

**ANÁLISIS TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UN
HAZ CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL
ENTERO Y NO ENTERO**

CRISTIAN HERNANDO ACEVEDO CACERES



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2012

**ANÁLISIS TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UN
HAZ CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL
ENTERO Y NO ENTERO**

CRISTIAN HERNANDO ACEVEDO CACERES

Proyecto de investigación para optar al título de
Magister en Física

Director:

Dr. Yezid Torres Moreno

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2012

*A dos reinas ya en mi vida: mi mamá Cecilia y mi
hermana Paula.*

*Y a Tatiana aún cuando no te vuelva a ver,
tus ojos no los he podido olvidar y creo que nunca
podré olvidar.*

AGRADECIMIENTOS

En este punto le agradezco a Cecy, quien con sus inconfundibles almuerzos siempre me regocijó. A mi compañero Carlos Diaz, con quien las discusiones fueron arduas pero fructíferas. Además a mi director Yezid Torres, cuyas discusiones y recomendaciones con mis ideas se encuentran plasmadas en este proyecto, además de siempre saberme corregir constructivamente. También a personas como la profesora Angela Guzman hoy día en CREOL Florida, por inducirme al tema, a los colegas: Giovanni Millione en College of New York y Miguel Paéz en la Universidad de Sao Paulo por siempre enviarme cuanto artículo les solicitaba. Finalmente a los compañeros de la Maestría y profesores del grupo de Óptica y Tratamiento de Señales.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	18
DESCRIPCIÓN FÍSICA DE UN HAZ CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL	21
0.1. Introducción	21
0.2. Momento angular orbital entero	22
0.2.1. Momento angular orbital entero dentro de la aproximación paraxial	22
0.2.2. Momento angular orbital entero con haces no paraxiales	32
0.3. Generación de haces con momento angular orbital entero mediante hologramas en forma de tenedor	36
0.3.1. Difracción de un haz por un holograma tenedor	38
0.3.2. Aproximación de campo lejano	42
0.3.3. Aproximación de campo cercano	44
0.4. Momento angular orbital no entero	45
0.4.1. Superposición de estados con momento angular orbital no entero	47

0.4.2. Distribución angular para estados con momento angular orbital no entero	48
0.5. Generación de haces con momento angular orbital no entero mediante hologramas en forma de tenedor	51
0.5.1. Propagación de un haz con momento angular orbital no entero	52
CONSTRUCCIÓN E IMPLEMENTACIÓN DEL MONTAJE EXPERIMENTAL	55
0.6. Introducción	55
0.7. Caracterización global en modo modulación acoplada para la matriz LCD	56
0.7.1. Ajuste del contraste y brillo de la matriz LCD	58
0.8. Montaje experimental para un haz con MAO entero y no entero. Medidas en intensidad.	60
0.8.1. Sistema de iluminación	61
0.8.2. Generación de hologramas en forma de tenedor entero y no entero	62
0.8.3. Sistema de adquisición	65
0.9. Montaje experimental para un haz con MAO entero y no entero. Medidas de fase.	66
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	68
0.10. Introducción	68
0.11. Resultados para el haz con MAO. Medidas de intensidad.	68

ÍNDICE GENERAL	10
0.12. Resultados para el haz con MAO. Medidas de fase.	75
CONCLUSIONES	78
0.13. Conclusiones	78
APÉNDICE 1	80
APÉNDICE 2	84
APÉNDICE 3	87
APÉNDICE 4	91
APÉNDICE 5	94
APÉNDICE 6	97
APÉNDICE 7	101
APÉNDICE 8	103
APÉNDICE 9	105
REFERENCIAS	108

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Modos Laguerre-Gauss	30
2.	Trayectoria del vector de Poynting	31
3.	Hogramas enteros	37
4.	Carga topológica en holograma entero	37
5.	Geometría para difracción de haz de Gauss en holograma entero	38
6.	Órdenes de difracción para holograma entero	42
7.	Perfil de distribución de intensidad de campo lejano	43
8.	Perfil de distribución de intensidad de campo cercano	45
9.	Discontinuidad de fase en estados de MAO no enteros	46
10.	Distribución de probabilidad para estados con MAO no entero	50
11.	Hogramas no enteros	51
12.	Intensidad no entera	54
13.	Sistema para modo acoplado en intensidad	57
14.	Linealización del contraste y el brillo experimental en la LCD	59
15.	Sistema experimental de medidas en intensidad	60

16.	Esquema del montaje en intensidad	61
17.	Perfiles transversales de un holograma entero	63
18.	Hologramas con cargas topológicas enteras	63
19.	Perfiles transversales de un holograma no entero	64
20.	Perfil ampliado de corte para holograma no entero	64
21.	Hologramas con cargas topológicas no entera	65
22.	Sistema experimental de medidas de fase	67
23.	Esquema del montaje en fase	67
24.	Figuras experimentales para campo lejano	70
25.	Figuras teóricas para campo lejano	71
26.	Radio promedio experimental para carga entera $p = 24$	72
27.	Intensidad experimental para carga topológica no entera en el intervalo (15-16)	73
28.	Intensidad experimental para carga topológica no entera en intervalo (16-17)	73
29.	Intensidad teórica para carga topológica no entera en el intervalo (15-16)	74
30.	Intensidad teórica para carga topológica no entera en el intervalo (16-17)	74
31.	Imágenes de fase para carga entera	75
32.	Imágenes de fase para carga entera ampliada	76
33.	Imágenes de fase para carga no entera	77
34.	Intensidad promedio para algunos datos experimentales	106

35. Linealización de contraste y brillo para algunos valores de gris	107
--	-----

ÍNDICE DE TABLAS

1.	Algunas Especificaciones técnicas del Panel LCD(liquid cristal display)[75].	56
2.	Algunas especificaciones técnicas del Fotodetector 818-SL Newport TM	58
3.	Algunas especificaciones técnicas del Laser.	61
4.	Algunas Especificaciones técnicas de la cámara utilizada.	66
5.	Valores de radios promedio experimental y teórico obtenidos para diferentes cargas con su respectiva razón entre ellos.	69

Título : Análisis Teórico-Experimental De Un Haz Con Momento Angular Orbital Entero Y No Entero¹

Autor: Acevedo Cáceres, Cristian Hernando⁷

PALABRAS CLAVES: Momento Angular Orbital Entero y No Entero, Difracción de Fresnel-Kirchhoff, Hologramas En Forma De Tenedor y Modulador Espacial De Luz.

RESUMEN:La electrodinámica ha identificado de manera diferenciada el momento angular orbital spín y el momento angular orbital de la luz, MAO. El MAO de la luz está relacionado con la fase helicoidal en los frentes de onda propagándose en un medio. En condiciones experimentales para generar y analizar el MAO se utilizan hologramas en forma de tenedor generados por computador. Estos hologramas imponen a la onda incidente un factor de fase necesario para generar y analizar el MAO. La presencia del MAO entero y no entero es detectada a través de las figuras en intensidad formadas por la luz difractada por el holograma. En este trabajo las formas de la intensidad formadas y sus correspondientes radios son encontrados para un haz con MAO entero a partir de la teoría de la difracción de Fresnel-Kirchhoff en campo lejano para un haz láser incidente en el modo fundamental TEM₀₀ además se prueba que la intensidad de un haz con MAO no entero es una compleja estructura de órdenes con MAO entero de acuerdo a la teoría cuántica. Teoría y resultados experimentales validan las condiciones teóricas de propagación de un haz láser de longitud de onda 532 nm con MAO entero en el primer orden de difracción y Mao no entero. Estos haces son generados con un modulador espacial de luz SLM. También se examina la estructura experimental de fase de un Haz con MAO entero y no entero por interferencia.

¹Proyecto de Maestría.

⁷Grupo de Óptica y Tratamiento de señales.Escuela de Física. facultad de ciencias. Director: Yezid Torres Moreno, Ph.D

TITLE : Experimental and theoretical analysis of a beam with integer and non-integer charge angular orbital momentum¹.

AUTHORS : Acevedo Cáceres, Cristian Hernando; ⁷.

KEY WORDS : Integer and noninteger angular orbital momentum of light, Fresnel-Kirchhoff diffraction, Forked CGH Computer Generated Holograms and SLM Spatial Light Modulators.

DESCRIPTION : The Electrodynamics allows identify spin angular momentum SAM and orbital angular momentum of light, OAM. The OAM of the light is related to the helical phase of wavefronts propagating in a medium. Under experimental conditions for create and analyze rotations of the phase structure of a light beam, we use fork holograms generates by computer. These holograms imposes on the incident wave a helical phase factor. The presence of integer and noninteger charge is detected on the intensity pattern of the diffracted beam by the hologram. In this work, the intensity of diffracted light is a donut with a characteristic radio indicating a beam with integer OAM, in accord with the Fresnel-Kirchhoff theory in far-field for a incident laser beam in the fundamental mode, also we demonstrate that the intensity of light beam with noninteger OAM is a complex structure comprising integer orders OAM, in accord with quantum theory. Theoretical and experimental results validate conditions of generation and propagation of a laser beam of wavelength 532 nm with integer or noninteger OAM in their first diffracted order. Such beams are generated with a fork shaped hologram placed in a spatial light modulator, SLM. This SLM works in optimal conditions in the modulation coupled mode. Also we examine the experimental phase structure of integer and noninteger OAM beams using an Mach Zehnder interferometer.

¹Research thesis for a master degree

⁷Gots Optics and Signal Processing Group, Physics School, Science Faculty, Industrial Santander University, Yezid Torres Moreno (Advisor)

NOTACIÓN

En este trabajo para efectos prácticos se utiliza la siguiente notación:

MAO : Momento Angular Orbital

MSL : Modulador Espacial De luz

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista clásico hasta el punto de vista cuántico a la luz se le han asociado propiedades mecánicas. Kepler propuso que la cola de un cometa era debida a la presión de radiación de la luz originada por el sol y pudo corroborarlo por observaciones realizadas de la cola y diferentes posiciones del sol para varios cometas[77] (Aunque hay otra cola originada por la interacción electroestática entre las partículas iónicas del cometa y el sol). Empero fue Maxwell el primero en introducir un desarrollo cuantitativo de la teoría del electromagnetismo[70] y utilizarlo para describir un haz de luz como oscilaciones transversales de los campos eléctricos y magnéticos que viajan en el espacio con una velocidad c [70]. Partiendo de la teoría de Maxwell, Poynting demostró que una onda electromagnética posee un momento lineal y un flujo de energía bien definido[78], además estableció que una onda con polarización circular lleva un flujo de momento angular de $(\lambda/2\pi)u$, siendo λ y u la longitud de onda y densidad de energía respectivamente[72]. Beth demostró experimentalmente a partir de consideraciones similares a las de Poynting que un haz con polarización circular lleva un momento angular espín finito y midió el torque ejercido por el haz sobre una lámina de cuarto de onda suspendida sobre un espejo[79].

No obstante aunque se conocía que un haz propagándose poseía un momento angular espín debido a su polarización, sólo fue hasta 1992 con el trabajo de Allen et al. y 2004 con el trabajo de Berry cuando se explica por primera vez la propagación de un haz de luz con momento angular orbital (MAO) entero y no entero respectivamente; y se le asocia en ambos casos a la estructura de fase de la radiación electromagnética[6,68]. Desde el trabajo de Allen y sus colaboradores el momento angular orbital ha sido materia de intenso estudio experimental[35-36,41] y teórico[6,10,12,31]. El conocimiento referente al momento angular orbital entero y no

entero de la luz ha sido impulsado por sus aplicaciones muy conocidas en los campos de: manipulación de la luz a través de pinzas ópticas[80-84] y codificación de información en comunicaciones[85-88]; aunque también se le reconoce algunas aplicaciones poco conocidas en: mejoramiento de fronteras en el procesamiento de imágenes[89-90] y generación de haces de femtosegundo radialmente polarizados[91].

Para generar haces con MAO son muy utilizadas las técnicas de hologramas en forma de tenedor[39-40,48,64], placas de espiral de fase[35,62] y conversores astigmáticos[37,38], sin embargo también han sido propuestos algunos métodos experimentales como las q -placas que utilizan una placa de material anisotrópico birrefringente hecha de un cristal líquido para generar el haz con MAO[92] y métodos teóricos como el resonador de anillo rodeado por un grupo de nanotubos[93]. Pero son los hologramas en forma de tenedor cuando son generados a través de un modulador espacial de luz (MSL), quienes han sido ampliamente utilizados en gran parte debido a la facilidad en la generación y detección en tiempo real de un haz con MAO[94].

De acuerdo a lo anterior surge el interés por comprender el(los) evento(s) físico(s) que acontecen bajo el reconocimiento del momento angular orbital de la luz, es decir analizar utilizando conceptos de electrodinámica clásica y teoría cuántica, las condiciones necesarias para generar y propagar en el espacio libre un haz con MAO entero y no entero, además de construir un montaje experimental que permita verificar las predicciones surgidas del análisis teórico mediante la detección del haz con MAO¹ en intensidad y fase. De esta manera el presente trabajo muestra detalladamente el desarrollo de dicho trabajo teórico y experimental obtenido para un haz con MAO entero y no entero y para ello, se ha organizado su contenido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se estudia teóricamente la estructura de campo de un haz con MAO entero y no entero, además se describe su generación a través del uso de hologramas en forma de tenedor y analiza su propagación en el espacio libre. En el segundo capítulo se describe el montaje experimental implementado para evaluar las consideraciones obtenidas para la intensidad y se utiliza un montaje interferométrico para observar la fase de un haz

¹Al cuál se le conoce un valor específico asignado en la generación

con MAO entero y no entero. En el tercer capítulo se muestran y analizan los resultados obtenidos. Finalmente en el cuarto capítulo, se describen las conclusiones del trabajo.

DESCRIPCIÓN FÍSICA DE UN HAZ CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL

0.1 Introducción

El momento angular orbital (MAO) de la luz ha jugado un papel importante en el electromagnetismo desde los primeros escritos de Maxwell[70], aunque debe señalarse una temprana teoría cuántica del momento angular de la luz fue introducida por Darwin[71]. Empero Poynting fue el primero en identificar las propiedades mecánicas del momento angular de la luz y asociarlas con la polarización circular de los campos[72]. Este último trabajo fue base de posteriores trabajos como el de Allen et al, quienes relacionaron el momento angular orbital de luz con la estructura espacial del campo[6,10].

En este capítulo se estudiarán las condiciones teóricas necesarias para generar y propagar un haz con momento angular orbital, a partir de una descripción clásica para el MAO entero, es decir desde el punto de vista de la óptica electromagnética; Pero utilizando una descripción cuántica para el MAO no entero. De acuerdo a lo anterior se ha dividido el capítulo de la siguiente forma: En la sección 1.2 se estudian los haces con un momento angular orbital entero dentro y fuera de la aproximación paraxial[1], mientras que en la sección 1.3 se analiza teóricamente la generación y propagación de haces con MAO entero con el uso de

hologramas en forma de tenedor entero. Entre tanto en la sección 1.4 se analizan los haces con un MAO no entero, finalmente en la sección 1.5 se estudia la generación y propagación de haces con un MAO no entero mediante el uso de hologramas en forma de tenedor no enteros.

Los resultados aquí obtenidos constituirán la principal herramienta para establecer las consideraciones experimentales necesarias para generar y detectar un haz con MAO.

0.2 Momento angular orbital entero

El momento angular orbital de la luz entero puede ser descrito mediante el uso del marco de la óptica electromagnética ya sea usando la aproximación paraxial o estando fuera de dicha aproximación.

0.2.1. Momento angular orbital entero dentro de la aproximación paraxial

Para analizar un haz con momento angular orbital propagándose en el vacío, longitudinalmente en z y transversal en el plano xy dentro de la aproximación paraxial, partamos de la ecuación de Helmholtz[1]:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0. \quad (1)$$

Ahora para un campo de la forma $U(x, y, z) = u(x, y, z, t)e^{ikz}$, donde u se asume como armónico en el tiempo, la anterior ecuación se convierte en:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (ue^{ikz}) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) e^{ikz} + ikue^{ikz} \right] + k^2 ue^{ikz} = 0, \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (ue^{ikz}) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) e^{ikz} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} e^{ikz} - k^2 ue^{ikz} + k^2 ue^{ikz} = 0, \quad (2b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (ue^{ikz}) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) e^{ikz} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} e^{ikz} = 0. \quad (2c)$$

De la aproximación paraxial para una distribución de campo se puede despreciar $\partial^2 u / \partial z^2$ con respecto al término $k \partial u / \partial z$ [1], de manera que se llega a la ecuación de onda paraxial:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Por otro lado Davis[2] demostró que un potencial vectorial con una sola componente obedece la ecuación paraxial, además que genera campos eléctricos y magnéticos consistentes con la solución de las ecuaciones de Maxwell para un haz propagándose en un medio isótropo y no homogéneo[3], Entonces podemos asumir un potencial vectorial \vec{A} periódico en el tiempo con una sola componente en dirección x :

$$\vec{A} = u(x, y, z) e^{ikz} \hat{x}, \quad (4)$$

Si utilizamos el gauge de Lorentz[4]:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5)$$

además del operador recíproco $\partial / \partial t \rightarrow -i\omega$ [2,5], entonces el potencial escalar ϕ puede ser escrito como:

$$\phi = -\frac{ic}{k} (\nabla \cdot \vec{A}). \quad (6)$$

De manera que el campo de inducción magnética pueden ser escrito como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{z}, \quad (7a)$$

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik u \right) e^{ikz} \hat{y} - \frac{\partial u}{\partial y} e^{ikz} \hat{z} = ik \left(u \hat{y} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{z} \right) e^{ikz}. \quad (7b)$$

Donde se ha hecho uso nuevamente de la aproximación paraxial[1] al considerar $\frac{\partial u}{\partial z} \ll |ku|$ [1]. Mientras el campo eléctrico puede ser escrito también en función del potencial vectorial \vec{A} como:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{ic}{k} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) + i\omega \vec{A}, \quad (8a)$$

$$= \frac{ic}{k} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \hat{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \hat{y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \hat{z} \right] e^{ikz} + i\omega u e^{ikz} \hat{x}, \quad (8b)$$

$$\vec{E} \approx ikc \left(u \hat{x} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{z} \right) e^{ikz}. \quad (8c)$$

En donde se ha despreciado las variaciones transversales de segundo orden de la distribución de campo u por ser muy pequeñas, además de las derivadas mixtas entre las parte longitudinal y transversal, como consecuencia de la aproximación paraxial[1].

Ahora utilizando los anteriores resultados podemos hallar el vector de Poynting \vec{S} promedio temporal² a través de:

$$\vec{S} = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \Re e \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} [(\vec{E}^* \times \vec{B}) + (\vec{E} \times \vec{B}^*)], \quad (9a)$$

$$= \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \left[ikcu \frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{x} - ikcu^* \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + k^2 cuu^* \hat{z} - ikcu^* \frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + ikcu \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{y} + k^2 cuu^* \hat{z} \right], \quad (9c)$$

$$= ik \frac{c^3 \epsilon_0}{2} \left[u \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u^*}{\partial z} \hat{z} \right) - u^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} \right) \right] + \epsilon_0 k^2 c^3 |u|^2 \hat{z}, \quad (9d)$$

$$\vec{S} = i \frac{w \epsilon_0 c^2}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \epsilon_0 k \omega c^2 |u|^2 \hat{z}. \quad (9e)$$

Donde hemos sumado y restado $u \frac{\partial u^*}{\partial z}$ y $u^* \frac{\partial u}{\partial z}$ en la componente z ya que estos valores de acuerdo a la aproximación paraxial son mucho menores que kuu^* en la misma componente z . Asumamos una distribución de campo u en coordenadas cilíndricas, es decir $u = u(r, \theta, z)$ de la siguiente forma:

$$u(r, \theta, z) = u_0(r, z) e^{il\theta} \quad (10)$$

Donde l es un número real, luego la densidad de momento lineal electromagnética \vec{p}_{em} [4] teniendo en cuenta la transformación del sistema cartesiano al cilíndrico es:

²Es posible hacerlo ya que los campos son armónicos debido a que u lo es también.

²El superíndice * indica complejo conjugado.

$$\vec{p}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2}, \quad (11a)$$

$$= i \frac{\omega \epsilon_0}{2} \left[u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} \hat{r} - \frac{il}{r} |u_0|^2 \hat{\theta} + u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} \hat{z} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \hat{r} - \frac{il}{r} |u_0|^2 \hat{\theta} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} \hat{z} \right] + \epsilon_0 k \omega |u_0|^2 \hat{z},$$

$$\vec{p}_{em} = i \frac{\omega \epsilon_0}{2} \left[\left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} - \frac{2il}{r} |u_0|^2 \hat{\theta} + \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \hat{z} \right] + \epsilon_0 k \omega |u_0|^2 \hat{z}. \quad (11b)$$

Por lo tanto sabiendo que el vector posición en coordenadas cilíndricas es $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ entonces la densidad de momento angular orbital electromagnético \vec{l}_{em} [4] es:

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{p}_{em}, \quad (12a)$$

$$\vec{l}_{em} = i \frac{\omega \epsilon_0}{2} \left[\frac{2il}{r} |u_0|^2 \hat{r} + z \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{\theta} - \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \hat{\theta} - 2il |u_0|^2 \hat{z} \right]$$

$$- \epsilon_0 r k \omega |u_0|^2 \hat{\theta}. \quad (12b)$$

De allí tenemos que la componente en la dirección z de la densidad de momento angular es:

$$(l_{em})_z = l \epsilon_0 \omega |u_0|^2 = l \epsilon_0 \omega |u|^2. \quad (13)$$

Por otro lado la densidad de energía electromagnética u_{em} [4] derivada a partir de la componente z de la densidad de momento lineal es:

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right] = c (\vec{p}_{em})_z, \quad (14a)$$

$$u_{em} = c \epsilon_0 k \omega |u_0|^2. \quad (14b)$$

De manera que tomamos la razón entre la densidad de momento angular orbital en la componente z y la densidad de energía antes hallada,

$$\frac{(l_{em})_z}{u_{em}} = \frac{l}{ck} = \frac{lc}{c\omega} \longrightarrow \frac{(l_{em})_z}{u_{em}} = \frac{l}{\omega}. \quad (15)$$

Ahora si integramos las densidades de momento angular orbital y de energía sobre el plano xy , entonces obtenemos la razón de momento angular orbital electromagnético por unidad de energía total, es decir:

$$\frac{(L_{em})_z}{U_{em}} = \frac{\iint l \epsilon_0 \omega |u_0|^2 r dr d\theta}{\iint c \epsilon_0 k \omega |u_0|^2 r dr d\theta} \longrightarrow \frac{(L_{em})_z}{U_{em}} = \frac{l}{\omega}. \quad (16)$$

Lo anterior puede interpretarse como el haz luminoso llevando un momento angular orbital l por fotón[6].

Sin embargo lo anterior puede generalizarse aún más si se asume que el potencial vectorial \vec{A} posee componentes en las direcciones x y y [6] y forma una elipse en el plano xy [6]; de modo que podemos escribir \vec{A} como:

$$\vec{A} = (\alpha\hat{x} + \beta\hat{y})u(x, y, z, t)e^{ikz}. \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (17)$$

Por lo tanto siguiendo un procedimiento similar, al utilizado para encontrar los campos eléctrico y magnético en las ecuaciones (1.7a) y (1.8a) tendremos que:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha u e^{ikz} & \beta u e^{ikz} & 0 \end{vmatrix}, \quad (18a)$$

$$= \left[-\beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \hat{x} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \hat{y} + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{ikz}. \quad (18b)$$

Mientras,

$$\vec{E} = i\omega(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y})ue^{ikz} + \frac{ic}{k}\nabla \left[\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) e^{ikz} \right], \quad (19a)$$

$$= i\omega(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y})ue^{ikz} + \frac{ic}{k} \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \hat{x} + \left(\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \hat{y} + \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \hat{z} + ik \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{ikz}, \quad (19b)$$

$$\vec{E} \approx \left[i\omega\alpha\hat{x} + i\omega\beta\hat{y} - c \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{ikz}. \quad (19c)$$

En donde nuevamente hemos despreciado las variaciones transversales de segundo orden de la distribución de campo u [1]. Utilizando los dos últimos resultados hallamos el vector de Poynting promedio:

$$\begin{aligned} \vec{S} = & \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left\{ \left[-i\beta^* \omega u^* \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \alpha c \left(\alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \right] \hat{x} \right. \\ & + \left[i\alpha^* \omega u^* \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c\beta \left(\alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \right] \hat{y} \\ & + \left. \left[-i|\alpha|^2 \omega u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) - i|\beta|^2 \omega u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \right] \hat{z} \right\} + \\ & \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left\{ \left[i\beta \omega u \left(\beta^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + \alpha^* c \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} - iku^* \right) \right] \hat{x} \right. \\ & + \left[-i\alpha \omega u \left(\beta^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + c\beta^* \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} - iku^* \right) \right] \hat{y} \\ & + \left. \left[i|\alpha|^2 \omega u \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} - iku^* \right) + i|\beta|^2 \omega u \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} - iku^* \right) \right] \hat{z} \right\}, \quad (20a) \end{aligned}$$

Desarrollando y teniendo en cuenta que se pueden despreciar los términos que incluyen los productos de las variaciones de primer orden de la distribución de campo u y u^{*3} , debido a que al comparar con otros términos en la misma dirección siempre resultan los factores: $(\frac{\partial u}{\partial z} + ku)$ y $(\frac{\partial u^*}{\partial z} + ku^*)$, que de acuerdo con aproximación paraxial[1] se pueden reescribir como ku y ku^* respectivamente. De manera que obtenemos que el vector de poynting promedio:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} & \left[i\omega(|\alpha|^2 + |\beta|^2)u \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u^*}{\partial z} \hat{z} \right) - i\omega(|\alpha|^2 + |\beta|^2)u^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} \right) + 2\omega k(|\alpha|^2 + |\beta|^2)|u|^2 \hat{z} + i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left(u^* \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \hat{x} \right. \\ & \left. + i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left(u^* \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \hat{y} \right], \end{aligned} \quad (21a)$$

reagrupando términos y utilizando el hecho de que \vec{A} forma una elipse en el plano xy , es decir $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [6] tendremos que:

$$\vec{S} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left[i\omega(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + 2\omega k|u|^2 \hat{z} + i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \right) |u|^2 \right], \quad (22)$$

finalmente como podemos reescribir:

$$\nabla|u|^2 \times \hat{z} = \left(\frac{\partial|u|^2}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial|u|^2}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial|u|^2}{\partial z} \hat{z} \right) \times \hat{z} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{y} \right) |u|^2, \quad (23)$$

se llega a que el vector de Poynting promedio es:

$$\vec{S} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left[i\omega(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + 2\omega k|u|^2 \hat{z} + i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) (\nabla|u|^2 \times \hat{z}) \right]. \quad (24)$$

No obstante asumiendo de nuevo la distribución de campo u en coordenadas cilíndricas como en la ecuación (1.10) y teniendo en cuenta que el operador $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$ en dichas coordenadas, además que el término $i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) = \sigma$ puede ser asociado con el grado de polarización de la onda[6], ya que este surge de las amplitudes y fases relativas del campo eléctrico en las componentes x y y por tanto puede ser incorporado como la polarización de la onda[1,7]. Entonces se puede reescribir el vector de Poynting promedio como:

$$\vec{S} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left[i\omega(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + 2\omega k|u|^2 \hat{z} + \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \hat{\theta} \right]. \quad (25)$$

³Es decir los términos que contienen los productos: $\frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial z}$.

A partir del resultado anterior tendremos que la densidad de momento lineal es:

$$\vec{p}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \left[i\omega(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + 2\omega k|u|^2 \hat{z} + \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \hat{\theta} \right]. \quad (26)$$

Así que la densidad de momento angular es:

$$\begin{aligned} \vec{l}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \left(-z\sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} + \frac{z}{r} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right] \right) \hat{r} - \left(i\omega r \left[u \frac{\partial u^*}{\partial z} - u^* \frac{\partial u}{\partial z} \right] + 2\omega r k|u|^2 \right. \right. \\ \left. \left. - i\omega z \left[u \frac{\partial u^*}{\partial r} - u^* \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right) \hat{\theta} + \omega \left(i \left[u \frac{\partial u^*}{\partial \theta} - u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \right) \hat{z} \right\}, \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_{em} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \left\{ z \left(-\sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r} + \frac{2l}{r}|u|^2 \right) \hat{r} - i \left(r \left[u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} \right] + 2\omega r k|u|^2 \right. \right. \\ \left. \left. - z \left[u_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right] \right) \hat{\theta} + \left(2l|u|^2 - \sigma r \frac{\partial|u|^2}{\partial r} \right) \hat{z} \right\}. \end{aligned} \quad (27b)$$

Tomando nuevamente la componente z de la densidad de momento angular:

$$(l_{em})_z = \omega l \epsilon_0 |u|^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \omega r \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r}, \quad (28)$$

y teniendo en cuenta la densidad de momento lineal en la componente z para encontrar la densidad de energía:

$$u_{em} = c \left[\epsilon_0 \omega k |u|^2 + i \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right], \quad (29a)$$

$$= c \left[i \frac{\epsilon_0 \omega}{2} u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial z} - i \frac{\epsilon_0 \omega}{2} u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\epsilon_0 \omega k}{2} u_0 u_0^* + \frac{\epsilon_0 \omega k}{2} u_0 u_0^* \right], \quad (29b)$$

$$= c \left[\frac{\epsilon_0 \omega}{2} u_0 \left(i \frac{\partial u_0^*}{\partial z} + k u_0^* \right) + \frac{\epsilon_0 \omega}{2} u_0 u_0^* \left(i \frac{\partial u_0}{\partial z} + k u_0 \right) \right], \quad (29c)$$

$$u_{em} = c \left[\frac{\omega \epsilon_0}{2} k u_0 u_0^* + \frac{\omega \epsilon_0}{2} k u_0 u_0^* \right] = c \epsilon_0 k \omega |u|^2, \quad (29d)$$

Donde nuevamente se ha hecho uso de la aproximación paraxial[1]; Entonces podemos hallar de nuevo la razón entre la densidad de momento angular en la componente z y la densidad de energía encontrada anteriormente:

$$\frac{(l_{em})_z}{u_{em}} = \frac{\omega l \epsilon_0 |u|^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \omega r \sigma \frac{\partial|u|^2}{\partial r}}{c \epsilon_0 \omega k |u|^2}, \quad (30a)$$

$$\frac{(l_{em})_z}{u_{em}} = \frac{l}{\omega} - \sigma \frac{r}{2\omega |u|^2} \frac{\partial|u|^2}{\partial r}. \quad (30b)$$

De manera que aparece un término adicional al obtenido para el potencial en una sola dirección en el plano transversal a la dirección de propagación. Dicho término depende de la polarización del haz σ , además de la distribución de campo y de sus correspondientes variaciones locales.

Sí integramos en el plano transversal del haz, es decir en el plano xy tanto para la densidad de momento angular:

$$L = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\omega l \epsilon_0 |u|^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \omega r \sigma \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \right] r dr d\theta, \quad (31a)$$

$$= 2\pi \omega l \epsilon_0 \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right) - 2\pi \frac{\epsilon_0 \omega \sigma}{2} \left(\int_0^\infty r^2 \frac{\partial |u|^2}{\partial r} dr \right), \quad (31b)$$

$$= 2\pi \omega l \epsilon_0 \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right) - 2\pi \frac{\epsilon_0 \omega \sigma}{2} \left(\left[r^2 |u|^2 \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2r |u|^2 dr \right), \quad (31c)^4$$

$$L = 2\pi \omega l \epsilon_0 \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right) - 2\pi \epsilon_0 \omega \sigma \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right); \quad (31d)$$

Como para la densidad de energía:

$$U_{em} = c \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \epsilon_0 \omega k |u|^2 r dr d\theta = 2\pi \epsilon_0 \omega k c \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right), \quad (32)$$

entonces obtendremos el momento angular en z y su energía U_{em} asociada respectivamente.

Finalmente tomando el cociente entre estas dos últimas cantidades tendremos:

$$\frac{L}{U_{em}} = \frac{2\pi \omega l \epsilon_0 \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right) - 2\pi \epsilon_0 \omega \sigma \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right)}{2\pi c \epsilon_0 \omega k \left(\int_0^\infty r |u|^2 dr \right)} = \frac{\omega l \epsilon_0 - \sigma \omega \epsilon_0}{\epsilon_0 \omega^2} = \frac{l}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}. \quad (33)$$

Por tanto un haz con componentes de potencial vectorial en los ejes x y y tiene dos términos: el primero ligado a la distribución de campo y vinculado directamente con el momento angular orbital[6], mientras el segundo está relacionado con la parte de la polarización del haz y vinculado con el momento angular espín[1,8-10]. Esta última ecuación es importante, debido a que muestra que haces, en la aproximación paraxial, con un término de fase azimutal $e^{il\phi}$ poseen un momento angular orbital en la dirección de propagación con valor de $l\hbar^5$ por fotón. Sin embargo esto no prueba ser una condición necesaria para la existencia de momento angular orbital, pero dentro de la aproximación paraxial parece ser una condición suficiente. Tales haces con una dislocación sobre el eje del haz como la necesaria en este modelo son llamados vórtices ópticos[11-12]. Además también dentro de esta ecuación la contribución del espín nos indica que dentro del haz propagándose los fotones poseen un momento angular espín de $\sigma\hbar$ por fotón, siendo $\sigma = \pm 1$ para polarización circular izquierda y derecha respectivamente, $\sigma = 0$ para polarización lineal y $-1 < \sigma < 1$ para polarización elíptica exceptuando el valor

⁴ya que u en realidad va como $e^{-\alpha r^2}$ para $r \rightarrow \infty$ mientras como $1/r^2$ para $r \rightarrow 0$.

⁵Producto de dividir el momento angular cuántico $l\hbar$ entre la energía cuántica $\hbar\omega$.

de cero.

Aunque la forma explícita de la distribución de campo u no ha sido considerada, esta debe satisfacer las condiciones de aproximación paraxial[1] y poseer una forma normalizable para permitir una energía finita en el haz. Una distribución que satisface lo anterior y es experimentalmente realizable son los haces Laguerre-Gauss[15], los cuales son solución de la ecuación paraxial en coordenadas cilíndricas como se muestra en el apéndice 1. La distribución de amplitud de un haz o modo Laguerre-Gauss es:

$$u_{lp}^{LG} = \frac{C_{lp}^{LG}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}l}{w(z)} \right)^l e^{\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)} L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{\left(\frac{-ikr^2z}{2(z^2+z_0^2)}\right)} e^{-il\phi} e^{[i(2p+l+1)\arctan(z/z_0)]}. \quad (34)$$

Donde C_{lp}^{LG} es una constante de normalización, $L_p^l(2r^2/w^2(z))$ son los polinomios asociados de Laguerre[16], $w(z)$ es la cintura del haz[13] a una distancia z y $(2p+l+1)\arctan(z/z_0)$ es la fase de Gouy[17] la cual ha sido asociada con el confinamiento espacial transversal del haz, debido a las relaciones de incertidumbre entre el momento y la posición transversal del haz[18]; gráficas de intensidad numéricas de estos modos son mostradas en la figura 1.1 para valores de r y z fijos.

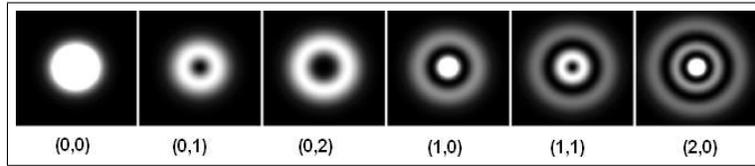


figura 1: Modos Laguerre-Gauss para valores de $r = 0,1[m]$ y $z = 0,3[m]$ é índices (p, l) indicados. Simulación numérica.

Para tal distribución de campo podemos calcular su vector de poynting asociando $u = u_{lp}^{LG}$ para el potencial vectorial en una sola dirección ecuación (1.9d). De manera que obtendremos que:

$$\vec{S}_{LG} = i \frac{\omega \epsilon_0 c^2}{2} \left\{ u_{lg} \left[\left(\frac{l}{r} - \frac{2r}{w^2} - \frac{ikrz}{z^2 + z_0^2} \right) u_{lg}^* + \frac{2}{r} u_{lg}^* |_{|m} \right] \hat{r} - u_{lg} \left[\frac{il}{r} u_{lg}^* \right] \hat{\theta} - u_{lg}^* \left[\left(\frac{l}{r} - \frac{2r}{w^2} + \frac{ikrz}{z^2 + z_0^2} \right) u_{lg} + \frac{2}{r} u_{lg} |_{|m} \right] \hat{r} + u_{lg}^* \left[\frac{il}{r} u_{lg} \right] \hat{\theta} \right\} + \epsilon_0 k \omega c^2 |u_{lg}|^2 \hat{z}, \quad (35a)$$

$$= i \frac{\omega \epsilon_0 c^2}{2} \left(-\frac{2ikrz}{z^2 + z_0^2} |u_{lg}|^2 \hat{r} - \frac{2il}{r} |u_{lg}|^2 \hat{\theta} \right) + \epsilon_0 k \omega c^2 |u_{lg}|^2 \hat{z}, \quad (35b)$$

$$\vec{S}_{LG} = \epsilon_0 c^2 \left(\frac{k\omega r z}{z^2 + z_0^2} \hat{r} + \frac{\omega l}{r} \hat{\theta} + \omega k \hat{z} \right) |u_{lg}|^2. \quad (35c)$$

Allí $u_{lg}|_m$ es la derivada parcial de $L_l^p(2r^2/w^2)$ con respecto a la coordenada r . A partir de lo anterior la densidad de momento lineal es:

$$\vec{p}_{em} = \epsilon_0 \left(\frac{k\omega r z}{z^2 + z_0^2} \hat{r} + \frac{\omega l}{r} \hat{\theta} + \omega k \hat{z} \right) |u_{lg}|^2. \quad (36)$$

Una gráfica de la trayectoria del vector de poynting partiendo desde $z = 0$ es mostrada en la figura 1.2 para valores de $l = 1$ y $p = 0$. En ella se observa como el vector de poynting describe una hélice en el espacio, por tal razón dichos haces reciben el nombre de helicoidales[6,7,9].

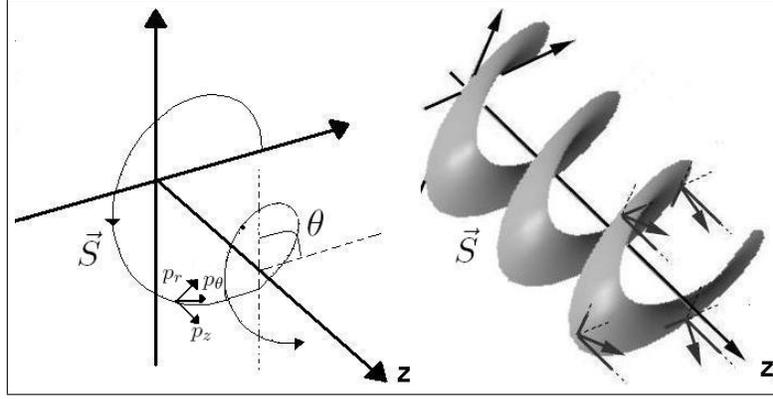


figura 2: Trayectoria del vector de Poynting para un modo Laguerre-Gauss (0,1), figura izquierda simulación numérica y figura derecha cortesía Giovanni Millione (Physics department, College of New York, USA).

La componente en $\hat{\theta}$ de los vectores de poynting y densidad de momento lineal indica que cuando estos vectores se propagan desde el *beamwaist* del haz (w_0) hasta una distancia z , poseen una parte acimutal. La razón de cambio del ángulo acimutal de la trayectoria del vector de poynting con respecto a la distancia z puede ser encontrada como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{p_\theta}{p_z} = \frac{l}{kr^2} = \frac{l}{2} \left(\frac{w(z)}{r} \right)^2 \frac{z_0}{z_0^2 + z^2}. \quad (37)$$

En donde se ha utilizado el valor de $w(z)$ dado en la ecuación (A.7) y el hecho que $z_0 = \frac{1}{2}kw_0^2$ [13]. Sí suponemos que el cociente $w(z)/r(z)$ es constante, debido a que éste representa el ancho difractivo del haz[20]; la rotación θ del vector poynting desde el *beamwaist* hasta una posición z dada, puede ser obtenida a través de:

$$\theta = \int \frac{l}{2} \left(\frac{w(z)}{r(z)} \right)^2 \frac{z_0}{z_0^2 + z^2} dz = \frac{l}{2} \left(\frac{w(z)}{r(z)} \right)^2 \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (38)$$

De lo anterior puede notarse que la rotación del vector de Poynting es proporcional al cambio en la fase de gouy[17] desde el *beamwaist* del haz hasta la posición evaluada[20], además que

es proporcional al índice acimutal l y al cociente de $(w/r)^2$. Sin embargo lo anterior también es posible extenderlo para el potencial vectorial dado en la ecuación (1.17)[21], de modo que se obtiene que la variación del ángulo acimutal con la distancia de propagación z es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{l}{kr^2} - \frac{\sigma}{2kr|u_{lg}|^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r}. \quad (39)$$

No obstante también es posible realizar mediciones experimentales de las variaciones del ángulo acimutal con la distancia z para el vector de poynting[22].

0.2.2. Momento angular orbital entero con haces no paraxiales

Para los haces no paraxiales, es decir que no cumplen con la aproximación paraxial[1] haremos uso directo de los campos vectoriales \vec{E} y \vec{B} , es decir no tendremos en cuenta los potenciales vectorial(\vec{A}) y escalar(ϕ), usados en la sección anterior. Podemos escribir los campos como[23,24]:

$$\vec{E}_t = \frac{1}{2} \left(\vec{E} e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\omega t} \right), \quad (40a)$$

$$\vec{B}_t = \frac{1}{2} \left(\vec{B} e^{-i\omega t} + \vec{B}^* e^{i\omega t} \right). \quad (40b)$$

De manera que la densidades de momento lineal (\vec{p}_{em}) y momento angular(\vec{l}_{em})[4]:

$$\vec{p}_{em} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (41a)$$

$$\vec{l}_{em} = \epsilon_0 \left[\vec{r} \times (\vec{E}_t \times \vec{B}) \right], \quad (41b)$$

pueden ser escritas usando la relación $i\omega \vec{B} = \nabla \times \vec{E}$ [23] como:

$$\vec{p}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}), \quad (42a)$$

$$\vec{l}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \vec{r} \times \left[\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) \right]. \quad (42b)$$

Entonces los momentos lineal y angular total para los campos son:

$$\vec{P}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int \vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) d^3r, \quad (43a)$$

$$\vec{L}_{em} = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int \vec{r} \times \left[\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) \right] d^3r. \quad (43b)$$

Además tendremos que la energía asociada a dichos campos puede ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3 r = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^* \cdot \vec{E} d^3 r. \quad (44)$$

Sin embargo examinaremos el momento lineal, angular y la energía por unidad de longitud a lo largo de un haz propagándose en la dirección z . Dichas cantidades son encontradas por integración de las respectivas densidades sobre el plano xy perpendicular a la dirección de propagación:

$$(\mathcal{P})_z = \iint \vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) dx dy, \quad (45a)$$

$$(\mathcal{L})_z = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \iint \vec{r} \times [\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})] dx dy, \quad (45b)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \iint \vec{E}^* \cdot \vec{E} dx dy. \quad (45c)$$

En donde se ha tomado el promedio temporal sobre los campos armónicos.

Ahora asumamos un haz monocromático con un campo eléctrico en el cual las componentes x y y son proporcionales a $e^{il\theta}$ ⁶; es decir:

$$\vec{E} = (\alpha \hat{x} + \beta \hat{y}) E(r, z) e^{il\theta} + E_z \hat{z}. \quad (46)$$

Cada componente satisface la ecuación de Helmholtz independiente del tiempo[3] y E_z ha sido elegida para asegurar la transversabilidad del campo eléctrico[24], notése que las componentes x y y de nuevo llevan la polarización del campo. La solución para $E(r, z)$ tiene la forma(Ver apéndice 2):

$$E(r, z) = \int_0^k E(\kappa) J_l(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa \quad (47)$$

Siendo $J_l(\kappa r)$ la función de orden l de Bessel de primera especie. Además es posible hallar E_z utilizando la condición impuesta arriba sobre esta componente(ver apéndice 2); De manera que el campo eléctrico total del haz es:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \int_0^k E(\kappa) e^{il\theta} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \left\{ (\alpha \hat{x} + \beta \hat{y}) J_l(\kappa r) + \frac{\kappa}{2\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \left[(i\alpha - \beta) e^{-i\theta} J_{l-1}(\kappa r) - (i\alpha + \beta) e^{i\theta} J_{l+1}(\kappa r) \right] \hat{z} \right\} d\kappa. \quad (48a)$$

⁶Aunque existen una variedad de haces paraxiales, Se ha tenido en cuenta algunos de los resultados de la sección anterior sin que con ello se pierda el carácter de haz no-paraxial como por ejemplo la multiplicación de las componentes x y y por el término de fase $e^{il\theta}$.

De allí puede verse que la dependencia del ángulo acimutal de la componente z es diferente a la de las componentes en x y y . Este haz es un caso particular de los haces no-difractantes de Bessel mostrados por Durnin[26].

Por otro lado la energía total, el momento lineal y el momento angular del haz divergen, sin embargo sus correspondientes valores por unidad de longitud son bien comportados[27,28], de manera que utilizando la ecuación (1.45c) tendremos que la energía por unidad de longitud es:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \vec{E} \cdot \vec{E}^* r dr d\theta \quad (49a)$$

$$= \epsilon_0 \pi \int_0^k \int_0^k \int_0^\infty E(\kappa) E^*(\kappa) e^{i[\sqrt{k^2 - \kappa^2} - \sqrt{k^2 - \kappa'^2}]z} \left[\frac{1}{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} J_l(\kappa r) J_l(\kappa' r) + \frac{\kappa \kappa'}{4\sqrt{k^2 - \kappa^2} \sqrt{k^2 - \kappa'^2}} \right. \\ \left. (|\alpha - \beta|^2 J_{l-1}(\kappa r) J_{l-1}(\kappa' r) + |\alpha + \beta|^2 J_{l+1}(\kappa r) J_{l+1}(\kappa' r)) \right] r d\kappa d\kappa' dr; \quad (49b)$$

Dos de estas integrales pueden ser evaluadas usando la identidad Fourier-Bessel para las integrales[16,25]:

$$\int_p^q RH(R) dR \int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r) J_n(\lambda R) d\lambda = H(r). \quad (50)$$

así que tendremos que:

$$\int_0^k \kappa' \left(\frac{E(\kappa) E(\kappa^*) e^{i[\sqrt{k^2 - \kappa^2} - \sqrt{k^2 - \kappa'^2}]z} \kappa |\alpha - \beta|^2}{4\sqrt{k^2 - \kappa^2} \sqrt{k^2 - \kappa'^2}} \right) d\kappa' \int_0^\infty J_{l-1}(\kappa r) J_{l-1}(\kappa' r) r dr = \frac{|E(\kappa)|^2 \kappa |\alpha - \beta|^2}{4(k^2 - \kappa'^2)}, \quad (51)$$

y

$$\int_0^k \kappa' \left(\frac{E(\kappa) E(\kappa^*) e^{i[\sqrt{k^2 - \kappa^2} - \sqrt{k^2 - \kappa'^2}]z} \kappa |\alpha + \beta|^2}{4\sqrt{k^2 - \kappa^2} \sqrt{k^2 - \kappa'^2}} \right) d\kappa' \int_0^\infty J_{l+1}(\kappa r) J_{l+1}(\kappa' r) r dr = \frac{|E(\kappa)|^2 \kappa |\alpha + \beta|^2}{4(k^2 - \kappa'^2)}. \quad (52)$$

Entretanto la integral faltante I puede ser evaluada usando la ortogonalidad de las funciones de Bessel[25]

$$I = \int_0^k E(\kappa) E(\kappa') e^{i[\sqrt{k^2 - \kappa^2} - \sqrt{k^2 - \kappa'^2}]z} \left(\int_0^\infty J_l(\kappa r) J_l(\kappa' r) r dr \right) d\kappa', \quad (53a)$$

$$= \int_0^k \frac{E(\kappa) E(\kappa') e^{i[\sqrt{k^2 - \kappa^2} - \sqrt{k^2 - \kappa'^2}]z}}{\kappa} \delta(\kappa' - \kappa) d\kappa', \quad (53b)$$

$$I = \frac{|E(\kappa)|^2}{\kappa}. \quad (53c)$$

llegando a que:

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \pi \int_0^k |E(\kappa)|^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\kappa}{4(k^2 - \kappa^2)} (|i\alpha + \beta|^2 + |i\alpha - \beta|^2) \right) d\kappa, \quad (54a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa(k^2 - \kappa^2)} d\kappa. \quad (54b)$$

El requerimiento físico es que la cantidad anterior sea finita, lo cual se impone a través de la posible forma de $E(\kappa)$, es decir $E(\kappa)$ debe tender a cero conforme $\kappa \rightarrow 0$. Siguiendo un procedimiento análogo al realizado anteriormente se encuentra que la densidad de momento lineal por unidad de longitud es:

$$\mathcal{P}_z = \frac{\epsilon_0 \pi}{2\omega} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa\sqrt{k^2 - \kappa^2}} d\kappa. \quad (55)$$

Mientras que la densidad de momento angular por unidad de longitud es:

$$\mathcal{L}_z = [l + i(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)] \frac{\epsilon_0 \pi}{2\omega} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa\sqrt{k^2 - \kappa^2}} d\kappa + i(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*) \frac{\epsilon_0 \pi}{2\omega} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{\kappa}{k^2 - \kappa^2} d\kappa, \quad (56a)$$

$$\mathcal{L}_z = [l + \sigma] \frac{\epsilon_0 \pi}{2\omega} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa\sqrt{k^2 - \kappa^2}} d\kappa + \sigma \frac{\epsilon_0 \pi}{2\omega} \int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{\kappa}{k^2 - \kappa^2} d\kappa. \quad (56b)$$

Tomando al igual que en la sección anterior el cociente entre la densidad de momento angular por unidad de longitud y la densidad de energía por unidad de longitud, encontramos:

$$\frac{\mathcal{L}_z}{\mathcal{E}} = \frac{(l + \sigma)}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega} \left[\frac{\int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{\kappa}{(k^2 - \kappa^2)} d\kappa}{\int_0^k |E(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa(k^2 - \kappa^2)} d\kappa} \right]. \quad (57)$$

Es decir que adicionalmente al término $(l + \sigma)/\omega$ resultado de considerar el modelo paraxial, aparece otro término el cual depende sólo de σ y no de l . De lo anterior se infiere que un haz linealmente polarizado con $\sigma = 0$, posee solamente momento angular orbital debido a la parte acimutal contenida en l ; por lo tanto el término de corrección es cero y la relación paraxial entre \mathcal{L}_z y \mathcal{E} es retomada de nuevo al igual que en la ecuación 1.15. No obstante es importante tener en cuenta que dentro de la teoría clásica en el espacio directo⁷ de haces no paraxiales, el momento angular espín y orbital no tienen una separación tan clara[28-30] en:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (58)$$

⁷Hace referencia al espacio de coordenadas espaciales de Fourier.

Donde \vec{L} es el momento angular orbital total y \vec{S} es el momento angular espín total; como sí sucede para la teoría paraxial y la teoría clásica en el espacio recíproco[31]. Sin embargo dentro de la teoría cuántica esta separación es posible aunque la transversabilidad de los campos implique que ni las partes separadas \vec{L} y \vec{S} sean operadores[30]. Al final en el apéndice 3 se muestra como con las consideraciones obtenidas en esta sección es posible arribar a los modos Laguerre-Gauss.

0.3 Generación de haces con momento angular orbital entero mediante hologramas en forma de tenedor

Para generar haces con momento angular orbital entero se utilizan con mayor frecuencia las placas de espiral de fase[35,36], los Conversores astigmaticos[37,38] y los hologramas en forma de tenedor[39-41]; Sin embargo es esta última técnica la cual presenta mayor eficiencia en difracción en la producción de modos Laguerre-Gauss con $p = 0$ y l arbitrario[42,43] y producción de otros modos fuera de la aproximación paraxial[42]. No obstante el uso de hologramas en forma de tenedor generados a partir de un modulador espacial de luz (MSL), le confiere a este método la ventaja adicional de la versatilidad en la dinámica de manipulación y asignación de cambios a estos hologramas para obtener otros modos que con las otras técnicas mencionadas no es posible tener.⁸

Estos hologramas toman la forma a través de una red de difracción producida por la interferencia entre una onda plana de referencia e^{ikx} y una onda objeto con una estructura de fase helicoidal $e^{il\theta}$ es decir,

$$I = \left| e^{ikx} + e^{il\theta} \right|^2 = 2 + 2 \cos(kx - l\theta) = 2 \left(1 + \cos(kx - l\theta) \right). \quad (59)$$

⁸Así por ejemplo en las placas de espiral de fase implicaría cambiar la placa por otra que satisfaga las condiciones para un respectivo modo, desajustando con esto el montaje experimental.

Donde $\theta = \arctan(y/x)$ en coordenadas polares y l es el índice acimutal también llamado carga topológica[40,41]. En la figura 1.3(a) y 1.3(b) se muestran las redes de difracción en amplitud obtenidas para $l = 4$ y $l = 6$ respectivamente.

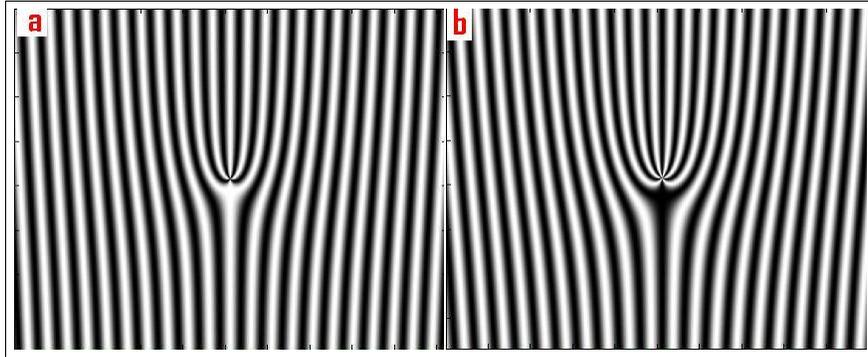


figura 3: Gráficas de las redes de difracción en amplitud para: a) $l = 4$ y b) $l = 6$ generadas numéricamente.

La carga topológica en cada holograma puede ser leída del interferograma en forma de tenedor, Así por ejemplo, en la figura 1.4(a) cuando se va alrededor del camino cerrado de la singularidad de fase se cuentan las franjas ganadas (de derecha a izquierda) partiendo de cero hasta arribar al extremo opuesto al de partida, y desde allí se cuentan las franjas pérdidas (de izquierda a derecha) en orden descendente, desde el número de franja máxima del conteo ascendente, hasta llegar al punto de inicio, Entonces la carga topológica es el número de franjas perdidas en el conteo, que para este caso son 4. Por lo tanto $l = 4$ o a un cambio de 8π , dado que cada franja representa 2π en fase.

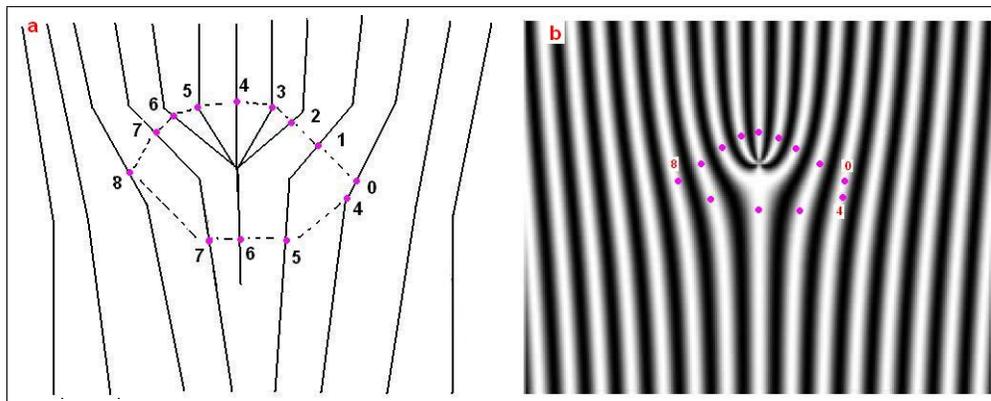


figura 4: Carga topológica en un holograma en forma de tenedor entero con $l = 4$ a partir de franjas perdidas figura (a) y (b). Simulación numérica.

Por otra parte para este tipo de hologramas tenemos que la función de transmitancia en coordenadas cilíndricas[44,45] es:

$$T(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m e^{-im(\frac{2\pi}{D}r \cos \theta - p\theta)}, \quad (60a)$$

$$T(r, \theta) = t_0 + \sum_{m=1}^{\infty} t_m e^{-im(\frac{2\pi}{D}r \cos \theta - p\theta)} + \sum_{m=1}^{\infty} t_{-m} e^{im(\frac{2\pi}{D}r \cos \theta - p\theta)}. \quad (60b)$$

Donde $p = l$ es la carga topológica del holograma en forma de tenedor, D es el período de una red rectilínea o red matriz es decir con $p = 0$ y t_m son los coeficientes de transmisión que dependen de la red de difracción. Para una red de amplitud sinusoidal sólo los términos $m = -1, 0, 1 : t_1 = t_{-1} = t_0/2$ sobreviven[44]; Mientras los coeficientes de una red de amplitud binaria son $t_0 = 1/2$, $t_{\pm m} = \pm(2m'-1)/\pi$ y $t_{\pm m} = 0$ ($m' = 1, 2, 3, \dots$)[44].

0.3.1. Difracción de un haz por un holograma tenedor

Para estudiar la difracción de un haz Gaussiano de longitud de onda λ por una red de difracción en forma de tenedor utilizamos la geometría mostrada en la figura 1.5.

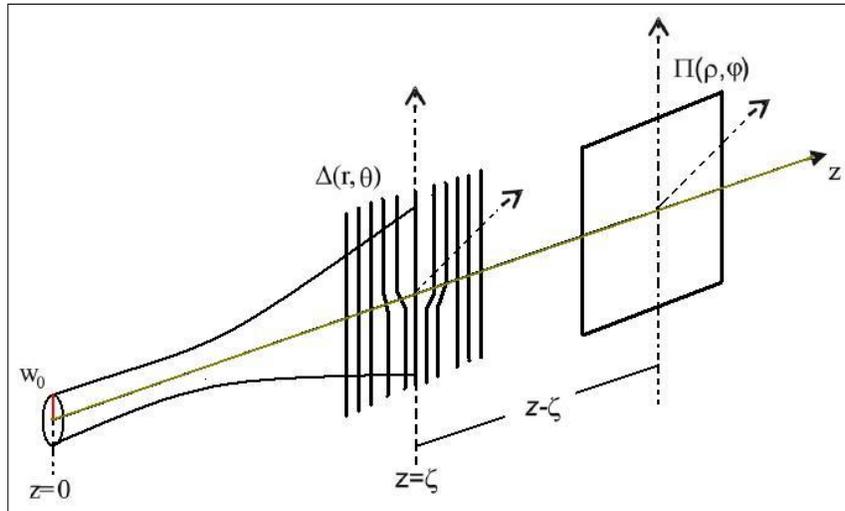


figura 5: Geometría del problema para la difracción de Fresnel.

De tal manera que a una distancia $z = \xi$ del *beamwaist* (w_0), el haz incidente en la red tiene una distribución de campo:

$$U_i(r, \theta, \xi) = \frac{q(0)}{q(\xi)} e^{-ik\left[\xi + \frac{r^2}{2q(\xi)}\right]}, \quad (61)$$

siendo $k = 2\pi/\lambda$ la constante de propagación, $q(\xi)$ el parámetro complejo del haz dada por:

$$\frac{1}{q(\xi)} = \frac{1}{R(\xi)} - \frac{2i}{kw^2(\xi)}, \quad (62)$$

donde $R(\xi) = \xi [1 + (kw_0^2/2\xi)^2]$ es el radio de curvatura del haz y $w(\xi) = w_0 [1 + (2\xi/kw_0^2)^2]^{1/2}$ es el radio del haz o amplitud transversal del haz. Así el haz incidente pasa a través de la red, situada en el plano $\Delta(r, \theta)$, mientras en el plano $\Pi(\rho, \phi)$ a una distancia $(z - \xi)$ medida desde el plano de la red, se encuentra la pantalla de observación. Para un punto (ρ, ϕ, z) en el plano de observación el campo difractado usando la integral de Fresnel-Kirchoff[46] es:

$$U(\rho, \phi, z) = ik \frac{e^{-ik \left[(z-\xi) + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)} \right]}}{2\pi(z-\xi)} \iint_{\Delta} T(r, \theta) U_i(r, \theta, \xi) e^{-i\frac{k}{2} \left[\frac{r^2}{(z-\xi)} - \frac{2r\rho \cos(\theta-\phi)}{(z-\xi)} \right]} r dr d\theta. \quad (63)$$

Insertando la transmitancia de la red tenedor y la distribución de campo incidente obtenemos:

$$\begin{aligned} U(\rho, \phi, z) = & \frac{ik}{2\pi(z-\xi)} \frac{q(0)}{q(\xi)} e^{-ik \left[z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)} \right]} \left\{ t_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k}{2} \frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)} r^2} e^{\frac{ikr\rho}{(z-\xi)} \cos(\theta-\phi)} r dr d\theta \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} t_m \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k}{2} \frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)} r^2} e^{-\frac{ikr\rho}{(z-\xi)} \sin \phi \sin \theta} e^{\frac{ikr \cos \theta}{z-\xi} \left(\rho \cos \phi - \frac{m\lambda(z-\xi)}{D} \right)} e^{imp\theta} r dr d\theta \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} t_{-m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k}{2} \frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)} r^2} e^{-\frac{ikr\rho}{(z-\xi)} \sin \phi \sin \theta} e^{\frac{ikr \cos \theta}{z-\xi} \left(\rho \cos \phi + \frac{m\lambda(z-\xi)}{D} \right)} e^{-imp\theta} r dr d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (64a)$$

Ahora podemos introducir en el plano de observación las siguientes transformaciones de variables:

$$\rho \cos \phi \mp \frac{m\lambda(z-\xi)}{D} = \rho_{\pm m} \cos \phi_{\pm m}, \quad (65a)$$

$$\rho \sin \phi = \rho_{\pm} \sin \phi_{\pm m}, \quad (65b)$$

con $\rho_0 = \rho$ y $\phi_0 = \phi$, pero:

$$\rho_{\pm m} = \sqrt{\rho^2 + \left[\frac{m\lambda(z-\xi)}{D} \right]^2} \mp \frac{2m\lambda(z-\xi)}{D} \cos \phi, \quad (66a)$$

$$\tan \theta_{\pm m} = \frac{\rho \sin \phi}{\rho \cos \phi \mp m\lambda(z-\xi)/D}. \quad (66b)$$

Integrando sobre la variable θ , que para nuestro caso es la variable acimutal en las anteriores integrales tendremos (ver apéndice 4):

$$\Phi_0 = \int_0^{2\pi} e^{i\frac{k\rho}{z-\xi}r \cos(\theta-\phi)} d\theta = 2\pi J_0\left(\frac{k\rho}{z-\xi}r\right), \quad (67a)$$

$$\Phi_{\pm mp} = \int_0^{2\pi} e^{i\left[\frac{k\rho_{\pm m}}{z-\xi}r \cos(\theta-\phi_{\pm m}) \pm mp\theta\right]} d\theta = 2\pi J_{mp}\left(\frac{k\rho_{\pm m}}{z-\xi}r\right) e^{imp\left(\frac{\pi}{2}\phi_{\pm m}\right)} \quad (67b)$$

Luego el campo de salida se convierte en:

$$\begin{aligned} U(\rho, \phi, z) = & \frac{ik}{(z-\xi)} \frac{q(0)}{q(\xi)} e^{-ik\left[z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)}\right]} \left\{ t_0 \int_0^\infty J_0\left(\frac{k\rho}{z-\xi}\right) e^{-i\frac{k}{2}\frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)}r^2} r dr \right. \\ & + \sum_{m=1}^\infty t_m e^{imp\left(\frac{\pi}{2} + \phi_m\right)} \int_0^\infty e^{-i\frac{k}{2}\frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)}r^2} J_{mp}\left(\frac{k\rho_m}{z-\xi}r\right) r dr \\ & \left. + \sum_{m=1}^\infty t_{-m} e^{imp\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{-m}\right)} \int_0^\infty e^{-i\frac{k}{2}\frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)}r^2} J_{mp}\left(\frac{k\rho_{-m}}{z-\xi}r\right) r dr \right\}. \quad (68a) \end{aligned}$$

De manera que el campo total difractado puede verse como la suma de un orden cero con órdenes superiores tanto positivos como negativos es decir,

$$U(\rho, \phi, z) = U_0(\rho, \phi, z) + \sum_{m=1}^\infty U_m(\rho, \phi, z) + \sum_{m=1}^\infty U_{-m}(\rho_{-m}, \phi_{-m}, z). \quad (69)$$

con

$$U_0(\rho, \phi, z) = \frac{ik}{(z-\xi)} \frac{q(0)}{q(\xi)} t_0 e^{-ik\left(z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)}\right)} H_0(\rho). \quad (70)$$

y

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = \frac{ik}{(z-\xi)} \frac{q(0)}{q(\xi)} t_{\pm m} e^{-ik\left(z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)}\right)} e^{imp\left(\frac{\pi}{2} \pm \phi_{\pm m}\right)} H_{\pm m}(\rho_{\pm m}). \quad (71)$$

Las integrales sobre la parte radial en las dos últimas ecuaciones denotadas por $H_0(\rho)$ y $H_{\pm m}(\rho_{\pm m})$, puede ser evaluadas usando la propiedades de la funciones de Bessel[16](ver apéndice 5), llegando a que:

$$H_0(\rho) = \int_0^\infty J_0\left(\frac{k\rho}{z-\xi}\right) e^{-i\frac{k}{2}\frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)}r^2} r dr = \frac{(z-\xi)q(\xi)}{2ikq(z)} e^{-\frac{kq(\xi)\rho^2}{2(z-\xi)q(z)}}. \quad (72)$$

y

$$H_{\pm m}(\rho_{\pm m}) = \int_0^\infty J_{mp}\left(\frac{k\rho_{\pm m}}{z-\xi}r\right) e^{-i\frac{k}{2}\frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)}r^2} r dr, \quad (73a)$$

$$H_{\pm m}(\rho_{\pm m}) = \left(\frac{\rho_{\pm m}q(\xi)}{2q(z)}\right)^{mp/2} \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right)}{2\Gamma(mp + 1)} \left(\frac{2(z-\xi)q(\xi)}{kq(z)}\right)^\mu M\left(\frac{mp}{2} + 1, mp + 1, -\frac{\rho_{\pm m}q(\xi)}{2q(z)}\right). \quad (73b)$$

Siendo $M(\alpha, \beta; x)$ la función hipergeométrica confluyente de Kummer. Ahora dado que se cumple que[16]:

$$M\left(\frac{mp}{2} + 1, mp + 1; -x\right) = e^{-x} M\left(\frac{mp}{2}, mp + 1; x\right); \quad (74)$$

Además que[44]:

$$M\left(\frac{mp}{2}, mp + 1, 2y_{\pm m}\right) = \Gamma\left(\frac{mp + 1}{2}\right) \left(\frac{y_{\pm m}}{2}\right)^{\frac{1-mp}{2}} e^{y_{\pm m}} \left[I_{\frac{mp-1}{2}}(y_{\pm m}) - I_{\frac{mp+1}{2}}(y_{\pm m}) \right], \quad (75)$$

donde $y_{\pm m} = \frac{ik}{2Q(z)}\rho_{\pm m}^2$ e $I_{\frac{mp\pm 1}{2}}(y_{\pm m})$ son las funciones de segunda especie de Bessel[25], entonces el campo de los órdenes de difracción diferentes de cero toman la forma:

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = t_{\pm m} \frac{q(0)}{q(z)} \left[\frac{ik\pi}{4Q(z)} \right]^{1/2} (\pm 1)^{mp} \rho_{\pm m} e^{-ik \left[z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)} + \frac{\rho_{\pm m}^2}{2Q(z)} \right]} e^{imp \left(\frac{\pi}{2} \pm \phi_{\pm m} \right)} \left[I_{\frac{mp-1}{2}} \left(\frac{ik}{2Q(z)} \rho_{\pm m}^2 \right) - I_{\frac{mp+1}{2}} \left(\frac{ik}{2Q(z)} \rho_{\pm m}^2 \right) \right]; \quad (76a)$$

Mientras el orden cero de difracción es:

$$U_0(\rho, \phi, z) = t_0 \frac{q(0)}{q(z)} e^{-ik \left(z + \frac{\rho^2}{2q(z)} \right)}. \quad (77)$$

De lo anterior se concluye de inmediato que el orden cero de difracción del haz es un Gaussiano normal, Sin embargo los restantes órdenes de difracción poseen singularidades de fase contenidas en el término $e^{\pm imp\phi_{\pm m}}$ con cargas topológicas $\pm mp$, indicando frentes de onda helicoidales con momento angular orbital bien definido por la carga topológica entera antes mencionada.

Además se introdujo un nuevo parámetro de curvatura $Q(z)$ dado por:

$$\frac{1}{Q(z)} \equiv \frac{1}{R'(z)} - \frac{2i}{kw'^2(z)}, \quad (78)$$

donde el nuevo radio de curvatura $R'(z)$ y la anchura transversal $w'(z)$ estan dados por:

$$\frac{1}{R'(z)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R(z)} - \frac{1}{z - \xi} \right]; \quad w'(z) = \sqrt{2}w(z). \quad (79)$$

Finalmente usando la identidad entre las funciones de Bessel modificadas de segundo orden y de primera especie $I_\nu(ix) = i^\nu J_\nu(x)$ se encuentra que el campo difractado para los órdenes superiores es:

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = t_{\pm m} \frac{q(0)}{q(z)} \left[\frac{ik\pi}{4Q(z)} \right]^{1/2} (\pm 1)^{mp} \rho_{\pm m} i^{(mp-1)/2} e^{-ik \left[z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)} + \frac{\rho_{\pm m}^2}{2Q(z)} \right]} e^{imp \left(\frac{\pi}{2} \pm \phi_{\pm m} \right)} \left[J_{\frac{mp-1}{2}} \left(\frac{k}{2Q(z)} \rho_{\pm m}^2 \right) - i J_{\frac{mp+1}{2}} \left(\frac{k}{2Q(z)} \rho_{\pm m}^2 \right) \right]. \quad (80a)$$

Esta última ecuación es similar al caso de la difracción de una onda plana y un haz Gaussiano a través de una placa de espiral de fase con una singularidad entera de orden n [47], sin embargo en la referencia [47] sólo el orden n de difracción es obtenido, propagándose a lo largo del eje óptico, mientras para el holograma en forma de tenedor aparecen m -ésimos órdenes de difracción cada uno con un momento angular bien definido por mp , como se muestra en la figura 1.6.

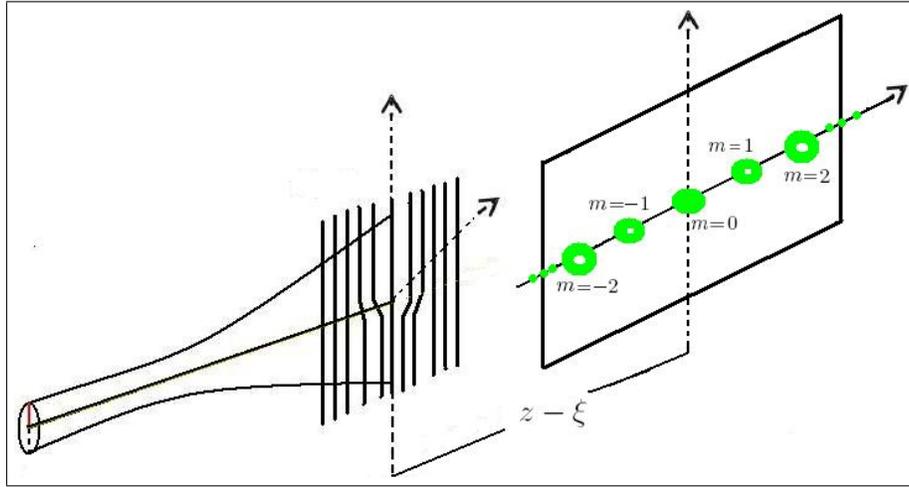


figura 6: Órdenes de difracción obtenidos al propagar un haz a través de una holograma en forma de tenedor.

Por otra parte para hallar las dimensiones de los órdenes de difracción con momento orbital angular entero, es necesario hallar la intensidad del campo a partir de su distribución, empero dado que el argumento de las funciones de Bessel es complejo debido a $Q(z)$, entonces esto conlleva a una ecuación trascendental que no admite soluciones analíticas para valores de p [44]. No obstante el comportamiento espacial de la intensidad de campo puede ser estudiado para los casos límite de campo cercano y campo lejano.

0.3.2. Aproximación de campo lejano

Tomemos $(z - \xi) \rightarrow \infty$, entonces tendremos que:

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R(z)} - \frac{1}{z - \xi} \right] - \frac{2i}{kw'^2(z)} = \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \xi} \right] - \frac{2i}{kw'^2(z)} = \left[-\frac{\xi}{z(z - \xi)} \right] - \frac{2i}{kw'^2(z)} \rightarrow -\frac{i}{kw^2(z)}, \quad (81)$$

ya que el el radio de curvatura $R(z)$ es un valor muy grande y por tanto $1/R(z) \rightarrow 0$. De manera que el campo de los órdenes superiores de difracción se transforman en:

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = \frac{t_{\pm m}}{2} \frac{q(0)}{q(z)} \frac{\sqrt{2}}{w(z)} (\pm 1)^{mp} \rho_{\pm m} e^{ikz} e^{-\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)}} e^{imp(\frac{\pi}{2} \pm \phi_{\pm m})} \left[I_{(mp-1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)} \right) - I_{(mp+1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)} \right) \right]. \quad (82a)$$

Por tanto la intensidad de campo será,

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) U_{\pm m}^*(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z), \quad (83a)$$

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = |t_{\pm m}|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \frac{\pi \rho_{\pm m}^2}{4w^2(z)} e^{-\frac{\rho_{\pm m}^2}{w^2(z)}} \left[I_{mp-1/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)} \right) - I_{mp+1/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)} \right) \right]^2. \quad (83b)$$

Sin embargo dado que estamos trabajando a distancias longitudinales muy grandes entonces podemos asumir $\rho_{\pm m}^2/(2w^2(z)) \rightarrow 0$, por lo cual utilizando las aproximaciones asintóticas de las funciones de Bessel(Ver apéndice 5) la intensidad se transforma en:

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) \approx \frac{|t_{\pm m}|^2}{4} \Gamma^{-2} \left(\frac{mp+1}{2} \right) \left[\frac{1}{4w^2(z)} \right]^{mp} \rho_{\pm m}^{2mp} \left[1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \right]^2. \quad (84)$$

Finalmente el radio del m -ésimo modo con momento orbital angular(ver apéndice 5) es:

$$(\rho_{\pm m})_p = w'(z) \sqrt{\frac{mp(mp+1)}{mp+2}}. \quad (85)$$

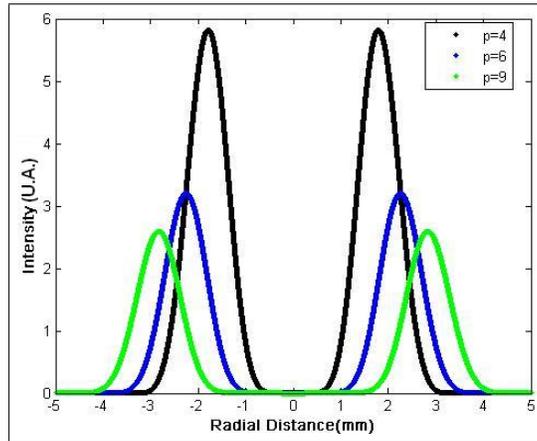


figura 7: Distribución de intensidad en unidades arbitrarias [U.A.] para $m = 1$ de un haz Gaussiano con $\lambda = 532[nm]$ calculado numéricamente.

Una gráfica de los perfiles de intensidad basados en la ecuación (1.84) en función del radio ρ es mostrada en la figura 1.7 de arriba. En esta se aprecia como es la distribución de intensidad para el primer orden de difracción positivo a una distancia longitudinal de $z = 1[m]$, y para diferentes valores de p ; Así tendremos que la curvas negra, azul y verde corresponden a valores de MAO bien definidos por 4, 6 y 7 respectivamente.

0.3.3. Aproximación de campo cercano

Asumamos que $(z - \xi) \rightarrow 0$ y $\rho_{\pm m} \rightarrow 0$ [44], luego el argumento de las funciones de Bessel se puede aproximar a:

$$\frac{k\rho_{\pm m}}{2Q(z)} \rightarrow -\frac{k\rho_{\pm m}}{4(z - \xi)}. \quad (86)$$

En donde hemos supuesto que $R(z) \approx R(\xi) \rightarrow \infty$ luego $1/R(z) \rightarrow 0$, mientras que $1/w'^2(z) \approx 1/w'^2(\xi)$ luego $w'(\xi)$ es un valor finito, es decir que $\rho_{\pm m}/w'(\xi) \rightarrow 0$. De manera que la distribución de campo se transforma en:

$$U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = \frac{t_{\pm m}}{2} \frac{q(0)}{q(\xi)} \left[-\frac{ik\pi}{2(z - \xi)} \right]^{1/2} (\pm 1)^{mp} (-i)^{(mp-1)/2} \rho_{\pm m} e^{imp(\frac{\pi}{2} \pm \phi_{\pm m})} e^{-ik \left[z + \frac{\rho^2}{2(z-\xi)} - \frac{\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} \right]} \left[J_{(mp-1)/2} \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z - \xi)} \right) + iJ_{(mp+1)/2} \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z - \xi)} \right) \right]; \quad (87a)$$

y la intensidad será,

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = U_{\pm m}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) U_{\pm m}^*(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z), \quad (88a)$$

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = |t_{\pm m}|^2 \frac{w_0^2}{w^2(\xi)} \frac{\pi k \rho_{\pm m}^2}{8(z - \xi)} \left[J_{(mp-1)/2}^2 \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z - \xi)} \right) + J_{(mp+1)/2}^2 \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z - \xi)} \right) \right]. \quad (88b)$$

Finalmente derivando la intensidad con respecto a $\rho_{\pm m}$ e igualando a cero se encuentra que el m -ésimo radio con momento angular orbital (Ver apéndice 5) para campo cercano es:

$$\rho_{\pm m} = \sqrt{\left(\frac{mp}{2} + 1 \right) \frac{2\lambda(z - \xi)}{\pi}}. \quad (89)$$

Una gráfica de la distribución de intensidad en función de la distancia radial ρ es mostrada en la figura 1.8. Allí puede verse como para un haz con $\lambda = 532[nm]$ y una distancia longitudinal

entre el Holograma y la pantalla de observación de $10[mm]$, el primer orden de difracción se ensancha conforme el valor de p aumenta, para las curvas negra, azul y verde con valores bien definidos de MAO: 1, 5 y 10 respectivamente.

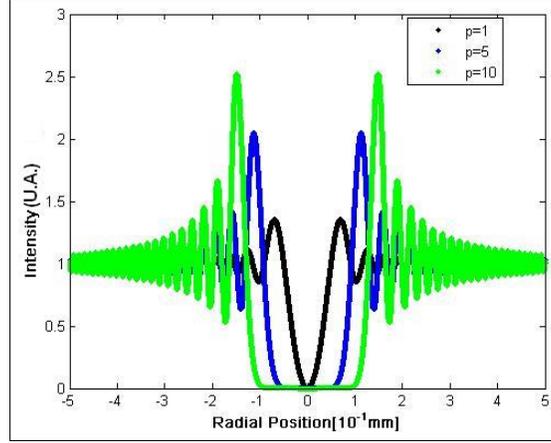


figura 8: Distribución de intensidad en unidades arbitrarias [U.A.] para $m = 1$ de un haz Gaussiano con $\lambda = 532[nm]$ y valores de $p = 1, 5, 10$ obtenidos por simulación numérica.

0.4 Momento angular orbital no entero

Hasta ahora hemos analizado el momento angular orbital entero de un haz luminoso, empero es posible tratar el momento angular orbital no entero[48] del mismo haz. Para esto tomamos un estado de momento angular orbital entero $|m\rangle$ en función de los estados propios angulares ortogonales $|\theta_n\rangle$ de la teoría entera[49], y lo extendemos a la parte no entera[50]. Para el momento angular orbital entero se cumple que m toma valores desde $-l$ hasta l pasando por cero, además que $\theta_n = \theta_0 + 2\pi n/(2l+1)$ y esta restringido en el intervalo de $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ [49](ver apéndice 6).

De manera que un estado cuántico con momento angular orbital no entero es denotado por $|M\rangle$, donde $M = m + \mu$, siendo m la parte entera en tanto que $\mu \in [0, 1)$ es la parte no entera. El estado $|M\rangle$ puede ser descompuesto en estados angulares a través de:

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} e^{iM\theta_n} |\theta_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} e^{im\theta_n} e^{i\mu\theta_n} |\theta_n\rangle. \quad (90)$$

No obstante la función $e^{i\mu\theta_n}$ es una función multievaluada, de manera que para truncar dicha función y transformarla en una función unievaluada se introduce un corte α [57,50], el cual restringe el rango de la función; aunque debe tenerse en cuenta que desde el punto de vista matemático estricto, α es sólo una discontinuidad y no un corte como el de la teoría compleja[57,50]. De acuerdo a lo anterior se introduce la función $f_\alpha(\theta_n)$ dada por

$$f_\alpha(\theta_n) : \{\theta_n\}_{n=0,\dots,2l} \longrightarrow \{0,1\}, \quad \theta_n \mapsto \begin{cases} 1, & \theta_0 < \theta_n < \theta_0 + \alpha, \\ 0, & \theta_0 + \alpha < \theta_n < \theta_0 + 2\pi. \end{cases} \quad (91)$$

Es decir toma valores de 1 ó 0, dependiendo si θ_n es más pequeño o más grande que α . Es importante señalar que α esta limitada por $0 \leq \alpha < 2\pi$, luego la orientación de α es siempre una medida desde θ_0 . A partir de lo anterior el estado no entero $|M\rangle$ puede ser escrito como[50]:

$$|M(\alpha)\rangle = \frac{e^{-i\mu\alpha}}{\sqrt{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} e^{iM\theta_n} e^{i2\pi\mu f_\alpha(\theta_n)} |\theta_n\rangle, \quad (92)$$

es decir que el estado no entero de MAO $|M(\alpha)\rangle$ depende de la orientación de la discontinuidad α , tal como se aprecia en la figura 1.9 para la fase de dicho estado no entero. En dicha gráfica puede notarse como con la elección de θ_0 , los valores de fase: mínimo y máximo en el rango $\theta_0 < \theta_n < \theta_0 + \alpha$ son $(2\pi - \alpha + \theta_0)\mu$ y $(2\pi + \theta_0)\mu$ respectivamente, ya que se cumple que en este intervalo la fase es $(2\pi - \alpha + \theta_n)\mu$; Mientras que en el intervalo $\theta_0 + \alpha < \theta_n < \theta_0 + 2\pi$ se obtienen 0 y $(2\pi - \alpha + \theta_0)\mu$ como valores mínimo y máximo de fase respectivamente, puesto que la fase cumple la relación $(-\alpha + \theta_n)\mu$ en este intervalo.

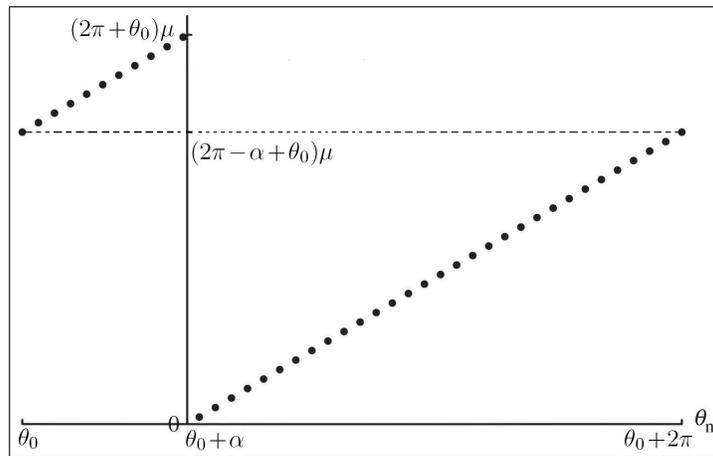


figura 9: Discontinuidad de fase en los estados con MAO no entero $|M(\alpha)\rangle$.

Ahora por otra parte los estados con MAO no entero de igual M poseen una distribución de probabilidad angular plana, ya que $P(\theta_n) = \langle M(\alpha)|M(\alpha)\rangle = (2l+1)^{-1}$, como sucede para el caso de estados con MAO entero[49,50]. Por otra parte es posible introducir un operador unitario $\widehat{U}_v(\beta)$ [50], el cual rota la orientación de la discontinuidad e introduce un desfase al estado $|M'(\alpha)\rangle$, es decir

$$\widehat{U}_v(\beta)|M'(\alpha)\rangle = e^{i(v-m')\beta}|M'(\alpha \ominus \beta)\rangle, \quad (93)$$

donde $v \in \mathcal{R}$, $\beta \in [0, 2\pi)$ y se introduce $\alpha \ominus \beta := (\alpha + \beta) \bmod 2\pi$ como una notación para el módulo de la adición de 2π . En el apéndice 7 se describen algunas propiedades del operador $\widehat{U}_v(\beta)$.

0.4.1. Superposición de estados con momento angular orbital no entero

Para calcular la superposición de dos estados con MAO no entero, $|M(\alpha)\rangle$ y $|M'(\alpha')\rangle$ se utiliza el operador unitario $\widehat{U}_v(-\alpha)$ para establecer la orientación a: cero de un estado y a la diferencia $\beta = \alpha \ominus (-\alpha')$ del otro estado, entonces tendremos

$$\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle = \langle M'(\alpha')|\widehat{U}_{v'}^+(-\alpha')\widehat{U}_{v'}(-\alpha')|M(\alpha)\rangle, \quad (94a)$$

$$= \left(\widehat{U}_{v'}(-\alpha')|M'(\alpha')\rangle\right)^+ e^{i(m-v')\alpha'}|M(\alpha \ominus (-\alpha'))\rangle, \quad (94b)$$

$$= \left(e^{i(m'-v')\alpha'}|M'(\alpha' \ominus (-\alpha'))\rangle\right)^+ e^{i(m-v')\alpha'}|M(\beta)\rangle, \quad (94c)$$

$$= e^{i(v'-m')\alpha'}[|M(0)\rangle]^+ e^{i(m-v')\alpha'}|M(\beta)\rangle, \quad (94d)$$

$$\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle = e^{i(m-m')\alpha'}\langle M'(0)|M(\beta)\rangle, \quad (94e)$$

ahora utilizando la ecuación (1.92) obtenemos que

$$\langle M'(0)|M(\beta)\rangle = \sum_n \sum_{n'} \frac{e^{-i\mu\beta}}{(2l+1)} e^{i(M\theta_n - M'\theta_{n'})} e^{i2\pi\mu(f_\beta - f_0)} \langle \theta_{n'}|\theta_{\theta_n}\rangle, \quad (95a)$$

$$\langle M'(0)|M(\beta)\rangle = \frac{e^{-i\mu\beta}}{(2l+1)} \sum_n^{2l} e^{i(M-M')\theta_n} e^{i\mu 2\pi f_\beta(\theta_n)}, \quad (95b)$$

donde se ha usado el hecho de que $\{|\theta_n\rangle\}_{n=0,\dots,2l}$ es un conjunto ortonormal (ver apéndice 6), es decir que $\langle\theta_{n'}|\theta_n\rangle = \delta_{n'n}$. Así que se tiene que

$$\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle = \frac{e^{i(m-m')\alpha'} e^{-i\mu\beta}}{(2l+1)} \sum_n^{2l} e^{i(M-M')\theta_n} e^{i\mu 2\pi f_\beta(\theta_n)}. \quad (96)$$

La suma sobre n puede ser hecha sí se introduce el índice H , tal que $\theta_H < \beta < \theta_{H+1}$ entonces evaluando la función f_β la última ecuación se transforma en

$$\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle = \frac{e^{i(m-m')\alpha'} e^{-i\mu\beta}}{(2l+1)} \left[e^{i2\pi\mu} \sum_{n=0}^H e^{i(M-M')\theta_n} + \sum_{n=H+1}^{2l} e^{i(M-M')\theta_n} \right]. \quad (97)$$

Sí se reemplaza el valor de $\theta_n = \theta_0 + 2\pi n/(2l+1)$ y se utilizan las propiedades de las progresiones geométricas, además de hacer tender $l \rightarrow \infty$ (ver apéndice 8) para recobrar los resultados físicos, ya que una completa descripción del campo requiere un número infinito pero contable de estados [49-50, 52-53]; Se obtendrá que

$$\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle = e^{-i\mu\beta} \frac{ie^{i(m-m')\alpha'} e^{i(M-M')\alpha'}}{2\pi(M-M')} \left[e^{i\mu 2\pi} \left(1 - e^{i(M-M')\beta} \right) + \left(e^{i(M-M')\beta} - e^{i(M-M')2\pi} \right) \right]. \quad (98a)$$

De la anterior expresión es posible hallar el módulo al cuadrado de la superposición de los estados, entonces se tendrá

$$\begin{aligned} |\langle M'(\alpha')|M(\alpha)\rangle|^2 &= |\langle M'(0)|M(\alpha)\rangle|^2 = \frac{1}{(M-M')^2 \pi^2} \left[\sin^2(M\pi) + \sin^2(M'\pi) - 2 \cos[(M-M')(\pi-\beta)] \right. \\ &\quad \left. \sin(M\pi) \sin(M'\pi) \right]; \end{aligned} \quad (99a)$$

La cual ha sido utilizada en experimentos tales como la detección de dos fotones entrelazados con MAO no entero [61, 62].

0.4.2. Distribución angular para estados con momento angular orbital no entero

Se puede descomponer un estado de MAO no entero en bases de MAO entero [50]. La amplitud de los coeficientes de descomposición estarán dados por la ecuación (1.98a), donde se elige como entrada $M' = m' \in \mathcal{Z}$ y salida M , luego se tiene que (ver apéndice 8)

$$c_{m'} [M(\beta)] = \langle m'|M(\beta)\rangle = e^{-i\mu\beta} \frac{ie^{i(M-m')\theta_0} e^{i(M-m')}}{2\pi(M-m')} [1 - e^{i\mu 2\pi}]. \quad (100)$$

Es decir que sólo el argumento complejo de $c_{m'}$ depende de la orientación relativa β , luego las probabilidades $P_{m'}(M)$ son independientes de dicha orientación ya que:

$$P_{m'}(M) = |c_{m'}|^2 = \frac{1}{[(M - m') 2\pi]^2} (2 - 2 \cos(2\mu\pi)) = \frac{\sin^2(\mu\pi)}{[(M - m') \pi]^2}. \quad (101)$$

Dado que los estados con MAO entero forman una base ortonormal, pues $\langle m | m' \rangle = \delta_{mm'}$ para $m, m' \in \mathcal{Z}$. Entonces este resultado se logra sí en la última ecuación de probabilidad se hace $M = m \in \mathcal{Z}$, para lo cual tendremos que sí $m \neq m'$ y dado que $\mu = 0$ se tiene que la probabilidad resultante es cero; Pero sí $m = m'$ entonces el valor de $P_{m'}(m')$ se obtiene a partir del procedimiento límite:

$$P_{m'}(m) = \lim_{\mu \rightarrow 0} P_{m'}(m + \mu) = \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin(\mu\pi)}{(m + \mu - m')\pi} \right)^2 = \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin(\mu\pi)}{(\mu\pi)} \right)^2 = 1; \quad (102)$$

Es decir que valores enteros de M la distribución de momento angular orbital consiste de sólo un valor de probabilidad no nula. No obstante para valores no enteros de M , las probabilidades son picos alrededor del entero más cercano a M , como se aprecia en la figura 1.10. En dicha figura se muestra una serie de gráficas correspondientes a los valores de probabilidad en el eje de las y obtenidos a partir de la ecuación (1.101) para variaciones m' entre los valores enteros de -10 a 10, μ entre 0,1 y 0,9 a razón de 0,2 y un valor fijo de $m = 4$. Así que por ejemplo para la figura 1.10a ubicada en la parte superior izquierda donde $\mu = 0,1$, la probabilidad de obtener el valor no entero de $M = 4,1$ con $m' = -5$ es muy pequeña al igual que sucede para los cantidades de $m' = -6, -7, \dots, -10$ (se hace aún mas pequeña); sin embargo conforme crece el entero m' y se acerca al valor de m , entonces la probabilidad aumenta obteniéndose un pico de probabilidad casi de 1 en $m' = 4$, que corresponde al entero más cercano a M , ahora sí nuevamente nos alejamos de $m' = 4$ hacia la derecha de nuevo la probabilidad de obtener el valor de M con cualquier cantidad entera m' es nuevamente muy pequeña. Un procedimiento análogo se sigue para las demás gráficas, viéndose como para $\mu = 0,5$ en la figura 1.10c que corresponde a $M = 4,5$ se obtiene dos picos de probabilidad igual en: $m' = 4$ y $m' = 5$, es decir que existe igual probabilidad de obtener $M = 4,5$ a partir de $m' = 4$ ó $m' = 5$. Finalmente en la figura 1.10e con $\mu = 0,9$, se muestra como la probabilidad de obtener $M = 4,9$ es casi la unidad para $m' = 5$ y casi nula para los demás valores.

Por otro lado dado que el conjunto de estados base con MAO entero $|m'\rangle$ es un conjunto completo, entonces las probabilidades $P_{m'}(M)$ deben de sumar la unidad[50].

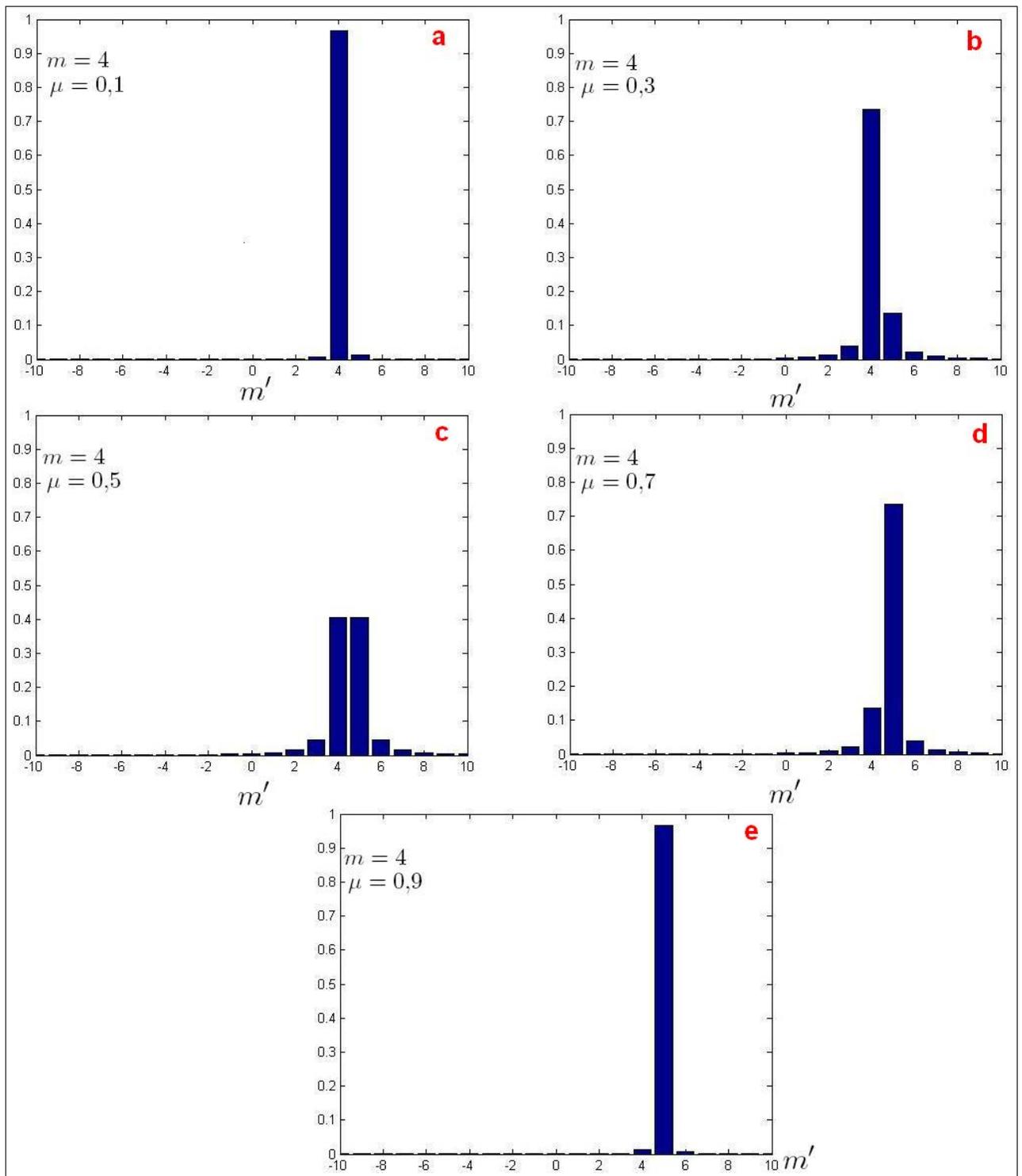


figura 10: Gráficas de la distribución de MAO de estados no enteros para diferentes valores de μ . a) $\mu = 0,1$. b) $\mu = 0,3$. c) $\mu = 0,5$. d) $\mu = 0,7$. e) $\mu = 0,9$. La distribución tiene un pico en el entero más cercano a M . Cálculos realizados numéricamente.

0.5 Generación de haces con momento angular orbital no entero mediante hologramas en forma de tenedor

Para generar haces con momento angular no entero se utilizan con mayor frecuencia las placas de espiral de fase no enteras[62,63] y los hologramas en forma de tenedor no enteros[48,64-67], Aunque de nuevo son estos últimos los cuales, cuando son originados a partir de un modulador espacial de luz (MSL) permiten la versatilidad en la dinámica de asignación de cambios, tales como la variación del valor de M in situ.

Estos hologramas toman la forma a través de una red de difracción generada por la interferencia entre una onda plana de referencia e^{ikx} y una onda objeto con una estructura de fase $e^{iM\theta}$, donde M es un número no entero y $\theta = \arctan(y/x)$, así que el modelo de intensidad es:

$$I = \left| e^{ikx} + e^{iM\theta} \right|^2 = 2 + 2 \cos(kx - M\theta) = 2 [1 + \cos(kx - M\theta)]. \quad (103)$$

En la figura 1.11(a) y 1.11(b) se muestran las redes de difracción obtenidas para $M = 4,4$ y $M = 4,7$ respectivamente.

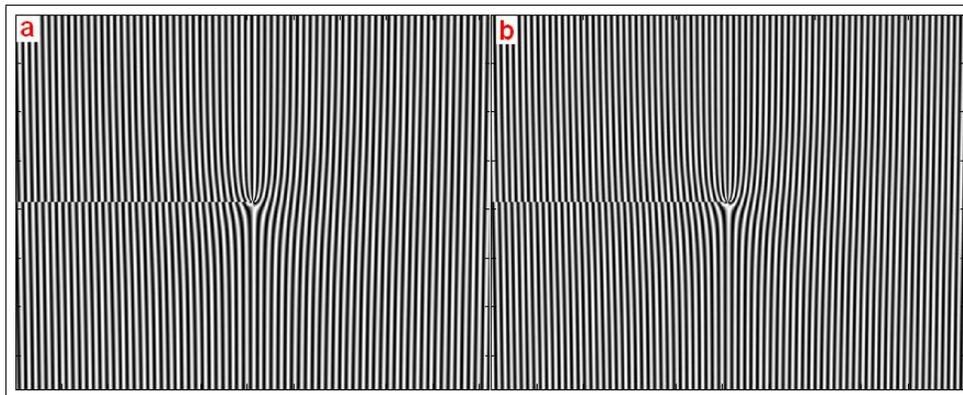


figura 11: Gráficas de las redes de difracción para: a) $M = 4,4$ y b) $M = 4,7$. Hologramas generados por computador; aquí se representan en intensidad para efectos de visualización.

Sin embargo a diferencia de los hologramas enteros para los hologramas no enteros no existe

una regla nemotécnica que permita conocer cual es la carga topológica o simplemente el valor de M correspondiente a tal holograma con sólo observación. Lo único que es posible discernir a simple vista es si la parte no entera es mayor o menor a 0,5. El empate de líneas del holograma en su parte izquierda (ver figura 1.10) se hace antes o después según sea menor o mayor a 0,5.

0.5.1. Propagación de un haz con momento angular orbital no entero

Despreciando los efectos de difracción sobre el haz incidente y utilizando la descomposición de un estado con MAO no entero en estados de MAO entero puede encontrarse la descomposición de la luz emergente de un holograma en forma de tenedor no entero, o una placa de espiral de fase no entera[50,68].

Consideremos en primer lugar que el haz incidente es un haz Gaussiano con una cintura de haz w_0 como el de la ecuación (1.61), entonces la distribución de campo del haz emergente del tenedor no entero en $z = 0$ puede ser escrita como:

$$U(r, \theta, z = 0) = e^{-\frac{r^2}{2w_0^2}} e^{iM\theta}. \quad (104)$$

Ahora para la descomposición del haz emergente del tenedor no entero en $z = 0$, elegimos una superposición de haces Bessel con número de onda transversal κ en lugar de haces Laguerre-Gauss para la descomposición, con el propósito de describir convenientemente el haz en el régimen no paraxial, aunque debe señalarse que una adecuada elección de los factores κ en los haces Bessel conlleva al régimen paraxial[50]. De acuerdo a lo anterior se tiene que la onda emergente del tenedor no entero en la posición mencionada es obtenida por la multiplicación de cada término de la superposición por un apropiado factor de propagación κ , además de un coeficiente de ponderación $c_{m'}[M(\beta)]$ dado por la ecuación (1.100), es decir se tendrá que:

$$U(r, \theta, z = 0) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} c_{m'} e^{im'\theta} \int d_{m'}(\kappa) J_{m'}(\kappa r) d\kappa. \quad (105)$$

Ahora comparando la parte radial en las dos últimas ecuaciones se encuentra que

$$e^{-\frac{r^2}{2w_0^2}} = \int d_{m'}(\kappa) J_{m'}(\kappa r) d\kappa, \quad (106)$$

de manera que utilizando el teorema de Fourier-Bessel o transformada de Fourier-Bessel[16,25]:

$$F_\nu(\kappa) = \int_0^\infty f(r)J_\nu(\kappa r)rdr, \quad (107a)$$

$$f(r) = \int_0^\infty F_\nu(\kappa)J_\nu(\kappa r)\kappa dr, \quad (107b)$$

se encuentra que:

$$d_{m'}(\kappa) = \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2w_0^2}} J_{m'}(\kappa r) dr; \quad (108)$$

La solución de esta última integral utiliza un procedimiento análogo al ya efectuado para encontrar el campo difractado de un haz Gaussiano a través del holograma entero, sólo que esta vez se evalúa separadamente para valores de m' tanto positivos como negativos y se utiliza para los m' negativos la paridad de las funciones de Bessel de primera especie $J_{-m'}(\kappa r) = (-1)^{m'} J_{m'}(\kappa r)$, así que se llega a que la función $d_{m'}(\kappa)$ es:

$$d_{m'}(\kappa) = \kappa^2 \frac{\sqrt{\pi}}{8} (2w_0^2)^{2/3} e^{-\frac{\kappa^2 w_0^2}{4}} \left[I_{\frac{|m'|-1}{2}} \left(-\frac{\kappa^2 w_0^2}{4} \right) + I_{\frac{|m'+1}{2}} \left(-\frac{\kappa^2 w_0^2}{4} \right) \right] \times \begin{cases} (-1)^{|m'|}, & m' < 0. \\ 1, & m' \geq 0 \end{cases} \quad (109)$$

Sí se sustituye en la ecuación(1.105) se encuentra la onda emergente del tenedor no entero para $z = 0$. Empero para encontrar la onda propagándose una distancia longitudinal diferente de cero adicionamos el factor de propagación apropiado ya arriba mencionado. Para la forma de propagación no paraxial o exacta[50] dicho factor de propagación esta dado por $e^{i\sqrt{k^2-\kappa^2}z}$, por lo tanto la onda propagada para una distancia z puede escribirse como:

$$U(r, \theta, z) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} c_{m'} [M(\beta)] e^{im'\theta} \int_0^\infty d_{|m'|}(\kappa) J_{|m'|}(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2-\kappa^2}z} d\kappa; \quad (110)$$

Donde m' puede tomar valores positivos y negativos y no hay que hacer una distinción para los valores negativos debido a que el factor alternante $(-1)^{m'}$ de la función $d_{m'}$ es compensado con el signo alternante de las funciones de Bessel $J_{-m'}(\kappa r) = (-1)^{m'} J_{m'}(\kappa r)$. Por otra parte los límites de la integral son desde cero a infinito, es decir que se incluye las ondas evanescentes de manera que el carácter de la integral cambiará en $k = \kappa$ de un comportamiento oscilante a un comportamiento decreciente.

Finalmente es posible arribar a una solución de propagación paraxial si se expande el factor de propagación $\sqrt{k^2 - \kappa^2}$ en la exponencial asumiendo que $(\kappa/k) \ll 1$ [68], de manera que

se desprecian los valores de términos superiores a $(\kappa/k)^2$ en la expansión, llegando a que el campo emergente será en la aproximación de propagación paraxial:

$$U(r, \theta, z) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} c_{m'} [M(\beta)] e^{im'\theta} e^{ikz} \int_0^{\infty} d_{|m'|}(\kappa) J_{|m'|}(\kappa r) e^{-i\frac{\kappa^2}{2k}z} d\kappa. \quad (111)$$

Una gráfica del perfil de intensidad obtenido llevando a cabo los cálculos numéricos para la esta última ecuación es mostrada en la figura 1.12. Los cálculos fueron efectuados utilizando un haz incidente con una longitud de onda y una cintura de haz de $533[nm]$ y $w_0 = 1[mm]$ respectivamente, la distancia de propagación de la onda emergente es aproximadamente $z = 50[cm]$; mientras que el valor de M impartido por el holograma es de $M = 3,5$. En dicha gráfica mencionada se muestra una línea casi central, consecuencia de una cadena de vórtices de carga alternante[69]. Además de dos características importantes: La primera esta relacionada con el número de spots o manchas observadas con intensidad zero en la región central, que en la gráfica corresponde a 3, el cual es el entero más cercano a M . Entre tanto la segunda característica esta relacionada con los anillos formados alrededor del eje que corresponden a efectos difractivos de la singularidad inicial en el centro[50], es decir a la fase 2π del ángulo acimutal que forma la circunferencia alrededor del campo óptico.

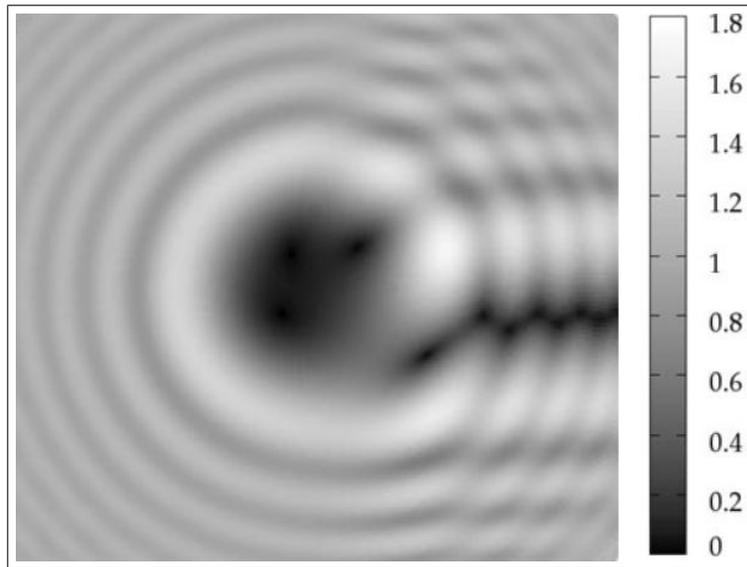


figura 12: Perfil de intensidad para un haz gaussiano incidente sobre un holograma no entero con $M = 3,5$. Resultado obtenido por simulación numérica.

CONSTRUCCIÓN E IMPLEMENTACIÓN DEL MONTAJE EXPERIMENTAL

0.6 Introducción

Se han utilizado algunos conceptos teóricos de la óptica electromagnética y física cuántica para entender la propagación de un haz con MAO entero y no entero. Por otra parte se ha descrito brevemente la generación de haces con momento angular orbital entero y no entero a través del uso de la técnica de hologramas en forma de tenedor, la cual como se mencionó en el capítulo anterior posee gran versatilidad en la asignación de cambios in situ, cuando dichos hologramas son creados por medio de un modulador espacial de luz por ejemplo. El objetivo principal de este capítulo consiste en describir la construcción e implementación de dos montajes: uno que permita verificar experimentalmente en intensidad las consideraciones y resultados teóricos obtenidos previamente para un haz propagándose con MAO entero y no entero; y un segundo montaje que permita observar el evento físico de un haz propagándose con MAO a través de su estructura de fase. En ambos sistemas es conocido el MAO entero y no entero impuesto al haz desde su generación mediante los hologramas para su posterior detección.

Empero antes de la implementación de estos sistemas se caracterizará la matriz del MSL en modo modulación en amplitud acoplada[75] con optimación del brillo y el contraste para su mejor funcionamiento en intensidad. De esta manera en la sección 2.2 se describe el modo de modulación en amplitud acoplada y se encuentra el valor óptimo de los ángulos de torsión, contraste y brillo de la matriz del MSL. En la sección 2.3 se detalla acerca del montaje experimental utilizado para generar un haz MAO entero y no entero conocido con su respectiva detección. Finalmente en la sección 2.4 se describe el montaje experimental interferométrico implementado para observar la estructura de fase de un haz con MAO entero y no entero.

0.7 Caracterización global en modo modulación acoplada para la matriz LCD

Las pantallas de cristal líquido o LCD constituyen la piedra angular de un modulador espacial de luz (MSL). Sin embargo para que esta pantalla trabaje en la región óptima con respecto a la recepción de la luz para obtener una buena imagen a la salida en intensidad[73], es necesario llevar a cabo una serie de pruebas en las cuales se encuentre en primer lugar el ángulo máximo de torsión del eje óptico de las celdas que conforman la matriz[73], con la finalidad de maximizar el valor de la amplitud en la salida con respecto a un mínimo valor de fase, por tal razón se le llama modo modulación acoplada[73,74]. Algunas especificaciones técnicas de la matriz utilizada son presentadas en la tabla 2.1.

MATRIZ ACTIVA MODO TRANSMISIÓN TWISTED NEMATIC	
Resolución espacial	1024(H)x768(V) píxeles monocromáticos
Tamaño píxel	14 [μm](H)x14[μm](v)
Dimensión de píxel	11 [μm](H)x8.5[μm](v)
Dimensiones del panel	área activa 14.33[mm](H)x10.75[mm](v)

Tabla 1: Algunas Especificaciones técnicas del Panel LCD(liquid cristal display)[75].

Para lograr dicho modo de modulación acoplada se trabaja de manera global, es decir utilizando toda la pantalla y no dividiéndola en zonas de estudio como sería para analizarla de manera local. Además se utilizan dos polarizadores: uno en la entrada de la matriz y otro a la salida de ella. A este último se le denomina analizador, ambos (polarizador y analizador) se asumen cruzados según las instrucciones del fabricante[75] y junto con la pantalla LCD conforman un sandwich tal como se muestra en la figura 2.1.

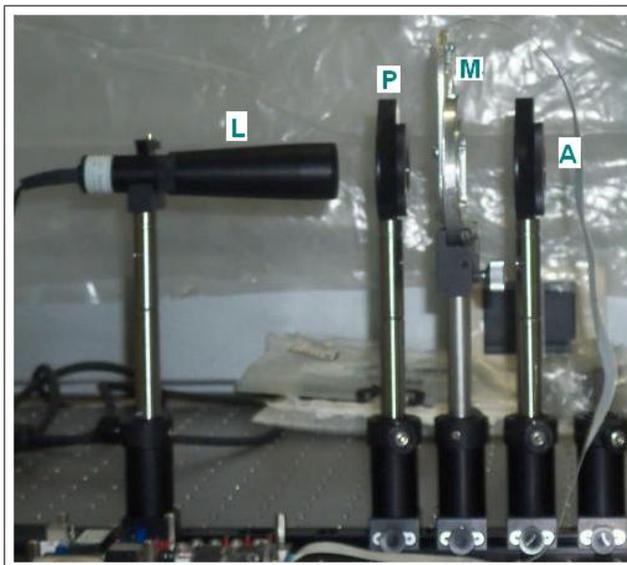


figura 13: Sistema para modo acoplado en intensidad Laser(L)-Polarizador(P)-Matrix(M)-Analizador(A)-Fotodetector(F). Fotografía de parte del dispositivo experimental.

Cuando se hace incidir de manera normal un haz láser(L) con $\lambda = 532[nm]$, colimado con diámetro de $20[mm]$ y linealmente polarizado sobre el polarizador(P), entonces a la salida de P y entrada a la matrix (M) (La cual debe encontrarse apagada⁹), se encontrará un haz polarizado e incidente normalmente sobre la matriz. Por tanto es posible encontrar el ángulo máximo de torsión del eje óptico de las celdas del cristal liquido, girando el analizador (A) con el fin de anular la intensidad luminosa, con la cuál llega el haz al fotodetector colocado después de A y cuyas principales características técnicas son presentadas en la tabla 2.2. Así se tendrá que para diferentes orientaciones de P, A es rotado obteniéndose un mínimo

⁹Con el propósito de que ningún campo externo actúe sobre las moléculas que conforman la matriz y cambie su orientación[74].

para cada posición de éste; El menor valor de estos mínimos nos indicará que el haz de luz incide paralela a la dirección del director sobre la pantalla de cristal liquido[73].

FOTODETECTOR 818-SL NEWPORT™	
Rango espectral	400 a 1100[<i>nm</i>]
Material	Silicon
Calibración sin atenuador	1 % a 400-940[<i>nm</i>] y 4 % a 941-1100[<i>nm</i>]
Area activa	1[<i>cm</i> ²]
Diametro activo	1.13[<i>cm</i>]

Tabla 2: Algunas especificaciones técnicas del Fotodetector 818-SL Newport™.

Siguiendo el anterior proceso se tomaron 50 valores arbitrarios de intensidad con variaciones angulares de 10° para el polarizador y valores de 4° para el analizador y se concluyó que se podría delimitar el rango de valores de los mínimos entre 60° – 92° en el polarizador, ya que en este intervalo se encontraban la mayoría de mínimos de los mínimos locales. A partir de allí se tomaron nuevamente 100 valores de intensidad pero variando a intervalos de 2° tanto en polarizador como en el analizador y teniendo en cuenta que en los mínimos el polarizador y el analizador se encuentran cruzados. De esta manera se encontró que el mínimo de los mínimos locales en intensidad registrados por el fotodetector corresponde a los ángulos de: 84° y 224° en el polarizador y analizador respectivamente. En el apéndice 9 aparecen algunos de los datos obtenidos de la intensidad para distintas posiciones angulares en el polarizador y en el analizador.

0.7.1. Ajuste del contraste y brillo de la matriz LCD

Una vez encontrado el ángulo de torsión óptimo se procede en segundo lugar a hallar los valores de contraste y de brillo óptimos de la matriz LCD, para ello se fijan 8 valores de contraste entre 1,90 – 1,97[V] y se procede a variar para cada uno de los valores de contraste el brillo

entre $4,02 - 4,52[V]$ ¹⁰, mientras una serie de 26 imágenes con niveles de gris variando entre 0-255 en intervalos de $10[s]$ son desplegadas en la pantalla LCD para adquirir 50 registros de intensidad en el fotodetector para cada nivel de gris. De esta manera son obtenidas 48 gráficas como resultado experimental para cada valor de contraste y de brillo de los 26 valores promedio de intensidad contra sus respectivo nivel de gris. Finalmente la gráfica con mayor linealidad en sus datos representará los valores de contraste y de brillo óptimos de la matriz LCD[74].

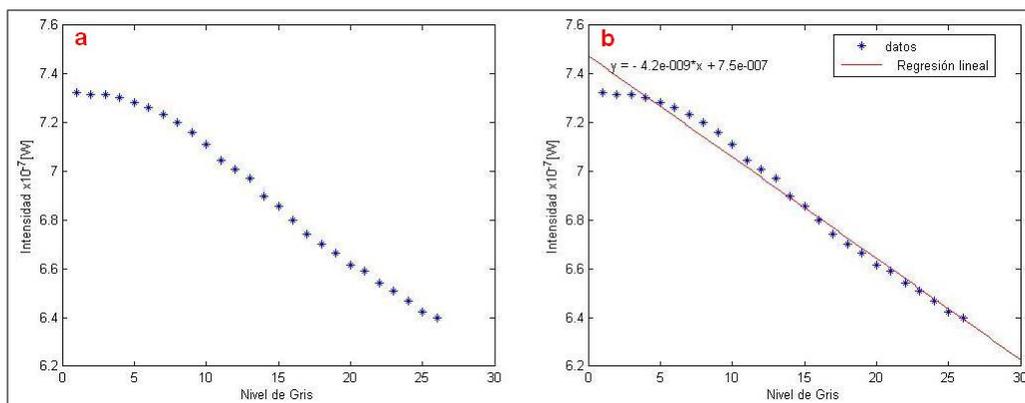


figura 14: a) Puntos experimentales para la intensidad en función del nivel de gris . b) Regresión lineal para los datos experimentales de la gráfica de a.

Teniendo en cuenta el método de los mínimos cuadrados y el factor de regresión lineal se encontró que la gráfica mostrada en la figura 2.2(a) representa la mejor línea para el conjunto de gráficas antes mencionado(algunas gráficas se encuentran en el apéndice 9), puesto que su factor de regresión es de 0.95(el más cercano a 1 del conjunto de gráficas). Dicha gráfica corresponde a los valores óptimos de contraste y de brillo: $1.93[V]$ y $4.52[V]$ respectivamente. Además debe señalarse el hecho de que la pendiente sea negativa lo que implica es que existe una inversión de contraste en la matriz para esas condiciones de trabajo experimental.

¹⁰El contraste y el brillo en la matriz están disponibles utilizando potenciómetros diferentes que permiten variaciones de resolución mínima de $0,1[V]$ para el brillo y $0,01[V]$ para el contraste[75].

0.8 Montaje experimental para un haz con MAO entero y no entero. Medidas en intensidad.

Una vez obtenidos experimentalmente el ángulo máximo de torsión del eje óptico de las celdas de la matriz del MSL y los valores óptimos de brillo y de contraste, entonces se fija con este valor el sandwich polarizador-modulador espacial de luz-analizador, para las medidas en intensidad experimentales correspondientes. No obstante a pesar que el sistema anteriormente mencionado es muy importante para la generación del haz con MAO entero y no entero, también es necesario experimentalmente llevar a cabo las siguientes etapas: implementar un sistema de iluminación que cumpla con las condiciones de monocromaticidad y polarización de la onda incidente en el sistema mencionado, generar numéricamente los hologramas en forma de tenedor entero y no entero que serán asignados dinámicamente al MSL dentro del sandwich y finalmente implementar un sistema de adquisición, el cual sé adecue mejor a la recepción y captura de los datos provenientes de la señal luminosa desde el sandwich. Este montaje completo se muestra en la figura 2.3 y en un esquema en la figura 2.4 para el haz láser (L), el sandwich polarizador(P)-matriz(MSL)-analizador(A) y el sensor CCD.



figura 15: Sistema experimental de medidas en intensidad.

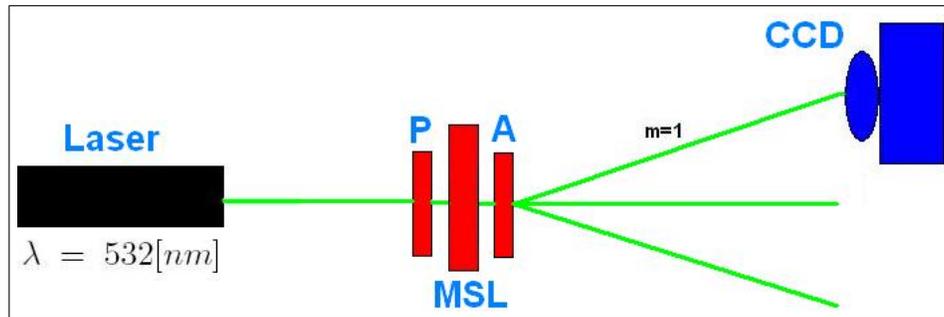


figura 16: Esquema del montaje utilizado para los experimentos en intensidad.

0.8.1. Sistema de iluminación

Como sistema de iluminación se utiliza un láser diodo con $\lambda = 532[nm]$ en iluminación directa. Dicho láser consta de un dispositivo con lente colimadora, además que su estado de polarización natural es lineal con el propósito de garantizar los efectos exclusivamente del momento angular orbital en el haz luminoso, debido a que los efectos del momento angular spín aparecen sólo cuando la polarización del haz es diferente de lineal. Algunas características técnicas importantes del haz son presentadas en la tabla 2.3.

MODULO LASER 532[nm]	
Tipo	Láser clase II
Voltaje de operación	5[V](DC)
Apertura	15-20[mm]
Potencia de salida	1[mW]
Diámetro del haz	Autoajustable

Tabla 3: Algunas especificaciones técnicas del Laser.

0.8.2. Generación de hologramas en forma de tenedor entero y no entero

En la sección 1.3 del presente libro se describió como era la forma, función de transmitancia y ventajas que presentaba el holograma en forma de tenedor entero con respecto a otras técnicas para generar haces con MAO entero. Ahora para la generación de la red numérica entera utilizamos el programa MatLab 7.6© para crear hologramas de 1024(H)x768(V) siguiendo el modelo de intensidad obtenido en la ecuación (1.59) para una onda de referencia con magnitud de vector de onda $k = (2\pi)/(532 \times 10^{-9})[m^{-1}]$ y ondas con diferentes valores de m . Los anteriores hologramas son equivalentes a redes de transmisión en amplitud sinusoidal[40], ya que al realizar cortes transversales en la dirección horizontal puede verse como éstos seguirán una senoide, Así como por ejemplo el holograma mostrado en la figura 2.5 para un valor de $m = 6$ y cortes indicados en la parte lateral derecha: superior e inferior; para el corte lateral derecho medio del mismo holograma puede apreciarse como se presenta un pico debido a que en dicha posición se encuentra la singularidad[40]. Finalmente en la parte izquierda inferior de la figura 2.5 se muestra el holograma ampliado entorno al centro para mejorar la visualización del tenedor. Utilizando el anterior procedimiento descrito, son creados los hologramas mostrados en la figura 2.6 para cargas topológicas $p = 1, 2, \dots, 6$, los cuales han sido ampliados para su mejor visualización.

No obstante debido a que se utiliza un PC para transmitir los datos del computador al modulador espacial de luz, es necesario ajustar la resolución espacial de la pantalla del PC a la misma resolución del modulador espacial, es decir a 1024x768, todo esto con el propósito de utilizar efectivamente la resolución espacial de la pantalla en el MSL.

Similar a lo antes descrito en la sección 1.5 se mostró la utilidad de los hologramas en forma de tenedor no entero para generar haces con MAO no entero. Para crear redes numéricas no enteras de 1024(H)x768(V) utilizamos nuevamente el programa MatLab 7.6©, además del modelo de intensidad obtenido en la ecuación (1.103) para de nuevo un haz de referencia con magnitud de vector de onda $k = (2\pi)/(532 \times 10^{-9})[m^{-1}]$ y ondas con diferentes valores

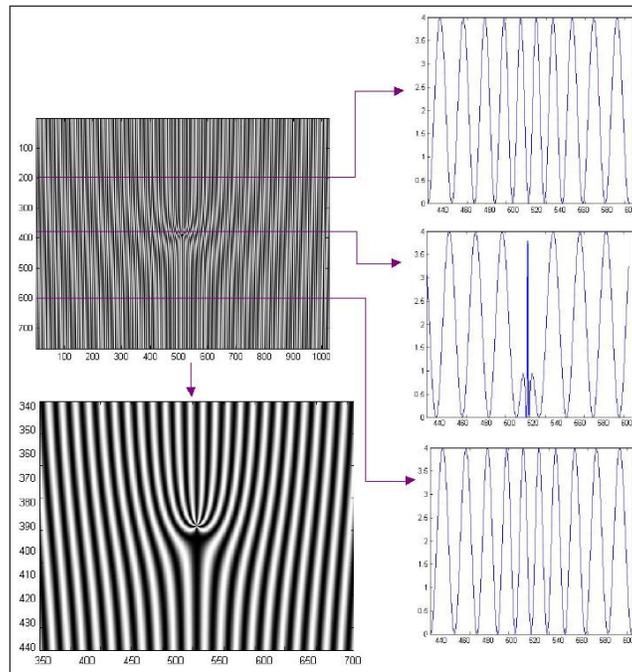


figura 17: Perfiles transversales horizontales generados con MatLabTM para una red con $p = 6$ sinusoidal.

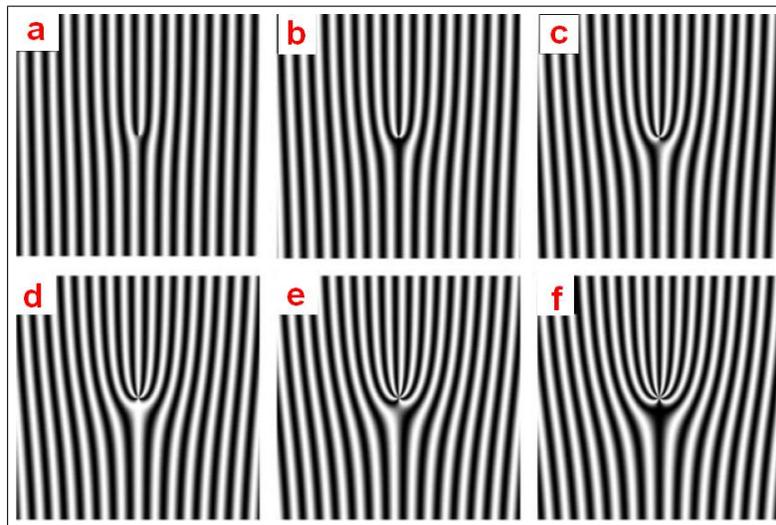


figura 18: Diferentes hologramas generados con MatLabTM para cargas desde $p = 1$ a $p = 6$ respectivamente.

no enteros de M . Así tendremos por ejemplo que para $M = 5,6$ se obtiene el holograma mostrado en la parte izquierda superior de la figura 2.7, mientras que la gráfica ubicada en la parte izquierda inferior representa un perfil ampliado del mismo holograma para una mejor

visualización del tenedor no entero. Además es posible nuevamente trazar cortes longitudinales transversales al perfil del holograma para mostrar que de nuevo la red sigue la forma de transmisión de una red sinusoidal[65], como se aprecia para las figuras ubicadas en la parte lateral derecha: superior, inferior y medio. No obstante para este último lugar puede notarse como al llegar a la singularidad del tenedor el corte es abrupto como se observa en la figura 2.8, lo cuál se debe a la parte no entera del valor no entero, que para este caso es 0,6.

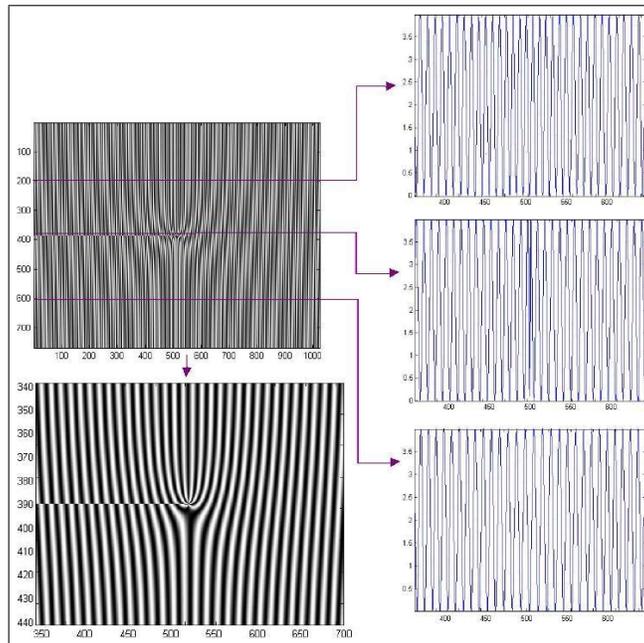


figura 19: Perfiles transversales horizontales para una red con $M = 5,6$ sinusoidal, red generada con MatLab™.

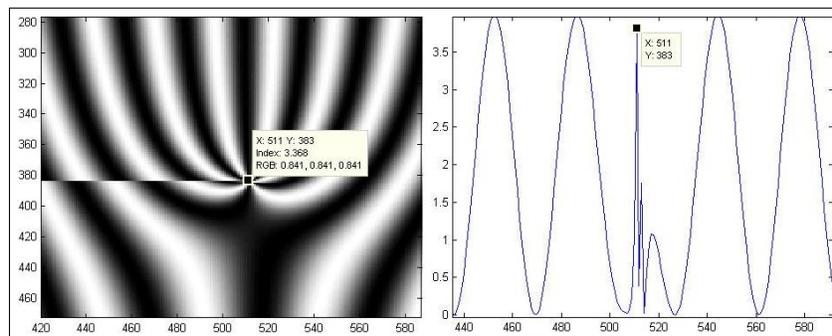


figura 20: Perfil ampliado del corte longitudinal transversal cerca de la singularidad del tenedor no entero con $M = 5,6$. Holograma generado con MatLab™.

Utilizando este procedimiento son generados los hologramas no enteros con cargas que varían en 0,2 desde $M = 6,0$ en la figura 2.9(a) hasta $M = 7,0$ en la figura 2.9(f) para los perfiles ampliados de dichos hologramas. Siguiendo la anterior secuencia de gráficas desde 2.6(a) hasta 2.6(f) puede notarse como el centro del holograma se desfasa lentamente hacia la izquierda en intervalos de $2\pi/5$ entre cada gráfica, hasta que cuando llega a la última de ellas aparece un nuevo diente en el tenedor que corresponde a un aumento en la fase del tenedor de 2π .

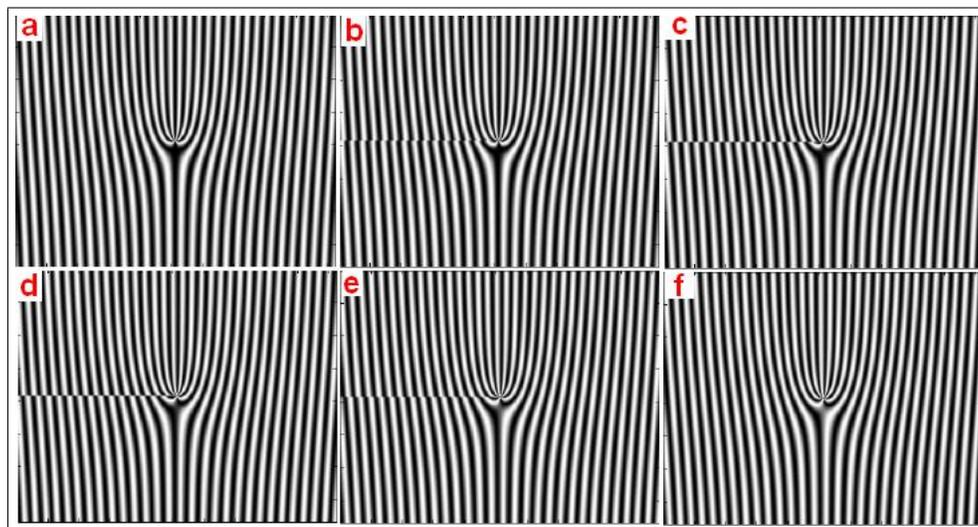


figura 21: Diferentes hologramas generados con MatLabTM para cargas desde $M = 6,0$ a $M = 7,0$ a intervalos de 0,2 respectivamente.

0.8.3. Sistema de adquisición

Se utiliza como sistema de adquisición una cámara CCD E0-1312c de Newport[76], cuyas principales características técnicas se encuentran consignadas en la tabla 2.4. Los parámetros de rata de frames y tiempo de exposición fueron ajustados manualmente a valores de $9,31 \text{ fps}$ y $102,32 \text{ [ms]}$ respectivamente para optimizar la adquisición¹¹, mientras los demás parámetros como contraste, brillo y parámetro γ fueron dejados en el modo automático.

¹¹Optimizar desde el punto de vista cualitativo, es decir con estos parámetros se observan las mejores imágenes para la adquisición.

cámara CCD E0-1312c	
Resolución	1280x1024 píxeles
Tamaño de Píxel	4.65[μm] cuadrado
Area sensible	5.95[mm][H]x5.76[mm][V]
Sensor	Sony ICX205AK

Tabla 4: Algunas Especificaciones técnicas de la cámara utilizada.

0.9 Montaje experimental para un haz con MAO entero y no entero. Medidas de fase.

Para realizar las medidas de fase correspondientes se extraen los polarizadores del Sandwich dejando a la matriz del MSL operando en fase, y se implementa un interferómetro Mach–Zender[1]. Para llevar a cabo dichas medidas experimentales los sistemas de iluminación, generación de hologramas (enteros y no enteros) y adquisición son elegidos con las mismas condiciones impuestas para las medidas de intensidad, Sin embargo se construye un interferómetro Mach–Zender como lo muestra la figura 2.11 utilizando dos espejos(E1 y E2) y dos beamsplitters(B1 y B2).

De esta manera un cuando haz láser colimado con 20[mm] de diámetro incide sobre B1, entonces el haz se divide para seguir las trayectorias 1 y 2. El haz que sigue la trayectoria 1 incide sobre el MSL, de manera que a la salida de él se tendrán los órdenes de difracción con MAO entero o no entero dependiendo del holograma utilizado, para propósitos experimentales se filtra a través de D el primer orden de difracción¹² y se le permite continuar con su camino hasta el espejo E1, en donde su trayectoria es bruscamente cambiada para incidir sobre B2; Allí el haz de MAO entero o entero, interfiere con el haz referencia que es un haz Gaussiano colimado y expandido, el cual ha seguido la trayectoria 1. Finalmente los resultados de la

¹²Ya que es el orden con mayor energía después del orden cero (es una Gaussiana).

interferencia son registrados en la cámara CCD.

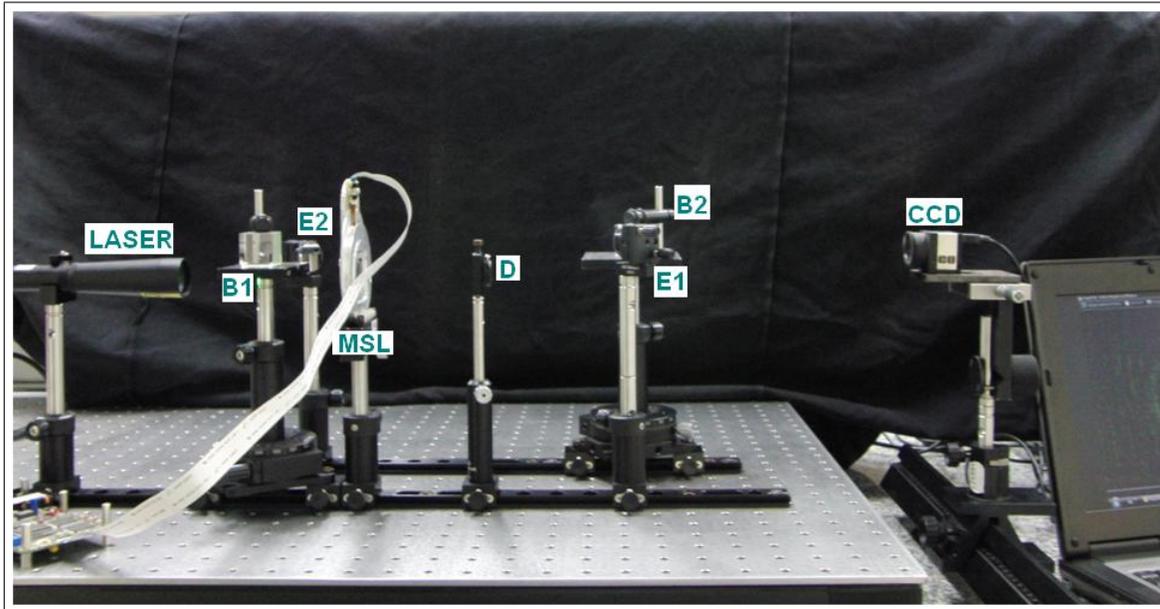


figura 22: Sistema experimental de medidas de fase.

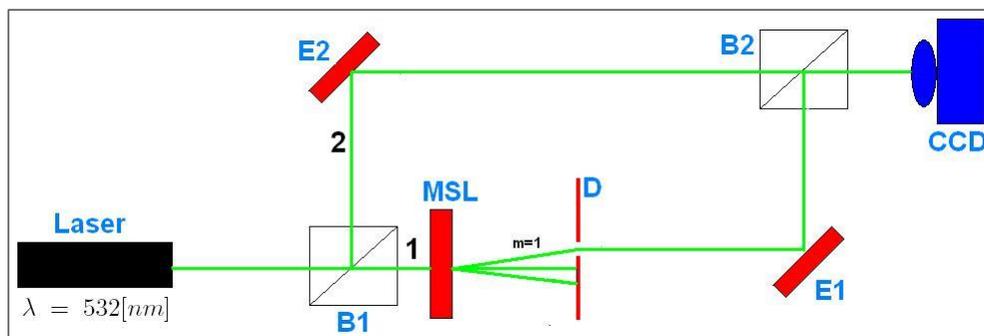


figura 23: Esquema del montaje utilizado para los experimentos de fase.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

0.10 Introducción

Una vez analizado teóricamente e implementado experimentalmente dos montajes: uno para la propagación y otro para la detección de intensidad y fase de un haz con MAO entero y no entero, en este capítulo se mostrarán los resultados de dichos experimentos. De manera que en la sección 3.2 se muestran los resultados en intensidad obtenidos para el montaje con MAO entero y no entero con su correspondiente análisis. Mientras que en la sección 3.3 se muestran y explican los resultados experimentales obtenidos para el montaje de fase para un haz de MAO entero y no entero respectivamente.

0.11 Resultados para el haz con MAO. Medidas de intensidad.

En las figuras 3.1a hasta 3.1o se presentan las imágenes del primer orden de difracción ($m = 1$) correspondientes a las cargas topológicas del holograma en forma de tenedor entero: $p = 2, 4, 6, \dots, 30$ respectivamente; las cuales fueron obtenidas mediante la implementación experimental del montaje con MAO entero descrito en la sección 2.3. Mientras que en las figuras 3.2a hasta 3.2o se muestran los perfiles teóricos obtenidos para el primer orden de

difracción de acuerdo a los resultados de la sección 1.3. De acuerdo a estas imágenes experimentales y teóricas se observa como conforme aumenta el valor de la carga topológica también lo hace el radio promedio de la figura de difracción central o vórtice, dicho radio experimental puede ser estimado utilizando un sencillo procesamiento de imágenes tal como se muestra en la figura 3.2 para la difracción correspondiente a la carga topológica $p = 24$, para cual se traza un círculo promedio en color rojo y se extrae el número de pixeles que representan el radio, así que el radio promedio experimental de la figura de difracción central será: (No. de pixeles) \times (TP), donde TP representa el tamaño de pixel de la cámara que es $4,65[\mu\text{m}]$ [76].

CARGA	EXPERIMENTO $\pm 0,01[\text{mm}]$	TEORÍA [mm]	RAZÓN
2	1.38	1.48	1.07
4	2.17	2.21	1.01
6	2.58	2.77	1.07
8	2.86	3.24	1.13
10	3.16	3.66	1.16
12	3.42	4.04	1.18
14	3.70	4.38	1.18
16	4,00	4.70	1.17
18	4.27	5.00	1.17
20	4.53	5.28	1.16
22	4.79	5.55	1.16
24	5.03	5.81	1.15
26	5.27	6.05	1.15
28	5.40	6.29	1.16
30	5.63	6.52	1.16

Tabla 5: Valores de radios promedio experimental y teórico obtenidos para diferentes cargas con su respectiva razón entre ellos.

No obstante dicho radio también puede ser calculado analíticamente utilizando la ecuación (1.89), ya que se trabajó en la aproximación de campo lejano con valores conocidos de

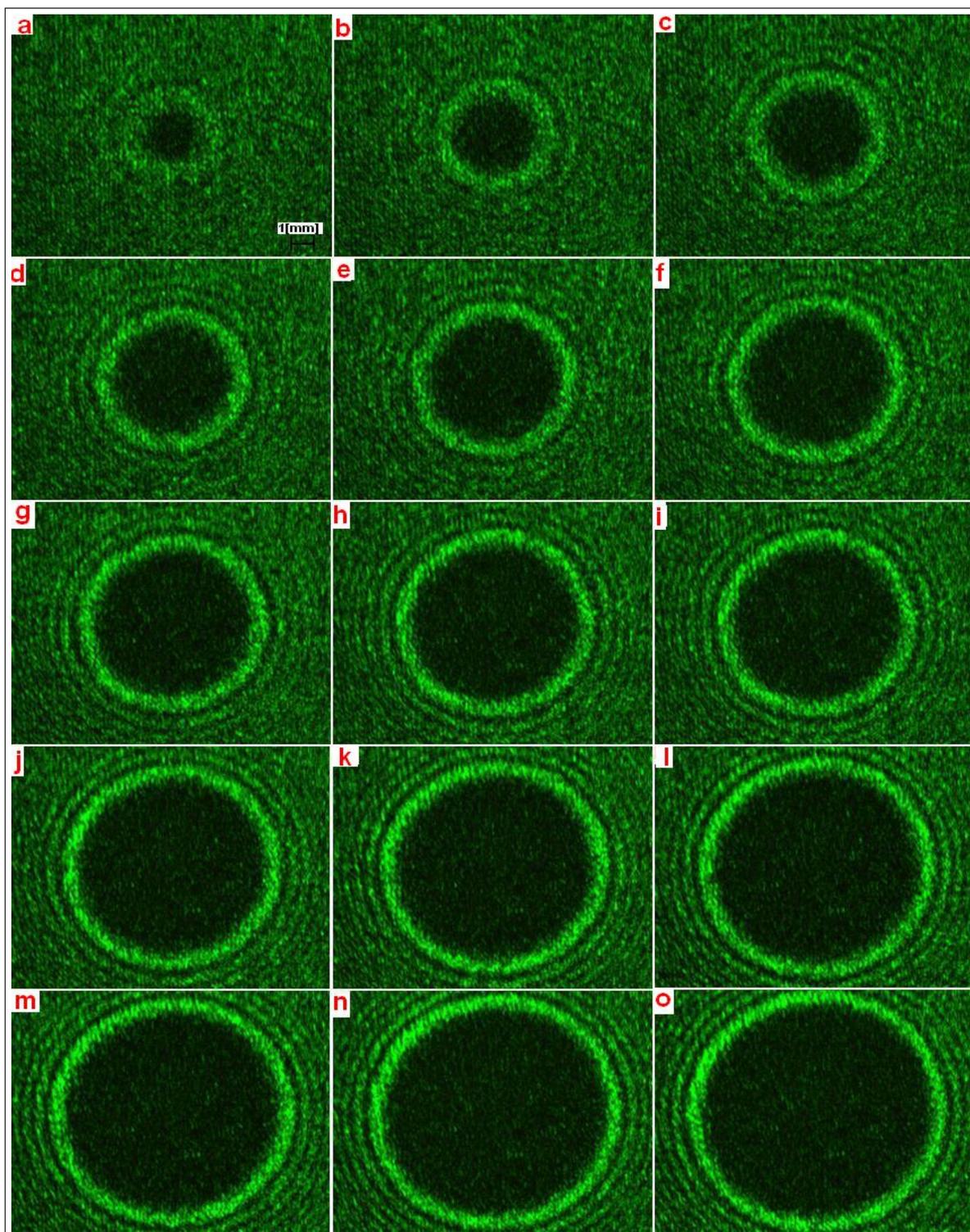


figura 24: Figuras a-o. Imágenes experimentales de la difracción de campo lejano para cargas topológicas $p = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ y 30 respectivamente.

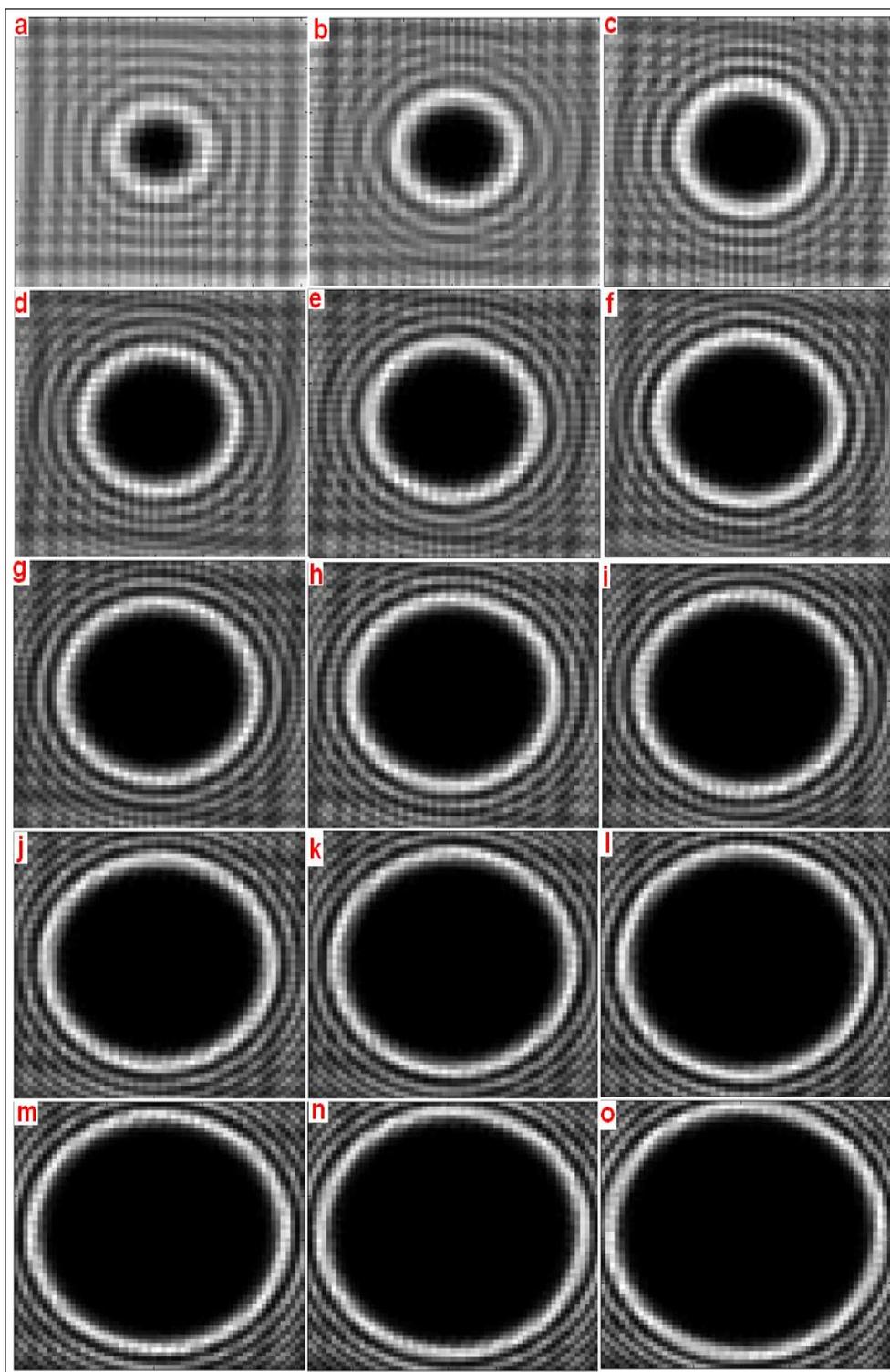


figura 25: Figuras a-o. Imágenes teóricas de la difracción de campo lejano pra cargas topológicas $p = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ y 30 respectivamente.

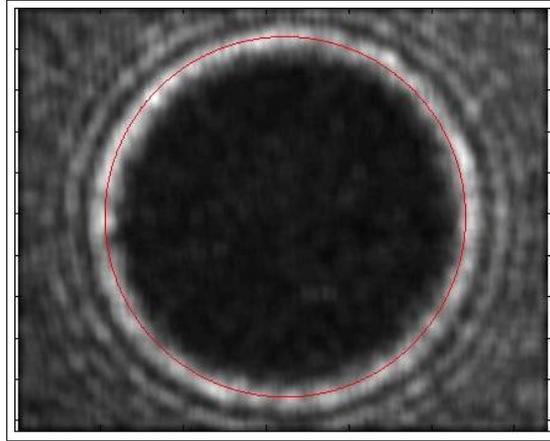


figura 26: Radio promedio experimental obtenido para la imagen con carga topológica $p = 24$.

$p, m, \lambda = 532[nm]$ y $(z - \xi) = 1,08[m]$. De esta manera tendremos que las tres primeras columnas de tabla 3.1 muestra los valores de radios teóricos y experimentales calculados usando los métodos antes descritos para los diferentes valores de carga topológica. En dicha tabla también se puede apreciar una cuarta columna en la cual se incluye la razón teoría-experimento para los radios, y se nota que para la mayoría de valores obtenidos la relación siempre es cercana a uno. Además en dichas imágenes experimentales y teóricas también puede notarse un conjunto de anillos que rodean al campo central del vórtice, los cuales son producidos por la difracción de la singularidad en el centro, es decir por el valor de fase 2π que esta embebido en la distribución de campo óptico del haz con MAO entero.

Ahora por otra parte usando el mismo montaje experimental pero ahora para hologramas en forma de tenedor no entero, obtenemos las imágenes experimentales mostradas en la figuras 3.4(a-m) y 3.5(a-m) para la evolución de carga topológica a intervalos de 0.1 entre [15-16] y [16-17] respectivamente. Mientras que en las figuras 3.6(a-m) y 3.7(a-m) se muestran los perfiles teóricos para la crecimiento de la carga topológica en los mismos intervalos antes mencionados respectivamente. En dichas imágenes se aprecia la formación de una línea casi central en la parte derecha conforme el valor de p es cada vez más cercano al valor semientero $p + 1/2$, mientras que dicha línea se extingue en la medida que el valor de p es más cercano al entero $p + 1$. Esta línea característica es consecuencia de una cadena de vórtices de carga alternante entera o cadena de haces con MAO entero. Otra característica de las imágenes es de nuevo la formación de los anillos alrededor del centro del eje que corresponde otra vez a la difracción

de la singularidad de fase inicial.

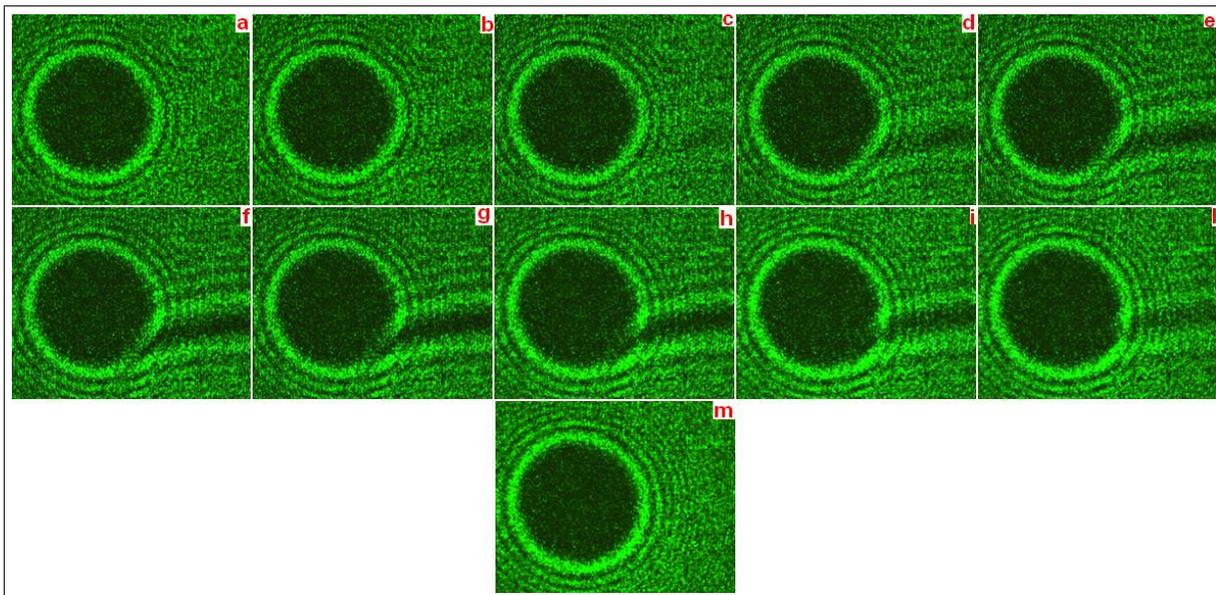


figura 27: Imágenes experimentales en intensidad: De izquierda a derecha superior(a-e) para los valores de carga $p = 15,0, 15,1, 15,2, 15,3$ y $15,4$, y de izquierda a derecha inferior(f-m) para valores de $p = 15,5, 15,6, 15,7, 15,8, 15,9$ y $16,0$.

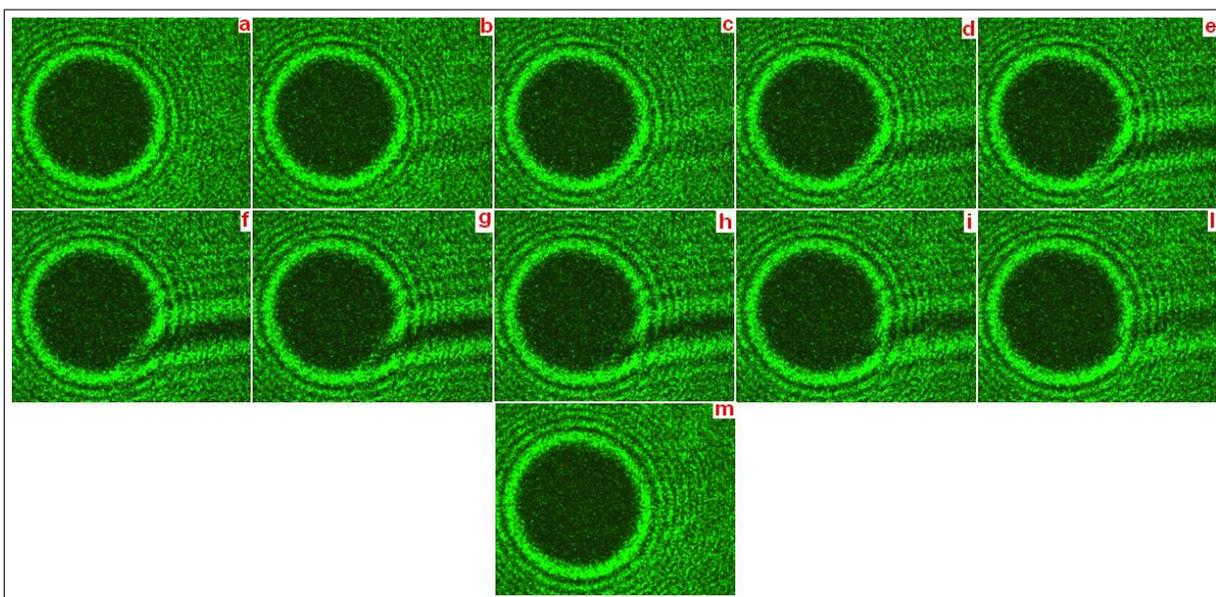


figura 28: Imágenes experimentales en intensidad: De izquierda a derecha superior(a-e) para los valores de carga $p = 16,0, 16,1, 16,2, 16,3$ y $16,4$, y de izquierda a derecha inferior(f-m) para valores de $p = 16,5, 16,6, 16,7, 16,8, 16,9$ y $17,0$.

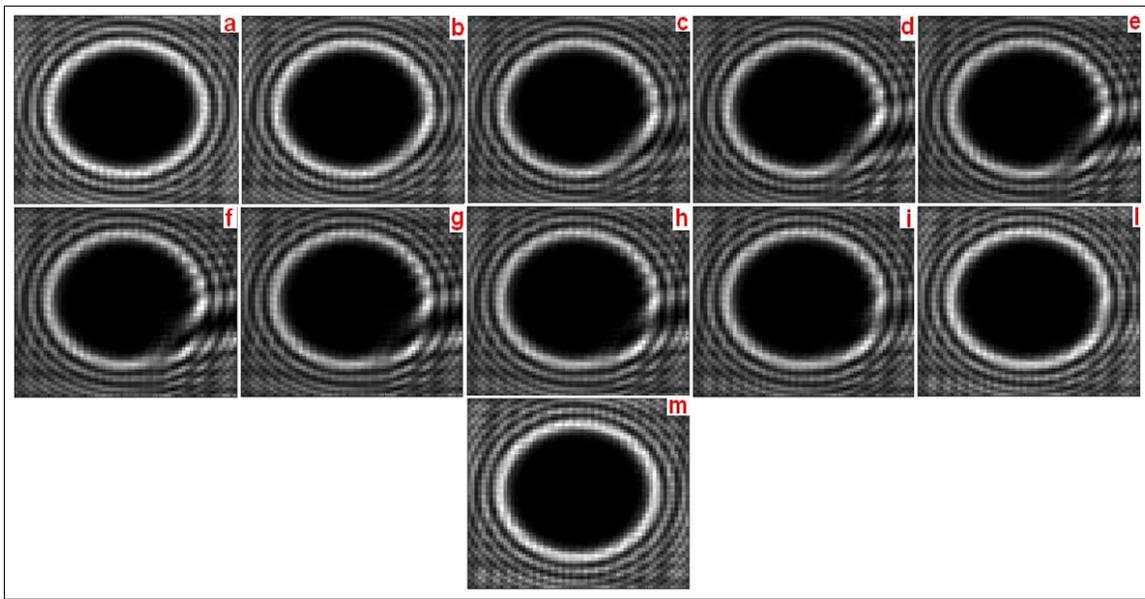


figura 29: Imágenes teóricas en intensidad: De izquierda a derecha superior(a-e) para los valores de carga $p = 15,0, 15,1, 15,2, 15,3$ y $15,4$, y de izquierda a derecha inferior(f-m) para valores de $p = 15,5, 15,6, 15,7, 15,8, 15,9$ y $16,0$.

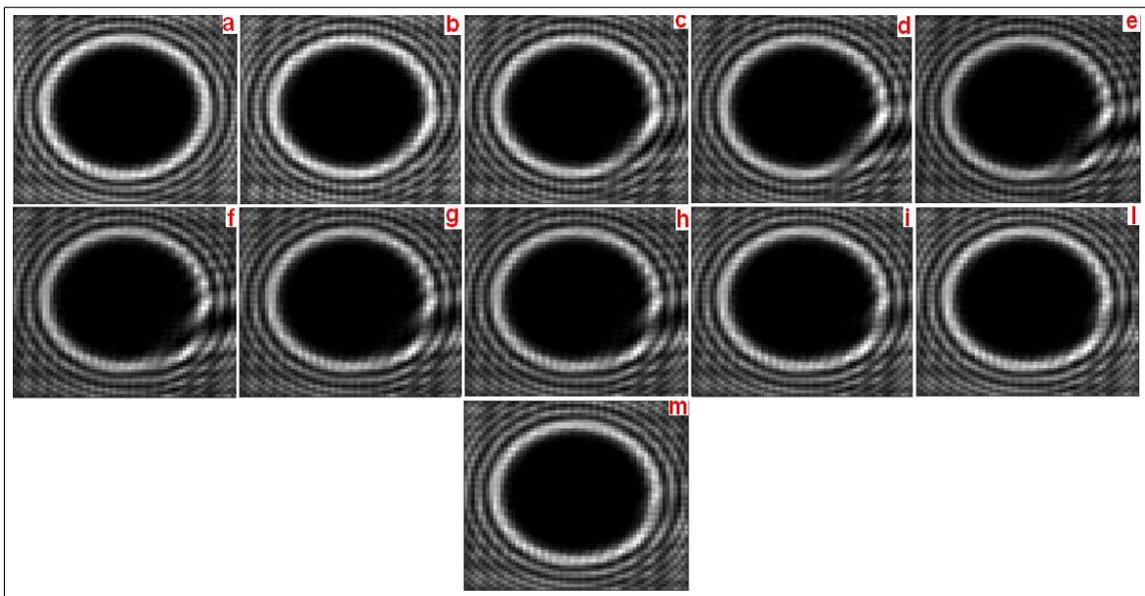


figura 30: Imágenes teóricas en intensidad: De izquierda a derecha superior(a-e) para los valores de carga $p = 16,0, 16,1, 16,2, 16,3$ y $16,4$, y de izquierda a derecha inferior(f-m) para valores de $p = 16,5, 16,6, 16,7, 16,8, 16,9$ y $17,0$.

0.12 Resultados para el haz con MAO. Medidas de fase.

Las figuras 3.8a hasta 3.8l muestran las imágenes obtenidas para la interferencia de un haz con MAO entero originado en un tenedor con carga topológica $p = 2, 4, 6, \dots, 20$, y un haz de referencia Gaussiano; las cuales fueron obtenidas mediante la implementación del montaje experimental de fase descrito en la sección 2.4 del capítulo anterior. De acuerdo con estas imágenes se observa las figuras del tenedor entero reconstruidas con su correspondiente valor de fase, así por ejemplo si tomamos un perfil ampliado de la interferencia para los hologramas con carga 3, 6 y 10 (figuras 3.9a-3.9c respectivamente) veremos como al hacer el conteo para encontrar la carga según el procedimiento ilustrado en la sección 1.3 obtenemos que los valores hallados están en correspondencia con las cargas o valor de momento angular orbital ya conocido con anterioridad, es decir poseerán fases de 6π , 12π y 20π respectivamente.

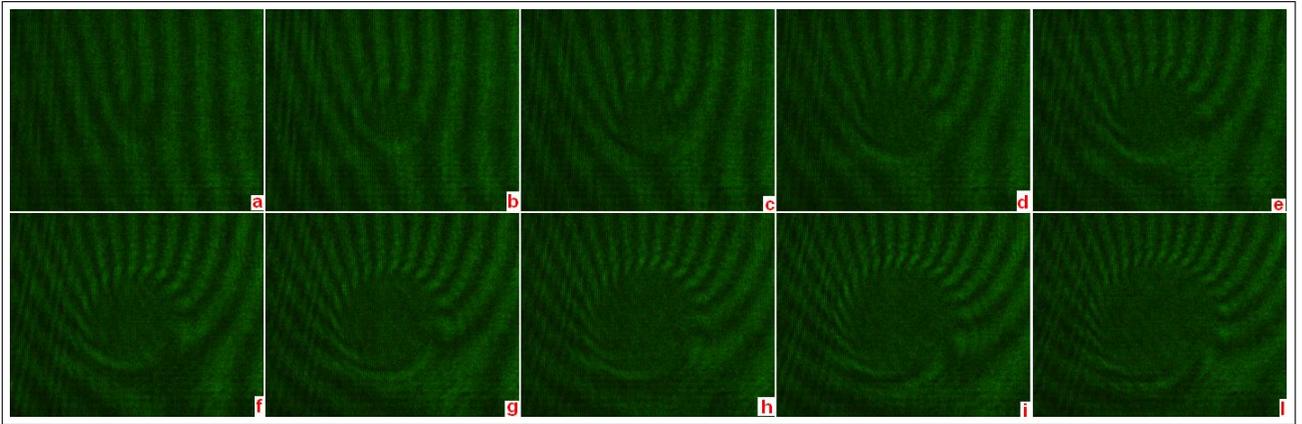


figura 31: Imágenes de fase: De izquierda a derecha superior(a-e) para los valores de carga $p = 2, 4, 6, 8$ y 10; y De izquierda a derecha inferior(f-m) para valores de $p = 12, 14, 16, 18$ y 20.

Ahora por otro lado, tomando el mismo montaje sólo que ahora para hologramas en forma de tenedor no entero, obtenemos las imágenes mostradas en la figura 3.10(a-m) para la evolución de la carga topológica a razón de 0,1 en el intervalo de [5-6]. En las imágenes se puede apreciar como conforme aumenta el valor de la carga desde $p = 5$ (figura 3.10a), empieza a formarse un nuevo diente de tenedor hasta consolidarse en $p = 6$ (3.10m); dicho proceso de transición es seguido a través de los círculos mostrados en cada figura a partir de la imagen 3.10e. Lo

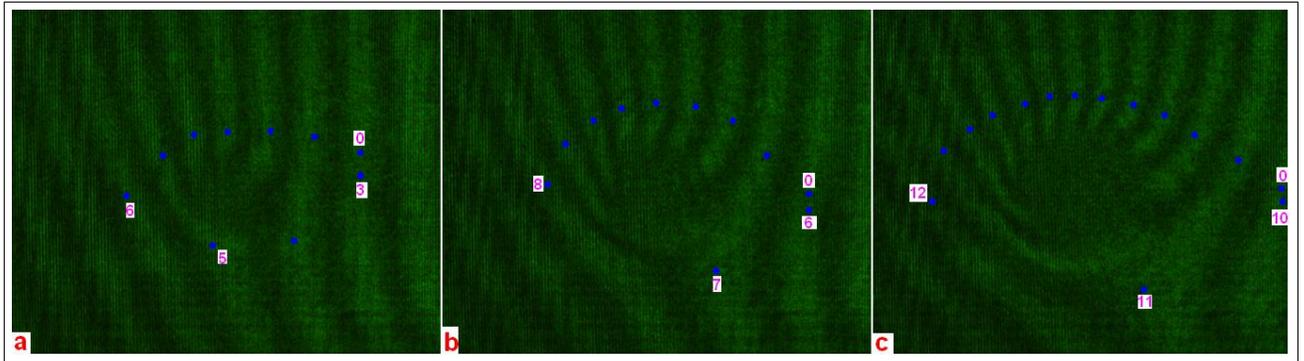


figura 32: Imágenes de fase ampliadas para cargas 3, 6 y 10 con valores de fase de 6π , 12π y 20π respectivamente.

anterior es consecuencia del aumento del valor de la fase en $2\pi/5$ a partir de la figura 3.b y que culmina con el cambio en la fase de 10π a 12π como se puede notar al hacer conteo de la carga en las imágenes inicial y final.

Finalmente debe señalarse el hecho de que las imágenes de interferencia aparezcan rotadas implica necesariamente que la onda de referencia posee una inclinación, dado que se asume que el haz con MAO para ambos casos (entero y no entero) no posee inclinación respecto de un eje horizontal; por tanto también sería posible a partir del interferograma deducir el ángulo de orientación de la onda de referencia.

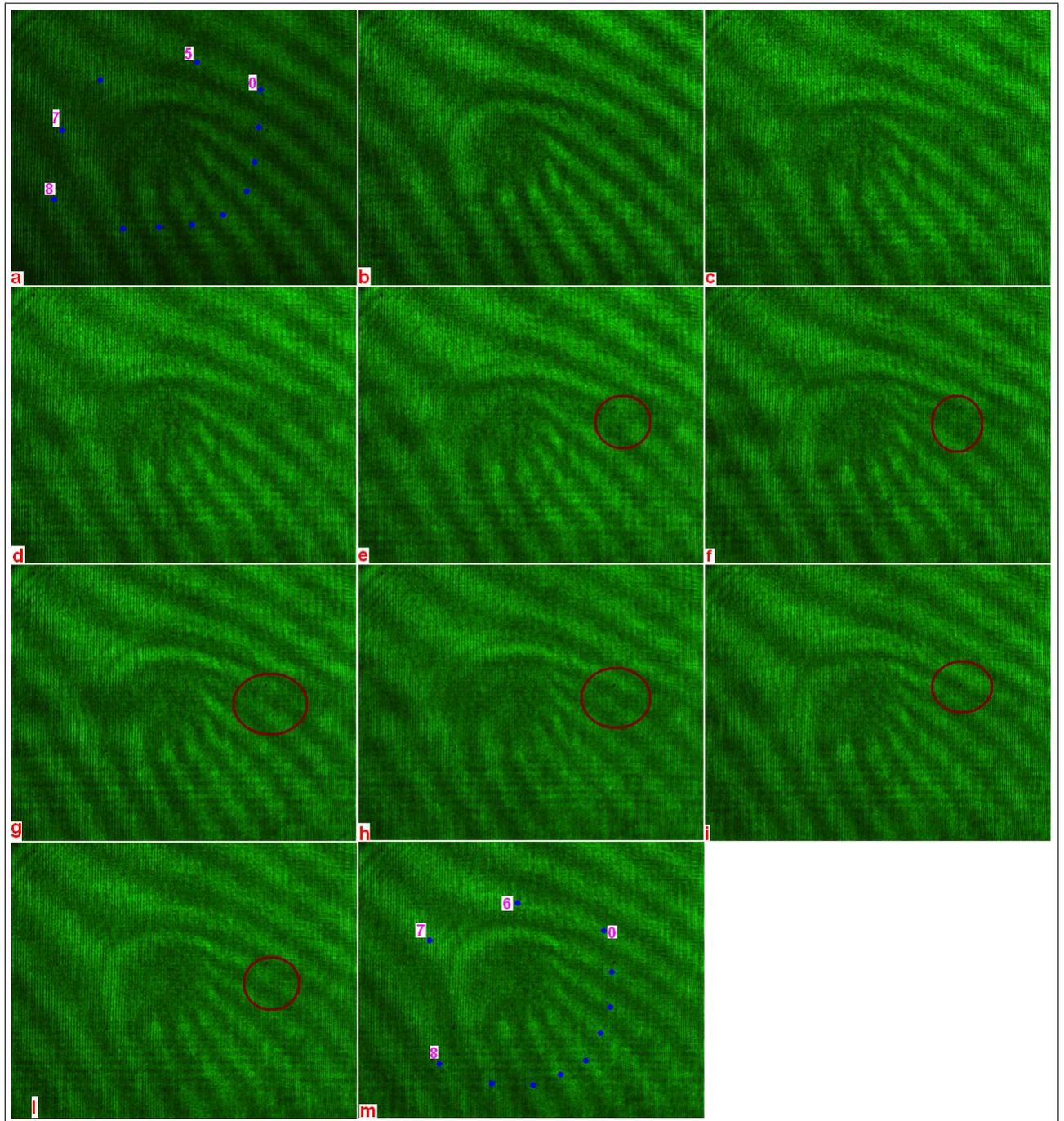


figura 33: Imágenes de fase para MAO no entero.

CONCLUSIONES

0.13 Conclusiones

En el presente trabajo se estudió de manera teórica y experimental la generación y propagación de un haz con momento angular orbital entero y no entero. Para hacer esto, se dividió el contenido de este trabajo en tres capítulos fundamentales, cada uno con conclusiones y resultados relacionados entre sí. Por tanto las conclusiones pueden ser divididas en dos bloques:

Teóricas:

- Se analizó la estructura de campo de un haz con MAO entero dentro y fuera del régimen de propagación paraxial a través del uso de óptica electromagnética.
- Se analizó la estructura de campo de un haz con MAO no entero a través del uso de la teoría cuántica aplicada en óptica.
- Se establecieron las condiciones para la generación de un haz con MAO entero y un haz con MAO no entero mediante el uso de la técnica de hologramas en forma de tenedor.
- Se establecieron resultados teóricos predichos para la intensidad de un haz con MAO entero y un haz con MAO no enteron al ser generado a través de hologramas en forma de tenedor.

Experimentales:

- Se ajustaron las condiciones óptimas en el modo de modulación acoplado para el contraste y el brillo de la matriz del MSL.
- Se ajustaron las condiciones para generar un haz con MAO entero y un haz con MAO no entero usando un holograma dinámico en forma de tenedor creado por un MSL.
- Se implementó un montaje para la detección de un haz con MAO entero y un haz con MAO no entero en intensidad, obteniéndose una completa correspondencia de las figuras predichas en intensidad por la teoría y el experimento como se apreciaba para las figuras 3.1 y 3.2 en el caso de MAO entero y 3.4, 3.5 y 3.6, 3.7 respectivamente para un haz con MAO no entero.
- Se determinó para las figuras con MAO entero un radio promedio experimental a campo casi lejano comparado posteriormente con el mismo valor teórico en el régimen de lejano y se obtuvo que su razón es muy cercana a la unidad, con un error que no supera el 18%. Vale la pena subrayar que el aumento de la carga topológica permite obtener imágenes experimentales más contrastadas mejorando el cálculo del radio experimental y reduciendo el error asociado a las medidas experimentales. Sin embargo la no correspondencia en exactitud entre los valores experimentales y teóricos es originada del hecho de la aproximación de casi lejano, en la cual se ha supuesto que la abertura que difracta es el pixel cuyo tamaño es de micras y no la abertura de la matriz cuyo tamaño es de milímetros y posee un régimen de campo lejano de distancias mayores a 435[m][5].
- Se implementó un montaje para analizar la estructura de fase de un haz con MAO entero y un haz con MAO no entero se obtuvieron resultados explicados mediante los conceptos previamente establecidos acerca del MAO.

Éste último dispositivo permite prever su uso eventual en codificación de la información sobre el MAO por un único canal.

APÉNDICE 1

Para solucionar la ecuación paraxial en coordenadas cilíndricas, lo haremos a través del método de separación de variables, es decir suponiendo u como una multiplicación de tres funciones independientes en las coordenadas: $R(r), \Theta(\theta), e^{iZ(z)}$ por una función $u_g = (A/q(z))e^{-i\frac{kr^2}{2q(z)}}$, siendo $q(z)$ una función compleja[14]. Se cumple que u_g es solución de la ecuación paraxial[13]. Entonces en coordenadas cilíndricas la ecuación paraxial tiene la forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r, \theta, z) + 2ik \frac{\partial u(r, \theta, z)}{\partial z} = 0. \quad (112)$$

Introduciendo $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)e^{iZ(z)}u_g$ en la ecuación anterior tendremos que:

$$\Theta e^{iZ} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Ru_g) + \frac{\Theta e^{iZ}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Ru_g) + \frac{Re^{iZ}u_g}{r^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + 2ikR\Theta \frac{\partial}{\partial z} (e^{iZ}u_g) = 0, \quad (113a)$$

$$\begin{aligned} \Theta e^{iZ} \left[u_g \frac{d^2R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr} \frac{\partial u_g}{\partial r} + R \frac{\partial^2 u_g}{\partial r^2} \right] + \frac{\Theta e^{iZ}}{r} \left[u_g \frac{dR}{dr} + R \frac{\partial u_g}{\partial r} \right] + \frac{Re^{iZ}u_g}{r^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \\ + 2ikR\Theta e^{iZ} \frac{\partial u_g}{\partial z} - 2kR\Theta e^{iZ} u_g \frac{dZ}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (113b)$$

$$\begin{aligned} R\Theta e^{iZ} \left[\frac{\partial^2 u_g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{du_g}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial \theta^2} + 2ik \frac{\partial u_g}{\partial z} \right] + \Theta e^{iZ} \left[u_g \frac{d^2R}{dr^2} - \frac{2ikr}{q} u_g \frac{dR}{dr} + \frac{u_g}{r} \frac{dR}{dr} \right] \\ + \frac{Re^{iZ}u_g}{r^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - 2kR\Theta e^{iZ} u_g \frac{dZ}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (113c)$$

Donde hemos reagrupado y usado que $\frac{\partial u_g}{\partial r} = -\frac{ikr}{q}u_g$. Ahora dado que u_g satisface la ecuación paraxial entonces:

$$\left[\frac{\partial^2 u_g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial \theta^2} + 2ik \frac{\partial u_g}{\partial z} \right] = 0. \quad (114)$$

De manera que multiplicando los términos restante por $\frac{r^2}{R\Theta e^{iZ}u_g}$, tenemos que:

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{2ik}{q} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - 2kr^2 \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (115)$$

Dado que el término referente a θ es independiente sin pérdida de la generalidad podemos decir que:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -l^2 \implies \Theta(\theta) = e^{il\theta}. \quad (116)$$

Así que la ecuación se modifica al introducir este resultado y multiplicar por $1/r^{213}$ a:

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{2ikr}{q} \right) \frac{dR}{dr} \right] - \frac{l^2}{r^2} - 2k \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (117)$$

Sí hacemos a $t = r/w$, donde w es la cintura del haz a una distancia z [13] y es igual a:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}, \quad (118)$$

siendo $w_0 = (\lambda z_0)^{1/2}/(\pi)^{1/2}$ el *beamwaist* de haz y z_0 la distancia de Rayleigh[13,14], entonces las derivadas de R con respecto a r se transforman en:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{w} \frac{dR}{dt}, \quad (119a)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{w} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) \frac{dt}{dr} = \frac{1}{w^2} \frac{d^2R}{dt^2}. \quad (119b)$$

Luego la ecuación (A.6) se transforma en:

$$\frac{1}{R} \left[\frac{1}{w^2} \frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{1}{w^2t} - \frac{2ik}{q} t \right) \frac{dR}{dt} \right] - \frac{l^2}{w^2t^2} - 2k \frac{dZ}{dz} = 0, \quad (120a)$$

$$\frac{1}{w^2} \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} - \frac{2ikw^2}{q} \right) \frac{dR}{dt} \right] - \frac{l^2}{t^2} - 2kw^2 \frac{dZ}{dz} \right\} = 0, \quad (120b)$$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} - \frac{2ikw^2}{q} \right) \frac{dR}{dt} \right] - \frac{l^2}{t^2} - 2kw^2 \frac{dZ}{dz} = 0, \quad (120c)$$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2R}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} - 4t \right) \frac{dR}{dt} \right] - \frac{l^2}{t^2} - 2kw^2 \frac{dZ}{dz} = 0. \quad (120d)$$

En donde hemos factorizado $1/w^2(z)$ y usado que $jk/2q(z) = 1/w^2$ [14]. Dado que el último término de la ecuación anterior es el único que depende z , entonces tendremos que:

$$-2kw^2 \frac{dZ}{dz} = -d \implies 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] dZ = ddz, \quad (121a)$$

$$\int dZ = \frac{d}{4} \int \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} dz, \quad (121b)$$

$$Z(z) = \frac{d}{4} \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (121c)$$

¹³Para r diferente de cero

Donde c es una constante cualquiera cuyo valor no ha sido aún fijado. Introduciendo este resultado en la ecuación (A.9d) obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} - 4t\right) \frac{dR}{dt} + \left(d - \frac{l^2}{t^2}\right) R = 0. \quad (122)$$

Haciendo la sustitución $s = 2t^2$, se tendrá que:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dt} = 4t \frac{dR}{ds}, \quad (123a)$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4 \frac{dR}{ds} + 16t^2 \frac{d^2 R}{ds^2}. \quad (123b)$$

Por lo tanto la ecuación (A.11) toma la forma:

$$16t^2 \frac{d^2 R}{ds^2} + (4 + 4 - 16t^2) \frac{dR}{ds} + \left(d - \frac{l^2}{t^2}\right) R = 0, \quad (124a)$$

$$8s \frac{d^2 R}{ds^2} + 8(1 - s) \frac{dR}{ds} + \left(d - \frac{2l^2}{s^2}\right) R = 0. \quad (124b)$$

Ahora si elegimos a $d = 8p + 4l$ donde p por ahora es un número real y se sustituye en la ecuación anterior se llega a:

$$s \frac{d^2 R}{ds^2} + (1 - s) \frac{dR}{ds} + \left(p + \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4s^2}\right) R = 0. \quad (125)$$

Asumimos como solución de la ecuación anterior el producto de las funciones:

$$R(s) = s^{l/2} v(s), \quad (126)$$

entonces obtendremos:

$$\frac{dR}{ds} = \left(\frac{l}{2s} v + v'\right) s^{l/2}. \quad (127a)$$

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = \left[v'' + \frac{l}{s} v' + \frac{l}{2s^2} \left(\frac{l}{2} - 1\right) v\right] s^{l/2}, \quad (127b)$$

en donde $v' = dv/ds$ y $v'' = d^2v/ds^2$. Por tanto la ecuación (A.14) se transforma en:

$$s^{l/2} \left[s \frac{d^2 v}{ds^2} + (l + 1 - s) \frac{dv}{ds} + pv \right] = 0. \quad (128)$$

Dado que s es diferente de cero para no obtener una solución trivial se llega finalmente a la ecuación:

$$s \frac{d^2 v}{ds^2} + (l + 1 - s) \frac{dv}{ds} + pv = 0. \quad (129)$$

La ecuación anterior es la ecuación asociada de laguerre[16], Por lo tanto la solución son los polinomios asociados de Laguerre:

$$v(s) = L_p^l(s) = \sum_{m=0}^p (-1)^m \frac{(l+p)!}{(p-m)!(l+m)!m!} s^m. \quad (130)$$

Donde l y p son números enteros. De acuerdo a la sustituciones realizadas se concluye que la parte radial $R(r)$ es:

$$R(r) = (2t^2)^{l/2} L_p^l(2t^2) = \left(\sqrt{2} \frac{r}{w(z)} \right)^l L_p^l \left(2 \frac{r^2}{w^2(z)} \right). \quad (131)$$

Por la tanto la distribución de campo u es:

$$u(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) e^{iZ(z)} u_g, \quad (132a)$$

$$u(r, \theta, z) = \left(\sqrt{2} \frac{r}{w(z)} \right)^l L_p^l \left(2 \frac{r^2}{w^2(z)} \right) e^{-il\theta} e^{i\frac{d}{4} \arctan(z/z_0)} (A/q(z)) e^{-i\frac{kr^2}{2q(z)}}, \quad (132b)$$

$$u(r, \theta, z) = \frac{C_{lp}^{LG}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}l}{w(z)} \right)^l e^{\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)} L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{\left(\frac{-ikr^2 z}{2(z^2+z_0^2)^2}\right)} e^{-il\phi} e^{[i(2p+l+1) \arctan(z/z_0)]}. \quad (132c)$$

En donde se ha utilizado que $1/q(z) = w_0/(z_0 w(z)) e^{i \arctan(z/z_0)}$. La constante C_{lp}^{LG} es una constante de normalización:

$$C_{lp}^{LG} = \left(\frac{2p!}{\pi(p+|l|!)} \right), \quad (133)$$

es elegida tal que la integral del módulo de la distribución de campo sobre el plano transversal a la propagación del mismo sea igual a 1[19].

APÉNDICE 2

Para hallar la amplitud del campo $E(r, z)$ asumimos que cada componente satisface la ecuación de Helmholtz independiente del tiempo[3], entonces haciendo uso del método de separación de variables[4] para $E(r, z) = E_r(r)E_z(z)$ se tiene que:

$$\nabla^2 \left(\alpha E(r, z) e^{il\theta} \right) + k^2 \alpha E(r, z) e^{il\theta} = 0, \quad (134a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_r E_z e^{il\theta} + k^2 E_r E_z e^{il\theta} = 0, \quad (134b)$$

$$E_z e^{il\theta} \left(\frac{d^2 E_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_r}{dr} \right) - \frac{l^2 E_r E_z}{r^2} e^{il\theta} + E_r e^{il\theta} \frac{d^2 E_z}{dz^2} + k^2 E_r E_z e^{il\theta} = 0. \quad (134c)$$

Dividiendo lo anterior entre $E(r, z) e^{il\theta}$, se llega a:

$$\left[\frac{1}{E_r} \left(\frac{d^2 E_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_r}{dr} \right) - \frac{l^2}{r^2} \right] + \frac{1}{E_z} \frac{d^2 E_z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (135)$$

Lo anterior implica que:

$$\frac{1}{E_z} \frac{d^2 E_z}{dz^2} = -k_1^2 \implies \frac{d^2 E_z}{dz^2} = -k_1^2 E_z \implies E_z(z) = e^{ik_1 z}. \quad (136)$$

Luego si hacemos a $\kappa^2 = k^2 - k_1^2$, tendremos que:

$$\left[\frac{1}{E_r} \left(\frac{d^2 E_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_r}{dr} \right) - \frac{l^2}{r^2} \right] - k_1^2 + k^2 = 0, \quad (137a)$$

$$\frac{d^2 E_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_r}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) E_r = 0, \quad (137b)$$

$$r^2 \frac{d^2 E_r}{dr^2} + r \frac{dE_r}{dr} + (r^2 \kappa^2 - l^2) E_r = 0. \quad (137c)$$

La ecuación anterior es la ecuación diferencial de Bessel[25], de manera que su solución es:

$$E_r = E_r(\kappa r) = J_l(\kappa r) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(m+l+1)} \left(\frac{\kappa r}{2} \right)^{2m+l}. \quad (138)$$

Siendo J_l las funciones de Bessel de primera especie y orden l . Por tanto se tendrá que:

$$E(r, z) = J_l(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z}. \quad (139)$$

Pero dado que podemos generalizar si sumamos sobre todas las ondas planas no evanescentes transversales ($\kappa < k$) [5] con una función de peso $E(\kappa)$ que conforman el haz propagándose entonces se llega finalmente a que:

$$E(r, \theta, z) = e^{i\theta} \int_0^k E(\kappa) J_l(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa. \quad (140)$$

Ahora para hallar E_z tomemos la condición de transversabilidad de \vec{E} en coordenadas cilíndricas, es decir:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (141)$$

dado que el campo se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{E} = \left[(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \hat{r} + (\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta) \hat{\theta} \right] e^{i\theta} \int_0^k E(\kappa) J_l(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa + E_z \hat{z}. \quad (142)$$

Entonces tendremos que:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = e^{i\theta} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \int_0^k E(\kappa) \left(\frac{dJ_l(\kappa r)}{dr} \right) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa, \quad (143)$$

como $J_{l-1}(\kappa r) - J_{l+1}(\kappa r) = \frac{2}{\kappa} \frac{dJ_l(\kappa r)}{dr}$ [25], entonces:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = \frac{(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)}{2} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) - J_{l+1}(\kappa r)) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa. \quad (144)$$

mientras que:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} = \left[\beta (i l \cos \theta - \sin \theta) e^{i\theta} - \alpha (i l \sin \theta + \cos \theta) e^{i\theta} \right] \int_0^k E(\kappa) J_l(\kappa r) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa. \quad (145)$$

Dado que $J_{l-1}(\kappa r) + J_{l+1}(\kappa r) = \frac{2l}{\kappa r} J_l(\kappa r)$ [25], entonces:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} = \frac{[\beta (i l \cos \theta - \sin \theta) - \alpha (i l \sin \theta + \cos \theta)]}{2l} r e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) + J_{l+1}(\kappa r)) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa. \quad (146)$$

Por lo tanto la ecuación (B.8) se convierte en:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) - J_{l+1}(\kappa r)) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa + \\ & \frac{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}{2lr} r e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) + J_{l+1}(\kappa r)) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa + \\ & \frac{\beta (i l \cos \theta - \sin \theta) - \alpha (i l \sin \theta + \cos \theta)}{2lr} r e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) + J_{l+1}(\kappa r)) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Si llamamos a $S(\kappa) \equiv \kappa E(\kappa) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z}$, obtendremos que:

$$= \frac{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) - J_{l+1}(\kappa r)) d\kappa + \frac{i(\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta)}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) (J_{l-1}(\kappa r) + J_{l+1}(\kappa r)) d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (148a)$$

$$= \frac{\alpha \cos \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa - \frac{\beta \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa - \frac{\alpha \cos \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\beta \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + i \frac{\beta \cos \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa - i \frac{\alpha \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa + i \frac{\beta \cos \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa - i \frac{\alpha \sin \theta}{2} e^{i\theta} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (148b)$$

$$= [\alpha(\cos \theta - i \sin \theta) + i\beta(\cos \theta - i \sin \theta)] \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + [-\alpha(\cos \theta + i \sin \theta) + i\beta(\cos \theta + i \sin \theta)] \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (148c)$$

$$= (\alpha e^{-i\theta} + i\beta e^{-i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^k S(\kappa) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + (-\alpha e^{i\theta} + i\beta e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{2} \int_0^k S(\kappa) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (148d)$$

$$= \frac{(\alpha + i\beta)}{2} e^{-i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + \frac{(-\alpha + i\beta)}{2} e^{i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} J_{l+1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (148e)$$

Finalmente integrando indefinidamente con respecto a z se tendrá que la componente E_z es:

$$E_z = -\frac{\alpha + i\beta}{2} e^{-i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) \left(\int e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} dz \right) J_{l-1}(\kappa r) d\kappa - \frac{-\alpha + i\beta}{2} e^{i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \kappa E(\kappa) \left(\int e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} dz \right) J_{l+1}(\kappa r) d\kappa, \quad (149a)$$

$$= -\frac{\alpha + i\beta}{2i} e^{-i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \frac{\kappa E(\kappa)}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} J_{l-1}(\kappa r) d\kappa + \frac{\alpha - i\beta}{2i} e^{i\theta} e^{i\theta} \int_0^k \frac{\kappa E(\kappa)}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} J_{l+1}(\kappa r) d\kappa, \quad (149b)$$

$$E_z = \int_0^k \frac{\kappa E(\kappa)}{2\sqrt{k^2 - \kappa^2}} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} \left[(i\alpha - \beta) e^{-i\theta} J_{l-1}(\kappa r) - (i\alpha + \beta) e^{i\theta} J_{l+1}(\kappa r) \right] e^{i\theta} d\kappa. \quad (149c)$$

Por lo tanto el campo eléctrico total es:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \int_0^k E(\kappa) e^{i\theta} e^{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z} \left\{ (\alpha \hat{x} + \beta \hat{y}) J_l(\kappa r) + \frac{\kappa}{2\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \left[(i\alpha - \beta) e^{-i\theta} J_{l-1}(\kappa r) - (i\alpha + \beta) e^{i\theta} J_{l+1}(\kappa r) \right] \hat{z} \right\} d\kappa. \quad (150a)$$

APÉNDICE 3

Basados en la consideraciones mostradas en la sección 1.3 acerca de los haces no paraxiales, es decir que no satisfacen la ecuación paraxial[1], se prueba como se puede llevar al caso del régimen paraxial, con particular atención en la conversión a los modos Laguerre-Gauss. Dado que la forma general del campo eléctrico en la ecuación (1.48a) depende de la función $E(\kappa)$ y que dicha función debe hacer la energía, momento lineal y momento angular por unidad de longitud finitos como requerimiento físico, entonces $E(\kappa)$ es escogida para tender a cero cuando $\kappa \rightarrow 0$ [27]. De manera que $E(\kappa)$ puede ser:

$$E(\kappa) = C_{lp} e^{-\frac{k\kappa^2 z_o}{2(k^2 - \kappa^2)}} \left(\frac{\kappa^2}{k^2 - \kappa^2} \right)^{(2p+l+1)/2} \left(\frac{k^2}{k^2 - \kappa^2} \right)^{1/2}. \quad (151)$$

Donde C_{lp} es una constante para el haz y z_o es una escala de longitud que en el límite paraxial esta asociada con la longitud o distancia de Rayleigh[13,14]. Insertando estas expresión para la energía por unidad de longitud obtenemos:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} |C_{lp}|^2 \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_o}{(k^2 - \kappa^2)}} \left(\frac{\kappa^2}{k^2 - \kappa^2} \right)^{(2p+l+1)} \left(\frac{k^2}{k^2 - \kappa^2} \right) \left(\frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa(k^2 - \kappa^2)} \right) d\kappa, \quad (152a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} |C_{lp}|^2 k^2 \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_o}{(k^2 - \kappa^2)}} \left(\frac{\kappa^{2(2p+l)+1}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} \right) (2k^2 - \kappa^2) d\kappa, \quad (152b)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} |C_{lp}|^2 k^2 \int_0^k \left[2k^2 e^{-\frac{k\kappa^2 z_o}{(k^2 - \kappa^2)}} \frac{\kappa^{2(2p+l)+1}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} - e^{-\frac{k\kappa^2 z_o}{(k^2 - \kappa^2)}} \frac{\kappa^{2(2p+l)+3}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} \right] d\kappa. \quad (152c)$$

Ahora introduzcamos la variable x en función de κ :

$$x \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \implies dx = \frac{k^2 - \kappa^2 + \kappa^2}{(k^2 - \kappa^2)^{3/2}} d\kappa = \frac{k^2}{(k^2 - \kappa^2)^{3/2}} d\kappa. \quad (153)$$

Además sí $\kappa = 0 \rightarrow x = 0$ y sí $\kappa = k \rightarrow x \rightarrow \infty$. De manera que realizando las anteriores integrales tendremos que:

$$I_1 = 2 \int_0^k k^2 e^{-\frac{k\kappa^2 z_0}{(k^2 - \kappa^2)}} \frac{\kappa^{2(2p+l)+1}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} d\kappa, \quad (154a)$$

$$= 2 \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_0}{(k^2 - \kappa^2)}} \frac{\kappa^{2(2p+l)+1}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} \frac{k^2 (k^2 - \kappa^2)^{3/2}}{(k^2 - \kappa^2)^{3/2}} d\kappa, \quad (154b)$$

$$= \frac{2}{k^2} \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_0}{(k^2 - \kappa^2)}} \left(\frac{\kappa^{2(2p+l)+1}}{(k^2 - \kappa^2)^{\frac{2(2p+l)+1}{2}}} \right) \frac{1}{k^2 - \kappa^2} \left(\frac{k^2}{(k^2 - \kappa^2)^{3/2}} \right), \quad (154c)$$

$$I_1 = \frac{2}{k^2} \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2s+1} (x^2 + 1) dx. \quad (154d)$$

En donde hemos usado que $\kappa^2 = \frac{k^2}{x^2+1}$ y hecho a $s \equiv 2p + l$ y $a \equiv kz_0$. Así que:

$$I_1 = \frac{2}{k^2} \left[\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2s+3} dx + \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2s+1} dx \right], \quad (155a)$$

$$I_1 = I_{11} + I_{12}. \quad (155b)$$

Ahora evaluando I_{11} y I_{12} con el uso de la integral[25]:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2l+1} dx = \frac{l!}{2a^{l+1}}, \quad (156)$$

Entonces:

$$I_{11} = \frac{2}{k^2} \left(\frac{(s+1)!}{2a^{s+2}} \right) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{(2p+l+1)!}{(kz_0)^{2p+l+2}} \right); \quad (157)$$

é

$$I_{12} = \frac{2}{k^2} \left(\frac{(s)!}{2a^{s+1}} \right) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{(2p+l)!}{(kz_0)^{2p+l+1}} \right). \quad (158)$$

Mientras que:

$$I_2 = - \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_0}{(k^2 - \kappa^2)}} \frac{\kappa^{2(2p+l)+3}}{(k^2 - \kappa^2)^{2p+l+3}} d\kappa, \quad (159a)$$

$$= - \frac{1}{k^2} \int_0^k e^{-\frac{k\kappa^2 z_0}{(k^2 - \kappa^2)}} \left(\frac{\kappa^{2(2p+l)+3}}{(k^2 - \kappa^2)^{\frac{2(2p+l)+3}{2}}} \right) \left(\frac{k^2}{(k^2 - \kappa^2)^{3/2}} \right) d\kappa, \quad (159b)$$

$$I_2 = - \frac{1}{k^2} \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2s+3} dx = - \frac{1}{2} I_{11} = - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{(2p+l+1)!}{(kz_0)^{2p+l+2}} \right). \quad (159c)$$

Por lo tanto la energía por unidad de longitud será:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} |C_{lp}|^2 \left[\frac{(2p+l+1)!}{(kz_0)^{2p+l+2}} + \frac{(2p+l)!}{(kz_0)^{2p+l+1}} - \frac{(2p+l+1)!}{2(kz_0)^{2p+l+2}} \right], \quad (160a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 \pi}{2} |C_{lp}|^2 (2p+l)! (kz_0)^{-(2p+l+1)} \left(1 + \frac{2p+l+1}{2kz_0} \right). \quad (160b)$$

En donde se ha utilizado que $(2p+l+1)! = (2p+l+1)(2p+l)!$. Análogamente se encuentra que el momento angular por unidad de longitud es:

$$\mathcal{L}_z = \frac{(l+\sigma)}{\omega} \mathcal{E} + \frac{\sigma \epsilon_0 \pi}{4\omega} |C_{lp}|^2 (2p+l+1)! (kz_o)^{-(2p+l+2)}. \quad (161)$$

Ahora tomando la razón entre estas dos últimas cantidades se obtiene que:

$$\frac{\mathcal{L}_z}{\mathcal{E}} = \frac{l+\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega} \left(\frac{2kz_o}{2p+l+1} + 1 \right)^{-1}, \quad (162)$$

en límite paraxial, la distancia z_o es mucho mayor que la longitud de onda del haz en el espectro visible, es decir que $kz_o \gg 1$ [27,32] y por tanto se obtiene nuevamente el resultado paraxial:

$$\frac{\mathcal{L}_z}{\mathcal{E}} = \frac{l+\sigma}{\omega}. \quad (163)$$

Por otro lado se puede obtener una expresión para $E(\kappa)$ en límite paraxial sí se consideran despreciables los términos de orden igual o superior a $(\kappa/k)^2$ [27]. Lo anterior implica poder considerar un *beamwaist* grande y por tanto una distancia z_o mayor que la longitud de onda del haz, retomando con esto las soluciones del campo eléctrico para las ecuaciones de maxwell en el límite paraxial [2,3]. De manera que utilizando las expansiones en serie de Taylor [25], las siguientes expresiones se aproximan a:

$$\sqrt{k^2 - \kappa^2} = k \left[1 - \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 \right] = \kappa \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 + \dots \right] \approx k - \frac{\kappa^2}{2k}. \quad (164a)$$

$$(k^2 - \kappa^2)^{-1} = \frac{1}{k^2} \left[1 - \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{k^2} \left[1 + \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 - \dots \right] \approx \frac{1}{k^2}. \quad (164b)$$

Luego la función $E(\kappa)$ adopta la forma:

$$E(\kappa) = C_{lp} e^{ikz} e^{-\frac{\kappa^2 z_o}{2k}} \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{2p+l+1}. \quad (165)$$

Así que el campo eléctrico en el régimen no paraxial en las componentes x y y , será utilizando lo anterior y las formulas definidas [33] para este tipo de integrales:

$$E_x = \alpha C_{lp} e^{i\theta} e^{ikz} \int_0^\infty e^{-\frac{\kappa^2}{2k}(z_o+iz)} \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{2p+l+1} J_l(\kappa r), \quad (166a)$$

$$E_x = \frac{\alpha C_{lp} p!}{2} e^{i\theta} e^{ikz} k \left(\frac{kr}{2} \right)^l \left(\frac{2}{k(z_o+iz)} \right)^{p+l+1} e^{\frac{kr^2}{2(z_o+iz)}} L_p^l \left(\frac{kr^2}{2(z_o+iz)} \right). \quad (166b)$$

y

$$E_y = \beta C_{lp} e^{i\theta} e^{ikz} \int_0^\infty e^{-\frac{\kappa^2}{2k}(z_o+iz)} \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{2p+l+1} J_l(\kappa r), \quad (167a)$$

$$E_y = \frac{\beta C_{lp} p!}{2} e^{i\theta} e^{ikz} k \left(\frac{kr}{2} \right)^l \left(\frac{2}{k(z_o+iz)} \right)^{p+l+1} e^{\frac{kr^2}{2(z_o+iz)}} L_p^l \left(\frac{kr^2}{2(z_o+iz)} \right). \quad (167b)$$

La componente E_z del campo eléctrico es también posible hallarla, sin embargo en este texto no se hace debido a que lo anterior tiene como finalidad probar que se puede reducir a la componente paraxial. Un estudio gráfico de las componentes eléctricas y magnéticas para un haz Laguerre-Gauss es presentado por Arora y Lu en la referencia [34].

APÉNDICE 4

Para resolver las integrales sobre la variable θ , hacemos uso de la identidad de Jacobi-Anger[16,25]:

$$e^{iz \cos \alpha} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\alpha). \quad (168)$$

de manera que sí hacemos $z \rightarrow kr\rho/(z - \xi)$ tendremos,

$$\Phi_0 = \int_0^{2\pi} e^{i \frac{kr\rho}{z-\xi} r \cos(\theta-\phi)} d\theta, \quad (169a)$$

$$= \int_0^{2\pi} J_0(z) d\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} i^n J_n(z) \cos(n(\theta - \phi)) d\theta, \quad (169b)$$

$$\Phi_0 = 2\pi J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \int_0^{2\pi} \cos(n(\theta - \phi)) d\theta, \quad (169c)$$

pero dado que n es un número entero entonces $\int_0^{2\pi} \cos(n(\theta - \phi)) d\theta = 0$, por lo tanto:

$$\Phi_0 = 2\pi J_0(z) = 2\pi J_0\left(\frac{kr\rho}{z - \xi}\right). \quad (170)$$

Mientras que:

$$\Phi_{\pm mp} = \int_0^{2\pi} e^{i \left[\frac{kr\rho_{\pm m}}{z-\xi} r \cos(\theta-\phi_{\pm m}) \pm mp\theta \right]} d\theta, \quad (171)$$

adicionalmente se realizan las sustituciones $B = mp$, $\phi = \phi_{\pm m}$ y $\varphi = \theta - \phi$ luego $d\theta = d\varphi$, además sí $\theta = 0 \rightarrow \varphi_1 = -\phi$ y $\theta = 2\pi \rightarrow \varphi_2 = 2\pi - \phi$. Entonces la última ecuación se transforma en:

$$\Phi_{\pm mp} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{iz \cos \varphi} e^{\pm iB(\varphi+\phi)} d\varphi = e^{\pm iB\phi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{iz \cos \varphi} e^{\pm iB\varphi} d\varphi, \quad (172a)$$

$$= e^{\pm iB\phi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} \left(J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\varphi) \right) d\varphi, \quad (172b)$$

$$\Phi_{\pm mp} = e^{\pm iB\phi} \left[J_0(z) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} d\varphi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} \cos(n\varphi) d\varphi \right], \quad (172c)$$

pero como:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} d\varphi = \pm \frac{1}{iB} e^{\pm iB\varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \pm \frac{1}{iB} e^{\pm iB\phi} (e^{\pm iB2\pi} - 1), \quad (173a)$$

$$= \pm \frac{1}{imp} e^{\pm iB\phi} (\cos(2mp\pi) \pm i \sin(2mp\pi) - 1) = 0. \quad (173b)$$

Puesto que $mp \in \mathbb{Z}$ entonces $\cos(2mp\pi) = 1$ y $\sin(2mp\pi) = 0$. Además,

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} \cos(n\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\cos(n\varphi) \cos(B\varphi) d\varphi] \pm i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\cos(n\varphi) \sin(B\varphi) d\varphi], \quad (174)$$

de acuerdo con la ortogonalidad de las series de Fourier[25]:

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos(n\alpha) \sin(m\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos(n\alpha) \cos(m\alpha) = \pi \delta_{nm} \quad (175)$$

se tendrá que:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\pm iB\varphi} \cos(n\varphi) d\varphi = \pi \delta_{nB}. \quad (176)$$

Por lo tanto:

$$\Phi_{\pm mp} = 2e^{\pm iB\phi} \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \pi \delta_{nB} = 2e^{\pm iB\phi} \pi i^B J_B(z), \quad (177a)$$

$$= 2\pi e^{imp(\pi/2 \pm \phi_m)} J_{mp} \left(\frac{kr\rho \pm m}{z - \xi} \right). \quad (177b)$$

Por otro lado las integrales sobre la parte radial pueden llevarse a cabo utilizando las propiedades de las funciones de Bessel[16]:

$$\int_0^{\infty} J_l(b_0 r) e^{-a^2 r^2} r^{l+1} dr = \frac{b_0^l}{(2a^2)^{l+1}} e^{-\frac{b_0^2}{4a^2}}, \quad (178a)$$

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(b_{\pm m} r) e^{-a^2 r^2} r^{\nu-1} dr = \left(\frac{b_{\pm m}^2}{4a^2} \right)^{\nu/2} \frac{\Gamma((\mu + \nu)/2)}{2a^{\mu} \Gamma(\nu + 1)} M \left(\frac{\nu + \mu}{2}, \nu + 1, -\frac{b_{\pm m}^2}{4a^2} \right); \quad (178b)$$

Siendo $\Gamma()$ la función Gamma y $M()$ la función de Kummer[25]. Así obtendremos que:

$$H_0(\rho) = \int_0^{\infty} J_0 \left(\frac{k\rho}{z - \xi} \right) e^{-i\frac{k}{2} \frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)} r^2} r dr, \quad (179a)$$

$$H_0(\rho) = \left(\frac{k\rho}{z - \xi} \right)^0 \left(\frac{q(\xi)(z - \xi)}{2ikq(z)} \right) e^{-\frac{k\rho^2}{4(z-\xi)^2} \frac{2q(\xi)(z-\xi)}{kq(z)}} = \frac{(z - \xi)q(\xi)}{2ikq(z)} e^{-\frac{kq(\xi)\rho^2}{2(z-\xi)q(z)}}. \quad (179b)$$

y

$$H_{\pm m}(\rho_{\pm m}) = \int_0^{\infty} J_{mp} \left(\frac{k\rho_{\pm m}}{z-\xi} r \right) e^{-i\frac{k}{2} \frac{q(z)}{(z-\xi)q(\xi)} r^2} r dr, \quad (180a)$$

$$= \left(\frac{k\rho_{\pm m}}{z-\xi} \frac{2q(\xi)(z-\xi)}{4kq(z)} \right)^{mp/2} \frac{\Gamma\left(\frac{mp+2}{2}\right)}{2 \left(\frac{kq(z)}{2q(\xi)(z-\xi)} \right)^{\mu} \Gamma(mp+1)} \\ M \left(\frac{mp+2}{2}, mp+1, -\frac{2q(\xi)(z-\xi)k\rho_{\pm m}}{4kq(z)(z-\xi)} \right), \quad (180b)$$

$$H_{\pm m}(\rho_{\pm m}) = \left(\frac{\rho_{\pm m}q(\xi)}{2q(z)} \right)^{mp/2} \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2}+1\right)}{2\Gamma(mp+1)} \left(\frac{2(z-\xi)q(\xi)}{kq(z)} \right)^{\mu} M \left(\frac{mp}{2}+1, mp+1, -\frac{\rho_{\pm m}q(\xi)}{2q(z)} \right). \quad (180c)$$

APÉNDICE 5

Para realizar los cálculos asintóticos de la intensidad para campo lejano utilizamos la propiedad asintótica de las funciones de Bessel de segunda especie. Sí $x \rightarrow 0$, entonces

$$I_\alpha(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha. \quad (181)$$

En nuestro caso $\rho_{\pm m}^2/(2w^2)$ es un valor muy pequeño, de manera que en la expresión,

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = |t_{\pm m}|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{\pi \rho_{\pm m}^2}{4w^2(z)} e^{-\frac{\rho_{\pm m}^2}{w^2(z)}} \left[I_{(mp-1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)}\right) - I_{(mp+1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)}\right) \right]^2; \quad (182)$$

las funciones de Bessel pueden reescribirse como:

$$I_{(mp-1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)}\right) \approx \frac{1}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{4w^2}\right)^{(mp-1)/2}, \quad (183a)$$

$$I_{(mp+1)/2} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{2w^2(z)}\right) \approx \frac{1}{\left(\frac{mp+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)} \left(\frac{\rho_{\pm m}^2}{4w^2}\right)^{(mp+1)/2}. \quad (183b)$$

Mientras su diferencia es

$$[I_{(mp-1)/2} - I_{(mp+1)/2}]^2 \approx \frac{\rho_{\pm m}^2}{2^{2mp} w^{2mp} \Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)} \left[\frac{2w}{\rho_{\pm m}} - \frac{\rho_{\pm m}}{(mp+1)w} \right]^2, \quad (184a)$$

$$[I_{(mp-1)/2} - I_{(mp+1)/2}]^2 \approx \frac{4w^2 \rho_{\pm m}^2}{2^{2mp} w^{2mp} \rho_{\pm m}^2 \Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)} \left[1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \right]^2. \quad (184b)$$

Adicionalmente la parte exponencial se aproxima a:

$$e^{-\frac{\rho_{\pm m}^2}{w^2(z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\rho_{\pm m}^2}{w^2(z)}\right)^n = 1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{w^2} + \frac{\rho_{\pm m}^4}{2w^4} - \dots \approx 1. \quad (185)$$

Por lo tanto la intensidad de campo lejano se convierte en:

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) \approx \frac{|t_{\pm m}|^2}{4} \Gamma^{-2} \left(\frac{mp+1}{2}\right) \left[\frac{1}{4w^2(z)}\right]^{mp} \rho_{\pm m}^{2mp} \left[1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2}\right]^2. \quad (186)$$

Ahora podemos hallar el radio del m -ésimo modo con MAO, tomando el punto máximo de la intensidad de campo, es decir derivando con respecto $\rho_{\pm m}$ a \mathbf{I} e igualando a cero. De manera que obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{d\rho_{\pm m}} &= |t_{\pm m}|^2 4\Gamma^{-2} \left(\frac{mp+1}{2} \right) \left[\frac{1}{4w^2(z)} \right]^{mp} 2\rho_{\pm m}^{2mp} \left(1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \right) \\ &\quad \left[\frac{mp}{\rho_{\pm m}} \left(1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \right) - \frac{\rho_{\pm m}}{(mp+1)w^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (187a)$$

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\rho_{\pm m}} = \rho_{\pm m}^{2mp-1} \left(1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \right) \left[1 - \frac{(mp+2)}{2mp(mp+1)w^2} \rho_{\pm m}^2 \right] = 0. \quad (187b)$$

De allí pueden extraerse los puntos críticos:

$$1 - \frac{\rho_{\pm m}^2}{2(mp+1)w^2} \rightarrow \rho_{\pm m} = w'(z) \sqrt{(mp+1)}. \quad (188a)$$

$$1 - \frac{(mp+2)}{2mp(mp+1)w^2} \rho_{\pm m}^2 \rightarrow \rho_{\pm m} = w'(z) \sqrt{\frac{mp(mp+1)}{mp+2}}. \quad (188b)$$

Empero después de hacer una análisis tomando puntos cercanos a estos puntos tanto por la izquierda como por la derecha, se encuentra que el primer valor $\rho_{\pm m}$ corresponde a un mínimo, mientras que el segundo valor corresponde a un máximo de intensidad. Luego el radio del m -ésimo modo con MAO es:

$$\rho_{\pm m} = w'(z) \sqrt{\frac{mp(mp+1)}{mp+2}}. \quad (189)$$

Ahora para encontrar el radio de campo cercano tomamos la intensidad :

$$\mathbf{I}(\rho_{\pm m}, \phi_{\pm m}, z) = |t_{\pm m}|^2 \frac{w_0^2}{w^2(\xi)} \frac{\pi k \rho_{\pm m}^2}{8(z-\xi)} \left[J_{(mp-1)/2}^2 \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} \right) + J_{(mp+1)/2}^2 \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} \right) \right], \quad (190)$$

y hacemos a $x = \frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)}$, de modo que:

$$\frac{d}{d\rho_{\pm m}} = \frac{dx}{d\rho_{\pm m}} \frac{d}{dx} = \frac{k\rho_{\pm m}}{2(z-\xi)} \frac{d}{dx}. \quad (191)$$

Luego para hallar los puntos críticos tomamos,

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\rho_{\pm m}} = \frac{k\rho_{\pm m}}{2(z-\xi)} \frac{d\mathbf{I}}{dx} = 0. \quad (192)$$

Así tendremos que:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dx} = |t_{\pm m}|^2 \frac{\pi w_0^2}{2w^2(\xi)} \left[2x \left(\frac{dJ_{(mp-1)/2}}{dx} + \frac{dJ_{(mp+1)/2}}{dx} \right) + \left(J_{(mp+1)/2}^2 + J_{(mp-1)/2}^2 \right) \right]; \quad (193)$$

Usando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel[25,16]:

$$\frac{J_n(x)}{dx} = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x), \quad (194a)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x); \quad (194b)$$

Se obtiene que el término encerrado en los corchetes rectangulares toma la forma:

$$2x \left[\left(\frac{mp-1}{2x} + 1 \right) J_{(mp-1)/2} - \left(\frac{mp+1}{2x} + 1 \right) J_{(mp+1)/2} \right] + \left(J_{(mp+1)/2}^2 + J_{(mp-1)/2}^2 \right), \quad (195a)$$

$$[(mp-1) + 2x + J_{(mp-1)/2}] J_{(mp-1)/2} - [(mp+1) + 2x - J_{(mp+1)/2}] J_{(mp+1)/2}. \quad (195b)$$

Es decir que,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{d\rho_{\pm m}} = & |t_{\pm m}|^2 \frac{\pi w_0^2}{2w^2(\xi)} \frac{k\rho_{\pm m}}{2(z-\xi)} \left\{ [(mp-1) + 2x + J_{(mp-1)/2}(x)] J_{(mp-1)/2}(x) \right. \\ & \left. - [(mp+1) + 2x - J_{(mp+1)/2}(x)] J_{(mp+1)/2}(x) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (196a)$$

lo anterior se cumple sí descartamos la solución trivial $\rho_{\pm m} = 0$ en:

$$[(mp-1) + 2x + J_{(mp-1)/2}(x)] J_{(mp-1)/2}(x) = [(mp+1) + 2x - J_{(mp+1)/2}(x)] J_{(mp+1)/2}(x). \quad (197)$$

Pero utilizando de nuevo las identidades (E.14a) y (E.14b) se llega a que:

$$J_{(mp-1)/2}(x) = J_{(mp+1)/2}(x) \implies J_{(mp-1)/2} \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} \right) = J_{(mp+1)/2} \left(\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} \right). \quad (198)$$

Finalmente se puede aproximar al primer cero de las funciones de primera especie[44], llegando a que el radio del m -ésimo modo con MAO para campo cercano es:

$$\frac{k\rho_{\pm m}^2}{4(z-\xi)} = \frac{mp}{2} + 1 \implies \rho_{\pm m} = \sqrt{\left(\frac{mp}{2} + 1 \right) \frac{2\lambda(z-\xi)}{\pi}}. \quad (199)$$

donde mp esta restringido a $mp = 1, 2 \dots < 30$ [44].

APÉNDICE 6

Ya que la componente de MAO en la dirección de propagación L_z y el ángulo de rotación acimutal forman un par de variables conjugadas[51], entonces se puede trabajar en un espacio Ψ de $(2l + 1)$ dimensiones, debido a que los estados propios $|m\rangle$ del operador \hat{L}_z toman los valores $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l + 1, l$. Un estado angular de rotación que tenga a \hat{L}_z como generador, obedecerá[49]:

$$e^{-i\eta\hat{L}_z/\hbar}|\phi\rangle = |\phi + \eta\rangle, \quad (200)$$

lo cual se consigue mediante la definición:

$$|\phi\rangle \equiv e^{-i\phi\hat{L}_z/\hbar}|\alpha_0\rangle, \quad (201)$$

Siendo α_0 el estado angular inicial. Como el operador angular hermitico $\hat{\phi}$ existe en relación conjugada con \hat{L}_z [51], entonces debemos esperar que este operador sea el generador de un desfase de MAO entero,

$$e^{i\eta\hat{\phi}}|m\rangle = |m + \eta\rangle, \quad (202)$$

para todos los valores enteros n . Podemos usar las propiedades de desfase para obtener la forma de los estados angulares al operar $e^{in\hat{\phi}}$ a ambos lados de la expansión[49]:

$$|\alpha_0\rangle = \sum_m c_m |m\rangle, \quad (203)$$

De manera que:

$$e^{in\hat{\phi}}|\alpha_0\rangle = \sum_m c_m e^{in\hat{\phi}}|m\rangle, \quad (204a)$$

$$|\alpha_0\rangle = \sum_m c_m |m + n\rangle. \quad (204b)$$

En donde hemos asumido que el estado angular inicial es un estado propio del operador $\hat{\phi}$ con valor propio 1. Ahora si comparamos la ecuación (F.4) con (F.5b) entonces obtendremos que:

$$\sum_m c_m |m+n\rangle = \sum_m c_m |m\rangle, \quad (205a)$$

$$\sum_{m=1}^l c_m |m+n\rangle + c_0 |n\rangle + \sum_{m=1}^l c_{-m} |-m+n\rangle = \sum_{m=1}^l c_m |m\rangle + c_0 |0\rangle + \sum_{m=1}^l c_{-m} |-m\rangle; \quad (205b)$$

Para que lo anterior se cumpla necesariamente los coeficientes c_m deben ser independientes de m . Otra forma alternativa de esto último es analizando como por ejemplo, sí $m+n > l$ entonces la consistencia en la representación del estado angular inicial por medio de la constante c_m requiere que sí este estado es un valor propio $\hat{\phi}$, el estado $|m+n\rangle$ deberá ser un estado propio de \hat{L}_z , lo cual contradice lo asumido inicialmente para los estados propios de \hat{L}_z [49]. Dada la dimensionalidad del espacio Ψ , entonces podemos normalizar los coeficientes c_m al valor $(2l+1)^{-1/2}$ [49], de manera que tenemos que el estado angular $|\phi\rangle$ se transforma a,

$$|\phi\rangle = e^{-i\phi\hat{L}_z/\hbar} |\alpha_0\rangle = e^{-i\phi\hat{L}_z/\hbar} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l+1}} |m+n\rangle, \quad (206a)$$

$$|\phi\rangle = \sum_{m=-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l+1}} e^{-i\phi\hat{L}_z/\hbar} |m+n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{m=-l}^l e^{-im\phi} |m\rangle. \quad (206b)$$

Esta forma es similar a la forma de los estados de fase óptica[52-55]. A partir de la última ecuación puede verse como los estados angulares tienen una estructura periódica, es decir el estado $|\phi+2\pi\rangle$ es igual a tener $|\phi\rangle$, es decir se pueden restringir a un intervalo de 2π . Empero estos estados no son ortogonales, puesto que:

$$\langle\phi'|\phi\rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l e^{-im(\phi-\phi')} \langle m|m\rangle, \quad (207a)$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l e^{-im(\phi-\phi')}, \quad (207b)$$

$$= \frac{1}{2l+1} \left[\frac{e^{-i(l+1)(\phi-\phi')} - e^{il(\phi-\phi')}}{e^{-i(\phi-\phi')} - 1} \right], \quad (207c)$$

$$= \frac{1}{2l+1} \left[\frac{e^{-i/2(\phi-\phi')}}{e^{-i/2(\phi-\phi')}} \left(\frac{e^{-i(l+1/2)(\phi-\phi')} - e^{i(l+1/2)(\phi-\phi')}}{e^{-i/2(\phi-\phi')} - e^{i/2(\phi-\phi')}} \right) \right], \quad (207d)$$

$$\langle\phi'|\phi\rangle = \frac{1}{2l+1} \frac{\sin [(2l+1)(\phi-\phi')/2]}{\sin [(\phi-\phi')/2]}. \quad (207e)$$

En donde hemos usado el hecho de que los estados propios $|m\rangle$ son ortonormales[56], además de la propiedad referente a las progresiones geométricas. De esta última ecuación se infiere que los estados $|\phi\rangle$ y $|\phi'\rangle$ son ortogonales sí se cumple que:

$$(\phi - \phi') = \frac{2n\pi}{2l+1}, \quad (208)$$

para $n \in \mathcal{Z}$ diferente de cero. De manera que se puede formar una base completa ortonormal de $(2l+1)$ estados angulares $|\theta_n\rangle$ seleccionando los valores de θ_n como:

$$\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{2l+1}. \quad (209)$$

Siendo θ_0 un valor arbitrario que determina el conjunto particular de la base y que corresponde en su forma clásica a elegir un valor específico en el intervalo entre 0 y 2π para expresar el valor de $\arctan(y/x)$, n toma valores de cero a $2l$. Por tanto se puede etiquetar un operador angular para especificar cual es el conjunto base que forman sus estados propios. Lo anterior se consigue sí al operador $\hat{\phi}_\theta$ con valores propios θ_n dados por la ecuación (F.10) se define como,

$$\hat{\phi}_\theta \equiv \sum_{n=0}^{2l} \theta_n |\theta_n\rangle \langle \theta_n| = \theta_0 + \sum_{n=0}^{2l} \frac{2n\pi}{2l+1} |\theta_n\rangle \langle \theta_n|. \quad (210)$$

Debe señalarse que los estados angulares en diferentes bases no son ortogonales y que los estados propios de diferentes operadores angulares no conmutan[49]. Los elementos matriciales de $\hat{\phi}_\theta$ en las bases de momento angular orbital $|m\rangle$ se hallan a través de:

$$\langle m' | \hat{\phi}_\theta | m \rangle = \sum_{n=0}^{2l} \theta_n \langle m' | \theta_n \rangle \langle \theta_n | m \rangle, \quad (211a)$$

$$= \sum_{n=0}^{2l} \theta_n \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{m,m'} e^{-im'\theta_n} e^{im\theta_n} \langle m' | n \rangle \langle m | n \rangle, \quad (211b)$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} \theta_n \sum_{m,m'} e^{-im'\theta_n} e^{im\theta_n} \delta_{m'n} \delta_{mn}, \quad (211c)$$

$$\langle m' | \hat{\phi}_\theta | m \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} \theta_n e^{i(m-m')\theta_n}, \quad (211d)$$

lo cual para $m' = m$ origina

$$\langle m|\hat{\phi}_\theta|m\rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} \theta_n = \frac{1}{2l+1} \left(\theta_0 \sum_{n=0}^{2l} 1 + \frac{2\pi}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} n \right), \quad (212a)$$

$$= \frac{1}{2l+1} \left((2l+1)\theta_0 + \frac{2\pi}{2l+1} \frac{(2l)(2l+1)}{2} \right), \quad (212b)$$

$$\langle m|\hat{\phi}_\theta|m\rangle = \theta_0 + \frac{2\pi l}{2l+1}; \quad (212c)$$

Mientras que para $m \neq m'$ da

$$\langle m'|\hat{\phi}_\theta|m\rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} \left[\theta_0 + \frac{2\pi n}{2l+1} \right] e^{i(m-m')(\theta_0 + \frac{2\pi n}{2l+1})}, \quad (213a)$$

$$= \frac{e^{i(m-m')\theta_0}}{2l+1} \left[\left(\theta_0 \sum_{n=0}^{2l} 1 + \frac{2\pi}{2l+1} \sum_{n=0}^{2l} n \right) e^{i\frac{2\pi(m-m')}{2l+1}n} \right], \quad (213b)$$

$$= \frac{e^{i(m-m')\theta_0}}{2l+1} \left[\frac{e^{i(m-m')2\pi} - 1}{e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} - 1} + \frac{2\pi}{2l+1} \left(\frac{(2l+1)e^{i(m-m')2\pi}}{e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} - 1} - \right. \right. \quad (213c)$$

$$\left. \left. \frac{e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} (e^{i(m-m')2\pi} - 1)}{\left(e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} - 1 \right)^2} \right) \right], \quad (213d)$$

$$\langle m'|\hat{\phi}_\theta|m\rangle = \frac{2\pi e^{i(m-m')\theta_0}}{(2l+1) \left(e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} - 1 \right)}. \quad (213e)$$

Puesto que $(m - m') \in \mathcal{Z}$ y se tiene la propiedad

$$\sum_{k=0}^m k r^k = \frac{(m+1)r^{m+1}}{(r-1)} - \frac{(r^{m+1} - 1)r}{(r-1)^2}. \quad (214)$$

Así que los elementos matriciales fuera y dentro de la diagonal permiten expresar al operador $\hat{\phi}_\theta$ como

$$\hat{\phi}_\theta = \theta_0 + \frac{2\pi l}{2l+1} + \frac{2\pi}{2l+1} \sum_{\substack{m, m' \\ m \neq m'}} \frac{e^{i(m-m')\theta_0}}{\left(e^{i\frac{(m-m')2\pi}{2l+1}} - 1 \right)} |m'\rangle \langle m|. \quad (215)$$

Finalmente se puede expresar un estado de con MAO entero $|m\rangle$ en función de estados angulares $|\theta_n\rangle$ mediante la expansión[49]

$$|m\rangle = \sum_{n=0}^{2l} |\theta_n\rangle \langle \theta_n|m\rangle = \sum_{n=0}^{2l} |\theta_n\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2l+1}} e^{im\theta_n} \langle m|m\rangle \right)^1, \quad (216a)$$

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} e^{im\theta_n} |\theta_n\rangle. \quad (216b)$$

APÉNDICE 7

Dado que los estados cuánticos con MAO no entero dependen de la orientación de la discontinuidad de fase α , entonces para rotar dicha discontinuidad se introduce el operador $\widehat{U}_v(\beta)$, que actúa sobre el estado de MAO no entero $|M'(\alpha)\rangle$ como

$$\widehat{U}_v(\beta)|M'(\alpha)\rangle = e^{i(v-m')\beta}|M'(\alpha \ominus \beta)\rangle, \quad (217)$$

Siendo $v \in \mathcal{R}$, β el ángulo de rotación de la discontinuidad restringida al intervalo $[0, 2\pi)$, mientras que $\alpha \ominus \beta := (\alpha + \beta) \bmod 2\pi$ es el módulo de la adición de 2π [58], el cual origina un resultado en el rango $[0, 2\pi)$. De la ecuación (G.1) se deduce que sí v es igual a la parte entera de M entonces el operador sólo produce una rotación pura de α . No obstante también es posible una rotación pura para $v \neq m'$ sí $\beta = 0$. Los estados propios de este operador son los estados de MAO entero[50], sí se actúa con $\widehat{U}_v(\beta)$ sobre un estado entero de MAO $|m\rangle$, entonces sólo se produce un desfase:

$$\widehat{U}_v(\beta)|m\rangle = e^{i(v-m)\beta}|m\rangle. \quad (218)$$

Dado que el operador $\widehat{U}_v(\beta)$ es declarado unitario[50], es decir que $\widehat{U}_v(\beta) = \widehat{U}_v(-\beta) = \widehat{U}_v^*(\beta)$ entonces sus valores propios tendrán módulo 1.

Ahora, de la definición dada en la ecuación (G.1) se puede probar que este conjunto de operadores unitarios no forman un grupo bajo la multiplicación para combinaciones arbitrarias de los parámetros β y v [59]. Sin embargo para un valor fijo de v el conjunto de operadores $\{\widehat{U}_v(\beta)\}_{\beta \in [0, 2\pi)}$ forman un grupo bajo la multiplicación con el parámetro β [60]. Para demostrar lo anterior, se ve en primer lugar que $\widehat{U}_v(\beta')\widehat{U}_v(\beta)$ puede ser escrito como $\widehat{U}_v(\gamma')$ con

$\gamma \in [0, 2\pi)$:

$$\widehat{U}_v(\beta')\widehat{U}_v(\beta)|M'(\alpha)\rangle = \widehat{U}_v(\beta') \left(e^{i(v-m')\beta} |M'(\alpha \ominus \beta)\rangle \right), \quad (219a)$$

$$= e^{i(v-m')(\beta+\beta')} |M'(\alpha \ominus \beta \ominus \beta')\rangle, \quad (219b)$$

$$\widehat{U}_v(\beta')\widehat{U}_v(\beta)|M'(\alpha)\rangle = \widehat{U}_v(\beta \ominus \beta')|M'(\alpha)\rangle; \quad (219c)$$

Es decir que se cumple que $\widehat{U}_v(\beta')\widehat{U}_v(\beta)$ da origen a otro operador del mismo conjunto: $\widehat{U}_v(\beta \ominus \beta')$ como el módulo de la adición 2π , luego $(\beta \ominus \beta' = \gamma)$ estará en el intervalo $[0, 2\pi)$. Además se cumplen las propiedades de que existe un elemento neutro en la forma del operador identidad cuando $\beta = 0$ y que todo operador tiene un elemento inverso de la forma $\widehat{U}'_v(\beta) = \widehat{U}_v(-\beta)$.

Finalmente si se tienen dos operadores con la misma orientación pero diferentes valores de v , estos pueden ser combinados para obtener:

$$\widehat{U}'_v(\beta)\widehat{U}'_{v'}(\beta)|M'(\alpha)\rangle = \widehat{U}'_v(\beta) \left(e^{i(v'-m')\beta} |M'(\alpha \ominus \beta) \ominus \beta)\rangle \right), \quad (220a)$$

$$= e^{i(v'+v-2m')\beta} |M'(\alpha \ominus \beta \ominus \beta)\rangle, \quad (220b)$$

$$= e^{-i(v'+v)\beta} \left[e^{i(v'+v-m')2\beta} |M'(\alpha)\rangle \right], \quad (220c)$$

$$\widehat{U}'_v(\beta)\widehat{U}'_{v'}(\beta)|M'(\alpha)\rangle = e^{-i(v'+v)\beta} \widehat{U}'_{v'+v}(\beta \ominus \beta)|M'(\alpha)\rangle, \quad (220d)$$

por tanto se infiere que

$$\widehat{U}'_v(\beta)\widehat{U}'_{v'}(\beta) = e^{-i(v'+v)\beta} \widehat{U}'_{v'+v}(\beta \ominus \beta). \quad (221)$$

Entonces el conjunto de operadores $\{\widehat{U}'_v\}_{v \in \mathcal{R}}$ no forman un grupo bajo la multiplicación para $\beta \neq 0$ ya que para $\beta = 0$ estos operadores son la identidad.

APÉNDICE 8

Para desorrollar la suma en la superposición de estados con MAO no entero, se utiliza la fórmula para la progresión la geométrica[16,25]:

$$\sum_{k=m}^n ar^k = a \frac{(r^{n+1} - r^m)}{r - 1}, \quad (222)$$

e introducimos el índice H , tal que $\theta_H < \beta < \theta_{H+1}$. Asi que:

$$\sum_{n=0}^{2l} \frac{e^{i(M-M')\theta_n} e^{i\mu 2\pi f\beta}}{2l+1} = \frac{1}{2l+1} \left[e^{i2\pi\mu} \sum_{n=0}^H e^{i(M-M')\theta_n} + \sum_{n=H+1}^{2l} e^{i(M-M')\theta_n} \right], \quad (223a)$$

$$= \frac{e^{i(M-M')\theta_0}}{2l+1} \left[e^{i2\pi\mu} \sum_{n=0}^H e^{i\frac{(M-M')2\pi n}{2l+1}} + \sum_{n=H+1}^{2l} e^{i\frac{(M-M')2\pi n}{2l+1}} \right], \quad (223b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2l} \frac{e^{i(M-M')\theta_n} e^{i\mu 2\pi f\beta}}{2l+1} &= \frac{e^{i(M-M')\theta_0}}{2l+1} \left[e^{i2\pi\mu} \frac{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi(H+1)}{2l+1}}}{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{i(M-M')\frac{2\pi(H+1)}{2l+1}} - e^{i(M-M')\frac{2\pi(2l+1)}{2l+1}}}{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}}} \right]. \end{aligned} \quad (223c)$$

Ahora sí utilizamos el desarrollo en serie alrededor de cero para la función exponencial y tomamos el límite cuando $l \rightarrow \infty$ a través de $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{2\pi(H+1)}{2l+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \theta_{H+1} = \beta$, para el cual el conjunto de ángulos $\{\theta_n\}_{n=0, \dots, 2l}$ se convierte en un conjunto denso, entrando en concordancia con el hecho de que se necesita un número infinito para una respuesta completa del campo[49-50,52-53], se tiene que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1} + \dots \right) \approx 1 + i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}; \quad (224)$$

Luego:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi(H+1)}{2l+1}}}{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}}} = -(2l+1) \frac{1 - e^{i(M-M')\beta}}{2\pi i(M-M')}, \quad (225)$$

y

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^{i(M-M')\frac{2\pi(H+1)}{2l+1}} - e^{i(M-M')\frac{2\pi(2l+1)}{2l+1}}}{1 - e^{i(M-M')\frac{2\pi}{2l+1}}} = -(2l+1) \frac{e^{i(M-M')\beta} - e^{i(M-M')2\pi}}{2\pi i(M-M')}, \quad (226)$$

es decir que:

$$\sum_{n=0}^{2l} \frac{e^{i(M-M')\theta_n} e^{i\mu 2\pi f_\beta}}{2l+1} = i \frac{e^{i(M-M')\theta_0}}{2\pi(M-M')} \left[e^{i2\pi\mu} \left(1 - e^{i(M-M')\beta} \right) + \left(e^{i(M-M')\beta} - e^{i(M-M')2\pi} \right) \right]. \quad (227)$$

Ahora por otra parte se puede hallar la amplitud de los coeficientes de descomposición para la distribución angular de un estado con MAO no entero utilizando la fórmula para la función exponencial compleja, desarrollando se tendrá que:

$$c_{m'} [M(\beta)] = e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} \left[e^{i\mu 2\pi} \left(1 - e^{i(m+\mu-m')\beta} \right) + \left(e^{i(m+\mu-m')\beta} - e^{i(m+\mu-m')2\pi} \right) \right], \quad (228a)$$

$$= e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(m-m')\beta} \left[e^{i2\pi\mu} \left(e^{-i(m-m')\beta} - e^{i\mu\beta} \right) + \left(e^{i\mu\beta} - e^{i(m+\mu-m')2\pi - i(m-m')\beta} \right) \right], \quad (228b)$$

$$c_{m'} [M(\beta)] = e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(m-m')\beta} \left[e^{i2\pi\mu} \left(e^{-i(m-m')\beta} - e^{i\mu\beta} \right) + e^{i2\pi\mu} \left(e^{i\mu\beta - i\mu 2\pi} - e^{-i(m-m')\beta} e^{i(m-m')2\pi} \right) \right], \quad (228c)$$

pero como $e^{i(m-m')2\pi} = \cos((m-m')2\pi) + i \sin((m-m')2\pi) = 1$, entonces se llega a

$$c_{m'} [M(\beta)] = e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(m-m')\beta} \left[e^{i\mu 2\pi} \left(e^{-i(m-m')\beta} - e^{i\mu\beta} + e^{i\mu\beta - i\mu 2\pi} - e^{-i(m-m')\beta} \right) \right], \quad (229a)$$

$$= e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(m-m')\beta} \left[e^{i\mu 2\pi} \left(e^{i\mu\beta - i\mu 2\pi} - e^{i\mu\beta} \right) \right], \quad (229b)$$

$$c_{m'} [M(\beta)] = e^{-i\mu\beta} \frac{i e^{(M-m')\theta_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(m-m')\beta} \left(1 - e^{i\mu 2\pi} \right). \quad (229c)$$

APÉNDICE 9

En la tabla de la figura I.1 se presentan algunos de los datos de intensidad promedio obtenidos para diferentes posiciones angulares del polarizador y el analizador en el intervalo de $60^\circ - 88^\circ$ con el fin de encontrar el ángulo de torsión de la matriz LCD. Mientras que en la figura I.2 se muestran algunas de las gráficas ya linealizadas de los valores de intensidad promedio en función de 26 niveles de gris variando entre 0-255 a un paso de 10 para los correspondientes valores de contraste y brillo en la matriz: a). 1.90 y 4.42, b). 1.92 y 4.32, c). 1.93 y 4.42, d).1.94 y 4.42, e).1.95 y 4.52 y finalmente f). 1.96 y 4.02.

Polarizador(°)	Analizador(°)	Intensidad promedio (mW)	Polarizador(°)	Analizador(°)	Intensidad promedio (mW)
60	196	1,19E-03	74	212	4,49E-04
60	198	6,87E-04	74	214	2,40E-04
60	200	3,48E-04	74	216	4,85E-04
60	202	2,82E-04	74	218	8,86E-04
60	204	4,09E-04	74	220	1,60E-03
60	206	7,91E-04	74	222	4,63E-04
60	208	1,40E-03	76	214	2,38E-04
62	200	6,46E-04	76	216	2,24E-04
62	202	3,86E-04	76	218	4,05E-04
62	204	2,73E-04	76	220	8,43E-04
62	206	4,38E-04	76	222	4,19E-04
62	208	8,10E-04	78	214	2,32E-04
62	210	1,39E-03	78	216	2,27E-04
64	202	6,76E-04	78	218	4,64E-04
64	204	3,31E-04	78	220	9,65E-04
64	206	2,62E-04	78	222	4,25E-04
64	208	4,24E-04	78	224	2,17E-04
64	210	7,87E-04	80	216	2,23E-04
64	212	1,45E-03	80	218	4,30E-04
66	204	6,27E-04	80	220	8,41E-04
66	206	3,22E-04	80	222	2,15E-04
66	208	2,42E-04	80	224	2,42E-04
66	210	4,31E-04	80	226	4,67E-04
66	212	8,55E-04	82	218	8,53E-04
66	214	1,43E-03	82	220	7,70E-04
68	206	5,25E-04	82	222	3,95E-04
68	208	2,86E-04	82	224	1,97E-04
68	210	2,46E-04	82	226	2,43E-04
68	212	4,75E-04	82	228	4,77E-04
68	214	9,12E-04	84	220	7,87E-04
68	216	1,51E-03	84	222	4,21E-04
70	208	5,35E-04	84	224	2,06E-04
70	210	2,68E-04	84	226	2,63E-04
70	212	2,30E-04	84	228	4,32E-04
70	214	4,04E-04	86	222	7,43E-04
70	216	8,31E-04	86	224	3,67E-04
70	218	1,45E-03	86	226	2,13E-04
72	210	5,21E-04	86	228	2,64E-04
72	212	2,62E-04	86	230	4,96E-04
72	214	2,29E-04	88	224	7,08E-04
72	216	4,16E-04	88	226	3,93E-04
72	218	9,07E-04	88	228	2,22E-04
72	220	1,51E-03	88	230	2,46E-04

figura 34: Algunos valores de intensidad promedio obtenidos experimentalmente para distintas posiciones angulares en el polarizador y analizador.

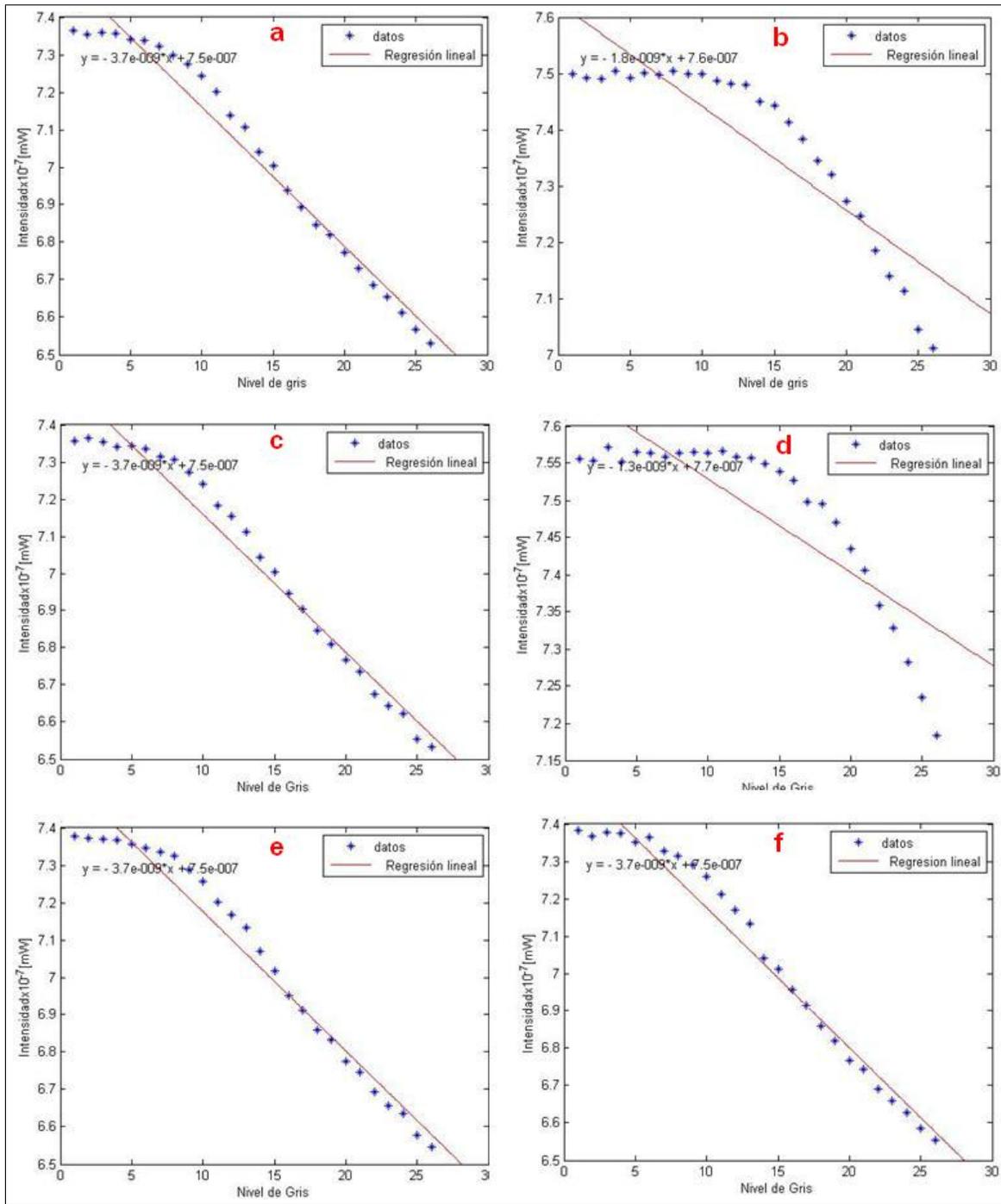


figura 35: Algunas gráficas linealizadas de valores de intensidad promedio obtenidos experimentalmente en función del nivel de gris para distintos valores de contraste y brillo: a). 1,90 y 4,42, b). 1,92 y 4,32, c). 1,93 y 4,42, d). 1,94 y 4,42, e). 1,95 y 4,52 y f). 1,96 y 4,02.

REFERENCIAS

- [1] E. Hecht, *Optics*, fourth edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc, New York, 704pp. (2002).
- [2] L. W. Davis, *Theory of electromagnetic beams*, Physical Review A, Vol 19, No. 3, pp. 1177-1179 (1979).
- [3] M. Lax, W. Louisell and B. MacKnight, *From Maxwell to paraxial wave optics*, Physical Review A, Vol 11, No. 4, pp. 1365-1370 (1975).
- [4] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 833pp. (1998).
- [5] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, second edition, McGraw-Hill, New York, 441pp. (1996).
- [6] L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw and J. Woerdman; *Orbital angular momentum of light and transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes*, Physical Review A, Vol. 45, No. 11, pp. 8185-8189 (1992).
- [7] J. N. Damask, *Polarization optics in telecommunications*, first edition, Springer series in optical science, New York, 535pp. (2005).
- [8] S. Van Enk and G. Nienhuis, *Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields*, Journal of Modern Optics, Vol. 41, No. 5, pp. 963-977 (1994).
- [9] S. M. Barnett, *Optical angular momentum-flux*, Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, Vol. 4, S7-S16 (2002).

-
- [10] A. T. O'Neil, I. Mac Vicar, L. Allen and M. Padgett, *Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam*, Physical Review Letters, Vol. 88, No. 5, #053601, 4pp. (2002).
- [11] I. Basistiy, M. Soskin, and M. Vanetsov, *Optical wavefront dislocations and their properties*, Optics Communications, Vol. 119, pp. 604-612 (1995).
- [12] G. Indebetouw, *Optical vortices and their propagation*, Journal of Modern Optics, Vol. 40, No. 1, pp. 73-87 (1993).
- [13] H. Kogelnik and T. Li, *Laser beams and resonators*, Applied Optics, Vol. 5, No. 10, pp. 1550-1567 (1966).
- [14] B. E. Saleh and M. C. Teich, *Fundamental of photonics*, first edition , John Wiley & Sons Inc., New York, 984pp. (1991).
- [15] M. Padgett, J. Arlt, N. Simpson and L. Allen, *An experiment to observe the intensity and phase structure of Laguerre-Gaussian laser modes*, American Journal of Physics, Vol. 64, pp. 77-86 (1996).
- [16] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, ninth edition, Dover books on mathematics, Washington, 1059pp. (1964).
- [17] T. Visser and E. Wolf, *The origin of the Gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields*, Optics Communications, Vol. 283, No. 18, pp. 3371-3375 (2010).
- [18] S. Feng and H. Winful, *Physical origin of the Gouy phase shift*, Optics Letters, Vol. 26, No. 8, pp. 485-487 (2001).
- [19] M. Alison and M. Padgett, *Orbital angular momentum: origins, behavior and applications*, Advances in Optics and Photonics, Vol. 3, No. 2, pp. 161-204 (2011).
- [20] M. Padgett and L. Allen, *The Poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes*, Optics Communications, Vol. 121, No. 1, pp. 36-40 (1995).
- [21] L. Allen and M. Padgett, *The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density*, Optics Communications, Vol. 184, No. 1, pp. 67-71 (2000).

-
- [22] J. Leach, S. Keen, M. Padgett, C. Saunter and G. Love, *Direct measurement of the skew angle of the poynting vector in a helically phased beam*, Optics Express, Vol. 14, No. 25, pp. 11919-11924 (2006).
- [23] S. Van Enk and G. Nienhuis, *Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light*, Optics Communications, Vol 94, Nos. 1-3, pp. 147-158 (1992).
- [24] L. Allen, M. Padgett and M. Babiker, *Chapter IV: The orbital angular momentum of light*, Progress in Optics XXXIX, Elsevier Science B. V., Amsterdam, Netherlands, 383pp. (1999).
- [25] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, third edition, Academic Press Inc., San Diego, California, 1006pp. (1985).
- [26] J. Durnin, *Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory*, Journal of the Optical Society of America A, Vol. 4, No. 4, pp. 651-654 (1987).
- [27] S. Barnett and L. Allen, *Orbital angular momentum and nonparaxial light beams*, Optics communications, Vol. 110, No. 5, pp. 670-678 (1994).
- [28] R. Martinez-Herrero and P. M. Mejías, *Angular momentum decomposition of nonparaxial light beams*, Optics Express, Vol. 18, No. 8, pp. 7965-7971 (2010).
- [29] Chun F. Li, *Spin and orbital angular momentum of a class of nonparaxial light beams having a globally defined polarization*, Physical Review A, Vol. 80, No. 6, pp. #063814, 11pp. (2009).
- [30] S. Van Enk and G. Nienhuis, *Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields*, Journal of Modern Optics, Vol. 41, No. 5, pp. 963-977 (1994).
- [31] M. Mansuripur, *Spin and orbital angular momenta of the electromagnetic waves in free space*, Physical Review A, Vol. 84, No. 3, pp. #033838, 6pp. (2011).
- [32] P. Vaveliuk, B. Ruiz and A. Lencina, *Limits of the paraxial approximation in laser beams*, Optics letters, Vol. 32, No. 8, pp. 927-929 (2007).

-
- [33] I. Gradshteyn and I. Ryzhik's, *Table of integrals, series, and products*, sixth edition, Academic Press Inc., San Diego, California, 1163pp. (2000).
- [34] R. Arora and Z. Lu, *Graphical study of Laguerre-Gaussian Beam modes*, IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation, Vol. 141, No. 3, pp. 145-150 (1994).
- [35] M. Beijersbergen, R. Coerwinkel, M. Kristensen and J. Woerdman, *Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate*, Optics Communications, Vol. 112, No. 5, pp. 321-327 (1994).
- [36] G. Turnbull, D. Robertson, G. Smith, L. Allen and M. Padgett, *The generation of the free space Laguerre-Gaussian beams at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate*, Optics Communications, Vol. 127, No. 4, pp. 183-188 (1996).
- [37] M. Beijersbergen, L. Allen, H. Van der Veen and J. Woerdman, *Astigmatic Laser Converters and transfer of the angular orbital momentum*, Optics Communications, Vol 96, No. 2, pp. 123-138 (1993).
- [38] L. Allen and M. Padgett, *Orbital angular momentum exchange in cylindrical-lens mode converters*, Journal of Optics B. Quantum Semiclassical Optics, Vol. 4, S17-S19 (2002).
- [39] V. Bazhenov, M. Vanetsov and M. Soskin, *Laser beams with screw dislocations in their wavefronts*, American Institute of Physics, Vol. 52, No. 8, pp. 429-431 (1990).
- [40] N. Heckenberg, R. McDuff, C. Smith, H. Rubinsztein and M. Wegener, *Laser beams with singularities*, Optical and Quantum Electronics, Vol. 24, S951-S962 (1992).
- [41] A. Carpentier, H. Michenel and J. Salgueiro, *Making optical vortices with computer-generated holograms*, American Journal of Physics, Vol. 76, No. 10, pp. 916-921 (2008).
- [42] S. Kennedy, M. Szabo, H. Teslow, J. Portefield and E. Abraham, *Creation of laguerre-gaussian modes using diffractive optics*, Physical Review A, Vol. 66, No. 4, #043801, 5pp. (2002).
- [43] N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi and T. Hara, *Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators*, Journal Optical Society of America A, Vol. 25, No. 7, pp. 1642-1651 (2008).

-
- [44] L. Janicijevic and S. Topuzoski, *Fresnel and Fraunhofer diffraction of a gaussian laser beam by fork-shaped gratings*, Journal Optical Society of America A, Vol. 25, No. 11, pp. 2659-2669 (2008).
- [45] G. Brand, *Phase singularities in beams*, American Journal Physics, Vol 67, No. 1, pp. 55-60 (1999).
- [46] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, seventh edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1023pp. (2002).
- [47] V. Kotlyar, A. Almazov, S. Khonina, V. Sofier, H. Elfstrom and J. Turumen, *Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate*, Journal of Optical of Society America A, Vol. 22, No. 5, pp.849-861 (2005).
- [48] J. Gotte, K. O'holleran, D. Preece, F. Flossmann, S. Franke-Arnold, S. Barnett and M. Padgett, *Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure*, Optics Express, Vol. 16, No. 2, pp. 993-1006 (2008).
- [49] S. Barnett and D. Pegg, *Quantum theory of the rotation angles*, Physical Review A, Vol. 41, No. 2, pp. 3427-3435 (1990).
- [50] J. Gotte, S. Franke-Arnold and S. Barnett, *Quantum formulation of fractional orbital angular momentum*, Journal of Modern Optics, Vol. 54, No. 12, pp. 1723-1738 (2007).
- [51] D. Pegg, J. Vaccaro and S. Barnett, *Quantum optical phase and canonical conjugation*, Journal of Modern Optics, Vol. 37, No. 11, pp. 1703-1710 (1990).
- [52] R. Loudon, *The quantum theory of light*, third edition, Oxford University Press, Oxford, 438pp. (1973).
- [53] S. Barnett and D. Pegg, *On the hermitian optical phase operator*, Journal of Modern Optics, Vol. 36, No. 1, pp. 7-19 (1989).
- [54] D. Pegg and S. Barnett, *Quantum optical phase*, Journal of Modern Optics, Vol. 44, No. 2, pp. 225-264 (1997).
- [55] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics*, second edition, Springer, Berlin, 424pp. (2008).

-
- [56] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, revised edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc, New York, 513pp. (1994).
- [57] E. Copson, *Introduction to the theory of functions of a complex variable*, Oxford: The Clarendon Press, 456pp. (1960)
- [58] K. Rosen, *Discrete Mathematics and its applications*, sixth edition, McGraw-Hill, Singapore, 1008pp. (2007).
- [59] H. Zassenhaus, *The theory of the groups*, first edition, Chelsea Publishing Company, New York, 165pp. (1949).
- [60] A. Galindo and P. Pascual, *Quantum Mechanics*, Vol. 1, second edition, Springer, Berlin, 431pp. (1990).
- [61] S. Oemrawsingh, A. Aiello, R. Eiel, G. Niehaus and J. Woerdman, *How to observe high-dimensional two-photons antanglement with only two detectors*, Physical Review Letters, Vol. 92, No. 21, #217901, 4pp. (2004).
- [62] S. Oemrawsingh, X. Ma, D. Voigt, A. Aiello, R. Eiel, G. Hooft and J. Woerdman, *Experimental Demonstration of Fractional orbital angular momentum Entanglement of two photons*, Physical Review Letters, Vol. 95, No. 24, #240501, 4pp. (2005).
- [63] S. Oemrawsingh, R. Eiel, J. Woerdman, J. Kloosterboer and G. Hooft, *Half integral spiral phase plates for optical wavelengths*, Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, Vol. 6, S288-S290 (2004).
- [64] S. Oemrawsingh, J. van Houwelingen, R. Eiel, J. Woerdman, E. Verstegen, J. Kloosterboer and G. Hooft, *Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths*, Applied Optics, Vol 43, No. 3, pp. 688-694 (2004).
- [65] I. Basistiy, V. Pasko, V. Slyusar, M. Soskin and V. Vanetsov, *Synthesis and analysis of optical vortices with fractional topological charges*, Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, Vol. 6, S266-S269 (2004).
- [66] J. Leach, E. Yao and M. Padgett, *Observation of the vortex structure of non-integer vortex beam*, New Journal of Physics, Vol. 6, No. 71, 8pp. (2004).

-
- [67] S. Tao, W. Lee and X. Yuan, *Experimental study of the holographic generation of fractional Bessel beams*, Applied Optics, Vol. 43, No. pp. 122-126 (2004).
- [68] M. Berry, *Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps*, Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, Vol. 6, pp. 259-268 (2004).
- [69] E. Galvez, N. Smiley and N. Fernandes, *Composite optical vortices formed by collinear Laguerre-Gauss beams*, Proceedings of SPIE, Vol. 6131, pp. 19-26 (2006).
- [70] J. Maxwell, *On physical lines of force part I*, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 21, Series Fourth, No. 139, pp. 161-175 (1861).
J. Maxwell, *On physical lines of force part II*, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 21, Series Fourth, No. 140, pp. 281-291 (1861).
- [71] C. Darwin, *Notes on the theory of radiation*, Proceedings Royal Society London Serie A, Vol. 136, pp. 36-52 (1932).
- [72] J. Poynting, *The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in beam circularly polarised light*, Proceedings Royal Society London Serie A, Vol. 82, pp. 560-567 (1909).
- [73] W. Osten, C. Kohler and J. Liesener, *Evaluation and application of spatial light modulators for the optical metrology*, Óptica Pura y Aplicada, Vol 38, No.3, pp. 71-81 (2005).
- [74] J.E. Guerrero Bermúdez y C.O. Torres Moreno, *Caracterización local y global de la torsión del eje director de un televisor de cristal liquido SHARP-VISION*, Trabajo Reconocimiento de Formas Estadísticas, Universidad Industrial De Santander, Bucaramanga, marzo, 19pp. (1999).
- [75] XGA4 Miniature LCD user guide document TCF/00032. Document no.:409/0353/01A dated 24/09/2009. Document release CRO 06/04. Copyright CRLO Displays limited. Registered in England: 5220480. (2004).
- [76] Imaging Development Systems(IDS), *User manual uye USB cameras V3.20*, UI-224x, Febrero(2008).
- [77] J. Kepler, *El secreto del universo*, Alianza Editorial, Madrid, 288pp. (1992).

-
- [78] J. Poynting, *On the transfer of energy in the electromagnetic field*, Philosophical Transactions of Royal Society London Serie A, Vol. 175, pp. 343-361 (1884).
- [79] R. Beth, *Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light*, Physics Review, Vol. 50, No. 2, pp. 115-125 (1936).
- [80] S. Sato, M. Ishigure and H. Inaba, *Optical trapping and rotational manipulation of the microscopic particles and biological cells using higher-order mode nd:yag laser beams*, Electronic Letters, Vol. 27, No.10, pp. 1831-1832 (1991).
- [81] M. Friese, J. Enger, H. Rubinsztein and N. Heckenberg, *Optical angular momentum transfer to trapped absorbing particles*, Physical Review A, Vol. 54, No. 2, pp. 1593-1596 (1996).
- [82] N. Simpson, H. Dholakia, L. Allen and M. Padgett, *Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner*, Optics Letters, Vol. 22, No. 1, pp. 52-54 (1997).
- [83] P. Galajda and P. Ormos, *Complex micromachines produced and driven by light*, Applied Physics Letters, Vol. 78, No. 2, pp. 249-251(2001).
- [84] S. Tao, X. Yuan, X. Peng, H. Niu and J. Lin, *Fractional optical vortex beam induced rotation of particles*, Optics Express, Vol. 13, No. 20, pp. 7726-7731 (2005).
- [85] G. Molina-Terriza, J. Torres and L. Torner, *Management of the angular momentum of Light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum*, Physical Review Letters, Vol. 88, No. 1, #013601, 4pp. (2002).
- [86] G. Gibson, J. Courtial, M. Padgett, M. Vasnetsov, S. Barnett and S. Franke-Arnold, *Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum*, Optics Express, Vol. 12, No. 22, pp. 5448-5455 (2004).
- [87] A. Gatto, M. Tacca, P. Martelli, P. Boffi and M. Martinelli, *Free-space orbital angular momentum division multiplexing with Bessel beams*, Journal of Optics, Vol. 13, No. 6, #064018, 2pp. (2011).
- [88] J. Garcia and P. Chamorro, *Universal quantum computation with the orbital angular momentum of a single photon*, Journal of Optics, Vol. 13, No. 6, #064022, 5pp. (2011).

-
- [89] J. Davis, D. McNamara, D. Cottrell and J. Campos, *Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments*, Optics Letters, Vol. 25, No. 2, pp. 99-101 (2000).
- [90] K. Crabtree, J. Davis and I. Moreno, *Optical processing with vortex-producing lenses*, Applied Optics, Vol. 43, No. 6, pp. 1360-1367 (2004).
- [91] K. Moh, X. Yuan, J. Bu, D. Low, and R. Burge, *Direct noninterference cylindrical vector beam generation applied in the femtosecond regime*, Applied Physics Letters, Vol. 89, No. 25, #251114, 4pp. (2006).
- [92] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo, *Optical spin to orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media*, Physical Review Letters, Vol. 96, No. 16, #163901, 4pp. (2006).
- [93] Y. Yu, Y. Fu, M. Zhang, A. Liu, T. Bourouina, T. Mei, Z. Shen and D. Tsai, *Pure angular momentum generator using a ring resonator*, Optics Express, Vol. 18, No. 21, pp. 21651-21662 (2010).
- [94] S. Parkin, G. Knoner, A. Nieminen, R. Heckenberg and Halina Rubinsztein, *Measurement of the total optical angular momentum transfer in optical tweezers*, Optics Express, Vol. 14, No. 15, pp. 6963-6970 (2006).