

Análisis preliminar de la termografía como herramienta para estimar las propiedades térmicas de estructuras laminares a partir de un modelo unidimensional de transferencia de calor enfocado a la detección de cáncer de mama

David Enrique Arenas Queeman

Trabajo de grado para optar el título de Ingeniero Mecánico

Director

William Pinto Hernández

Ingeniero Mecánico, MSc, PhD

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A mi papá Ramiro, mi mamá Jackeline, mi madrina Olga, mi esposa Tatiana y mi hijo Matías, porque fueron mi apoyo y motivación.

A mi amigo, profesor y director William por su enseñanza y paciencia.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción.....	11
1. Objetivos	13
1.1 Objetivo general.....	13
1.2 Objetivos específicos	13
2. Marco teórico.....	14
2.1 Termografía infrarroja.....	14
2.2 Cámara termográfica.....	14
2.3 Conducción de calor.....	15
2.4 Inferencia Bayesiana.	15
2.5 Glándulas mamarias.....	20
3. Metodología.....	20
3.1 Materiales.	20
3.2 Problema directo.	21
3.3 Instalación experimental.....	23
3.4 Procedimiento.....	24
4. Resultados.....	25
4.1 Resultados de las mediciones experimentales.	25
4.2 Calibración del modelo.	25

4.3 Funciones de probabilidad.....	27
4.4 Resultados de las estimaciones.....	28
4.5 Valores nominales y estimaciones.....	29
5. Conclusiones.....	30
6. Recomendaciones	31
Referencias Bibliográficas	32

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Propiedades de los materiales</i>	21
Tabla 2. <i>Información estadística de los parámetros del modelo</i>	28
Tabla 3. <i>Comparación entre valores nominales y estimaciones</i>	29

Lista de Figuras

	Pág.
<i>Figura 1.</i> Cámara termográfica.....	15
<i>Figura 2.</i> Capas del seno. Adaptado de Marieb (2008) Anatomía y fisiología humana.	20
<i>Figura 3.</i> Analogía mecánica.....	21
<i>Figura 4.</i> Solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.....	23
<i>Figura 5.</i> Esquema del experimento (a) y montaje experimental (b).	24
<i>Figura 6.</i> Termogramas del cambio en la temperatura superficial.	24
<i>Figura 7.</i> Gráfica de Temperatura vs Tiempo que representa las mediciones experimentales con la cámara termográfica del estado transitorio en la superficie de la analogía mecánica.	25
<i>Figura 8.</i> Cadenas de Markov.	26
<i>Figura 9.</i> Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del aluminio.	27
<i>Figura 10.</i> Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del acero.....	27
<i>Figura 11.</i> Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del cobre.	27

Resumen

Título: Análisis preliminar de la termografía como herramienta para estimar las propiedades térmicas de estructuras laminares a partir de un modelo unidimensional de transferencia de calor enfocado a la detección de cáncer de mama*.

Autor: David Enrique Arenas Queeman**.

Palabras clave: Estimación, Modelo, Inferencia Bayesiana, Analogía Mecánica, Cáncer de mama, Propiedades Térmicas, Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Descripción:

El cáncer de mama es uno de los más comunes en el mundo, la enfermedad es completamente asintomática en su etapa inicial y, por tanto, un diagnóstico temprano es la clave. En el presente trabajo se realiza un análisis preliminar de la termografía como herramienta para estimar las propiedades térmicas de estructuras laminares a partir de un modelo unidimensional de transferencia de calor transitorio enfocado a la detección de cáncer de mama.

En las pruebas no participaron pacientes, ni se hizo uso de tejidos humanos, se utilizó una cámara termográfica para realizar las medidas experimentales sobre una analogía mecánica del seno y un modelo inverso de transferencia de calor con enfoque probabilístico para llevar a cabo el proceso de estimación. La calibración del modelo fue abordada a partir de un enfoque bayesiano utilizando el proceso Markov Chain Monte Carlo (MCMC) con el algoritmo Metropolis-Hastings.

Como resultado de la investigación se obtuvo la estimación de la conductividad térmica (k), la densidad (ρ) y el calor específico (Cp) de los tres materiales que conformaban la estructura laminar, los errores de estimación fueron menores al 2% y de esta forma se validó la termografía como herramienta para estimar propiedades térmicas y se presentó una metodología de investigación clara y sustentada de todos los pasos a seguir para que en un trabajo posterior se realicen las pruebas en pacientes con cáncer.

*Trabajo de grado.

** Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de ingeniería mecánica. Director: William Pinto Hernández, PhD Ingeniero Mecánico.

Abstract

Title: Preliminary analysis of thermography as a tool to estimate the thermal properties of laminar structures from a one-dimensional model of heat transfer focused on the detection of breast cancer*.

Author: David Enrique Arenas Queeman**.

Keywords: Estimation, Model, Bayesian Framework, Mechanical Analogy, Breast Cancer, Thermal Properties, Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Description:

Breast cancer is one of the most common in the world, the disease is completely asymptomatic in its initial stage and, therefore, an early diagnosis is the key. In this paper, a preliminary analysis of thermography is carried out as a tool to estimate the thermal properties of laminar structures from a one-dimensional model of transient heat transfer focused on the detection of breast cancer.

Patients were not involved in the tests, nor were human tissues used, a thermal imaging camera was used to perform the experimental measurements on a mechanical analogy of the breast and an inverse heat transfer model with a probabilistic approach to carry out the estimation process. The model calibration was approached from a Bayesian approach using the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) process with the Metropolis-Hastings algorithm.

As a result of the investigation, the estimation of the thermal conductivity (k), the density (ρ) and the specific heat (Cp) of the three materials that formed the laminar structure was obtained, the estimation errors were less than 2% and in this way, thermography was validated as a tool to estimate thermal properties and a clear and sustained research methodology was presented of all the steps to be followed so that in a later work the tests are carried out in patients with cancer.

* Degree Project.

** Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de ingeniería mecánica. Director: William Pinto Hernández, PhD Ingeniero Mecánico.

Introducción

Cáncer es el nombre que reciben un conjunto de enfermedades relacionadas entre sí que afectan a la humanidad tanto a nivel global, nacional, regional y local. El cáncer de mama es uno de los más comunes, tan solo en el 2018 se diagnosticaron 2 millones de nuevos casos y hubo más de 600 mil muertes en el mundo (Globocan, 2018). La detección temprana de éste es la clave para mejorar la tasa de supervivencia, esto hace que sea imperioso un avance en los métodos usados para la detección del cáncer de mamá.

Actualmente, la técnica de detección más usada es la mamografía, para la cual es necesario usar un equipo complejo que puede generar incomodidades en el paciente (Kennedy, Lee y Seely, 2009) y que no se puede transportar, por su parte, la termografía es una técnica de no contacto que cuenta con varias aplicaciones en medicina, pero para el diagnóstico de cáncer de mama no es muy habitual y mucho menos para el cálculo de las propiedades térmicas de la piel en sus diferentes capas, de este modo, se proyecta como una alternativa que puede contribuir a una optimización del proceso de diagnóstico. Además de esto, la enfermedad es completamente asintomática en su etapa inicial y, por tanto, un diagnóstico temprano es la clave.

Teniendo en cuenta que las propiedades físicas de un tejido con cáncer pueden cambiar significativamente de un punto a otro (Osman y Afify, 1988), en esta investigación se realiza un estudio preliminar sobre el uso de la termografía como herramienta para la estimación de propiedades térmicas de materiales cuyas propiedades térmicas sean diferentes y bien conocidas, estos actúan como una analogía mecánica de las diferentes capas del seno, dado que en las pruebas experimentales no participan pacientes ni se hace uso de tejidos humanos.

Se han desarrollado diversas investigaciones con relación al cáncer de mama y la termografía, se ha evaluado la eficiencia de la termografía en la detección del cáncer en pacientes sin síntomas (Rani, Majumdar, Kanti y Kumar, 2019). También, mediante redes neuronales y algoritmos genéticos se estiman parámetros del tumor en la mama usando la temperatura superficial (Mital y Pidaparti, 2008). Existen diferentes formas de estimar, en este estudio se hará uso de la metodología de problemas inversos, que se puede definir como el problema de recuperar información de cantidades desconocidas mediante observaciones indirectas (Calvetti y Somersalo, 2007).

La conducción inversa de calor es de interés para muchas ramas de la ciencia e ingeniería, áreas como control de procesos de manufactura, metalurgia, ingeniería química, aeroespacial y nuclear, diagnósticos médicos, etc. En la literatura acerca de los problemas inversos para la estimación de parámetros se muestra el uso de la inferencia bayesiana para solucionar el problema de la conducción de calor inversa (Wang y Zabaras, 2004). Adicionalmente, se encuentran aplicaciones diversas como el uso de la inferencia bayesiana para estimar las propiedades térmicas de un muro histórico (Berger, Orlande, Mendes y Guernouti, 2016).

A lo largo de este texto se explica la metodología para la obtención de los datos experimentales, los cuales fueron obtenidos a partir de una cámara termográfica Flir E4, con la cual se tomaron los termogramas de una transferencia de calor en estado transitorio en la estructura laminar. Formulando un problema inverso basado en un enfoque bayesiano (el cual permite considerar la incertidumbre propia de los datos experimentales) y también haciendo uso de la técnica de muestreo Markov Chain Monte Carlo (MCMC) se estimaron los parámetros del modelo, siguiendo la metodología planteada por Hernández, Castello y Matt (2018).

1. Objetivos

1.1 Objetivo General

Evaluar la viabilidad de la termografía como herramienta para estimar las propiedades térmicas de estructuras laminares considerando un modelo de transferencia de calor unidimensional enfocado a la detección de cáncer de mama.

1.2 Objetivos Específicos

Realizar un análisis teórico de la transferencia de calor por conducción unidimensional en láminas de distintos espesores y materiales, que representan las capas de la piel mediante una analogía mecánica.

Desarrollar un modelo inverso de conducción de calor unidimensional de múltiples capas, en el cual, conociendo la temperatura de la superficie a partir de una cámara termográfica, posteriormente, se puedan estimar las propiedades térmicas de las capas inferiores.

Utilizar el método de inferencia Bayesiana como estimador de los parámetros térmicos del sistema de transferencia de calor unidimensional a partir de los datos adquiridos experimentalmente con la cámara termográfica.

Evaluar estadísticamente las estimaciones obtenidas experimentalmente a partir de la metodología de problemas inversos y compararlas con los valores nominales.

2. Marco teórico

2.1 Termografía infrarroja

La termografía es una técnica de no contacto que cuantifica la temperatura de un objeto mediante la captación de la radiación infrarroja del espectro electromagnético, el cual es la clasificación de la radiación electromagnética según su longitud de onda. La termografía es muy utilizada dado que permite obtener medidas en tiempo real, no afecta a la muestra que se esté midiendo, es bidimensional y permite medir más de dos puntos a la vez, generando una imagen y finalmente, se puede aplicar en gran cantidad de áreas del conocimiento, ya que no solo mide temperaturas, sino patrones térmicos y de temperatura o anomalías. Sus características únicas permiten que su uso se de en campos tan diferentes entre sí como la medicina, veterinaria, electricidad, edificación, procesos industriales, sistemas de seguridad, navegación, etc. (Melgosa, 2011).

2.2 Cámara termográfica

La cámara termográfica es la encargada de transformar la radiación infrarroja en un dato de temperatura, como se puede observar en la figura 1, la cámara, al detectar la radiación, obtiene una respuesta que será leída por los elementos electrónicos, esa señal electrónica es convertida en una imagen en la pantalla, donde los distintos tonos de color se corresponden con distintas señales de radiación infrarroja procedentes del objeto. La imagen generada por la cámara se denomina termograma o imagen térmica (Melgosa, 2011).



Figura 1. Cámara termográfica.

2.3 Conducción de calor

Se define la conducción de calor como la transferencia de energía térmica de las partículas más energéticas de un medio hacia las menos energéticas adyacentes. Pueden aparecer situaciones en las cuales la transferencia de calor puede ser estable o transitoria, esto dependiendo de si existe o no variación con el tiempo. Cabe destacar que el calor se mueve en direcciones, por tanto, una transferencia de calor unidimensional quiere decir que la temperatura del medio varía en una sola dirección y, por lo tanto, el calor se transfiere en una sola coordenada espacial, ya sea radial o axial; al mismo tiempo, la variación de la temperatura y, como consecuencia, la transferencia de calor en otras direcciones es despreciable o cero (Cengel, 2011).

La conducción de calor se encuentra basada en la Ley de Fourier, la cual define que el flujo de calor a través de una superficie es la conductividad multiplicada el gradiente de temperatura, a su vez, el flujo de calor va en contra del gradiente de temperaturas. La rapidez de transferencia de calor puede considerarse como un flujo y a la combinación de conductividad térmica, espesor del material y área, como una resistencia a este flujo. La temperatura es la función de potencial para el flujo de calor. Otro detalle importante es que el modelo de conducción de calor varía en función de la configuración geométrica del objeto (Hollman, 1999).

2.4 Inferencia Bayesiana

La inferencia Bayesiana se basa en las ideas de Thomas Bayes, hace unos 300 años. Su trabajo incluyó el Teorema de Bayes, que se aplica al problema de la inferencia, obteniendo mejores predicciones a partir de los datos. El uso del sentido común y el conocimiento previo se puede representar de manera matemática mediante la inferencia Bayesiana y de esta manera se pueden realizar predicciones más precisas (Rohrer, 2016).

El enfoque Bayesiano parte de la premisa que los resultados experimentales y las predicciones del modelo se pueden describirse a partir de un modelo de observación (estocástico) donde existe un error de naturaleza aditiva, de la siguiente manera,

$$Y_{exp} = Y_{mod}(\theta, x) + e \quad (1)$$

Donde $Y_{mod}(\theta, x)$ representa la respuesta del modelo, caracterizada por un conjunto de parámetros del modelo θ y un conjunto de información sobre la entrada (x) que establece condiciones iniciales y de contorno presentes en el modelo. Por su parte, e representa los errores de predicción en la medición y modelado. El error denotado como e puede ser ajustado a partir de una distribución Gaussiana, que genera una relación entre la respuesta experimental y el modelo a través de una función de densidad de probabilidad (Hernández et al, 2018).

La identificación de parámetros basado en un enfoque Bayesiano permite determinar todas las variables como variables aleatorias, las cuales pueden estar incluidas en el modelo, donde su grado de información puede ser estimada a partir de su función de densidad de probabilidad (PDF). Al codificar y formar su PDF se tiene como resultado la solución del problema inverso, esto es, un conjunto de muestras que caracterizan la distribución de probabilidad “*posteriori*”.

Teniendo en cuenta lo anterior, se procede a establecer la función de probabilidad posterior según el teorema de Bayes, en el cual se postula que:

$$\pi(\theta|Y) = \frac{\pi(Y|\theta)\pi(\theta)}{\pi(Y)} \quad (2)$$

Donde $\pi(\theta|Y)$ es la PDF de los parámetros del modelo y expresa la probabilidad del parámetro desconocido θ dada una cantidad observada; $\pi(Y|\theta)$ es llamada la función de probabilidad (*likelihood*) y expresa la probabilidad de que un conjunto de parámetros θ puedan representar un conjunto de datos experimentales Y . $\pi(\theta)$ representa la probabilidad previa, también conocida como “*Prior*”, representa el estado actual de conocimiento sobre las cantidades desconocidas y debe ser elegido o construido de acuerdo con las expectativas o creencias sobre θ antes de tener las mediciones Y . Finalmente, $\pi(Y)$ representa la distribución de probabilidad marginal de los datos Y que se define de la siguiente manera:

$$\pi(Y) = \int_{\theta} \pi(Y|\theta)\pi(\theta)d\theta \quad (3)$$

Afortunadamente, cuando se utilizan enfoques basados en muestreo, como, por ejemplo, Markov Chain Monte Carlo (MCMC) para explorar la función de probabilidad posterior $\pi(\theta|Y)$, el término $\pi(Y)$ se convierte en un factor de escala constante y su cálculo no es necesario para la mayoría de los algoritmos MCMC (Hernández, Castello, Roitman y Magluta, 2017).

Asumiendo que los parámetros del modelo θ y el error e son mutuamente independientes, la distribución de probabilidad $\pi(Y|\theta)$ puede escribirse como sigue:

$$\pi(Y|\theta) = \pi_e(Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x)) \quad (4)$$

Donde $\pi_e(Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x))$ representa la PDF del error. En este caso se puede suponer que la relación $Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x)$ sigue una distribución Gaussiana multivariada de media cero, debido a que una variable aleatoria normal estándar se representa como una variable aleatoria Gaussiana con media cero. A partir de la definición de distribución Gaussiana en el caso multivariado la PDF del error se define como (Kaipio y Somersalo, 2005):

$$\begin{aligned} \pi_e(Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x)) & \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x))^T \Sigma^{-1} (Y_{exp} - Y_{mod}(\theta, x))\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde Σ , es la matriz de varianza-covarianza de los datos experimentales, con dimensión $n \times n$ donde n está asociada al número de mediciones de la muestra experimental. Al trabajar con datos experimentales, se establece la independencia entre los datos obtenidos experimentalmente, teniendo como principio que los datos experimentales no tienen ninguna relación uno con otro, esto dictamina que en la matriz de varianza-covarianza los valores de las covarianzas serán ceros, por lo tanto, la matriz Σ contendrá los valores de varianza únicamente en su diagonal principal.

La función de densidad de probabilidad posterior $\pi(\theta|Y)$ se halla mediante la técnica de muestreo Markov Chain Monte Carlo (MCMC), el cual es un proceso en el que la transición de un estado a otro solo depende del estado actual en el que se encuentre el sistema, sin importar el recorrido hecho para alcanzar ese estado. Mediante MCMC se generan muestras de tal forma que la muestra siguiente $\theta^{(k)}$ depende solo de la muestra actual $\theta^{(k-1)}$; después de muchas transiciones de estados las probabilidades convergen a valores particulares (Carlin y Louis, 2009). Existen varios métodos para aplicar la técnica MCMC, uno de los más eficientes es el algoritmo Metropolis-Hastings (MH), que se usa en esta investigación.

La secuencia de estados $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N_{mc})}\}$ generados por el algoritmo Metropolis-Hastings comienza con un estado inicial $\theta^{(0)}$ y para cada transición j un estado candidato $\theta^{(c)}$ se extrae de una distribución propuesta $T(\theta^{(c)}, \theta^{(j-1)})$ que depende solo del estado anterior $\theta^{(j-1)}$. El nuevo estado candidato $\theta^{(c)}$ es aceptado o rechazado según el nivel de probabilidad definido por a_{MH} (Murillo y Vega, 2018). Para implementar el algoritmo MH que genera el muestreo, se han de seguir los pasos que se presentan a continuación (Smith, 2014):

1: Definir número de muestras N_{mc}

2: Elegir un estado inicial para la cadena de Markov $\theta^{(0)}$

3: **For** $j=1$ a N_{mc} **do**

4: Extraer un estado de muestra candidato $\theta^{(c)}$ de la PDF propuesta $T(\theta^{(0)}|\theta^{(j-1)})$

5: Calcular la probabilidad de aceptación $a_{MH}(\theta^{(c)}|\theta^{(j-1)})$ para el estado candidato $\theta^{(c)}$:

$$a_{MH}(\theta^{(c)}|\theta^{(j-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^{(c)}|Y)T(\theta^{(j-1)}|\theta^{(c)})}{\pi(\theta^{(j-1)}|Y)T(\theta^{(c)}|\theta^{(j-1)})} \right\}$$

6: Muestra u de una PDF uniforme: $u \sim \mathcal{U}(0,1)$

7: **if** $u \leq a_{MH}(\theta^{(c)}|\theta^{(j-1)})$ **then**

8: Aceptar la muestra del estado candidato $\theta^{(c)}$, entonces $\theta^{(j)} = \theta^{(c)}$

9: **else**

10: Rechazar la muestra del estado candidato $\theta^{(c)}$, entonces $\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)}$

11: **end**

12: $j = j + 1$

13: **end**

14: Descartar las primeras muestras N_b (periodo de calentamiento)

2.5 Glándulas mamarias

Tanto hombres como mujeres cuentan con glándulas mamarias, pero solo funcionan en las mujeres, para producir leche para la nutrición del bebé. Las glándulas mamarias son glándulas sudoríparas modificadas que forman parte de la piel. Todas las glándulas están dentro de un pecho redondeado cubierto de piel anterior a los músculos pectorales. Cada glándula mamaria consiste en 15 a 25 lóbulos, que están acolchados y separados los unos con los otros por tejido conectivo y grasa (Marieb, 2008). En la figura 2 se puede evidenciar de qué capas se encuentra compuesto el seno.

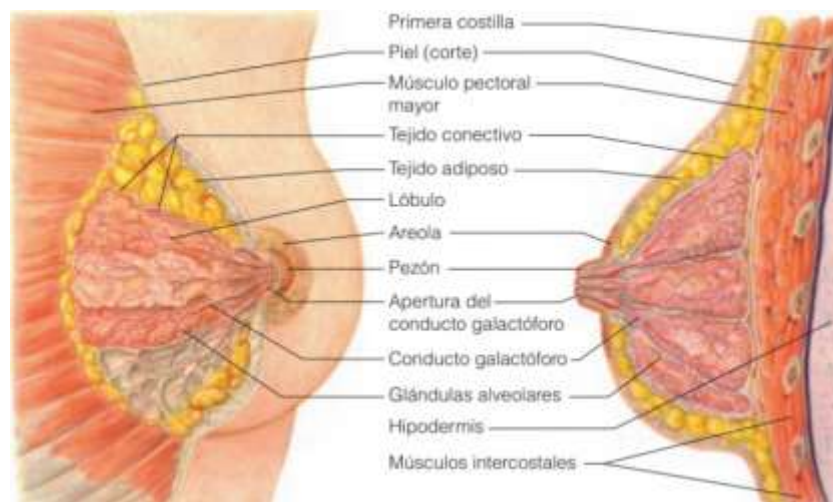


Figura 2. Capas del seno. Adaptado de Marieb (2008) Anatomía y fisiología humana.

3. Metodología

3.1 Materiales

Dado que no se trabajó con tejidos humanos, las capas de piel, grasas y glándulas se representaron mediante una analogía mecánica en la que se usaron tres materiales con propiedades bien definidas y diferentes: acero (Ac), aluminio (Al) y cobre (Cu). Las propiedades para tener en

cuenta fueron: densidad, calor específico y conductividad térmica. En la tabla 1 se pueden observar los materiales con sus propiedades y sus valores correspondientes.

Tabla 1.

Propiedades de los materiales

Propiedades	Aluminio	Acero	Cobre
Conductividad térmica k [W/m-k]	237	60.5	401
Densidad ρ [kg/m ³]	2702	7854	8933
Calor específico C_p [J/kg-k]	903	434	385

Nota: adaptado de Cengel, 2011.

3.2 Problema directo

La analogía mecánica estaba constituida por los tres materiales (Al, Cu y Ac) superpuestos uno sobre el otro, formando así una estructura laminar, la cual se encontraba aislada térmicamente a los lados. Siguiendo con la analogía, la base de la estructura laminar fue expuesta a una temperatura constante, que representaba la temperatura interna del cuerpo, y la parte superior se encontraba a temperatura ambiente, como se puede observar en la figura 3. Se generó un régimen transitorio en el momento en que la estructura laminar pasaba de encontrarse a una temperatura ambiente a tener una temperatura superior y constante en su base de 40 °C.

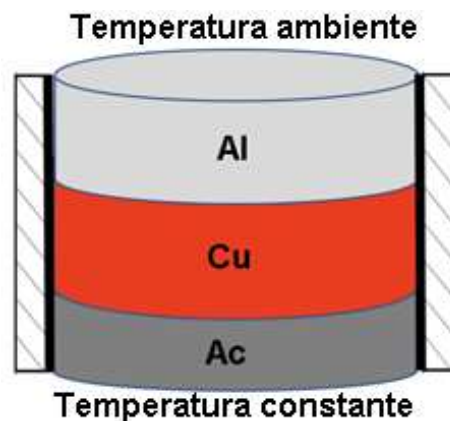


Figura 3. Analogía mecánica.

En el problema directo las propiedades térmicas, las condiciones iniciales y de frontera eran conocidas. Para solucionar el problema directo se realizó un análisis teórico de la transferencia de calor por conducción unidimensional transitoria sin generación en la estructura laminar, para eso fue necesario conocer y determinar las ecuaciones diferenciales que gobernaban el fenómeno, cuyo modelo matemático es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{k}{\rho C} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Para } 0 < x < L \text{ y } t > 0 \quad (6)$$

Se tuvieron en cuenta las siguientes condiciones de frontera:

$$T = 40 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{Para } x = 0 \text{ y } t > 0 \quad (7)$$

$$k \frac{\partial T(x, T)}{\partial t} + hT(x, T) = hT_\infty \quad \text{Para } 0 < x < L \text{ y } t > 0 \quad (8)$$

Se tuvo en cuenta la siguiente condición inicial:

$$T = 25 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{Para } 0 < x < L \text{ y } t = 0 \quad (9)$$

Para dar solución a este sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se hizo uso del solucionador de EDP de Matlab: PDEPE, en la solución del problema se considera que las propiedades térmicas no cambian con el tiempo. Los coeficientes de las ecuaciones diferenciales parciales corresponden a las propiedades físicas de cada uno de los materiales. La solución del sistema de ecuaciones se puede observar en la figura 4.

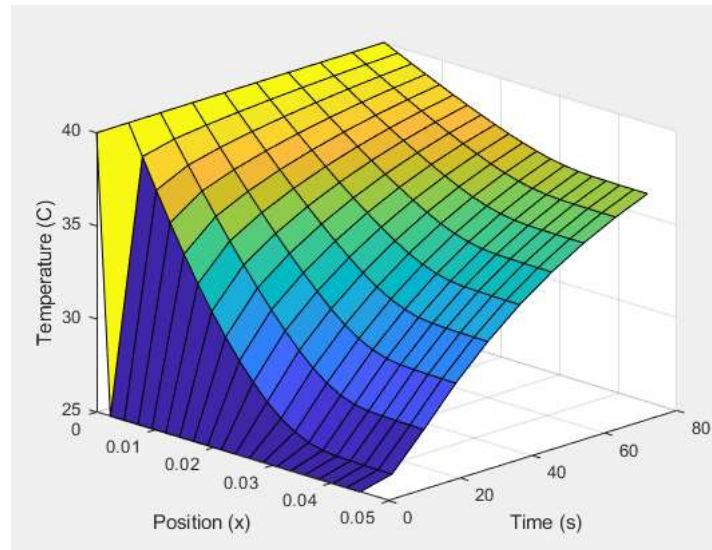


Figura 4. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

3.3 Instalación experimental

Para realizar la experimentación se hizo uso de un aparato que consistía en un recipiente lleno de agua que se mantenía a una temperatura constante, esto se garantizaba mediante una resistencia eléctrica y un controlador, además, el agua se agitaba continuamente para homogenizar la temperatura en el volumen de agua.

Se generó un régimen transitorio en el momento en que la estructura laminar pasaba de encontrarse a una temperatura ambiente a tener una temperatura superior y constante en su base, en la superficie se registraba el cambio de la temperatura mediante la cámara termográfica Flir E4 (figura 1). El esquema del montaje experimental y como finalmente quedó se puede observar en la figura 5.

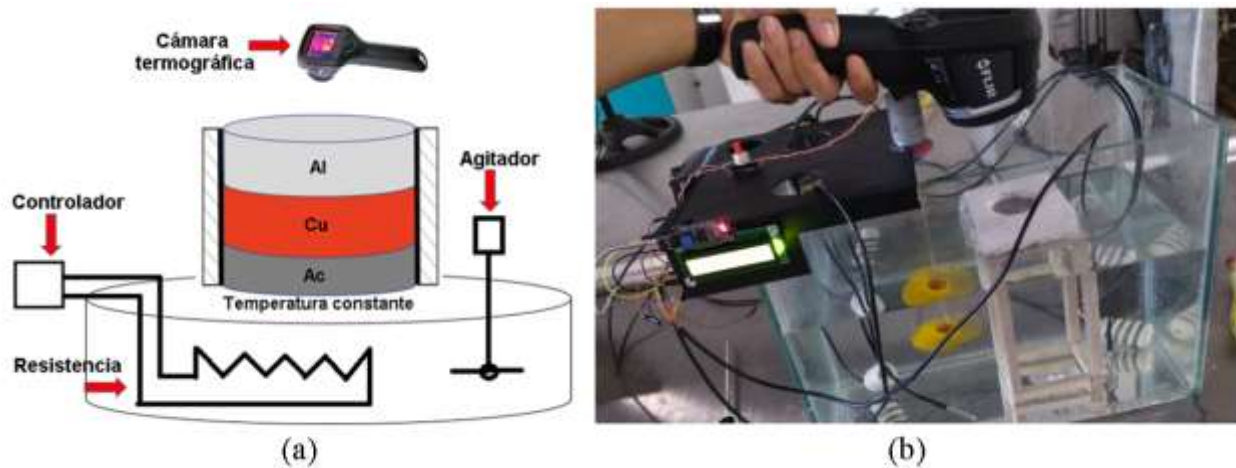


Figura 5. Esquema del experimento (a) y montaje experimental (b).

3.4 Procedimiento

Antes de comenzar el experimento se ajustaron los datos de emisividad, temperatura reflejada y distancia en la cámara termográfica. Para iniciar el experimento primero se llenó el recipiente con agua y se dejó calentar con la resistencia eléctrica hasta que los sensores indicaran una temperatura de 40 °C, una vez alcanzada la temperatura de referencia se procedió a colocar la estructura laminar de tal forma que solo la parte inferior estuviera en contacto con el agua, inmediatamente se empezó a realizar en registro del cambio en la temperatura con la cámara termográfica, la frecuencia para captar los datos y generar los termogramas fue de entre 3 y 5 segundos hasta que la temperatura se estabilizara en la superficie, este procedimiento se replicó varias veces durante diferentes días y a diferentes horas. En la figura 6 se muestran los termogramas del cambio de la temperatura superficial en la estructura laminar.

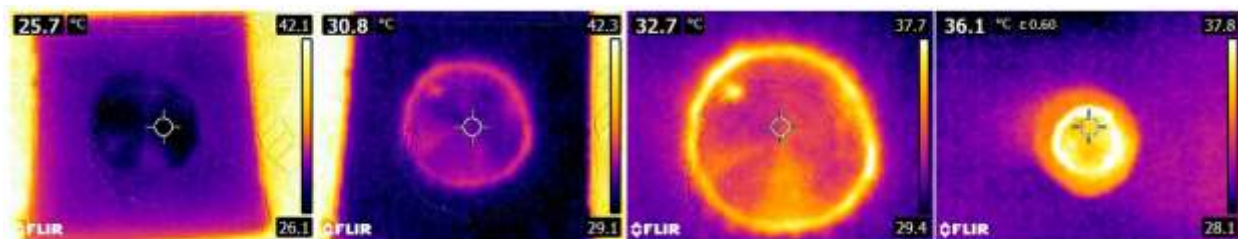


Figura 6. Termogramas del cambio en la temperatura superficial.

4. Resultados

4.1 Resultados de las mediciones experimentales

Para procesar los termogramas y extraer de ahí los datos de la distribución de temperatura en la superficie, se hizo uso del software del fabricante de la cámara termográfica llamado FLIR Tools, de ahí se obtuvieron las diferentes curvas de temperatura para cada una de las mediciones realizadas. La gráfica de Temperatura vs tiempo se puede observar en la figura 7. En la gráfica se observa la línea azul, que es la media de los datos experimentales y representa la temperatura promedio en la superficie y el área gris representa todos los datos experimentales.

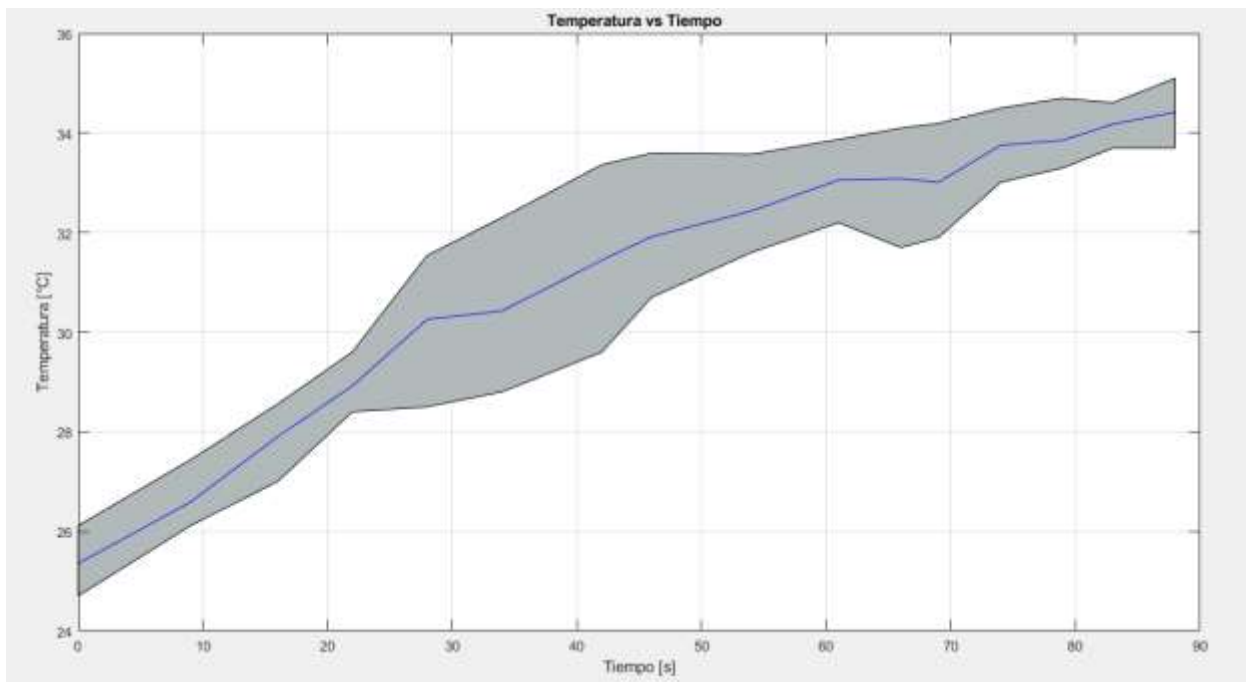


Figura 7. Gráfica de Temperatura vs Tiempo que representa las mediciones experimentales con la cámara termográfica del estado transitorio en la superficie de la analogía mecánica.

4.2 Calibración del modelo

Una vez obtenidos los datos experimentales se les calcula la varianza y de esta forma se puede hacer uso de la ecuación 5 y mediante el algoritmo Metropolis-Hastings se generan valores

aleatorios que son ingresados al modelo matemático y se comparan los resultados del modelo con los datos experimentales, si estos valores entran en el rango de incertidumbre de los datos experimentales son aceptados, de lo contrario, rechazados.

El conjunto de datos aceptados forman las cadenas de Markov, estas cadenas tienen un periodo de estabilización llamado *burning* o calentamiento, el cual no es tenido en cuenta y se desecha, se toman en cuenta las cadenas estabilizadas y de esta forma se determina la función de densidad de probabilidad de cada uno de los parámetros $\theta = [k_{Al}, C_{pAl}, \rho_{Al}, k_{Ac}, C_{pAc}, \rho_{Ac}, k_{Cu}, C_{pCu}, \rho_{Cu}]$. En la figura 8 se puede observar una cadena de Markov, se resalta el periodo de calentamiento o *burning*, que corresponde a la mitad inicial de las cadenas y el periodo de estabilización, que corresponde a la segunda mitad de las cadenas.

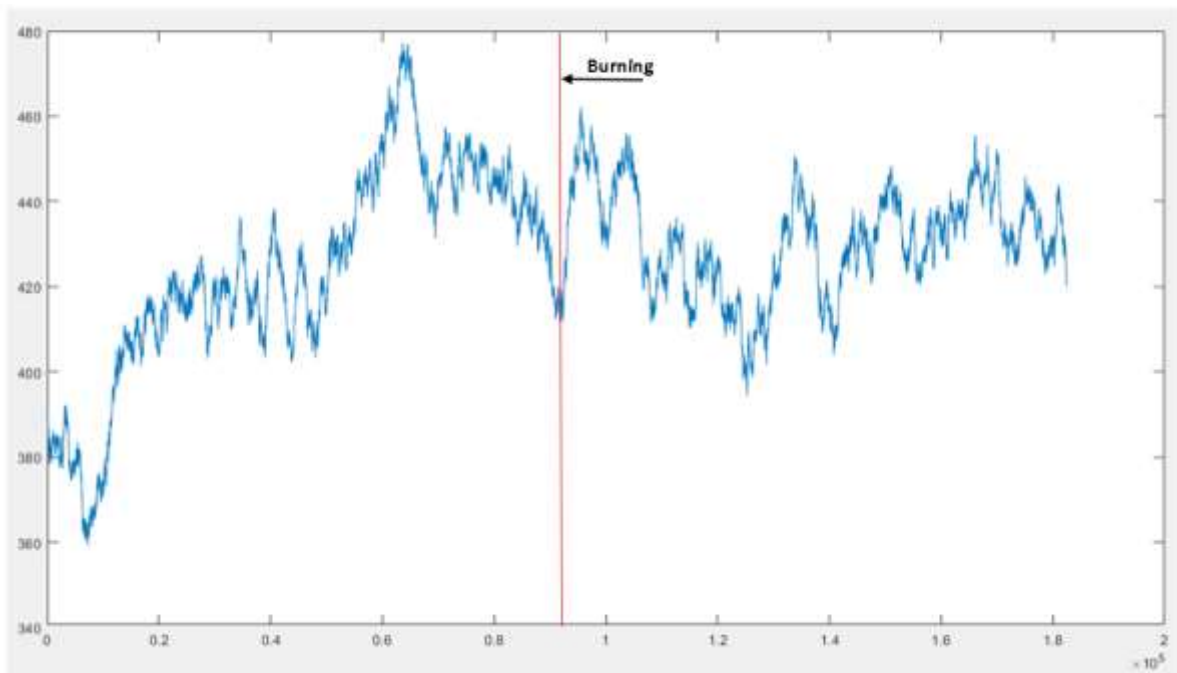


Figura 8. Cadenas de Markov.

4.3 Funciones de probabilidad

En la figura 9, figura 10 y figura 11 se observan las gráficas de las funciones de densidad de probabilidad (PDF) y funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de los parámetros estimados del aluminio, acero y cobre, respectivamente.

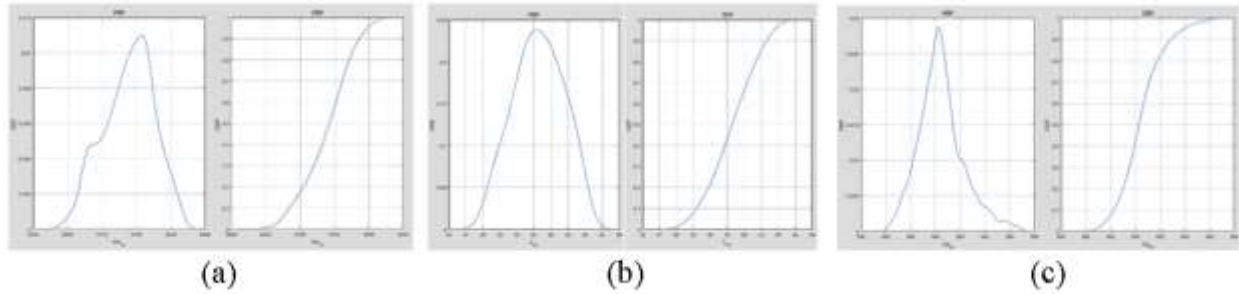


Figura 9. Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del aluminio.

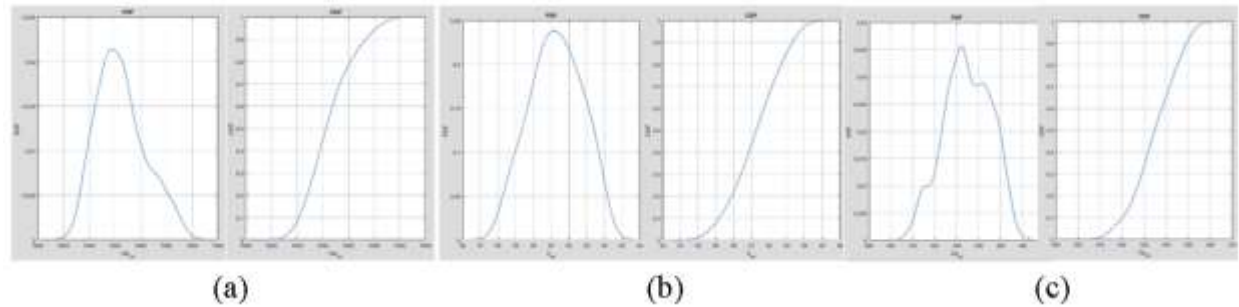


Figura 10. Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del acero.

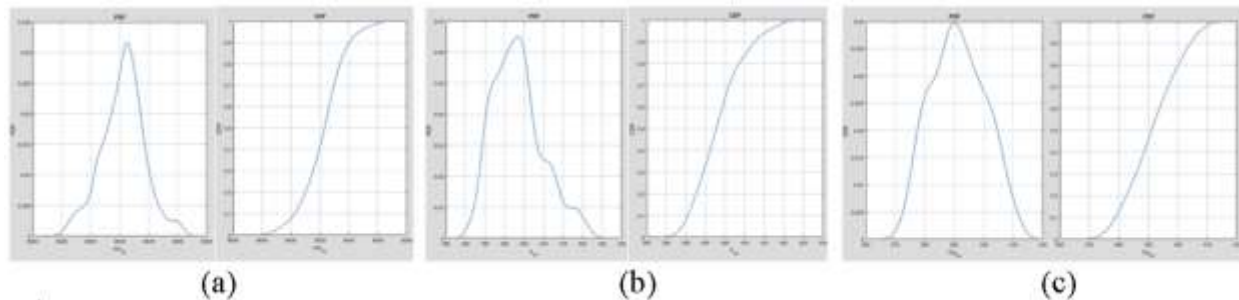


Figura 11. Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y Funciones de densidad de probabilidad acumulada (CDF) de la densidad (a), la conductividad térmica (b) y la capacidad calorífica (c) del cobre.

4.4 Resultados de las estimaciones

En la tabla 2 se observan los valores de la media (μ), desviación estándar (σ) y coeficiente de variación (C. V) de los parámetros expuestos en la figura 9, figura 10 y figura 11. La media representa el valor promedio de las muestras cadenas de Markov estabilizadas, la desviación estándar se usa para cuantificar la variación o dispersión de los datos y el coeficiente de variación es la razón entre la desviación estándar y la media, que muestra una interpretación del grado de variabilidad, independiente de la escala de la variable. De los valores obtenidos se concluye que se obtuvieron resultados favorables que se agruparon cerca de su media y no tuvieron mayor variabilidad lo cual a su vez indica que las cadenas de Markov alcanzaron una convergencia adecuada.

Tabla 2.

Información estadística de los parámetros del modelo

Parámetro	μ	σ	C.V [%]
ρ_{Al} [kg/m ³]	2738.9	36.7083	1.3402
k_{Al} [W/m-k]	237.3744	5.7781	2.4342
C_{pAl} [J/kg-k]	904.4540	18.1072	2.0020
ρ_{Ac} [kg/m ³]	7864.7	19.0547	0.2423
k_{Ac} [W/m-k]	61.2693	1.4281	2.3308
C_{pAc} [J/kg-k]	434.7815	10.7596	2.4747
ρ_{Cu} [kg/m ³]	8922.2	14.9226	0.1673
k_{Cu} [W/m-k]	403.3883	6.3690	0.1673
C_{pCu} [J/kg-k]	391.3306	9.0071	2.3017

4.5 Valores nominales y estimaciones

En la tabla 3 se muestra la comparación entre los valores nominales de los parámetros térmicos y las estimaciones obtenidas mediante el enfoque bayesiano, donde se presentan en forma de porcentaje de error las diferencias entre las cantidades. Los errores entre ambos valores fueron mínimos para cada uno de los parámetros, esto indica que el modelo representó correctamente a los datos experimentales y se ajustó a su incertidumbre, debido a esto, se obtuvieron las distribuciones de probabilidad cercanas a los valores nominales.

Tabla 3.
Comparación entre valores nominales y estimaciones

Parámetro	Valor nominal	Estimación	Error [%]
ρ_{Al} [kg/m ³]	2702	2738.9	1.366
k_{Al} [W/m-k]	237	237.3744	0.158
C_{pAl} [J/kg-k]	903	904.4540	0.161
ρ_{Ac} [kg/m ³]	7854	7864.7	0.136
k_{Ac} [W/m-k]	60.5	61.2693	1.271
C_{pAc} [J/kg-k]	434	434.7815	0.180
ρ_{Cu} [kg/m ³]	8933	8922.2	0.120
k_{Cu} [W/m-k]	401	403.3883	0.596
C_{pCu} [J/kg-k]	385	391.3306	1.644

5. Conclusiones

El análisis teórico de la transferencia de calor transitoria por conducción unidimensional en láminas de distintos espesores y materiales consistió en la solución de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático del fenómeno, que dio como resultado la distribución teórica de la temperatura en la superficie de la estructura laminar, cuyo comportamiento fue similar al de los datos experimentales, gracias a esto, al momento de solucionar el problema inverso de conducción de calor calibrando la función de probabilidad del error dentro de un enfoque bayesiano, se pudo alcanzar la convergencia de las cadenas de Markov al momento de realizar el proceso de estimación de los parámetros térmicos.

La convergencia de las cadenas de Markov no depende exclusivamente del correcto ajuste entre los datos experimentales y el modelo matemático, también depende de la cantidad de parámetros, a mayor cantidad estos, mayor número de realizaciones o muestras se le deben configurar al algoritmo Metropolis-Hastings, como se estimaron nueve parámetros en la presente investigación, se tuvieron que generar 900.000 muestras, alrededor de 200.000 fueron aceptadas y permitieron la estabilización de las cadenas de Markov.

Los datos experimentales obtenidos mediante la cámara termográfica permitieron realizar la correcta estimación de las propiedades térmicas de los materiales de la analogía mecánica dado que estas solo presentaban ligeras desviaciones de los valores nominales, con errores menores al 2%, de esta forma, se valida la termografía como herramienta para estimar propiedades térmicas en estructuras laminares y se podía aplicar en investigaciones enfocadas a la detección del cáncer de mama.

6. Recomendaciones

Para futuros trabajos de investigación, sería interesante llevar a cabo simulaciones y análisis bidimensionales o tridimensionales de la transferencia de calor en diferentes geometrías y materiales, se recomienda realizar un análisis de sensibilidad al momento diseñar los experimentos, de esta forma se podría optimizar el proceso de estimación de parámetros.

Existen diferentes métodos MCMC, se sugiere utilizar cada uno de estos y compararlos para saber cuál de ellos genera mejores resultados.

Para establecer un procedimiento de detección de cáncer de mama que se use en hospitales es muy importante que se conforme un grupo interdisciplinar que cuente con médicos e ingenieros.

Referencias Bibliográficas

- Berger, J., Orlande, H. R. B., Mendes, N., & Guernouti, S. (2016). Bayesian inference for estimating thermal properties of a historic building wall. *Building and Environment*, 106, 327–339. doi:10.1016/j.buildenv.2016.06.037
- Calvetti, D., & Somersalo, E. (2007). *Introduction to Bayesian Scientific Computing*. New York: Springer.
- Carlin, B., & Louis, T. (2009). *Bayesian Methods for Data Analysis*. New York: Chapman & Hall.
- Cengel, Y. (2011). *Transferencia de calor y masa*. México D.F.: McGraw-Hill.
- Global cancer observatory. (2018). Cancer fact sheets. Recuperado de <http://gco.iarc.fr/today/fact-sheets-cancers>.
- Hernández, W. P., Castello, D. A., & Matt, C. F. T. (2018). On the model building for transmission line cables: a Bayesian approach. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1–29. doi:10.1080/17415977.2018.1436171
- Hernández, W. P., Castello, D. A., Roitman, N., & Magluta, C. (2017). Thermorheologically simple materials: A bayesian framework for model calibration and validation. *Journal of Sound and Vibration*, 402, 14–30. doi:10.1016/j.jsv.2017.05.005
- Hollman, J. (1999). *Transferencia de calor*. México D.F.: Continental.
- Kaipio, J., & Somersalo, E. (2005). *Statistical and computational inverse problems*. New York: Springer.

- Kennedy, D. A., Lee, T., & Seely, D. (2009). A Comparative Review of Thermography as a Breast Cancer Screening Technique. *Integrative Cancer Therapies*, 8(1), 9–16. doi:10.1177/1534735408326171
- Marieb, E. (2008). *Anatomía y fisiología humana*. Madrid, España: Pearson.
- Melgosa, S. (2011). Guía de la termografía infrarroja. Recuperado de <http://www.madrid.org/bvirtual/BVCM015258.pdf>
- Mital, M., & Pidiparti R. M. (2008). Breast tumor simulation and parameters estimation using evolutionary algorithms. *Mechanical and nuclear engineering publications*, 2008, 1-6. doi:10.1155/2008/756436
- Murillo, D., & Vega, L. (2018). *Caracterización y comparación de las propiedades mecánicas para juntas metálicas utilizando adhesivo de resina sintética tipo epoxi pura y modificada a base de lignina* (Tesis de pregrado).
- Osman, M., & Afify, E. (1988). Thermal modeling of the malignant woman's breast. *Journal of Biomechanical Engineering*. 110(4), 269-276. doi:10.1115/1.3108441
- Rani Gogoi, U., Majumdar, G., Kanti Bhowmik, M., & Kumar Ghosh, A. (2019). Evaluating the Efficiency of Infrared Breast Thermography for Early Breast Cancer Risk Prediction in Asymptomatic Population. *Infrared Physics & Technology*. doi:10.1016/j.infrared.2019.01.004
- Rohrer, B. (2016). How bayesian inference works. Recuperado de http://brohrer.github.io/how_bayesian_inference_works.html
- Smith, R. (2014). *Uncertainty Quantification Theory, Implementation, and Applications*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Wang, J., & Zabaras, N. (2004). A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(17-18), 3927–3941.
doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.02.028