LOS BUENOS ÓRDENES Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN

ANA SOFIA BOSSA JAIMES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

LOS BUENOS ÓRDENES Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN

ANA SOFIA BOSSA JAIMES

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

DEDICATORIA

A mi mamá, mi papá, mi hermano y mi nonita. Y no menos importante, a Fabiola.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Industrial de Santander, por brindarme la oportunidad de estudiar esta hermosa carrera.

A mi director, el profesor Carlos, por su inmenso acompañamiento en esta tarea. A él y al profesor Sergio, por instruirme en la teoría de conjuntos y permitirme profundizar en ella durante mis años de estudio; estoy segura de que el amor que siento por esta área se originó en sus enseñanzas.

A Dios, por las personas con quienes me ha permitido coincidir en este camino y las experiencias que me ha permitido recolectar.

Y finalmente, a mi familia y amigos. Si es cierto que nos convertimos en un reflejo de quienes conocemos, puedo estar tranquila al haber coincidido con ustedes en esta vida.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN 8

1 PRELIMINARES 10

1.1 Medida de Lebesgue 10

1.2 Órdenes de conjuntos 11

2 INTRODUCCIÓN DE LA ESTRATEGIA μ 15

2.1 Predecir el presente 15

2.2 Predicción en funciones continuas 17

2.3 El problema de los sombreros 18

2.3.1. Caso finito 19

2.3.2. Caso infinito 20

3 PREDECIR EL FUTURO 21

4 UN REFINAMIENTO DEL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN 24

BIBLIOGRAFÍA 28

RESUMEN

TÍTULO: LOS BUENOS ÓRDENES Y EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN *

AUTOR: ANA SOFIA BOSSA JAIMES **

PALABRAS CLAVE: BUEN ORDEN, AXIOMA DE ELECCIÓN, TEOREMA DEL BUEN ORDEN, ESTRATEGIA, MEDIDA DE LEBESGUE, NUMERABLE, DENSO EN NINGUNA PARTE

DESCRIPCIÓN:

Un conjunto se dice bien ordenado si cada uno de sus subconjuntos no vacíos posee un elemento mínimo. De acuerdo con el teorema de Zermelo (el cual es un resultado equivalente al axioma de elección), todo conjunto puede ser bien ordenado. El objetivo de este trabajo es estudiar cómo la existencia de un buen orden en un espacio de funciones permite abordar un tipo de problema de predicción, en el que se busca determinar el valor de una función arbitraria v en un instante t (o en un intervalo posterior $[t,\ t+\epsilon)$) conociendo únicamente su comportamiento pasado.

En esta tesis, estudiamos la estrategia μ propuesta por C. Hardin y A. Taylor, la cual selecciona la función más "simple" (el elemento mínimo bajo un buen orden) que concuerda con los valores previos. En primer lugar, presentamos el problema de los sombreros como una motivación fundamental. Analizamos cómo el uso del axioma de elección permite que, en el caso infinito, el conjunto de aciertos tenga medida de Lebesgue completa.

Posteriormente, demostramos la efectividad de la estrategia μ para predecir el valor de una función en un instante t (lo que posteriormente denominamos predecir el presente) y también en un intervalo de instantes posteriores a él. Probamos que el conjunto de errores resultante es "pequeño" en un sentido topológico: es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte. Un aporte relevante de este trabajo es el análisis en funciones continuas, donde demostramos que la continuidad de una función garantiza una predicción del presente sin errores. Finalmente, exploramos un refinamiento del problema donde solo se conoce un pasado reciente o infinitesimal. Verificamos que, incluso con esta información reducida, la predicción es exitosa en un conjunto de medida completa.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: WELL-ORDERINGS AND THE PROBLEM OF PREDICTION *

AUTHOR: ANA SOFIA BOSSA JAIMES **

KEYWORDS: WELL-ORDERING, AXIOM OF CHOICE, WELL-ORDERING THEOREM, STRATEGY, LEBESGUE MEASURE, COUNTABLE SET, NOWHERE DENSE

DESCRIPTION:

A set is said to be well-ordered if each of its non-empty subsets has a least element. According to Zermelo's theorem (which is an equivalent result to the axiom of choice), every set can be well-ordered. The objective of this work is to study how the existence of a well-ordering in a function space allows us to address a type of prediction problem, in which we seek to determine the value of an arbitrary function v at an instant t (or in a subsequent interval $[t, t+\epsilon)$) knowing only its past behavior.

In this thesis, we study the μ-strategy proposed by C. Hardin and A. Taylor, which selects the "simplest" function (the least element under a well-ordering) that agrees with previous values. First, we present the hat problem as a fundamental motivation. We analyze how the use of the axiom of choice allows the set of successes to have full Lebesgue measure in the infinite case.

Subsequently, we demonstrate the effectiveness of the μ-strategy for predicting the value of a function at an instant t (which we later call predicting the present) and also in an interval of instants following it. We prove that the resulting set of errors is "small" in a topological sense: it is countable, has Lebesgue measure zero, and is nowhere dense. A relevant contribution of this work is the analysis of continuous functions, where we show that the continuity of a function allows us to predict the present with total accuracy. Finally, we explore a refinement of the problem where only a recent or infinitesimal past is known. We verify that, even with this reduced information, the prediction is successful on a set of full measure.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Consideremos la siguiente situación: un grupo de personas se encuentra organizado en fila para participar en un juego. A cada participante se le coloca un sombrero, el cual puede ser negro o blanco, de modo que cada persona puede ver el color de los sombreros de todos los participantes ubicados delante de él, sin incluir el suyo. El juego consiste en que cada participante adivine el color de su sombrero, teniendo en cuenta los colores de los sombreros que puede observar. **¿Qué estrategia pueden seguir los participantes para maximizar el número de personas que adivinan correctamente?** Este constituye un caso particular de los problemas conocidos como problemas de los sombreros [1].

El principal interés de estudio es el caso en que el conjunto de participantes es infinito. La pregunta natural es si existe una estrategia que garantice que solo una cantidad finita de participantes no logre adivinar el color de su sombrero o, en el caso en que el conjunto no sea numerable, que solo una cantidad numerable de participantes no logre adivinarlo. C. Hardin y A. Taylor [2] analizaron este problema al plantearlo en términos de funciones que van de un conjunto T (conjunto de participantes) a un conjunto S (posibles colores de sombreros), y demostraron que es posible formular una estrategia que permite predecir el valor de cualquiera de estas funciones en un punto arbitrario, manteniendo el conjunto de errores a lo sumo finito o numerable. La estrategia que ellos proponen requiere que el conjunto S^T esté bien ordenado. Por esta razón, la solución que presentamos hace uso del axioma de elección.

Por otro lado, Hardin y Taylor estudiaron la efectividad de la estrategia de predicción en el caso en que $T = \mathbb{R}$. En este contexto, puede interpretarse el conjunto T como un conjunto de instantes o momentos. Así, la estrategia permite predecir el valor de cualquier función en S^T en un instante t particular. Además, la estrategia puede emplearse para predecir el valor de la función no solo en el instante t, sino también en un intervalo de instantes posteriores, es decir, en un intervalo de la forma $[t, t+\epsilon)$. Nuevamente, el objetivo es maximizar la cantidad de instantes en los que la estrategia predice los valores de la función. Con esto, buscamos demostrar que este subconjunto de $\mathbb{R}$, en donde la estrategia acierta, tiene medida de Lebesgue completa. De forma equivalente, buscamos verificar que su complemento es pequeño, en el sentido de que tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo tiene dos objetivos articulados:

1. Estudiar el problema de la predicción siguiendo el desarrollo de Hardin y Taylor [3].

---

[1] C. S. Hardin y A. D. Taylor. “An introduction to infinite hat problems”. En: The American Mathematical Monthly 30.4 (2008), págs. 20-25.

[2] C. S. Hardin y A. D. Taylor. “A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future”. En: *The American Mathematical Monthly* 115.2 (2008), págs. 91-96.

[3] Hardin y Taylor, ver n. 2

2. Profundizar en las implicaciones de la estrategia de predicción en funciones con dominio $\mathbb{R}$, así como en funciones continuas de variable real; no solo en un instante particular, sino también en un intervalo de instantes posteriores.

De acuerdo con estos objetivos, la monografía se encuentra organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 abordamos el problema de "predecir el presente". Introducimos la estrategia de predicción y establecemos su efectividad para determinar el valor de una función en un instante t, a partir del conocimiento de los valores que esta toma en todos los instantes previos.

  Al estudiar su efectividad, buscamos determinar si el conjunto de instantes en los que la estrategia no coincide con el valor de la función tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte; es decir, si puede considerarse un conjunto pequeño visto topológicamente o en el sentido de la medida de Lebesgue.

  Adicionalmente, presentamos una solución al problema de los sombreros tanto en el caso en que el conjunto de participantes es finito como en el caso en que es $\mathbb{N}$. El énfasis en este último caso se debe a que, pese a tratarse de un conjunto infinito, la estrategia de predicción permite que todos los participantes adivinen el color de su sombrero, salvo a lo sumo una cantidad **finita** de ellos.

- En el Capítulo 3 consideramos el caso $T = \mathbb{R}$ y demostramos la efectividad de la estrategia para determinar el valor de una función en intervalos posteriores a un instante t, es decir, en intervalos de la forma $[t, t+\epsilon)$, a partir del conocimiento de los valores que esta toma en todos los instantes previos. En este contexto, verificamos que el conjunto de aciertos tiene medida de Lebesgue completa.

- Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos la efectividad de la estrategia de predicción en el caso $T = \mathbb{R}$, con una modificación: ya no se conocen los valores de la función en todos los instantes anteriores a t, sino únicamente en un intervalo de la forma (s, t). Demostramos que, a pesar de contar con menos información, el conjunto de errores tiene medida de Lebesgue cero.

1. PRELIMINARES

El desarrollo de la teoría presentada en este trabajo está fundamentado en la posibilidad de dotar a un conjunto arbitrario de un buen orden. Este resultado es conocido como el *teorema del buen orden* o *teorema de Zermelo* y fue demostrado por Ernst Zermelo en 1904 [4], quien tuvo que hacer uso del axioma de elección en su prueba.

En esta sección presentamos algunas definiciones y establecemos las propiedades que serán utilizadas de manera recurrente en el desarrollo de los resultados de este trabajo.

1.1. Medida de Lebesgue

En 1902, H. Lebesgue describió en su tesis doctoral una forma de asignar longitud a ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$; a esta medida se le conoce como *medida de Lebesgue*. Para los fines de este trabajo, en esta sección presentamos únicamente los conceptos de medida de Lebesgue cero y de medida completa, junto con algunas propiedades que serán utilizadas posteriormente.

Definición 1.1. Sea $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si para todo $\epsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos acotados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) < \epsilon,$$

con $M(I_n) = \sup(I_n) - \inf(I_n)$, se dice que B tiene **medida de Lebesgue cero**.

Definición 1.2. Sea $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se dice que B tiene **medida de Lebesgue completa** si $\mathbb{R} \setminus B$ tiene medida cero.

El siguiente teorema será usado frecuentemente, ya que al probar la efectividad de la estrategia buscaremos demostrar que el complemento del conjunto de instantes en los que esta predice el valor de la función, además de ser denso en ninguna parte y numerable, es pequeño en el sentido de la medida de Lebesgue.

Teorema 1.3. *Sea $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si B es numerable, entonces B tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que B es numerable. Luego, existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$, dada por $f(n) = b_n$, con $b_n \in B$ para cada n. Por tanto, podemos reescribir el conjunto B como

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}.$$

[4] E. Zermelo. “Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann”. En: *Mathematische Annalen* 59.4 (1904), págs. 514-516.

Sea $\epsilon > 0$; para cada natural n, consideremos el intervalo abierto

$$I_n = \left(b_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right);$$

es claro que $b_n \in I_n$ para todo n y, así, $B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

Dado que I_n es acotado, tiene un supremo y un ínfimo definidos, luego podemos calcular:

$$M(I_n) = b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} - \left(b_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right) = \frac{2\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \epsilon \, \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Así, B tiene medida de Lebesgue cero. □

Finalmente, presentaremos una propiedad cuya demostración se obtiene de manera inmediata a partir de la definición de medida cero previamente establecida.

Teorema 1.4. *Sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si $A \subseteq B$ y B tiene medida de Lebesgue cero, entonces A también tiene medida cero.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Si B tiene medida de Lebesgue cero, existe una familia numerable de intervalos acotados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que $B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) < \epsilon$. Es claro entonces que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) < \epsilon.$$

□

1.2. Órdenes de conjuntos

Definición 1.5. Un **orden** sobre un conjunto X es una relación binaria que cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

En este trabajo usaremos $\preceq$ para denotar un orden arbitrario. Un **conjunto ordenado** es un par $(X, \preceq)$ donde $\preceq$ es un orden sobre X.

Un orden $\preceq$ definido en un conjunto X es un **orden lineal** si para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

Definición 1.6. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto linealmente ordenado. Se dice que X está **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$ posee un elemento mínimo. Es decir, existe $a \in A$ tal que $a \preceq x$ para todo $x \in A$.

A continuación, presentamos dos enunciados fundamentales para el desarrollo de la estrategia de predicción. El primero de ellos es el axioma de elección y el segundo es el Teorema del Buen Orden. Ernst Zermelo demostró que el axioma de elección implica que todo conjunto puede ser bien ordenado [5]. Ambos enunciados son equivalentes y su uso es esencial en el desarrollo de este trabajo.

Axioma de Elección: *Sea I un conjunto no vacío, el cual se llamará el conjunto de índices. Dada una familia indizada de conjuntos no vacíos, $\{X_i : i \in I\}$, existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.*

Teorema 1.7 (Zermelo [6])**.** *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Para terminar esta sección, demostraremos una propiedad que satisface todo subconjunto de $\mathbb{R}$ bien ordenado bajo el orden usual, la cual será utilizada de forma recurrente.

Lema 1.8. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto bien ordenado bajo el orden usual $<_{\mathbb{R}}$. Entonces:*

1. *D es numerable.*
2. *$\overline{D}$ está bien ordenado bajo $<_{\mathbb{R}}$.*
3. *D es denso en ninguna parte.*
4. *D tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Para simplificar la notación, denotaremos el orden usual $<_{\mathbb{R}}$ como $<$. Probaremos primero que D es numerable.

Si $D = \emptyset$, se tiene el resultado deseado.

Supongamos que D no es vacío. Para cada $t \in D$ consideremos el conjunto

$$G_t = \{s \in D : t < s\}.$$

Observemos que, si existe $t \in D$ tal que $G_t = \emptyset$, este t es único. En efecto, si existiesen $t, t' \in D$ tales que $G_t = G_{t'} = \emptyset$ con $t \neq t'$, entonces, al ser D un conjunto totalmente ordenado bajo $<$, ocurriría que $t < t'$ o $t' < t$. Si $t < t'$, se seguiría que $G_t \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción; de manera análoga, si $t' < t$, se tendría $G_{t'} \neq \emptyset$, llegando nuevamente a una contradicción. Por lo tanto, tal t debe ser único; más aún, dicho elemento es el máximo de D y, en este caso, lo denotaremos por $t_{\text{máx}}$.

Por otro lado, si $G_t \neq \emptyset$, entonces tiene un elemento mínimo (debido al buen orden de D).

[5]Zermelo, ver n. 4
[6]Zermelo, ver n. 4

Definamos el conjunto

$$B = \begin{cases} D & \text{, si } G_t \neq \emptyset \text{ para todo } t \in D \\ D \backslash \{t_{\text{máx}}\} & \text{, si existe } t \in D \text{ tal que } G_t = \emptyset. \end{cases}$$

Observemos que $G_t \neq \emptyset$ para todo $t \in B$. Consideremos la función $g : B \to D$ dada por $g(t) = \text{mín}(G_t)$. Es claro que $t < g(t)$ para cada $t \in B$. Finalmente, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos escoger $q_t \in \mathbb{Q}$ tal que $t < q_t < g(t)$. Sea entonces

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ f(t) &= q_t \end{aligned}$$

Veremos que f es inyectiva.

Sean $t_1, t_2 \in B$, los cuales supondremos (sin pérdida de generalidad) que cumplen con que $t_1 < t_2$. Consideremos los conjuntos G_{t_1} y G_{t_2} definidos anteriormente, junto con la función g. Dado que $g(t_1) = \text{mín}(G_{t_1})$ y $t_2 \in G_{t_1}$, es claro entonces que $t_1 < g(t_1) \leq t_2 < g(t_2)$. Así, los intervalos $(t_1, g(t_1)), (t_2, g(t_2))$ son disjuntos y por ende, $q_{t_1} \neq q_{t_2}$.

Por tanto, la función f es inyectiva, lo que prueba que el conjunto B es numerable. Como $D = B$ o $D = B \cup \{t_{\text{máx}}\}$, tenemos que D es numerable.

Veamos ahora que $\overline{D}$ es también un conjunto bien ordenado bajo $<$. Supondremos por contradicción que $\overline{D}$ no está bien ordenado bajo $<$. Luego, existe una cadena decreciente infinita contenida en $\overline{D}$:

$$\cdots < x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0.$$

Veremos que existe entonces una sucesión decreciente contenida en D.

Para cada índice n, consideremos

$$\delta_n = \frac{\text{mín}\{x_n - x_{n+1}, x_{n-1} - x_n\}}{3} > 0$$

(en caso en que $n = 0$, tomaremos $\delta_0 = \frac{x_0 - x_1}{3}$). Sea entonces el intervalo $I_n = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$; es claro que $x_n \in I_n$ para cada n.

Notemos que, para todo n,

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \frac{x_n - x_{n+1}}{3}, \\ \delta_{n+1} &\leq \frac{x_n - x_{n+1}}{3} \end{aligned}$$

Luego,

$$\delta_n + \delta_{n+1} \leq \frac{x_n - x_{n+1}}{3} + \frac{x_n - x_{n+1}}{3} = \frac{2(x_n - x_{n+1})}{3} < x_n - x_{n+1}. \text{ Por tanto,}$$
$$\delta_n + \delta_{n+1} < x_n - x_{n+1} \text{ y así,}$$
$$x_{n+1} + \delta_{n+1} < x_n - \delta_n$$

Por otro lado, puesto que $x_n \in \overline{D}$ e I_n es un abierto que contiene a x_n, existe $d_n \in I_n \cap D$, para cada $n \geq 0$. Además,

$$d_n > x_n - \delta_n > x_{n+1} + \delta_{n+1} > d_{n+1}.$$

De esta manera, existe una sucesión decreciente $(d_n)_{n\geq 0}$ contenida en D, lo que contradice el buen orden de D bajo $<_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, $\overline{D}$ debe ser un conjunto bien ordenado.

Para probar que D es denso en ninguna parte, basta con notar que el interior de $\overline{D}$ debe ser vacío, ya que si no lo fuera, existiría un intervalo abierto no vacío $I \subseteq \overline{D}$, el cual no tendría mínimo, lo que contradice el buen orden de $\overline{D}$.

Finalmente, debido a que D es numerable, tiene medida de Lebesgue cero, como observamos en el teorema 1.3. $\square$

2. INTRODUCCIÓN DE LA ESTRATEGIA μ

Anteriormente, mencionamos una *estrategia de predicción* que permite determinar el valor de una función en un punto arbitrario de su dominio. Además, afirmamos que el conjunto de puntos donde esta predicción falla es pequeño desde una perspectiva topológica. En esta sección, introducimos los conceptos necesarios para definir formalmente dicha estrategia.

Sean T y S conjuntos, con $|S| \geq 2$. A las funciones de T en S las llamamos **escenarios**.

Ahora, sea $\lhd$ una relación binaria en T. Denotamos por

$$\lhd\, t = \{\, s \in T : s \lhd t \,\}.$$

Para cada $t \in T$, definimos la siguiente relación de equivalencia en S^T. Sean $v, w \in S^T$; decimos que

$$v \approx_t w \quad \Longleftrightarrow \quad v(s) = w(s) \text{ para todo } s \lhd t.$$

Usaremos la notación $[v]_t$ para la clase de equivalencia de v respecto a $\approx_t$.

Consideremos un buen orden en el conjunto de escenarios S^T, al cual denotaremos por $\preceq$. La existencia de dicho orden está garantizada por el **axioma de elección** cuando el conjunto de índices T es infinito. En adelante, este será el buen orden empleado en cada definición y resultado.

Definición 2.1. Sea el conjunto $\mathcal{O} = \{[v]_t : v \in S^T, t \in T\}$. Una **estrategia** es una función $g : \mathcal{O} \to S^T$ tal que $g([v]_t) \in [v]_t$ para cualquier $v \in S^T$ y $t \in T$.

Definición 2.2. Consideremos el buen orden $\preceq$ en S^T establecido anteriormente. La **estrategia** μ asociada a $\preceq$ viene dada por:

$$\mu([v]_t) = \min\,([v]_t, \preceq),$$

donde $v \in S^T$ y $t \in T$. Por simplicidad, usaremos la siguiente notación para la estrategia μ:

$$\langle v \rangle_t = \mu([v]_t).$$

2.1. Predecir el presente

Con *predecir el presente* hacemos referencia a la capacidad de una estrategia para determinar el valor de un escenario arbitrario v en un instante t, al conocer los valores que toma la función en todos los puntos del dominio anteriores a t. Es decir, conocer los valores de los instantes pasados permite deducir el valor en el *instante presente*.

Al finalizar esta sección, demostramos que el problema de los sombreros constituye un caso particular de la predicción del presente.

Sea $v \in S^T$ un escenario fijo. Definimos el conjunto de los instantes en los cuales la estrategia difiere del valor real del escenario:

$$W_0^v = \{t \in T : \langle v \rangle_t(t) \neq v(t)\}.$$

Teorema 2.3. [7] *Si $\lhd$ es una relación transitiva en T, entonces W_0^v no posee cadenas descendentes infinitas respecto a $\lhd$.*

Demostración. Supongamos que W_0^v tiene una cadena descendente infinita respecto a $\lhd$, es decir, que existen $t_0, t_1, t_2, ...$, con $t_i \in W_0^v$ tales que $\cdots \lhd t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$. Dado que para cualquier índice i sabemos que $t_{i+1} \lhd t_i$ y que por definición de la estrategia μ, $\langle v \rangle_{t_i} \approx_{t_i} v$, entonces $\langle v \rangle_{t_i}(t_{i+1}) = v(t_{i+1})$. Por otro lado, como $t_{i+1} \in W_0^v$, tenemos que $\langle v \rangle_{t_{i+1}}(t_{i+1}) \neq v(t_{i+1})$. Así, $\langle v \rangle_{t_i}(t_{i+1}) \neq \langle v \rangle_{t_{i+1}}(t_{i+1})$ y

$$\langle v \rangle_{t_i} \neq \langle v \rangle_{t_{i+1}}.$$

Además, para cualquier $s \lhd t_{i+1}$ y $f \in [v]_{t_i}$, se tiene que $s \lhd t_i$ (ya que $\lhd$ es transitiva) y, por definición de la relación $\approx_{t_i}$, $f(s) = v(s)$. Luego, por definición de la relación $\approx_{t_{i+1}}$, $f \in [v]_{t_{i+1}}$ y así $[v]_{t_i} \subseteq [v]_{t_{i+1}}$. Esto significa entonces que

$$\langle v \rangle_{t_{i+1}} \preceq \langle v \rangle_{t_i},$$

para cada i.

De esta forma, existe una cadena descendente infinita $\cdots \prec \langle v \rangle_{t_2} \prec \langle v \rangle_{t_1} \prec \langle v \rangle_{t_0}$, lo cual contradice que el conjunto S^T está bien ordenado mediante $\preceq$. $\square$

Corolario 2.4. [8] *Si $(T, \lhd)$ es un orden lineal estricto sin cadenas ascendentes infinitas, entonces W_0^v es finito para todo $v \in S^T$.*

Demostración. Supongamos que W_0^v es infinito. Dado que $W_0^v \subseteq T$, W_0^v no tiene cadenas ascendentes infinitas; luego, tiene un elemento máximo (ya que $W_0^v \neq \emptyset$). Veamos que esto genera una cadena descendente infinita en W_0^v.

Sea t_0 el máximo de W_0^v y definamos el conjunto

$$L_{t_0} = \{s \in W_0^v : s \lhd t_0\}.$$

[7] Hardin y Taylor, “A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future”, pág. 92. ver n. 2.

[8] Hardin y Taylor, pág. 93, ver n. 2

Este conjunto es infinito (puesto que $W_0^v = \{t_0\} \cup L_{t_0}$ es infinito) y así, es no vacío. Como $L_{t_0} \subseteq T$, no tiene cadenas ascendentes infinitas, luego posee un máximo t_1, con $t_1 \lhd t_0$.

Ahora, consideremos el conjunto

$$L_{t_1} = \{s \in W_0^v : s \lhd t_1\}.$$

Como $\lhd$ es un orden, si $s \in L_{t_1}$, entonces $s \in L_{t_0}$; por tanto L_{t_1} es infinito, puesto que $L_{t_0} = \{t_1\} \cup L_{t_1}$ lo es. Nuevamente, al no tener cadenas ascendentes infinitas, L_{t_1} tiene un máximo t_2, tal que $t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$.

Así, de forma recursiva podemos obtener una cadena descendente $t_k \lhd t_{k-1} \lhd \; ... \lhd t_0$, donde el conjunto $L_{t_k} = \{s \in W_0^v : s \lhd t_k\}$ es infinito y sin cadenas ascendentes infinitas, por lo que posee un máximo t_{k+1}, tal que $t_{k+1} \lhd t_k \lhd t_{k-1} \lhd \; ... \lhd t_0$.

De esta manera, para cada índice i existe $t_{i+1} \in W_0^v$ tal que $t_{i+1} \lhd t_i$. Luego, W_0^v tiene una cadena descendente infinita $\cdots \lhd t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$. Pero esto contradice el teorema 2.3, ya que al ser $\lhd$ un orden, es una relación transitiva.

Por lo tanto, W_0^v es finito. $\square$

Teorema 2.5. [9] *Si $(T, \lhd) = (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$, entonces W_0^v es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte, para todo $v \in S^{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Dado que $<_{\mathbb{R}}$ es un orden, W_0^v no tiene cadenas descendentes infinitas bajo $<_{\mathbb{R}}$ (por el teorema 2.3). Luego, se tiene que W_0^v es un conjunto bien ordenado, ya que si existiese un subconjunto $A \neq \emptyset, A \subseteq W_0^v$ sin un elemento mínimo, existiría una cadena descendente infinita en A. Así, por el lema 1.8, W_0^v es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte. $\square$

2.2. Predicción en funciones continuas

En esta sección, veremos que la continuidad de una función juega un rol muy importante para la efectividad de la estrategia μ.

Consideremos $T = S = \mathbb{R}$. En este caso, tomaremos los escenarios solamente en el conjunto de funciones continuas pertenecientes a S^T, es decir, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De la misma forma presentada anteriormente, el axioma de elección nos permite considerar un buen orden $\preceq$ en el conjunto $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En este caso, la relación binaria definida en T es $\lhd = <_{\mathbb{R}}$ (por simplicidad, mantendremos la notación $<$) y la relación de equivalencia en el espacio de funciones $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se mantiene

[9] Hardin y Taylor, pág. 93, ver n. 2

análoga a la definida previamente:

$$v \approx_t w \quad \Longleftrightarrow \quad v(s) = w(s) \text{ para todo } s < t,$$

para cualesquiera $v, w \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Nuevamente, para un escenario $v \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denotamos por $[v]_t$ a la clase equivalencia de v respecto a $\approx_t$ y consideramos el conjunto $\mathcal{O} = \{[v]_t : v \in S^T, t \in T\}$. La estrategia μ es la función $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que está dada por

$$\mu([v]_t) = \langle v \rangle_t = \min\left([v]_t, \preceq\right).$$

Sea $v \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Consideremos el conjunto de instantes donde la estrategia μ no concuerda con el valor real de la función en dicho instante:

$$X_0^v = \{t \in \mathbb{R} : \langle v \rangle_t(t) \neq v(t)\}.$$

Veremos que, en este caso, X_0^v es un conjunto vacío.

Teorema 2.6. *Sea $(T, \lhd) = (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$. Entonces X_0^v es vacío para todo $v \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $v \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dado que v es continua, se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$v(t) = \lim_{s \to t^-} v(s).$$

Ahora, dado que $\langle v \rangle_t$ también es una función continua, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\langle v \rangle_t(t) = \lim_{s \to t^-} \langle v \rangle_t(s).$$

Finalmente, puesto que $\langle v \rangle_t \in [v]_t$, la definición de la relación $\approx_t$ implica que $\langle v \rangle_t(s) = v(s)$ para todo $s \in (-\infty, t)$. Por tanto

$$\langle v \rangle_t(t) = \lim_{s \to t^-} \langle v \rangle_t(s) = \lim_{s \to t^-} v(s) = v(t).$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

En consecuencia, el conjunto X_0^v es vacío. $\square$

2.3. El problema de los sombreros

Una de las motivaciones del desarrollo de la teoría presentada hasta el momento es el estudio de un tipo de problema de predicción conocido como el problema de los sombreros. Este consiste en que un grupo P de personas, donde cada integrante porta un sombrero de un color particular y tiene la capacidad de observar los sombreros de ciertos participantes, intente determinar el color de su propio sombrero. Este problema puede caracterizarse según diversos aspectos: el cardinal de P (finito o infinito), el cardinal del conjunto de posibles colores de los sombreros, cuáles sombreros puede observar cada participante, entre otros. El objetivo es encontrar una estrategia que los participantes puedan emplear (la cual dependerá de la variante del problema considerado) que permita minimizar la cantidad de ellos que no aciertan el color de su sombrero.

A continuación, presentamos una de estas variantes, en la cual el conjunto de participantes es finito y el cardinal del conjunto de posibles colores de sombreros es igual a dos.

2.3.1. Caso finito. Se organiza en una fila un conjunto finito de personas, a cada una de las cuales se le coloca un sombrero, el cual puede ser blanco o negro. Cada individuo puede observar el color del sombrero de todas las personas que están delante de él y, comenzando por el último en la fila (es decir, aquel que puede ver todos los sombreros), cada individuo intenta adivinar el color del suyo propio. Este problema particular puede resolverse utilizando una estrategia que involucra paridad, en donde los participantes pueden reunirse y acordar usarla antes de que inicie el juego.

La estrategia es la siguiente:

1. La persona que inicia adivinando observará la cantidad de sombreros blancos de todos los jugadores delante de él en la fila. Si esta cantidad es par, dirá que su sombrero es blanco; si es impar, dirá que es negro.

2. La siguiente persona sabrá si el número de sombreros blancos es par o impar al oír la respuesta del primer jugador. Debido a que puede observar cuántas personas tienen sombreros blancos, logrará adivinar que, si la cantidad de sombreros blancos que observa es par y el primer jugador dijo "blanco", su sombrero debe ser de color negro; por otro lado, si el primer jugador dijo "negro", su sombrero deberá entonces ser blanco.
   Del mismo modo, si la cantidad de sombreros blancos que observa es impar y el anterior jugador dijo "blanco", adivinará que su sombrero también debe ser blanco, mientras que si el primer jugador dijo "negro", su sombrero entonces deberá ser negro.

3. El siguiente jugador conoce la paridad de sombreros blancos, incluyendo el suyo, gracias a la respuesta del primer jugador. Al escuchar la respuesta del segundo participante (de la cual se tiene certeza que es correcta) y observar la paridad de los sombreros restantes, podrá adivinar el color de su sombrero.

4. Los demás jugadores aplicarán esta misma estrategia. Notemos que al usar este método, todos los jugadores adivinan con certeza el color de su sombrero, a excepción del

primero; este primer jugador será el único que tiene una probabilidad igual a $\frac{1}{2}$ de adivinar su color.

2.3.2. Caso infinito. Ahora, supongamos que el conjunto de participantes es $\mathbb{N}$. Como en el caso anterior, cada uno tiene un sombrero de color blanco o negro. Los jugadores se encuentran ordenados en una fila y enumerados de forma ascendente, de manera que cada uno puede ver solamente los sombreros de todos los que tienen una posición numérica mayor. En este caso, se busca que cada participante intente adivinar el color de su sombrero sin que sea necesario oír las respuestas de los jugadores anteriores.

Una estrategia que minimiza la cantidad de participantes que no logran adivinar es precisamente la estrategia μ, ya que al hacer uso de esta, esta cantidad será finita.

En este problema el conjunto T representa a los participantes y, por tanto, $T = \mathbb{N}$. El conjunto S representa los posibles colores de sombreros. Para simplificar la notación, asignaremos al color blanco el valor 1 y al color negro el valor 0; así, $S = \{0, 1\}$. Definiremos la relación $\lhd$ en T de la siguiente manera:

$$s \lhd t \iff t <_{\mathbb{N}} s$$

para cada $s, t \in \mathbb{N}$.

Un escenario es entonces una función $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, que representa una de las posibles coloraciones de sombreros de los participantes. Denotaremos al escenario correcto por v.

Cada participante t observa los colores de sombreros que tienen todos los jugadores s tales que $t <_{\mathbb{N}} s$, es decir, conoce los valores de $v(s)$ para todo $s \lhd t$. Además, dado que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado, la cantidad de sombreros que no puede observar (los de aquellos participantes que tienen una numeración menor) es finita. Por tanto, al definir la relación de equivalencia $\approx_t$ como:

$$v \approx_t w \iff v(s) = w(s) \;\; \forall s \lhd t$$

para cada $v, w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, se tiene entonces que cada jugador t conoce todos los posibles escenarios que están relacionados mediante $\approx_t$ con el escenario correcto; es decir, conoce los elementos de la clase de equivalencia $[v]_t$.

Por el axioma de elección, es posible establecer un buen orden $\preceq$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Al usar la estrategia μ, cada participante t seleccionará la función mínima bajo este orden, perteneciente al conjunto $[v]_t$, la cual denotamos por $\langle v \rangle_t$. Finalmente, su respuesta será el valor $\langle v \rangle_t(t)$.

En este contexto, el conjunto W_0^v es el conjunto de jugadores que al hacer uso de la estrategia μ responden incorrectamente. Gracias al corolario 2.4, ese conjunto es finito.

3. PREDECIR EL FUTURO

Consideremos ahora que el conjunto de instantes T es $\mathbb{R}$. A continuación, estudiamos la efectividad de la estrategia μ para predecir los valores de un escenario $v \in S^{\mathbb{R}}$, no solo en un instante $t \in \mathbb{R}$, sino también en un intervalo de instantes posteriores a t; es decir, predecir el valor de $v(s)$ para cada $s \in [t, t+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. A lo anterior, lo denominamos como que la estrategia μ logró *predecir un poco el futuro* en t.

Nuestro objetivo en esta sección es probar que, para todo escenario $v \in S^{\mathbb{R}}$, el conjunto de todos los instantes t en los que la estrategia μ predice un poco el futuro, debe tener medida completa. Es decir, demostramos que para todo $v \in S^{\mathbb{R}}$, el conjunto

$$\begin{aligned} P^v &= \{t \in \mathbb{R} : \mu \text{ logra predecir un poco el futuro en } t\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } v(s) = \langle v \rangle_t(s)\ \forall s \in [t, t+\epsilon)\} \end{aligned}$$

tiene medida de Lebesgue completa. Para ello, usamos el conjunto W_1^v, definido a continuación.

Sea $v \in S^T$ un escenario fijo. Definamos el conjunto de instantes donde la función elegida por la estrategia μ es distinta a todas las funciones elegidas en instantes posteriores:

$$W_1^v = \{t \in T : \langle v \rangle_t \neq \langle v \rangle_{t'} \text{ para todo } t \lhd t'\}.$$

Veamos primero que los resultados de la sección 2.1 se cumplen de forma análoga para el conjunto W_1^v, con un conjunto T y una relación binaria $\lhd$ en T arbitrarios.

Teorema 3.1. [10] *Si $\lhd$ es una relación transitiva en T, entonces W_1^v no posee cadenas decrecientes infinitas respecto a $\lhd$.*

Demostración. Supongamos que W_1^v tiene una cadena descendente infinita respecto a $\lhd$, es decir, que existen $t_0, t_1, t_2, ...$, con $t_i \in W_1^v$ tales que $\cdots \lhd t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$. Por la definición de W_1^v, se tiene que para cada índice i

$$\langle v \rangle_{t_{i+1}} \neq \langle v \rangle_{t_i}.$$

Por el mismo argumento presentado en la prueba del teorema 2.3, sabemos que

$$\langle v \rangle_{t_{i+1}} \preceq \langle v \rangle_{t_i},$$

para cada i.

[10] Hardin y Taylor, pág. 94, ver n. 2

De esta forma, existe una cadena descendente infinita $\cdots \prec \langle v\rangle_{t_2} \prec \langle v\rangle_{t_1} \prec \langle v\rangle_{t_0}$, lo cual contradice que el conjunto S^T está bien ordenado mediante $\preceq$. $\square$

Corolario 3.2. [11] *Si $(T, \lhd)$ es un orden lineal estricto sin cadenas ascendentes infinitas, entonces W_1^v es finito para todo $v \in S^T$.*

Demostración. Usaremos un argumento análogo a la prueba del corolario 2.4. Supongamos que W_1^v es infinito; es claro que $W_1^v \neq \emptyset$. Al estar contenido en T, W_1^v no tiene cadenas ascendentes infinitas y por tanto, tiene un elemento máximo. Veremos que esto genera una cadena descendente infinita en W_1^v.

Sea t_0 el máximo de W_1^v y definamos el conjunto

$$L_{t_0} = \{s \in W_1^v : s \lhd t_0\},$$

el cual es infinito (puesto que $W_1^v = \{t_0\} \cup L_{t_0}$ es infinito) y por tanto, no vacío. Al estar contenido en T, L_{t_0} no tiene cadenas ascendentes infinitas, luego posee un máximo t_1, con $t_1 \lhd t_0$.

Ahora, consideremos el conjunto

$$L_{t_1} = \{s \in W_1^v : s \lhd t_1\}.$$

Notemos que $L_{t_0} = \{t_1\} \cup L_{t_1}$, debido a que $\lhd$ es una relación transitiva. Luego, dado que L_{t_0} es infinito, L_{t_1} también lo es. Nuevamente, al no tener cadenas ascendentes infinitas, L_{t_1} tiene un máximo t_2, tal que $t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$.

Así, de forma recursiva podemos obtener una cadena descendente $t_k \lhd t_{k-1} \lhd \ \ldots \lhd t_0$, donde el conjunto $L_{t_k} = \{s \in W_1^v : s \lhd t_k\}$ es infinito y sin cadenas ascendentes infinitas, por lo que posee un máximo t_{k+1}, tal que $t_{k+1} \lhd t_k \lhd t_{k-1} \lhd \ \ldots \lhd t_0$.

De esta manera, para cada índice i existe $t_{i+1} \in W_1^v$ tal que $t_{i+1} \lhd t_i$. Luego, W_1^v tiene una cadena descendente infinita $\cdots \lhd t_2 \lhd t_1 \lhd t_0$, lo que contradice el teorema 3.1.

Por lo tanto, W_1^v es finito. $\square$

Teorema 3.3. [12] *Si $(T, \lhd) = (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$, entonces W_1^v es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte, para todo $v \in S^{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Puesto que $<_{\mathbb{R}}$ es un orden, W_1^v no tiene cadenas decrecientes infinitas bajo $<_{\mathbb{R}}$ (por el teorema 3.1). Por tanto, W_1^v es un conjunto bien ordenado (bajo el mismo argumento

[11] Hardin y Taylor, pág. 94, ver n. 2

[12] Hardin y Taylor, pág. 94, ver n. 2

usado en la prueba del teorema 2.5). Así, por el lema 1.8, W_1^v es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte. $\square$

Finalmente, para demostrar que nuestro conjunto de interés P^v tiene medida completa, veremos que cualquier elemento no perteneciente a él debe estar en W_1^v. Para ello, notemos que

$$\mathbb{R}\backslash P^v = \{t \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists s \in [t, t+\epsilon) \text{ tal que } v(s) \neq \langle v \rangle_t(s)\}$$

es el conjunto de instantes donde la estrategia μ no logra predecir un poco el futuro.

Teorema 3.4. [13] *Sea* $(T, \lhd) = (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$. *Entonces el conjunto de instantes* P^v *tiene medida de Lebesgue completa para todo* $v \in S^{\mathbb{R}}$.

Demostración. Escribiremos $<$ en lugar de $<_{\mathbb{R}}$. Sea $t \in \mathbb{R}\backslash P^v$. Luego, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $s \in [t, t+\epsilon)$ tal que $v(s) \neq \langle v \rangle_t(s)$.

Sea $t' \in \mathbb{R}$, con $t' > t$. Por lo mencionado anteriormente, al tomar $\epsilon = t' - t > 0$, existe $s \in [t, t')$ tal que $v(s) \neq \langle v \rangle_t(s)$. Dado que $s < t'$, por definición de la estrategia μ, ocurre que $v(s) = \langle v \rangle_{t'}(s)$. Luego,

$$\langle v \rangle_t \neq \langle v \rangle_{t'}.$$

Así, por definición de W_1^v, $t \in W_1^v$. Por tanto, se tiene entonces que $\mathbb{R}\backslash P^v \subseteq W_1^v$.

Puesto que, por el teorema 3.3, W_1^v es un conjunto con medida de Lebesgue cero, $\mathbb{R}\backslash P^v$ también lo es (por la propiedad 1.4). En consecuencia, P^v es un conjunto con medida de Lebesgue completa. $\square$

[13] Hardin y Taylor, pág. 94, ver n. 2

4. UN REFINAMIENTO DEL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN

En esta sección trabajamos nuevamente con el conjunto de instantes $T = \mathbb{R}$. Por otro lado, modificamos la relación de equivalencia en el conjunto de escenarios. Decimos que dos escenarios están relacionados si coinciden *solo en un pasado reciente a* $t \in \mathbb{R}$, no necesariamente en todos los instantes previos a t. Más precisamente, para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos la relación de equivalencia $\equiv_t$ en $S^{\mathbb{R}}$ como:

$$v \equiv_t w \iff \exists s < t \text{ tal que } v(m) = w(m)\ \forall m \in (s,t),$$

con $v, w \in S^{\mathbb{R}}$.

Sea $v \in S^{\mathbb{R}}$ y un instante $t \in \mathbb{R}$; consideremos nuevamente la clase de equivalencia $[v]_{\equiv_t}$ respecto a $\equiv_t$ y el buen orden $\preceq$ en el conjunto $S^{\mathbb{R}}$ existente gracias al axioma de elección. Podemos ahora hacer uso de la estrategia μ, a la que denotaremos nuevamente por:

$$\langle v\rangle_t = \mu([v]_{\equiv_t}) = \min([v]_{\equiv_t}, \preceq).$$

Así como en la sección 3, al considerar un escenario $v \in S^{\mathbb{R}}$ y un instante t, decimos que la estrategia μ logra *predecir un poco el futuro en* t si existe $\epsilon > 0$ tal que $v(s) = \langle v\rangle_t(s)$ para todo $s \in [t, t+\epsilon)$. Nuevamente, denotamos por P^v al conjunto de instantes que cumplen con dicha propiedad.

Veamos que, incluso si conocemos los valores que toma un escenario $v \in S^{\mathbb{R}}$ únicamente en un intervalo que finaliza en t (y no necesariamente en todos los valores anteriores a t), el conjunto $\mathbb{R}\backslash P^V$ (instantes donde la estrategia μ no logra predecir un poco el futuro) permanece numerable y denso en ninguna parte; es decir, que el conjunto P^v definido anteriormente tiene medida de Lebesgue completa.

Teorema 4.1. [14] *$\mathbb{R}\backslash P^v$ es numerable, tiene medida de Lebesgue cero y es denso en ninguna parte, para todo $v \in S^{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Para la primera parte de la prueba, veremos que $\mathbb{R}\backslash P^v$ puede verse como la unión de conjuntos numerables.

Para cada $q \in \mathbb{Q}$, consideremos el conjunto

$$W_q = \{t \in \mathbb{R}\backslash P^v : q < t \text{ y } \langle v\rangle_t(m) = v(m)\ \forall m \in (q,t)\}.$$

[14] Hardin y Taylor, pág. 95, ver n. 2

Es claro que $W_q \subseteq \mathbb{R}\backslash P^v$ para cada $q \in \mathbb{Q}$. Luego, $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} W_q \subseteq \mathbb{R}\backslash P^v$. Mostraremos que

$$\mathbb{R}\backslash P^v = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} W_q$$

y que cada W_q es numerable.

Sea $t \in \mathbb{R}\backslash P^v$. Por definición de la estrategia μ y de la relación $\equiv_t$, se tiene que existe un $s < t$ tal que $\langle v\rangle_t(m) = v(m)$ para todo $m \in (s,t)$. Por la densidad de los números racionales en la recta real, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (s,t)$; luego, $\langle v\rangle_t$ y v coinciden en el intervalo (q,t). Así, $t \in W_q$ y, en consecuencia, $\mathbb{R}\backslash P^v \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} W_q$.

Ahora, para probar que W_q es un conjunto numerable para cada racional q, demostraremos que debe ser un conjunto bien ordenado bajo $<_{\mathbb{R}}$ (que denotamos como $<$).

Sea $q \in \mathbb{Q}$. Consideremos dos elementos $t, t' \in W_q$ con $t < t'$. Dado que $t \in W_q \subseteq \mathbb{R}\backslash P^v$, por definición de $\mathbb{R}\backslash P^v$ se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $s \in [t, t+\epsilon)$ tal que $v(s) \neq \langle v\rangle_t(s)$. Al escoger $\epsilon = t' - t > 0$, existe entonces $s \in [t, t')$ con $v(s) \neq \langle v\rangle_t(s)$.

Dado que $t, t' \in W_q$, se cumple que $q < t \leq s < t'$ y $\langle v\rangle_{t'}(m) = v(m)$ para todo $m \in (q, t')$. Así, en particular tenemos que $\langle v\rangle_{t'}(s) = v(s)$. Por tanto, $\langle v\rangle_t(s) \neq v(s) = \langle v\rangle_{t'}(s)$ y

$$\langle v\rangle_{t'} \neq \langle v\rangle_t.$$

Del mismo modo, puesto que $t \in (q, t')$, $\langle v\rangle_{t'}$ y v coinciden en el intervalo (q,t). Por definición de la relación $\equiv_t$, se tiene que $\langle v\rangle_{t'} \equiv_t v$. Por tanto, $\langle v\rangle_{t'} \in [v]_{\equiv_t}$ y, en consecuencia, $\langle v\rangle_t \preceq \langle v\rangle_{t'}$ (recordemos que $\langle v\rangle_t = \text{mín}([v]_{\equiv_t}, \preceq)$).

De esta forma, para cualesquiera $t, t' \in W_q$, con $t < t'$, se tiene que

$$\langle v\rangle_t \prec \langle v\rangle_{t'}.$$

Luego, si existiese una cadena descendente infinita $\cdots < t_{i+1} < t_i < \cdots < t_1 < t_0$ contenida en W_q, existiría entonces una cadena decreciente infinita $\cdots \prec \langle v\rangle_{t_{i+1}} \prec \langle v\rangle_{t_i} \prec \cdots \prec \langle v\rangle_{t_1} \prec \langle v\rangle_{t_0}$ en $S^{\mathbb{R}}$, lo que contradice que $(S^{\mathbb{R}}, \preceq)$ es un buen orden.

Así, W_q no posee cadenas decrecientes infinitas respecto a $<_{\mathbb{R}}$, por lo que W_q está bien ordenado. Finalmente, por el lema 1.8, W_q es un conjunto numerable para cada $q \in \mathbb{Q}$. Por ser unión de conjuntos numerables, $\mathbb{R}\backslash P^v$ es un conjunto numerable, con medida de Lebesgue cero.

Veremos ahora que $\mathbb{R}\backslash P^v$ es denso en ninguna parte. Supongamos por contradicción que

$(\overline{\mathbb{R}\backslash P^v})^\circ \neq \emptyset$ (veremos que podremos definir dos sucesiones decrecientes $(t_i)_{i\geq 0}$ y $(s_i)_{i\geq 0}$ que generan una cadena descendente infinita en $S^{\mathbb{R}}$). Existe entonces un intervalo abierto $(a,b) \neq \emptyset$ tal que $(a,b) \subseteq \overline{\mathbb{R}\backslash P^v}$, por lo que podemos tomar $t_0 \in (a,b) \cap (\mathbb{R}\backslash P^v)$. Por definición de la estrategia μ y de la relación $\equiv_{t_0}$, existe $m_0 < t_0$ tal que $\langle v\rangle_{t_0}(m) = v(m)$ para todo $m \in (m_0, t_0)$.

Notemos que $a < t_0 < b$, pero puede ocurrir que $m_0 \leq a$ o $a < m_0$. En caso en que $m_0 \leq a$, tomamos $s_0 \in (a, t_0) \subseteq (m_0, t_0)$ que cumple con que $\langle v\rangle_{t_0}(m) = v(m)$ para todo $m \in (s_0, t_0)$. Si, por otro lado, $a < m_0$, escogemos $s_0 = m_0$. Así, $a < s_0 < t_0 < b$.

Ahora, dado que $(s_0, t_0) \subseteq \overline{\mathbb{R}\backslash P^v}$, existe $t_1 \in (s_0, t_0) \cap (\mathbb{R}\backslash P^v)$. Nuevamente, por definición de la estrategia μ y de la relación $\equiv_{t_1}$, existe $m_1 < t_1$ tal que $\langle v\rangle_{t_1}(m) = v(m)$ para todo $m \in (m_1, t_1)$. De manera análoga a lo presentado anteriormente, si $m_1 \leq s_0$ existe $s_1 \in (s_0, t_1) \subseteq (m_1, t_1)$ tal que $\langle v\rangle_{t_1}(m) = v(m)$ para todo $m \in (s_1, t_1)$. Por el contrario, si $s_0 < m_1$, tomamos $s_1 = m_1$. De este modo, $a < s_0 < s_1 < t_1 < t_0 < b$.

Continuando de esta manera, obtenemos dos sucesiones $(s_i)_{i\geq 0}$, $(t_i)_{i\geq 0}$ tales que, para cada $i \geq 0$ se tiene que: $t_i \in \mathbb{R}\backslash P^v$; $\langle v\rangle_{t_i}(m) = v(m)$ para todo $m \in (s_i, t_i)$ y

$$a < s_i < s_{i+1} < t_{i+1} < t_i < b.$$

Sean $t_{i+1}, t_i \in (t_i)_{i\geq 0}$ y $s_{i+1}, s_i \in (s_i)_{i\geq 0}$; se tiene entonces la desigualdad anterior.

Dado que $t_{i+1} \in \mathbb{R}\backslash P^v$, para todo $\epsilon > 0$ existe $s \in [t_{i+1}, t_{i+1} + \epsilon)$ tal que $v(s) \neq \langle v\rangle_{t_{i+1}}(s)$ (por definición del conjunto $\mathbb{R}\backslash P^v$). Al escoger $\epsilon = t_i - t_{i+1} > 0$, existe entonces $s \in [t_{i+1}, t_i)$ con $v(s) \neq \langle v\rangle_{t_{i+1}}(s)$.

Por otro lado, dado que $\langle v\rangle_{t_i}(m) = v(m)$ para todo $m \in (s_i, t_i)$ y además, $s \in [t_{i+1}, t_i) \subseteq (s_i, t_i)$, entonces $\langle v\rangle_{t_i}(s) = v(s)$. Por tanto, $\langle v\rangle_{t_{i+1}}(s) \neq v(s) = \langle v\rangle_{t_i}(s)$ y, en consecuencia

$$\langle v\rangle_{t_{i+1}} \neq \langle v\rangle_{t_i}.$$

Ahora, puesto que $t_{i+1} \in (s_i, t_i)$, en particular ocurre que $\langle v\rangle_{t_i}(m) = v(m)$ para todo $m \in (s_i, t_{i+1})$. Por definición de la relación $\equiv_{t_{i+1}}$, se tiene $\langle v\rangle_{t_i} \equiv_{t_{i+1}} v$; por tanto, $\langle v\rangle_{t_i} \in [v]_{\equiv_{t_{i+1}}}$ y así, $\langle v\rangle_{t_{i+1}} \preceq \langle v\rangle_{t_i}$.

De esta manera, para cualesquiera términos de la sucesión t_{i+1}, t_i, con $t_{i+1} < t_i$, se tiene que

$$\langle v\rangle_{t_{i+1}} \prec \langle v\rangle_{t_i}.$$

Por tanto existe una cadena descendente infinita $\cdots \prec \langle v\rangle_{t_{i+1}} \prec \langle v\rangle_{t_i} \prec \cdots \prec \langle v\rangle_{t_1} \prec \langle v\rangle_{t_0}$ contenida en $S^{\mathbb{R}}$, lo que contradice que $\preceq$ es un buen orden del conjunto.

Así, $\mathbb{R} \setminus P^v$ es denso en ninguna parte. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

Hardin, C. S. y A. D. Taylor. “An introduction to infinite hat problems”. En: *The Mathematical Intelligencer* 30.4 (2008), págs. 20-25. (vid. pág. 8).

Hardin, C. S. y A. D. Taylor. “A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future”. En: The American Mathematical Monthly 115.2 (2008), págs. 91-96 (vid. págs. 8, 16, 17, 21-24).

Zermelo, E. “Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann”. En: *Mathematische Annalen* 59.4 (1904), págs. 514-516 (vid. pág. 10, 12).