

**ESTUDIO DE GEODÉSICAS ECUATORIALES EN ESPACIO-TIEMPOS  
CONFORMESTÁTICOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS PRODUCIDOS  
POR DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE CON HALO**

**LUIS CARLOS JAIMES SUPELANO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2018**

**ESTUDIO DE GEODÉSICAS ECUATORIALES EN ESPACIO-TIEMPOS  
CONFORMESTÁTICOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS PRODUCIDOS  
POR DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE CON HALO**

**LUIS CARLOS JAIMES SUPELANO**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de  
Físico**

**Director  
Guillermo Alfonso González Villegas  
Dr. Matemática aplicada**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2018**

A

*Luis Eduardo Jaimes, Ingrid Yaneth Supelano, Daniela Jaimes y Juan Diego por su  
paciencia y amor.*

*Sara Jaimes y Thomas Jaimes por ser mi motivación constante.*

*Joseph Vergel por brindarme una amistad tan perseverante.*

*Guillermo Alfonso González por ser mi guía académica*

## CONTENIDO

	pág.
<b>Introducción . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1. Espacio-tiempo conformestático . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1. Métrica conformestática: Conceptos básicos . . . . .	14
1.1.1. Soluciones estáticas con simetría axial . . . . .	15
1.1.2. Elemento de línea . . . . .	16
1.2. Dinámica de una partícula de prueba . . . . .	17
1.2.1. Órbitas circulares . . . . .	19
1.2.2. Órbitas no circulares . . . . .	20
<b>2. Modelos galácticos . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1. Modelos de discos delgados . . . . .	21
2.2. Discos relativistas de Kuzmin-Toomre . . . . .	23
2.2.1. Modelo para $n=0$ . . . . .	25
2.2.2. Modelo para $n=1$ . . . . .	26
2.2.3. Modelo para $n=2$ . . . . .	26
<b>3. Análisis de resultados para la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre</b>	<b>28</b>
3.1. Partículas tipo tiempo . . . . .	28
3.2. Partículas tipo luz . . . . .	34
<b>4. Conclusiones . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>5. Apéndice teórico . . . . .</b>	<b>39</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
1. Representación gráfica de una transformación conforme. Fuente:A.(2008), Oleg. <i>Illustration of a conformal map</i> [Figura]. <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> . [Online; accessed 06-January-2018]. 2008 . . . . .	14
2. Potencial efectivo de partículas masivas en función del momento angular $\ell^2$ para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre. La gráfica correspondiente al modelo $n = 0$ se obtiene haciendo $k = 7, 9$ y $\tilde{A}_0 = 2$ ; la del modelo $n = 1$ se obtiene con $k = 292$ , $\tilde{A}_0 = 167$ , y $\tilde{A}_1 = 46$ ; por último, la curva del modelo $n = 2$ se obtienen para los valores $k = 18, 12$ , $\tilde{A}_0 = 100$ , $\tilde{A}_1 = -20$ y $\tilde{A}_2 = 90$ . . . . .	29
3. Comportamiento de una partícula masiva con momento angular $\ell^2 = 0,01$ según su energía para el modelo $n = 0$ . . . . .	30
4. Órbitas no acotadas de partículas masivas . . . . .	31
5. Órbitas acotadas para el primer modelo de la familia de soluciones $n = 0$ en función de la variación del momento angular. . . . .	32
6. Órbitas acotadas para el segundo modelo de la familia de soluciones $n = 1$ en función de la variación del momento angular. . . . .	33
7. Órbitas acotadas para el tercer modelo de la familia de soluciones $n = 2$ en función de la variación del momento angular. . . . .	34
8. Potencial efectivo de fotones en función del momento angular $\ell^2$ para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre. . . . .	35
9. Órbitas acotadas para el tercer modelo de la familia de soluciones $n = 2$ en función de la variación del momento angular. . . . .	36

## RESUMEN

**Título:** ESTUDIO DE GEODÉSICAS ECUATORIALES EN ESPACIO-TIEMPOS CONFORMESTÁTICOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS PRODUCIDOS POR DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE CON HALO<sup>1</sup>.

**Autor:** JAIMES SUPELANO, Luis Carlos <sup>2</sup>

**Palabras clave:** Espacio-tiempo conformestático, simetría axial, discos relativistas, halo, geodésicas.

### **Descripción:**

Einstein formula la teoría de la relatividad general y cambia la manera de entender el universo basada en el concepto restrictivo de fuerza heredado por Newton hace cientos de años, esta nueva interpretación del aparato estelar que describe la deformación del espacio-tiempo invita a obtener soluciones que permitan comprender el mecanismo matemático de la Relatividad General. Una de estas soluciones exactas es presentada en esta investigación sobre soluciones estáticas, específicamente una solución derivada de las transformaciones generales de Weyl, que permitieron el estudio del movimiento de partículas en campos gravitacionales generados por fuentes axialmente simétricas. Los modelos se obtuvieron de la familia de discos delgados relativistas de Kuzmin-Toomre inmersos en halos a partir de la solución de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo conformestático y con simetría axial. Para ello, se resolvieron las ecuaciones de las geodésicas ecuatoriales, considerando geodésicas temporales y nulas correspondientes a partículas masivas y partículas de masa cero. Para obtener los resultados que se van a exponer, se resolvieron las ecuaciones de movimiento mediante un software de cálculo simbólico y se obtuvieron una serie de resultados numéricos que fueron posteriormente graficados y analizados cualitativamente. Posteriormente, se realizó un análisis gráfico del potencial efectivo para el plano ecuatorial y así se determinaron las posibles trayectorias de las partículas.

---

<sup>1</sup>Proyecto de grado.

<sup>2</sup>Facultad de ciencias, Escuela de física, Director: Guillermo Alfonso González Villegas

## ABSTRACT

**Title:** EQUATORIAL GEODESICS IN AXISYMMETRIC CONFORMASTATIC SPACETIMES COMPOSED BY RELATIVISTIC KUZMIN-TOOMRE DISKS AND HALOES<sup>3</sup>.

**Author:** JAIMES SUPELANO, Luis Carlos <sup>4</sup>

**Key words:** Conformastatic spacetime, axial symmetry, relativistic discs, Halo, geodesics.

### **Description:**

Einstein formulates the theory of general relativity and changes the way of understanding the universe based on the restrictive concept of force inherited by Newton hundreds of years ago, this new interpretation of the stellar apparatus that describes the deformation of space-time invites to obtain solutions that allow us to understand the mathematical mechanism of General Relativity. One of these exact solutions is presented in this research on static solutions, specifically a solution derived from the general transformations of Weyl, which allowed the study of the movement of particles in gravitational fields generated by axially symmetric sources. The models were obtained from the Kuzmin-Toomre family of relativistic thin disks immersed in haloes by solving the Einstein's equations for a conformastatic space-time with axial symmetry. To obtain the results that are going to be presented, the movement equations were solved by means of a symbolic calculation software and a series of numerical results were obtained that were subsequently graphed and analyzed qualitatively. Subsequently, a graphical analysis of the effective potential for the equatorial plane was performed and the possible trajectories of the particles were determined, and then the geodesic equations were solved in the equatorial plane for time-like and null geodesics.

---

<sup>3</sup>Grade project.

<sup>4</sup>Facultad de ciencias, Escuela de física, Director: Guillermo Alfonso González Villegas

## Introducción

Antes de 1915, la mecánica celeste se remonta al físico y matemático Isaac Newton que define la gravedad como una fuerza con la que las masas actúan unas sobre otras, derivando en la aceleración de estos cuerpos. Esto era cierto incluso en la teoría especial de la relatividad, los cuerpos moviéndose por fuerzas atractivas y repulsivas sin que el tiempo y el espacio se vieran afectados. Era lógico especular que el espacio y el tiempo continuaban sin ninguna alteración, sin embargo, es bastante diferente en la teoría de la relatividad general basada en la revolucionaria interpretación que la gravedad no es una fuerza, sino una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo por la distribución de masa y energía en él, razón por la cual, los cuerpos no siguen órbitas curvas por una fuerza llamada gravedad, se mueven en órbitas curvas porque siguen lo más cercano a un camino recto en un espacio deformado, camino que se denomina geodésica<sup>5</sup>. Las partículas masivas y los rayos de luz también deben seguir las geodésicas en el espacio curvado, por esta razón, analizar trayectorias en una configuración específica del espacio-tiempo es de interés físico, ya que la forma en que orbiten estas partículas permite deducir propiedades del campo gravitatorio.

En busca de modelar los diferentes fenómenos de la naturaleza, en particular configuraciones discoidales de materia como las presentes en nebulosas y galaxias<sup>6</sup> y de analizar las trayectorias que siguen las partículas en estas, es posible comenzar el estudio con el espacio-tiempo plano y buscar ecuaciones de campo que describan el campo gravitacional aproximándose al espacio de Minkowski. Una forma de realizar este análisis es mediante una configuración del espacio que permita ignorar la materia distante al punto de evaluación y omitir la curvatura presente como la métrica conformestática<sup>7</sup>, derivada de una solución estática<sup>8</sup> a las ecuaciones de Einstein y conformalmente plana

---

<sup>5</sup>Misner, Charles W; Thorne, Kip S y Wheeler, John Archibald. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017; Ohanian, Hans C y Ruffini, Remo. *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press, 2013.

<sup>6</sup>Adams, David John. *An introduction to galaxies and cosmology*. Cambridge University Press, 2004; Contopoulos, Georgios y Kotsakis, Dimitrios. *Cosmology: the structure and evolution of the universe*. Springer Science & Business Media, 2012.

<sup>7</sup>Kramer, Dietrich y col. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press Cambridge, 1980; Synge, John Lighton. *Relativity: the special theory*. Prabhat Prakashan, 1965.

<sup>8</sup>Kroon, J Valiente. *Conformal methods in general relativity*. Cambridge University Press, 2016.

en su parte espacial. En relatividad general, soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein juegan un papel crucial para la descripción del campo gravitacional de objetos astrofísicos cuya fuente de materia no rota<sup>9</sup>.

En relatividad general, las soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein son importantes para el análisis de fenómenos astrofísicos. El primer análisis de campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos fue llevado a cabo por Weyl<sup>10</sup> en 1917, cuya solución general se puede escribir en coordenadas cilíndricas que conduce al subconjunto de soluciones asintóticamente planas (métrica conformestática). Este tipo de soluciones exactas ha sido objeto de una intensa investigación; ya sea para darle interpretación física a las coordenadas generalizadas de Weyl<sup>11</sup>, para modelar agujeros negros estáticos con un horizonte de eventos regular en las teorías de Einstein-Yang-Mills<sup>12</sup> o para encontrar soluciones interiores estáticas y axialmente simétricas que cumplan las condiciones de energía representando así modelos globales que describen fuentes no esféricas de campo gravitatorio<sup>13</sup>.

Una de esas soluciones estáticas con simetría axial, corresponde a la configuración del espacio-tiempo conformestático cuya importancia radica en que la geometría del espacio es asintóticamente plana y puede ser usada para múltiples propósitos astrofísicos como el análisis de fuentes discoidales de polvo en movimiento constante<sup>14</sup>, discos finitos cargados<sup>15</sup>, sistema disco-halo en presencia de un campo electromagnético<sup>16</sup>, una expresión no estándar del perihelio de pequeñas partículas en el sistema solar<sup>17</sup> y la superposición

---

<sup>9</sup>Syngé, *Relativity: the special theory*, óp.cit.

<sup>10</sup>Weyl, Hermann. «Zur gravitationstheorie». En: *Annalen der Physik* (1917).

<sup>11</sup>Voorhees, B. «Static axially symmetric gravitational fields». En: *Physical Review D* (1970).

<sup>12</sup>Kleihaus, Burkhard y Kunz, Jutta. «Static black-hole solutions with axial symmetry». En: *Physical review letters* (1997).

<sup>13</sup>Hernandez-Pastora, JL; Herrera, L y Martín, J. «Axially symmetric static sources of gravitational field». En: *Classical and Quantum Gravity* (2016).

<sup>14</sup>Katz, Joseph; Bicák, J y Lynden-Bell, Donald. «Disc sources for conformastationary metrics». En: *Classical and Quantum Gravity* (1999).

<sup>15</sup>González, Guillermo A; Gutiérrez-Piñeres, Antonio C y Ospina, Paolo A. «Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic spacetimes». En: *Physical Review D* (2008).

<sup>16</sup>Gutiérrez-Piñeres, Antonio C; González, Guillermo A y Quevedo, Hernando. «Conformastatic disk-haloes in Einstein-Maxwell gravity». En: *Physical Review D* (2013).

<sup>17</sup>Capistrano, Abraão JS; Roque, Waldir L y Valada, Rafael S. «Weyl conformastatic perihelion advance of small body objects». En: *arXiv preprint arXiv:1404.1358* (2014).

analítica de un agujero negro cargado con un disco anular de polvo externo<sup>18</sup>.

Caracterizado el campo gravitacional, la investigación se dirige a estudiar las trayectorias que siguen las partículas masivas y sin masa en estos campos. Varios autores dedicaron su conocimiento a calcular y analizar geodésicas en diferentes configuraciones del espacio-tiempo como lo hacen en la métrica de Schwarzschild<sup>19</sup> que permiten modelar agujeros negros o en la métrica de Kerr<sup>20</sup> que permite caracterizar agujeros negros rotantes. Del mismo modo, otras configuraciones menos populares presentan resultados interesantes de geodésicas como los que se evidencian en el espacio de Kasner<sup>21</sup>, Mallett<sup>22</sup>, Gödel<sup>23</sup> o Bardeen<sup>24</sup>. Estos ejemplos solo son una pequeña muestra del trabajo que se ha realizado hasta el momento en esta área.

En esta investigación se estudiaron las geodésicas en espacio-tiempos conformes estáticos con simetría axial, comienza en el capítulo 1 con una introducción a los conceptos básicos de una configuración conformes estática del espacio-tiempo derivado de las soluciones estáticas con simetría axial, se define matemáticamente el movimiento de las partículas de prueba en el plano ecuatorial mediante el formalismo Lagrangiano, se obtienen las expresiones para el potencial efectivo, las ecuaciones de movimiento y las condiciones de órbita circular y no circular, basados en la formulación adimensional de todas las expresiones matemáticas.

En el capítulo 2 se presenta un modelo relativista que describe discos delgados inmersos en un halo estelar. El modelo se obtiene de una familia de soluciones en la cual el potencial gravitacional está completamente determinado, es asintóticamente plano, libre

---

<sup>18</sup>Lora-Clavijo, FD; Ospina-Henao, PA y Pedraza, JF. «Charged annular disks and Reissner-Nordström type black holes from extremal dust». En: *Physical Review D* (2010).

<sup>19</sup>Hackmann, Eva y Lämmerzahl, Claus. «Complete analytic solution of the geodesic equation in Schwarzschild-(anti-) de Sitter spacetimes». En: *Physical review letters* (2008); Hackmann, Eva y Lämmerzahl, Claus. «Geodesic equation in Schwarzschild-(anti-) de Sitter space-times: Analytical solutions and applications». En: *Physical Review D* (2008).

<sup>20</sup>Wilkins, Daniel C. «Bound geodesics in the Kerr metric». En: *Physical Review D* (1972).

<sup>21</sup>Harvey, Alex. «Geodesics in Kasner universes». En: *Physical Review D* (1989).

<sup>22</sup>Olum, Ken D. «Geodesics in the static Mallett spacetime». En: *Physical Review D* (2010).

<sup>23</sup>Camci, U. «Symmetries of geodesic motion in Gödel-type spacetimes». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (2014).

<sup>24</sup>Zhou, Sheng; Chen, Juhua y Wang, Yongjiu. «Geodesic structure of test particle in Bardeen spacetime». En: *International Journal of Modern Physics D* (2012).

de singularidades, y satisface todas las condiciones de energía. Este modelo es el denominado discos relativistas de Kuzmin-Tommre que es una solución al problema clásico de calcular una expresión para el potencial gravitacional generado por una distribución discoidal de materia, el potencial está definido por una serie de términos de los cuales se calcularon los primeros 3 términos de la solución  $n = 0, 1, 2$  y se definió el potencial para cada uno de ellos.

En el capítulo 3, se presentan los resultados obtenidos mediante el análisis de las trayectorias que dependen del tipo de partícula y su momento angular, es decir, se analiza el tipo de trayectoria que sigue un fotón en el espacio-tiempo conformestático, así como las geodésicas de partículas masivas. Se encuentra que los fotones indistintamente de su momento angular y del potencial gravitacional modelado por los términos  $n = 0, 1, 2$  se mueven de una única forma, situación que no sucede con las partículas masivas. Se grafica el potencial efectivo para cada unas de las soluciones y se analiza las probables zonas en que puede estar una partícula de prueba que se mueve en la configuración conformestática. Para visualizar las órbitas resolvemos numéricamente la ecuación de movimiento para diferentes valores de los parámetros involucrados, se grafican las geodésicas de estas partículas, se interpretan físicamente y se realiza un análisis cualitativo de estos resultados. Finalmente se realizan una serie de conclusiones que se deducen del trabajo realizado.

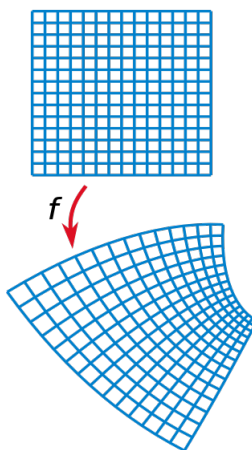
## 1. Espacio-tiempo conformestático

En geometría diferencial, las geodésicas son la generalización de la noción de línea recta entre dos puntos en un espacio curvado y son de gran importancia en relatividad general ya que describen el movimiento de partículas de prueba en el espacio-tiempo de interés.

El objetivo principal de la presente investigación es encontrar las geodésicas de partículas de prueba en espacio-tiempos estáticos que poseen simetría axial, en particular, en la métrica conformestática, que modela un espacio conformalmente plano y se interpreta como descriptor de un campo gravitacional generado por discos delgados estáticos.

### 1.1. MÉTRICA CONFORMESTÁTICA: CONCEPTOS BÁSICOS

El espacio conforme es el espacio euclidiano extendido por un punto ideal en el infinito<sup>1</sup> que cumple transformaciones conformes, las cuales son transformaciones continuas que preservan los ángulos locales, permitiendo una relación entre la métrica euclidiana y cualquier métrica riemanniana que represente la configuración del espacio-tiempo.



**Figura 1:** Representación gráfica de una transformación conforme. Fuente:A.(2008), Oleg. *Illustration of a conformal map*[Figura]. <http://commons.wikimedia.org>. [Online; accessed 06-January-2018]. 2008

<sup>1</sup>Deza, Michel Marie y Deza, Elena. «Encyclopedia of distances». En: *Encyclopedia of Distances*. Springer, 2009.

Una métrica riemanniana  $g_{\mu\nu}$  definida en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con coordenadas  $z$  se llama conforme<sup>2</sup> si

$$g_{\mu\nu} = \lambda(z)\eta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica euclidiana en coordenadas  $z$  y  $\lambda(z)$  una función en el espacio  $\Omega$ .

Como se puede observar en la figura(1), cada punto del espacio curvado se puede relacionar con un punto del espacio plano, lo que permite degradar la métrica del espacio curvado en una función con propiedades de curvatura y el espacio plano de Minkowski.

**1.1.1. soluciones estáticas con simetría axial** Las soluciones estáticas proporcionan una valiosa interpretación física y matemática sobre campos gravitacionales independientes del tiempo<sup>3</sup>. Ahora, el interés es derivar la geometría del espacio-tiempo fuera de la fuente de campo gravitacional, por lo tanto, para la descripción de dicho espacio-tiempo, es conveniente introducir la coordenada temporal  $t = x^0$  y el ángulo acimutal  $\phi = x^3$  sobre el eje de simetría. El carácter estacionario y axisimétrico del espacio-tiempo requiere que los coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$  sean independientes de  $t$  y  $\phi$ , de modo que

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^3), \quad (1.2)$$

donde  $x^1$  y  $x^3$  son las dos coordenadas espaciales restantes.

Además se requiere que el elemento de línea sea invariante a la inversión simultánea de las coordenadas  $t$  y  $\phi$ , es decir, las transformaciones  $t \rightarrow -t$  y  $\phi \rightarrow -\phi$  lo que indica físicamente que el espacio-tiempo es estático. Esta invarianza supuesta requiere que

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0, \quad (1.3)$$

donde se observa que los coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$  son funciones de  $x^1$  y  $x^3$  solamente. Es posible hacer una reducción adicional en la forma de la métrica utilizando el

---

<sup>2</sup>Likosova de Mejía, Galina y col. «Métricas Riemannianas y pseudo-Riemannianas». En: (1993).

<sup>3</sup>Kroon, *Conformal methods in general relativity*, óp.cit.

hecho de que cualquier espacio bidimensional pseudo-riemanniano es un espacio conformalmente plano, es decir, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que la métrica toma la forma del espacio de Minkowski dando lugar a la métrica conformestática.

**1.1.2. elemento de línea** Hasta ahora, se han considerado propiedades del espacio-tiempo como la condición estática y la simetría axial, pero aún no se ha definido su geometría. Si se consideran dos puntos infinitesimalmente separados, es útil determinar la distancia entre esos puntos. En general, la distancia entre puntos puede ser asignada por cualquier función razonablemente bien comportada de las coordenadas y sus derivadas<sup>4</sup>

$$ds^2 = f(x^a, dx^a), \quad (1.4)$$

donde esta función contiene información tanto sobre la geometría local del espacio, como el sistema de coordenadas elegido. Comúnmente en relatividad general, no interesan geometrías generales y se enfoca la atención en espacios en los que la distancia está dada por una expresión de la forma<sup>5</sup>

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.5)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son los componentes del tensor métrico en el sistema de coordenadas elegido. La expresión (1.5) definida como métrica, sugiere la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo e indica como varía la curvatura de este a medida que hay un desplazamiento.

La geometría del espacio-tiempo de interés para esta investigación es la métrica conformestática, que forma una subclase de campos estáticos cuyas componentes espaciales admiten planos conformes<sup>6</sup>. El elemento de línea de la métrica conformestática<sup>7</sup> en

---

<sup>4</sup>Hobson, Michael Paul; Efstathiou, George P y Lasenby, Anthony N. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

<sup>5</sup>Lee, John M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Springer Science & Business Media, 2006.

<sup>6</sup>Kramer y col., *Exact solutions of Einstein's field equations*, óp.cit.

<sup>7</sup>González; Gutiérrez-Piñeres y Ospina, «Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic

coordenadas cilíndricas se define como:

$$ds^2 = -e^{2\Psi} dt^2 + e^{-2\Psi} [d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2], \quad (1.6)$$

donde la función  $\Psi$  depende solamente de  $(\rho, z)$ . Los rangos de dichas coordenadas son los estándar y se utiliza la convención de signos desarrollado en el lenguaje cuadrivectorial de Minkowski<sup>8</sup>.

## 1.2. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA DE PRUEBA

Para encontrar las trayectorias de una partícula de prueba ya definida la geometría del espacio-tiempo, se usa la mecánica Lagrangiana<sup>9</sup> que revela una conexión importante entre la simetría y la conservación. Las ecuaciones de Euler-Lagrange muestran que si  $\mathcal{L}$  es independiente de una coordenada, entonces el correspondiente momento canónico es constante en el tiempo: es decir, se conserva. Para un lagrangiano invariante frente a rotaciones alrededor de la coordenada angular del eje asociado (isotropía), la correspondiente componente del momento angular se conserva. Del mismo modo, para un lagrangiano invariante frente a traslaciones temporales, la energía del sistema se conserva<sup>10</sup>.

Para algunos sistemas riemannianos, es posible definir la energía cinética del sistema en función de la métrica del espacio curvado<sup>11</sup>, lo que permite tener ecuaciones covariantes, es decir, toman la misma forma en cualquier sistema de coordenadas<sup>12</sup>, por lo tanto el

---

spacetimes», óp.cit.; González, Guillermo A y López-Suspes, Framsol. «Timelike and null equatorial geodesics in the Bonnor-Sackfield relativistic disk». En: *Revista Integración* (2011); Gutiérrez-Piñeres, Antonio C y Quevedo, Hernando. «Newman–Janis Ansatz in conformastatic spacetimes». En: *General Relativity and Gravitation* (2016); López-Suspes, Framsol y González, Guillermo A. «Equatorial Circular Orbits of Neutral Test Particles in Weyl Spacetimes». En: *Brazilian Journal of Physics* (2014).

<sup>8</sup>Papapetrou, Achilleus. *Lectures on general relativity*. Springer Science & Business Media, 2012.

<sup>9</sup>Steane, Andrew M. *Relativity made relatively easy*. Oxford University Press, 2012.

<sup>10</sup>Goldstein, Herbert. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.

<sup>11</sup>Ohanian y Ruffini, *Gravitation and spacetime*, óp.cit.

<sup>12</sup>Landau, Lev Davidovich y Lifshitz, Eugenií Mikhailovich. *Teoría clásica de los campos*. Reverté, 1973.

lagrangiano de un sistema se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.7)$$

donde (1.7) corresponde a una función lagrangiana<sup>13</sup> y  $\tau$  es el parámetro del sistema. Para la geometría conformestática el lagrangiano corresponde a

$$2\mathcal{L} = -e^{2\Psi} \dot{t}^2 + e^{-2\Psi} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2], \quad (1.8)$$

donde el punto denota derivación con respecto al parámetro afín  $\tau$ .

En busca de una simplificación de la expresión (1.8) que permita reducir la dimensión del sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema mecánico, es necesario introducir las integrales o constantes de movimiento, que corresponden a la energía por unidad de masa  $-E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}$  y el momento angular por unidad de masa  $\ell = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$  respectivamente. El interés físico de esta investigación se concentra en las trayectorias sobre el plano ecuatorial, por tal razón el movimiento de la partícula es confinado al plano  $z = 0$ , con el uso de los momentos canónicos, la ecuación (1.8) se convierte en:

$$2\mathcal{L} = -\frac{E^2}{e^{2\Psi}} + e^{-2\Psi} \dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} e^{2\Psi}, \quad (1.9)$$

de tal manera que el lagrangiano sólo depende de la coordenada radial  $\rho$  y de la velocidad radial  $\dot{\rho}$ . Como consecuencia de esto no habrá movimiento a lo largo del eje  $z$  y la partícula se moverá en el plano  $z = 0$ .

Para un análisis cualitativo de la expresión (1.9), se define la condición<sup>14</sup>

$$\mathcal{L} = -\epsilon^2 \quad (1.10)$$

con  $\epsilon = 0$  para geodésicas tipo luz y  $\epsilon = 1$  para geodésicas tipo tiempo y que reescribe

<sup>13</sup>Scheck, Florian. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer Science & Business Media, 2010.

<sup>14</sup>Misner; Thorne y Wheeler, *Gravitation*, óp.cit.

(1.9) de forma práctica como:

$$E^2 = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{e^{2\Psi}}{2} \left[ \epsilon^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} e^{2\Psi} \right], \quad (1.11)$$

donde se define una expresión denominada potencial efectivo

$$V_{eff} = e^{2\Psi} \left[ \epsilon^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} e^{2\Psi} \right], \quad (1.12)$$

el cual es función de  $\rho$  y permite reinterpretar la definición de energía transformando el problema en un problema unidimensional; por lo tanto, la investigación del movimiento de partículas de prueba en el espacio-tiempo conformestático se reduce así al estudio del movimiento en el potencial efectivo  $V_{eff}$ .

**1.2.1. órbitas circulares** Existen órbitas circulares en cualquier potencial atractivo, ya que la fuerza de atracción se equilibra con la fuerza centrífuga dada la adecuada elección de la velocidad radial. Las órbitas circulares son por lo tanto siempre posibles en un campo atractivo, pero tales órbitas no son necesariamente estables, solo si el potencial efectivo tiene un mínimo, por lo tanto, todas las demás órbitas circulares son inestables. Para movimientos circulares, requerimos que  $\rho = cte$  y que la velocidad radial  $\dot{\rho} = 0$  se anule. En términos del potencial efectivo una órbita circular debe ser un mínimo del potencial y debe cumplir la condición de órbita estable

$$\left. \frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_c} = 0 \quad \left. \frac{d^2V_{eff}(\rho)}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_c} > 0. \quad (1.13)$$

Aplicando estos criterios al potencial efectivo se obtiene:

$$\left. \frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_c} = \ell^2 e^{2\Psi} (2\rho\Psi_{,\rho} - 1) + \rho^3 \epsilon^2 \Psi_{,\rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = 0, \quad (1.14)$$

donde las raíces de esta ecuación corresponden al radio de la órbita circular  $\rho = \rho_c$  y para la estabilidad de las órbitas se debe cumplir que

$$\left. \frac{d^2_{\text{V}} \text{eff}(\rho)}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_c} = \epsilon^2 \rho^2 (\Psi_{,\rho\rho} + 3\Psi_{,\rho}) + 2e^{2\Psi} \ell^2 [2(\Psi_{,\rho})^2 + \Psi_{,\rho\rho}] > 0, \quad (1.15)$$

que establece que si el valor de la segunda derivada del potencial efectivo es positivo, la órbita circular es estable y si la segunda derivada del potencial efectivo es negativa, la órbita es inestable.

**1.2.2. órbitas no circulares** Una partícula puede moverse en el espacio-tiempo en una variedad de órbitas posibles que se derivan resolviendo las ecuaciones de movimiento apropiadas, lo que es equivalente a encontrar las geodésicas en ese espacio-tiempo. Es conocido que la geometría del espacio-tiempo puede ser caracterizada por el movimiento de partículas de prueba, tanto partículas masivas que se mueven en geodésicas tipo tiempo, como rayos de luz que se mueven en geodésicas nulas. Las órbitas en el plano ecuatorial están determinadas por las coordenadas radial  $\rho$  y azimutal  $\varphi$  que se obtienen mediante:

$$\dot{\rho}^2 = E^2 - e^{2\Psi} \epsilon^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} e^{4\Psi}, \quad (1.16)$$

$$\dot{\varphi} = \ell e^{2\Psi} \rho^{-2}, \quad (1.17)$$

que corresponden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que determinan las geodésicas en el plano  $z = 0$ .

Para el movimiento de partículas de prueba en el plano  $z = 0$  se necesitan las coordenadas  $\rho$  y  $\varphi$ , por lo tanto, matemáticamente el sistema que describe el movimiento está formado por dos ecuaciones. La ecuación (1.16) muestra la constante de movimiento momento angular por unidad de masa y establece que todo el movimiento permanece en el plano ecuatorial. Por analogía con el problema clásico se interpretan los términos como la energía cinética radial, la energía rotacional y la energía potencial. La ecuación (1.17) es otra forma de escribir la ecuación (1.11) y se obtiene directamente del elemento de línea.

## 2. Modelos galácticos

En el afán de conocer y de entender la mecánica celeste, alrededor de 1929 Hubble descubre la expansión del Universo<sup>1</sup>, todas las galaxias se están alejando de nosotros, y en realidad con velocidades que aumentan con la distancia. El descubrimiento verificó algunas de las predicciones de la teoría de Einstein y su aplicación a nuestro sistema solar ya se había hecho antes de 1920, pero solo muy pocos matemáticos y físicos comprendían el alcance de esta teoría.

Las primeras personas en construir modelos de un universo en expansión fueron de Sitter<sup>2</sup> que corresponde a una expansión inflacionaria del universo en que la densidad de energía y su presión se hallan vinculadas por una ecuación de estado, Friedmann<sup>3</sup> con la expansión del espacio en modelos homogéneos e isótropos así como Lemaitre<sup>4</sup>. Sin duda, estos trabajos fueron el inicio de una carrera por comprender la dinámica y estructura del espacio, permitiendo construir diferentes tipos de modelos galácticos que permiten explicar fenómenos astrofísicos de gran complejidad física y matemática.

Por lo tanto, este capítulo se concentra en la descripción de las propiedades básicas de una familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein, que se modelan como discos delgados inmersos en un halo estelar y se discute a fondo su interpretación física.

### 2.1. MODELOS DE DISCOS DELGADOS

Es posible mostrar en la investigación modelos de galaxias con simetrías de relevancia cuyos ingredientes básicos son la dinámica horizontal del modelo y la autoconsistencia

---

<sup>1</sup>Hubble, Edwin. «A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* (1929).

<sup>2</sup>De Sitter, Willem. «Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1917).

<sup>3</sup>Friedman, Alexander. «Über die Krümmung des Raumes». En: *Zeitschrift für Physik* (1922).

<sup>4</sup>Lemaître, Georges. «Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques». En: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. 1927.

del mismo, de acuerdo con las restricciones observacionales básicas. Actualmente, la descripción más aceptada de la composición de las galaxias es que la mayor parte de su masa se concentra en un disco delgado, donde los otros componentes son un halo esferoidal, un bulbo central y un agujero negro en el centro de la galaxia<sup>5</sup>. Para un análisis físico de las órbitas de partículas de prueba sobre estos modelos galácticos, es comúnmente aceptado que muchos de los aspectos principales de la dinámica galáctica se pueden resumir sin perder generalidad, en modelos que solo consideran un disco galáctico delgado inmerso en un halo. El disco delgado es el componente sobresaliente de las galaxias de disco y de las galaxias espirales, en particular contiene estrellas, cúmulos de estrellas, gas y polvo que están confinados al plano de rotación de la galaxia, es decir  $z = 0$  y debido a que estamos ubicados dentro, tenemos mucha más información sobre el disco de la Vía Láctea que otras galaxias espirales, pero el disco de la Vía Láctea se considera típico<sup>6</sup>.

Los modelos de discos delgados han permitido un gran análisis de diferentes fenómenos, ya sea, para el cálculo del campo gravitacional de discos con rotación uniforme e infinitesimalmente delgados<sup>7</sup>, el análisis de discos relativistas como fuentes estáticas en el espacio vacío<sup>8</sup> o en la métrica de Kerr<sup>9</sup>, como modelo de galaxias aplanadas<sup>10</sup> y finalmente para el análisis de datos observacionales<sup>11</sup>.

---

<sup>5</sup>Morison, Ian. *Introduction to astronomy and cosmology*. John Wiley & Sons, 2013.

<sup>6</sup>Sanders, Jason. *Dynamics of the Milky Way: Tidal Streams and Extended Distribution Functions for the Galactic Disc*. Springer, 2015.

<sup>7</sup>Bardeen, James M y Wagoner, Robert V. «Relativistic disks. I. Uniform rotation». En: *The Astrophysical Journal* (1971).

<sup>8</sup>Bivčák, Jiří; Lynden-Bell, Donald y Katz, Joseph. «Relativistic disks as sources of static vacuum spacetimes». En: *Physical Review D* (1993).

<sup>9</sup>Pichon, C y Lynden-Bell, Donald. «New sources for Kerr and other metrics: rotating relativistic discs with pressure support». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1996).

<sup>10</sup>Bivčák, J; D, Lynden-Bell y Pichon, C. «Relativistic discs and flat galaxy models». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1993); Bratek, Łukasz; Jałocha, Joanna y Kutschera, Marek. «On the axisymmetric thin disc model of flattened galaxies». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2008).

<sup>11</sup>Bizyaev, DV y col. «Very thin disc galaxies in the SDSS catalogue of edge-on galaxies». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2016); González, Guillermo A; Plata-Plata, Sandra M y Ramos-Caro, Javier. «Finite thin disc models of four galaxies in the Ursa Major cluster: NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949 and NGC 4010». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2010).

El análisis de la teoría del potencial newtoniano de discos infinitesimalmente delgados permite generar potenciales de discos con simetría axial, estos resultados se pueden utilizar para construir secuencias infinitas de nuevas soluciones de ecuaciones de Einstein que describen discos de masa finita. A grandes distancias, estos discos se vuelven newtonianos, pero en sus regiones centrales exhiben características relativistas. En particular, se construyeron espacios-tiempos mediante una familia de soluciones exactas denominadas discos relativistas de Kuzmin-Toomre cuyas propiedades se mencionan y se ilustran a continuación.

## 2.2. DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE

Una solución al problema de calcular el potencial gravitacional generado por una distribución en forma de disco delgado de materia, fue propuesta por primera vez por Kuzmin<sup>12</sup> y después generalizada por Toomre<sup>13</sup> en lo que se conoce como el modelo de Kuzmin-Toomre<sup>14</sup>. El modelo está definido por una solución particular de la ecuación de Laplace que cumple las condiciones de energía<sup>15</sup>

$$\nabla^2 \Phi = k \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi, \quad (2.1)$$

con  $k > 1$ . Si  $k$  tiende al infinito, el fluido en el halo estaría hecho de polvo, si  $k$  es igual a 1, describiría un fluido hecho de radiación. Es de gran importancia comprender que se debe encontrar otra función para modelar el potencial gravitacional, por lo tanto la ecuación (2.1) se puede reescribir como:

$$\nabla^2 (e^{-k\Phi}) = 0, \quad (2.2)$$

---

<sup>12</sup>Kuzmin, GG. «Model of the steady galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities». En: *Astronomicheskii Zhurnal* (1956).

<sup>13</sup>Toomre, Alar. «On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies.» En: *The astrophysical journal* (1963).

<sup>14</sup>Binney, James y Tremaine, Scott. *Galactic dynamics*. Princeton university press, 2011.

<sup>15</sup>Hawking, Stephen W y Ellis, George Francis Rayner. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 1973.

de modo que la función  $\phi$  sea solución a la ecuación de Laplace ya que esta ecuación juega un papel importante en el desarrollo de los campos vectoriales que derivan de un potencial gravitatorio, además de describir procesos estacionarios.

Por características de la métrica conformestática, el espacio-tiempo tiende a Minkowski en el infinito, lo que implica que debe ser asintóticamente plano, lo que transforma la ecuación (2.2) en

$$e^{-k\psi} = 1 - \Phi, \quad (2.3)$$

que permite relacionar los términos de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre con la función  $\psi$  deseada. La función posee simetría de reflexión alrededor del plano del disco, es decir

$$\Phi(\rho, -z) = \Phi(\rho, z), \quad (2.4)$$

que indica que el potencial gravitacional sobre la distribución de masa  $z > 0$ , posee las mismas propiedades que en  $z < 0$ . El modelo tiene una expresión general definida por

$$\Phi_n(R, \theta) = - \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta), \quad (2.5)$$

donde  $A_\ell$  son constantes,  $P_\ell(\cos(\theta))$  son los polinomios de Legendre<sup>16</sup> y,

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.6)$$

$$\cos(\theta) = \frac{z}{R}. \quad (2.7)$$

Ahora, como esta solución y todos sus derivadas son continuas, se introduce una transformación sobre la coordenada  $z$

$$z \rightarrow |z| + d, \quad (2.8)$$

donde  $d$  es una constante positiva y determina el modelo de discos de Kuzmin-Toomre que presenta un número infinito de funciones que describe exitosamente un modelo de potencial gravitacional para distribuciones masivas aplanadas. Para esta investigación se trabajaron los primeros tres términos de la familia de soluciones, es decir, la solución para los casos  $n = 0, 1, 2$ .

---

<sup>16</sup>Arfken, George B y Weber, Hans J. *Mathematical methods for physicists*. 1999.

**2.2.1. modelo para  $n=0$**  Cuando  $n$  toma el valor particular de 0, la forma general para el potencial  $\Phi$ , se reduce a la sencilla expresión

$$\Phi_0 = -\frac{A_0}{R}, \quad (2.9)$$

donde  $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ , por lo tanto la expresión (2.9) toma la forma

$$\Phi_0 = -\frac{A_0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (2.10)$$

que mediante la transformación (2.8), se convierte en

$$\Phi_0 = -\frac{A_0}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + d)^2}}, \quad (2.11)$$

pero, como el interés físico se ubica en el plano ecuatorial, entonces

$$\Phi_0 = -\frac{A_0}{\sqrt{\rho^2 + d^2}}, \quad (2.12)$$

que se puede escribir finalmente el potencial para el primer término como:

$$\Phi_0 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}}, \quad (2.13)$$

donde la función  $\Psi$  puede calcularse a partir de (2.3) y está definida como:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} \right], \quad (2.14)$$

con  $\tilde{A}_0 = A_0/d$  y  $\tilde{\rho} = \rho/d$ . Los valores para las constantes se obtienen de un trabajo previo sobre disco delgados<sup>17</sup> y varían según el modelo,  $\tilde{A}_0 = 2$  y  $k = 7,9$  (Ver apéndice).

---

<sup>17</sup>González, Guillermo A y Pimentel, Oscar M. «Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes». En: *Physical Review D* (2016).

**2.2.2. modelo para n=1** Cuando  $n$  toma el valor particular de 1, la forma general para el potencial  $\Phi$ , se determina por la expresión

$$\Phi_1 = -\frac{A_0}{R} - \frac{A_1}{R^2} \cos(\theta), \quad (2.15)$$

donde  $R^2 = \rho^2 + z^2$  y  $\cos(\theta) = \frac{z}{R}$ , por lo tanto la expresión (2.15) toma la forma

$$\Phi_1 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{A_1}{\rho^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (2.16)$$

que mediante la transformación (2.4), se convierte en

$$\Phi_1 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{A_1}{\rho^2 + (|z| + d)^2} \frac{|z| + d}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + d)^2}}, \quad (2.17)$$

pero, como el interés físico se ubica en el plano  $z = 0$ , entonces

$$\Phi_1 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{A_1}{\rho^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}}, \quad (2.18)$$

donde el potencial para el segundo término de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre es

$$\Phi_1 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}}, \quad (2.19)$$

y la función  $\Psi$  está definida como:

$$\Psi_1 = -\frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} + \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} \right], \quad (2.20)$$

con  $\tilde{A}_0 = \frac{A_0}{d}$  y  $\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{d^2}$ , cuyos valores corresponden a  $k = 292$ ,  $\tilde{A}_0 = 167$  y  $\tilde{A}_1 = 46$ .

**2.2.3. modelo para n=2** Cuando se evalua el potencial  $\Phi$  para el valor  $n = 2$ , la forma general es:

$$\Phi_2 = -\frac{A_0}{R} - \frac{A_1}{R^2} \cos(\theta) - \frac{A_2}{R^3} (3 \cos^2(\theta) - 1), \quad (2.21)$$

donde  $R^2 = \rho^2 + z^2$  y  $\cos(\theta) = \frac{z}{R}$ , por lo tanto la expresión (2.21) toma la forma

$$\Phi_2 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} - \frac{A_2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[ 3 \left( \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) - 1 \right], \quad (2.22)$$

que mediante la transformación (2.4), se convierte en

$$\Phi_2 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} - \frac{A_2}{(\rho^2 + (|z| + d)^2)^{3/2}} \left[ 3 \left( \frac{(|z| + d)}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + d)^2}} \right) - 1 \right], \quad (2.23)$$

pero, como el interés físico se ubica en el plano  $z = 0$ , entonces

$$\Phi_2 = -\frac{\tilde{A}_0}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + 1}} - \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} - \frac{3A_2}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{5/2}} + \frac{A_2}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}}, \quad (2.24)$$

que corresponde al tercer término de la familia de soluciones de Kuzmin-Tommre y donde la función  $\Psi$  es:

$$\Psi_2 = -\frac{1}{k} \ln \left[ 1 + \frac{\tilde{A}_0}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{1/2}} + \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3A_2}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{5/2}} - \frac{A_2}{(\tilde{\rho}^2 + 1)^{3/2}} \right], \quad (2.25)$$

con  $\tilde{A}_0 = \frac{A_0}{d}$ ,  $\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{d^2}$  y  $\tilde{A}_2 = \frac{A_2}{d^3}$ , donde el valor de las constantes es  $k = 18,12$ ,  $\tilde{A}_0 = 100$ ,  $\tilde{A}_1 = -20$  y  $\tilde{A}_2 = 90$ .

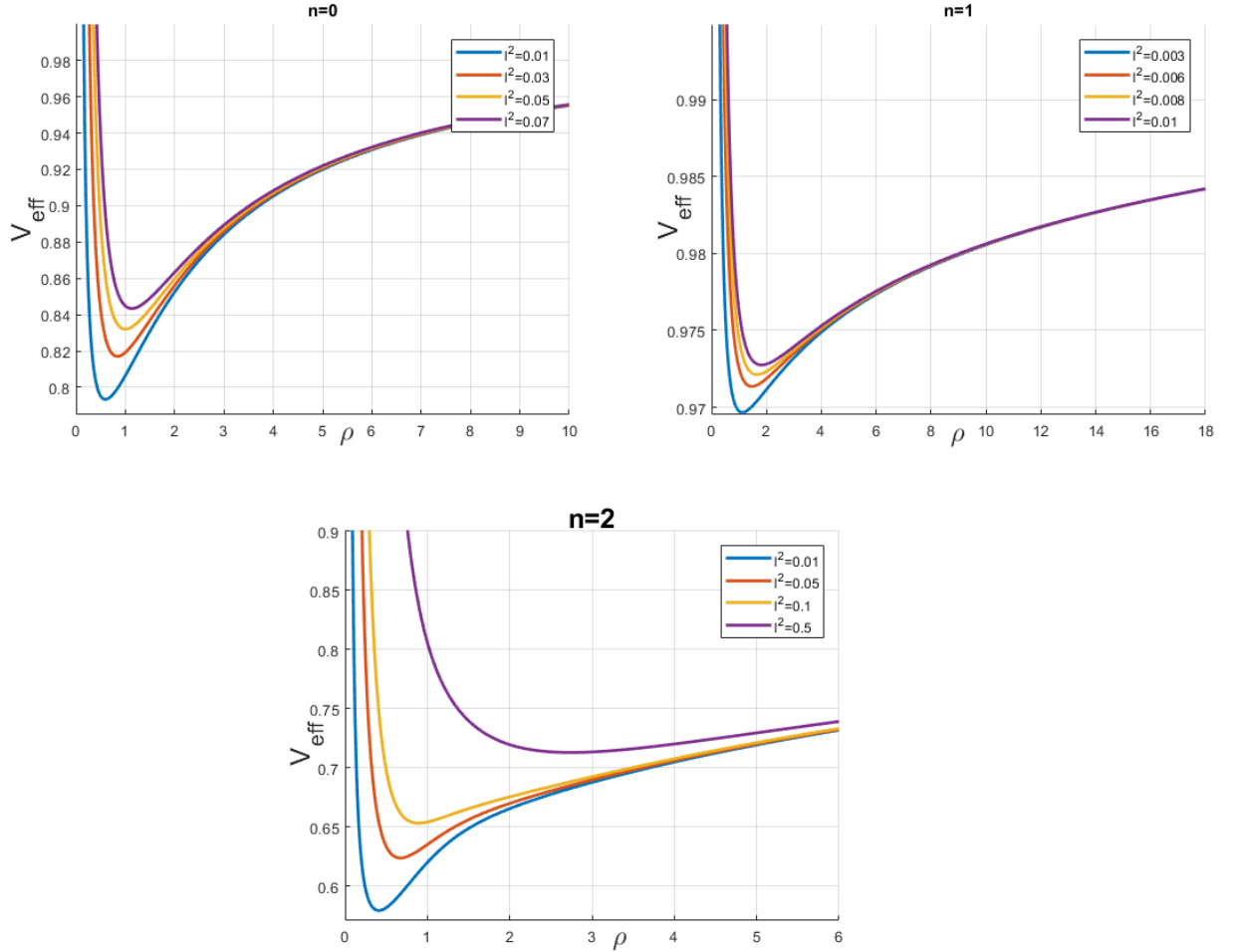
### 3. Análisis de resultados para la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre

Es posible reducir el problema de una partícula al análisis de un potencial central (1.12) cuya dinámica aporta mucha información sobre las trayectorias en dicho potencial, que es el objetivo de esta investigación. Para obtener los resultados que se van a exponer, se resolvieron las ecuaciones de movimiento mediante un software de cálculo simbólico como MAPLE y se obtuvieron una serie de resultados numéricos que fueron posteriormente graficados y analizados cualitativamente.

La forma de interpretar los datos y de estudiarlos consistió en primera instancia en graficar el potencial efectivo de cada tipo de partícula y observar su variación en función del momento angular, se puede apreciar la diferencia entre el perfil del potencial efectivo de una partícula masiva y un fotón. Luego, se identifican 3 zonas energéticas principales y se analizan cuales son las posibles trayectorias en cada una de estas zonas, realizando las respectivas gráficas que indican las geodésicas de esas partículas y finalmente se hace una interpretación física del fenómeno.

#### 3.1. PARTÍCULAS TIPO TIEMPO

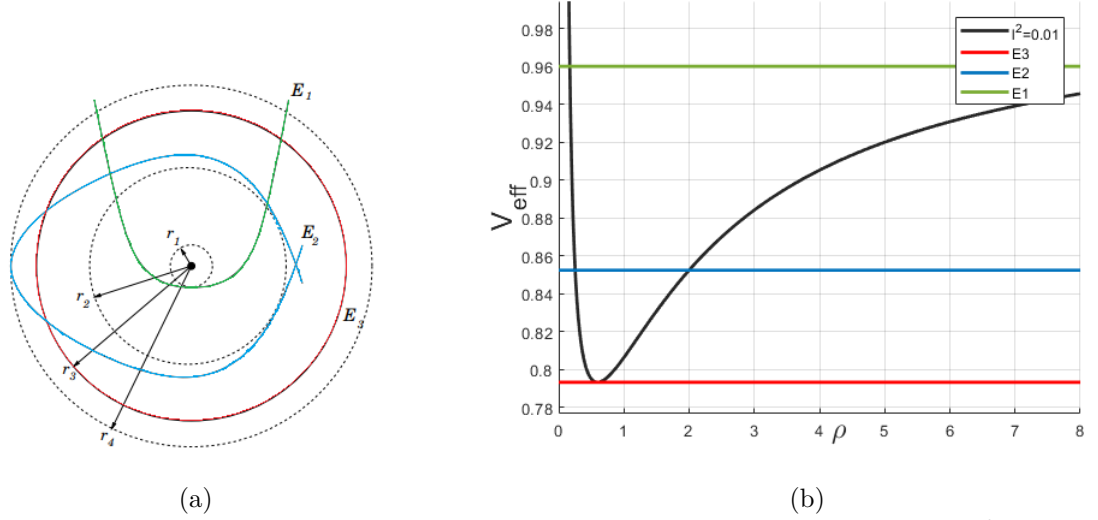
El análisis de partículas tipo tiempo o masivas se realiza bajo la condición (1.10) definiendo  $\epsilon = 1$ , estas se mueven en un potencial con diferentes energías y momento angular. Una forma de estudiar el potencial efectivo es mediante el convenio donde se toma que el potencial vale cero en el infinito y cuya representación gráfica del permite observar algunas características interesantes del movimiento



**Figura 2:** Potencial efectivo de partículas masivas en función del momento angular  $\ell^2$  para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre. La gráfica correspondiente al modelo  $n = 0$  se obtiene haciendo  $k = 7, 9$  y  $\tilde{A}_0 = 2$ ; la del modelo  $n = 1$  se obtiene con  $k = 292$ ,  $\tilde{A}_0 = 167$ , y  $\tilde{A}_1 = 46$ ; por último, la curva del modelo  $n = 2$  se obtienen para los valores  $k = 18, 12$ ,  $\tilde{A}_0 = 100$ ,  $\tilde{A}_1 = -20$  y  $\tilde{A}_2 = 90$ .

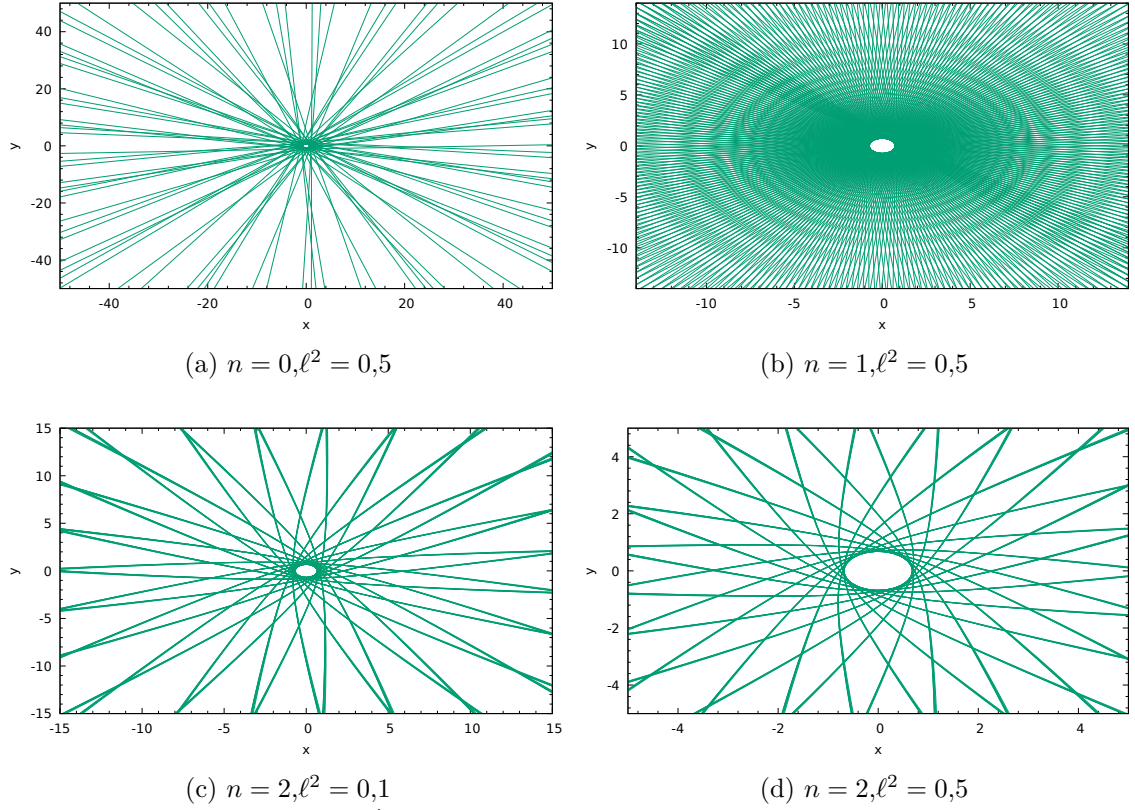
Para los potenciales radiales presentados en la figura 2, definidos como la suma de la energía centrífuga y la energía potencial del sistema, se observa que cuando la partícula se acerca a la fuente ( $\rho$  es pequeño), el movimiento es dominado por el término centrífugo, por lo tanto el potencial es repulsivo. Por el contrario a medida que la partícula se aleja ( $\rho$  cada vez es mas grande) el potencial es atractivo. Para estudiar en detalle la dinámica de las partículas, se tomó como ejemplo un caso particular de modelo y

momento angular que se presenta a continuación:



**Figura 3:** Comportamiento de una partícula masiva con momento angular  $\ell^2 = 0,01$  según su energía para el modelo  $n = 0$ .

Las distintas órbitas vienen caracterizadas por una energía total  $E = constante$ , que corresponde a líneas horizontales en la gráfica. Una partícula con energía  $E > E_1$  puede venir de lejos, acercarse al centro del potencial no más que  $r_1$  que es la distancia en la cual  $E = V_{eff}$ , en este punto la partícula nota el efecto de la fuerza centrífuga debida al momento angular y choca con la barrera centrífuga para alejarse hasta el infinito. El movimiento presentado no tiene cota superior para la distancia radial, razón por la cual, no existe ningún tipo de órbita como se evidencia en las siguientes geodésicas

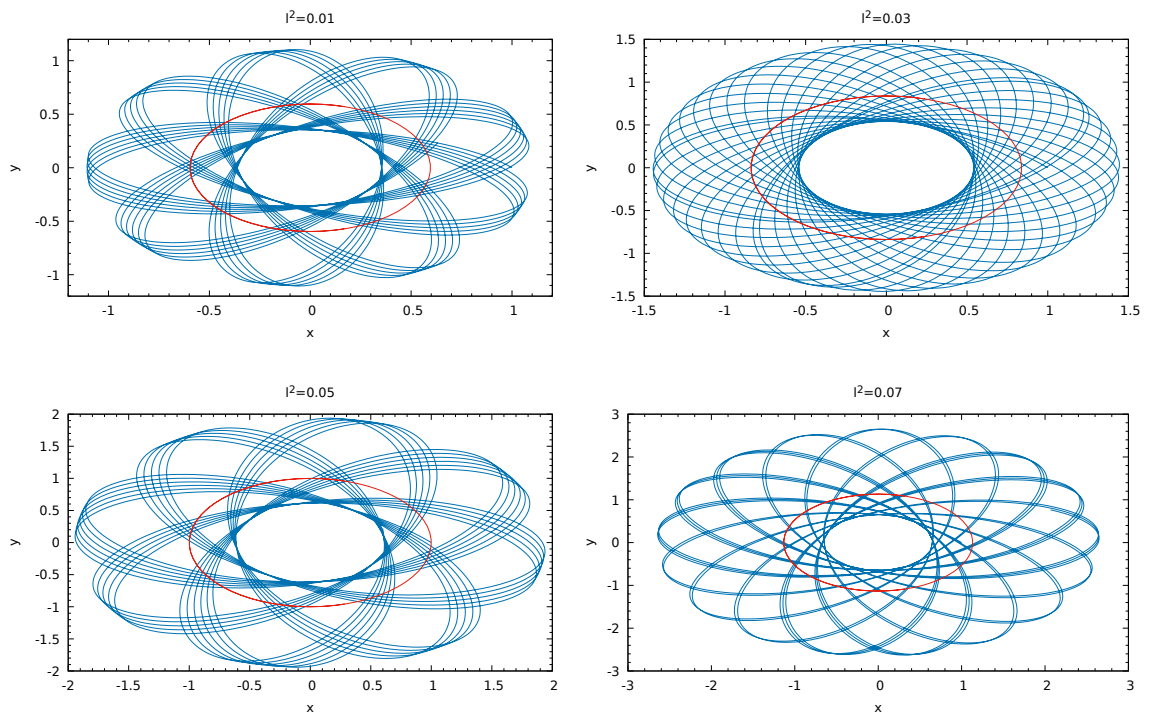


**Figura 4:** Órbitas no acotadas de partículas masivas

Se puede evidenciar en las trayectorias para energías  $E > E_1$  como las presentadas en la figura 4, que las partículas masivas se acercan hasta un punto definido por el radio del círculo central, rebotan en una y luego se dirigen al infinito.

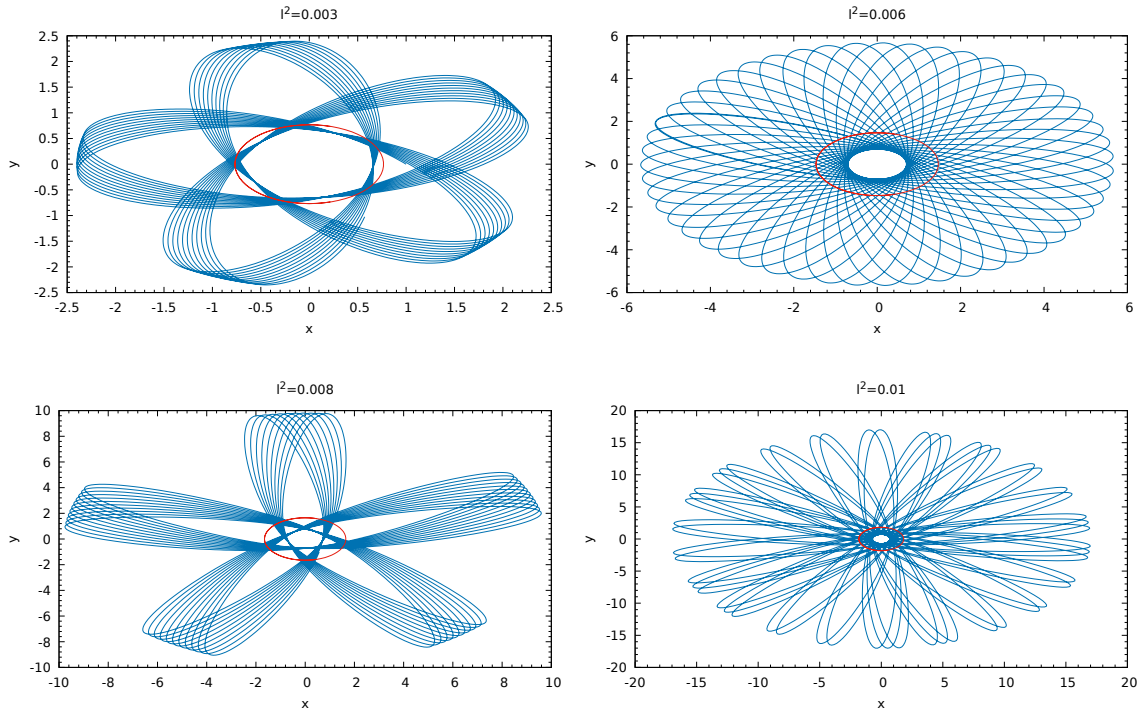
La trayectoria de una partícula con energía  $E_3 < E < E_1$  es muy diferente, ya que ahora  $\dot{\rho} = 0$  en dos puntos distintos denominados puntos apsidales,  $r_2$  y  $r_4$ , lo que se denomina movimiento ligado. La trayectoria por lo tanto tiene un punto de mínima aproximación  $r_2$  y uno de máximo alejamiento  $r_4$ , donde las partículas orbitan manteniéndose dentro de una corona limitada entre ambos valores, se dice que las órbitas están acotadas. El hecho de que la órbita está acotada por arriba y por abajo no implica necesariamente que la órbita sea cerrada.

El mínimo de energía que una partícula puede tener en el potencial es  $E_3$ , que corresponde al mínimo del potencial efectivo como se observa en la figura 3, y debido a las condiciones (1.14 y 1.15) se obtiene una órbita circular estable. La trayectoria posee radio  $r_3$  y corresponde a la distancia donde la fuerza atractiva del potencial cancela justamente la fuerza centrífuga del momento angular. En las siguientes geodésicas la órbita circular estable es representada por un círculo rojo y las trayectorias por trazos azules.



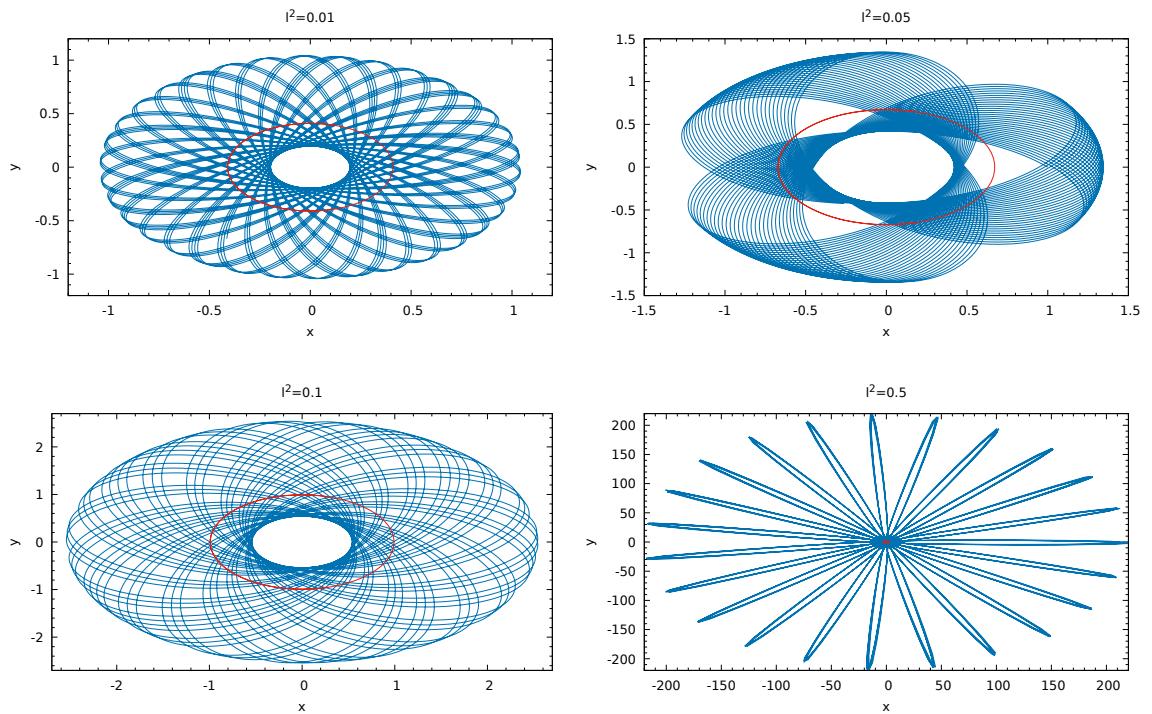
**Figura 5:** Órbitas acotadas para el primer modelo de la familia de soluciones  $n = 0$  en función de la variación del momento angular.

Se pueden observar comportamientos característicos de las órbitas; el radio de la órbita circular es mas grande a medida que el momento angular crece, la cota inferior y superior crecen, es decir, cada vez están mas alejadas del centro del potencial y el círculo central tambien crece, lo que indica que se aleja de la fuente.



**Figura 6:** Órbitas acotadas para el segundo modelo de la familia de soluciones  $n = 1$  en función de la variación del momento angular.

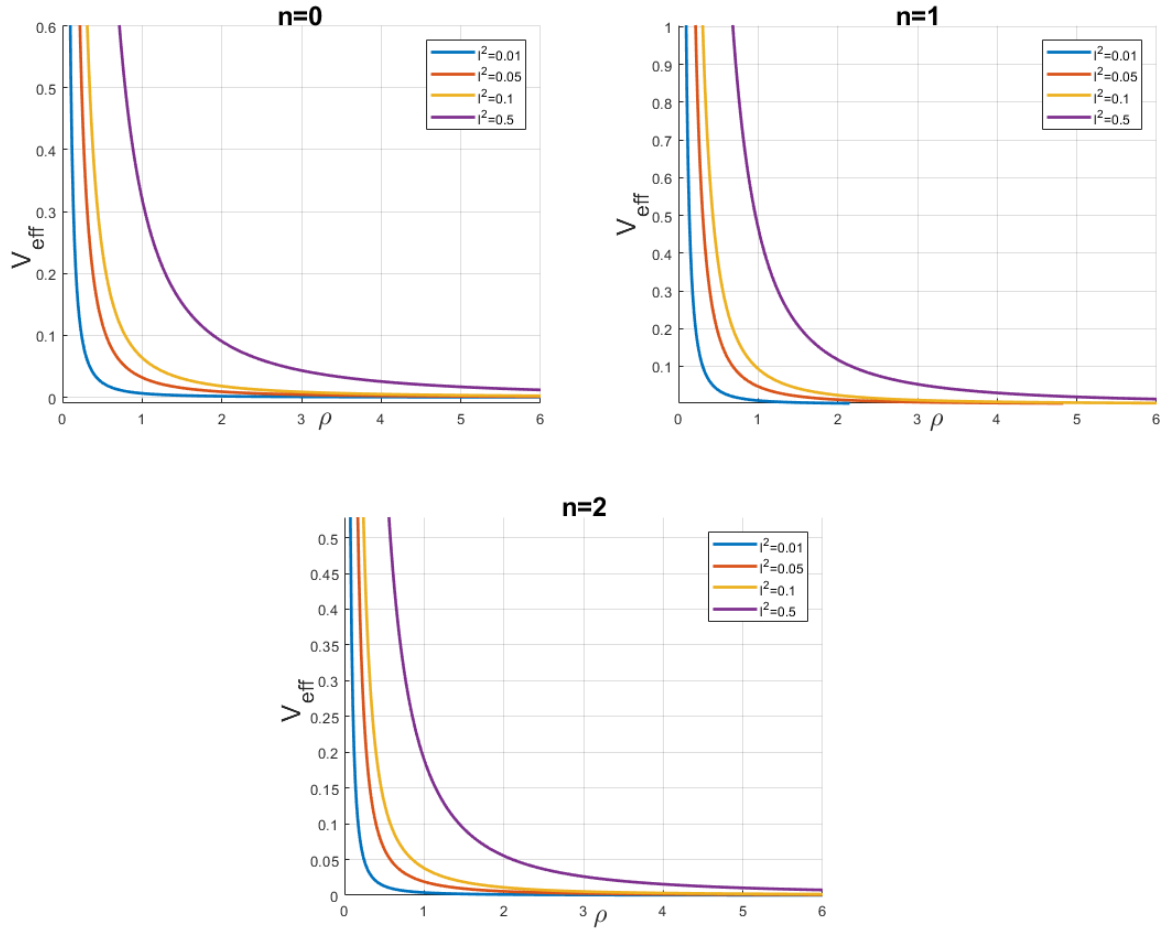
A medida que se agregan más órbitas a las gráficas es posible observar que se produce un ángulo entre órbitas, es decir, un ángulo entre la dirección donde se obtiene un  $r$  mínimo y un  $r$  máximo. Si no se produjera dicho ángulo, entonces las órbitas están cerradas: es decir, el movimiento radial y el movimiento angular tendrían un período común. Pero si se genera este desfase como se puede evidenciar en todas las órbitas, entonces las órbitas están limitadas, pero no son cerradas.



**Figura 7:** Órbitas acotadas para el tercer modelo de la familia de soluciones  $n = 2$  en función de la variación del momento angular.

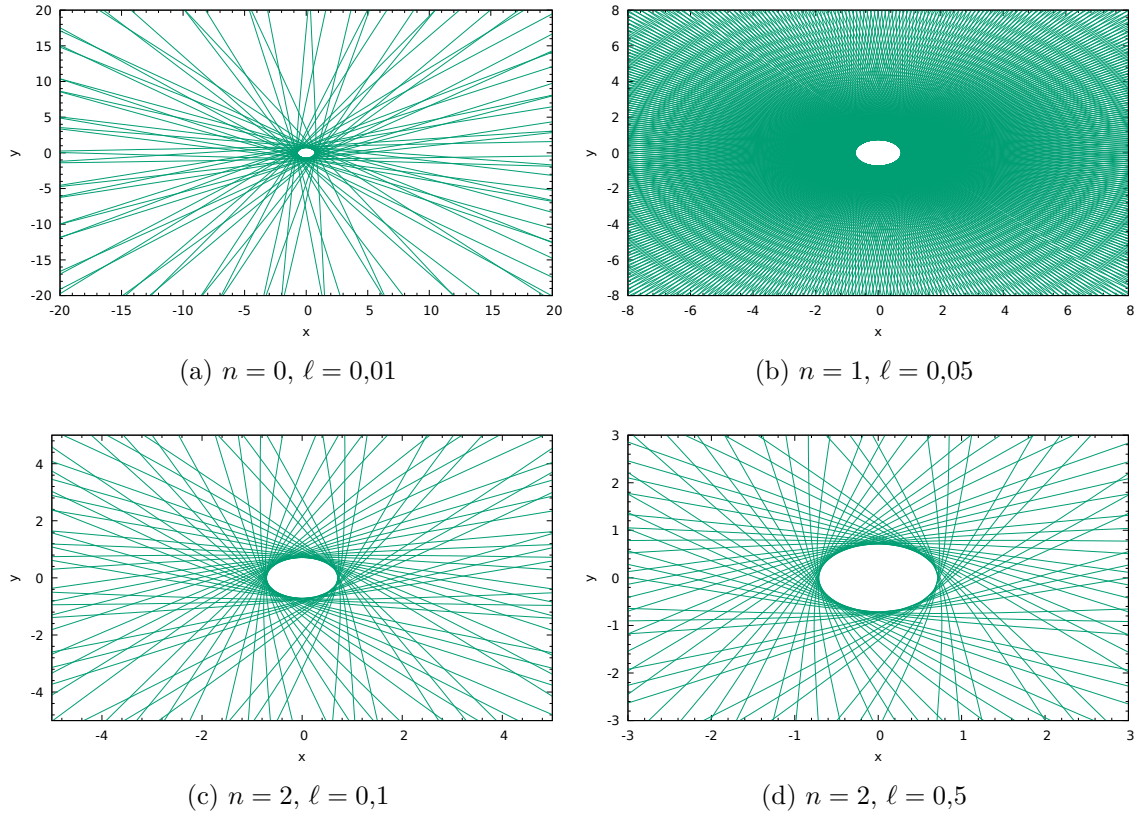
### 3.2. PARTÍCULAS TIPO LUZ

Por otra parte se realiza un análisis con las partículas tipo luz, la condición (1.10) determina que  $\epsilon = 0$ , por lo tanto el potencial efectivo para los distintos modelos es presentado



**Figura 8:** Potencial efectivo de fotones en función del momento angular  $\ell^2$  para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre.

las figuras muestran que no existe pozo de potencial, lo que indica que no existen órbitas acotadas y tampoco órbitas circulares, los fotones vienen del infinito y llegan hasta determinada distancia definida por su momento angular y se alejan del centro del potencial. Las trayectorias de los fotones son mostradas con trazos color verde y se pueden evidenciar círculos centrales que indican la distancia donde la partícula que viene regresa hacia el infinito.



**Figura 9:** Órbitas acotadas para el tercer modelo de la familia de soluciones  $n = 2$  en función de la variación del momento angular.

Es evidente que los fotones en la métrica conformestática no pueden estar confinados, no pueden realizar órbitas acotadas y solo podrán acercarse a la barrera de potencial y volver al infinito.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado el estudio de órbitas en campos gravitacionales axialmente simétricos generados por fuentes discoidales de materia bajo la formulación Lagrangiana. El modelo de potencial elegido cumple con la condición de configuración de materia axial y además presenta simetría respecto al plano  $z = 0$ . Los modelos elegidos para este estudio fueron los primeros 3 términos de la familia de soluciones denominada discos relativistas de Kuzmin-Toomre que fueron generados a partir de un potencial generalizado de infinitos términos Ec. (2.5). Para cada modelo del potencial se analizó la dinámica de las órbitas en el plano ecuatorial, primero se determinó la expresión de energía y el potencial efectivo que permitieron encontrar las zonas permitidas para el movimiento de partículas masivas y fotones. A continuación, para un determinado conjunto de condiciones iniciales y parámetros se encontró la solución de las ecuaciones de las geodésicas mediante un solución determinada por métodos numéricos. Finalmente, con los resultados obtenidos anteriormente se hace un estudio cualitativo de las trayectorias que siguen las partículas de prueba en el campo gravitacional generado por fuentes discoidales de materia.

El modelo estudiado se solucionó a partir del método Runge-Kutta-Fehlberg de quinto orden que es un algoritmo de análisis numérico para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. De lo cual se concluyó de manera general para partículas sin masa o fotones que por la forma del potencial de los modelos  $n = 0$  (2.14),  $n = 1$  (2.20) y  $n = 2$  (2.25) no es posible tener órbitas acotadas ecuatoriales en el espacio-tiempo conformestático, ya que los fotones vienen del infinito hasta un punto de retroceso mínimo y se aleja de nuevo al infinito.

Finalmente, para partículas masivas se estudiaron los posibles tipos de geodésicas, dando como resultado órbitas acotadas abiertas y órbitas circulares estables. Es interesante encontrar que debido a la condición de estabilidad de las órbitas circulares (1.15) para partículas de prueba, cualquier órbita circular en el espacio-tiempo conformestático será estable, ya que indistintamente de la elección del momento angular, el potencial

efectivo tendrá un mínimo. Esto demuestra cualitativamente que los fotones y las partículas masivas tienen comportamientos dinámicos diferentes en un campo gravitacional modelado por la familia de soluciones de Kuzmin-Toomre.

## 5. Apéndice teórico

A continuación se muestran los diferentes valores de las constantes  $k$  y  $\tilde{A}_n$ . Como se calculan los primeros 3 términos de la solución, se presentan las constantes para cada uno de los valores de  $n$ .

$n$	$k$	$\tilde{A}_0$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$
0	2	7.9		
1	292	167	46	
2	18.12	100	-20	90

**Tabla 1:** Tabla de constantes según modelo  $n$ .

Es importante aclarar que los valores que escogieron para las constantes conducen a densidades de energía positivas. La razón para escoger estas constantes es el perfil de densidad de energía del disco que presenta el valor máximo en el centro del sistema y empieza a decrecer a medida que se incrementa la distancia al centro del disco hasta llegar a tomar un valor de 0 en el infinito.

Finalmente, es importante resaltar que el modelo  $n = 0$  es más restrictivo, ya que solo tiene dos constantes libres, por lo tanto, la densidad de energía es máxima en el centro y tiende a cero en el infinito. Por otra parte, en el modelo  $n = 1$ , y  $n = 2$ , aparecen más constantes, lo que deriva en un comportamiento diferente.

## Bibliografía

A.(2008), Oleg. *Illustration of a conformal map*[Figura]. <http://commons.wikimedia.org>. [Online; accessed 06-January-2018]. 2008.

ADAMS, David John. *An introduction to galaxies and cosmology*. Cambridge University Press, 2004.

ARFKEN, George B y WEBER, Hans J. *Mathematical methods for physicists*. 1999.

BARDEEN, James M y WAGONER, Robert V. «Relativistic disks. I. Uniform rotation». En: *The Astrophysical Journal* (1971).

BICÁK, J; D, Lynden-Bell y PICHON, C. «Relativistic discs and flat galaxy models». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1993).

BINNEY, James y TREMAINE, Scott. *Galactic dynamics*. Princeton university press, 2011.

BIVCÁK, Jiří; LYNDEN-BELL, Donald y KATZ, Joseph. «Relativistic disks as sources of static vacuum spacetimes». En: *Physical Review D* (1993).

BIZYAEV, DV; KAUTSCH, SJ; SOTNIKOVA, N Ya; RESHETNIKOV, Vladimir P y MOSENKOV, Aleksander V. «Very thin disc galaxies in the SDSS catalogue of edge-on galaxies». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2016).

BRATEK, Łukasz; JAŁOCHA, Joanna y KUTSCHERA, Marek. «On the axisymmetric thin disc model of flattened galaxies». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2008).

CAMCI, U. «Symmetries of geodesic motion in Gödel-type spacetimes». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (2014).

CAPISTRANO, Abraão JS; ROQUE, Waldir L y VALADA, Rafael S. «Weyl conformastatic perihelion advance of small body objects». En: *arXiv preprint arXiv:1404.1358* (2014).

CONTOPOULOS, Georgios y KOTSAKIS, Dimitrios. *Cosmology: the structure and evolution of the universe*. Springer Science & Business Media, 2012.

DE SITTER, Willem. «Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1917).

DEZA, Michel Marie y DEZA, Elena. «Encyclopedia of distances». En: *Encyclopedia of Distances*. Springer, 2009.

FRIEDMAN, Alexander. «Über die Krümmung des Raumes». En: *Zeitschrift für Physik* (1922).

GOLDSTEIN, Herbert. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.

GONZÁLEZ, Guillermo A; GUTIÉRREZ-PIÑERES, Antonio C y OSPINA, Paolo A. «Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic spacetimes». En: *Physical Review D* (2008).

GONZÁLEZ, Guillermo A y LÓPEZ-SUSPES, Fransol. «Timelike and null equatorial geodesics in the Bonnor-Sackfield relativistic disk». En: *Revista Integración* (2011).

GONZÁLEZ, Guillermo A y PIMENTEL, Oscar M. «Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes». En: *Physical Review D* (2016).

GONZÁLEZ, Guillermo A; PLATA-PLATA, Sandra M y RAMOS-CARO, Javier. «Finite thin disc models of four galaxies in the Ursa Major cluster: NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949 and NGC 4010». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2010).

GUTIÉRREZ-PIÑERES, Antonio C; GONZÁLEZ, Guillermo A y QUEVEDO, Hernando. «Conformastatic disk-haloes in Einstein-Maxwell gravity». En: *Physical Review D* (2013).

GUTIÉRREZ-PIÑERES, Antonio C y QUEVEDO, Hernando. «Newman–Janis Ansatz in conformastatic spacetimes». En: *General Relativity and Gravitation* (2016).

HACKMANN, Eva y LÄMMERZAHN, Claus. «Complete analytic solution of the geodesic equation in Schwarzschild-(anti-) de Sitter spacetimes». En: *Physical review letters* (2008).

— «Geodesic equation in Schwarzschild-(anti-) de Sitter space-times: Analytical solutions and applications». En: *Physical Review D* (2008).

HARVEY, Alex. «Geodesics in Kasner universes». En: *Physical Review D* (1989).

HAWKING, Stephen W y ELLIS, George Francis Rayner. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 1973.

HERNANDEZ-PASTORA, JL; HERRERA, L y MARTIN, J. «Axially symmetric static sources of gravitational field». En: *Classical and Quantum Gravity* (2016).

HOBSON, Michael Paul; EFSTATHIOU, George P y LASENBY, Anthony N. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

HUBBLE, Edwin. «A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* (1929).

KATZ, Joseph; BICÁK, J y LYNDEN-BELL, Donald. «Disc sources for conformastationary metrics». En: *Classical and Quantum Gravity* (1999).

KLEIHAUS, Burkhard y KUNZ, Jutta. «Static black-hole solutions with axial symmetry». En: *Physical review letters* (1997).

KRAMER, Dietrich; MACCALLUM, Malcolm; HOENSELAERS, Cornelius y HERLT, Eduard. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press Cambridge, 1980.

KROON, J Valiente. *Conformal methods in general relativity*. Cambridge University Press, 2016.

KUZMIN, GG. «Model of the steady galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities». En: *Astronomicheskii Zhurnal* (1956).

- LANDAU, Lev Davidovich y LIFSHITZ, Eugenii Mikhailovich. *Teoría clásica de los campos*. Reverté, 1973.
- LEE, John M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Springer Science & Business Media, 2006.
- LEMAÎTRE, Georges. «Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques». En: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. 1927.
- LIKOSOVA DE MEJÍA, Galina y col. «Métricas Riemannianas y pseudo-Riemannianas». En: (1993).
- LÓPEZ-SUSPES, Framsol y GONZÁLEZ, Guillermo A. «Equatorial Circular Orbits of Neutral Test Particles in Weyl Spacetimes». En: *Brazilian Journal of Physics* (2014).
- LORA-CLAVIJO, FD; OSPINA-HENAO, PA y PEDRAZA, JF. «Charged annular disks and Reissner-Nordström type black holes from extremal dust». En: *Physical Review D* (2010).
- MISNER, Charles W; THORNE, Kip S y WHEELER, John Archibald. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- MORISON, Ian. *Introduction to astronomy and cosmology*. John Wiley & Sons, 2013.
- OHANIAN, Hans C y RUFFINI, Remo. *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press, 2013.

OLUM, Ken D. «Geodesics in the static Mallett spacetime». En: *Physical Review D* (2010).

PAPAPETROU, Achilleus. *Lectures on general relativity*. Springer Science & Business Media, 2012.

PICHON, C y LYNDEN-BELL, Donald. «New sources for Kerr and other metrics: rotating relativistic discs with pressure support». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1996).

SANDERS, Jason. *Dynamics of the Milky Way: Tidal Streams and Extended Distribution Functions for the Galactic Disc*. Springer, 2015.

SCHECK, Florian. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer Science & Business Media, 2010.

STEANE, Andrew M. *Relativity made relatively easy*. Oxford University Press, 2012.

SYNGE, John Lighton. *Relativity: the special theory*. Prabhat Prakashan, 1965.

TOOMRE, Alar. «On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies.» En: *The astrophysical journal* (1963).

VOORHEES, B. «Static axially symmetric gravitational fields». En: *Physical Review D* (1970).

WEYL, Hermann. «Zur gravitationstheorie». En: *Annalen der Physik* (1917).

WILKINS, Daniel C. «Bound geodesics in the Kerr metric». En: *Physical Review D* (1972).

ZHOU, Sheng; CHEN, Juhua y WANG, Yongjiu. «Geodesic structure of test particle in Bardeen spacetime». En: *International Journal of Modern Physics D* (2012).