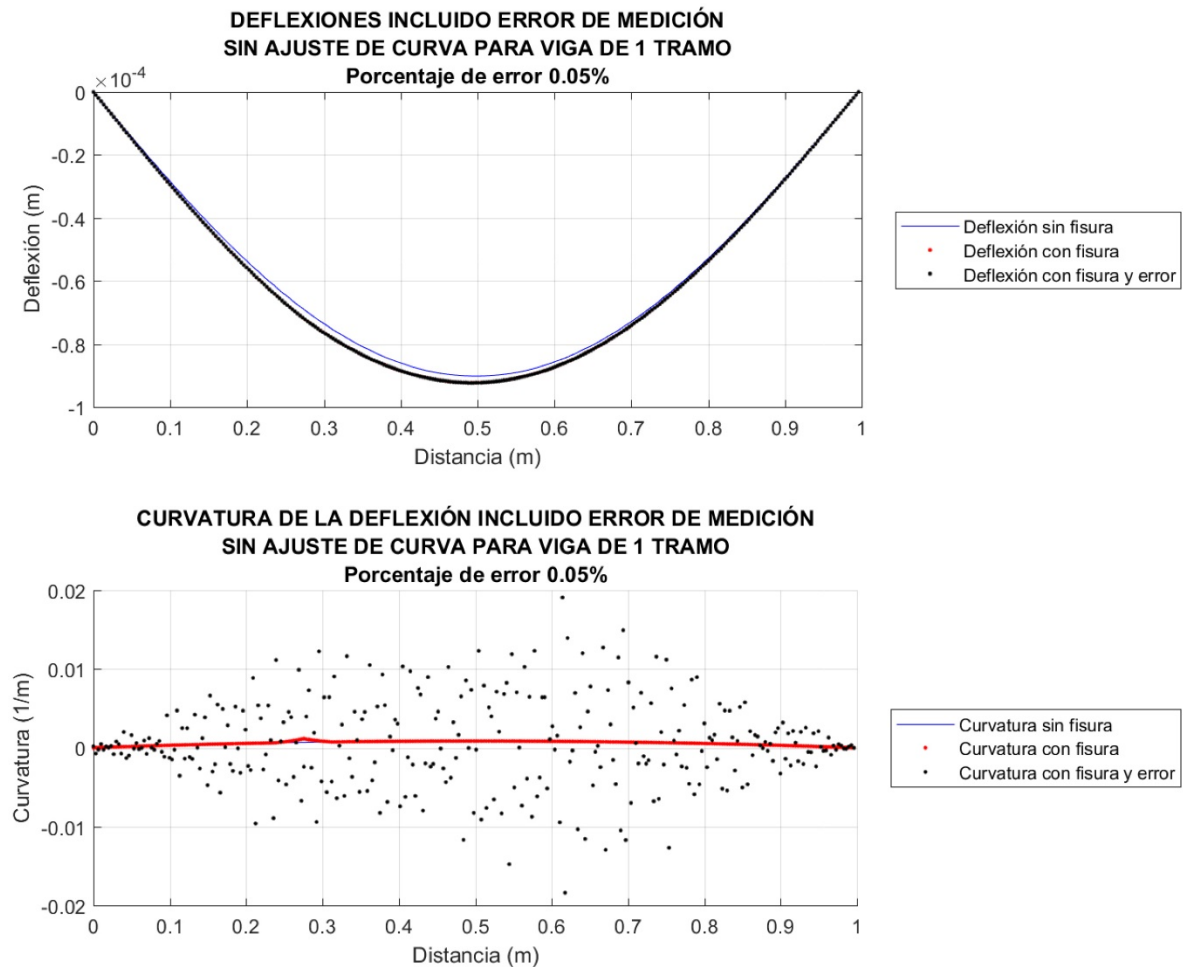
9.4.1. Derivación numérica sin regresión datos. Se planteó un error mínimo del 0.05%, sin realizar regresión de datos (suavizado de la curva), el archivo de datos de entrada para este análisis se puede revisar en el Anexo B5. EntradaDatosErrorCaso1SinRegresion.m.

Del análisis realizado, se obtuvieron en el programa AVIF las gráficas de la deflexión y de la curvatura de la deflexión.

En la Gráfica 26, se puede observar en color rojo los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura y sin error de medición, se puede notar un cambio abrupto en esta curva correspondiente a la ubicación de la fisura. También se puede observar en la misma Gráfica en color negro los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura, con error de medición y sin regresión de datos. Se observa, que no obstante estar las deflexiones con error y sin error prácticamente superpuestas, la curvatura de la deflexión con error está muy dispersa.

⁷⁸ CHAPRA, S. C. Op. cit., p. 527-529.

Gráfica 26: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con una sola fisura



Se aclara que en el caso de la gráfica de la deflexión los puntos correspondientes a la deflexión con fisura (puntos rojos), no se alcanzan a apreciar, ya que se encuentran muy cercanos a los puntos de deflexión con fisura y error (puntos negros). De manera similar para la gráfica de la curvatura de la deflexión sin fisura (línea continua azul), no se puede apreciar la misma, debido a la escala de la gráfica y a que la curvatura sin fisura (puntos rojos), están muy cercanos y los superponen.

Esta observación de la amplificación del error corresponde con lo observado sobre los errores en los datos en la derivación numérica⁷⁹, y con lo reportado por Cao et al⁸⁰. Pequeños errores en los datos son amplificados al derivar numéricamente,

⁷⁹ Ibid., p. 531-532.

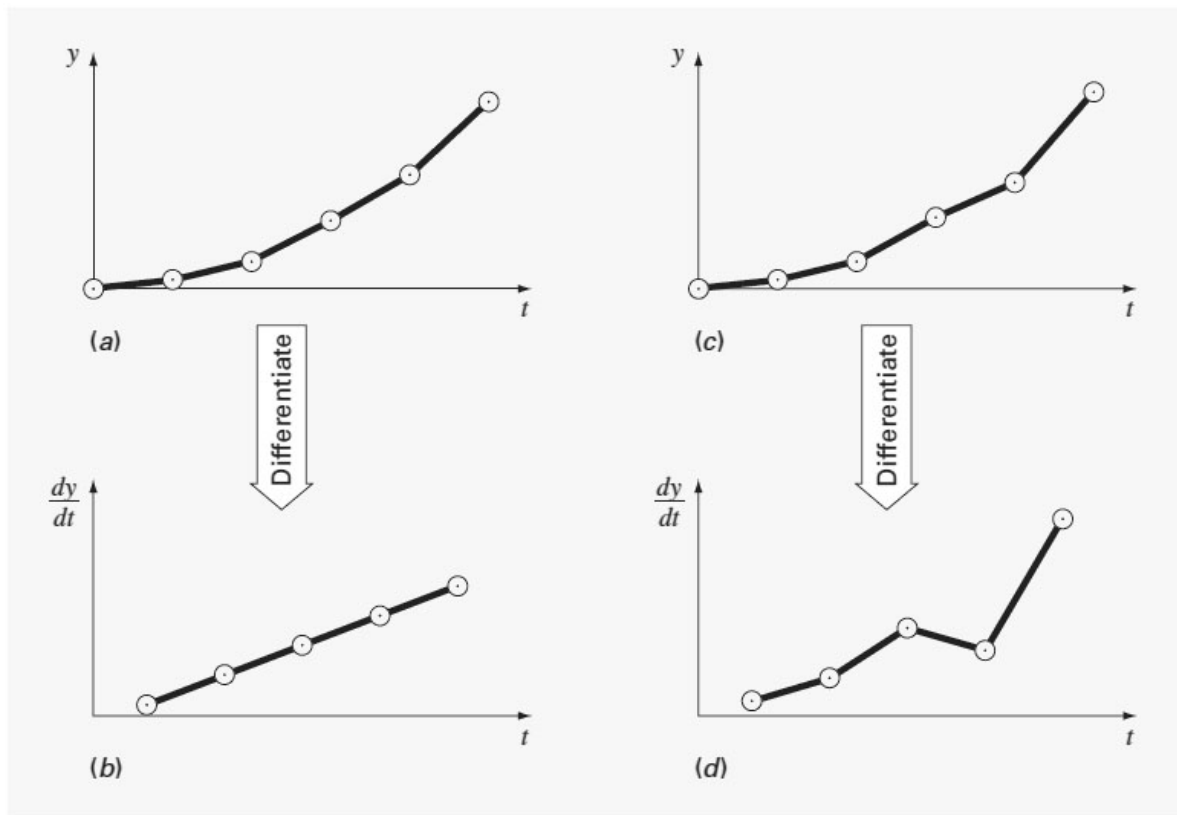
⁸⁰ CAO, M.; RADZIENSKI, M.; XU, W.; OSTACHOWICZ, W. Identification of multiple damage in beams based on robust curvature mode shapes. En: Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 2014, vol. 46 no. 2, p. 468-480.

como se puede observar igualmente en la Figura 27, cuando no se tienen errores (a), se presentan curvas suaves en la derivada (b). Pero por el contrario pequeños errores (c), son amplificadas al realizar la derivación numérica (d).

Si tenemos en cuenta que la curvatura de la deflexión es la segunda derivada de la deflexión, los errores en los datos son amplificadas aún más porque implica realizar dos veces la derivación.

Se encontró una dispersión máxima de los datos para la curvatura de la deflexión, del orden del 2200%, para la curvatura de la primera forma modal del orden del 1900%, para la segunda forma modal del orden del 370% y para la tercera forma modal del orden del 220%.

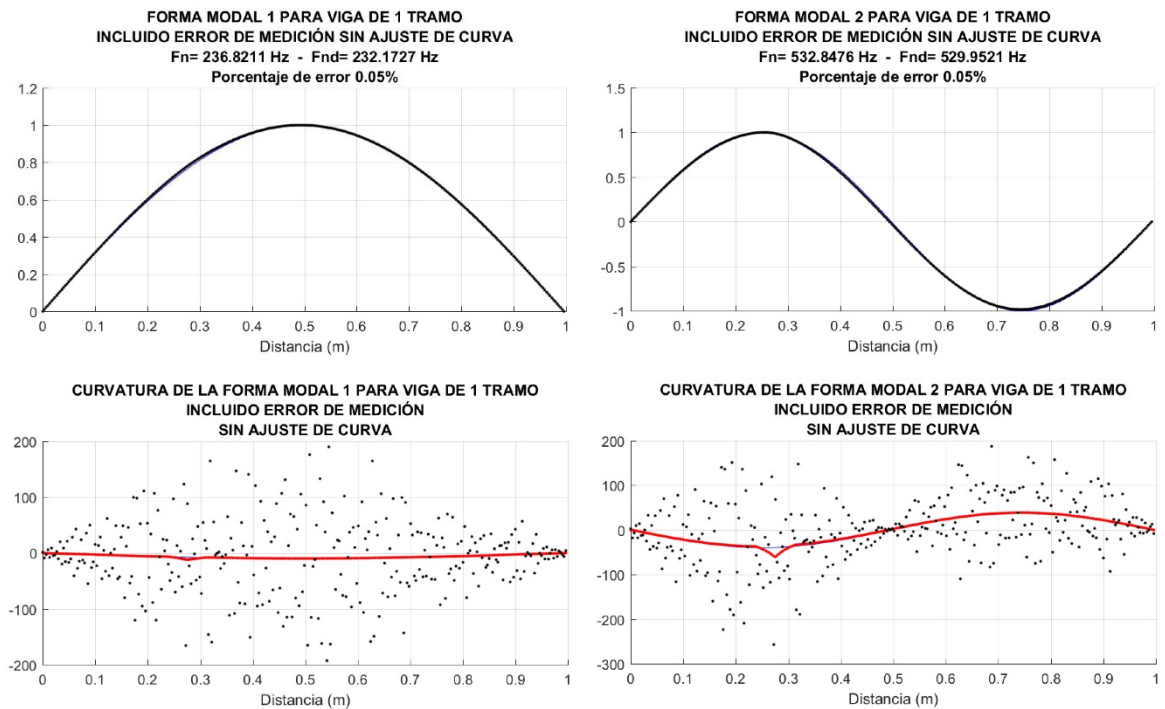
Figura 27: Variación por pequeños errores en la derivación numérica



Fuente: CHAPRA, S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. New York, McGraw Hill, 2012, p. 532.

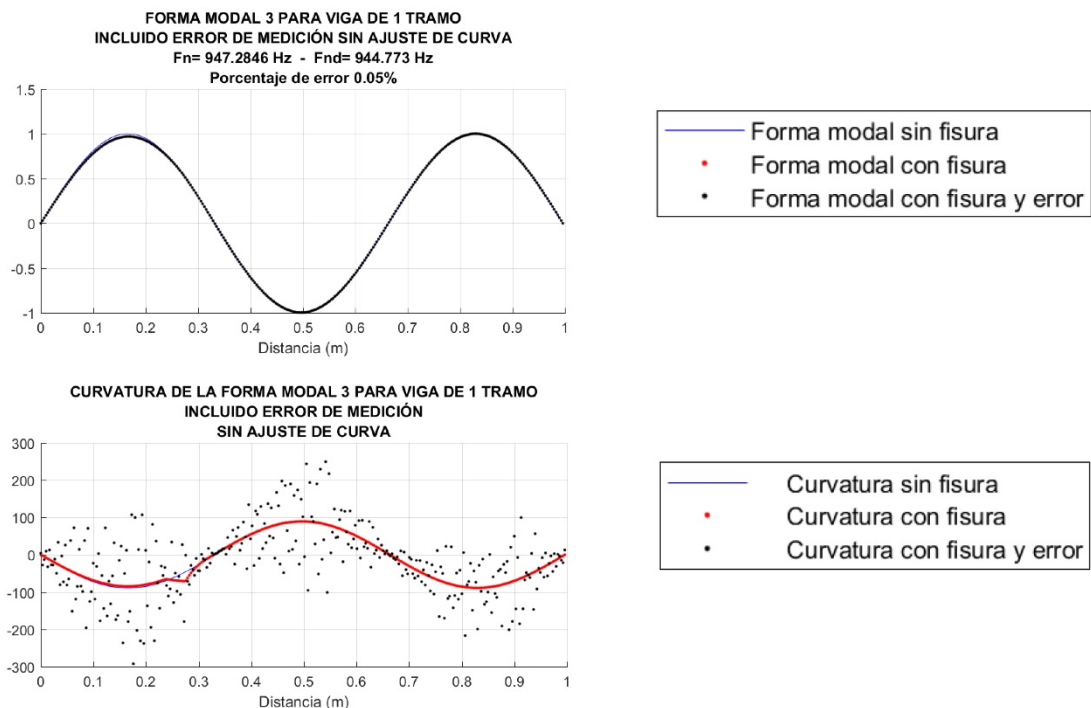
Se obtuvieron igualmente las gráficas de formas modales y sus curvaturas, para las tres primeras formas modales, obteniéndose resultados similares.

Gráfica 27: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con una sola fisura



(a) Primera forma modal

(b) Segunda forma modal



(c) Tercera forma modal

En la Gráfica 27, se puede observar las variaciones bruscas en las curvaturas de las formas modales con fisura y sin error de medición, puntos rojos. Se puede observar igualmente las curvaturas sin fisura, con error de medición y sin regresión en los datos, puntos negros, en los cuales se forma una nube de puntos sin ninguna correlación entre ellos.

Podemos observar que pequeños errores en los datos de las deflexiones generan grandes dispersiones de datos en la curvatura de la deflexión.

Se aclara que en el caso de las gráficas de las formas modales los puntos correspondientes a la forma modal con fisura (puntos rojos), no se alcanzan a apreciar, ya que se encuentran muy cercanos a los puntos de forma modal con fisura y error (puntos negros). De manera similar para la gráfica de la curvatura de las formas modales sin fisura (línea continua azul), no se puede apreciar la misma, debido a la escala de la gráfica y a que la curvatura sin fisura (puntos rojos), están muy cercanos y los superponen.

9.4.2. Derivación numérica con regresión datos. Teniendo en cuenta el problema presentado con los errores en los datos que se revisó en la sección anterior, se planteó realizar una regresión de los datos, suavizando las curvas de la deflexión y de las formas modales, con el fin de observar si aplicando esta regresión se podrían obtener puntos menos dispersos y que siguieran mostrando los cambios abruptos en las gráficas de curvaturas de deflexión y formas modales. Para ello se empleó el mismo ejemplo anterior, variando en este caso el hacer el suavizado de las curvas (regresión de datos), donde se utilizó la herramienta `cftool` de MATLAB®, y se buscó la curva que más se acercara a las gráficas de la deflexión y de las formas modales, para el caso de viga simplemente apoyada utilizada para el análisis del error de medición, una vez obtenida la mejor curva se colocó la opción dentro del código fuente para graficas con error de medición de la deflexión y de las formas modales, ver Anexo F3. `DeflectionGraphicsError.m`) y Anexo F6. `ModalGraphicsError.m`).

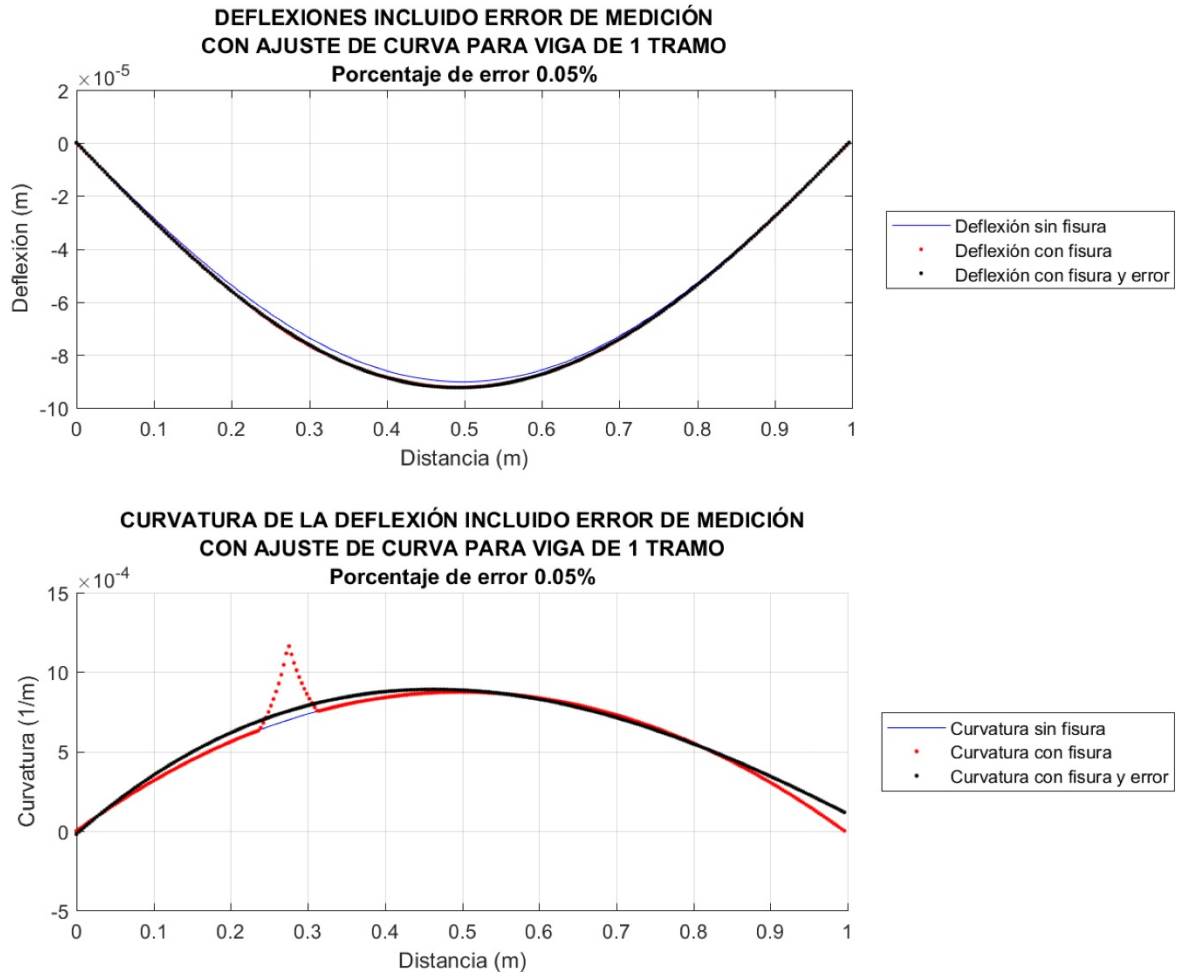
Se planteó un error mínimo del 0.05%, realizando regresión de datos (suavizado de la curva), el archivo de datos de entrada para este análisis se puede revisar en el Anexo B6. `EntradaDatosErrorCaso1ConRegresion.m`.

Del análisis realizado, se obtuvieron en el programa AVIF las gráficas de la deflexión y de la curvatura de la deflexión.

En la Gráfica 28, se puede observar en color rojo los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura y sin error de medición, se puede notar un cambio abrupto en esta curva correspondiente a la ubicación de la fisura. También se puede observar en la misma Gráfica en color negro los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura, con error de medición y con regresión de los datos. Se observa, que con la

regresión de datos, se pudo mejorar la forma de la curva con respecto a lo tratado en la sección anterior, no obstante al suavizar los datos de la deflexión, la curvatura de la misma deja de mostrar los cambios abruptos que se pueden observar en la gráfica sin error de medición.

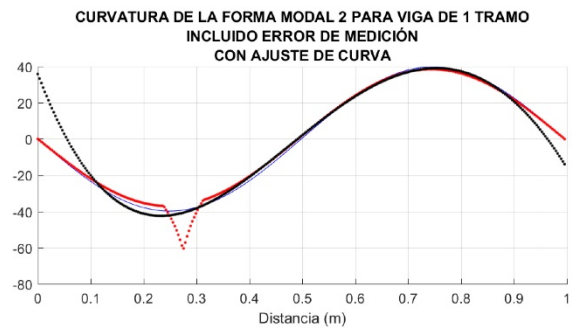
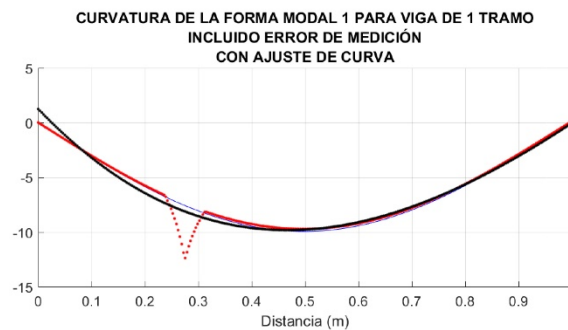
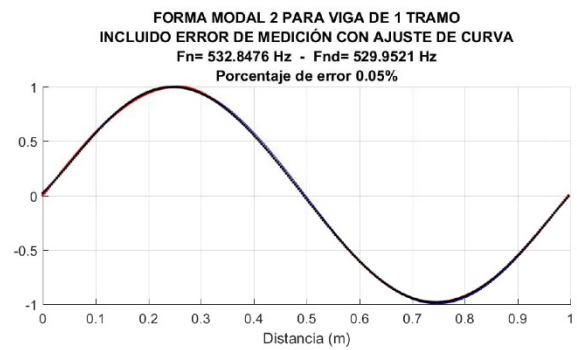
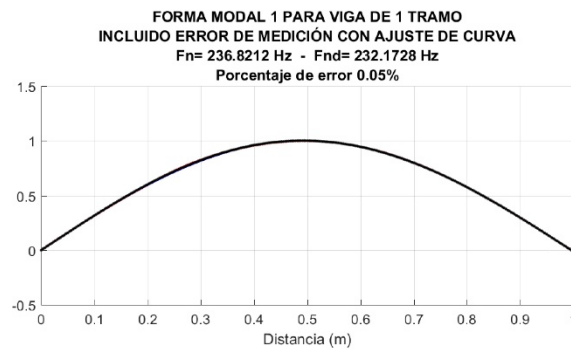
Gráfica 28: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con una sola fisura



Se obtuvieron igualmente las gráficas de formas modales y sus curvaturas, para las tres primeras formas modales, obteniéndose resultados similares.

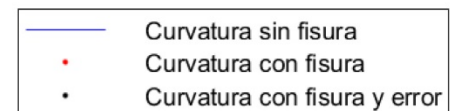
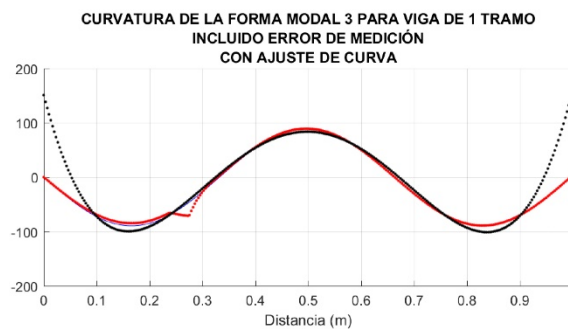
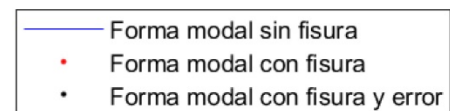
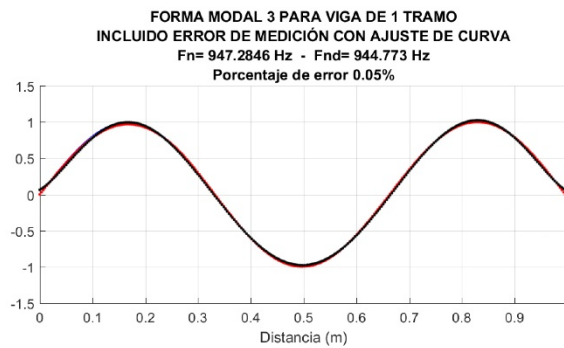
En la Gráfica 29, se puede observar las variaciones bruscas en las curvaturas de las formas modales con fisura y sin error de medición, puntos rojos. Se puede observar igualmente las curvaturas sin fisura, con error de medición y con regresión en los datos, puntos negros, en los cuales se tiene una curva más suave pero que no muestra el cambio debido a las curvaturas.

Gráfica 29: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con una sola fisura



(a) Primera forma modal

(b) Segunda forma modal



(c) Tercera forma modal

Podemos observar que a pesar de suavizar las curvas de las deflexiones la regresión de datos elimina los cambios abruptos en la curva, además de cambiarle un poco la forma, se puede llegar a hacer una regresión más exacta para tener una forma más cercana a la curva sin error, pero de igual manera eliminaría los cambios abruptos de las curvaturas, es decir quitaría de los datos los efectos de las fisuras.

9.5. MODELO CON CINCO FISURAS CERCANAS ENTRE SÍ, UTILIZADO PARA ANALIZAR EL PROBLEMA DE ERROR DE MEDICIÓN

Se planteó una variación del modelo estudiado, con el fin de observar si al modelar varias fisuras cercanas entre sí, se podrían obtener resultados diferentes. Se volvió a modelar la viga simplemente apoyada de una sola luz, en aluminio, simulando en este caso cinco fisuras cercanas entre sí, como se puede apreciar en la Figura 28. En la Tabla 28, se pueden consultar los datos de la viga a analizada.

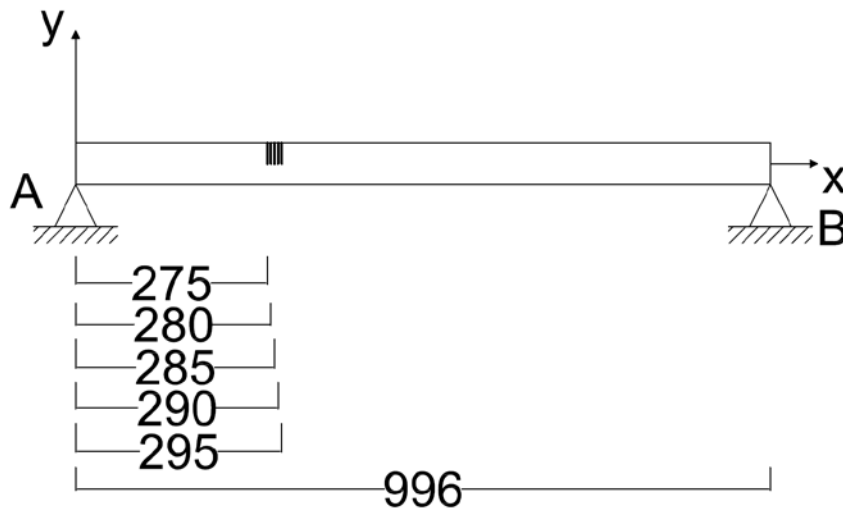
Tabla 28: Datos caso utilizado en el análisis de error, dos extremos con apoyo simple, se simulan cinco fisuras cercanas entre sí

DATOS DE LA VIGA		
# Elementos Finitos	300	Elementos
b	0,05	M
h	0,025	M
I	6,51042E-08	m ⁴
E	6,98E+10	Pa
L	0,996	M
w	-32	N/m
d _{c1}	4	mm
X ₁	275	mm
d _{c2}	4	mm
X ₂	280	mm
d _{c3}	4	mm
X ₃	285	mm
d _{c4}	4	mm
X ₄	290	mm
d _{c5}	4	mm
X ₅	295	mm
error	0.05	%

Igual a lo tratado en el modelo de la sección 9.5m se simuló el error como una variación aleatoria dentro del rango de error 0 al error máximo supuesto (0.05%). El código fuente donde se hace la variación por error para la deflexión se puede revisar en el Anexo F3. DeflectionGraphicsError.m. Y el código fuente para la variación por error de las formas modales se puede consultar en el Anexo F6. ModalGraphicsError.m.

Se utilizaron para la obtención de las derivadas ecuaciones de la derivada de Taylor⁸¹, para cuatro puntos, ver sección 3.3. (pág. 32). El código fuente de esta función se puede consultar en el Anexo G2. Derivada2Taylor4p.m).

Figura 28: Esquema de viga, segundo caso de análisis de error de medición



Por último se planteó el efecto de hacer una regresión a los datos obtenidos antes de realizar las derivaciones numéricas, con el fin de poder evaluar el posible efecto sobre la curvatura de la deflexión.

En el Anexo B4. EntradaDatos.m, se controlan los datos de entrada y las variables del programa; los análisis de error de medición se realizan, cuando la variable VarError es igual a 1, Si VarError es igual a 0, este análisis no se realiza. Esta Variable se encuentra en los archivos de entrada de datos, Anexo B4. EntradaDatos.m.

⁸¹ CHAPRA, S. C. Op. cit., p. 527-529.

9.5.1. Derivación numérica sin regresión datos. Se planteó un error mínimo del 0.05%, sin realizar regresión de datos (suavizado de la curva), el archivo de datos de entrada para este análisis se puede revisar en el Anexo B7. EntradaDatosErrorCaso2SinRegresion.m.

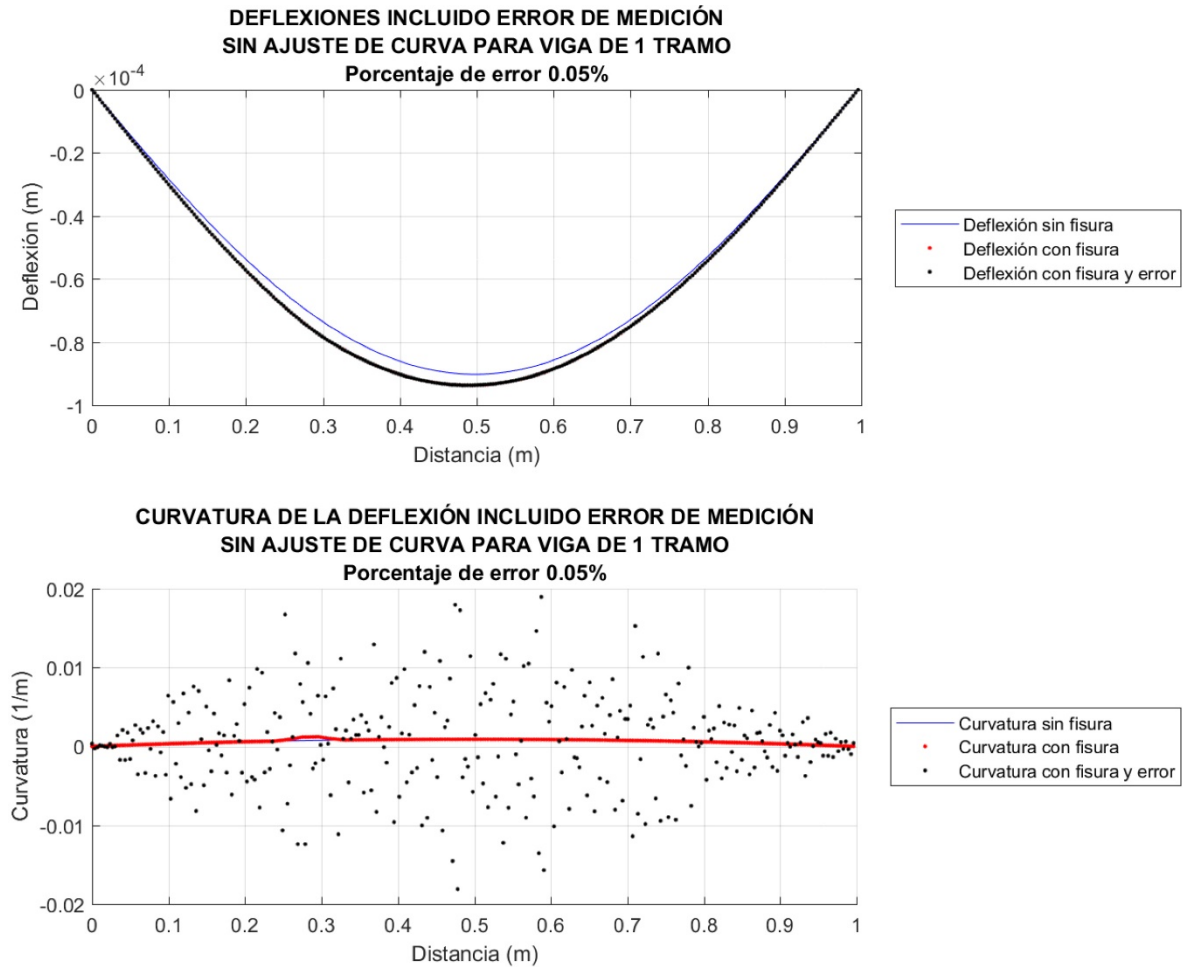
Del análisis realizado, se obtuvieron en el programa AVIF las gráficas de la deflexión y de la curvatura de la deflexión.

En la Gráfica 30, se puede observar en color rojo los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura y sin error de medición, se puede notar un cambio abrupto en esta curva correspondiente a la ubicación de las fisuras. También se puede observar en la misma Gráfica en color negro los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura, con error de medición y sin regresión de datos. Se observa, que no obstante estar las deflexiones con error y sin error prácticamente superpuestas, la curvatura de la deflexión con error está muy dispersa.

Se aclara que en el caso de la gráfica de la deflexión los puntos correspondientes a la deflexión con fisura (puntos rojos), no se alcanzan a apreciar, ya que se encuentran muy cercanos a los puntos de deflexión con fisura y error (puntos negros). De manera similar para la gráfica de la curvatura de la deflexión sin fisura (línea continua azul), no se puede apreciar la misma, debido a la escala de la gráfica y a que la curvatura sin fisura (puntos rojos), están muy cercanos y los superponen.

Se obtuvieron igualmente las gráficas de formas modales y sus curvaturas, para las tres primeras formas modales, obteniéndose resultados similares.

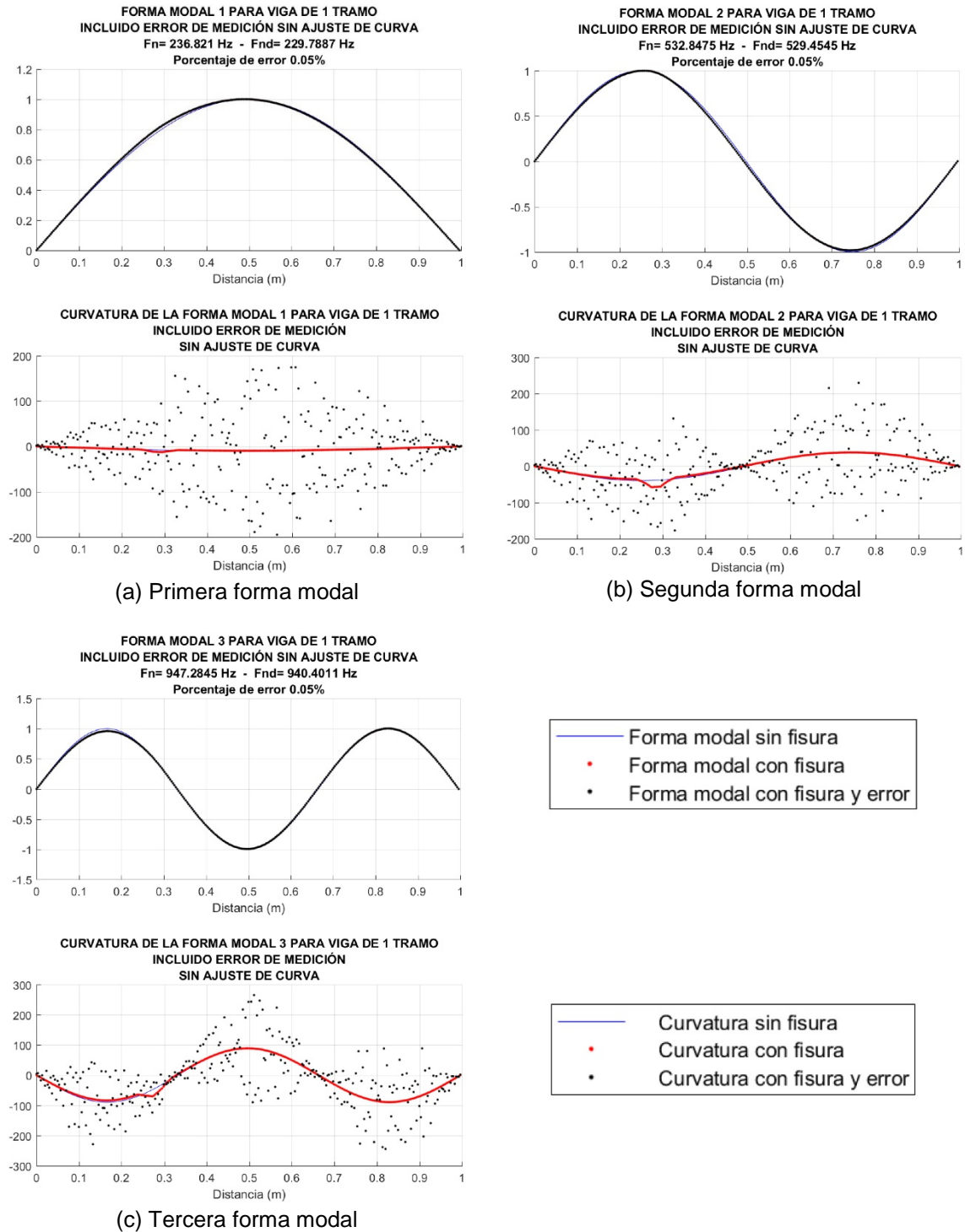
Gráfica 30: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí



En la Gráfica 31, se puede observar las variaciones bruscas en las curvaturas de las formas modales con fisura y sin error de medición, puntos rojos. Se puede observar igualmente las curvaturas sin fisura, con error de medición y sin regresión en los datos, puntos negros, en los cuales se forma una nube de puntos sin ninguna correlación entre ellos.

Se encontró una dispersión máxima de los datos para la curvatura de la deflexión, del orden del 2100%, para la curvatura de la primera forma modal del orden del 2000%, para la segunda forma modal del orden del 470% y para la tercera forma modal del orden del 180%.

Gráfica 31: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y sin regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí



Se aclara que en el caso de las gráficas de las formas modales los puntos correspondientes a la forma modal con fisura (puntos rojos), no se alcanzan a apreciar, ya que se encuentran muy cercanos a los puntos de forma modal con fisura y error (puntos negros). Se pudo observar que a pesar de colocar gran cantidad de fisuras cercanas entre sí, pequeños errores en los datos de las deflexiones crean grandes dispersiones de datos en la curvatura de la deflexión. De manera similar para la gráfica de la curvatura de las formas modales sin fisura (línea continua azul), no se puede apreciar la misma, debido a la escala de la gráfica y a que la curvatura sin fisura (puntos rojos), están muy cercanos y los superponen.

9.5.2. Derivación numérica con regresión datos. De manera similar a lo visto en la sección 9.4.2, se planteó un error mínimo del 0.05%, realizando regresión de datos (suavizado de la curva), el archivo de datos de entrada para este análisis se puede revisar en el Anexo B8. EntradaDatosErrorCaso2ConRegresion.m.

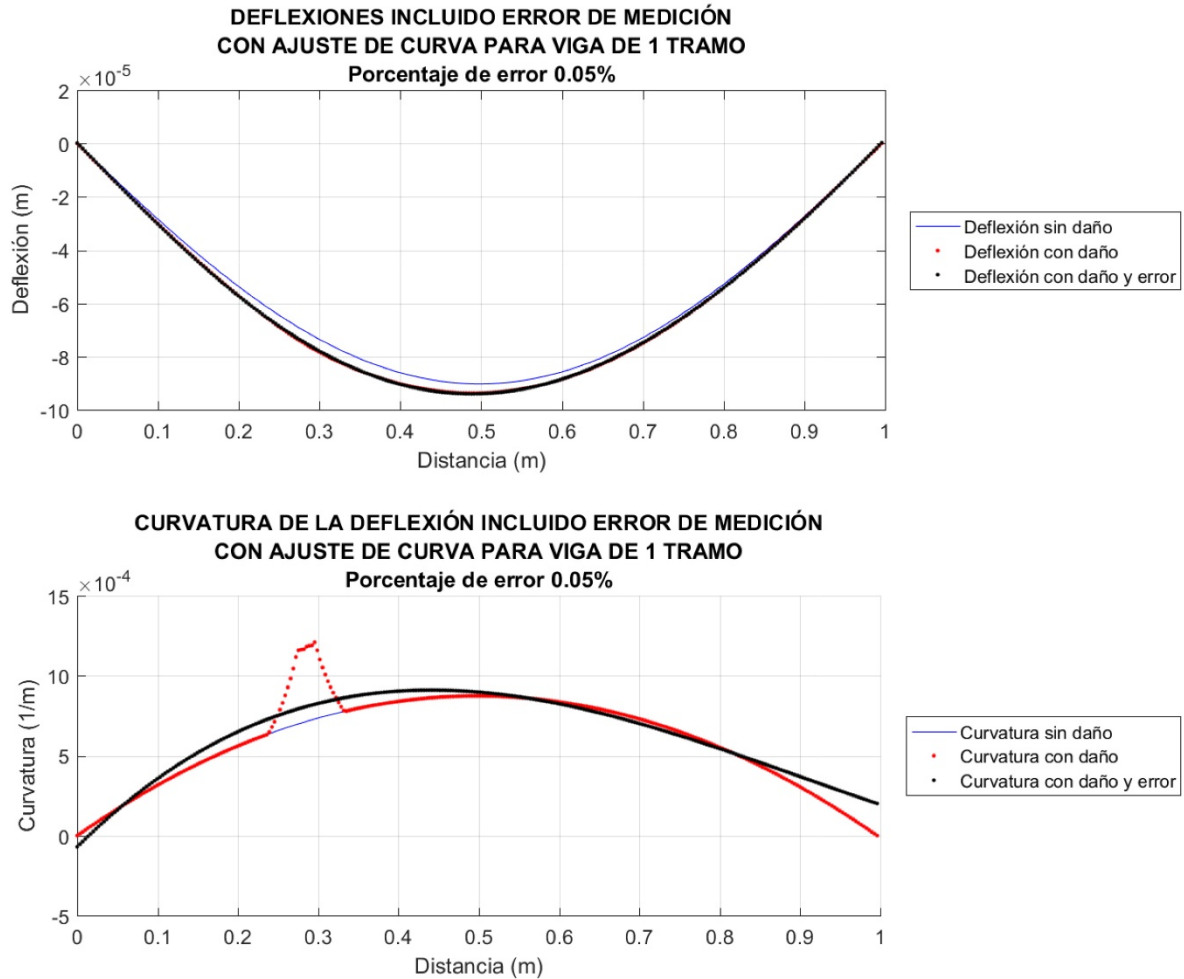
Del análisis realizado, se obtuvieron en el programa AVIF las gráficas de la deflexión y de la curvatura de la deflexión.

En la Gráfica 32, se puede observar en color rojo los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura y sin error de medición, se puede notar un cambio abrupto en esta curva correspondiente a la ubicación de las fisuras. También se puede observar en la misma Gráfica en color negro los puntos de la curvatura de la deflexión con fisura, con error de medición y con regresión de los datos. Se observa, que con la regresión de datos, se pudo mejorar la forma de la curva con respecto a lo tratado en la sección anterior, no obstante al suavizar los datos de la deflexión, la curvatura de la misma deja de mostrar los cambios abruptos que se pueden observar en la gráfica sin error de medición.

Se obtuvieron igualmente las gráficas de formas modales y sus curvaturas, para las tres primeras formas modales, obteniéndose resultados similares.

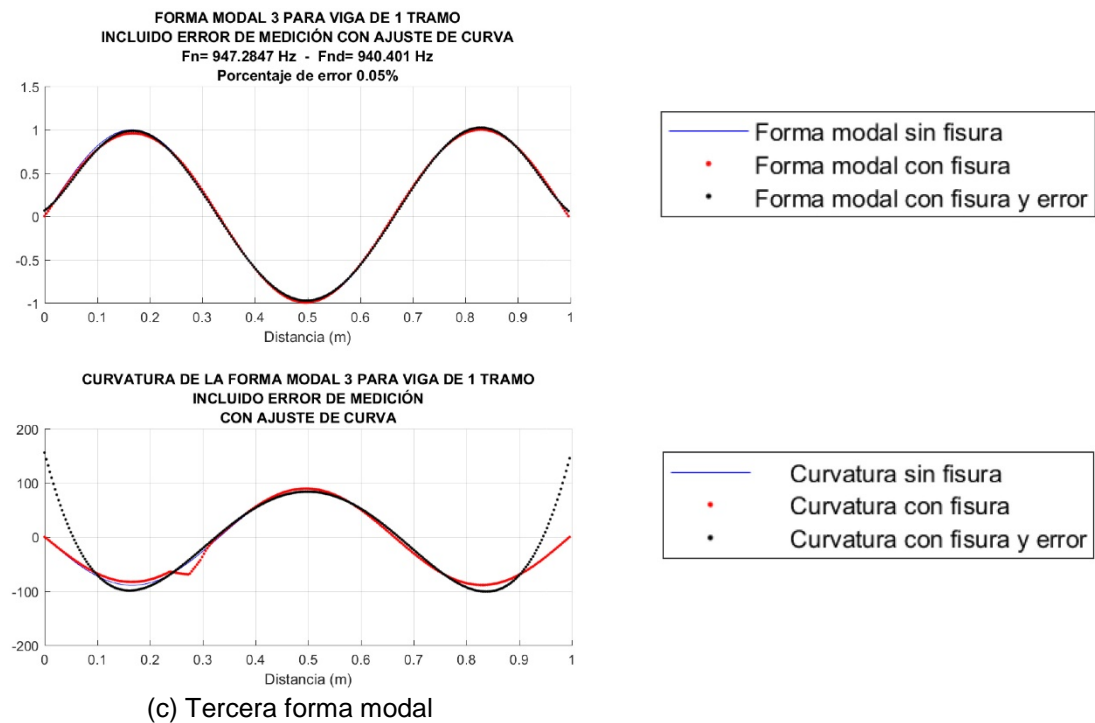
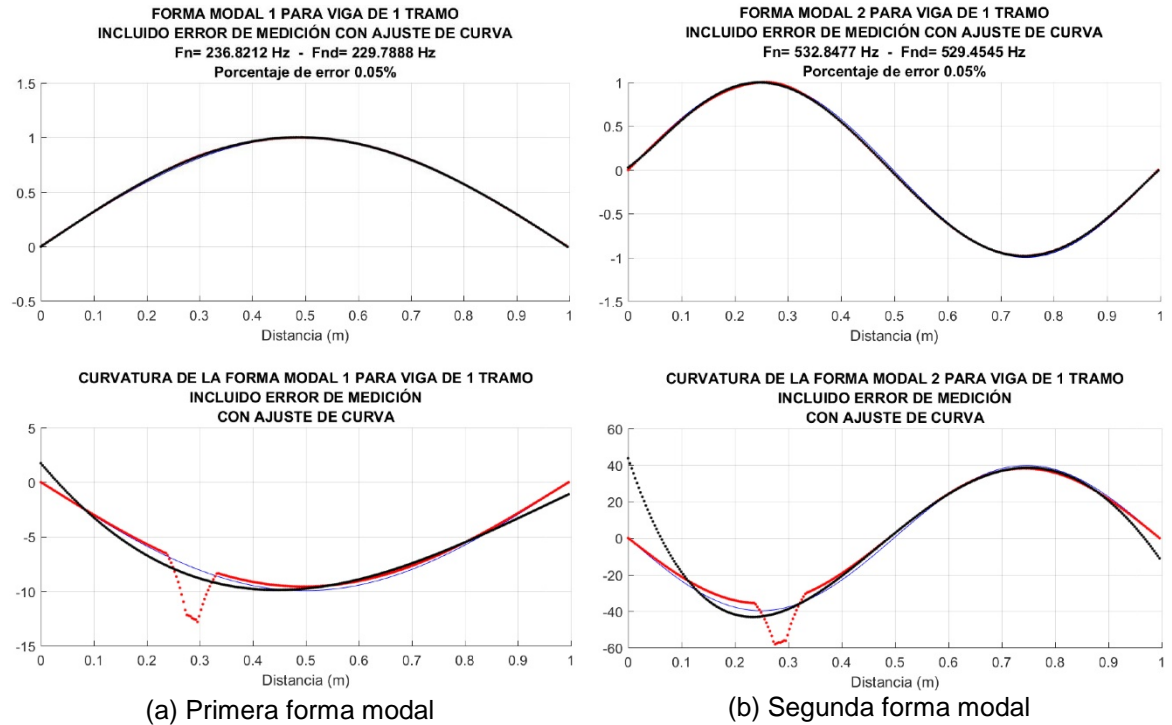
En la Gráfica 33, se puede observar las variaciones bruscas en las curvaturas de las formas modales con fisura y sin error de medición, puntos rojos. Se puede observar igualmente las curvaturas sin fisura, con error de medición y con regresión en los datos, puntos negros, se observa una curva suave que no muestra la ubicación de las fisuras.

Gráfica 32: Deflexión y Curvatura de la Deflexión, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí



Podemos observar que a pesar de modelar una gran cantidad de fisuras concentradas y de suavizar las curvas de las deflexiones. La regresión de datos elimina los cambios abruptos en la curva, además de cambiarle un poco la forma, se puede llegar a hacer una regresión más exacta para tener una forma más cercana a la curva sin error, pero de igual manera eliminaría los cambios abruptos de las curvaturas, es decir quitaría de los datos los efectos de las fisuras.

Gráfica 33: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, Con error de medición y con regresión de datos, modelo con cinco fisuras cercanas entre sí



9.6. CONCLUSIONES SOBRE EL ERROR DE MEDICIÓN

Después de realizar el análisis del efecto del error en los datos sobre las gráficas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, se puede concluir que:

Pequeños errores en los datos de entrada producen grandes variaciones en las curvaturas de la deflexión y las formas modales.

Intentar realizar regresión en los datos de las deflexiones y las formas modales, tampoco produce resultados satisfactorios, porque suavizan las curvas, eliminando los cambios abruptos en las gráficas de curvaturas producidos por las fisuras.

Se evidencia de manera numérica que la presencia de fisuras no puede ser determinada a partir de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, cuando existe ruido presente en los datos de entrada (deflexiones y formas modales). Esta última observación está de acuerdo con lo observado por Cao et Al⁸², por lo tanto para poder utilizar los datos de curvaturas de la deflexión y de las formas modales, como un método para localizar fisuras en vigas, se debería utilizar otro tipo de tratamiento de datos y ser estos corroborados de manera experimental.

⁸² CAO, M.; RADZIENSKI, M.; XU; W.; OSTACHOWICZ, W. Op. cit., p. 468-480.

10. EJEMPLOS NUMERICOS

Se realizaron cuatro casos numéricos a manera de ejemplo, utilizando el modelo de fisura planteado en el capítulo 7. MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS, (pág. 89), con las ecuaciones replanteadas; se obtuvieron las gráficas de deflexiones y formas modales (para los primeros tres modos de vibración), y sus respectivas curvaturas para cada uno de los casos.

10.1.PRIMER EJEMPLO NUMÉRICO, UNA LUZ, APOYOS SIMPLES Y TRES FISURAS

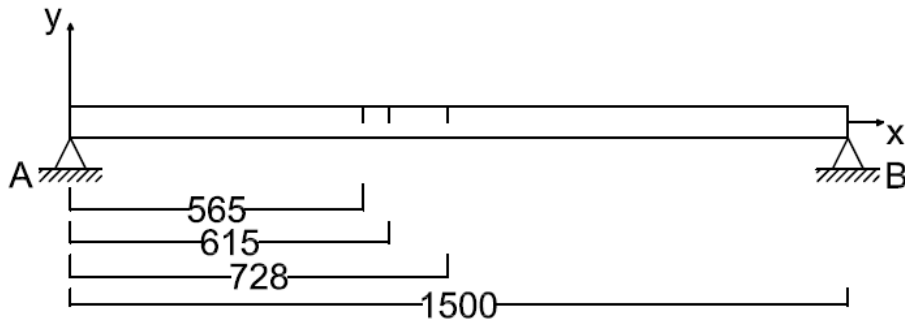
El primer ejemplo es una viga de una sola luz, con apoyos simples en sus extremos, con una carga distribuida por peso propio y tres fisuras, como se puede apreciar en la Figura 29. En la Tabla 29, pueden observarse las características de la viga analizada. En esta viga se modelaron tres fisuras cercanas entre sí.

Tabla 29: Datos de viga para el primer ejemplo resuelto de forma numérica.

Primer ejemplo numérico	
Condiciones de apoyo	Simple – Simple
Material:	Acero
Módulo de Young, E	203.91 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	7800 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33
Longitud de la viga, L	1500 mm
Ancho de la viga, b	20 mm
Altura de la viga, h	60 mm
Carga por peso propio w	49 N/m
# Elementos Finitos	400 E.F.
d_{c1}	20 mm
X_1	565 mm
d_{c2}	20 mm
X_2	615 mm
d_{c3}	20 mm
X_3	728mm

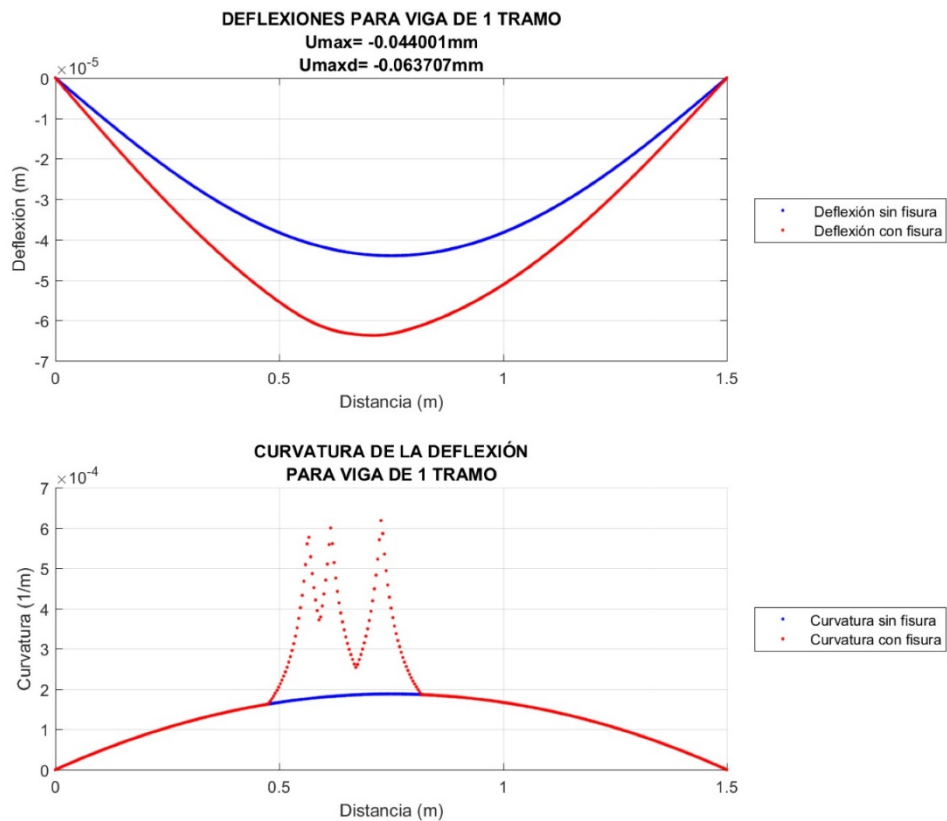
Los datos del modelamiento se pueden consultar en el Anexo B26. EntradaDatosEjemploAdc1.m.

Figura 29: Esquema de viga, primer ejemplo numérico

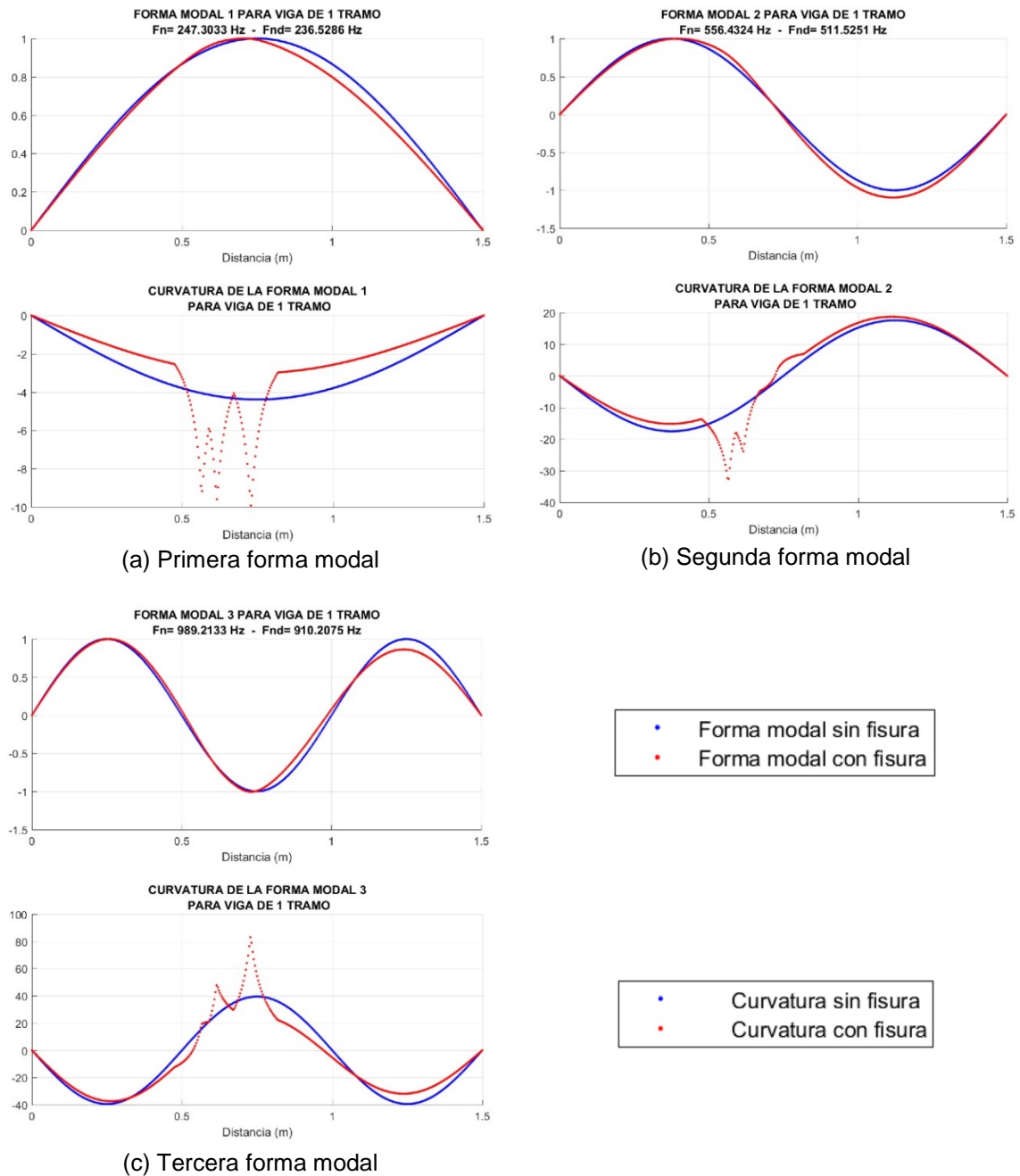


En las gráficas resultantes de la deflexión y formas modales, (ver Gráfica 34 y Gráfica 35), se pueden observar los cambios abruptos en las curvaturas, correspondientes al efecto que tiene la fisura sobre la rigidez de la estructura.

Gráfica 34: Deflexión y su curvatura, para el primer ejemplo numérico



Gráfica 35: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el primer ejemplo numérico



En las gráficas 34 y 35 se puede apreciar que en los sitios donde se modelaron fisuras hay cambios abruptos en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, (para todos los modos analizados), las variaciones máximas en las curvaturas corresponden con la ubicación de las fisuras (0.565m, 0.615m y 0.728m).

10.2.SEGUNDO EJEMPLO NUMÉRICO, DOS LUCES, APOYOS SIMPLES EN LOS EXTREMOS, APOYO CON RESORTE LINEAL INTERMEDIO Y DOS FISURAS CERCANAS A LOS BORDES DE LA VIGA

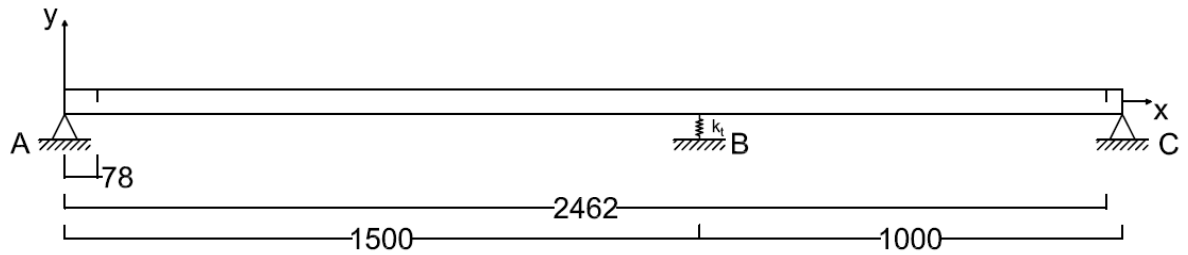
El segundo ejemplo es una viga de dos luces, con apoyos simples en sus extremos y en su punto intermedio un resorte lineal, con una carga distribuida por peso propio y dos fisuras cercanas al borde de la viga, como se puede apreciar en la Figura 30. En la Tabla 30 , pueden observarse las características de la viga analizada. En esta viga se modelaron dos fisuras cercanas a los bordes de la viga.

Tabla 30: Datos de viga para el segundo ejemplo resuelto de forma numérica

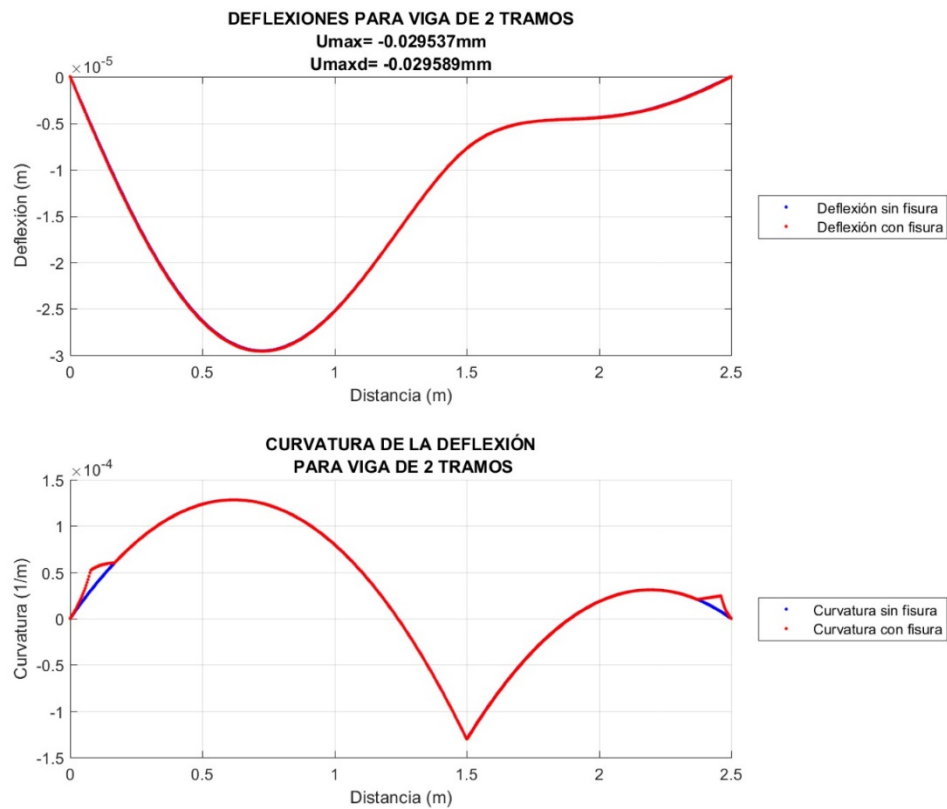
Tercer ejemplo numérico	
Condiciones de apoyo	Simple – Resorte Lineal – Simple
Material:	Acero
Módulo de Young, E	203.91 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	7800 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33
Ancho de la viga, b	20 mm
Altura de la viga, h	60 mm
Longitud primer tramo de viga, L ₁	1500 mm
Carga por peso propio w	49 N/m
# Elementos Finitos en primer tramo de viga	400 E.F.
Longitud segundo tramo de viga, L ₂	1000 mm
# Elementos Finitos en segundo tramo de viga	400 E.F.
d _{c1}	10 mm
X ₁	78 mm
d _{c2}	20 mm
X ₂	2462 mm
Rigidizador de apoyo intermedio	k _t = 10 MN/m

Los datos del modelamiento se pueden consultar en el Anexo B27. EntradaDatosEjemploAdc2.m.

Figura 30: Esquema de viga, segundo ejemplo numérico

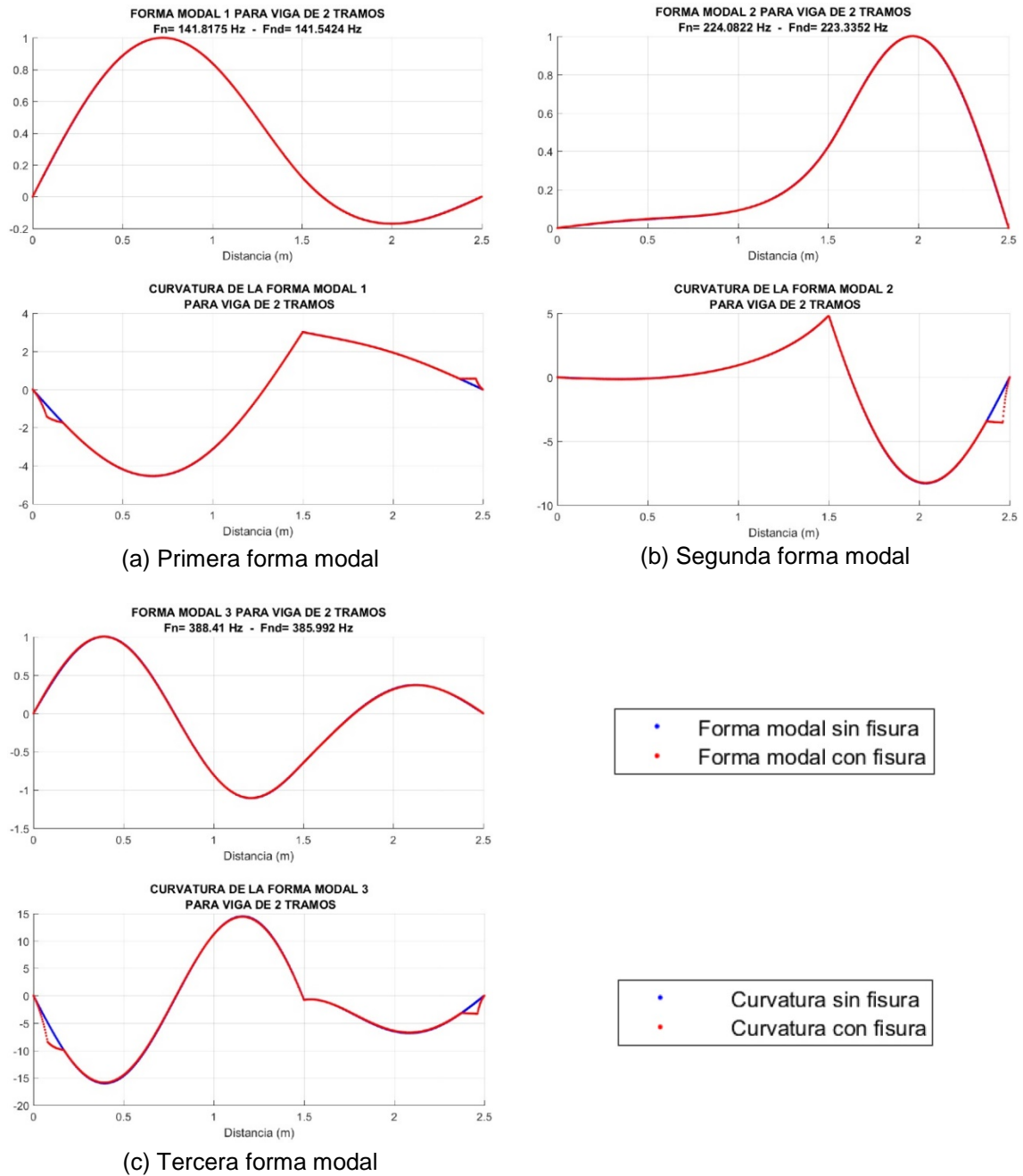


Gráfica 36: Deflexión y su curvatura, para el segundo ejemplo numérico



En las gráficas resultantes de la deflexión y formas modales, (ver Gráfica 36 y Gráfica 37), se pueden observar los cambios abruptos en las curvaturas, correspondientes al efecto que tiene la fisura sobre la rigidez de la estructura.

Gráfica 37: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el segundo ejemplo numérico



Se aprecia (ver gráficas 36 y 37), que en los sitios donde se modelaron fisuras hay cambios abruptos en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, así como el efecto del apoyo con resorte lineal en el nodo de unión de los dos tramos de viga (a 1.5m de distancia en el eje X), las variaciones máximas en las curvaturas corresponden con la ubicación de las fisuras (0.078m y 2.462m).

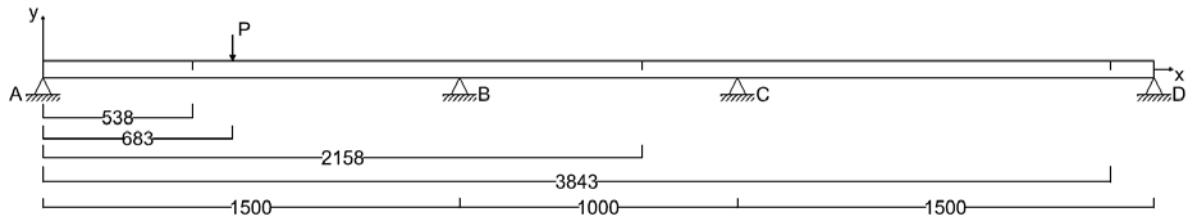
10.3. TERCER EJEMPLO NUMÉRICO, TRES LUCES, APOYOS SIMPLES, CARGA CONCENTRADA Y TRES FISURAS, UNA EN CADA LUZ.

El tercer ejemplo es una viga de tres luces, con apoyos simples, con una carga distribuida por peso propio y una carga Puntual en el primer tramo de viga, con tres fisuras, una en cada luz de la viga, tal como se puede apreciar en la Figura 31. En la Tabla 31, pueden observarse las características de la viga analizada. En esta viga se modelaron fisuras simples en cada tramo de viga.

Tabla 31: Datos de viga para el tercer ejemplo resuelto de forma numérica

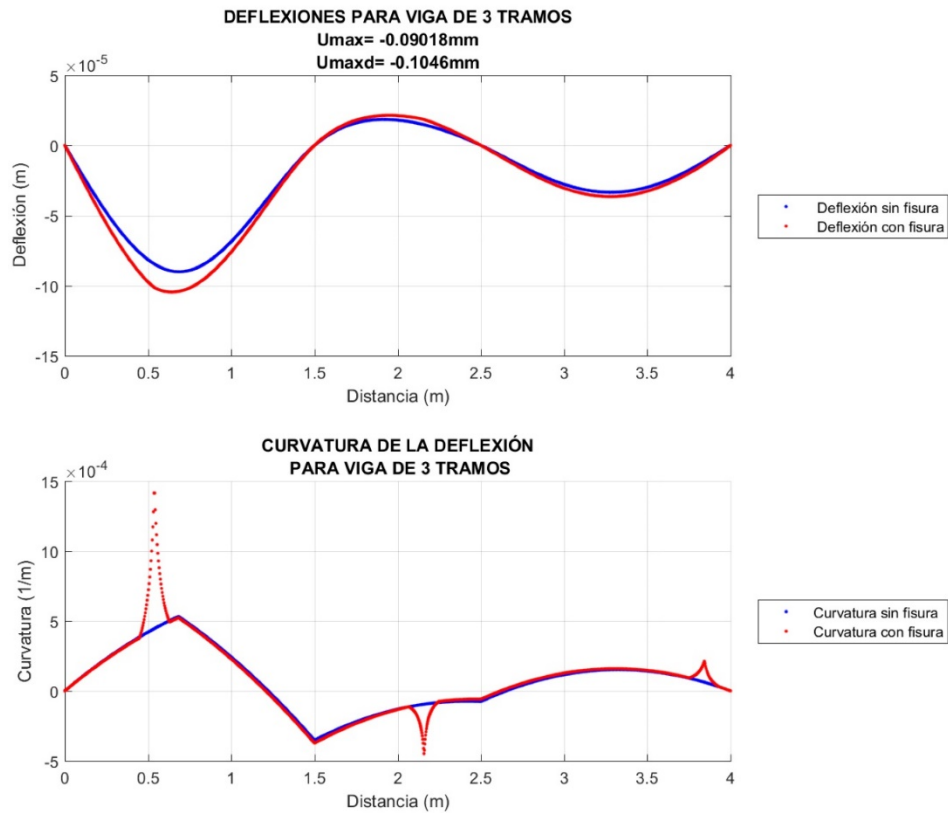
Tercer ejemplo numérico	
Condiciones de apoyo	Simple – Simple – Simple – Simple
Material:	Acero
Módulo de Young, E	203.91 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	7800 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33
Ancho de la viga, b	20 mm
Altura de la viga, h	60 mm
Longitud primer tramo de viga, L_1	1500 mm
Carga por peso propio w	49 N/m
Carga puntual	100 N
Distancia de aplicación carga puntual X_p	683 mm
# Elementos Finitos en primer tramo de viga	400 E.F.
Longitud segundo tramo de viga, L_2	1000 mm
# Elementos Finitos en segundo tramo de viga	400 E.F.
Longitud tercer tramo de viga, L_3	1500 mm
# Elementos Finitos en segundo tramo de viga	400 E.F.
d_{c1}	20 mm
X_1	538 mm
d_{c2}	25 mm
X_2	2158 mm
d_{c3}	20 mm
X_3	3843 mm
Carga concentrada	100 N
$X_{\text{carga concentrada}}$	683 mm

Figura 31: Esquema de viga, tercer ejemplo numérico



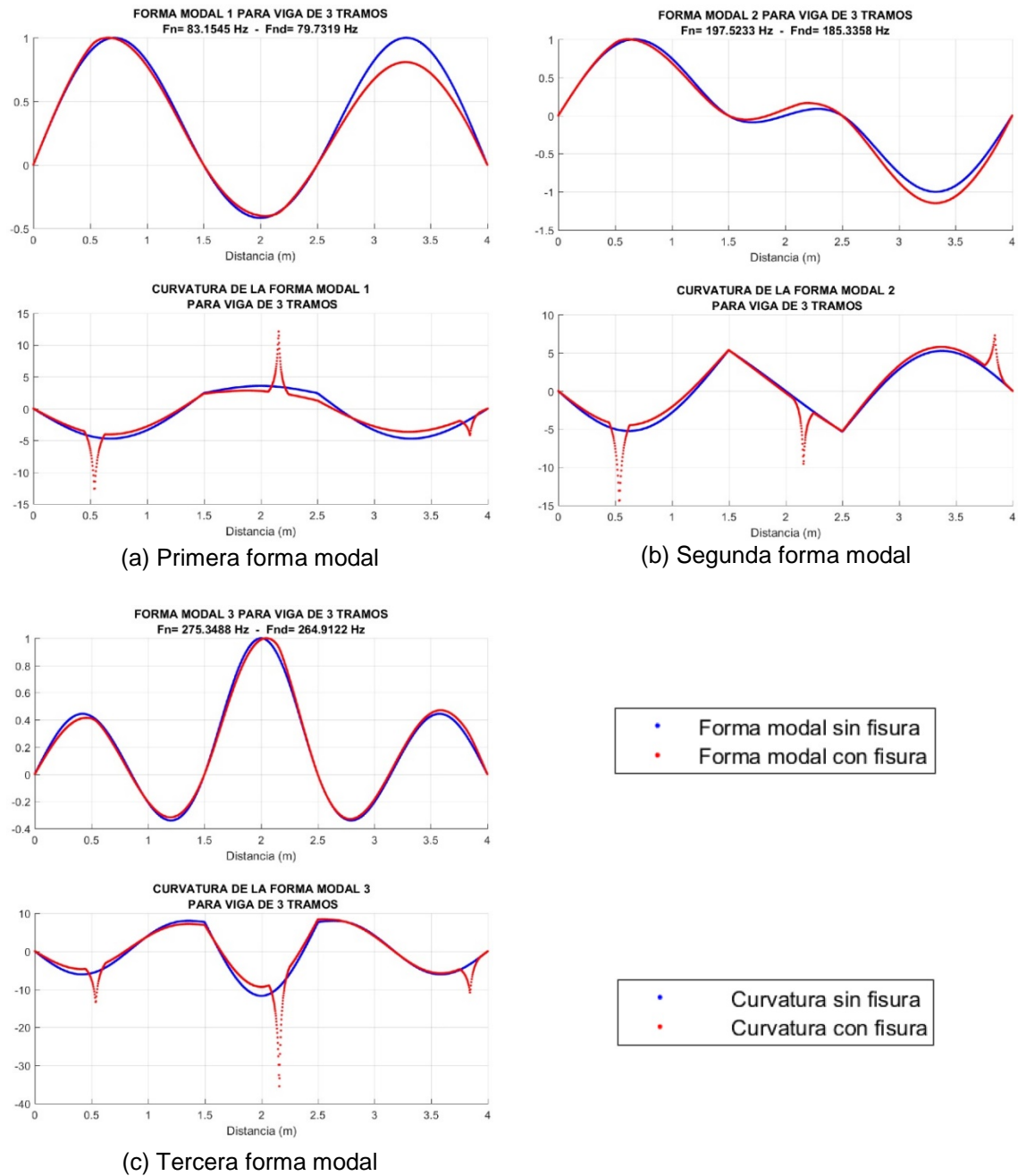
Los datos del modelamiento se pueden consultar en el Anexo B28.
EntradaDatosEjemploAdc3.m

Gráfica 38: Deflexión y su curvatura, para el tercer ejemplo numérico



Es importante recordar que como se vio en la sección 2.3, dentro del alcance del modelo utilizado está que las fisuras son abiertas (no se abren y se cierran) y su tamaño no varía con el tiempo.

Gráfica 39: Formas modales y Curvaturas de las formas modales, para el tercer ejemplo numérico



En este ejemplo se puede ver en las gráficas 38 y 39, los cambios abruptos en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, correspondientes a los sitios donde se modelaron las fisuras (0.538m, 2.158m y 3.843m), así como el efecto de la carga puntual sobre la curvatura de la deflexión (0.683m).

10.4. CUARTO EJEMPLO ADICIONAL, UNA LUZ, APOYOS SIMPLES Y TRES FISURAS CERCANAS.

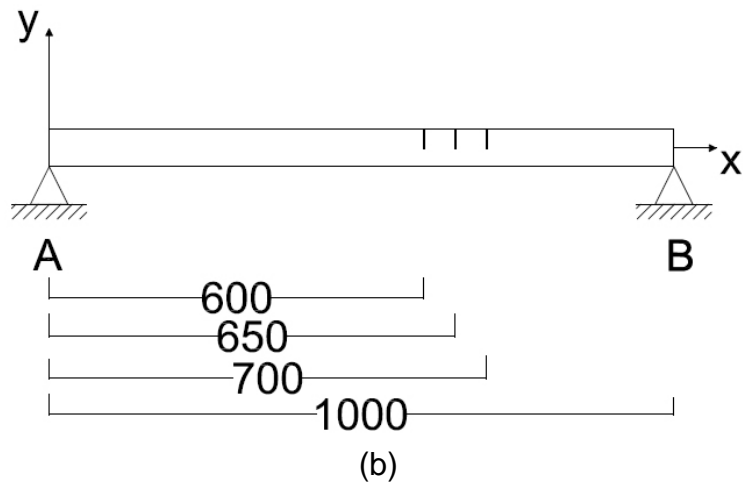
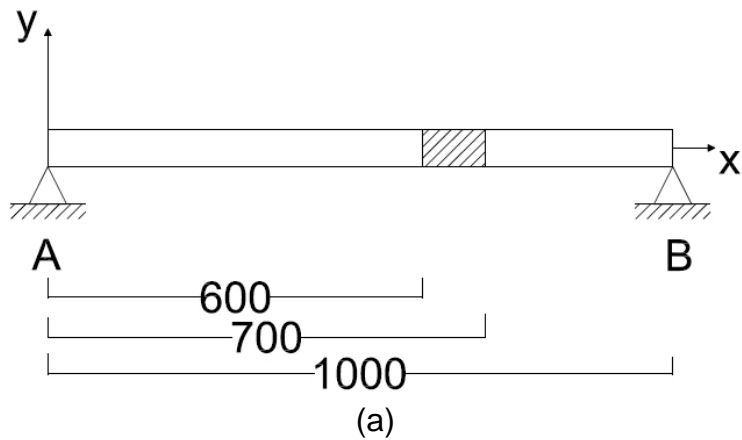
En este ejemplo se busca comparar el efecto que tiene la utilización de una reducción de la rigidez como un porcentaje contra el modelo de fisura extendido de Sinha, Friswell y Edwards, desarrollado en el presente trabajo. Para ello se realizó la simulación numérica de una viga de 1000 mm de longitud a la cual se le simuló por una parte una reducción de rigidez del 75%, entre los 600mm y 700mm y la misma viga con tres fisuras de altura, localizadas a 600mm, 650mm y 700mm, como se puede apreciar en la Figura 32. En la Tabla 32, pueden observarse las características de la viga analizada. En esta viga se modelaron tres fisuras cercanas entre sí.

Tabla 32: Datos de viga para el primer ejemplo resuelto de forma numérica

Primer ejemplo numérico	
Condiciones de apoyo	Simple – Simple
Material:	Acero
Módulo de Young, E	203.91 GN/m ²
Densidad de masa, ρ	7800 kg/m ³
Módulo de Poisson, ν	0.33
Longitud de la viga, L	1000 mm
Ancho de la viga, b	50 mm
Altura de la viga, h	100 mm
Carga por peso propio w	390 N/m
# Elementos Finitos	50, 90, 130 y 250 E.F.
d_{c1}	10 mm
X_1	600 mm
d_{c2}	10 mm
X_2	650 mm
d_{c3}	10 mm
X_3	700mm
Factor de reducción de rigidez	25%

Los datos del modelamiento se pueden consultar en el Anexo B29. EntradaDatosCasoDC1.m.

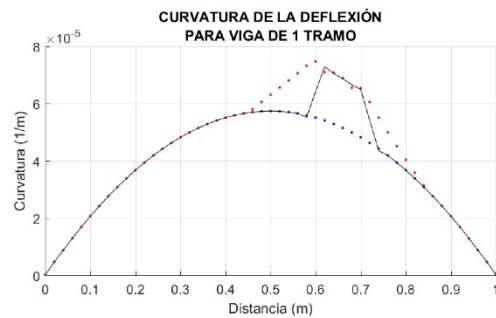
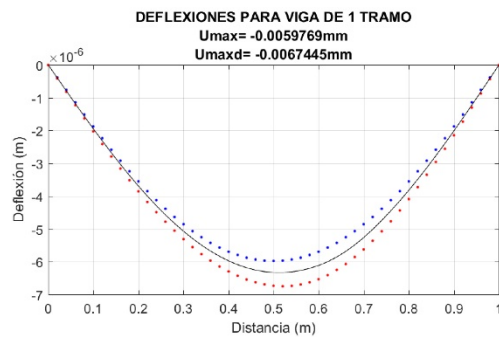
Figura 32: Esquema de viga, cuarto ejemplo numérico, a) con reducción general de rigidez porcentual y b) con tres fisuras



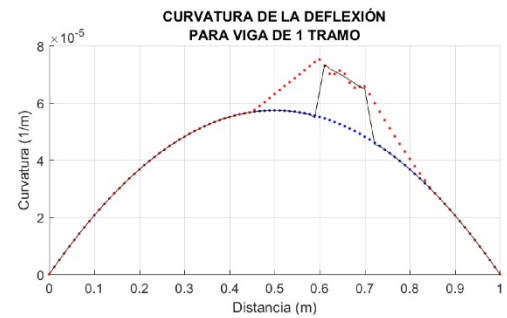
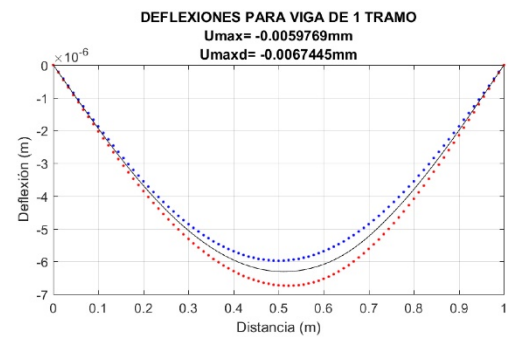
En las gráficas resultantes de la deflexión y formas modales, (gráficas 40 a 43), se puede observar que el modelo de daño utilizado (en este caso reducción de rigidez porcentual de elementos finitos y variación lineal de la rigidez según el método de Sinha, Friswell y Edwards extendido), afecta la forma de los cambios observados en las curvaturas, los resultados obtenidos con la variación porcentual de la rigidez se corresponden con lo observado por lo observado por Dessi & Camerlengo⁸³.

⁸³ DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Op. cit., p. 185-186.

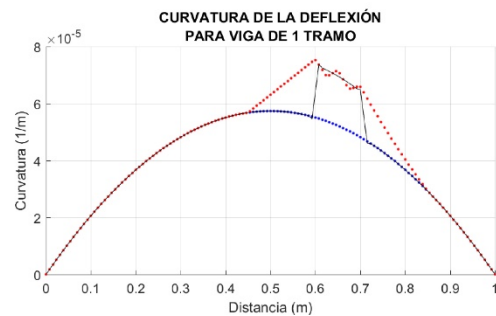
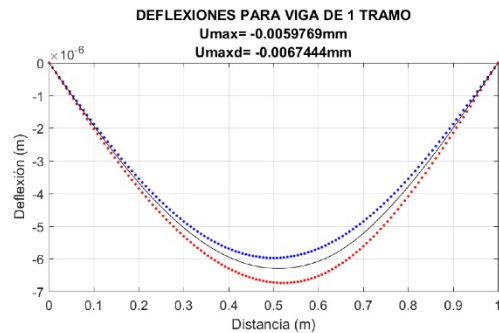
Gráfica 40: Deflexión y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos



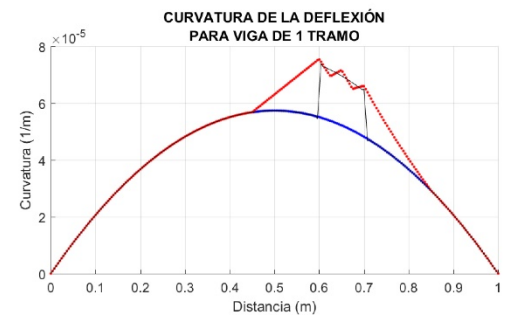
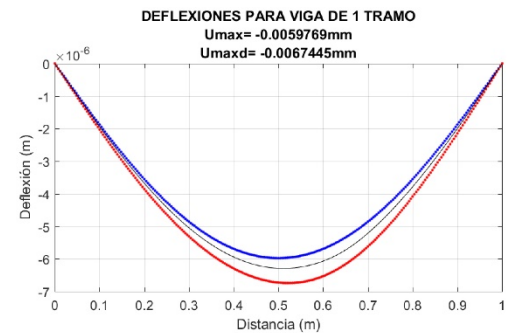
(a) 50 elementos finitos



(b) 90 elementos finitos



(c) 130 elementos finitos

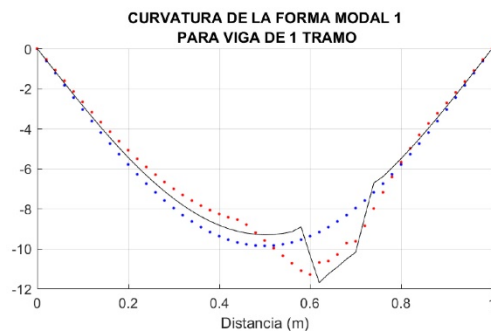
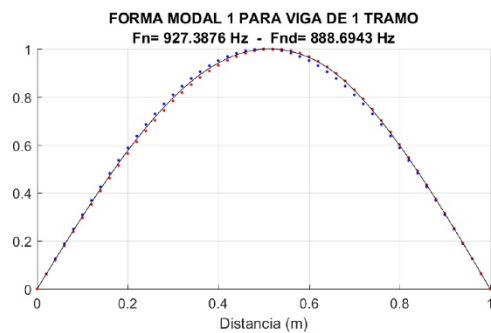


(d) 250 elementos finitos

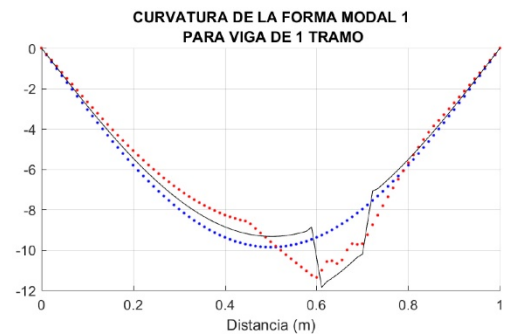
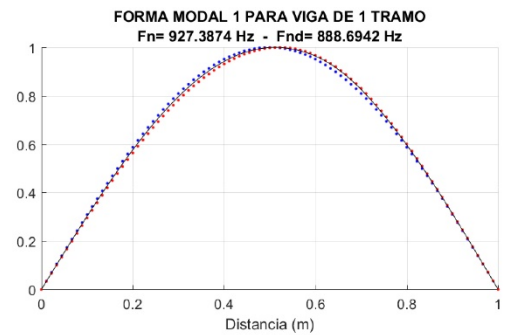
• Deflexión sin fisura
• Deflexión con fisura modelo extendido
— Deflexión con reducción de rigidez

• Curvatura sin fisura
• Curvatura con fisura modelo extendido
— Curvatura con reducción de rigidez

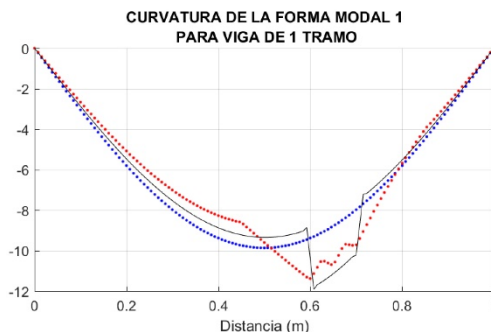
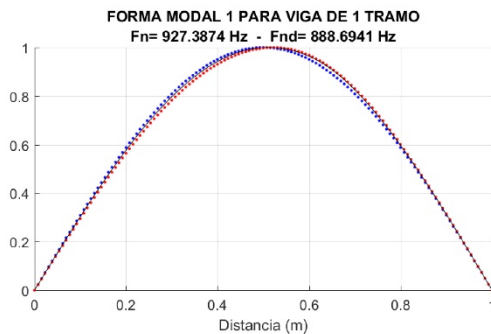
Gráfica 41: Primera forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos



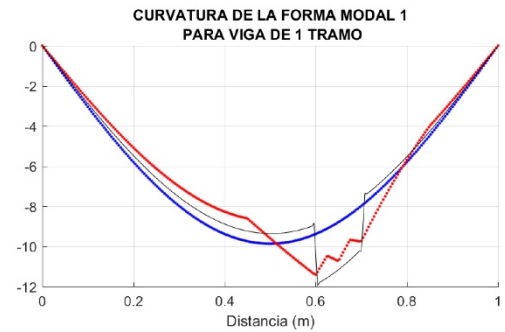
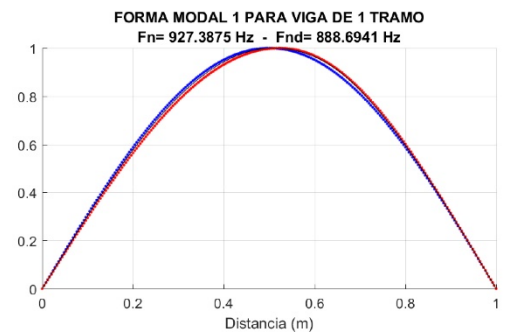
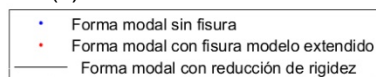
(a) 50 elementos finitos



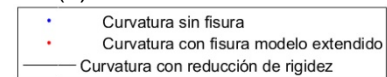
(b) 90 elementos finitos



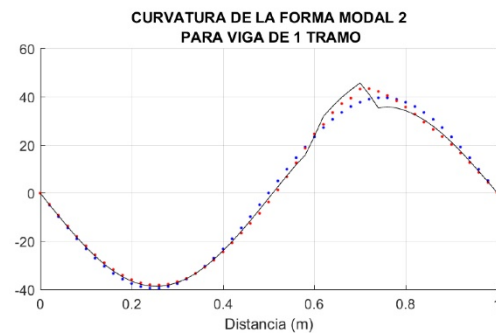
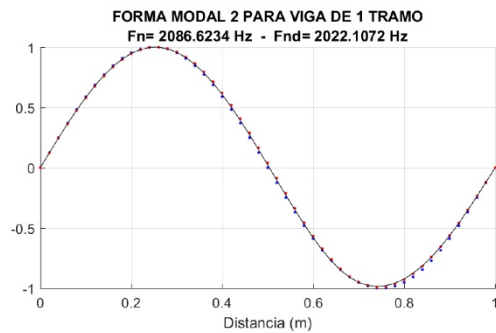
(c) 130 elementos finitos



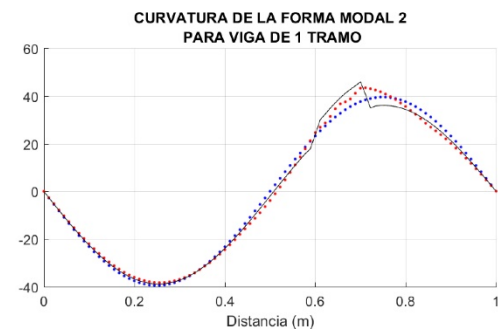
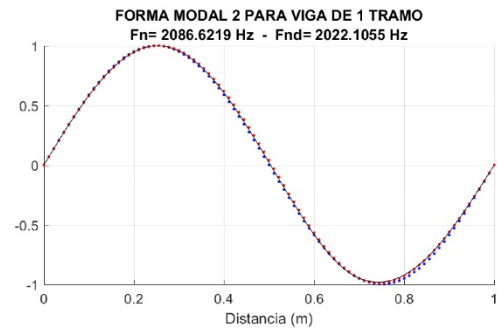
(d) 250 elementos finitos



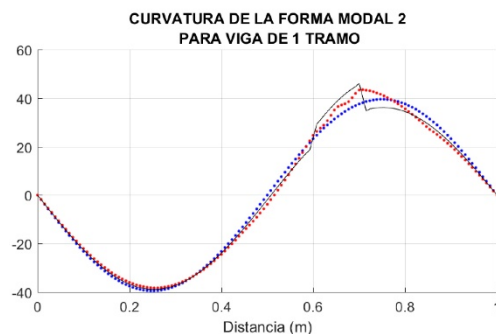
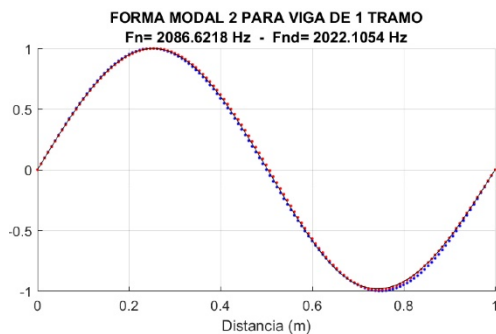
Gráfica 42: Segunda forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos



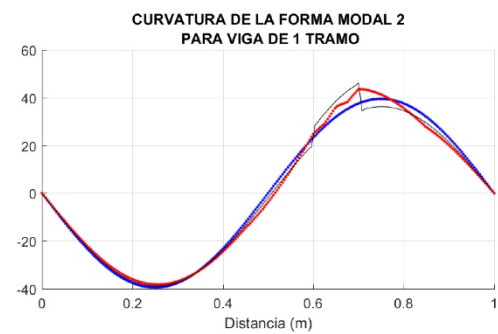
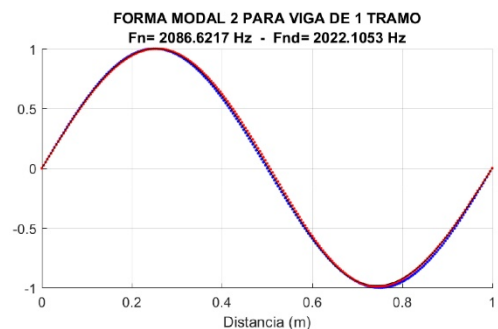
(a) 50 elementos finitos



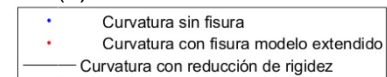
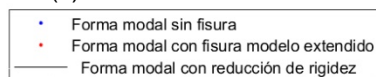
(b) 90 elementos finitos



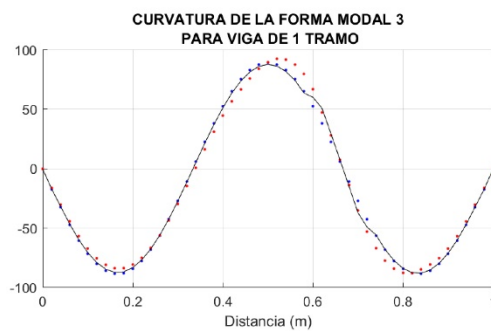
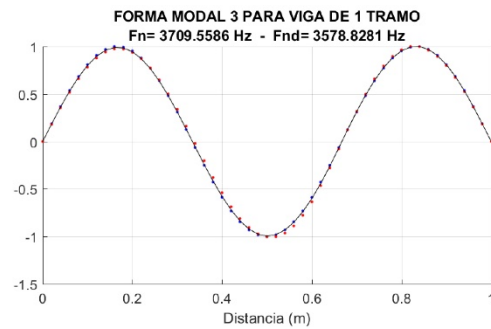
(c) 130 elementos finitos



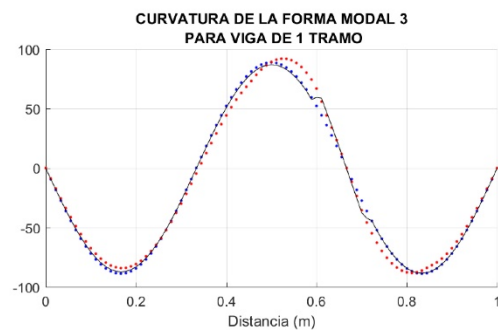
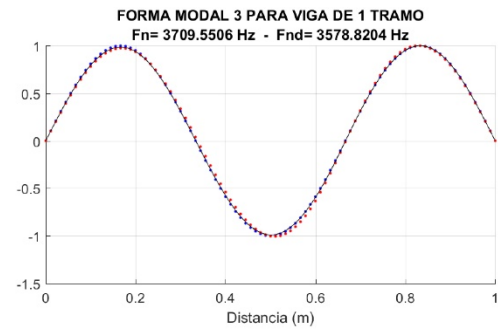
(d) 250 elementos finitos



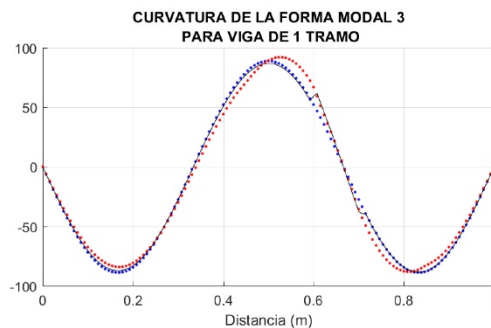
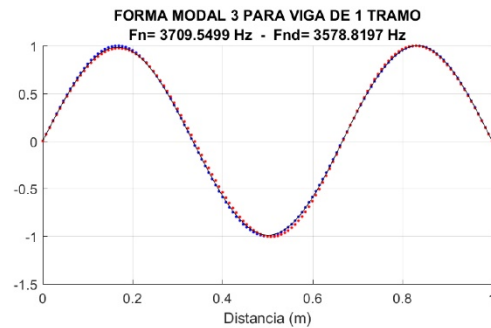
Gráfica 43: Tercera forma modal y su curvatura, para el cuarto ejemplo numérico, variando la cantidad de elementos finitos



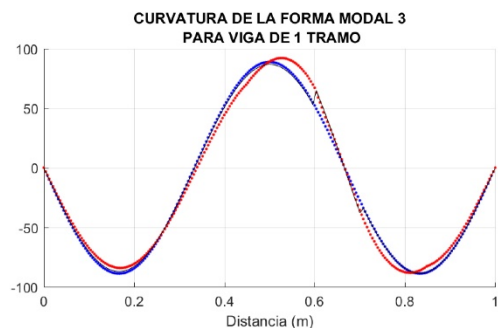
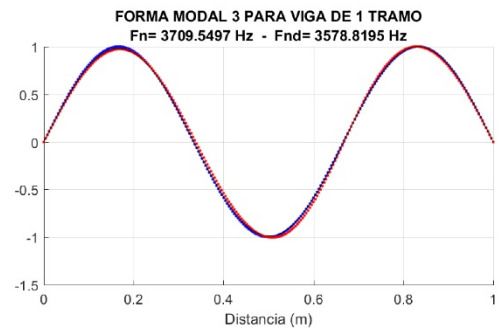
(a) 50 elementos finitos



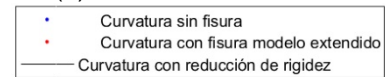
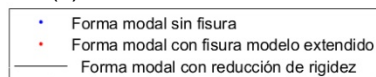
(b) 90 elementos finitos



(c) 130 elementos finitos



(d) 250 elementos finitos



Se puede concluir (ver gráficas 40 a 43), que el modelo utilizado para simular el daño, influye en la forma de las curvaturas de la deflexión y las formas modales.

Dentro del alcance del presente trabajo de grado se estableció el análisis de vigas de hasta tres luces, sin embargo el programa AVIF, se dejó abierto para trabajar vigas de cualquier número de luces continuas.

Se entrega el código fuente de manera libre, para quien requiera realizar otros ejemplos o necesite modificar el mismo.

11. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MODELO DE FISURA EXTENDIDO DE SINHA, FRISWELL Y EDWARDS

11.1. VENTAJAS DE LAS ECUACIONES REPLANTEADAS

Las ecuaciones replanteadas solucionan las dificultades señaladas en la sección 6.6., teniendo las siguientes ventajas:

1. Las reducción de inercia ocasionada por las fisuras se modela dentro de varios elementos finitos, lo cual influye en la el patrón que presentan los cambios abruptos de las curvaturas de las deflexiones y de las formas modales⁸⁴, permitiendo obtener una mayor cantidad de puntos para graficar cercanos a la fisura.
2. Permite modelar fisuras en la proximidad de los extremos de la viga elementos.
3. Permite modelar fisuras cercanas entre sí, aclarándose que las fisuras que se encuentren cercanas entre sí deben ser modeladas con una altura igual, y de la misma forma, que para la solución de esta dificultad se basó en una hipótesis, sobre la cual no se tienen datos experimentales de su validez, ver sección 7.7.

11.2. DESVENTAJAS DE LAS ECUACIONES REPLANTEADAS

Cómo principal desventaja de la nueva formulación de las ecuaciones de Sinha, Friswell y Edwards, está la falta de datos experimentales, sobre los cuales validar algunas de las hipótesis planteadas. Se logró realizar validación del modelo con base en los resultados de frecuencias naturales obtenidos por Sinha, Friswell y Edwards⁸⁵, para los casos estudiados por ellos dentro de las limitaciones del planteamiento inicial de estas ecuaciones, obteniéndose resultados satisfactorios y que apuntan a que el nuevo planteamiento es adecuado para el modelamiento de fisuras en vigas, bajo la teoría de Euler-Bernoulli, ver sección 8.1. (pág. 111).

Sin embargo el hecho de no poseer más datos experimentales limita la validez del nuevo modelo, por lo que un paso a seguir en posibles nuevos trabajos, es realizar más experimentos para comprobar la validez del mismo. Dentro de estos experimentos se podría analizar: el efecto de fisuras cercanas al borde de las vigas, la validez del modelo utilizado para fisuras cercanas entre sí, y diferentes condiciones de apoyo y materiales. Cómo se pudo observar para los casos experimentales la variable a medir seria la frecuencia natural, tanto para vigas con fisuras y sin fisuras, con el fin de comprobar con esta la validez del modelo.

⁸⁴ Ibid., p. 185-186.

⁸⁵ SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Op. cit., p. 22, 24, 25.

12. CONCLUSIONES

Una vez realizados y analizados los diferentes casos estudiados podemos concluir:

Se extendió el alcance del modelo matemático de fisuras de Sinha, Friswell y Edwards⁸⁶, realizando una propuesta de un nuevo modelo, acompañada esta de un desarrollo de rutinas en MATLAB®, con el programa AVIF. Con este nuevo modelo propuesto se espera haber superado algunas de las dificultades del modelo inicial, ver sección 6.6. Sin embargo aunque el mismo se comprobó con base en la información experimental obtenida por Sinha, Friswell y Edwards⁸⁷, es recomendable la realización de pruebas de laboratorio (utilizando las frecuencias naturales como parámetro), que permitan comprobar de manera experimental la validez de algunas de las hipótesis de comportamiento efectuadas (ver secciones 7.6 y 7.7).

El modelo propuesto presentó unos resultados muy cercanos a los obtenidos por el modelo numérico de Sinha, Friswell y Edwards, con una variación máxima de los datos de frecuencias naturales del 3.56%, (ver tablas 19, 21, 23 y 25) y los datos experimentales de frecuencias naturales obtenidos por estos mismos autores, diferencia máxima de 3.53%, (ver tablas 20, 22, 24 y 26). Por lo anterior se puede concluir que las variaciones en las frecuencias naturales son confiables como indicador de presencia de fisuras en una viga.

Se pudo comprobar de manera numérica que las fisuras en vigas producen efectos en las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, lo cual es válido únicamente para datos sin ruido (debidos a errores de medición⁸⁸).

Un pequeño error de los datos de medición, crea grandes variaciones en las curvaturas de la deflexión y de la forma modal, ya que estas se hallan al derivar dos veces numéricamente los datos de deflexión y de formas modales, y cualquier error es amplificado por dichas derivaciones. Por esta situación se deberían realizar investigaciones adicionales tendientes a aplicar la teoría desarrollada en el presente trabajo de grado en la detección de fisuras, ya que hasta el punto alcanzado solamente es aplicable para modelamiento y análisis.

Se elaboró un ejemplo numérico en el cual se comparó el modelo desarrollado en el presente trabajo con el modelo de reducción porcentual de la rigidez (ver sección 10.4, pág. 171), tal como lo desarrollan Dessi & Camerlengo⁸⁹, se encontró que el

⁸⁶ Ibíd., p. 13-38.

⁸⁷ Ibíd., p. 21-25.

⁸⁸ CAO, M.; RADZIENSKI, M.; XU; W.; OSTACHOWICZ, W. Op. cit., p. 468-480.

⁸⁹ DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Op. cit., p. 185-186.

modelo de daño utilizado influye en el patrón que toman los cambios abruptos de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales.

En este mismo ejemplo se realizaron variaciones al número de elementos finitos utilizados en el modelamiento, encontrándose que el modelo muestra cambios abruptos en las curvaturas de la deflexión y las formas modales con diferente cantidad de elementos finitos, obteniéndose curvas más definidas con un número de elementos finitos mayor.

En el capítulo 7, se desarrolló la ampliación de la formulación propuesta por Sinha, Friswell y Edwards, validándose los resultados obtenidos con el nuevo modelo en el capítulo 8, cumpliéndose de esta manera con el objetivo general del trabajo de grado.

En los capítulos 8 y 10, se mostró de manera gráfica las variaciones abruptas de las curvaturas de la deflexión y de las formas modales, las cuales corresponden con la ubicación de las fisuras en cada uno de los casos, con lo que se dio cumplimiento al primer objetivo específico.

En el capítulo 9, se analizó el efecto de errores en los datos, (errores de medición por equipos y humanos, simulados como una variación aleatoria dentro de unos límites máximo y mínimo), encontrándose que pequeños errores en la medición de los datos de deflexión y formas modales, producen grandes variaciones en las gráficas de sus curvaturas. Con lo cual se dio cumplimiento al segundo objetivo específico.

En los Anexos A al G, se relaciona el código fuente de las rutinas AVIF, programadas en MATLAB®. Se presentan igualmente, los archivos en formato nativo de MATLAB®, en el CD anexo. Con esto se da cumplimiento al tercer y último objetivo específico de este trabajo. Al entregar toda la formulación desarrollada, y el código fuente programado, se espera haber podido contribuir a futuros proyectos de la comunidad académica.

BIBLIOGRAFÍA

BEGAMBRE, O.; LAIER, J. Detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura: estudo analítico com aplicação a estruturas do tipo viga. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Pablo, Universidade de São Pablo, 2006, vol. 8 no. 35, p. 29-45.

BLEVINS, R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. New York. Van Nostrand Reinhold, 1979.

CAO, M.; RADZIENSKI, M.; XU, W.; OSTACHOWICZ, W. Identification of multiple damage in beams based on robust curvature mode shapes. Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 2014, vol. 46 no. 2, p. 468-480.

CARRERA, E.; GIUNTA, G.; PETROLO, M. Beam structures, classical and advanced theories. New Delhi, Wiley, 2011.

CHAPANIS, A. Theory and method for analyzing errors in man-machine systems. Annals of the Nueva York Academy of Science. Wiley, 1951, vol. 51, no. 7, p. 1179-1203.

CHAPMAN, S. J. MATLAB Programming with applications for engineers. Stanford, Cenage Learning, 2013.

CHAPRA, S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. New York, McGraw Hill, 2012.

CHOPRA, A. K. Dinámica de estructuras. Ciudad de México, Pearson, 2014.

CHRISTIDES, S.; BARR, A. D. One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. International Journal of Mechanical Science, USA, Pergamon, 1984, vol. 26 no. 11-12, p. 639-648.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. Dynamics of Structures. Berkeley, Computer and Structures, Inc., 2010.

DESSI, D.; CAMERLENGO, G. Damage identification techniques via modal curvature analysis: Overview and comparison. Mechanical systems and signal procesing, 2015, Elsevier, vol. 52, n. 53, p. 181-205.

DOYLE, J. F. Static and Dynamic Analysis of Structures. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. Differential Equations & Linear Algebra. New York, Pearson, 2008.

FRISWELL, M. I. Publications - Michael I Friswell, Errata for Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data, 2002. (Recuperado el 14 de 4 de 2017.) Disponible en: http://michael.friswell.com/PDF_Files/J77.html

GARCÉS, F.; GENATIOS, C.; GARCÍA, P.; LAFUENTE, M.; ASCANIO, W. Identificación del daño en vigas simplemente apoyadas usando datos dinámicos. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Elsevier, 2008, vol. 24, no. 4, p. 357-368.

LAIBLE, J. P. Análisis estructural. Naucalpan, McGraw-Hill/Interaéfrica de México, 1992.

MEHRJOO, M.; KHAJI, N.; GHAFORY-ASHTIANY, M. Application of genetic algorithm in crack detection of beam-like structures using a new cracked Euler-Bernoulli beam element. Applied Soft Computing, Elsevier, 2013, vol. 13, no. 2, p. 867-880.

PAZ, M. Matrix structural analysis & dynamics, theory and computation. Berkeley, Computers and Structures Inc., 2009.

PILKEY, W. D. Formulas for stress, strain, and structural matrices. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2005.

REASON, J. El error humano. Madrid, Modus Laborandi, 2009.

SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; EDWARDS, S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2002, vol. 251, no. 1, p. 13-38.

SUÁREZ, L. E. Análisis de estructuras con cargas dinámicas. Tomo II: Sistemas de múltiples grados de libertad. Mayagüez, Puerto Rico, CreateSpace, 2014.

VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ, E. El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural. Madrid, Noela, 2001.

WEAVER, W.; JOHNSTON, P. R. Structural Dynamics by Finite Elements. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987.

YANG, T. Y. Finite element structural analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1986.

ANEXOS

En el CD adjunto se entregan los archivos relacionados en este anexo (*), para que los mismos funcionen, todos los scripts deben estar dentro de la misma carpeta.

Adicional a los archivos de MATLAB®, se entregan en el CD adjunto, las hojas de cálculo utilizadas para la validación de datos. Presentados en los capítulos 5, 8, 9 y 10.

Anexo A: Instrucciones para el uso del programa AVIF, elaborado en MATLAB®

A1. Instrucciones para el cambio de datos de la viga a analizar

En el presente trabajo de grado, se entregan los códigos fuente en MATLAB®, en el Anexo A2, se presenta la relación entre las diferentes funciones del programa AVIF.

El archivo que se debe correr para calcular la viga se llama VigaFisurada.m.

El archivo donde se modifican los datos de la viga es EntradaDatos.m, en este archivo se deben modificar los datos para las vigas que se quieran analizar. Se pueden modelar vigas de n-tramos, en el trabajo de grado se analizaron vigas de hasta tres tramos, sin embargo el código está para analizar vigas de más tramos.

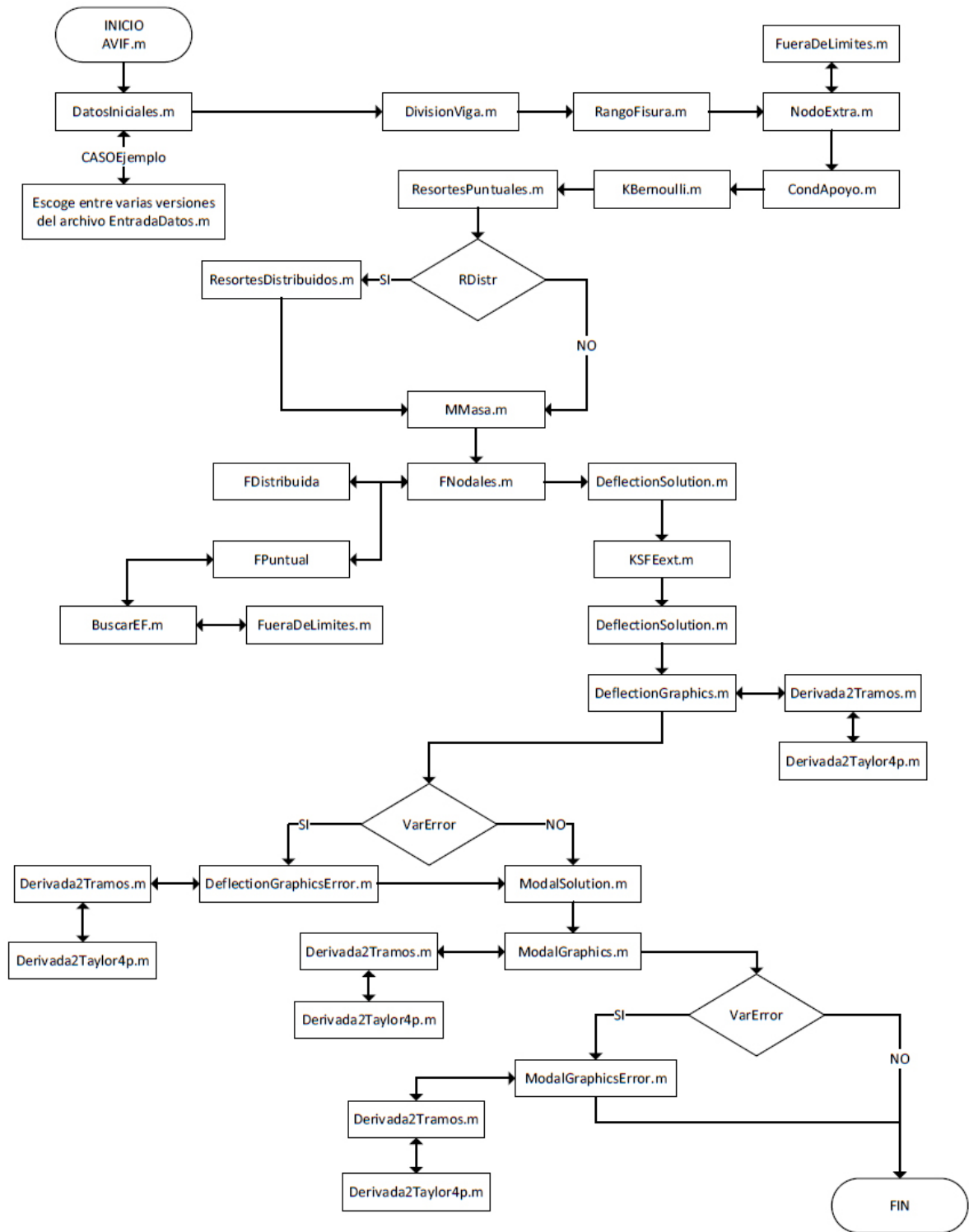
En el archivo EntradaDatos.m se hacen comentarios sobre las diferentes variables, su función y restricciones.

Al inicio de la rutina VigaFisurada.m se establece la variable CASOEjemplo, esta variable toma valores entre 0 y 23. El valor de 0 en esta variable hace correr la rutina VigaFisurada.m con diferentes datos que pueden ser modificados, los valores de CASOEjemplo entre 1 y 23, corren los diferentes casos de análisis, validación y ejemplos presentados en este trabajo de grado.

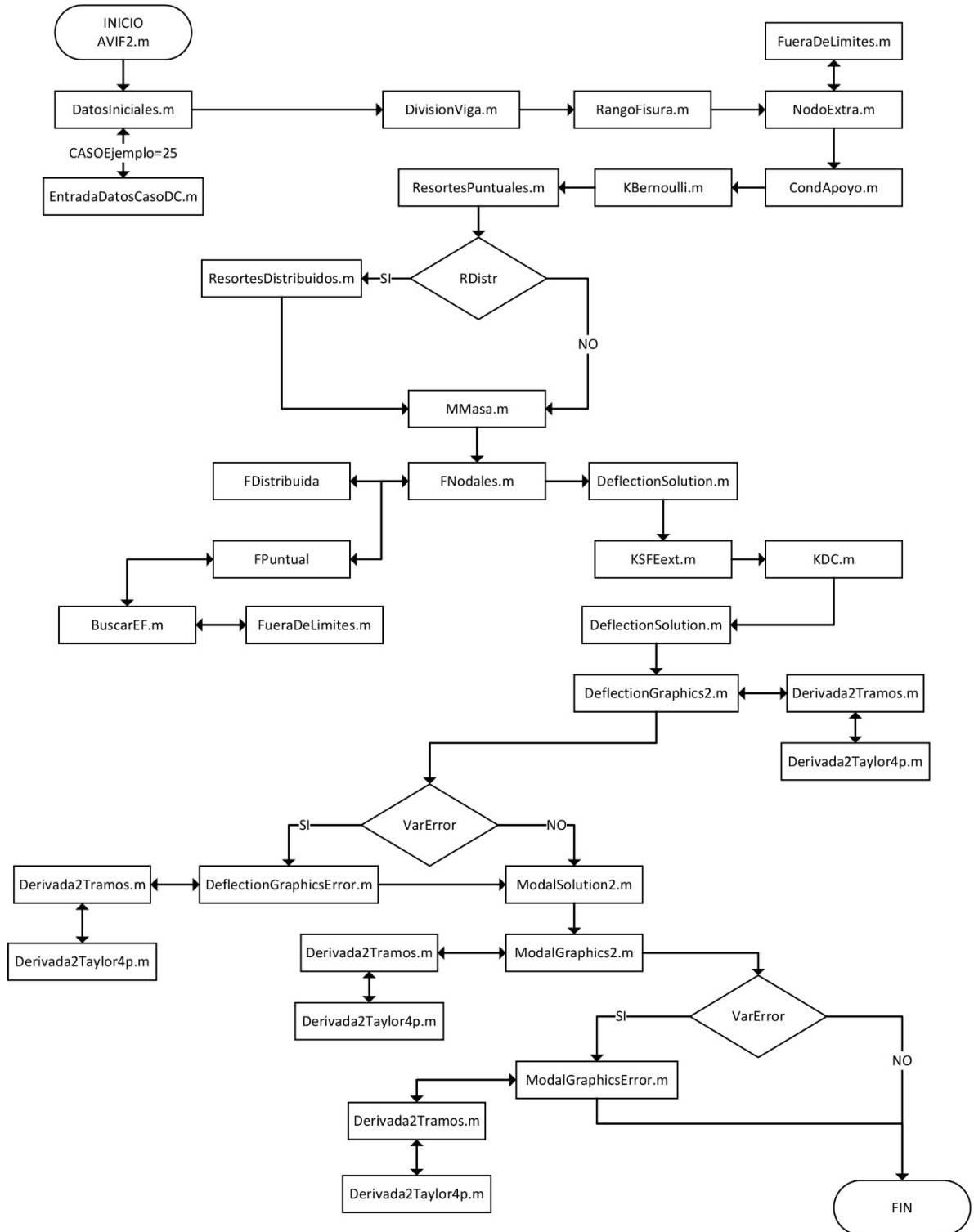
Todos los archivos se entregan comentados, de tal forma que cualquier persona con los conocimientos necesarios de programación pueda realizarle las modificaciones que requiera.

(*) En la carpeta ANEXOS, del CD Anexo, se encuentran los siguientes archivos: en la subcarpeta HOJAS DE CALCULO, el archivo VALIDACION DEFLEXIONES.xlsx, utilizado para validación de deflexiones del caso lineal, el archivo VALIDACION FORMAS MODALES.xlsx, utilizado para validación de formas modales del caso lineal; en la carpeta AVIF, el archivo contacto.txt, contiene el contacto del grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), de la escuela de Ingeniería Civil – UIS, con quien los interesados deberán contactarse para tener acceso al código fuente en MATLAB®.

A2. Relación entre funciones del programa AVIF



A3. Relación entre funciones del programa AVIF2



Anexo B: Código fuente en MATLAB®. Entrada de Datos

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

B1. AVIF.m

B2. AVIF2.m

B3. DatosIniciales.m

B4. EntradaDatos.m

B5. EntradaDatosErrorCaso1SinRegresion.m

B6. EntradaDatosErrorCaso1ConRegresion.m

B7. EntradaDatosErrorCaso2SinRegresion.m

B8. EntradaDatosErrorCaso2ConRegresion.m

B9. EntradaDatosValidacionSinDano1.m

B10. EntradaDatosValidacionSinDano2.m

B11. EntradaDatosValidacionSinDano3.m

B12. EntradaDatosValidacionSinDano4.m

B13. EntradaDatosValidacionSinDano5.m

B14. EntradaDatosSFECaso1A.m

B15. EntradaDatosSFECaso1B.m

B16. EntradaDatosSFECaso1C.m

B17. EntradaDatosSFECaso2A.m

B18. EntradaDatosSFECaso2B.m

B19. EntradaDatosSFECaso2C.m
B20. EntradaDatosSFECaso2D.m
B21. EntradaDatosSFECaso2E.m
B22. EntradaDatosSFECaso2F.m
B23. EntradaDatosSFECaso3A.m
B24. EntradaDatosSFECaso3B.m
B25. EntradaDatosSFECaso3C.m
B26. EntradaDatosEjemploAdc1.m
B27. EntradaDatosEjemploAdc2.m
B28. EntradaDatosEjemploAdc3.m
B29. EntradaDatosCasoDC1.m
B30. EntradaDatosCasoDC2.m
B31. EntradaDatosCasoDC3.m
B32. EntradaDatosCasoDC4.m

Anexo C: Código fuente en MATLAB®. Creación de elementos Finitos

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

C1. DivisionViga.m

C2. RangoFisura.m

C3. NodoExtra.m

C4. FueraDeLimites.m

C5. BuscarEF.m

C6. CondApoyo.m

C7. ResortesPuntuales.m

C8. ResortesDistribuidos.m

Anexo D: Código fuente en MATLAB®. Creación de matrices principales

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

D1. KBernoulli.m

D2. KSFEext.m

D3. KDC.m

D4. MMasa.m

D5. FNodales.m

Anexo E: Código fuente en MATLAB®. Solución de sistemas matriciales

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

E1. DeflectionSolution.m

E2. ModalSolution.m

E3. ModalSolution2.m

Anexo F: Código fuente en MATLAB®. Creación de gráficas

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

F1. DeflectionGraphics.m

F2. DeflectionGraphics2.m

F3. DeflectionGraphicsError.m

F4. ModalGraphics.m

F5. ModalGraphics2.m

F6. ModalGraphicsError.m

Anexo G: Código fuente en MATLAB®. Derivación numérica

El código fuente es propiedad intelectual del autor y la Universidad Industrial de Santander, grupo de Investigación en Materiales y Estructuras de Construcción (INME), para tener acceso al mismo comunicarse con el director de proyecto de grado, Ing. PhD. Oscar Javier Begambre Carrillo. Email: oscarbegambre@hotmail.com.

G1. Derivada2Tramos.m

G2. Derivada2Taylor4p.m