

LA CARACTERISTICA DE EULER

JAIRO ARTURO AYALA GODOY

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006**

LA CARACTERISTICA DE EULER

JAIRO ARTURO AYALA GODOY

**Trabajo presentado como requisito parcial para recibir el titulo de
Licenciado en matemáticas**

Director:

Dr. MARLIO PAREDES GUTIERREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy fraterna al profesor Marlio Paredes, por su paciencia, entrega y colaboración en todo momento cuando lo necesite. De antemano felicitarlo por su buen desempeño en su labor.

También agradezco a todos los docentes de la universidad industrial de Santander quienes me enseñaron y son partícipes de este logro.

Por último dedico este título a mis padres que siempre me han ayudado y acompañado en todo momento.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. SIMPLEJOS Y COMPLEJOS GEOMÉTRICOS	2
1.1. SIMPLEJOS GEOMÉTRICOS	2
1.2. COMPLEJOS GEOMÉTRICOS	6
1.3. ORIENTACIÓN DE SIMPLEJOS Y COMPLEJOS GEOMÉTRICOS	9
2. GRUPOS DE HOMOLOGÍA SIMPLICIAL	16
2.1. CADENAS, CICLOS, FRONTERAS Y GRUPOS DE HOMOLOGÍA	16
2.2. EJEMPLOS DE GRUPOS DE HOMOLOGÍA	21
2.3. LA ESTRUCTURA DE LOS GRUPOS DE HOMOLOGÍA	27
3. LA CARACTERÍSTICA DE EULER	33
3.1. TEOREMA DE EULER-POINCARÉ	33
3.2. TEOREMA DE EULER	36
BIBLIOGRAFÍA	41

RESUMEN

TITULO: LA CARACTERÍSTICA DE EULER.*

AUTOR: JAIRO ARTURO AYALA GODOY.**

PALABRAS CLAVES: Simplejos geométricos, complejos geométricos, cadenas, ciclos, fronteras, grupos de homología, orientaciones.

DESCRIPCIÓN

Esta monografía es una recopilación bibliográfica basada en un libro guía llamado *Basic concepts of algebraic topology* realizándola en tres capítulos.

El primer capítulo llamado “simplejos y complejos geométricos” se inicia con las definiciones más sencillas de poliedro, puntos geoméricamente independientes para llegar a conceptos más elaborados como son los simplejos, los complejos geométricos y sus propiedades. Estos conceptos son basados en estructuras de grupo topológicas, realizando ejemplos claros para su mejor comprensión. Donde encontramos de forma analítica e ilustrativa como se realiza la triangulación de cualquier figura, tomando como modelo el toro, la banda de Möbius y la n -esfera. También encontramos al final del capítulo propiedades de simplejos y complejos geométricos como las orientaciones y sus diferentes maneras de simbolizarlas.

Iniciamos en el segundo capítulo reconociendo definiciones claves como: cadenas, ciclos, fronteras, las cuales son de gran importancia para definir los grupos de homología de un complejo, en donde intuitivamente hablando describen el arreglo de los simplejos en los complejos, así que nos cuentan acerca de los “huecos” en el poliedro asociado.

En el tercer capítulo encontramos inicialmente un teorema de suma importancia, el cual es el teorema de “Euler-Poincaré” realizando la demostración de la forma más explícita posible, para llegar al teorema más importante el cual es un famoso resultado descubierto por Euler en 1752 dice que si $|K|$ es un poliedro homeomorfo a la 2-esfera S^2 ($|K|$ es una triangulación de la 2-esfera) con V vértices, A aristas y C caras entonces

$$V - A + C = 2.$$

* Proyecto de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Mario Paredes Gutiérrez.

SUMMARY

TITLE: THE CHARACTERISTIC DE EULER*

AUTHOR: JAIRO ARTURO AYALA GODOY**

KEY WORDS: Simplejos geometric, complex geometric, chains, cycles, borders, groups of homología, directions.

DESCRIPTION

This monograph is a bibliographical compilation based on a book guides call BASIC concepts of algebraic topology making it in three chapters. The first one I capitulate call "simplejos and complex geometric" one begins with the simple definitions but of geometrically independent polyhedron, points to arrive more at elaborated concepts as they are the simplejos, the geometric complexes and their properties. These concepts are based on topológicas structures of group, making clear examples for their better understanding. Where we found of analytical and ilustrativa form as the triangulation of any figure is made, taking like model the bull, the band of Möbius and the n-sphere. Also we found at the end of the chapter geometric properties of simplejos and complexes like the directions and their different ways to symbolize them. We initiated in the second chapter recognizing key definitions like: chains, cycles, borders, which are of great importance to define the groups of homología of a complex, in where very intuitively speaking they describe the adjustment of the simplejos in the complexes, so they tell about the "hollows" in the polyhedron associate us. In the third chapter we found initially a theorem of extreme importance, which is the theorem of "Euler-Poincaré" making the demonstration of the form specifies more possible, to arrive at the most important theorem which is a famous result discovered by Euler in 1752 it says that if is a homeomorfo polyhedron to the S^2 2-sphere (it is a triangulation of the 2-sphere) with V vertices, A edges and C faces then

$$V - A + C = 2.$$

* Degree Project

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director Mario Paredes Gutiérrez.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene por finalidad introducir los conceptos geométricos más comunes, los cuales se explicaran de una forma práctica y sencilla, logrando centrar el interés en “**la característica de Euler**”.

Los primeros conceptos que se obtuvieron se conocieron a mediados del siglo XIX donde comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la geometría, que pronto se convirtió en una de las herramientas más importantes de la matemática moderna. La nueva disciplina, llamada *análisis situs o topología*, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aún si las figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.

Al principio, la novedad de los métodos en el reciente campo no dejó tiempo a los matemáticos para presentar sus resultados en la tradicional forma axiomática de la geometría elemental. En lugar de ello, los primeros investigadores, como Poincaré, se vieron forzados a confiar ampliamente en la intuición geométrica.

Aunque la topología es, en definitiva, una creación de los últimos ciento cincuenta años, hubo unos pocos descubrimientos aislados anteriores, que después encontraron su lugar en el moderno desarrollo sistemático. Sin duda, el más importante de ellos es una fórmula que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro simple, observada ya en 1640 por Descartes, y redescubierta y utilizada por Euler en 1752. El típico carácter de esta relación como teorema topológico se hizo evidente mucho más tarde, después de que Poincaré reconoció “la fórmula de Euler” y sus generalizaciones como uno de los teoremas centrales de la topología.

CAPITULO 1

SIMPLEJOS Y COMPLEJOS GEOMÉTRICOS

En este capítulo se inicia con las definiciones mas sencillas de poliedro, puntos geoméricamente independientes para llegar a conceptos más elaborados como son los simplejos, los complejos geométricos y sus propiedades.

1.1. SIMPLEJOS GEOMÉTRICOS

A continuación encontraremos definiciones importantes para el desarrollo de este trabajo como los simplejos, su simbología, sus características y ejemplos ilustrativos para mayor comprensión.

Definición 1.1.1 *Un **poliedro** es un subconjunto de R^n compuesto por una secuencia de vértices, segmentos de recta, triángulos, tetraedros,...” y más específicamente es una región finita de un espacio n -dimensional limitada por un número finito de hiperplanos.*

Definición 1.1.2 *El **espacio Euclidiano n -dimensional** o simplemente n -espacio, es el espacio vectorial de todas las n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) , sobre el campo de números reales. Para cada entero positivo n , se denota como*

$$R^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n); x_0, x_1, \dots, x_n \in R\}.$$

Definición 1.1.3 *Un conjunto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ de $k+1$ puntos es **geoméricamente independiente** si ningún hiperplano de dimensión $k-1$ contiene todos sus puntos.*

Es decir que un conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ es geoméricamente independiente cuando todos los puntos son distintos, y tres de ellos no se encuentran en una recta, ni cuatro se encuentran en un plano y en general no se encuentran $p+1$ puntos en un hiperplano de dimensión $p-1$ ó menor.

Ejemplo 1.1.1 El conjunto en la Figura 1.1 (a) es geoméricamente independiente puesto que el único hiperplano en R^2 que contiene todos los puntos es el plano R^2 y el conjunto $\{b_0, b_1, b_2\}$ en la Figura 1.1 (b) no es geoméricamente independiente puesto que los tres puntos se encuentran sobre una recta, un hiperplano de dimensión uno.

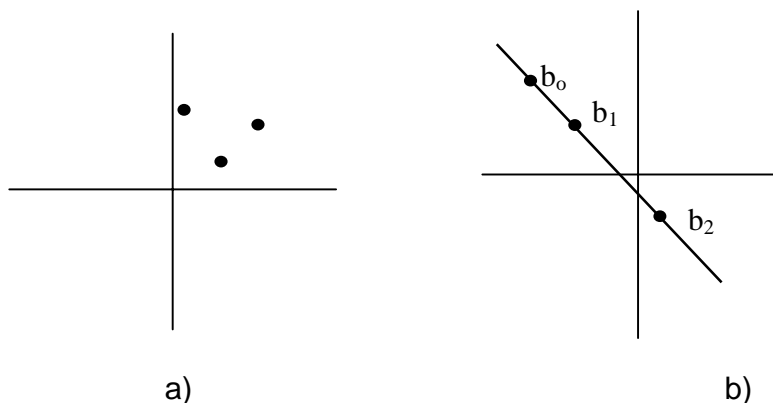


Figura 1.1. Puntos geoméricamente independientes

Definición 1.1.4 Sea $\{a_0, \dots, a_k\}$ un conjunto de puntos geoméricamente independientes en R^n . El **simplejo geométrico k -dimensional**, σ^k , generado por $\{a_0, \dots, a_k\}$ es el conjunto de todos los puntos x en R^n para los cuales existen números reales no negativos $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \text{ con } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Los números $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ son llamados las **coordenadas baricéntricas** del punto x . Los puntos a_0, \dots, a_k son los vértices de σ^k . El conjunto de todos los puntos x en σ^k con todas las coordenadas baricéntricas positivas es llamado el ***k*-simplejo geométrico abierto** generado por $\{a_0, \dots, a_k\}$.

Como ilustración tenemos:

Ejemplo 1.1.2



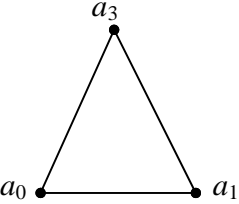
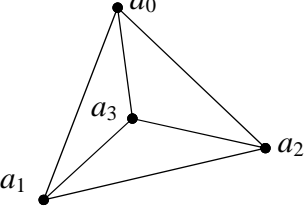
a_0 	a_0 a_1 
σ^0 : 0-simplejo	σ^1 : 1-simplejo
	
σ^2 : 2-simplejo	σ^3 : 3-simplejo

Figura 1.2. Simplejos geométricos

Tenemos que:

un 0-simplejo es un conjunto unitario, un 1-simplejo es un segmento de recta cerrado, un 2-simplejo es un triángulo (interior y frontera) y un 3-simplejo es un tetraedro (interior y frontera).

Un 0-simplejo abierto es un conjunto unitario, un 1-simplejo abierto es un segmento de recta sin los puntos extremos, un 2-simplejo abierto es el interior de un triángulo y un 3-simplejo abierto es el interior de un tetraedro.

Definición 1.1.5 *Un simplejo σ^k es una cara de un simplejo σ^n , $k \leq n$ si cada vértice de σ^k es un vértice de σ^n . Las caras de σ^n diferentes de σ^n mismo son llamadas caras propias.*

Si σ^n es el simplejo con vértices a_0, \dots, a_n escribiremos $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$.

Por ejemplo las caras del 2-simplejo $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ son; el 2 simplejo mismo, los 1-simplejos $\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle$ y $\langle a_0 a_2 \rangle$, y los 0-simplejos $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle$ y $\langle a_2 \rangle$.

Definición 1.1.6 *Los simplejos σ^m y σ^n están **unidos propiamente** siempre que ellos no se intersecten o la intersección $\sigma^m \cap \sigma^n$ sea una cara común de ambos σ^m y σ^n .*

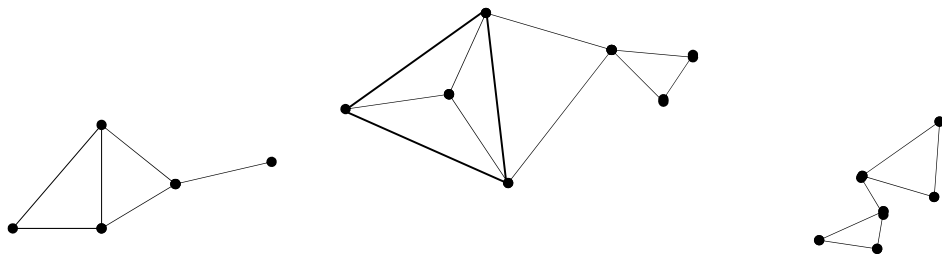


Figura 1.3. Unión propia de simplejos geométricos

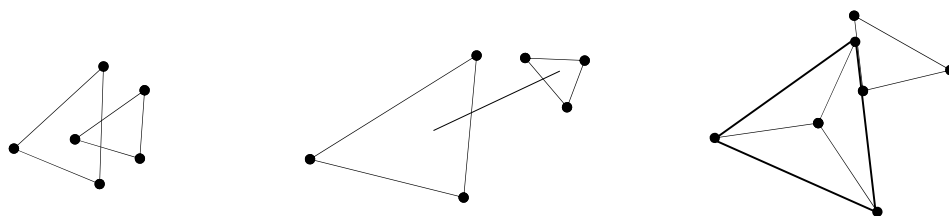


Figura 1.4. Unión impropia de simplejos geométricos

1.2. COMPLEJOS GEOMÉTRICOS

En esta sección encontraremos definiciones claras sobre complejos geométricos, poliedros asociados y espacio triangulable.

Definición 1.2.1 Un **complejo geométrico** (o *complejo simplicial* o *complejo*) es una familia finita K de simplejos geométricos los cuales están unidos propiamente y tiene la propiedad que cada cara de un miembro de K es también un miembro de K . La dimensión de K es el entero positivo r más grande, tal que K tiene un r -simplejo. La unión de los miembros de K con la topología del subespacio euclidiano es denotada por $|K|$ y es llamado **poliedro asociado con K** .

Ejemplo 1.2.1

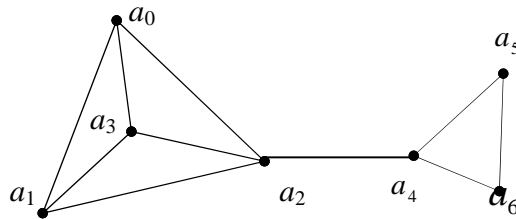


Figura 1.5. Complejo geométrico.

El complejo geométrico de la figura está conformado por el 3-simplejo $\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$, por los 2-simplejos $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a_1, a_3 \rangle, \langle a_0, a_2, a_3 \rangle, \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \langle a_4, a_5, a_6 \rangle$, por los 1-simplejos $\langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_0, a_3 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_1, a_3 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle, \langle a_2, a_4 \rangle, \langle a_4, a_5 \rangle, \langle a_4, a_6 \rangle, \langle a_5, a_6 \rangle$, que son las aristas y por los 0-simplejos $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_4 \rangle, \langle a_5 \rangle, \langle a_6 \rangle$, que son los vértices.

Definición 1.2.2 Sea X un espacio topológico, si existe un complejo geométrico K cuyo poliedro asociado $|K|$ es homeomorfo a X , decimos que X es un **espacio triangulable**, y el complejo K es llamado una **triangulación** de X .

En términos geométricos la triangulación es la división de una superficie o un polígono plano en un conjunto de triángulos (Ver Figura 1.6.), usualmente con la restricción de que cada lado del triángulo sea enteramente compartido por dos triángulos adyacentes, fue probado en 1925 que toda superficie tiene una triangulación, pero quizás requiere de un número infinito de triángulos (Francis y Weeks 1999).

Ejemplo 1.2.2 La Figura 1.6. (b) es la triangulación de la Figura 1.6. (a)

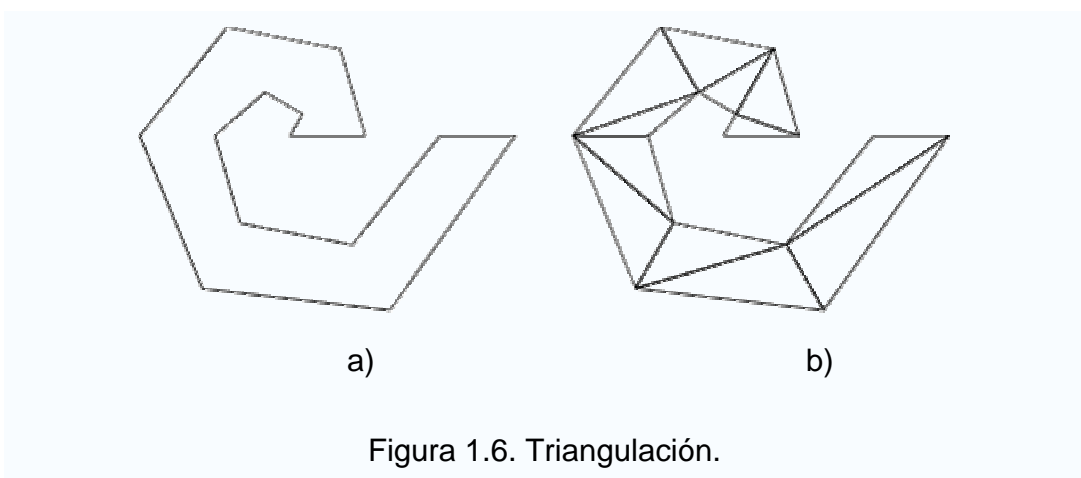


Figura 1.6. Triangulación.

Definición 1.2.3 La **clausura** del k -simplejo σ^k , denotada por $Cl(\sigma^k)$ es el complejo que consiste de σ^k y todas sus caras.

Definición 1.2.4 Si K es un complejo y r es un entero positivo, el **r -esqueleto** de K es el complejo que consiste de todos los simplejos de K de dimensión menor o igual que r .

Ejemplo 1.2.3 Considere un 3-simplejo $\sigma^3 = \langle a_0 a_1 a_2 a_3 \rangle$, el 2-esqueleto de la clausura de σ^3 es el complejo K cuyos simplejos son las caras propias de σ^3 , el poliedro asociado a K es la frontera de un tetraedro y por lo tanto es homeomorfo a la 2-esfera.

$$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1 \},$$

así S^2 es triangulable con K como una triangulación.

Ejemplo 1.2.4 La n -esfera

$$S^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \},$$

es un espacio triangulable para $n \geq 0$, el n -esqueleto de la clausura de un $(n+1)$ -simplejo σ^{n+1} es una triangulación de S^n .

Ejemplo 1.2.5 La banda de Möbius es obtenida identificando dos extremos opuestos de un rectángulo después de doblarlo 180 grados, esto puede fácilmente ser hecho con una banda de papel. La Figura 1.8. muestra una triangulación de la banda de Möbius, se entiende que los dos vértices marcados con a_0 son identificados, los dos vértices marcados con a_3 son identificados, los puntos correspondientes de los dos segmentos $\langle a_0 a_3 \rangle$ son identificados, y el espacio cociente resultante, el poliedro asociado a la triangulación es considerado como un subespacio topológico de R^3 .

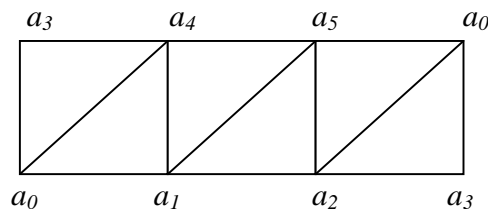


Figura 1.8. Triangulación de la banda de Möbius

Ejemplo 1.2.6 Un **toro** es obtenido de un cilindro al identificar puntos correspondientes de los extremos circulares sin deformarlos como se muestra en la Figura 1.10.

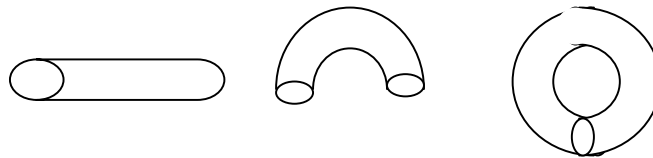


Figura 1.9. Toro

En el siguiente diagrama, observamos que al abrir el toro se obtiene un rectángulo, en el cual son identificados los vértices de la misma manera que en la banda de Möbius, para obtener una triangulación de un toro.

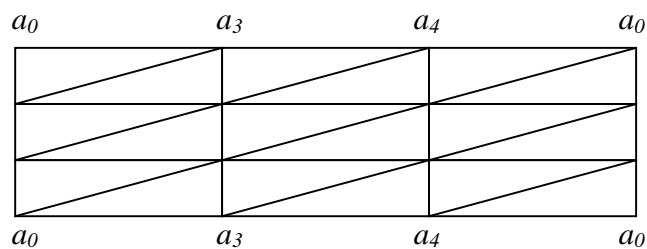


Figura 1.10.

1.3 ORIENTACIÓN DE SIMPLEJOS Y COMPLEJOS GEOMÉTRICOS

Encontramos a continuación la orientación de simplejos y complejos geométricos de forma simbólica y gráficamente.

Definición 1.3.1 Para $n \geq 1$, un **n -simplejo orientado**, es obtenido de un n -simplejo $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$ escogiendo un orden para sus vértices.

La clase de equivalencia de permutaciones pares del orden escogido determina el **simplejo orientado positivamente** $+\sigma^n$ mientras que la clase de equivalencia de las permutaciones impares determina el **simplejo orientado negativamente** $-\sigma^n$.

Un **complejo geométrico orientado** es obtenido de un complejo geométrico asignando una orientación a cada uno de sus simplejos.

Si los vértices a_0, \dots, a_p de un complejo K son los vértices de un p -simplejo σ^p , entonces el símbolo $+\langle a_0 \dots a_p \rangle$ denota la clase de las permutaciones pares del orden indicado a_0, \dots, a_p y $-\langle a_0 \dots a_p \rangle$ denota la clase de las permutaciones impares.

Si queremos la clase de las permutaciones pares de este orden determina el simplejo orientado positivamente, entonces escribiremos:

$$+\sigma^p = \langle a_0 \dots a_p \rangle, \text{ ó } +\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle.$$

Puesto que ordenar vértices requiere más de un vértice, necesitaremos no preocuparnos de orientar 0-simplejos. Será conveniente, sin embargo, considerar un 0-simplejo $\langle a_0 \rangle$ como orientado positivamente.

Ejemplo 1.3.1 En el 1-simplejo $\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$, vamos a acordar que el orden está dado por $a_0 < a_1$, entonces

$$+\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle \text{ y } -\sigma^1 = \langle a_1 a_0 \rangle$$

Consideremos que el segmento $\langle a_i a_j \rangle$ es dirigido de a_i hacia a_j , entonces $\langle a_0 a_1 \rangle$ y $\langle a_1 a_0 \rangle$ tienen direcciones opuestas.

Ejemplo 1.3.2 En el 2-simplejo $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, asignamos el orden $a_0 < a_1 < a_2$, entonces $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, $\langle a_1 a_2 a_0 \rangle$ y $\langle a_2 a_0 a_1 \rangle$ todos denotan $+\sigma^2$, mientras que $\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$, $\langle a_2 a_1 a_0 \rangle$ y $\langle a_1 a_0 a_2 \rangle$ todos denotan $-\sigma^2$ (Ver Figura 1.11.), entonces

$$+\sigma^2 = +\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \quad -\sigma^2 = -\langle a_0 a_1 a_2 \rangle = +\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$$

(Aquí $+\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$ denota la clase de permutaciones pares de a_0, a_2, a_1 y $-\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ denota la clase de permutaciones impares de a_0, a_1, a_2).

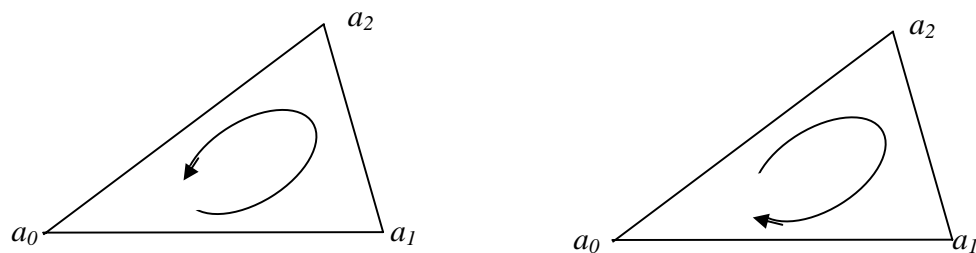


Figura 1.11. 2-simplejos orientados.

Un método de orientar un complejo es escoger un orden para todos sus vértices y usar este orden para introducir un orden sobre los vértices de cada simplejo. Este no es el único método, sin embargo, una orientación puede ser asignada a cada simplejo individualmente sin considerar la manera en la cual los simplejos están unidos. Desde este punto de vista, asumimos que cada complejo tiene asignada alguna orientación.

Vamos a desarrollar un método para describir la estructura topológica de un poliedro $|K|$ para determinar los huecos y las deformaciones las cuales ocurren en el complejo asociado K . En el análisis final, el factor determinante es la estructura topológica de $|K|$ y no la triangulación particular ni la orientación particular. Una triangulación es un método conveniente de visualizar el poliedro y convertirlo en una forma estándar. Una orientación es simplemente un vehículo conveniente para catalogar la disposición de los simplejos.

Tampoco la triangulación particular ni la orientación particular hacen diferencia en el resultado final.

Definición 1.3.2 Sea K un **complejo geométrico orientado** con simplejos σ^{p+1} y σ^p cuyas dimensiones difieren en 1. Asociamos con cada par (σ^{p+1}, σ^p) un número de incidencia $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ definido como sigue: Si σ^p no es una cara de σ^{p+1} entonces $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Supongamos que σ^p es una cara de σ^{p+1} , denotemos los vértices a_0, \dots, a_p de σ^p de tal forma que $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$, sea v el vértice de σ^{p+1} el cual no está en σ^p , entonces $+\sigma^{p+1} = \pm \langle va_0 \dots a_p \rangle$, ahora si $+\sigma^{p+1} = +\langle va_0 \dots a_p \rangle$ entonces $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ y si $+\sigma^{p+1} = -\langle va_0 \dots a_p \rangle$ entonces $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$.

Ejemplo 1.3.3 Si $+\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$ entonces $[\sigma^1, \langle a_0 \rangle] = -1$ y $[\sigma^1, \langle a_1 \rangle] = 1$, ahora si $+\sigma^2 = +\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, $+\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$ y $+\tau^1 = \langle a_0 a_2 \rangle$ entonces $[\sigma^2, \sigma^1] = 1$ y $[\sigma^2, \tau^1] = -1$.

Nótese que la Figura 1.11. la flecha indica que la orientación de σ^2 concuerda con la orientación de σ^1 pero no concuerda con la orientación de τ^1 .

Teorema 1.1 Sea K un complejo orientado, σ^p un p -simplejo orientado de K y σ^{p-2} una $(p-2)$ -cara de σ^p , entonces

$$\sum [\sigma^p, \sigma^{p-1}] [\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0, \quad \sigma^{p-1} \in K.$$

Demostración: Denotemos por v_0, \dots, v_{p-2} de σ^{p-2} los vértices de modo que $+\sigma^{p-2} = \langle v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$, entonces σ^p tiene dos vértices adicionales a y b , podemos asumir que $+\sigma^p = \langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle$.

Términos diferentes de cero aparecen en la suma solamente para dos valores de σ^{p-1} , a saber

$$\sigma_1^{p-1} = \langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle, \quad \sigma_2^{p-1} = \langle bv_0, \dots, v_{p-2} \rangle.$$

Se presentan cuatro casos determinados por las orientaciones de σ_1^{p-1} y σ_2^{p-1} .

Caso I. Supongamos que

$$+\sigma_1^{p-1} = +\langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle, \quad +\sigma_2^{p-1} = +\langle bv_0, \dots, v_{p-2} \rangle,$$

entonces,

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] &= -1, & [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= +1, \\ [\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] &= +1, & [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= +1, \end{aligned}$$

es decir la suma de los productos indicados es cero.

Caso II. Ahora si

$$+\sigma_1^{p-1} = +\langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle, \quad +\sigma_2^{p-1} = -\langle bv_0, \dots, v_{p-2} \rangle,$$

entonces,

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] &= -1, & [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= +1, \\ [\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] &= -1, & [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= -1, \end{aligned}$$

es decir que la conclusión deseada se obtiene en este caso también.

Caso III. Sí

$$+\sigma_1^{p-1} = -\langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle, \quad +\sigma_2^{p-1} = +\langle bv_0, \dots, v_{p-2} \rangle,$$

entonces,

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] &= +1, & [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= -1, \\ [\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] &= -1, & [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= -1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la conclusión deseada.

Caso IV. Supongamos que

$$+\sigma_1^{p-1} = -\langle av_0, \dots, v_{p-2} \rangle, \quad +\sigma_2^{p-1} = -\langle bv_0, \dots, v_{p-2} \rangle,$$

entonces,

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] &= -1, & [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= +1, \\ [\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] &= +1, & [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= +1, \end{aligned}$$

es decir, que la suma de los productos indicados es cero.

□

Definición 1.3.3 En el complejo orientado K sean $\{\sigma_i^p\}_{i=1}^{\alpha_p}$ y $\{\sigma_i^{p+1}\}_{i=1}^{\alpha_{p+1}}$ p -simplejos y $(p+1)$ -simplejos respectivamente de K , donde α_p y α_{p+1} denota el número de simplejos de dimensiones p y $p+1$ respectivamente. La matriz

$$\eta(p) = (\eta_{ij}(p)),$$

donde $\eta_{ij}(p) = [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^p]$, es llamada la **p -ésima matriz de incidencia** de K .

CAPITULO 2

GRUPOS DE HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

En esta capítulo definiremos los grupos de homología de un complejo, los cuales intuitivamente hablando describen el arreglo de los simplejos en los complejos, así que nos cuentan acerca de los “huecos” en el poliedro asociado.

2.1. CADENAS, CICLOS, FRONTERAS Y GRUPOS DE HOMOLOGÍA

En esta sección definimos las p -cadenas, sus características, grupo frontera y homologías de p -ciclos, dejando los ejemplos para la próxima sección.

Definición 2.1.1 Sea K un complejo simplicial orientado y $p \in \mathbb{Z}^+$, una **cadena p -dimensional, o p -cadena**, es una función $c_p : \sigma^p \rightarrow \mathbb{Z}$ de la familia de p -simplejos orientados de K a los enteros tal que para cada p -simplejo σ^p , $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$.

Una **cadena 0-dimensional ó 0-cadena** es una función de los 0-simplejos de K a los enteros, con la operación de la suma inducida por los enteros. La familia de p -cadenas forma un grupo llamado el **grupo de cadena p -dimensional** de K , este grupo es denotado por $C_p(K)$.

Una **p -cadena elemental** es una p -cadena c_p para la cual existe un p -simplejo σ^p tal que $c_p(\tau^p) = 0$, para cada p -simplejo τ^p distinto de σ^p . En tal caso, denotamos una p -cadena elemental por $g.\sigma^p$, donde

$g = c_p(+\sigma^p)$. Con esta notación, una p -cadena arbitraria d_p puede ser expresada como una suma finita:

$$d_p = \sum g_i \sigma_i^p,$$

de p -cadenas elementales, donde el índice i recorre todos los p -simplejos de K .

Los siguientes hechos deberían ser observados de la definición de p -cadenas:

1. Si $c_p = \sum f_i \sigma_i^p$ y $d_p = \sum g_i \sigma_i^p$ son dos p -cadenas sobre K , entonces

$$c_p + d_p = \sum (f_i + g_i) \sigma_i^p.$$

2. El inverso aditivo de la cadena c_p en $C_p(K)$ es la cadena

$$-c_p = \sum -f_i \sigma_i^p.$$

3. El grupo de cadena $C_p(K)$ es isomorfo a la suma directa del grupo Z de los enteros sobre la familia de p -simplejos de K . Es decir, si K tiene α_p p -simplejos, entonces $C_p(K)$ es isomorfo a la suma directa de α_p copias de Z .

Un isomorfismo está dado por la correspondencia

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_{\alpha_p})$$

En general, podemos utilizar otros sistemas algebraicos distintos de los enteros como el conjunto de coeficientes para las p -cadenas. Cualquier grupo conmutativo, anillo conmutativo o campo podría ser usado haciendo así $C_p(K)$ un grupo conmutativo, un módulo o un espacio vectorial. Salvo dos excepciones, para mayor concordancia con la definición original de Poincaré solo utilizaremos enteros para cadenas.

Definición 2.1.2 Si $g.\sigma^p$ es una p -cadena elemental con $p \geq 1$, la **frontera** de $g.\sigma^p$ denotada por $\partial(g.\sigma^p)$, viene dada por

$$\partial(g.\sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g.\sigma^{p-1}, \quad \sigma_i^{p-1} \in K.$$

El operador frontera ∂ es extendido por linealidad a un homomorfismo

$$\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

En otras palabras, si $c_p = \sum g_i \sigma_i^p$ es una p -cadena arbitraria, entonces definimos

$$\partial(c_p) = \sum \partial(g_i \sigma_i^p).$$

La **frontera de una 0-cadena** es definida como cero.

Estrictamente hablando, diríamos que hay un homomorfismo frontera

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K).$$

El subíndice es engorroso y usualmente lo omitiremos puesto que la dimensión involucrada esta indicada por el grupo cadena $C_p(K)$.

Teorema 2.1 Si K es un complejo orientado y $p \geq 2$, entonces la composición $\partial\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ en el diagrama

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-2}(K)$$

es el homomorfismo trivial.

Demostración: Debemos probar que $\partial\partial(c_p) = 0$, para cada p -cadena. Para hacer esto, es suficiente mostrar que $\partial\partial(g.\sigma^p) = 0$, para cada p -cadena elemental $g.\sigma^p$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}\partial\partial(g.\sigma^p) &= \partial\left(\sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g.\sigma_i^{p-1}\right) = \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \partial([\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g.\sigma_i^{p-1}), \\ &= \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}][\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}] g.\sigma_j^{p-2}.\end{aligned}$$

Invirtiendo el orden de sumación y agrupando los coeficientes de cada simplejo σ_i^{p-2} obtenemos

$$\partial\partial(g.\sigma^p) = \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} \left(\sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}][\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}] g.\sigma_j^{p-2} \right).$$

Como el teorema 1.1. asegura que $\sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}][\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}]$ es 0 para cada σ_j^{p-2} , se tiene que

$$\partial\partial(g.\sigma^p) = 0.$$

□

Definición 2.1.3 Sea K un complejo orientado. Si p es un entero positivo, un ciclo p -dimensional sobre K , o p -ciclo, es una p -cadena z_p tal que $\partial(z_p) = 0$. La familia de p -ciclos es el núcleo del homomorfismo $\partial: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ y es un subgrupo de $C_p(K)$, denotado por $Z_p(K)$ y llamado **el grupo de ciclos p -dimensional** de K .

Puesto que hemos definido la frontera de cada 0-cadena como 0, ahora definimos 0-ciclo como sinónimo con 0-cadena, así el grupo $Z_0(K)$ de 0-ciclos es el grupo de $C_0(K)$ de 0-cadenas.

Si $p \geq 0$, una p -cadena b_p es una **frontera p -dimensional** sobre K , o p -frontera, si existe una $(p+1)$ -cadena c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = b_p$. La familia de p -fronteras es la imagen de las $\partial(C_{p+1}(K))$ de las $(p+1)$ -cadenas por el

homomorfismo ∂ y es un subgrupo de $C_p(K)$. Este subgrupo es llamado el **grupo frontera p -dimensional** de K y es denotado por $B_p(K)$.

Si n es la dimensión de K , entonces no existen p -cadenas sobre K para $p \geq n$. En este caso decimos que $C_p(K)$ es el grupo trivial $\{0\}$. En particular, no existen $(n+1)$ -cadenas sobre K , es decir, $C_{n+1}(K) = \{0\}$ y por lo tanto $B_n(K) = \{0\}$.

Teorema 2.2 Si K es un complejo orientado entonces $B_p(K) \subset Z_p(K)$, para cada entero p tal que $0 \leq p \leq n$ donde n es la dimensión de K .

Demostración: Sea $b_p \in B_p(K)$, entonces existe una $(p+1)$ -cadena C_{p+1} tal que $\partial(C_{p+1}) = b_p$, por tanto, por el teorema anterior se tiene

$$\partial b_p = \partial(\partial(C_{p+1})) = 0,$$

Por lo tanto $b_p \in Z_p(K)$. □

Pensamos intuitivamente un p -ciclo como una combinación lineal de p -simplejos los cuales hacen un circuito completo. Los p -ciclos los cuales encierran huecos son los ciclos interesantes, y ellos son los únicos que no son frontera de $(p+1)$ -cadenas. Un p -ciclo el cual es la frontera de una $(p+1)$ -cadena decimos que es **homólogo a cero** (Poincaré). La separación de ciclos en estas categorías se evidencia por la siguiente definición.

Definición 2.1.4 Dos p -ciclos w_p y z_p sobre un complejo K son **homólogos**, lo cual denotamos por $w_p \sim z_p$, si existe una $(p+1)$ -cadena C_{p+1} tal que

$$\partial(C_{p+1}) = w_p - z_p.$$

Si un p -ciclo t_p es la frontera de una $(p+1)$ -cadena, decimos que t_p es **homólogo a cero** y escribimos $t_p \sim 0$.

Esta relación de homología para p -ciclos es una relación de equivalencia y particiona $Z_p(K)$ en clases de homología

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\}.$$

La clase de homología $[z_p]$ es precisamente la coclase

$$z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial(c_{p+1}) : \partial(c_{p+1}) \in B_p(K)\}.$$

De ahí que las clases de homología son realmente los miembros del grupo cociente $Z_p(K)/B_p(K)$. Podemos usar la estructura del grupo cociente para sumar clases de homología.

Definición 2.1.5 Si K es un complejo orientado y p un entero no negativo, el **grupo de homología p -dimensional** de K es el grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K).$$

2.2. EJEMPLOS DE GRUPOS DE HOMOLOGIA

Presentamos los siguientes ejemplos que ilustran las definiciones de la sección anterior.

Ejemplo 2.2.1 Sea K la clausura de un 2-simplejo $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ con orientación inducida por el orden $a_0 < a_1 < a_2$. Así K tiene 0-simplejos $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle$ y $\langle a_2 \rangle$, 1-simplejos $\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle$ y $\langle a_0 a_2 \rangle$ orientados positivamente y un 2-simplejo $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ orientado positivamente.

Una 0-cadena sobre K es una suma de la forma

$$c_0 = g_0 \cdot \langle a_0 \rangle + g_1 \cdot \langle a_1 \rangle + g_2 \cdot \langle a_2 \rangle,$$

donde $g_0, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$, de donde se sigue que $C_0(K) = Z_0(K)$ es isomorfo a la suma directa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ de tres copias del grupo de los enteros. Una 1-cadena sobre K es una suma de la forma

$$c_1 = h_0 \cdot \langle a_0 a_1 \rangle + h_1 \cdot \langle a_1 a_2 \rangle + h_2 \cdot \langle a_0 a_2 \rangle,$$

donde $h_0, h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$, así $C_1(K)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. También

$$\partial(c_1) = (-h_0 - h_2) \cdot \langle a_0 \rangle + (h_0 - h_1) \langle a_1 \rangle + (h_1 + h_2) \cdot \langle a_2 \rangle. \quad (1)$$

Por lo tanto c_1 es un 1-ciclo si y solamente si h_0, h_1 y h_2 satisfacen las ecuaciones

$$-h_0 - h_2 = 0, h_0 - h_1 = 0 \text{ y } h_1 + h_2 = 0.$$

Este sistema da $h_0 = h_1 = -h_2$ es decir los 1-ciclos son cadenas de la forma

$$h \cdot \langle a_0 a_1 \rangle + h \cdot \langle a_1 a_2 \rangle - h \langle a_0 a_2 \rangle, \quad (2)$$

donde h es un entero. Así $Z_1(K)$ es isomorfo al grupo \mathbb{Z} de los enteros.

El único 2-simplejo de K es $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ de K , es decir las únicas 2-cadenas son de la forma $h \cdot \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, donde h es un entero. Así $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Puesto que

$$\partial(h \cdot \langle a_0 a_1 a_2 \rangle) = h \cdot \langle a_0 a_1 \rangle + h \cdot \langle a_1 a_2 \rangle - h \cdot \langle a_0 a_2 \rangle, \quad (3)$$

entonces $\partial(h \cdot \langle a_0 a_1 a_2 \rangle) = 0$ solamente cuando $h = 0$. Así $Z_2(K) = \{0\}$ por lo tanto $H_2(K) = \{0\}$.

De las ecuaciones (2) y (3), observamos que 1-ciclos y 1-fronteras tienen precisamente la misma forma, es decir que $C_1(K) = Z_1(K)$, y de ahí que $H_1(K) = \{0\}$.

De la ecuación (1) observamos que un 0-ciclo

$$g_0 \cdot \langle a_0 \rangle + g_1 \cdot \langle a_1 \rangle + g_2 \cdot \langle a_2 \rangle, \quad (4)$$

es una 0-frontera si y solamente si existen enteros h_0, h_1 y h_2 tales que

$$-h_0 - h_2 = g_0, h_0 - h_1 = g_1 \text{ y } h_1 + h_2 = g_2.$$

Entonces $g_0 + g_1 = -g_2$ de modo que para 0-fronteras, dos coeficientes son arbitrarios, y el tercero está determinado por los dos primeros, así, $B_0(K) \cong Z \oplus Z$. Puesto que

$Z_0(K) \cong Z \oplus Z \oplus Z$, sospechamos que $H_0(K) \cong Z$.

Para completar la demostración, observemos que para cualquier 0-ciclo expresado en la ecuación (4)

$$g_0 \cdot \langle a_0 \rangle + g_1 \cdot \langle a_1 \rangle + g_2 \cdot \langle a_2 \rangle = \partial(g_1 \cdot \langle a_0 a_1 \rangle + g_2 \cdot \langle a_0 a_2 \rangle) - (g_0 + g_1 + g_2) \langle a_0 \rangle,$$

es decir que cualquier 0-ciclo es homólogo a un 0-ciclo de la forma $t \cdot \langle a_0 \rangle$, con t un entero, como cada clase de 0-homología tiene un representante de la forma $t \cdot \langle a_0 \rangle$ se concluye que $H_0(K)$ es isomorfo a Z .

En resumen tenemos que $H_0(K) \cong Z$, $H_1(K) = \{0\}$ y $H_2(K) = \{0\}$.

Los grupos triviales $H_1(K)$ y $H_2(K)$ indican la ausencia de huecos en el poliedro $|K|$. Como veremos más adelante, el hecho que $H_0(K)$ es isomorfo a Z indica que $|K|$ tiene una componente.

Ejemplo 2.2.2 Sea M la triangulación de **la banda de Möbius** mostrada en la Figura 1.8. con orientación inducida por el orden $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

No existen 3-simplejos en M , de este modo $B_2(M) = \{0\}$.

Suponga que

$$w = g_0 \cdot \langle a_0 a_3 a_4 \rangle + g_1 \cdot \langle a_0 a_1 a_4 \rangle + g_2 \cdot \langle a_1 a_4 a_5 \rangle + g_3 \cdot \langle a_1 a_2 a_5 \rangle + g_4 \cdot \langle a_0 a_2 a_5 \rangle + g_5 \cdot \langle a_0 a_2 a_3 \rangle,$$

es un 2-ciclo. Al calcular $\partial(w)$, obtenemos a $\langle a_3 a_4 \rangle$ como coeficiente de g_0 .

Ahora $\partial(w) = 0$, si $g_0 = 0$. Similarmente obtenemos que cada coeficiente de la combinación lineal de w es cero.

Así, $Z_2(M) = \{0\}$ y por lo tanto $H_2(M) = \{0\}$. Intuitivamente podemos ver que las 1-cadenas

$$z = 1 \cdot \langle a_0 a_1 \rangle + 1 \cdot \langle a_1 a_2 \rangle + 1 \cdot \langle a_2 a_3 \rangle - 1 \cdot \langle a_0 a_3 \rangle,$$

$$z' = 1.\langle a_0 a_3 \rangle + 1.\langle a_3 a_4 \rangle + 1.\langle a_4 a_5 \rangle - 1.\langle a_0 a_5 \rangle,$$

son 1-ciclos. (Los cuales son circuitos completos comenzando en a_0).

Calculamos

$$\begin{aligned}\partial z &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 - (a_3 - a_0), \\ \partial z &= 0.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\partial z' &= a_3 - a_0 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 - (a_5 - a_0), \\ \partial z' &= 0.\end{aligned}$$

Luego z y z' son ciclos, Sin embargo $z - z'$ atraviesa la frontera de M , así $z - z'$ debería ser la frontera de alguna 2-cadena, pero

$$z - z' = \partial(1.\langle a_0 a_1 a_4 \rangle + 1.\langle a_1 a_2 a_5 \rangle + 1.\langle a_0 a_2 a_3 \rangle - 1.\langle a_0 a_2 a_5 \rangle - 1.\langle a_1 a_4 a_5 \rangle - 1.\langle a_0 a_3 a_4 \rangle),$$

por lo tanto $z \sim z'$.

Un cálculo similar verifica el hecho que cualquier 1-ciclo es homólogo a un múltiplo de z , por lo tanto $H_1(M) = \{[g.z]: g \text{ es un entero}\}$, así $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Este resultado indica que el poliedro $|M|$ tiene un hueco rodeado por 1-simplejos.

Para determinar $H_0(M)$, obsérvese que cualquiera dos 0-cadenas elementales $1.\langle a_i \rangle$ y $1.\langle a_j \rangle$ (i, j toman valores de 0 a 5) son homólogas.

Por ejemplo,

$$1.\langle a_5 \rangle - 1.\langle a_0 \rangle = \partial(1.\langle a_0 a_4 \rangle - 1.\langle a_4 a_5 \rangle),$$

de ahí que $H_0(M) = \{[g.\langle a_0 \rangle]: g \text{ es un entero}\}$, así $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$. Como en el ejemplo anterior, esto indica que $|M|$ tiene una única componente.

Ejemplo 2.2.3 El plano proyectivo es obtenido de un disco finito identificando cada par de puntos diametralmente opuestos. Una triangulación

P del plano proyectivo, con orientaciones indicadas por las flechas, es mostrada en la Figura 2.1.

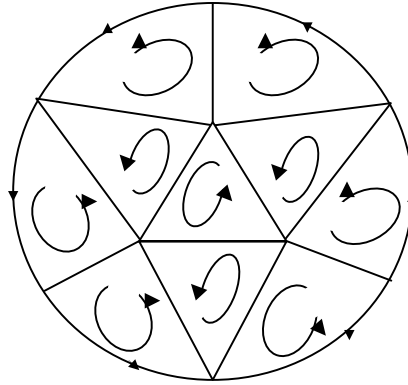


Figura 2.1. Triangulación del plano proyectivo.

No existen 3-simplejos, así $B_2(P) = \{0\}$. Para calcular $Z_2(P)$, observemos que cada 1-simplejo σ^1 de P es una cara de exactamente dos 2-simplejos σ_1^2 y σ_2^2 . Obsérvese que cuando σ^1 es $\langle a_3a_4 \rangle, \langle a_4a_5 \rangle$ ó $\langle a_5a_3 \rangle$, ambos números de incidencia $[\sigma_1^2, \sigma^1]$ y $[\sigma_2^2, \sigma^1]$ son $+1$. Para todas las otras escogencias de σ^1 , los dos números de incidencia son negativos mutuamente. Llamemos $\langle a_3a_4 \rangle, \langle a_4a_5 \rangle$ y $\langle a_5a_3 \rangle$ 1-simplejos de tipo I y los otros 1-simplejos de tipo II.

Supongamos que w es un 2-ciclo. Con el fin de que los coeficientes de los 1-simplejos del tipo II en $\partial(w)$ sean 0, todos los coeficientes en w deben tener un valor común, digamos g . Pero

$$\partial(w) = 2g \cdot \langle a_3a_4 \rangle + 2g \cdot \langle a_4a_5 \rangle + 2g \cdot \langle a_5a_3 \rangle, \quad (5)$$

puesto que ambos números de incidencia para los 1-simplejos de tipo I son $+1$. Se tiene que es un 2-ciclo solamente cuando $g = 0$, así $Z_2(P) = \{0\}$ y $H_2(P) = \{0\}$.

Observemos que cualquier 1-ciclo es homólogo a un múltiplo de

$$z = 1.\langle a_3 a_4 \rangle + 1.\langle a_4 a_5 \rangle + 1.\langle a_5 a_3 \rangle,$$

por lo tanto, la ecuación (5) muestra que cualquier múltiplo par de z es una frontera. Así $H_1(P) \cong \mathbb{Z}_2$, el grupo de los enteros módulo 2. Este resultado indica el torcimiento que ocurre alrededor del “hueco” en el poliedro $|P|$.

En el cálculo de los grupos de homología, es algunas veces conviene expresar una cadena elemental en términos de un simplejo orientado negativamente. Con el fin de ser capaz de hacer esto más adelante, acordamos que el símbolo $g.(-\sigma^p)$ puede ser usado para denotar la p -cadena elemental $-g.(\sigma^p)$.

En otras palabras, si $\langle a_0 \dots a_p \rangle$ representa un p -simplejo orientado positiva o negativamente, entonces $g.\langle a_0 \dots a_p \rangle$ denota la p -cadena elemental la cual asigna el valor g a la orientación determinada por la clase de permutaciones pares del orden dado y asigna el valor $-g$ a la orientación determinada por la clase de permutaciones impares.

Volvamos al ejemplo del plano proyectivo para una ilustración de esta notación. En ese ejemplo, $\langle a_5 a_3 \rangle$ denota un 1-simplejo orientado positivamente, los símbolos $g.\langle a_5 a_3 \rangle$ y $-g.\langle a_3 a_5 \rangle$ ahora denotan la misma 1-cadena elemental, una 2-cadena elemental $h.\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ puede ser escrita en cualquiera de las siguientes seis maneras:

$$h.\langle a_0 a_1 a_2 \rangle = h.\langle a_1 a_2 a_0 \rangle = h.\langle a_2 a_0 a_1 \rangle = -h.\langle a_1 a_0 a_2 \rangle = -h.\langle a_0 a_2 a_1 \rangle = -h.\langle a_2 a_1 a_0 \rangle.$$

2.3. LA ESTRUCTURA DE LOS GRUPOS DE HOMOLOGIA

¿Qué posibilidades existen para que los grupos de homología $H_p(K)$ de un complejo K si tomamos nuestro grupo de coeficientes como los enteros? La respuesta esta suministrada por consideraciones teóricas de grupo.

Supongamos que K tiene α_p p -simplejos, entonces $C_p(K)$ es isomorfo a $Z \oplus \dots \oplus Z$ (α_p sumandos), en otras palabras, $C_p(K)$ es un grupo abeliano libre sobre α_p generadores, puesto que cada subgrupo de un grupo abeliano libre es un grupo abeliano libre, entonces $Z_p(K)$ y $B_p(K)$ son ambos grupos abelianos libres. El grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K),$$

puede no ser libre, pero sus posibilidades están dadas por el teorema de la descomposición para grupos abelianos finitamente generados

$$H_p(K) = G \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_m,$$

donde G es un grupo abeliano libre y cada T_i es un grupo cíclico finito. La suma directa $T_1 \oplus \dots \oplus T_m$ es llamada el subgrupo torsión de $H_p(K)$. Como en el ejemplo con el plano proyectivo, el subgrupo torsión describe el torcimiento en el poliedro $|K|$.

La existencia de subgrupos de torsión explica por qué los enteros modulo 2 no son generalmente usados con el conjunto de coeficientes en la teoría de homología. Los grupos cíclicos finitos T_1, \dots, T_m los cuales componen el subgrupo torsión son grupos cocientes de Z . Si usamos el grupo Z_2 de enteros modulo 2 en vez de Z , no debería haber manera de reconocer la torsión puesto que Z_2 no admite subgrupos propios.

Nótese también que la orientación no tiene sentido en el caso modulo 2. Para problemas en los cuales la orientación y el subgrupo torsión no son

importantes, los enteros modulo 2 pueden ser una elección efectiva como el grupo de coeficientes.

El siguiente teorema muestra que los grupos de homología de un complejo son independientes de la escogencia de orientación para sus simplejos.

Teorema 2.3 *Sea K un complejo geométrico con dos orientaciones, y sean K_1 y K_2 que denotan los complejos geométricos orientados resultantes, entonces los grupos de homología $H_p(K_1)$ y $H_p(K_2)$ son isomorfos para cada dimensión p .*

Demostración: Para un p -simplejo σ^p de K , sea ${}^i\sigma^p$ que denota la orientación positiva de σ^p en el complejo K_i , $i=1,2$ entonces existe una función α definida sobre los simplejos de K tales que $\alpha(\sigma^p)$ es ± 1 y ${}^1\sigma^p = \alpha(\sigma^p) {}^2\sigma^p$.

Definamos una secuencia $\varphi = \{\varphi_p\}$ de homomorfismos

$$\varphi: C_p(K_1) \rightarrow C_p(K_2)$$

dado por

$$\varphi_p(\sum g_i \cdot {}^1\sigma_i^p) = \sum \alpha(\sigma_i^p) g_i \cdot {}^2\sigma_i^p,$$

donde, $\sum g_i \cdot {}^1\sigma_i^p$ representa una p -cadena sobre K_1 .

Para una p -cadena elemental $g \cdot {}^1\sigma_i^p$ sobre K_1 con $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{p-1} \partial(g \cdot {}^1\sigma_i^p) &= \varphi_{p-1} \left(\sum_{\sigma^{p-1} \in K} g [{}^1\sigma^p, {}^1\sigma^{p-1}] \cdot {}^1\sigma^{p-1} \right) \\ &= \sum_{\sigma^{p-1} \in K} \alpha(\sigma^{p-1}) g [{}^1\sigma^p, {}^1\sigma^{p-1}] \cdot {}^2\sigma^{p-1} \\ &= \sum_{\sigma^{p-1} \in K} \alpha(\sigma^{p-1}) g \alpha(\sigma^{p-1}) \alpha(\sigma^p) [{}^2\sigma^p, {}^2\sigma^{p-1}] \cdot {}^2\sigma^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(\sigma^p)g \sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p-1}] \cdot \sigma^{p-1} = \partial(\alpha(\sigma^p)g) \cdot \sigma^p \\
&= \partial\varphi_p(g \cdot \sigma^p),
\end{aligned}$$

así, se cumple la relación $\varphi_{p-1}\partial = \partial\varphi_p$ mostrada en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C_p(K_1) & \xrightarrow{\varphi_p} & C_p(K_2) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
C_{p-1}(K_1) & \xrightarrow{\varphi_{p-1}} & C_{p-1}(K_2)
\end{array}$$

Si $z_p \in Z_p(K_1)$, entonces

$$\partial\varphi_p(z_p) = \varphi_{p-1}\partial(z_p) = \varphi_{p-1}(0) = 0,$$

así, $\varphi_p(z_p) \in Z_p(K_2)$, por lo tanto $\varphi_p Z_p(K_1)$ es un subconjunto de $Z_p(K_2)$.

Si $\partial(c_{p+1}) \in B_p(K_1)$, entonces $\partial_p(c_{p+1}) \in \partial\varphi_{p+1}(c_{p+1})$, y por tanto $\varphi_p \partial(c_{p+1})$ está en $B_p(K_2)$, así φ_p proyecta $B_p(K_1)$ en $B_p(K_2)$ e induce un homomorfismo φ_p^* del grupo cociente $H_p(K_1) = Z_p(K_1)/B_p(K_1)$ a $H_p(K_2) = Z_p(K_2)/B_p(K_2)$ definido por

$$\varphi_p^*([z_p]) = [\varphi_p(z_p)],$$

para cada clase de homología $[z_p]$ en $H_p(K_1)$.

Intercambiando K_1, K_2 se produce una secuencia de homomorfismos:

$$\psi = \{\psi_p\}$$

$$\psi_p : C_p(K_2) \rightarrow C_p(K_1)$$

tales que φ_p y ψ_p son inversos el uno del otro para cada p . Esto implica que φ_p^* es el inverso de ψ_p^* de ahí que

$$\varphi_p^* : H_p(K_1) \rightarrow H_p(K_2)$$

es un isomorfismo para cada dimensión p .

□

Como resaltamos antes, la estructura del grupo de homología cero dimensional indica si el poliedro $|K|$ es o no conexo. Realmente la situación es bastante simple, no existe torsión en dimensión cero, y el rango del grupo abeliano libre $H_0(K)$ es el número de componentes del poliedro $|K|$.

Definición 2.3.1 Sea K un complejo. Dos simplejos s_1 y s_2 están **conectados** si se satisface una de las dos condiciones siguientes:

1. $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$
2. Existe una sucesión $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ de 1-simplejos de K tales que $s_1 \cap \sigma_1$ es un vértice de s_1 , $s_2 \cap \sigma_p$ es vértice de s_2 y para $1 \leq i \leq p$, $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ es un vértice común de σ_i y σ_{i+1} .

La relación “estar conectados” es una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son llamadas componentes combinatorias de K . El complejo K se dice que está conexo si éste tiene una única componente combinatoria.

Teorema 2.4 Sea K un complejo con r componentes combinatorias, entonces $H_0(K)$ es isomorfo a la suma directa de r copias del grupo Z de los enteros.

Demostración: Sea K' una componente combinatoria de K y $\langle a' \rangle$ un 0-simplejo en K' . Dado cualquier 0-simplejo $\langle b \rangle$ en K' , existe una secuencia de 1-simplejos

$$\langle ba_0 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \dots, \langle a_p a' \rangle,$$

de b a a' tales que cada dos 1-simplejos sucesivos tiene un vértice común. Si g es un entero, definimos una 1-cadena c_1 sobre la secuencia de 1-simplejos asignando g o $-g$ a cada simplejo (dependiendo de la orientación), así que $\partial(c_1)$ es $g \cdot \langle b \rangle - g \cdot \langle a' \rangle$ o $g \cdot \langle b \rangle + g \cdot \langle a' \rangle$, de donde se sigue que cualquier 0-cadena elemental $g \cdot \langle b \rangle$ es homóloga a una de las 0-cadenas $g \cdot \langle a' \rangle$ o $-g \cdot \langle a' \rangle$, se sigue que cualquier 0-cadena sobre K' es homóloga a una 0-cadena elemental $h \cdot \langle a' \rangle$, donde h es algún entero.

Aplicando este resultado a cada componente combinatoria K_1, \dots, K_r de K , existe un vértice a^i de K_i tal que cualquier 0-ciclo sobre K_i es homólogo a una 0-cadena de la forma $h_i \cdot \langle a^i \rangle$, donde h_i es un entero, entonces para cualquier 0-ciclo c_0 sobre K , existen enteros h_1, \dots, h_r tales que

$$c_0 \sim \sum_{i=1}^r h_i \cdot \langle a^i \rangle.$$

Sí dos de tales 0-cadenas $\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle$ y $\sum g_i \cdot \langle a^i \rangle$ representan la misma clase de homología, entonces

$$\sum (g_i - h_i) \cdot \langle a^i \rangle = \partial(c_1),$$

para algún 1-cadena c_1 . Puesto que a^i y a^j pertenecen a diferentes componentes combinatorias cuando $i \neq j$, entonces la ecuación anterior es imposible a menos que $g_i = h_i$ para cada i . Así que cada clase de homología $[c_0]$ en $H_0(K)$ tiene un único representante de la forma $\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle$. La función

$$\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle \cdot g \rightarrow (h_1, \dots, h_r)$$

es el isomorfismo requerido entre $H_0(K)$ y la suma directa de r copias de \mathbb{Z} .

□

Corolario 2.1 *Si un poliedro $|K|$ tiene r componentes entonces $H_0(K)$ es isomorfo a la suma directa de r copias de \mathbb{Z} .*

CAPITULO 3

LA CARACTERISTICA DE EULER

Un famoso resultado descubierto por Euler en 1752 dice que si $|K|$ es un poliedro homeomorfo a la 2-esfera S^2 ($|K|$ es una triangulación de la 2-esfera) con V vértices, A aristas y C caras entonces

$$V - A + C = 2.$$

La primera aplicación real de Poincaré de la teoría de homología fue una generalización de la fórmula de Euler para poliedros en general. Ese resultado es conocido como **el teorema de Euler-Poincaré**. A continuación se presentan los dos teoremas, además de algunas definiciones relacionadas.

3.1. TEOREMA DE EULER-POINCARÉ

A continuación daremos a conocer un resultado muy importante como es el teorema de Euler-Poincaré, realizando la demostración de la forma más explícita posible.

Definición 3.1.1 Sea K un complejo orientado, una familia $\{z_p^1, \dots, z_p^r\}$ de p -ciclos es *linealmente independiente con respecto a homología*, o **linealmente independiente** $\text{mod } B_p(K)$, significa que no existen enteros g_1, \dots, g_r , no todos ceros tales que la cadena $\sum g_i z_p^i$ es homóloga a 0. El entero más grande r para el cual existen r p -ciclos linealmente independientes con respecto a la homología es denotado por $R_p(K)$ y es llamado el **p -ésimo número de Betti** del complejo K .

En el teorema que sigue, asumimos que el grupo de coeficientes ha sido escogido como el conjunto de números racionales y no los enteros. Esto se puede hacer porque la independencia lineal con coeficientes enteros es equivalente a la independencia lineal con coeficientes racionales y este cambio no altera los valores de los números de Betti.

Teorema 3.1. (Teorema de Euler-Poincaré) *Sea K un complejo geométrico orientado de dimensión n , para $p = 0, 1, \dots, n$ sea α_p el número de p -simplejos de K , entonces*

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K),$$

donde $R_p(K)$ denota el p -ésimo número de Betti de K .

Demostración: Puesto que K es el único complejo bajo consideración, la notación será simplificada para omitir referencias a éste en las notaciones de grupo. Notemos que C_p, Z_p, B_p son espacios vectoriales sobre el campo de los números racionales.

Sean $\{d_p^i\}$ un conjunto maximal de p -cadenas tales que ninguna combinación lineal propia de los d_p^i es un ciclo, y D_p un subespacio vectorial de C_p generado por $\{d_p^i\}$, entonces $D_p \cap Z_p = \{0\}$ y como un espacio vectorial, $C_p = Z_p \oplus D_p$ es decir, $Z_p \cap D_p = \{0\}$ y $C_p = Z_p + D_p$. De ahí que

$$\alpha_p = \dim D_p + \dim Z_p$$

donde la abreviación “dim” denota la dimensión del espacio vectorial.

Para $p = 0, 1, \dots, n-1$, sea $b_p^i = \partial(d_{p+1}^i)$. El conjunto $\{b_p^i\}$ forma una base para B_p .

Sea $\{z_p^i\}, i = 1, \dots, R_p$, un conjunto maximal de p -ciclos linealmente independientes mod B_p , estos ciclos generan un subespacio G_p de Z_p y $Z_p = G_p \oplus B_p$, $1 \leq p \leq n-1$, así,

$$\dim Z_p = \dim G_p + \dim B_p = R_p + \dim B_p,$$

puesto que $R_p = \dim G_p$, entonces,

$$R_p = \dim Z_p - \dim B_p = \alpha_p - \dim D_p - \dim B_p,$$

Notemos que B_p es generado por las fronteras de las cadenas elementales

$$\partial(1.\sigma_i^{p+1}) = \sum \eta_{ij}(p).\sigma_j^p,$$

donde $(\eta_{ij}(p)) = \eta(p)$ es la p -ésima matriz de incidencia, es decir,

$$B_p = \text{rango}(\eta(p)).$$

Puesto que el número de d_{p+1}^i es el mismo número de b_p^i , entonces

$$\dim D_{p+1} = \dim B_p = \text{rango}(\eta(p)),$$

Entonces

$$\begin{aligned} R_p &= \alpha_p - \dim D_p - \dim B_p \\ &= \alpha_p = -\text{rango}(\eta(n-1)) - \text{rango}(\eta(p)), \end{aligned}$$

Notemos también que

$$R_0 = \dim Z_0 - \dim B_0 = \alpha_0 - \text{rango}(\eta(0))$$

$$R_n = \dim Z_n = \alpha_n - \dim D_n = \alpha_n - \text{rango}(\eta(n-1)).$$

En la suma alternada $\sum_{p=0}^n (-1)^p R_p$, todos los términos $\text{rango}(\eta(p))$ se cancelan, y así obtenemos

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p R_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p. \quad \square$$

Definición 3.1.2 Si K es un complejo de dimensión n , el número

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p,$$

es llamado **la Característica Euler** de K .

Definición 3.1.3 (a) Un poliedro rectilíneo en el 3-espacio euclidiano R^3 es un sólido limitado por polígonos convexos unidos propiamente. Los polígonos frontera son llamados caras, la intersección de las caras son llamadas aristas, y las intersecciones de las aristas son llamadas vértices.

(b) Un poliedro simple es un poliedro rectilíneo cuya frontera es homeomorfa a la 2-esfera S^2 .

(c) Un poliedro regular es un poliedro rectilíneo cuyas caras son polígonos planos regulares y cuyos ángulos son congruentes.

3.2. TEOREMA DE EULER

Como los números de Betti de la 2-esfera S^2 son

$$R_0(S^2) = 1, R_1(S^2) = 0, R_2(S^2) = 1,$$

entonces S^2 tiene la característica de Euler

$$\chi(S^2) = \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Aplicando el teorema de Euler–Poincaré a S^2 produce el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Euler) Si S es un poliedro simple con V vértices, A aristas, y C caras, entonces

$$V - A + C = 2.$$

Demostración: Las cosas son ligeramente complicadas por el hecho de que las caras de S no necesariamente son triangulares. Esta situación es corregida como sigue:

Considere una cara τ de S que tiene n_0 vértices y n_1 aristas. Calculando $\text{vértices} - \text{aristas} + \text{caras}$ obtenemos $n_0 + n_1 + 1$ por la cara τ . Escogemos un nuevo vértice v en el interior de τ y una el nuevo vértice a cada uno de los vértices originales por un segmento de recta como es ilustrado en la Figura 2.3. En la triangulación de τ , un nuevo vértice y n_0 nuevas aristas son sumadas. Además, la cara τ es reemplazada por n_0 nuevas caras.

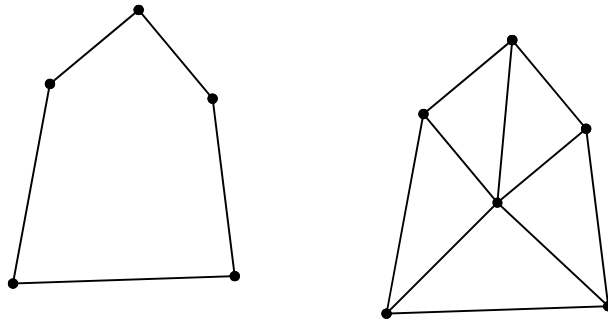


Figura 3.1. Triangulación de un poliedro.

Entonces

$$\text{vértices} - \text{aristas} + \text{caras} = (n_0 + 1) - (n_1 + n_0) + n_0 = n_0 - n_1 + 1,$$

es decir que la suma $V - A + C$ no es cambiada en el proceso de triangulación. Sea α_i , $i = 0, 1, 2$, que denota el número de i -simplejos en la triangulación de S obtenida de esta manera, entonces

$$V - A + C = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

por el argumento anterior, el teorema Euler-Poincaré muestra que

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_0(S^2) - R_1(S^2) + R_2(S^2) = 2,$$

De donde se obtiene que

$$V - A + C = 2.$$

para cualquier poliedro simple.

□

Teorema 3.3 *Existen solamente cinco poliedros simples regulares.*

Demostración: Supongamos que S es un poliedro con V vértices, A aristas, C caras y sea m el número de aristas que se encuentran en cada vértice y n el número de aristas de cada cara. Observemos que $n \geq 3$, entonces

$$mV = 2A = nC,$$

$$V - A + C = \frac{nC}{m} - \frac{nC}{2} + C = 2.$$

De ahí que

$$C(2n - mn + 2m) = 4m,$$

y por tanto $2n - mn + 2m > 0$.

Puesto que $n \geq 3$, entonces

$$2m > n(m - 2) \geq 3(m - 2) = 3m - 6,$$

De donde se tiene que $m < 6$, en consecuencia m puede solamente ser 1, 2, 3, 4 o 5.

Las relaciones

$$C(2n - mn + 2m) = 4m, \quad n \geq 3, \quad m < 6,$$

producen los siguientes posibles valores para (m, n, C)

(3, 3, 4) (3, 4, 6) (4, 3, 8) (3, 5, 12) (5, 3, 20).

Como ilustración, sí $m = 4$, entonces

$$C(8 - 2n) = 16$$

Permitiendo la posibilidad $C = 8, n = 3$.

□

Las cinco posibilidades para m son realizadas en el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro mostrados en las siguientes figuras:

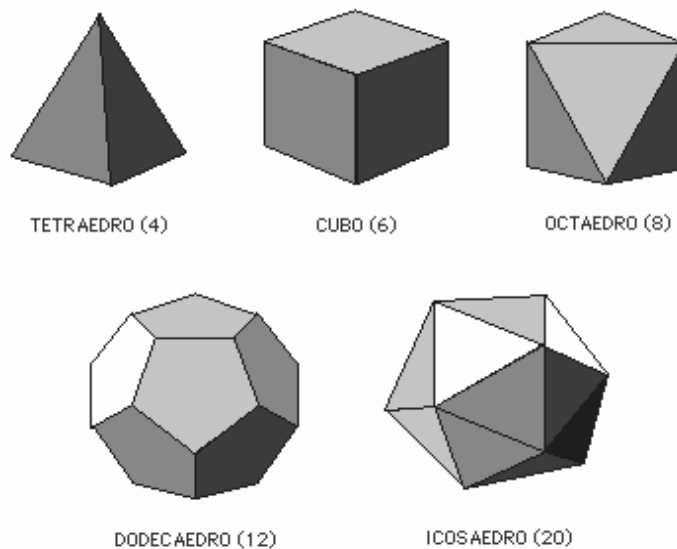


Figura 3.2. Poliedros regulares

Cadenas, ciclos, fronteras, la relación de homología y los números de Betti fueron definidos por Poincaré en su escrito *Análisis Situs* en 1895.

Como se mencionó antes, él no definió los grupos de homología. La demostración del teorema Euler Poincaré dada anteriormente es esencialmente la original de Poincaré.

Complejos y números de incidencia fueron definidos en “*Complément à l’analysis situs*” en 1899.

Los números de Betti fueron nombrados por Enrico Betti (1823-1892) y generalizan los números de conectividad que él usó para estudiar curvas y superficies.

Poincaré asumió, pero no demostró, que los números de Betti son invariantes topológicos. En otras palabras, él asumió que si los poliedros asociados con $|K|$ y $|L|$ son homeomorfos, entonces $R_p(K) = R_p(L)$ en cada dimensión p . La primera demostración rigurosa de este hecho fue dada por J.W. Alexander (1888-1971) en 1915.

La invariancia topológica de los grupos de homología fue demostrada por Oswald Veblen en 1922, por tanto se puede hablar de $H_p(|K|)$, $R_p(|K|)$ y $\chi(|K|)$ puesto que estos caracteres de homología son independientes de la triangulación del poliedro $|K|$. Es importante saber que los caracteres de homología son invariantes topológicos.

En general se tiene que el p -ésimo número de Betti $R_p(K)$ de un complejo K es el rango de la parte libre del p -ésimo grupo de homología $H_p(K)$. El p -ésimo número de Betti indica el número de *huecos p -dimensionales* en el poliedro $|K|$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALEXANDER, J. W. *A proof the invariance of certain constants of analysis situs*, *Trans. Am. Math. Soc.* 16, 148-154 (1915).
- [2] COURANT, R. & ROBINSON, H. *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, Madrid, 1979.
- [3] CROOM, F.H *Basic concepts of algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] HOCKING, J. G. & YOUNG, G. S. *Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1961.
- [5] MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: Introduction*, Harcourt, Brace and World, Inc., New, 1967, Springer-Verlag 1977.
- [6] POINCARÉ, H. *Analysis situs*, *Jour. École Polytech.* (2)1, 1-121 (1895).
- [7] POINCARÉ, H. *Complément à l'analysis situs*, *Rend. Circ. Mat., Palermo* 13, 285-343 (1899).
- [8] VLEBEN, O. *Theory of plane curves in non-metrical analysis situs*, *Trans. Ann. Math.* 74, 391-406 (1961).
- [9] YU SHASHKIN. *Característica Euleriana, lecciones populares de matemáticas*, Moscú, Mir.1989.