

El Tangram como estrategia didáctica para la enseñanza de fracciones en estudiantes de 4° de primaria.

Diana Valentina Bareño Sierra, Sara Elizabeth Gómez Carreño

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Educación Básica Primaria

Directora:

Juddy Amparo Valderrama Moreno

Doctora en Ciencias de la Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2026

Agradecimientos

Diana:

A Dios, gracias por acompañarme en cada paso de este camino, por darme fuerza cuando el cansancio y la duda aparecieron, por sostenerme en silencio y por recordarme que incluso en los momentos más difíciles, nunca estuve sola.

A mis padres, mi mayor apoyo y mi mayor ejemplo. Gracias por su amor incondicional, por cada sacrificio que muchas veces no se ve, por su paciencia infinita y por creer en mí incluso cuando yo misma dudaba. Este logro es tan suyo como mío.

A mi familia, gracias por comprender mis ausencias, por su apoyo constante, por las palabras de ánimo y por estar presentes en cada etapa de este proceso, recordándome siempre el valor de seguir adelante.

A mi compañera y amiga Sara, gracias por caminar conmigo este proceso, por tu apoyo sincero, tu compañía, tu disposición y tu amistad. Compartir este camino contigo hizo que los retos fueran más llevaderos y que este logro tuviera aún más sentido.

Finalmente, agradezco a todas las personas que, directa o indirectamente, hicieron parte de este proceso y contribuyeron a mi formación personal y profesional.

Sara:

En primer lugar, agradezco a Dios por su presencia constante a lo largo de este camino, por darme la fortaleza, la paciencia y la tranquilidad necesarias para afrontar cada desafío y no desfallecer en los momentos de dificultad. Su guía fue fundamental para culminar este proceso académico con esperanza y confianza.

A mis padres, mi más profundo agradecimiento por apoyo constante y confianza absoluta en mí. Gracias por acompañarme en cada etapa de este proceso, por sostenerme en los momentos de cansancio y por impulsarme siempre a seguir adelante. A mi hermana, gracias por su amor, apoyo, comprensión y compañía a lo largo de este recorrido.

A la Universidad Industrial de Santander UIS, agradezco por abrirme sus puertas y brindarme una formación académica y humana que hizo posible el desarrollo de esta investigación. Valoro profundamente los espacios de aprendizaje, el acompañamiento institucional y las oportunidades que contribuyeron a mi crecimiento personal y profesional.

A mis amigos, gracias por su apoyo sincero, por escucharme, animarme y acompañarme en los momentos de estrés y también de alegría. Su presencia hizo que este proceso fuera más llevadero y significativo. De manera muy especial, agradezco a Diana, mi compañera y amiga, por estar siempre a mi lado durante este largo camino, gracias por tu apoyo incondicional, tu paciencia, tus palabras de ánimo y tu disposición constante para ayudarme en cada etapa de este proceso. Sin tu acompañamiento, este camino habría sido mucho más difícil. Este logro también es tuyo.

Resumen

Título: El tangram como estrategia didáctica para la enseñanza de fracciones en estudiantes de 4º de primaria*

Autor: Diana Valentina Bareño Sierra, Sara Elizabeth Gómez Carreño**

Palabras Clave: Tangram; Fracción; Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje; Pensamiento espacial; Investigación de diseño

Descripción:

La enseñanza de las fracciones en la educación básica primaria presenta una serie de retos cognitivos y didácticos que dificultan su comprensión por parte de los estudiantes. A menudo, las metodologías tradicionales priorizan la memorización de procedimientos por encima del razonamiento conceptual, lo cual limita el desarrollo del pensamiento matemático. Esta investigación propone el uso del tangram como estrategia didáctica que vincula el pensamiento numérico con el pensamiento espacial, lo cual favorece la comprensión significativa de las fracciones mediante la manipulación concreta y la Visualización Geométrica y el Razonamiento Matemático. El estudio se desarrolló con estudiantes de cuarto grado de primaria del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, que utiliza la metodología de investigación de Diseño (Design-Based Research) y el enfoque de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA). Por medio de trayectorias secuenciadas, se implementaron tareas manipulativas y digitales que promovieron la construcción progresiva del concepto de fracción, particularmente en la interpretación parte-todo, la equivalencia y la representación gráfica, al resaltar el potencial del tangram como herramienta didáctica.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Juddy Amparo Valderrama Moreno Doctora en Ciencias de la Educación.

Abstract

Title: The use of tangrams as a teaching strategy for teaching fractions to 4th grade students *

Author(s): Diana Valentina Bareño Sierra, Sara Elizabeth Gómez Carreño **

Key Words: Tangram; Fraction; Hypothetical Learning Paths; Spatial Thinking; Design Research

Description:

Teaching fractions in primary education presents a series of cognitive and didactic challenges that hinder students' understanding. Traditional methodologies often prioritize memorization of procedures over conceptual reasoning, limiting the development of mathematical thinking. This research proposes the use of tangrams as a teaching strategy that links numerical thinking with spatial thinking, fostering meaningful understanding of fractions through concrete manipulation, geometric visualization and Mathematical Reasoning. The study was conducted with fourth-grade elementary school students at the José Elías Puyana Technical Industrial School, using the Design-Based Research methodology and the Hypothetical Learning Paths (HLP) approach. Through sequenced paths, manipulative and digital tasks were implemented that promoted the progressive construction of the concept of fraction, particularly in part-whole interpretation, equivalence, and graphic representation, highlighting the potential of tangrams as a teaching tool.

*Degree Work

**Faculty of Human Sciences. School of Education. Director: Juddy Amparo Valderrama Moreno Ph.D. in Educational Sciences.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	8
1. Aproximación a la problemática de investigación.....	10
1.2. Justificación.....	13
1.3. Objetivos 16	
1.3.1. Objetivo General	16
1.3.2. Objetivos Específicos	16
2. Aproximación teórica.....	17
2.1. Antecedentes de la Investigación	17
2.1.1. Contexto Internacional	18
2.1.2. Contexto Nacional.....	22
2.1.3. Local.....	25
2.2. Marco Teórico	26
2.2.1. El aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica Primaria	26
Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de fracciones	28
2.2.2. Aprendizaje significativo y materiales concretos	31
2.2.3. La Tecnología como medio en la enseñanza de la Matemática.....	40
2.2.4. El juego como didáctica o estrategia de enseñanza.....	41
2.2.5. Uso del Tangram como recurso didáctico	44
Figura 1. Tangram tradicional chino	48
2.2.6. Habilidades de Razonamiento y Visualización	48
2.3. Marco normativo	50
2.3.1. Normativa Internacional.....	51
2.3.2. Normativa Nacional	52
3. Aproximación Metodológica.....	54
3.1. Enfoque, Diseño y Tipo de Investigación.....	54
3.2. Población y Muestra.....	56
3.2.1. Caracterización de cada grupo de cuarto grado.....	57

3.3. Método	60
3.3.2. Preparación.....	63
3.3.3. Experimento	64
3.3.4. Técnicas e Instrumentos	65
3.3.5. Consideraciones éticas.....	69
4. Análisis de Resultados.....	71
4.1. Fase 1: Preparación del experimento.....	71
Categoría Analizada Respuestas Representativas.....	73
4.2. Fase 2: Experimento del diseño.....	74
Categoría Evidencias reconstruidas Avances Observados	76
4.3. Fase 3: Análisis retrospectivo.....	76
5. Discusión de resultados	78
Conclusiones	81
Recomendaciones	83
Referencias Bibliográficas.....	85

Anexos	93
Anexo 1	93
Anexo 2. Primera Fase	93
Anexo 3. Segunda fase	94
Anexo 4. Tercera Fase.....	95

Introducción

Actualmente, uno de los mayores desafíos en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, lo representa la comprensión del concepto de fracción. A pesar de su relevancia como fundamento para el pensamiento proporcional y algebraico, las fracciones suelen ser uno de los contenidos más difíciles de asimilar para los estudiantes. Esta dificultad ha sido documentada por numerosos estudios que señalan errores recurrentes en la interpretación parte-todo, el uso de algoritmos sin comprensión conceptual, la confusión entre numerador y denominador, y una escasa conexión entre las representaciones visuales y simbólicas. (Kieren, 1993; Nesher 1988; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Por otra parte, en el contexto colombiano, esta problemática se acentúa por el predominio de prácticas pedagógicas centradas en la memorización y ejecución de procedimientos descontextualizados, lo que genera una enseñanza limitada al plano operativo. La falta de propuestas didácticas que promuevan una comprensión significativa del número racional se refleja en los bajos niveles de desempeño en pruebas estandarizadas y en la baja valoración que los estudiantes hacen de las matemáticas como herramienta para la vida cotidiana.

Frente a este panorama, la presente investigación propone el uso del tangram como estrategia didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado. Este rompecabezas de origen chino, compuesto por siete piezas geométricas, permite establecer relaciones visuales y proporcionales entre partes y el todo, lo que lo convierte en un recurso pertinente para introducir y consolidar nociones fraccionarias. A través de su manipulación, los estudiantes pueden construir equivalencias, comparar áreas, justificar particiones y generar

representaciones múltiples, en donde se integran pensamiento geométrico y numérico en un solo proceso (Del Grande, 1990; Morales, 2010).

En consecuencia, este trabajo se sustenta en el enfoque de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, planteado por Simon (1995) y desarrollado por Clements y Sarama (2004), debido a que permite planificar, anticipar y analizar los procesos de aprendizaje desde las concepciones previas de los estudiantes. Además, adopta la metodología de Investigación de Diseño, que articula teoría e intervención educativa mediante ciclos iterativos de diseño, implementación y análisis en contextos reales de aula (Cobb et al., 2003). Estas perspectivas metodológicas posibilitan una comprensión profunda del aprendizaje de las fracciones mediado por el tangram, que permite generar una teoría local de instrucción basada en la experiencia.

La implementación de esta propuesta se llevó a cabo en cinco grupos de cuarto grado de primaria del Colegio José Elías Puyana, en el municipio de Floridablanca, Santander, durante un periodo de cinco semanas. A partir del diagnóstico inicial, se decidió focalizar el proceso de intervención en dos grupos (4-1 y 4-2), seleccionados por evidenciar un mayor nivel de interés, disposición al trabajo colaborativo y respuestas favorables frente a las dinámicas propuestas. A lo largo de este proceso, se diseñaron (número de trayectorias) Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje que integran el uso del tangram físico y digital (GeoGebra), al observar el desarrollo progresivo del concepto de fracciones en contextos manipulativos, colaborativos y visuales. Esta intervención no solo pretendió impactar el aprendizaje de los estudiantes, sino también ofrecer un modelo didáctico replicable que articule pensamiento espacial, razonamiento y visualización en la enseñanza de contenidos matemáticos complejos.

Así, el propósito general de esta investigación fue diseñar, implementar y analizar una propuesta didáctica basada para la enseñanza de fracciones, con el fin de favorecer una

comprensión profunda y significativa de este concepto en estudiantes de cuarto grado. A partir de esta experiencia, se busca aportar a la didáctica matemática desde una perspectiva integradora, lúdica fundamentada en evidencia, que responda a las necesidades reales del aula y contribuya al fortalecimiento del pensamiento matemático en la educación básica primaria.

1. Aproximación a la problemática de investigación

1.1. Planteamiento del problema

El aprendizaje de las fracciones ha sido un desafío persistente en la educación primaria, en diversos estudios evidencian que este contenido matemático suele causar confusión en los estudiantes debido a su nivel de abstracción y complejidad. Al respecto, Tzur (2019) expresa que tal dificultad se manifiesta en procesos cognitivos clave como la comprensión del significado de las fracciones, la interpretación de diferentes interpretaciones y la aplicación de estos conceptos a situaciones de la vida cotidiana.

Se ha demostrado que los niños tienden a presentar obstáculos en la identificación de la unidad, la comparación de magnitudes y el reconocimiento de equivalencias, lo que refleja vacíos en la construcción de un pensamiento numérico sólido y genera aprendizajes fragmentados y poco significativos (Colinas y Arnal, 2022).

En el caso de los estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Técnico Industrial José Elías Puyana sede A, estas dificultades se evidencian en situaciones comunes como la confusión al identificar la fracción que representa una parte de la unidad, comparar fracciones de distinto denominador; es decir, fracciones heterogéneas, la limitación para pasar de una

representación pictórica a representación numérica y/o a otras como la verbal ya que se asocia la representación a los dibujos de texto.

Otra situación recurrente es la idea errónea de que el número mayor en el denominador corresponde siempre a una fracción mayor. Con lo anterior, se infiere que el aprendizaje de las fracciones no se limita a un problema numérico, sino que está relacionado con la comprensión conceptual, la visualización, la capacidad para razonar sobre las relaciones entre el todo y sus partes.

Ante este panorama, se busca proponer una estrategia didáctica que favorezca a la comprensión profunda y significativa de las fracciones, sin tener en cuenta la memorización de algoritmos. En este sentido el uso del Tangram como material manipulativo juega un papel principal, dado que permite a los estudiantes explorar relaciones espaciales y proporcionales al tiempo que representa de manera visual y concreta la idea de fracción, la unidad y la parte de la unidad.

Tal como señalan Huanca y Ticona y Challco Villacorta (2024), el Tangram favorece el análisis de las relaciones entre las partes y el todo, al tiempo que fortalece el aprendizaje geométrico y numérico. Asimismo, se ha demostrado que este recurso estimula habilidades de razonamiento lógico, creatividad, y visualización geométrica (Zambrano Mueña, 2018; Morales, 2010), competencias esenciales en la construcción del Pensamiento Matemático.

Pese a los beneficios del Tangram, su incorporación en las aulas es limitada o casi nula y en muchos casos se reduce únicamente en actividades aisladas, sin un diseño intencional que articule su uso con los objetivos de aprendizaje. Al respecto, Azarquiél (1998), resalta que el potencial del tangram poco se utiliza en los contextos educativos, de tal manera se requiere una

planificación sistemática que lo integre dentro de propuestas coherentes de enseñanza, vinculadas al currículum y apoyadas en material manipulable y herramientas digitales, en este caso, GeoGebra; que amplían las posibilidades de exploración y representación de los conceptos matemáticos.

Desde esta perspectiva, el diseño de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) constituye un marco adecuado para orientar la enseñanza de las fracciones mediado por material manipulable y el uso de recurso digital del Tangram. Según Simon (2004) y Planas (2010) las THA permiten anticipar metas, procesos de pensamiento y actividades que promueven el desarrollo de habilidades de razonamiento y visualización, lo cual permite hacer especial énfasis en la propuesta a las necesidades reales de los estudiantes (Simon et al., 2004; Planas, 2010). Esto hace posible plantear secuencias de aprendizajes más coherentes, contextualizadas y con mayor impacto en la comprensión de las fracciones.

En consecuencia, la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo incide el uso de material manipulable apoyado en el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y el uso de GeoGebra en el desarrollo de habilidades de razonamiento y visualización para la comprensión de las fracciones en estudiantes de cuarto grado del colegio Técnico Industrial José Elías Puyana?

1.2. Justificación

La educación constituye un pilar fundamental en el desarrollo integral de las personas y de la sociedad, ya que permite la formación de competencias cognitivas, sociales y culturales necesarias para enfrentar los retos del entorno (Ministerio de Educación Nacional, 1998). Dentro de este marco la enseñanza de las matemáticas adquiere un papel esencial, dado que fomenta el pensamiento lógico, la capacidad de resolución de problemas y la comprensión de fenómenos cotidianos, habilidades que son indispensables para la vida diaria (MEN, 2006).

Sin embargo, en el contexto de la educación primaria, la comprensión de las fracciones representa un desafío particular para los estudiantes, debido a su carácter abstracto y a la necesidad de relacionarlas con experiencias concretas (Kieran, 1992; Nesher 1988). Además, aunque las fracciones son fundamentales para el desarrollo del razonamiento proporcional y numérico, los métodos tradicionales de enseñanza suelen centrarse en procedimientos algorítmicos, lo que limita la construcción de un conocimiento conceptual profundo. Por esta razón, resulta necesario implementar estrategias didácticas que permitan una comprensión significativa de este concepto.

En consecuencia, el uso de material manipulable y herramientas digitales, como el Tangram y GeoGebra, se justifica como recurso pedagógico estratégico. Por un lado, el Tangram por su naturaleza geométrica y lúdica, facilita la conexión entre el razonamiento espacial y el numérico, promoviendo la visualización de las relaciones entre las partes y el todo (Del Grande, 1990; Clements & Battista, 1992; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Por otro lado, GeoGebra ofrece un entorno dinámico que permite representar, explorar y manipular conceptos matemáticos, favoreciendo así el razonamiento, la visualización y la construcción activa del conocimiento.

Así mismo, desde el punto de vista metodológico, este estudio se enmarca en la investigación de diseño (design-based research), que combina teórica y práctica educativa, mediante ciclos de diseño, aplicación y ajustes de estrategias de enseñanza (Cobb, et al., 2003; Molina et al., 2011). De igual manera se adoptan las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) como marco para diseñar tareas concretas que permiten observar, analizar y ajustar la enseñanza según las respuestas de los estudiantes (Simon, 1995; Clements y Sarama, (2004); Sztajn et al., 2012).

Por lo tanto, esta investigación busca no solo contribuir a la comprensión de fracciones en estudiantes de cuarto de primaria, sino también generar prácticas didácticas fundamentadas y replicables que integren material manipulable y herramientas digitales como recursos de enseñanza efectivos. Así, se espera fortalecer el aprendizaje conceptual, el razonamiento lógico y la capacidad de los alumnos para aplicar las matemáticas en contextos diversos, aportando de manera significativa a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Finalmente, la pertinencia de esta investigación se fundamenta en evidencias de carácter cualitativo derivadas del contexto educativo y de los lineamientos curriculares vigentes. En el ámbito escolar, se han identificado de manera recurrente dificultades en la comprensión conceptual de las fracciones al abordarse desde una perspectiva procedimental. Estas observaciones coinciden con lo establecido por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) los cuales señalan que el concepto de fracción debe ser incorporado y fortalecido en los grados de cuarto y quinto de educación primaria. De igual manera, el currículo

de la institución educativa contempla este objeto matemático como un aprendizaje central en dichos niveles, en sentido, la propuesta de intervención se justifica como una respuesta pertinente a las necesidades del contexto, orientadas a fortalecer la enseñanza conceptual de las fracciones mediante estrategias didácticas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Analizar cómo el diseño e implementación de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), mediadas por el uso del Tangram, favorecen la comprensión de las fracciones y el desarrollo de habilidades de Razonamiento y Visualización en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Diseñar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) que integre el tangram como recurso didáctico para la enseñanza de las fracciones, a partir de las concepciones previas, dificultades y potencialidades de los estudiantes.
- Implementar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en el aula, con la promoción de la exploración, manipulación y reflexión mediante actividades con el tangram que estimulen el razonamiento lógico y la visualización geométrica.
- Reflexionar sobre el desarrollo de la comprensión de las fracciones y las habilidades de razonamiento y visualización durante la implementación de la THA, así como los avances, dificultades y aportes del proceso al fortalecimiento del pensamiento numérico y espacial desde una perspectiva constructivista.

2. Aproximación teórica

La presente aproximación teórica tiene como propósito fundamentar conceptualmente la investigación en torno a la enseñanza de las fracciones en la educación básica primaria, a partir del uso del Tangram como estrategia didáctica mediada por Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje. En este capítulo se integran aportes teóricos, pedagógicos y normativos que permiten comprender el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva constructivista, centrada en el desarrollo del pensamiento numérico, el razonamiento y la visualización espacial. Para ello, se realiza una revisión de antecedentes investigativos relevantes en contextos internacional, nacional y local, seguida del abordaje de conceptos como el aprendizaje significativo, el uso de material concreto, el juego como estrategia didáctica, la incorporación de recursos tecnológicos y el potencial del Tangram como material manipulativo. Finalmente se incluye el marco normativo que orienta la enseñanza de las matemáticas en un contexto colombiano, con el fin de sustentar la pertinencia y coherencia de la propuesta didáctica planteada. Esta base teórica permite articular la problemática identificada con el diseño metodológico de la investigación y sustenta el análisis del impacto del Tangram en la comprensión de las fracciones en estudiantes de cuarto grado primaria.

2.1. Antecedentes de la Investigación

En este apartado se presenta una revisión detallada de investigaciones relacionadas con la enseñanza del área y el perímetro a través de diversas estrategias didácticas. Los antecedentes fueron organizados según su procedencia geográfica en tres niveles: Internacional, nacional y local. En este orden de ideas, la recopilación de información se efectuó mediante búsquedas en bases de datos académicas, con el uso de palabras clave vinculadas al enfoque de esta

investigación, tales como “pensamiento espacial”, “pensamiento numérico”, “fracción”, “tangram” y “GeoGebra”.

2.1.1. Contexto Internacional

Katerine Flores, Mayerling Herrera y Esther Hernández (2011) llevaron a cabo una investigación-acción titulada “Elaboración del Tangram y del Geoplano como Materiales Didácticos en la Enseñanza de la Geometría” centrada en la utilización de estos recursos en la educación primaria. Este proyecto fue diseñado con el fin de aumentar la motivación e interés de los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, al utilizar el Tangram como herramienta para desarrollar habilidades especiales y cognitivas.

Las tareas llevadas a cabo fomentaron la participación activa de los estudiantes, lo que facilitó la comprensión de conceptos geométricos por medio de la manipulación de materiales, lo que establece el presente antecedente como significativo, pues proporciona evidencia empírica de la efectividad del Tangram como material didáctico en la enseñanza de la geometría y la capacidad de éste para aumentar la motivación en los estudiantes. Además, demuestra cómo el uso de recursos prácticos puede facilitar la comprensión de conceptos geométricos y desarrollar habilidades cognitivas y espaciales, lo que respalda la necesidad de implementar una secuencia didáctica centrada en el Tangram.

El estudio de Piraquive Peña, López Fernández y Llamas Salguero (2015) estudia el impacto del uso del Tangram como estrategia de aprendizaje en el desarrollo de las inteligencias múltiples, la creatividad y la motivación en estudiantes de sexto grado en Colombia. Su objetivo principal fue comprobar si un programa de intervención basado en el Tangram potencia estas habilidades en los estudiantes, para esto; se investigó acerca de la relación entre la percepción viso-motriz, las inteligencias múltiples, la motivación y la creatividad de 40 estudiantes en una

IE en Soacha en donde se utiliza un pre y post – test. Los instrumentos aplicados fueron la Escala Atribucional de Motivación de Logro (EAML), el Cuestionario de Creatividad de Turtle, un cuestionario de detección de inteligencias múltiples adaptado de McKenzie, y el Test de Bender para evaluar la maduración perceptiva viso-motriz. Con lo cual, los resultados reflejaron una relación positiva entre la creatividad y motivación además de una mejora en las inteligencias múltiples tras la intervención con el Tangram. El estudio concluye que la enseñanza lúdica con el uso del Tangram puede ser un recurso efectivo para potenciar las inteligencias múltiples y la creatividad en los estudiantes.

María Aznarte Mellado (2017) formuló y desarrolló una estrategia pedagógica denominada “Tareas con Tangram para favorecer el sentido espacial”, dirigida a estudiantes de educación primaria. El proyecto fue estructurado para fomentar el desarrollo del sentido espacial a través del uso del Tangram, al promover la identificación, visualización y transformación de figuras geométricas de manera manipulativa. Las actividades propuestas se implementaron a lo largo de toda la etapa de primaria por medio de un enfoque vertical, lo cual garantiza un avance en la complejidad de los ejercicios. La estrategia incluyó tareas estructuradas que favorecieron al proceso de exploración, observación y el aprendizaje significativo de conceptos espaciales en contextos cercanos al estudiante.

Este proyecto destaca como un antecedente relevante para investigaciones sobre el uso de secuencias didácticas basadas en el Tangram para potenciar el desarrollo del pensamiento espacial en niños de 4° de primaria.

La investigación de Zambrano Mueña (2017) investigó la influencia del Tangram en el desarrollo de capacidades matemáticas en estudiantes de cuarto grado de primaria en la Institución Educativa N°64661 “Villa Primavera” en Yarinacocha. Este estudio de nivel

explicativo con diseño pre experimental, buscó determinar si el Tangram influye en el desarrollo de capacidades como “matematizar” situaciones, comunicar, representar ideas, elaborar y razonar. La muestra estuvo conformada por 19 estudiantes de cuarto grado los cuales arrojaron resultados que indicaron la influencia significativa del uso del Tangram para el desarrollo de dichas capacidades matemáticas. Los datos fueron recolectados por medio de pruebas con el programa estadístico SPSS. Este estudio resulta de gran utilidad para la presente propuesta, ya que se centra en el uso del tangram como herramienta para el desarrollo de capacidades matemáticas específicas en estudiantes de primaria. Además, detalla una metodología pre experimental lo cual ofrece un marco de referencia valioso para comprender cómo este recurso puede influir en el pensamiento espacial.

El Trabajo Fin de Grado (TFG) de Paula Pobo Martín-Mateos, del año 2020/2021, titulado "El aprendizaje matemático con el tangram y juegos de reglas", tiene como objetivo proponer una innovación didáctica para mejorar la enseñanza de matemáticas en Educación Primaria mediante el uso del tangram en juegos de reglas. Este proyecto explora la importancia de los juegos y materiales didácticos en el aprendizaje de matemáticas, en donde se presenta una revisión teórica sobre el tema, la propuesta incluye distintos juegos específicos con tangram y la descripción de sus fundamentos metodológicos, métodos de evaluación y listas de control.

Este antecedente es fundamental para el presente trabajo por su investigación sobre el uso del tangram y su impacto en el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de primaria ya que, ofrece una propuesta didáctica concreta y fundamentada para integrar este recurso en el aula a través de juegos de reglas. Además, su teoría puede mejorar la comprensión de conceptos matemáticos abstractos y promover el desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes.

La investigación de Damaris Ester Argota Ebrat en 2020 se enfoca en la implementación de una secuencia didáctica basada en el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) que utiliza el tangram como medio para fomentar el pensamiento espacial en estudiantes de segunda primaria de la IE Manuel J. Del Castillo en Ciénaga, Magdalena. Este trabajo analiza cómo la presencia de la secuencia didáctica el rol del docente en la enseñanza de la geometría junto con TIC, y el uso del tangram en contextos de educación remota. Con una orientación teórica basada en referentes metodológicos y conceptuales de Mejía (2006) y Jara (2006), así como en la práctica reflexiva de Schön (1998) y Domingo (2013), se aplicaron instrumentos como cartillas reflexivas, bitácoras de investigación, portafolios de evidencias, y diarios de campo.

Los resultados obtenidos sugieren que el tangram, tanto en su versión física como interactiva, es una herramienta valiosa para el desarrollo del pensamiento espacial, especialmente en contextos con buena conectividad, esto implica que la selección de estrategias didácticas y recursos debe ser acorde al nivel cognitivo de los estudiantes para maximizar el desarrollo del pensamiento espacial.

Huanca Ticona y Chalco Villacorta (2024) llevaron a cabo una estrategia didáctica denominada “El Tangram como estrategia didáctica para el aprendizaje de triángulos en estudiantes de 4to grado de primaria de la IEP Liceo Italiano, Cusco – 2022” dirigido a alumnos de primaria. Este proyecto fue formulado para evaluar el impacto del uso del tangram como herramienta didáctica en la enseñanza de los triángulos, dado que se promueve la comprensión de sus propiedades, clasificación y aplicación del teorema de Pitágoras. En su metodología se describen actividades variadas como el uso de materiales manipulativos y ejercicios prácticos que fomentan el aprendizaje activo y la construcción de conocimiento a través de la exploración. Sus resultados a partir de la implementación no solo mejoraron la comprensión de conceptos

geométricos, sino que también incrementó la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de la matemática, que proporciona un enfoque innovador en el aula.

Este proyecto destaca como un antecedente para investigaciones centradas en el desarrollo del pensamiento espacial a través del uso de secuencias didácticas basadas en el Tangram.

2.1.2. Contexto Nacional

Sonia Yanet Ceballos Villanueva y Margarita Lorena Romero Suarez (2012) desarrollaron una investigación llamada “Uso del Tangram Chino de Siete Piezas en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Geometría en Grado Séptimo”, enfocado en los alumnos de séptimo en la Institución Educativa Diego Fallón de Ibagué. La idea principal de este proyecto fue abordar la falta de interés por las matemáticas mediante la implementación del juego, donde se buscó impulsar la asimilación de ideas geométricas y potenciar y desarrollar el pensamiento espacial. Las actividades se desarrollaron en las clases prácticas, con los alumnos manipulando el Tangram, lo que les ayudó a experimentar y comprender mejor las relaciones entre espacios y medidas a través del juego. Se describe un aumento en la motivación de los estudiantes donde se menciona que se logró percibir la asignatura de las matemáticas con otra actitud y un aprendizaje más significativo.

Se resalta la importancia del uso de una secuencia didáctica con el Tangram para el desarrollo del pensamiento espacial en niños de cuarto de primaria, dado que aporta evidencia sobre cómo los juegos manipulativos pueden transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

Porras Huertas, Fanny Marleny (2017) formuló y desarrolló una estrategia pedagógica en su investigación titulada “Trayectorias reales del aprendizaje de visualización espacial, en niños en situación de Discapacidad intelectual leve de grado sexto”, con el objetivo de fortalecer el pensamiento espacial en estos estudiantes. Este proyecto tomó como base las ideas sobre cómo aprendemos, llamadas Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) de Clements y Sarama, y se empleó una investigación de diseño con experimentos de enseñanza a través de actividades lúdicas, como el uso del tangram y otros rompecabezas geométricos, se buscó mejorar la percepción y manipulación de figuras en el espacio. La inclusión de herramientas digitales permitió potenciar el reconocimiento de formas y relaciones espaciales, que favorecen el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Se resalta la relevancia de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), que ayudan a crear clases que se adaptan a cómo los niños aprenden a pensar en el espacio. Al estudiar cómo los niños entienden las relaciones espaciales con el tangram, este estudio nos da una idea teórica y cómo hacerlo, lo que puede guiar la forma en que organizamos las clases que se construyen.

Erika Sarai Natalia Botello Hurtado (2021) formuló y desarrolló una intervención educativa titulada “El Tangram como recurso didáctico para fortalecer el aprendizaje de la geometría”, enfocada en estudiantes de cuarto grado de primaria. Este proyecto se diseñó para abordar dificultades de razonamiento y la visión espacial que tenían los alumnos, con respecto al uso del tangram como herramienta pedagógica. Con una serie de secuencias basadas en el estilo de Van Hiele, se buscó fomentar la comprensión de conceptos geométricos de forma práctica y original. Los juegos realizados promovieron la manipulación del tangram y usarlo en distintos momentos, lo que dejó a los alumnos mejorar su razonamiento geométrico y su habilidad para

resolver problemas espaciales. El apoyo y la participación activa de los estudiantes en los juegos impulsó sus ganas y su motivación en el aprendizaje de la geometría que favorece una progresiva evolución en sus niveles de razonamiento.

El presente estudio realizado por Ingris Patricia Trespalacio Buelvas y Dora Elisa Vence Cáceres en el año 2024, dentro del programa de Maestría en Pedagogía de la Universidad Mariana, busca usar el tangram clásico como una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento geométrico en niños de tercer grado de la Institución Educativa Rafael Valle Meza y los problemas que se ven al aprender geometría. El objetivo principal del trabajo es mejorar las capacidades de razonamiento geométrico de los alumnos, al abordar las dificultades identificadas en el aprendizaje de la geometría, los aspectos estudiados incluyen el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. La orientación teórica se basa en la revisión de antecedentes nacionales e internacionales, y de explicar qué es el razonamiento geométrico, al tener en cuenta las ideas de Piaget sobre cómo aprendemos. La población objetivo son los estudiantes de tercer grado de primaria de la institución mencionada donde se justifica en que brindará técnicas a los docentes para elevar su desempeño en el aula y facilitará a los estudiantes la apropiación de su desarrollo cognitivo, donde se espera que la implementación del tangram mejore la comprensión e interés en temas de geometría.

Se identifica el concepto de razonamiento geométrico, el cual ofrece una base para comprender el estado de la investigación en este campo. Describe una estrategia didáctica específica centrada en el tangram clásico para el razonamiento geométrico, que brinda información sobre su implementación y evaluación en el aula. Además, ofrece una metodología de investigación basada en la investigación acción pedagógica, con la observación y talleres

como estrategias de recolección de información, lo que ejemplifica el diseño de una investigación propia.

2.1.3. Local

Marín (2017) llevó a cabo un proyecto de investigación en aula titulado “La maleta viajera de Euclides, como estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial y los sistemas geométricos”, el cual se enfocó en estudiantes de noveno grado del Colegio Los Santos Apóstoles en Bucaramanga, Colombia. Se implementó la maleta de Euclides como herramienta dentro de una estrategia didáctica y los resultados obtenidos fueron positivos ya que, se evidencia una mejoría en el interés de los estudiantes por participar activamente en las actividades, lo cual demuestra que efectivamente estrategia posee una naturaleza inclusiva y atiende a los problemas de comprensión, y el alcance de un aprendizaje generalizado que eleva el interés en la matemática.

En relación con el Tangram se establece a partir del uso de material manipulativo y visual como eje central de la propuesta ya que integra recursos concretos orientados al fortalecimiento del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, enfoque que coincide con el uso del Tangram como herramienta didáctica, donde se promueve la manipulación de figuras, la exploración de relaciones espaciales y la visualización. En este sentido, este antecedente aporta fundamentos pedagógicos y metodológicos que respaldan el uso del Tangram para el desarrollo del pensamiento espacial, lo cual resulta clave para la comprensión de conceptos matemáticos abstractos.

2.2. Marco Teórico

El abordaje conceptual y pedagógico base del diseño e implementación del Tangram como estrategia didáctica para la enseñanza de fracciones en el cuarto grado de la educación básica. En este orden de ideas, la estructura del marco teórico inicia con la contextualización de la importancia del aprendizaje de las matemáticas en la educación básica, con especial énfasis en el desarrollo del pensamiento numérico como fundamento del razonamiento lógico. Seguido de ello, se profundiza en las dificultades específicas que históricamente han estado implícitas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción, fundamental en el ejercicio hacia los números racionales. Una vez abordada esta problemática, se identifica la relevancia del aprendizaje significativo y la función insustituible de los materiales concretos como mediadores entre el conocimiento abstracto y la construcción mental del estudiante, seguido de ello, el juego como didáctica o estrategia de enseñanza y, finalmente, se aborda el uso del Tangram como un recurso didáctico geométrico y manipulativo, al tiempo que se analizan las propiedades inherentes para la representación y comprensión de las relaciones parte-todo implícitas en el abordaje conceptual de las fracciones.

2.2.1. El aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica Primaria

En el escenario de la Educación Básica, el desarrollo de las matemáticas se considera esencial, pues no solo comprende la base de los futuros aprendizajes en términos científicos sino moldea el pensamiento lógico y la capacidad de resolución de problemas en la cotidianidad, en este contexto formativo, la Educación Primaria, cultiva el pensamiento numérico como su objetivo pedagógico, mediante el cual se construye el razonamiento que permite manejar, interpretar y justificar situaciones que involucran cantidades (Pérez & Ramos, 2023). No

obstante, el proceso de comprensión numérica plena tiene múltiples inconvenientes en materia del estudio de las fracciones, concepto que se ha identificado como una de las principales problemáticas didácticas en las aulas. Por tanto, este análisis se centrará en la necesidad de comprender la articulación del pensamiento en los estudiantes de educación primaria y de examinar dificultades al abordar las fracciones, que busca sustentar la importancia de planear e implementar estrategias didácticas eficientes que permitan alcanzar el dominio de conocimientos previos, basándose en la comprensión conceptual (Guzmán, Florez & Cruz, 2021).

En este sentido, el área de las matemáticas en la educación primaria es fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico, el razonamiento numérico y también la resolución de problemas y conflictos. En este escenario se pretende que el estudiante además de adquirir habilidades operativas logre comprender conceptos matemáticos fundamentales, de manera que las fracciones representan un desafío importante en términos de nivel de abstracción.

Por tanto, comprender la forma en que el niño aprende matemáticas, sus conceptos, sus procesos y demás, es crucial para el diseño de estrategias didácticas eficientes. Asimismo, el pensamiento numérico es el primer pensamiento de los cinco que se mencionan en los Estándares Básicos de Competencias (EBC), este pensamiento se centra en el desarrollo del razonamiento matemático, que permite que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para enfrentar diversas situaciones matemáticas que se apliquen a la vida real. Como señala el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) su objetivo es buscar que los estudiantes puedan realizar procesos de razonamiento que les permita elaborar argumentos y justificar sus enfoques ante problemas relacionados con las matemáticas (p.53).

El pensamiento numérico en la educación primaria es fundamental, dado que sustenta la comprensión de las matemáticas y favorecen el desarrollo de habilidades como el razonamiento

lógico y la resolución de problemas, útiles tanto en el contexto escolar como en situaciones cotidianas de la vida diaria, como lo es manejar dinero y calcular distancias. Según Castro (2008) este pensamiento “trata de aquello que la mente puede hacer con los números y que está presente en todas aquellas actuaciones que realizan los seres humanos relacionadas con los números”, es decir no se limita a la simple memorización de hechos matemáticos, sino que abarca habilidades que incluyen la capacidad de estimar, comparar, clasificar, reconocer patrones y resolver problemas.

En el contexto educativo actual, una de las principales problemáticas en la educación primaria es el fortalecimiento del pensamiento numérico, especialmente en relación con la comprensión de las fracciones. Muchos estudiantes presentan dificultades para interpretar su significado como parte de un todo, establecer equivalencias, compararlas y realizar operaciones con ellas. Estas limitaciones se intensifican al enfrentar situaciones que exigen una comprensión profunda del concepto, como la repartición equitativa, la medición y su aplicación en contextos cotidianos, lo que evidencia la necesidad de fortalecer este campo del aprendizaje matemático.

Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de fracciones:

La comprensión del número fraccionario es compleja en torno al desarrollo del Pensamiento Matemático, sin embargo, este funciona como canal entre la aritmética básica y el álgebra. Ya que, al iniciar el aprendizaje del álgebra formal en el grado octavo, una de las relevantes y reiterativas dificultades que se presentan en el aula es representar, operar y aplicar las fracciones en contextos reales y matemáticos.

De acuerdo con la relevancia del tema, las fracciones representan consistentemente un desafío importante en términos cognitivos, pedagógicos y disciplinarios para la enseñanza de la

matemática en la educación primaria, ya que, los errores persistentes y la poca o nula comprensión por parte del estudiante conlleva al abandono del aprendizaje de las matemáticas y/o el rechazo de las mismas. Al respecto, Mendoza, Luján, Chura & Peralta (2024) exponen que este desafío no solo se representa en la complejidad de las interpretaciones, sino en las metodologías de enseñanza que anteponen el proceso mecánico sobre la construcción del significado, de manera que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe incluir componentes multidimensionales, dentro de los que se resalta la experiencia.

Por su parte, Leocadio, Quintana & Buden (2024), resaltan la pertinencia del enfoque por competencia como propuesta pedagógica a la educación actual, en tanto ofrece una visión más amplia y holística del aprendizaje, que va más allá de la memorización y la reproducción de información. Sin embargo, se reconoce que tiene sus limitaciones y retos, y que requiere de un cambio de paradigma tanto en los docentes como en los estudiantes y en el sistema educativo en general para optimizar el proceso de enseñanza y tener mejores y duraderos resultados de aprendizaje, en cuanto a la fracción, su representación y aplicación en contextos reales.

En congruencia con lo anteriormente planteado, las fracciones son uno de los contenidos matemáticos de mayor dificultad para el estudiante de primaria, por tanto, estas dificultades pueden asociarse tanto a la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y a la falta de metodologías, estrategias y materiales pedagógicos que permitan su comprensión; para lo cual es necesario comprender los errores comunes y los obstáculos cognitivos de los estudiantes, para diseñar y ejecutar intervenciones pedagógicas de mayor efectividad y eficacia.

Según Ramírez (2023), el concepto de fracción ha evolucionado hacia una perspectiva mayormente flexible que contempla diversas interpretaciones, medida, cociente, razón y operador. Por ello, incluir estas aproximaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite

que los estudiantes no sólo comprendan las fracciones como partes de un todo, sino también como relaciones entre cantidades, divisiones, escalas y transformaciones. En este sentido, el uso del tangram como recurso favorece esta construcción ampliada del significado, al permitir que el estudiante visualice y construya fracciones a partir de piezas concretas, compare tamaños, componga y descomponga figuras, y exploren relaciones proporcionales de manera tangible, lo que promueve comprensión profunda y significativa del número racional y el número fraccionario, al tiempo que se desarrolla simultáneamente habilidades de visualización espacial, razonamiento lógico y pensamiento geométrico, fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica.

Al respecto, Van den Heuvel-Panhuizen (2003) expone que, para promover dicha comprensión, es necesario trabajar con múltiples formas de representación: verbal, numérica, gráfica, en la recta numérica, decimal y porcentual. Estas representaciones, al ser complementarias, enriquecen la capacidad de los estudiantes para traducir entre sistemas y aplicar el conocimiento en diferentes contextos.

No obstante, las fracciones representan un reto para la mayoría de los estudiantes, quienes tienden a cometer errores al compararlas, operar con ellas o representarlas gráficamente. Estas dificultades se ven agravadas cuando el aprendizaje se limita a procedimientos mecánicos sin conexiones con el significado. En este sentido, la propuesta de enseñanza incluye materiales visuales y concretos que permitan construir el concepto a partir de la experiencia, la reflexión, la argumentación y el disfrute por aprender, particularmente con el juego.

El tangram al permitir representar fracciones mediante áreas contribuye a la comprensión de equivalencias, fracciones propias e impropias y operaciones simples. Su manipulación estimula el razonamiento proporcional y favorece una transición gradual del pensamiento

concreto al pensamiento abstracto, particularmente en contextos escolares donde los estudiantes aún se encuentran en etapas de desarrollo cognitivo intermedio (Gravemeijer, 1994).

2.2.2. Aprendizaje significativo y materiales concretos

La perspectiva de aprendizaje significativo expone que los nuevos conocimientos se adquieren mejor cuando se relacionan con experiencias y se contextualizan en situaciones reales. En ese orden de ideas, los materiales concretos como juegos didácticos y manipulativos son herramientas fundamentales porque favorecen la comprensión de conceptos abstractos como las fracciones, a partir de la experiencia directa y visual.

En consecuencia, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), es una metodología activa centrada en el estudiante, que utiliza situaciones problemáticas como punto de partida para la adquisición, integración y aplicación de nuevos conocimientos. Este enfoque promueve un aprendizaje activo, reflexivo y colaborativo, en el cual los estudiantes asumen un papel protagónico en la construcción de su propio conocimiento. Asimismo, el ABP favorece el desarrollo del pensamiento numérico y espacial de manera efectiva, ya que permite aplicar conceptos matemáticos en contextos reales y significativos.

Mediante el abordaje de problemas complejos y reales, los estudiantes se ven en la necesidad de analizar datos, formular hipótesis, tomar decisiones y evaluar sus propias respuestas. En este sentido, Barrows (1986) define el ABP como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”. Esta perspectiva fomenta la responsabilidad individual y colectiva frente al proceso de aprendizaje, así como la capacidad investigativa y el pensamiento crítico.

Desde esta perspectiva, los principios del ABP se fundamentan en la idea de que el aprendizaje se produce de manera más eficaz cuando los estudiantes participan activamente en la resolución de problemas. De acuerdo con Prieto (2006), “el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de lo que hacen los estudiantes, puede mejorar la calidad de su aprendizaje en aspectos muy diversos”. En el presente estudio, se retoman las fases propuestas por Reina, Gómez Felizzola y Hualpa (2016), dada su estructura sistemática y coherente, que facilita la implementación del ABP en contextos escolares. Estas fases ofrecen un marco claro tanto para docentes como para estudiantes, lo que favorece una experiencia de aprendizaje integral. La primera etapa, denominada Clarificación de conceptos, tiene como objetivo establecer una base conceptual común entre los estudiantes, lo cual es esencial para evitar confusiones terminológicas y promover una comunicación efectiva durante todo el proceso.

Posteriormente, la fase de Definición del problema orienta a los estudiantes a analizar el caso en profundidad y a formular de manera clara el problema a resolver. Esta actividad no solo fortalece las habilidades analíticas, sino que también promueve la autonomía, al ser los propios estudiantes quienes identifican el núcleo del conflicto a abordar. En la siguiente etapa, el Análisis del problema y la clasificación sistemática permite organizar el conocimiento previo y establecer conexiones entre los conceptos involucrados, lo que facilita la comprensión estructurada del problema.

La formulación de objetivos de aprendizaje específicos, vinculados directamente con el análisis del caso, permite focalizar la investigación de los estudiantes en los saberes realmente necesarios, lo cual refuerza la autonomía intelectual y la toma de decisiones informadas. A continuación, la fase de investigación y estudio individual ofrece a cada integrante del equipo la

oportunidad de contribuir desde sus propias habilidades y conocimientos que enriquecen el trabajo colectivo. Finalmente, la discusión e informe consolidan el aprendizaje al brindar un espacio para compartir hallazgos, reflexionar críticamente y aplicar el conocimiento adquirido en nuevos contextos.

Desde esta óptica, el ABP se consolida como una metodología fundamental para la enseñanza de las matemáticas, al promover un aprendizaje contextualizado, activo y significativo. Esta estrategia didáctica permite a los estudiantes enfrentarse a problemas reales, al favorecer una comprensión profunda del pensamiento numérico. En línea con esto, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) sostiene que “el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y evoluciona en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p. 43). Esto implica que la conexión entre los conceptos matemáticos y las situaciones de la vida cotidiana es clave para una comprensión sólida y duradera.

Adicionalmente, el ABP no solo facilita la apropiación de los saberes matemáticos, sino que también redefine el perfil del estudiante “ideal”. En este modelo, el énfasis se desplaza del rendimiento en pruebas estandarizadas hacia el desarrollo de competencias como el aprendizaje autónomo, la cooperación, la reflexión crítica y la construcción activa del conocimiento. El estudiante ideal es aquel que, a través de un proceso participativo y autónomo, logra integrar los contenidos curriculares con habilidades transversales, convirtiéndose en un sujeto activo en su propio proceso formativo.

Actualmente, el desarrollo del pensamiento numérico adquiere una importancia creciente en una sociedad marcada por la cuantificación de la información. Desde la interpretación de datos hasta la toma de decisiones cotidianas, los números ocupan un lugar central. Por tanto, es

responsabilidad de la escuela fomentar el desarrollo de habilidades que permitan a los estudiantes interpretar, representar y utilizar los números en contextos diversos y significativos.

En particular, la enseñanza de fracciones y proporciones requiere enfoques que vayan más allá de la instrucción procedimental y mecánica. Se hace necesario promover la comprensión conceptual y el razonamiento proporcional, aspectos que tradicionalmente generan dificultades en los estudiantes. En este sentido, el uso del tangram como recurso didáctico manipulativo se revela como una estrategia efectiva. Este material permite experimentar de manera visual y concreta la partición del todo, la comparación de magnitudes y la equivalencia entre partes, lo que facilita la construcción de nociones fundamentales en fracciones y proporciones.

La presente investigación adopta el enfoque de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), una herramienta metodológica que permite anticipar, estructurar y guiar los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Este enfoque considera las concepciones previas de los alumnos, las posibles dificultades y los caminos progresivos de desarrollo conceptual. Además, favorece una enseñanza estructurada, intencionada y flexible, que responde a las necesidades del contexto escolar. El diseño de tareas articuladas dentro de la THA permite integrar el pensamiento numérico y espacial mediante actividades significativas, colaborativas y visuales, que fortalecen la comprensión profunda de los conceptos abordados.

Finalmente, para que el ABP resulte efectivo, es indispensable seleccionar problemas que sean pertinentes, desafiantes y conectados con las competencias del currículo. Como señala Godino (2004), “los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que les proporcionan los profesores” (p. 68), lo que subraya la necesidad de planificar situaciones de aprendizaje auténticas que estimulen el pensamiento crítico y la transferencia del conocimiento.

En este marco, el ABP no solo promueve el desarrollo del pensamiento numérico, sino que también contribuye a la formación de ciudadanos capaces de aplicar sus saberes en la vida real y reafirma su valor como una estrategia clave en la enseñanza de las matemáticas.

En el campo de la educación, el término “estrategia didáctica” se refiere a un conjunto de decisiones planificadas por el docente para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, con el fin de lograr objetivos pedagógicos específicos. Estas decisiones implican la selección de recursos, metodologías, actividades, características del contenido, del grupo de estudiantes y del contexto educativo (Díaz Barriga y Hernandez, 2002).

A diferencia de los recursos didácticos, que son instrumentos materiales o digitales, y de las técnicas, que son procedimientos puntuales, las estrategias constituyen un marco más amplio y estructurado. Según Camilloni (2007), una estrategia didáctica es un “plan de acción pedagógica” que articula medios y actividades para orientar al estudiante hacia el logro de un aprendizaje significativo, que promueven su autonomía, reflexión y participación activa.

En la enseñanza de las matemáticas, el uso de estrategias didácticas resulta clave para transformar la práctica tradicional, centrada en la memorización de algoritmos, hacia enfoques que privilegien la comprensión conceptual, el razonamiento, la resolución de problemas y la construcción activa del conocimiento. Autores como Rico (1997) y Godino (2004) coinciden en que las estrategias didácticas en matemáticas deben promover la modelación, el uso de múltiples representaciones, la argumentación lógica y la conexión con situaciones reales.

Por lo tanto, en esta investigación, el tangram no se concibe únicamente como un recurso didáctico aislado, sino como parte de una estrategia didáctica rigurosamente diseñada, que articula tareas, objetivos, interacciones, tecnología y evaluación formativa. Esta estrategia se

inscribe dentro del enfoque de investigación de diseño y se materializa a través de trayectorias hipotéticas que responden a las concepciones, dificultades y progresos reales de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones. En congruencia con lo anteriormente planteado, es imperativo resaltar la importancia del pensamiento espacial, como un proceso cognitivo fundamental que permite a los individuos construir y manipular representaciones mentales de objetos en el espacio. A través de él, se establecen relaciones entre estas entidades, se comprenden sus transformaciones y se generan diferentes representaciones, ya sean materiales o simbólicas (Yakimanskaya, 1991, p. 21). Este tipo de pensamiento facilita la orientación y el reconocimiento de estructuras espaciales, lo que resulta esencial en el aprendizaje de la geometría y otras disciplinas científicas. Por lo tanto, desarrollar esta capacidad no solo mejora la comprensión matemática de los estudiantes, sino que también les otorga habilidades útiles en diversas situaciones cotidianas.

Además, la importancia del pensamiento espacial se manifiesta en su habilidad para formar capacidades de visualización, ubicación y transformación de figuras y cuerpos geométricos. A través de este proceso, los estudiantes pueden identificar propiedades geométricas y establecer relaciones espaciales, lo que enriquece su comprensión del entorno. En este sentido, en el ámbito educativo, fomentar el pensamiento espacial en los primeros años escolares permite a los alumnos representar e interpretar su entorno de manera más efectiva. Este enfoque fortalece no solo su razonamiento lógico, sino también su capacidad para resolver problemas en diferentes contextos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 58).

Por otra parte, uno de los medios más efectivos para potenciar el pensamiento espacial es a través de actividades prácticas que requieren la manipulación de formas y figuras, como el uso del tangram. Este juego, compuesto por piezas geométricas de diversas formas y tamaños, no

solo incentiva el reconocimiento de las figuras, sino que también promueve la construcción de nuevas formas mediante la combinación y transformación de sus elementos. Así, al interactuar con el tangram, los estudiantes desarrollan su capacidad de visualización espacial, mejoran su percepción de la simetría y la equivalencia, y fortalecen su habilidad para descomponer y recomponer figuras de forma intuitiva (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 61).

Asimismo, desde una perspectiva teórica, el pensamiento espacial se estructura en tres componentes fundamentales interrelacionados: los elementos geométricos, las relaciones geométricas y la ubicación y los movimientos. Los elementos geométricos abarcan las propiedades necesarias para identificar y clasificar las figuras. A su vez, las relaciones geométricas incluyen características como la simetría, la congruencia y la equivalencia, que son esenciales para una mejor comprensión de la estructura de las formas. Para complementar este marco, la ubicación y los movimientos permiten a los estudiantes describir posiciones en el espacio y reconocer regularidades en los desplazamientos de los objetos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 58).

Finalmente, a medida que los estudiantes desarrollan estas habilidades, el pensamiento espacial se convierte en una herramienta invaluable que impacta no solo en el aprendizaje de las matemáticas, sino también en otras áreas del conocimiento y en situaciones cotidianas. De esta manera, fortalecer este tipo de pensamiento en la educación primaria no solo facilita una mejor comprensión del entorno, sino que también ayuda en el desarrollo de estrategias efectivas para la resolución de problemas. Por ello, recursos didácticos como el tangram se vuelven esenciales; a través de su uso, se estimula la exploración y la creatividad a los estudiantes.

Por otra parte, el razonamiento matemático se manifiesta a través de distintos procesos mentales que permiten derivar conclusiones, formular hipótesis y resolver problemas. Sternberg

(1996) y Buena Villaverde y Perez Sanchez (2006) distinguen, los siguientes tipos de razonamiento relevantes en el ámbito escolar:

1. Razonamiento deductivo: Implica la aplicación de principios generales a casos particulares. En el aula, se observa cuando el estudiante parte de una regla conocida para justificar una solución específica.
2. Razonamiento inductivo: Se basa en la generalización de patrones observados. Aparece cuando el estudiante infiere reglas a partir de ejemplos concretos.
3. Razonamiento proporcional: Esencial en el estudio de las fracciones, permite establecer relaciones de equivalencia entre magnitudes y comprender las fracciones como razones o medidas.
4. Razonamiento analógico: Consiste en transferir estructuras de un problema a otro similar, dado que permite encontrar soluciones mediante la comparación de situaciones.
5. Justificación y argumentación: Se refiere a la capacidad para explicar, con coherencia, el procedimiento seguido y defenderlo mediante evidencias, ya sea de manera oral, escrita o gráfica.

Estas formas de razonamiento pueden ser evidenciadas a través de la interacción en clase, las producciones escritas de los estudiantes, las verbalizaciones durante el trabajo grupal y la resolución de tareas propuestas en cada THA.

Finalmente, la visualización, entendida como la capacidad para construir, manipular e interpretar imágenes mentales o representaciones visuales, constituye una competencia clave en la comprensión de conceptos espaciales y geométricos. De acuerdo con Del Grande (1990),

quien retoma los aportes de Hoffer (1977), las habilidades visuales fundamentales en el contexto de la geometría escolar son:

1. Coordinación ojo-mano: Capacidad para manipular objetos visuales con precisión.
2. Percepción figura-fondo: habilidad para distinguir una figura del contexto en el que se encuentra.
3. Conservación de la percepción: Reconocimiento de que las propiedades de una figura se mantienen, aunque su orientación cambie o esté parcialmente oculta.
4. Percepción de posición en el espacio: Comprensión de la ubicación de un objeto en relación con otro.
5. Relaciones espaciales: Identificación de relaciones como simetría, proximidad o alineación entre figuras.
6. Discriminación visual: Capacidad para comparar elementos visuales y reconocer semejanzas o diferencias.
7. Memoria visual: habilidad para recordar la configuración espacial de una figura previamente observada.

A estas dimensiones se suman los aportes de autores como Arcavi (2003) y Presmeg (1986), quienes amplían la noción de visualización para incluir tipos de imágenes mentales (pictóricas, esquemáticas, cinéticas o dinámicas), todas ellas movilizadas al resolver problemas con representaciones gráficas como el tangram, experimentar y aprender a través del juego.

2.2.3. La Tecnología como medio en la enseñanza de la Matemática

Vargas et al (2024), señala que el uso de las tecnologías ha impulsado la innovación en diversos escenarios y la educación no es ajena a este proceso, pues ha favorecido transformaciones en la enseñanza del aprendizaje, haciéndolos más accesibles, interactivos y personalizados. De este modo, la tecnología se consolida como una herramienta didáctica que complementa los procesos educativos.

En esta línea, la tecnología como elemento de innovación ha transformado las formas de enseñar y de aprender, a través del rol del profesor y las nuevas necesidades de los estudiantes; en este sentido, la integración de herramientas tecnológicas en el proceso educativo ha generado nuevas oportunidades y desafíos, mencionan que la tecnología se ha adaptado a las necesidades individuales de los estudiantes, pese a que se promovió la colaboración global y enriqueció el proceso educativo, se identificaron obstáculos como la brecha digital y la necesidad de garantizar la seguridad y privacidad en línea (Peñafiel, 2020).

De acuerdo con Nañez, Flores, Milagros & Matos (2025), en el contexto de la educación básica, las TIC han creado entornos de aprendizaje innovadores que motivan a los estudiantes. Sin embargo, la efectividad de estas herramientas depende en gran medida de la formación docente para el manejo y adaptación a las TIC, así como del acceso a la tecnología. Esta investigación refuerza la necesidad de capacitar a los docentes y asegurar la infraestructura tecnológica adecuada para maximizar los beneficios educativos del uso de las TIC en matemáticas.

Para sintetizar, el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas constituye un elemento clave para el fortalecimiento de los procesos educativos

contemporáneos, ya que permite diversificar estrategias didácticas, personalizar el aprendizaje y aumentar la motivación estudiantil. No obstante, su implementación también exige un compromiso institucional orientado a la reducción de brechas de acceso y al fortalecimiento de la formación docente. En este sentido, sólo mediante una integración pedagógica, crítica e innovadora de GeoGebra y las TIC es posible potenciar de manera significativa el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2.2.4. El juego como didáctica o estrategia de enseñanza

Montero et al, (2025) resaltan la Teoría del Aprendizaje Experiencial de David Kolb, como una visión profunda sobre la forma en que las personas aprenden de manera efectiva a partir de sus propias experiencias, al hacer especial énfasis en que el conocimiento se crea mediante la transformación de la experiencia, la participación, la reflexión crítica y la aplicación práctica de los saberes. Por tanto, esto resulta relevante en el modelo Flipped classroom debido a que el estudiante experimenta, reflexiona y aplica conceptos aprendidos. Sumado a ello, pensadores como Dewey, Lewin y Piaget, reconocen la experiencia como un pilar fundamental en el proceso de aprendizaje, percibiéndola como el proceso dinámico y continuo para la construcción de conocimiento mediante la interacción con el entorno.

Por otra parte, el proceso de enseñanza-aprendizaje ha evolucionado considerablemente en las últimas décadas, desde modelos tradicionales centrados en la transmisión de contenido a enfoques más participativos, activos y vivenciales que promueven la construcción del conocimiento por parte del estudiante.

Al respecto, Rimascca, Jara & Contreras (2025) destacan el papel fundamental del juego en la enseñanza infantil, ya que promueve el desarrollo físico, cognitivo y la creatividad, además

de fomentar la resolución de conflictos mediante actividades lúdicas. Además de propiciar un entorno de aprendizaje divertido, potencia la construcción de habilidades para la vida esenciales en el desarrollo integral como la interacción, el desarrollo emocional y el fortalecimiento de la autoestima.

En este sentido, el juego se ha consolidado como una herramienta didáctica fundamental para el fomento de la motivación, la creatividad y el pensamiento crítico, alejándose del imaginario limitado de la recreación, el juego se percibe y se entiende como una estrategia pedagógica que potencia el aprendizaje y el desarrollo integral del estudiante. Adicionalmente, permite escenarios de interacción social y trabajo en equipo, componentes que permiten la interacción continua, la formulación de estrategias, el diálogo y la mediación, se ofrecen escenarios de intercambio de saberes y profundización de conceptos mediante la colaboración (Montero et al, 2025).

Asimismo, el juego como estrategia didáctica se vincula estrechamente con la Teoría del Aprendizaje Significativo propuesta por David Ausubel en 1963, al mencionar que el nuevo conocimiento se asimila de mejor manera cuando se relaciona con las ideas previas del estudiante. En consecuencia, el juego actúa como mediador cognitivo, con una asociación de experiencias previas con nuevas situaciones de aprendizaje de forma lúdica y concreta. En este sentido, las dinámicas de juego facilitan la asimilación de conceptos abstractos al presentarlos en contextos cercanos y vivenciales, lo cual favorece la comprensión y la retención del conocimiento, tanto de los materiales manipulativos como de los juegos educativos, en herramientas fundamentales para la construcción de aprendizajes duraderos en etapas como la educación primaria.

Desde la perspectiva que ofrece el enfoque constructivista, el aprendizaje se concibe como un proceso activo de construcción de conocimiento, Vygotsky y Bruner resaltan el papel de la mediación social y el andamiaje como factores determinantes en el proceso de aprendizaje, razón por la cual, el juego cumple una función muy importante al propiciar un entorno colaborativo de exploración, discusión e incluso negociación y construcción conjunta de saberes.

Para Hernández y Polania (2018) dentro de la didáctica del docente, interviene la acción de innovar y vincular los nuevos avances científicos, tecnológicos y culturales dentro de su quehacer profesional. De esta manera, el docente debe ser crítico y creativo para conocer las realidades de su entorno y más aún, conocer las características de sus estudiantes. Para atender esta situación, el docente debe saber planificar en función a diversas metodologías y estrategias de enseñanza-aprendizaje, las mismas que sus conceptos y fundamentos son frecuentemente confundidos. Cuando se habla de metodología se hace referencia a un conjunto de diversos procesos y métodos que se realizan de modo general para atender un problema o situación didáctica. (ECOTEC, 2017)

Adicional a ello, el docente como pilar en el desarrollo social y constructivo de toda sociedad, pues se entiende esta labor docente desde su complejidad y llena de diversas actividades y funciones que debe cumplir tanto dentro y fuera de la institución, al contemplar el arte de enseñar a comprender, analizar, reflexionar y aportar tanto individual y social en la sociedad, comunicándose con sus estudiantes para poder planificar y adaptar sus enseñanzas a las realidades y necesidades de ellos, para brindar aprendizajes significativos que desarrollen habilidades y destrezas de manera asertiva y en función a los intereses de los estudiantes (Abreu, Gallegos, Jácome y Martínez, 2017) . En este sentido, el docente adopta un rol de mediador del aprendizaje, en donde guía las interacciones lúdicas ligado a una responsabilidad exhaustiva y de

gran compromiso, ya que del docente depende las nuevas generaciones, avances sociales, científicos, tecnológicos y culturales de la sociedad con el apoyo dentro de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) del estudiante, al permitir que las actividades lúdicas se conviertan en experiencias de aprendizaje significativas y ajustadas a sus niveles de desarrollo (Castillo et al, 2023).

2.2.5. Uso del Tangram como recurso didáctico

El Tangram es un recurso didáctico efectivo para la enseñanza de la geometría, ya que permite a los estudiantes explorar y reconocer las distintas figuras geométricas de manera práctica y manipulativa. Este rompecabezas se compone de siete piezas: cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo. Su diseño sencillo facilita la creación de múltiples composiciones, lo que estimula la creatividad y la experimentación en los estudiantes (Morales, 2010). Mediante su uso, el estudiante puede identificar y distinguir formas geométricas fundamentales, al favorecer la construcción de su conocimiento sobre las figuras planas y sus representaciones (Aznarte Mellado, 2018).

Desde una perspectiva matemática, este recurso ofrece un enfoque intuitivo para la comprensión de conceptos esenciales como la equivalencia de figuras, el cálculo de áreas y perímetros, y la semejanza entre formas. Además, brinda una plataforma ideal para el estudio de transformaciones geométricas, como la simetría y la rotación (Huanca Ticona & Challco Villacorta, 2024). Su adaptabilidad permite diseñar actividades que se ajustan a diferentes estilos y ritmos de aprendizaje, consolidándose como una herramienta valiosa para la educación matemática en múltiples niveles académicos (Morales, 2010).

Más allá de sus beneficios cognitivos, el Tangram fomenta también el desarrollo del sentido espacial en los estudiantes. La manipulación y reorganización de sus piezas no solo refuerzan la visualización geométrica, sino que también mejoran la orientación en el espacio, habilidades clave para la interpretación de mapas y relaciones espaciales (Aznarte Mellado, 2018). Este enfoque lúdico y manipulativo incrementa la motivación en el aula y favorece un aprendizaje significativo. Como resultado, el Tangram se ha consolidado como un recurso educativo versátil y eficaz en la enseñanza de la geometría (Azarquiél, 1988).

Además de sus aplicaciones en el aprendizaje de la geometría, el Tangram potencia habilidades como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y la toma de decisiones. Su carácter manipulativo invita a los estudiantes a experimentar con diferentes configuraciones y soluciones, en la promoción de un aprendizaje activo y autónomo. Al transformar conceptos abstractos en experiencias tangibles, este recurso no solo facilita la comprensión matemática, también enriquece el proceso educativo, convirtiéndose en una herramienta pedagógica fundamental para el desarrollo integral de los estudiantes.

Se presenta el Tangram como una herramienta didáctica valiosa para el aprendizaje de la geometría, ya que permite a los estudiantes explorar de manera práctica conceptos esenciales. Su incorporación en el aula no solo facilita la comprensión de diversas nociones matemáticas, como el reconocimiento de figuras, sino que también aborda temas más complejos, al incluir las transformaciones geométricas. Azarquiél (1988) señala que, mediante el uso del Tangram, se pueden desarrollar múltiples aspectos, entre los cuales destacan el reconocimiento de figuras geométricas, tales como triángulos, cuadrilátero y el paralelogramo. Equivalencia de figuras, dado que todas las formas creadas con las siete piezas del Tangram son equivalentes en área. Para comenzar, se sugiere trabajar con un número limitado de piezas para facilitar este concepto.

Cálculo de áreas de figuras básicas como triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios y paralelogramos. Introducción a la semejanza, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar proporciones y escalas de manera efectiva.

Las transformaciones geométricas permiten el análisis de las figuras y su cambio de posición, forma e incluso tamaño dentro del plano, que conservan algunas de sus propiedades, en este sentido, la simetría es esencial en el momento de identificar patrones, regularidades y estructuras invariantes. En este sentido, la simetría refleja está asociada a la transformación en la que una figura se refleja con respecto a una línea que genera una imagen especular. Es importante mencionar que este concepto no solo favorece el desarrollo del pensamiento espacial y la visualización geométrica, también fortalece habilidades de razonamiento lógico al explorar relaciones entre puntos, lados y ángulos correspondientes (Martínez, Pérez y Apolinario, 2024).

De esta manera, estudiar la simetría permite conectar las matemáticas con otras áreas de conocimiento, el arte, la naturaleza e incluso, la tecnología y la promoción de un abordaje más profundo de las formas y su comportamiento.

Además de estos aspectos directamente relacionados con las matemáticas, el uso del Tangram fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas y espaciales en los alumnos. Morales (2010) indica que su utilización en la enseñanza de la geometría mejora la percepción del espacio, la observación, el análisis y la comparación entre diferentes figuras. Esto contribuye también a una mejor comprensión de las fracciones y de las operaciones matemáticas, en el fortalecimiento del conocimiento general de los estudiantes en esta área.

La motivación del alumnado es otro beneficio destacado del uso del Tangram en el aula. Aznarte Mellado (2018) menciona que la introducción de materiales manipulativos en el

aprendizaje despierta un mayor interés y mejora la experiencia educativa. Al permitir una exploración activa de los conceptos matemáticos, el Tangram no solo refuerza el sentido espacial, sino que también estimula el desarrollo de habilidades intelectuales y psicomotrices.

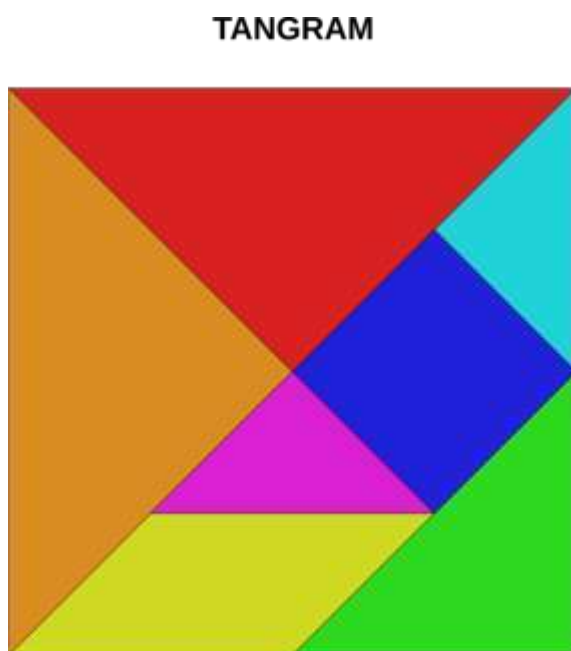
Estudios como el de Navarro (2008) han resaltado la relevancia del Tangram en la enseñanza de la matemática al afirmar que este recurso, utilizado de forma lúdica, facilita la comprensión de ideas abstractas y su aplicación en conceptos geométricos fundamentales, como el cálculo de áreas y perímetros, la clasificación de patrones geométricos y la resolución de triángulos rectángulos, así como la comprensión del teorema de Pitágoras. Huanca Ticona y Chalco Villacorta (2024) refuerzan esta idea, dado que su uso como estrategia didáctica mejora notablemente el aprendizaje de los triángulos en estudiantes de educación primaria.

En resumen, el Tangram va más allá de ser un simple juego de figuras; se comprende como una herramienta educativa versátil y efectiva. No solo fortalece el aprendizaje de la geometría, sino que también potencia el pensamiento lógico y la capacidad de resolver problemas. Su implementación en el aula enriquece tanto la enseñanza de conceptos matemáticos específicos como el desarrollo integral de los estudiantes, convirtiéndose en un recurso esencial para la educación matemática moderna. A manera de conclusión, el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en áreas como las fracciones y la geometría, requiere un desarrollo articulado de habilidades de razonamiento lógico y visualización espacial, indispensables en la resolución de problemas y conflictos en diferentes escenarios y, además, con gran influencia en el relacionamiento.

Por tanto, el Tangram es un recurso didáctico que permite diseñar experiencias de aprendizajes significativas y desafiantes, en que el estudiante puede explorar conceptos matemáticos desde lo concreto a lo abstracto. Bajo esta perspectiva, el uso dentro de la

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), está planificada de manera rigurosa, al fortalecer la identificación, observación y diagnóstico progresivo de las habilidades que se pretendan potenciar, y a su vez, adaptar el proceso de la enseñanza a las necesidades del aula y visibilizar su potencial para enriquecer el pensamiento matemático desde una perspectiva integral.

Figura 1. Tangram tradicional chino.



Nota. Tomado de Carlos Félix Pardo Martín, (2013-2026)

2.2.6. Habilidades de Razonamiento y Visualización

El razonamiento se considera como un eje fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en el sentido que permite que los estudiantes comprendan conceptos, analicen situaciones y resuelvan problemas y situaciones de manera lógica. En coherencia con lo anterior, la matemática demanda que el estudiante adquiera la capacidad de establecer relaciones, formular conjeturas, justificar ideas y evaluar la validez de los resultados

(Salas, 2024). Por esto, el desarrollo de habilidades de relacionamiento se convierte en un componente clave en el aprendizaje significativo, dado que facilita la construcción de conocimientos sólidos, apliquen estrategias diversas y enfrenten desafíos cognitivos con autonomía. Por esto, la promoción del razonamiento matemático no solo mejora el desempeño académico, además, fortalece competencias de pensamiento crítico y el análisis, lo cual es indispensable para el desarrollo integral.

Al respecto, Conforme & Mendoza (2024) exponen el razonamiento como el proceso mental mediante el cual los individuos organizan información, establecen relaciones, elaboran inferencias y generan conclusiones lógicas, lo cual permite que el estudiante interprete, valide, formule y reflexione sobre los métodos y logre argumentar; esto implica que el desarrollo del razonamiento matemático esté directamente relacionado con la autonomía, la creatividad y la capacidad de crítica del estudiante.

Por consiguiente, un enfoque fundamental es el sociocultural dado que hace especial énfasis en que la construcción del razonamiento se da a través de factores como la interacción, el diálogo y la mediación pedagógica. Bajo esta óptica, el docente cumple un rol esencial, pues acompaña procesos de reflexión y promueve espacios de argumentación entre estudiantes; de manera que tanto las actividades colaborativas como el uso del lenguaje matemático y la resolución conjunta de problemas se convierten en escenarios propicios para el fortalecimiento de diferentes formas de razonar.

Autores como Amador, Flores & Medina (2024) exponen que el desarrollo de habilidades de razonamiento está relacionado con factores como la motivación, los hábitos que construyen disciplina, la autonomía e incluso la confianza en las capacidades. Por tanto, estrategias

didácticas como el aprendizaje basado en problemas, los proyectos transversales y las situaciones reales involucran al estudiante y le permiten analizar e iniciar el proceso de toma de decisiones.

Por otra parte, las habilidades de visualización son llamadas preferentemente capacidades visuoespaciales, Boaler (2014), define el término capacidad como la inteligencia que se cree poseen los individuos. La visualización junto con la representación son el fundamento de la comprensión y el aprendizaje en matemáticas, dado que permite la interpretación y el manejo de información relacionada con figuras y problemas, fundamental para el razonamiento y la resolución de tareas matemáticas (Juárez, Sánchez & Juárez, 2022).

Mujica & Márquez (2022) destacan que tanto el descubrimiento como la exploración, la práctica continuada, los procedimientos y la mediación intencionada del adulto, constituyen elementos fundamentales para que niñas y niños, se apropien de los aprendizajes matemáticos. En concordancia con lo anteriormente expuesto, los currículos señalan que el docente debe abordar procesos matemáticos directamente relacionados con la comprensión de los espacios y las formas geométricas, la medida y sus magnitudes, la serie numérica, el peso, la capacidad, el tiempo y la longitud, en este sentido, el fortalecimiento de estos procesos no solo promueve el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, también favorece la resolución de problemas, el razonamiento crítico y la construcción de conocimientos tanto para la vida cotidiana como para las siguientes etapas de la formación integral.

2.3. Marco normativo

El marco normativo legal de la presente investigación está fundamentado en un conjunto de instrumentos jurídicos que orientan la educación formal desde un enfoque de desarrollo integral, calidad educativa y derechos humanos. En este sentido, el marco no solo legitima sino

permite articular la formación académica con el sustento de la inclusión de contenidos curriculares como las fracciones dentro de la Matemática, en coherencia con el desarrollo socioemocional del estudiante y con las tendencias educativas emergentes.

2.3.1. Normativa Internacional

A nivel internacional, existen diversos instrumentos que reconocen la educación como un derecho fundamental y orientan los sistemas educativos hacia enfoques pedagógicos centrados en el desarrollo integral del estudiante. Estos marcos normativos destacan la importancia de una educación que no solo atienda los aspectos cognitivos, sino que también promueva el bienestar, el desarrollo socioemocional y la adquisición de competencias necesarias para la vida. En este sentido, los lineamientos internacionales impulsan prácticas educativas que favorecen aprendizaje significativo, inclusivos y participativos, en coherencia con la presente investigación, la cual busca fortalecer la comprensión de las fracciones mediante estrategias didácticas que integren lo cognitivo, lo espacial y lo socioemocional.

La Declaración Universal de Derechos Humanos (1948), proclamada por la Asamblea General de las Naciones Unidas en 1948, establece en su Artículo 26 que toda persona tiene derecho a la educación y que además estará orientada al pleno y libre desarrollo de la personalidad y al respeto por los derechos y libertades. En este orden de ideas, este principio resalta que la educación debe propender por una formación integral que articule lo cognitivo, lo emocional y lo social.

De igual manera, la Convención sobre los Derechos del Niño (1989), reconoce el derecho de los niños y niñas a la educación capaz de promover sus capacidades físicas, mentales, emocionales y sociales. En este orden de ideas, el artículo 29 aborda la educación integral para el

desarrollo de la personalidad, aptitudes y habilidades del niño hasta el alcance máximo de sus posibilidades.

Por su parte, el Convenio 169 de la OIT y Declaraciones de la UNESCO ha promovido constantemente una visión centrada en el aprendizaje significativo, inclusivo y transversal, en tanto destaca la importancia de metodologías que fomenten habilidades para la vida como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el aprendizaje activo, así como el uso de recursos pedagógicos que integren la dimensión cognitiva y socioemocional.

Finalmente, la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, a través del Objetivo del Desarrollo Sostenible número 4, establece el compromiso de garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad. Adicional a ello, promover oportunidades de aprendizaje para todos. En este sentido, se hace especial énfasis en la necesidad de mejorar la calidad de los procesos educativos por medio de la innovación en las prácticas pedagógicas participativas, la formación docente y los ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo integral del estudiante.

2.3.2. Normativa Nacional

En Colombia, la normativa nacional es el eje central que regula la educación formal y orienta las prácticas pedagógicas en los establecimientos educativos del país. Mediante la Constitución Política, las Leyes de Educación y las Políticas Públicas, el Estado también define la educación como un derecho fundamental y un servicio público cuyo propósito es garantizar la formación integral de los estudiantes en los ámbitos cognitivo, social, ético, emocional y cultural; estableciendo bases sólidas para el desarrollo curricular, la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y la adopción de enfoques pedagógicos que promuevan aprendizajes significativos y adaptados al contexto.

La Constitución Política de Colombia (1991), en el Artículo 67 establece la educación como derecho de la persona y, además, un servicio público de función social, el cual debe estar orientado al acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y los demás valores culturales. De manera que se promueve el desarrollo integral del ser humano.

De manera completaría, la Ley General de Educación - Ley 115 de 1994, define los objetivos de la educación básica, resaltando la importancia del desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo como parte fundamental del proceso formativo. En el área de matemáticas esta ley orienta la enseñanza hacia la comprensión y aplicación de los conocimientos en situaciones reales, lo cual implica el uso de metodologías activas y recursos didácticos que favorezcan la construcción del saber.

Por su parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, (MEN, 2006) establecen los desempeños esperados de los estudiantes en cada ciclo escolar enfatizando el desarrollo progresivo del razonamiento, la resolución de problemas y la visualización. En el caso de la Educación Básica Primaria, se resalta la necesidad de que los estudiantes comprendan las fracciones orienta en diferentes contextos y representaciones y no únicamente como procedimientos algorítmicos.

Asimismo, el Código de Infancia y Adolescencia – Ley 1098 de 2006, por medio del cual se establece la obligación del Estado, la familia y la escuela de garantizar el desarrollo integral de niños y niñas, protegiendo sus derechos y promoviendo ambientes educativos respetuosos, seguros e inclusivos.

Finalmente, la Educación Emocional en la Formación Académica, la Ley 2503 de 2025 del Congreso de la República, crea e implementa la Cátedra de Educación Emocional en

preescolar, básica y media, en concordancia con el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de todas las instituciones educativas del país.

3. Aproximación Metodológica

La presente investigación está basada en el diseño e implementación de una estrategia didáctica innovadora para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de 4° de primaria, donde se utiliza el tangram como herramienta educativa. De acuerdo con lo anterior, la metodología adoptada en este estudio garantiza la transparencia en el proceso y el adecuado cumplimiento de los objetivos planteados.

3.1. Enfoque, Diseño y Tipo de Investigación

El enfoque metodológico de este estudio es cualitativo, sustentado en el paradigma pragmático, el cual articula la teoría con la práctica, y prioriza la aplicación flexible de estrategias de enseñanza, orientadas a responder a las necesidades concretas de los estudiantes. En este sentido, Saharrea & Vale (2021), destacan la importancia de este enfoque en la educación en el nivel primario, dado que permite que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento y resolución de problemas y conflictos a partir de situaciones reales y significativas. Este estudio emplea una metodología de investigación basada en diseño, que permite una planificación flexible y adaptativa, enfocada en la creación y evaluación de intervenciones didácticas.

Mediante esta metodología, este estudio pretende comprender el uso del tangram como una herramienta manipulativa que facilita la visualización y la comprensión de fracciones, puede influir considerablemente en la comprensión de este concepto en los estudiantes de básica primaria. De manera que el tangram, compuesta por piezas que pueden reorganizarse de

diferentes maneras, permite tanto una representación concreta de fracciones como el desarrollo de una comprensión mayormente intuitiva y visual de cómo funcionan las fracciones en términos de partes de un todo. En congruencia con esto, la investigación se lleva a cabo en tres fases principales.

En la primera fase se diseña una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que integre el tangram como recurso didáctico para la enseñanza de las fracciones. Esta fase contempla la identificación de las concepciones previas, las dificultades y las potencialidades de los estudiantes en relación con el concepto de fracción. A través de este diseño, se anticipan las posibles rutas de aprendizaje y se prevén los obstáculos que los estudiantes podrían encontrar durante el proceso de aprendizaje.

En la segunda fase se implementa la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en el aula, la promoción de la exploración, la manipulación y reflexión, mediante actividades con el tangram. Estas actividades fomentan la estimulación del razonamiento lógico y la visualización geométrica, dado que se favorece la comprensión conceptual de las fracciones de manera más intuitiva y visual. Durante esta fase, se hace especial énfasis en el uso del tangram como herramienta manipulativa, que facilita la representación de fracciones a través de la reorganización de sus piezas en diferentes formas.

En la tercera fase se hace un análisis reflexivo sobre el desarrollo de la comprensión de las fracciones y las habilidades de razonamiento y visualización durante la implementación de la THA, identificar los avances, dificultades y aportes del proceso enseñanza-aprendizaje al fortalecimiento del pensamiento numérico y espacial de los estudiantes, todo esto desde una perspectiva constructivista. Adicional a ello, se evalúa la efectividad de la intervención didáctica

a través de observaciones y análisis retrospectivos, lo cual permite ajustar y optimizar las estrategias que se han implementado.

De esta manera, el diseño metodológico incluye la definición de la muestra, compuesta por estudiantes de 4° de educación básica primaria, seleccionados con base en los criterios como la pertenencia al mismo contexto instruccional, el nivel de desempeño en matemáticas, la disposición para trabajar en las actividades propuestas y las características pedagógicas del aula.

La implementación de la Trayectoria Hipotética se lleva a cabo en el aula de clase, a través de actividades estructuradas que utilizan el tangram como eje central; durante ese proceso, se observan las interacciones de los estudiantes, la manera en que resuelven situaciones propuestas y la comprensión de las fracciones y la propuesta de posibles ajustes al diseño instruccional para optimizar la efectividad del proceso de enseñanza.

Finalmente, este proceso metodológico pretende proporcionar una perspectiva estructurada del uso del tangram en el marco de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, además se evalúa la manera en que este enfoque contribuye al aprendizaje de las fracciones, en tanto se permite una adaptación flexible a las necesidades de los estudiantes al facilitar su comprensión de los conceptos abstractos de una manera más concreta, visual y vivencial.

3.2. Población y Muestra

La población de esta investigación está constituida por los estudiantes de cuarto grado de primaria del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana de carácter público, ubicado en el municipio de Floridablanca, que cursan el año escolar 2025. A partir de esta población, se seleccionó una muestra de tipo intencional conformada por los estudiantes de 4-02. La elección de este grupo se realizó debido a que los estudiantes presentan necesidades educativas especiales,

a su vez ya tenían habilidades básicas en el manejo de los números naturales y se encuentran en una etapa cognitiva adecuada para con el aprendizaje de las fracciones.

3.2.1. Caracterización de cada grupo de cuarto grado

Inicialmente se realizó un diagnóstico con los primeros grupos (entre 4-1 y 4-6), para identificar el nivel de comprensión inicial del concepto de fracción y las estrategias que los estudiantes utilizan para representarlas y operarlas. A partir de los resultados obtenidos en esta fase, se seleccionó de manera intencional, el grupo 4-02 para el desarrollo de la fase experimental de la investigación. Esta elección se sustentó en el desempeño académico, el interés y la participación por parte de los estudiantes, factores que resultan determinantes para garantizar la viabilidad y el aprovechamiento del proceso didáctico propuesto.

Este grupo seleccionado, constituye una oportunidad para los estudiantes que inician a transitar en un pensamiento numérico concreto hacia formas más abstractas de razonamiento, lo cual permite un análisis a profundidad de las estrategias empleadas para interpretar, representar y operar con fracciones. Por ello, este grupo seleccionado ofrece un contexto especialmente propicio para diseñar, implementar y evaluar intervenciones didácticas que promuevan una comprensión significativa de este contenido matemático, en concordancia con un enfoque pragmático de la educación matemática (Saharrea & Vale, 2021).

Tabla 1. *Síntesis de la caracterización de estudiantes de 4° Educación Básica primaria*

Grupo	N° Estudiantes	Niñas	Niños	Estudiantes de inclusión	Nivel de atención	Comportamiento	Nivel cognitivo	Observaciones generales
4-01	40	20	20	2	Bajo	Ruidoso, pero siguen instrucciones y se interesan.	Medio	Se requiere control constante del grupo
4-02	40	18	22	2	Alto	Ordenado, sigue instrucciones.	Alto	Mayor avance cognitivo del grado
4-03	41	15	26	1	Bajo	Disperso, participativo en parte del grupo.	Medio-bajo	Se necesita reforzar la atención sostenida
4-04	39	15	24	1	Muy bajo	Indisciplinado, poco participativo.	Bajo	Bajo compromiso y esfuerzo académico
4-06	39	17	22	0	Medio	Fluctuante, sigue instrucciones, pero se dispersa.	Básico	Requiere orientación constante y actividades adaptadas

A continuación, se presenta la caracterización general de los grupos de cuarto grado que hicieron parte de la investigación, con el fin de contextualizar las condiciones académicas, actitudinales y de diversidad que influyeron en el desarrollo de la propuesta didáctica. Esta caracterización permite comprender las dinámicas propias de cada grupo y las particularidades que fueron consideradas durante la implementación de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje mediadas por el uso del Tangram.

El grupo 4-01 está conformado por 40 estudiantes, distribuidos equitativamente entre 20 niñas y 20 niños. Se caracteriza por ser un grupo ruidoso y con alta tendencia a la distracción, lo que exige constantes estrategias de redirección por parte del docente. A pesar de estas dificultades en la dinámica grupal, es posible identificar disposición en algunos estudiantes para participar. El grupo cuenta con dos estudiantes con necesidades educativas especiales, lo que demanda una atención diferenciada en determinadas actividades.

Por su parte, el grupo 4-02 está conformado por 40 estudiantes (22 niños y 18 niñas), este grupo destaca por su organización y actitud positiva hacia el aprendizaje. Los estudiantes acatan con facilidad las instrucciones y mantienen el orden dentro del aula, lo que favorece el desarrollo de las actividades académicas. Su nivel cognitivo es notablemente superior en comparación con los otros grupos de cuarto grado, lo cual se refleja en su rapidez para comprender conceptos y resolver tareas. También cuenta con dos estudiantes de inclusión, cuyas necesidades son atendidas mediante apoyos específicos sin que esto afecte el ritmo general del grupo.

De igual manera, el grupo 4-03 está compuesto por 41 estudiantes, de los cuales 26 son niños y 15 niñas. Presenta un ambiente de aula con altos niveles de dispersión y ruido, lo cual interfiere en la continuidad del trabajo académico. Aunque algunos estudiantes manifiestan interés por participar activamente, la atención sostenida es limitada en la mayoría del grupo. El

grupo cuenta con un estudiante de inclusión que requiere acompañamiento particular durante las actividades escolares.

Asimismo, el grupo 4-04 está conformado con 39 estudiantes (24 niños y 15 niñas), este grupo presenta importantes desafíos en términos de disciplina, atención y rendimiento académico. La mayoría de los estudiantes no acatan instrucciones, mantienen un nivel elevado de ruido durante las clases y muestran poco compromiso con las actividades escolares. Su desempeño cognitivo, en general, es bajo, y suelen realizar solo el mínimo esfuerzo necesario. El grupo cuenta con un estudiante de inclusión, lo que añade una dimensión adicional al manejo del aula.

Finalmente, el grupo 4-06 está conformado por 39 estudiantes, de los cuales 22 son niños y 17 niñas. Aunque en general acatan las instrucciones del docente, tienden a dispersarse con facilidad y a elevar el volumen del aula, especialmente durante las actividades grupales. Su nivel de desarrollo cognitivo se considera básico, por lo que requieren estrategias didácticas que faciliten la comprensión de los contenidos mediante la manipulación concreta y la guía constante. La dinámica del grupo es manejable si se establece una estructura clara y se mantienen rutinas consistentes.

3.3. Método

3.3.1. Investigación de Diseño Como Enfoque Metodológico en Educación Matemática:

La investigación de diseño emerge como un enfoque metodológico de tipo cualitativo, fundamental en el campo de la investigación educativa, explícitamente en disciplinas como la Didáctica de la Matemática y las Ciencias, lo cual se enmarca en las Ciencias del Aprendizaje. Esta metodología tiene como propósito fundamental la comprensión y la optimización de los

procesos de enseñanza-aprendizaje, mediante el diseño, implementación y análisis sistemático de intervenciones educativas en contextos reales del aula.

A diferencia de los enfoques tradicionales que limitan un poco a la evaluación de la efectividad de determinadas estrategias, la investigación de diseño integra articuladamente la teoría con la práctica, no solo como una intervención de aula sino esa construcción de conocimiento teórico a partir de esta intervención. Este enfoque se caracteriza por su naturaleza iterativa basada en la teoría, lo cual implica que los diseños sean auténticos, ajustados continuamente de acuerdo con las necesidades del entorno y en función de los resultados observados, y desarrollados sobre fundamentos conceptuales sólidos (Martínez, Valle, García & Dolores, 2020).

Es pertinente resaltar que, en este tipo de investigación los experimentos vivenciales de enseñanza desempeñan un rol fundamental, en tanto abordan situaciones didácticas con intención pedagógica, para la observación de la forma en que los estudiantes interactúan con determinados contenidos, recursos y mediaciones docentes (Varelo, 2017). Entonces, este proceso no solo es exploratorio sino permite la construcción de hipótesis sobre el aprendizaje y la validación de modelos de enseñanza producto del análisis empírico.

Un aporte fundamental de la investigación de diseño es la pertinencia y capacidad de reducir y/o mitigar la brecha entre la teoría educativa y la práctica pedagógica, al respecto, Ortíz (2023) menciona que este enfoque parte de ideas teóricas puestas a prueba mediante la creación, implementación y análisis reflexivo de propuestas didácticas, que permiten el desarrollo de herramientas educativas validadas y relevantes. Este tipo de estudios permite documentar a partir de un contexto determinado, el aprendizaje de los estudiantes que involucra una comprensión multidimensional de los procesos cognitivos y emocionales que se involucran en ello.

De esta manera, la investigación de diseño favorece la generación de constructos teóricos emergentes, pues los comportamientos y estrategias de los estudiantes observados durante la implementación de las actividades proporcionan insumos fundamentales para la retroalimentación de la intervención y de las teorías subyacentes. En este marco, un proyecto de investigación publicado en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, “la investigación basada en diseño como sustento de ambientes de aprendizaje para el aula de matemática (Vrancken, Engler & Müller (2018) concluyen que toda investigación basada en las perspectivas teóricas vigentes, que busque reflexionar y debatir sobre distintos aspectos de la formación matemática, en pro de la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, resulta una contribución importante a las metas de la educación actual (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Ahora bien, en el escenario de la Didáctica de la Matemática, este enfoque demuestra la utilidad en términos de la comprensión de los estudiantes y la construcción de significados matemáticos mediante la interacción con materiales manipulativos, representaciones visuales y situaciones problema, diseñadas cuidadosamente para el fin específico; a ello, se añade la importancia de la investigación de diseño en el estudio de los fenómenos educativos en áreas que requieren alta abstracción conceptual, por ejemplo, el aprendizaje de las fracciones.

En consecuencia, la investigación de diseño permite comprender y optimizar la enseñanza de las matemáticas a partir de una perspectiva integradora, que articula diseño de propuestas didácticas con el análisis de su implementación, con aportes valiosos en términos de desarrollo teórico en educación matemática (Shavelson y Towne, 2002).

3.3.2. Preparación

El objetivo principal de esta fase fue formular una teoría local del conocimiento que orientará el diseño del experimento y que se refinara a medida que avanzara el proceso, este momento inicial se caracteriza por la definición de objetivos de aprendizaje, señalando las ideas centrales del contenido a trabajar y problematizando el concepto de fracción para determinar los aspectos esenciales involucrados en su enseñanza y aprendizaje. En concordancia con el enfoque metodológico, se diseñaron 10 THA, orientadas a la construcción progresiva del concepto de fracción; por tanto, cada trayectoria se estructura a partir de elementos como, propósito, relación con estándares, ruta metodológica, conjetura, alcance de aprendizaje y evidencias. Es importante mencionar que estas trayectorias fueron secuenciadas, de manera que se retoma, se profundiza y amplía lo abordado en la anterior. En consecuencia, se organiza atendiendo a competencias fundamentales que guían la estructuración de las tareas y su progresión conceptual, es decir, la visualización geométrica, la comprensión parte todo, la representación y comparación de fracciones, la equivalencia y valor relativo y la suma de fracciones homogéneas y heterogéneas.

Esta fase se compone de:

- La consideración de los puntos de partida de la instrucción es donde se analizan las consecuencias de la instrucción anterior, al utilizar literatura existente y evaluaciones propias para identificar los niveles de comprensión de los alumnos. El objetivo es comprender las consecuencias de una instrucción anterior, no simplemente documentar el nivel típico de razonamiento de los alumnos.
- La formulación de una teoría local de la instrucción, en ella se elaboran conjeturas sobre un posible proceso de aprendizaje y los medios para apoyarlo con actividades didácticas, herramientas y una cultura de aula prevista. La teoría local de la instrucción abarca tanto

actividades de instrucción provisionales como un proceso de aprendizaje conjeturado que anticipa cómo puede evolucionar el pensamiento y la comprensión de los alumnos cuando se emplean las actividades de instrucción en el aula.

La intención teórica, esta define la intención teórica del experimento, que puede ser elaborar teorías locales sobre la instrucción o desarrollar marcos teóricos más amplios. Uno de los principales objetivos de un experimento de diseño es apoyar la constitución de una teoría de la instrucción local con base empírica.

3.3.3. Experimento

Una vez definidos los puntos de referencia y formulada una teoría de la instrucción local, puede comenzar el experimento de diseño. El objetivo general no es simplemente evaluar si funciona, sino probar y mejorar la teoría de la instrucción local conjeturada que se desarrolló en la fase preliminar y comprender cómo funciona. Esta fase se compone de:

- Microciclos de diseño y análisis, es donde se realizan ciclos iterativos de diseño, implementación y análisis de actividades didácticas, el ajuste del diseño en función de la comprensión de los alumnos. En cada ciclo lectivo, el equipo de investigación lleva a cabo un experimento mental anticipatorio, incluso, se imagina cómo el profesor y los alumnos podrían realizar interactivamente las actividades didácticas propuestas, y qué podrían aprender los alumnos al participar en ellas.
- Generación de datos, en ella se recopilan datos relevantes para los objetivos teóricos del experimento, como grabaciones de clases, entrevistas con alumnos, trabajos escritos y notas de campo. Las decisiones sobre los tipos de datos que deben generarse dependen de la intención teórica del experimento de diseño.

- Marco(s) interpretativo(s), se utilizan marcos interpretativos para dar sentido a la complejidad de los eventos en el aula, como la perspectiva emergente y la teoría de la Educación Matemática Realista (RME). Es esencial que los investigadores expliquen los constructos básicos de su marco interpretativo para que la investigación sea disciplinada y sistemática.

3.3.4. Técnicas e Instrumentos

En concordancia con el enfoque y el método planteado de la investigación basada en diseño, las siguientes técnicas e instrumentos los cuales permiten comprender los procesos de aprendizaje de las fracciones mediante el uso del tangram y la implementación de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

Observación participante: esta técnica es fundamental para el desarrollo del THA en el trabajo dado que permite que se involucren las partes y se registren sistemáticamente tanto los procesos de enseñanza y aprendizaje que subyacen en el aula. La importancia de esta técnica radica en que permite una comprensión profunda de las interacciones de los estudiantes con el Tangram y sumado a ello, las estrategias que se utilizan para representar y comprender las fracciones, así como las dificultades, avances y razonamientos que se manifiestan en el desarrollo de la actividad propuesta.

Durante la implementación de las THA, la observación participante se orienta hacia el análisis de la manera en que los estudiantes construyen el concepto de fracción a partir de la manipulación, la visualización y el diálogo matemático, partiendo de las formas en que se interpreta la relación parte-todo, la equivalencia y el valor relativo de las fracciones.

De acuerdo con Rekalde, Vizcarra & Macazaga (2014), la observación participante es un método interactivo de recolección de información necesita que el observador se involucra en el entorno y participe activamente en el proceso, pues permite la obtención de diferentes percepciones de la realidad. Es importante mencionar que este método contribuye en la construcción de instrumentos que han facilitado la interpretación y comprensión de las situaciones analizadas.

En consecuencia, los registros de la observación se estructuran y se documentan en el diario de campo, en donde se plasman también situaciones significativas del aprendizaje, así como intervenciones, comportamientos y hallazgos relevantes del entorno, lo cual se constituye en una fuente indispensable de información, para el análisis del proceso.

Revisión Documental: Para García & Castro (2017), la revisión documental es una técnica esencial dado que permite la explicación, el control, la comprobación y la predicción de los fenómenos educativos y actúa sobre el marco natural y externo al propio investigador, integrando conocimiento observable, objetivo y cuantificable, con posibilidades de generalización. Esta técnica es fundamental para la estructura del proyecto, el análisis y la interpretación de la información, pues permite el contraste de los hallazgos empíricos con los referentes y supuestos teóricos que sustentan el documento.

Es importante resaltar que esta técnica contempla el análisis de documentos institucionales, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias en matemáticas, e incluso, literatura especializada relacionada con la enseñanza de las fracciones, el uso de materiales manipulativos y la investigación basada en diseño en la educación matemática.

Adicionalmente a ello, se revisan las producciones elaboradas por estudiantes durante el desarrollo de los THA (dentro de ellas, se encuentran las guías, representaciones gráficas, construcciones con el Tangram y los registros escritos. Lo anterior, permite la recolección de evidencia del proceso de aprendizaje y permite identificar la evolución conceptual de los estudiantes, así como la coherencia entre lo propuesto y los objetivos de aprendizaje establecidos.

- **Análisis Retrospectivo:** Esta técnica se utiliza para analizar sistemáticamente el desarrollo y los resultados del proceso didáctico contrastando las conjeturas de aprendizaje formuladas en la THA con las evidencias identificadas durante la ejecución.

Al respecto, Visquerra (2016), resalta que mediante esta técnica es posible hacer una revisión completa y detallada de las observaciones, los registros de clase y las producciones de los estudiantes, para identificar patrones de razonamiento, así como avances en la comprensión de fracciones, dificultades persistentes y posibles ajustes en las actividades. Es pertinente resaltar que esto favorece la reflexión crítica sobre la efectividad del uso del tangram como herramienta didáctica (Napa & Villanueva, 2025).

- **Triangulación:** esta estrategia fortalece la validez y la rigurosidad de la investigación al contrastar información de diferentes fuentes y técnicas. Es decir, a partir de los datos obtenidos mediante la observación participante, la revisión documental y el análisis retrospectivo.

Lo anterior permite confrontar las diferentes interpretaciones identificando tanto convergencias como divergencias en los hallazgos para la construcción de una perspectiva más

coherente y sólida de los procesos de aprendizaje de las fracciones. En este orden de ideas, la triangulación contribuye en la reducción de sesgos interpretativos y otorga un respaldo de las conclusiones basadas en un análisis multidimensional del objeto de estudio (Delgado, Lema, Lema y Senú, 2024).

Tabla 2. *Tabla de técnicas e instrumentos*

Fase	Técnica de recolección	Instrumento	Técnica de análisis	Instrumento
Fase 1: Diseño y planificación de las THA	Revisión documental	Análisis de documentos institucionales, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias	Análisis documental	Matriz de análisis teórico
Fase 2: Implementación de las THA en el aula	Observación participante	Registros de clase, producciones de los estudiantes (guías, representaciones gráficas, construcciones con tangram y registros escritos y fotográficos)	Análisis descriptivo e interpretativo	Registros de observación y evidencias de aprendizaje
Fase 3: Análisis retrospectivo y ajuste	Revisión documental de producciones estudiantiles	Compilación de evidencias de aprendizaje y registros de las actividades desarrolladas en Geo – Gebra.	Triangulación	Comparación entre conjeturas de aprendizaje

3.3.5. Consideraciones éticas

La presente investigación se desarrollará con estricto cumplimiento de los principios éticos que rigen los estudios en el campo de la educación, así como el respeto, la confidencialidad, el consentimiento informado y la protección de los participantes en todas las fases del estudio.

Antes de iniciar la intervención, se solicitará a la institución educativa la autorización correspondiente mediante la presentación de una carta formal con la descripción del proyecto. Asimismo, se entregará a los padres o acudientes de los estudiantes un formato de consentimiento informado, en el cual se explicarán de manera clara y accesible los objetivos de la investigación, las actividades que se llevarán a cabo, la duración del estudio, y el uso de la información recolectada. La participación de los estudiantes será voluntaria y no conlleva ningún tipo de presión o evaluación académica adicional. Se garantizará que ningún niño o niña sea expuesto a situaciones que puedan afectar su bienestar físico, emocional o psicológico. En caso de que algún participante o su acudiente decida retirarse del proceso, se respetará plenamente su decisión sin que ello implique consecuencias negativas.

Los datos recolectados (producciones, registros, observaciones y grabaciones) serán utilizados exclusivamente con fines académicos y de investigación. La identidad de los participantes será protegida mediante el uso de seudónimos o códigos anónimos en todo documento o producto derivado del estudio. De este modo, se asegura la confidencialidad de la información y se previene cualquier forma de exposición no deseada de los menores involucrados.

En consonancia con el marco legal colombiano, esta investigación se acoge a lo establecido en la Ley 1581 de 2012, la cual regula la protección de los datos personales y establece que el tratamiento de información de menores solo se permite cuando su naturaleza es de carácter público o estrictamente necesario, y se respeta a cada menor de edad su derecho fundamental de privacidad (Congreso de Colombia, 2012). Así mismo, se da cumplimiento al Código de Infancia y Adolescencia (Ley 1098 de 2006), que reconoce el derecho de los niños, niñas y adolescentes a la intimidad personal y familiar, lo cual prohíbe toda injerencia arbitraria o ilegal en su vida privada, su honra o reputación (Congreso de Colombia, 2006).

El cumplimiento de estas disposiciones legales no solo responde a requerimientos legales, sino que refleja el compromiso ético que presenta este estudio con la protección de los derechos de los niños, que garantiza su bienestar integral y el respeto por su dignidad humana durante el proceso investigativo.

4. Análisis de Resultados

Los resultados de la investigación se organizaron a partir de la información recolectada durante la implementación de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, mediante instrumentos como registros de observación, producciones escritas de los estudiantes, registros fotográficos y digitales en el software Geo – Gebra. El proceso de análisis se desarrolló de manera sistemática y progresiva, permitiendo identificar regularidades, dificultades, avances y estrategias empleadas por los estudiantes en su interacción con el Tangram y en la comprensión del concepto de fracción.

Las categorías de análisis emergieron de forma inductiva, a partir de la revisión y contraste de los datos obtenidos en cada fase, en coherencia con los objetivos de la investigación y el enfoque de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, estas categorías se fueron ajustando a medida que avanzaba el proceso interpretativo, permitiendo comprender cómo evolucionaron las ideas, razonamientos y representaciones de los estudiantes a lo largo de las diferentes fases. En este sentido, la presentación de los resultados se organiza según las fases del experimento, dando cuenta del desarrollo de las actividades como de los aprendizajes y dificultades evidenciadas. (Anexo 1)

4.1. Fase 1: Preparación del experimento

El objetivo principal de esta fase fue diagnosticar las necesidades de los estudiantes e identificar sus concepciones previas sobre las figuras geométricas y el concepto de fracción, a partir del diseño y aplicación de THA de carácter preliminar (THAp). Esta fase se orientó a la formulación de una teoría local del conocimiento que permitiera guiar el diseño del experimento didáctico y que pudiera ser ajustado progresivamente a lo largo del proceso investigativo. En este

momento inicial, se definieron los objetivos de aprendizaje y se delimitaron las ideas centrales de contenido a trabajar, problematizando el concepto de fracción con el fin de reconocer los elementos esenciales involucrados en su enseñanza y aprendizaje.

En esta primera etapa los estudiantes fueron convocados a convertirse en aprendices de los guardianes del Tangram, estrategia narrativa que permitió introducir el recurso didáctico de manera lúdica y significativa. Con relación al objetivo con esta fase se explora cómo los estudiantes identifican las piezas del Tangram y las estrategias que empleaban para construir, clasificar o transformar las figuras. Las actividades planeadas permitieron observar la manera en que los estudiantes interactúan con el material, así como sus formas iniciales de razonamiento, comunicación y representación gráfica.

Mediante actividades lúdicas y de observación, permitió conocer el nivel inicial de razonamiento y visualización espacial de los estudiantes, así como su grado de familiaridad con el Tangram como recurso didáctico. Así mismo, se identificaron dificultades, avances y potencialidades en la comprensión de las relaciones parte – todo y en el reconocimiento de equivalencia entre formas, aspectos fundamentales para el aprendizaje del concepto de fracción.

En coherencia con el enfoque metodológico, durante esta fase se diseñaron e implementaron seis Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje preliminares, orientadas a la preparación del experimento. Cada trayectoria se estructuró a partir de elementos como el propósito, la relación con los estándares, la ruta metodológica, la conjetura de aprendizaje, el alcance esperado y las evidencias, lo que permitió anticipar posibles formas de razonamiento y comprensión por parte de los estudiantes. Estas Trayectorias fueron concebidas de manera secuencial donde cada una se buscaba ajustar y seguir con lo abordado de la anterior, favoreciendo una comprensión conceptual gradual.

Como resultado del análisis desarrollado en esta primera fase, se evidenció que la mayoría de los estudiantes presentaban una comprensión inicial limitada del concepto de fracción, asociándolo principalmente a la división mecánica de figuras sin reconocer relaciones de equivalencia entre diferentes representaciones. Durante la implementación de las THAp se observó que los estudiantes identificaban las piezas del Tangram de manera aislada sin establecer relaciones claras entre las partes, y mostraban dificultades para justificar sus conocimientos o clasificaciones. Así mismo, el razonamiento y la visualización espacial se manifestaron de forma incipiente, especialmente en tareas que requerían comparar o anticipar transformaciones geométricas. Estos resultados permitieron diagnosticar las necesidades de aprendizaje y confirmaron la pertinencia de diseñar trayectorias que fortalecieron progresivamente la relación parte - todo y la visualización geométrica como base de la comprensión de las fracciones (ver Anexo 2).

Tabla 3. Respuestas representativas de los estudiantes. Fase diagnóstica

Categoría Analizada	Respuestas Representativas	Interpretación
Comprensión de fracción	“Es una parte”, “No está completo”	Reconocimiento perceptivo sin referencia clara a la unidad.
Identificación de la unidad	“No sé cuál es el todo”	Ausencia del concepto de unidad de referencia.
Comparación de fracciones	“1/4 es mayor porque 4 es más grande”	Uso de razonamiento naturalista.

Razonamiento	Basado en tamaño virtual inmediato	Nivel inicial de razonamiento (visual).
--------------	---------------------------------------	--

4.2. Fase 2: Experimento del diseño

Una vez establecidas las bases diagnósticas y formulada la primera fase, se dio inicio a la fase de experimento o implementación de las THA. En esta etapa se desarrollaron cinco Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, diseñadas para poner en acción y observar los procesos de razonamiento y visualización espacial de los estudiantes en la construcción del concepto de fracción. El objetivo de esta fase no se limitó a verificar la efectividad de las actividades propuestas, sino a comprender cómo se desarrollan los aprendizajes cuando los estudiantes interactúan con el Tangram en situaciones didácticas intencionadas y cómo estos aprendizajes permiten ajustar la conjetura inicial planteada.

Durante esta segunda fase, los estudiantes asumieron el rol de aprendices de los guardianes del Tangram y participaron en diferentes misiones que implican la resolución de desafíos geométricos, tales como la construcción de casas, barcos y la solución de acertijos. Estas actividades favorecen la exploración de las relaciones entre las piezas del Tangram, la comparación de tamaños, la identificación de equivalencias entre figuras y la comprensión de la relación parte – todo. A partir de estas interacciones se evidenció el uso progresivo de estrategias de razonamiento (deductivo, inductivo, proporcional, analógico y justificación), asimismo en la visualización espacial (coordinación ojo – mano, conservación de la percepción, relaciones espaciales, discriminación y memoria visual) que contribuyeron al fortalecimiento del pensamiento numérico y espacial.

El análisis de los resultados de esta fase permitió identificar avances significativos en la manera en que los estudiantes interpretan y utilizan las fracciones, especialmente cuando estas se abordan desde representaciones geométricas y situaciones contextualizadas. La manipulación del Tangram complementada con el uso de recursos digitales, permitió que los estudiantes construyen significados más sólidos sobre el concepto de fracción, transitando de interpretaciones intuitivas hacia comprensiones más estructuradas.

Así mismo, durante la implementación de las cinco THA se realizaron ajustes en función de las respuestas, dificultades y estrategias evidenciadas por los estudiantes. Estos ajustes permitieron fortalecer los procesos de aprendizaje, al adaptar las actividades a las necesidades emergentes del grupo y favorecer espacios de reflexión, discusión y argumentación matemática. De esta manera, el análisis de resultados da cuenta de un proceso dinámico en el que el diseño didáctico se transformó a partir de la evidencia recogida en el aula.

Por consiguiente, los resultados obtenidos en la implementación de la fase de experimento de diseño evidenciaron avances significativos en el proceso de razonamiento y visualización espacial de los estudiantes. A través de las misiones propuestas por los guardianes del Tangram, los estudiantes comenzaron a comparar figuras no solo por sus formas, sino también por su tamaño y área, utilizando estrategias como la superposición, la recomposición y la rotación de figuras. En este proceso, se identificó una evolución en la comprensión del concepto de fracción, ya que los estudiantes lograron reconocer equivalencias entre diferentes configuraciones del Tangram y justificar sus respuestas a partir de argumentos visuales. La manipulación concreta y digital del material favoreció la construcción de significados más sólidos, evidenciando una transición desde respuestas intuitivas hacia razonamientos más estructurados y coherentes con los objetivos de aprendizaje planteados (ver anexo 3).

Tabla 4. Respuestas representativas. Fase Experimental

Categoría	Evidencias reconstruidas	Avances Observados
Parte-Todo	“Primero hay que saber cuál es el todo”	Reconocimiento explícito de la unidad.
Equivalencia	“Ocupan el mismo espacio, aunque estén armadas distinto”	Comprensión de conservación del área.
Justificación	“Si las junto queda igual”	Argumentación visual.
Representación	“Dibujé el todo y luego lo partí igual”	Transferencia a lo gráfico.
Lenguaje matemático	Uso espontáneo de términos como “mitad”, “igual”; “mismo espacio”.	Progreso conceptual.

4.3. Fase 3: Análisis retrospectivo

Esta fase constituye un punto fundamental en el proceso de investigación, dado que permite el análisis sistemático de la información en el transcurso de la implementación de las THA, para contrastar las conjeturas de aprendizaje formuladas inicialmente con las evidencias observadas en el aula.

Este análisis estuvo orientado hacia la comprensión de la evolución del pensamiento del estudiante en relación con la comprensión de las fracciones, el razonamiento y la visualización, en consecuencia, con los principios de la investigación basada en diseño.

Como resultado de este proceso reflexivo e iterativo, se incorporó en las THA los ajustes que surgieron a raíz de las observaciones, las respuestas estudiantiles y las decisiones didácticas que demostraron mayor efectividad durante la fase experimental. Es importante resaltar que este proceso de mejora culminó en la creación de un libro digital en GeoGebra, en el que se sistematizó el proceso de las THA optimizadas y aplicadas en el aula, allí se integraron actividades manipulativas y digitales cuya intencionalidad está orientada a la visualización dinámica, la comprensión de la relación parte-todo y la equivalencia fraccionaria.

Este libro se convierte en el producto final del análisis retrospectivo dado que se materializa la teoría local de instrucción construida en el transcurso del experimento de diseño. Es pertinente resaltar que este recurso articula tanto las tareas diseñadas inicialmente como las propuestas didácticas validadas empíricamente lo cual contempla la importancia de pensamiento numérico y espacial, al tiempo que ofrece una alternativa replicable y especial para la enseñanza de las fracciones en educación básica primaria, a continuación, la figura 1. muestra la evidencia del GeoGebra.

Figura 2. GeoGebra, Misterios de las Fracciones



Fuente: propia. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/bpq7yd7h>

Finalmente, la fase de análisis retrospectivo permitió identificar patrones de aprendizaje y aspectos clave que contribuyeron al fortalecimiento de la comprensión de las fracciones en los estudiantes. A partir de la triangulación de los registros de observación, las producciones de los estudiantes y las decisiones didácticas, se evidenció que las actividades que integraron de manera explícita la visualización dinámica y la reflexión colectiva generaron mayores avances en el razonamiento matemático. En particular, se observó que los estudiantes lograron establecer con mayor claridad la relación parte – todo y la equivalencia fraccionaria cuando las tareas promovieron la manipulación intencionada del Tangram y el uso de presentaciones múltiples. Estos hallazgos orientan la reconstrucción de la teoría local de la instrucción y dieron lugar a una THA mejorada, sistematizada en un libro digital en Geo – Gebra, el cual consolida las actividades más efectivas y se constituye como una propuesta didáctica validada empíricamente para la enseñanza de las fracciones en la educación Básica Primaria (Ver anexo 4).

5. Discusión de resultados

La presente investigación tuvo como propósito analizar la manera en que el diseño y la implementación de las THA, mediadas por el uso del Tangram inciden en la comprensión del concepto de fracción y en el desarrollo de las habilidades de razonamiento y visualización en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria. A partir del análisis de las tres fases del experimento de diseño –preparación, implementación y análisis retrospectivo– se identificaron hallazgos relevantes que permiten establecer un diálogo directo con los referentes teóricos abordados en el marco conceptual y metodológico del estudio, particularmente aquellos asociados a la educación Matemática Realista y a la investigación basada en diseño.

Uno de los principales resultados evidenció que el uso de Tangram favoreció la comprensión de la fracción como relación parte–todo, especialmente cuando los estudiantes lograron reconocer la unidad como referente indispensable para representar una fracción. Este avance conceptual se relaciona con lo planteado por Van Ben Heuvel-Panhuizen (2003), quien señala que el uso de modelos didácticos visuales y contextualizados permiten a los estudiantes construir significados más profundos de los números racionales, al hacer explícitas las relaciones invariantes entre la parte y el todo. En este sentido el Tangram actuó como un modelo que permitió superar interpretaciones fragmentadas y mecánicas del concepto de fracción.

Otro hallazgo significativo se relaciona con la comprensión de la equivalencia fraccionaria. Durante esta fase experimental, los estudiantes lograron justificar que fracciones como $1/2$ y $2/4$ representan la misma cantidad a a partir de argumentos visuales asociados a la conservación del área, más que mediante procesos algorítmicos. Este tipo de razonamiento concibe por lo expuesto por Simon & Tzur, (2004), quienes plantean que la comprensión de la equivalencia fraccionaria emerge cuando los estudiantes coordinan diferentes representaciones y establecen relaciones entre ellas, dando lugar a formas incipientes de razonamiento proporcional.

Desde el enfoque de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizajes, los resultados confirman la importancia de anticipar conjeturas sobre el aprendizaje de los estudiantes y de ajustar las actividades a partir de las respuestas reales que emergen en el aula. Tal como lo señalaban Cobb et al. (2003), la investigación basada en diseño no se limita a verificar si una propuesta funciona, sino que busca comprender cómo se desarrolla el aprendizaje en contextos auténticos. En esta investigación, la implementación de las THA permitió identificar la evolución progresiva del pensamiento de los estudiantes, particularmente en relación con la visualización geométrica, la argumentación y la construcción de significados en torno a las fracciones.

Así mismo, los resultados obtenidos respaldan lo planteado por Clements y Sarama (2004), quienes destacan que las Trayectorias de Aprendizaje bien estructuradas permiten identificar tanto avances como dificultades en el pensamiento matemático facilitando la toma de decisiones didácticas fundamentadas. La secuenciación de las THA y los ajustes realizados durante la implementación contribuyeron al fortalecimiento del razonamiento espacial y numérico de los estudiantes, evidenciando la flexibilidad del diseño como un elemento clave del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Finalmente, la integración del Tangram como recurso manipulativo, junto con el uso en entornos digitales como GeoGebra, amplió las posibilidades de exploración y justificación de los conceptos trabajados. Esta articulación favoreció la construcción progresiva del conocimiento matemático, coherente con los principios de la educación Matemática Realista, al permitir que los estudiantes transitan desde experiencias concretas hacia formas más estructuradas de comprensión. En conjunto, los resultados de esta investigación evidencian que una enseñanza de las fracciones centrada en la visualización, la manipulación y el diseño progresivo de THA contribuye de manera significativa al desarrollo del razonamiento y la comprensión conceptual de la educación básica primaria.

Conclusiones

El presente capítulo recoge las conclusiones derivadas del desarrollo de la investigación, cuyo propósito fue analizar cómo el diseño e implementación de THA medidas por el uso del Tangram y GeoGebra inciden en la comprensión de las fracciones y el desarrollo de las habilidades de razonamiento y visualización en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria. A partir del análisis de los resultados obtenidos en las fases de preparación, implementación y análisis retrospectivo se sintetizan los principales aportes pedagógicos y didácticos de la propuesta, así como los avances y aprendizajes evidenciados en los estudiantes, permitiendo valorar el alcance de los objetivos planteados y la pertinencia de la estrategia implementada en el contexto educativo.

Inicialmente, se evidenció que el uso del tangram permitió a los estudiantes construir el concepto de fracción desde una perspectiva integral, al comprenderla como una relación entre la parte y el todo, y no únicamente como una expresión numérica, dado que factores como la manipulación concreta de las piezas facilitó la identificación de la unidad de referencia y la comprensión de que una fracción representa una cantidad relativa al todo, aspecto que constituye una base sólida para el aprendizaje posterior de los números racionales.

Posterior a ello, se resalta que el trabajo con el tangram favoreció el desarrollo de habilidades de razonamiento y visualización, especialmente en lo relacionado con la comprensión de la equivalencia fraccionaria, en tanto los estudiantes lograron justificar que distintas representaciones podían corresponder a una misma fracción, apoyándose en la conservación del área y en comparaciones visuales. Es importante mencionar que este avance evidencia un tránsito desde razonamientos intuitivos hacia formas iniciales de razonamiento proporcional, lo cual representa un logro relevante para este nivel educativo.

La implementación de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje permitió organizar el proceso de enseñanza de manera progresiva, anticipando dificultades y ajustando las actividades a las respuestas reales de los estudiantes, este enfoque posibilita una enseñanza más flexible y centrada en el aprendizaje, en coherencia con los principios de la investigación basada en diseño, y contribuyó a una comprensión más profunda de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las fracciones.

Por otra parte, la integración de recursos manipulativos y digitales, como el tangram físico y GeoGebra, amplió las oportunidades de exploración y representación, favoreciendo la transición del pensamiento concreto al abstracto. Esta articulación resultó especialmente valiosa para fortalecer la visualización geométrica y la argumentación matemática, aspectos fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica.

Finalmente, se concluye que la propuesta didáctica diseñada se convierte en una alternativa pertinente, replicable y contextualizada para la enseñanza de las fracciones en educación primaria dado que articula pensamiento numérico y espacial a través del juego, la manipulación y la visualización, aporta elementos valiosos tanto para la práctica docente como para la investigación en didáctica de las matemáticas, al ofrecer una experiencia fundamentada que responde a las necesidades reales del aula.

Se resalta la pertinencia de esta estrategia pedagógica, en tanto promueve el aprendizaje didáctico, dinámico y habilidades sociales como el pensamiento crítico y el trabajo colaborativo, esto implica que, de implementarse en cualquier área de conocimiento, potenciará los procesos educativos.

Recomendaciones

A partir de los resultados y las reflexiones derivadas del proceso investigativo, se formulan las siguientes recomendaciones orientadas a la mejora y proyección de la propuesta didáctica desarrollada. En primer lugar, desde el punto de vista pedagógico, se sugiere que la planificación de la implementación de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje contempla una selección estratégica de aquellas trayectorias que resulten más significativas para el logro de los objetivos de aprendizaje, considerando que las limitaciones de tiempo propias del contexto escolar pueden dificultar la ejecución total de la propuesta. En este sentido, priorizar las THA permite mantener la coherencia del diseño sin afectar la profundidad conceptual de los aprendizajes.

Desde una perspectiva metodológica, se recomienda incorporar actividades alternativas que no dependan exclusivamente del acceso a recursos digitales o conexión a internet, de manera que la propuesta conserve su viabilidad en contextos con limitaciones tecnológicas. Esta diversificación de estrategias contribuye a garantizar la continuidad del proceso de enseñanza-aprendizaje para atender de forma más equitativa las condiciones reales del aula.

En relación con los aspectos tecnológicos resulta pertinente promover la gestión de recursos mediante apoyos institucionales, así como el uso compartido de dispositivos, con el fin de ampliar las posibilidades de implementación de herramientas digitales como Geo-Gebra. Estas acciones pueden favorecer una mayor inclusión y acceso a recursos tecnológicos en el contexto educativo.

Finalmente, se considera pertinente fortalecer los procesos de formación docente en el uso pedagógico de materiales manipulativos y recursos digitales, no solo desde un enfoque instrumental sino también didáctico de modo que los docentes puedan integrar de manera

intencionada estos recursos en sus prácticas en el aula y potenciar el desarrollo del razonamiento, la visualización y la comprensión conceptual en matemáticas.

Referencias Bibliográficas

- Abreu, O., Gallegos, M., Jácome, J. y Martínez, R., (2017) La Didáctica: Epistemología y Definición. Formación universitaria. 10 (3) <https://www.redalyc.org/pdf/3735/373551306009.pdf>
- Amador, C., Flores, A., & Medina, A. (2023). Programa de desarrollo de habilidades del pensamiento como estrategia para disminuir el rezago educativo. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 14(27), e588..<https://doi.org/10.23913/ride.v14i27.1750>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Asamblea General de las Naciones Unidas. (1948). *Declaración Universal de los Derechos Humanos*. Naciones Unidas.
<https://www.un.org/es/about-us/universal-declaration-of-human-rights>
- Asamblea General de las Naciones Unidas. (1989). *Convención sobre los Derechos del Niño*. Naciones Unidas.
<https://www.unicef.org/es/convencion-derechos-nino>
- Azarquiel, G. (1988). *El Tangram*. Revista Suma, (1), 49-52.
- Aznarte Mellado, M. (2018). *Tareas con tangram para favorecer el sentido espacial*.
- BARROWS, H.S. (1986). A Taxonomy of problem-based learning methods, en *Medical Education*, 20/6, 481–486
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7–16.
- Bressan, A., Zolkower, B. E. T. I. N. A., & Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, 5, 69.
- Bisquerra, R. (2016). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla
- Bueno Villaverde, A., & Pérez Sánchez, L. (2006). *El razonamiento inductivo desde los enfoques de dominio general y específico*. Ediciones Aljibe.
- Bueno Villaverde, A., & Pérez Sánchez, L. (2006). *El razonamiento inductivo desde los enfoques de dominio general y específico*. Ediciones Aljibe.
- Camilloni, A. R. (2007). *El saber didáctico*. Paidós.
- Cárcamo, A.; Fortuny, J. M.; & Fuentealba, C. (2019). *Identifying a learning progression for the resolution of a system of linear equations*. In: PME 43, Pretoria, v.4, pp. 19-23.

- Cárcamo, A.; Fortuny, J. M.; & Fuentealba, C. (2021). *Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: Un ejemplo en un curso de Álgebra Lineal*. Enseñanza de las Ciencias, 39(1), 45-64.
- Castillo, G., Sailema, J., Chalacán, J., & Calva, A. (2023). El rol docente como guía y mediador del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 6(6), 13911-13922. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.4409
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). *Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research*. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the PME 29* (Vol. 2, pp. 233–240).
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). *Learning trajectories in mathematics education. Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad: El Enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Bogotá.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design experiments in educational research. Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Colinas, E., & Arnal, M. (2022). Matemáticas en Educación Infantil: una mirada al aprendizaje de las magnitudes desde el desarrollo sostenible. *Educación Matemática*, 34(1), 306–334. <https://doi.org/10.24844/EM3401.11>
- Conforme, S. & Mendoza, F. (2022). El pensamiento lógico-matemático del estudiantado. ¿Un asunto didáctico?. *Mendive. Revista de Educación*, 20(2), 408-421. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-76962022000200408&lng=es&tlng=es.
- Confrey, J. (2000). *Design research, critique and justification*. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 463–506). Lawrence Erlbaum.
- Confrey, J. (2019). *A Synthesis of Research on Learning Trajectories/Progressions in Mathematics*. OECD.

- Congreso de Colombia. (2006). *Ley 1098 de 2006. Código de Infancia y Adolescencia*.
https://www.icbf.gov.co/cargues/avance/docs/ley_1098_2006.htm
- Congreso de Colombia. (2012). *Ley 1581 de 2012*.
<https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=49981>
- Coronado, I., Martínez, D., & Vilcapoma, N. (2025). El software GeoGebra como herramienta técnica en la enseñanza universitaria de matemáticas. *Revista InveCom*, 5(4), e504080.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.15114455>
- Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones*. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.
- Cruz Moreno, N. C., Moreno Montañez, S. V., & Moreno Piza, L. C. (2020). *Trayectoria hipotética de aprendizaje para la organización y representación de datos con niños y niñas de primero del Instituto Pedagógico Nacional*.
- De Marchi, I. (2012). *El libro del tangram* (3a ed.). España: Lulu.com.
- Del Grande, J. (1990). *Spatial sense*. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14–20.
- Delgado, E., Lema, B., Lema, A., & Senú, I. (2024). Investigaciones históricas en las ciencias de la educación: Teorías y prácticas innovadoras. *ACVENISPROH Académico*.
<https://doi.org/10.47606/ACVEN/ACLIB0086>
- Díaz Barriga, F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista*. McGraw-Hill.
- García, M. & Castro, A. (2017). La investigación en educación. In: MORORÓ, L. P., COUTO, M. E. S., and ASSIS, R. A. M. *Notas teórico-metodológicas de pesquisas em educação: concepções e trajetórias*. Ilhéus, BA: EDITUS, 2017, pp. 13-40. ISBN: 978-85- 7455-493-8. doi: 10.7476/9788574554938.001
- Godino, J. D. (2004). La competencia matemática. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 59–86). ICE-Horsori.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning design perspective*. In J. van den Akker et al. (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17–51). Routledge.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference*, 1, 3–19.
- Guzmán, M., Flórez, J. & Cruz, J. (2021). La enseñanza de los números fraccionarios en sexto grado. *Rev. Científico Educativo de la provincia Granma*. 17 (1) 14.

- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70–95). Cambridge University Press.
- Huanca Ticona, B., & Challco Villacorta, B. S. (2024). *El tangram como estrategia didáctica para el aprendizaje de triángulos en estudiantes del 4to grado de primaria de la I.E.P. Liceo Italiano, Cusco – 2022* [Tesis de licenciatura, UNSAAC]. <http://hdl.handle.net/20.500.12918/9138>
- Juárez, E., Sánchez, L., & Juárez, J. (2022). Identificación del desarrollo de habilidades visuales espaciales en representaciones y conversión entre registros para calcular volúmenes. *Educación matemática*, 34(1), 157-185. <https://doi.org/10.24844/em3401.06>
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Macmillan.
- Kieren, T. E. (1993). *Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding*. In Carpenter et al. (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, pp. 49–84. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Leocadio, P., Quintana, A., & Buden, I. (2024). El proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Santo Domingo. Desafíos. *Varona. Revista Científico Metodológica*, (79), http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1992-82382024000100008&lng=es&tlng=es.
- Martínez, G., Valle, M., García, J. & Dolores, C. (2019). ‘Las matemáticas son para ser aplicadas’: Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación matemática*, 31(1), 92-120. <https://doi.org/10.24844/em3101.04>
- Martínez, M., Pérez, A., & Apolinario, O. (2024). Explorando la geometría con GeoGebra: Estrategias para reforzar el aprendizaje en estudiantes de niveles intermedios. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 28(122), 62-72. <https://doi.org/10.47460/uct.v28i122.766>
- Miller, C., Heeren, V., & Hornsby, J. (2006). *Matemática: Razonamiento y aplicaciones*. Pearson Educación.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2011). *Diseño y evaluación de una secuencia de enseñanza basada en el enfoque de investigación de diseño*. *Revista Educación Matemática*, 23(3), 5–32.

- Montero, M., Cuenca, M., Campos, X., Arias, N & Arguello, M. (2025). El impacto de la Flipped classroom en el aprendizaje activo de los educandos: Un enfoque académico sobre sus etapas clave. Investigación DomiSoft. Ciencia Latina Internacional. DOI: https://doi.org/10.37811/cli_w1248
- Morales, J. F. C. (2010). *El Tangram: Un recurso educativo para trabajar la geometría en la educación primaria*.
- Mujica, A., & Márquez, M. (2022). Pensamiento matemático en la primera infancia: estrategias de enseñanza de las educadoras de párvulos. *Mendive. Revista de Educación*, 20(4), 1338-1352. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-76962022000401338&lng=es&tlng=es.
- Naciones Unidas. (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. <https://sdgs.un.org/2030agenda>
- Napa, L, & Villanueva, Y. (2026). El pensamiento crítico en estudiantes y sus implicancias en los contextos educativos: un estudio sistemático de la literatura. *Revista InveCom*, 6(1), e601114. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15679157>
- Navarro, J. (2008). *Forma y representación: Un análisis geométrico*. España: Akal bellas artes.
- Nesher, P. (1988). *Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions*. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 133–160). Lawrence Erlbaum.
- Ñañez, N., Flores, N. Milagros, R. & Matos, J. (2025). Integración de las TIC en las estrategias didácticas para la enseñanza de la matemática en educación superior. *Revista InveCom*, 5(3), e050334. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14219196>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2015). *Educación 2030: Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2017). *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259592>

- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2021). *Reimaginar juntos nuestros futuros: un nuevo contrato social para la educación*. UNESCO.
<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379707>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2018). *Social and emotional skills for student success*. OECD Publishing.
<https://www.oecd.org/education/global-competence/>
- Pérez, L. & Ramos, M. (2023). *Aprendizaje significativo de las operaciones con fracciones en estudiantes de básica primaria según opiniones de docentes*. Rev. Encuentro Educativo. 30 (2), 1-13.
- Pérez-González, L. A. (2019). Análisis de conducta de las habilidades de razonamiento. En I. Zepeda, J. A. Camacho, & E. Camacho (Eds.), *Aproximaciones al estudio del comportamiento y sus aplicaciones* (Vol. 2, pp. 208–233). Editorial Instituto de Investigación en Comportamiento.
- Piaget, J. (1970). *La psicología y la pedagogía*. Ariel.
- Planas, N. (2010). *Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática*. En *Actas del XIV Simposio SEIEM*, pp. 163–195. <https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf>
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42–46.
- Quintero, A. H. (2006). *Interpretaciones de las fracciones*.
- Ramírez, E., & Vanegas, L. M. (2018). *Fortalecimiento del pensamiento espacial y sistema geométrico en estudiantes de primer grado del colegio Carlos Vicente rey del municipio de Piedecuesta mediante una secuencia didáctica centrada en habilidades visuales*.
- Ramírez, M. (2023). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. David Block Sevilla. *Educación matemática*, 35(1), 279-282. <https://doi.org/10.24844/em3501.11>
- Rico, L. (1997). *La educación matemática: Fundamentos y aplicaciones*. Síntesis.
- Rimascca, I., Jara, G. & Contreras, C. (2025). *El juego como estrategia pedagógica en la enseñanza de los niños a partir de una revisión sistemática*. Revista InveCom, 5(4), E504108.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.15091433>
- Salas, Y. (2024). Aprendizaje y enseñanza de la competencia matemática en educación inicial: Una Revisión sistemática. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 8(35), 2646-2658. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v8i35.894>

- Servicio de Innovación Educativa de la UPM (2008). *Aprendizaje Basado en Problemas*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid. https://innovacioneducativa.upm.es/guias_pdi
- Simon, M. A. (1995). *Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Simon, M. A. (2014). *Hypothetical learning trajectories in mathematics education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272–275). Springer.
- Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305–329.
- Simon, M. A.; Kara, M.; Placa, N.; & Avitzur, A. (2018a). *Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 95–112.
- Simon, M. A.; Placa, N.; Kara, M.; & Avitzur, A. (2018b). *Empirically-based hypothetical learning trajectories for fraction concepts*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 188–200.
- Simon, M. A.; Tzur, R. (2004). *Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning*. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104.
- Simon, M. A.; Tzur, R.; Heinz, K.; & Kinzel, M. (2004). *Explicating a mechanism for conceptual learning*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305–329.
- Sternberg, R. J. (1996). *Cognitive Psychology*. Harcourt Brace College Publishers.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). *Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching*. *Educational Researcher*, 41(5), 147–156. <https://doi.org/10.3102/0013189X12442801>
- Tzur, R. (2007). *Fine grain assessment of students' mathematical understanding*. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 273–291.
- Tzur, R. (2019). *HLL: A lens on conceptual transition between mathematical "markers"*. En: Siemon, D.; Barkatsas, T.; Seah, R. (Eds.), *Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education*, pp. 56–74. Brill Sense.
- Tzur, R.; Simon, M. A. (2004). *Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(2), 287–304.
- Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 99-128. [0120-3916-rcde-73-00099.pdf](https://doi.org/10.11144/ryjce73-00099.pdf)

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). *The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage*. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9–35.
- Vargas, M., Guerrero, Y., Medina, E., & Salinas, M. (2024). La Implementación de la Tecnología para el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, 17(2), 286-295. <https://doi.org/10.37843/rted.v17i2.565>
- Velázquez, R. V., García, W. a. M., Zúñiga, K. M., & Landin, A. L. C. (2021). Metodología del aprendizaje basado en problemas aplicada en la enseñanza de las Matemáticas.
- Vrancken, T. (2018). La investigación basada en diseño como sustento de ambientes de aprendizaje para el aula de Matemática. 31 (1),779-786. Universidad de los Andes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Zambrano Muena, C. Y. (2018). *Influencia del Tangram en el desarrollo de capacidades Matemáticas en estudiantes del Cuarto Grado de Educación Primaria de la Institución Educativa N° 64661 “Villa Primavera” Yarinacocha 2017*.
- Zarzar, C. B. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. *Horizontes pedagógicos*, 15(1).
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America.

Anexos

Anexo 1.

<https://docs.google.com/document/d/1gwFmzjFXBNHUwSwSyYTiuFXjMQrkTyUv/edit?usp=s haring&ouid=111234292115355701836&rtpof=true&sd=true>

Anexo 2. Primera Fase



Anexo 3. Segunda fase



Anexo 4. Tercera Fase

