

PROBLEMAS
MAL PUESTOS EN SUB-ESPACIOS DE
SPLINES CÚBICOS

LUZ ANGELA FLÓREZ OLARTE

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga, septiembre

2005

PROBLEMAS
MAL PUESTOS EN SUB-ESPACIOS DE
SPLINES CÚBICOS

LUZ ANGELA FLÓREZ OLARTE

Monografía presentada como
requisito para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Henry Lamos Díaz

Ph. D. en Matemáticas

Director

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga, septiembre

2005

A mi familia que confió siempre en mis capacidades y me brindo
su apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Especialmente:

- A mis padres y hermanos por brindarme su apoyo, cariño y comprensión.
- A mis compañeros de la universidad por su amistad y colaboración.
- Al profesor Henry Lamos quien además de ser un excelente director, es una gran persona.

TITULO: PROBLEMAS MAL PUESTOS EN SUB-ESPACIOS DE SPLINES CÚBICOS *

AUTOR: LUZ ANGELA FLÓREZ OLARTE**

PALABRAS CLAVES: Operadores, Interpolación, Spline cúbico, spline B, suavización..

DESCRIPCIÓN

La interpolación de splines consiste en que un intervalo cerrado se puede dividir en una serie de subintervalos, y en cada subintervalo construir un polinomio diferente de aproximación.

En la interpolación por splines de orden uno hay desventajas pues no es suave en los extremos del subintervalo. Y en los splines de grado dos el problema se presenta cuando hay que especificar las condiciones referentes a la derivada de la interpolante en los extremos de intervalo cerrado pues no hay suficientes constantes. Por tanto la aproximación polinómica más común utiliza polinomios cúbicos entre cada par consecutivo de nodos y recibe el nombre de Splines cúbicos; estos polinomios tienen más constantes, así, ofreciendo suficiente flexibilidad para garantizar que la interpolación no solo sea suave y continuamente diferenciable en un intervalo cerrado, sino que además tenga una segunda derivada continua en el intervalo.

En el presente trabajo se estudiarán primero las funciones splines, después se hizo un estudio de un sistema de funciones splines a partir de las cuales se pueden obtener todas las demás funciones splines mediante combinaciones lineales y por tanto son llamados Splines-B. Cuando no se conocen los datos de manera exacta sino con algún ruido, se construye una función que pase cerca de estos valores dados más suavemente que la interpolante

*Tesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Director: Henry Lamos Díaz.

TITLE: MISPROPOSED PROBLEMS IN THE SUB-SPACES OF CUBIC SPLINES *

AUTHOR: LUZ ANGELA FLÓREZ OLARTE**

KEY WORDS: operators, interpolation, cubicspline, spline B, softening.. **DESCRIPTION**

The interpolation of splines is based on that an interval can be divided in a chain of subintervals, and in each subinterval to build a different polynomial of approximation.

In the interpolation for splines of order 1, there are disadvantages because it is not soft in the subinterval extremes. and in the splines level 2, the problem appears when you have to specify the conditions relating to the derivative of the interpolated in the closed interval extremes because there is not enough constants. therefore the most common polynomial approximation uses cubic polynomial between each consecutive pair of nodes and it is called cubic splines; these polynomials have more constants, so, giving enough flexibility to guarantee that not only the interpolation will be soft and continuously differentiated in a closed interval, but also it will have a second continuous derivative in the interval.

In the current work was studied the spline functions, after a study of spline function system was done starting from the which ones you can obtain all the other spline functions by means of linear combinations and therefore they are called splines B.

*Tesis

** Faculty of Sciences. Mathematics School.

Director: Henry Lamos Díaz.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	I
1. PRELIMINARES.	1
2. INTERPOLACIÓN	21
2.1. Interpolación de splines	22
2.2. Splines de grado 0	22
2.3. Splines de grado 1	24
2.4. Splines de grado 3	25
2.5. Propiedades de los splines cúbicos	31
2.6. Splines naturales de orden superior	34
2.7. Splines-B :Teoría básica	37
2.8. Splines-B de grado 0	37
2.9. Splines-B de grado 1	40
2.10. Propiedades de los splines-B	41
2.11. La derivada y la integral de los splines-B	44
3. INTERPOLACIÓN CÚBICA A TRAMOS CON SUAVIZAMIENTO	53
Bibliografía	69

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Un Spline de grado cero	23
2.2. Spline de grado uno	24
2.3. Gráfica del Ejemplo 2.4.1	30
2.4. Gráfica del Ejemplo 2.4.2	31
2.5. Spline-B B_i^0 , $t_i = -1$; $t_{i+1} = 0$	37
2.6. Un Spline-B de grado cero, $t_i = -1$; $t_{i+1} = 3$	38
2.7. $t_i = 1$; $t_{i+1} = 2$	39
2.8. Un Spline-B de grado 1 con $t_i = -1$, $t_{i+2} = 1$	40
2.9. $t_0 = 1$, $t_i = 2$, $t_{i+1} = 3$	51

INTRODUCCIÓN

El estudio de las diferentes ramas de la ciencia esta basado en las propiedades de los objetos, así el investigador modela problemas causa - efecto, interpolando datos discretos y aproximando la solución por medio de funciones conocidas.

Sin embargo en muchas situaciones no se puede encontrar ciertas características, los valores no se conocen de manera exacta, sino con algún error, en este caso no tiene sentido construir una función de interpolación que tome estos valores. Mas bien construimos una función que pase cerca de estos, más suavemente, que la interpolante. Así el investigador construye un modelo matemático donde estas aparezcan. Aquí, el problema consiste en determinar las causas conocidos los efectos, a este tipo de problemas se les llama problemas inversos.

En el presente trabajo se ampliara parcialmente el artículo regularización de los problema mal puestos en subespacios de splines cúbicos de los profesores Humberto Muñoz B. e Ilia Mikhailov. Con los conceptos necesarios para así poder ser leído en forma más sencilla, también se implementaran en matlab los algoritmos para realizar experimentos numéricos.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES.

Este capítulo esta dedicado a la presentación de algunos conceptos o nociones básicos que usaremos en el presente trabajo, se utilizaran algunos teoremas que ya estan demostrados en otras monografias.

Espacio normado y espacio de Banach

Definición 1.1. Un espacio normado X es un espacio vectorial X ; junto con una función de X en \mathbb{R} que llamaremos norma, se denota por $\|x\|$ y cumple las siguientes condiciones:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0;$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Aquí tomamos x, y vectores arbitrarios en X y α un escalar.

Una norma en X define una métrica d en X la cual esta dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo en la metrica definida por la norma).

Ejemplo 1.1. El espacio Euclidiano \mathbb{R}^n en donde la norma esta definida por:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$$

con $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, es un espacio de Banach.

Espacios con producto interno

Sea X un espacio vectorial sobre un campo K un producto interno en x es una función de $X \times X$ en K tal que para todo par de vectores x y y hay un escalar asociado el cual se escribe $\langle x, y \rangle$, y es llamado el producto interno de x y y ; tal que para todo x, y, z vectores y α escalar nosotros tenemos:

$$(IP1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle;$$

$$(IP2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle;$$

$$(IP3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$$

$$(IP4) \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Espacio de Hilbert.

Un espacio vectorial X con producto interno definido en X se llama espacio prehilbertiano.

Veamos algunos ejemplos de conjuntos prehilbertianos:

Ejemplo 1.2. En K^n espacio vectorial, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de K , la expresión $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \overline{y_j}$ define un producto interno, que se llama producto interno usual en K^n .

Un espacio prehilbertiano completo X se llama espacio de Hilbert. En otras palabras, que un espacio prehilbertiano sea un espacio de Hilbert significa, que como espacio normado es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.3. En el espacio vectorial $C[a, b]$, la expresión $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$, donde $f, g \in C[a, b]$, define un producto interno. Es importante tener en cuenta que una función f es de valores complejos sobre el intervalo (real) $[a, b]$ si $f(t)$ se puede expresar como

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)i$ para $t \in [a, b]$, donde f_1, f_2 son funciones de valores reales (la función de valores complejos f es continua si f_1 y f_2 son continuas).

Ejemplo 1.4. Cada uno de los siguientes ejemplos son espacios de Hilbert:

1. El espacio \mathbb{R}^n con producto interno definido por $\langle x, y \rangle = \varepsilon_1\eta_1 + \dots + \varepsilon_n\eta_n$ en donde $x = (\varepsilon_j) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ y $y = (\eta_j) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.
2. $L^2([a, b])$ con el producto interno estandar.

En donde $L^2([a, b])$ es el espacio vectorial de todas las funciones reales continuas evaluadas en $[a, b]$ y la norma esta definida por:

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. l^2 con el producto interno estandar. En donde cada elemento en el espacio l^2 es una sucesión $x = (\varepsilon_i) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ de números tales que: $|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2 + \dots$ es convergente; es decir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^2 < \infty$$

y la métrica esta definida por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Operadores lineales diferenciales

En esta parte estudiaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x). \tag{1.1}$$

Supongamos que a_0, a_1, a_2 y b son funciones en un intervalo I .

La ecuación (1.1) se puede escribir en forma canónica teniendo $a_2(x)$ diferente de 0

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x), \quad (1.2)$$

donde $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$, y $g(x) = b(x)/a_2(x)$, son continuas en I .

Y la ecuación homogénea asociada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (1.3)$$

esta ecuación se escribir también:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (1.4)$$

Dada cualquier función y con segunda derivada continua en el intervalo I en (1.4) genera una nueva función que denotamos por $L[y]$. Esto es:

$$L[y] = y'' + py' + qy. \quad (1.5)$$

Lo que aquí hemos hecho es asociar a la función y , la función $L[y]$.

Decimos que L es un operador diferencial; donde la imagen de una función y bajo el operador L es la función $L[y]$

Ejemplo 1.5. Sean $p(x) = x$ y $q(x) = x - 1$. Entonces:

$$L[y] = y''(x) + xy'(x) + (x - 1)y(x).$$

Si $y_1(x) = x^3$,

$$L[y_1] = 6x + x(3x^2) + (x - 1)x^3 = x^4 + 2x^3 + 6x.$$

Así por medio de L la función x^3 se asocia con la función $x^4 + 2x^3 + 6x$.

Linealidad del operador diferencial

Sea

$$L[y] = y'' + py' + qy.$$

Si y, y_1 y y_2 son cualesquiera funciones dos veces diferenciales en el intervalo I y c una constante, entonces:

$$(i) L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2];$$

$$(ii) L[cy] = cL[y].$$

Consideremos el siguiente operador L definido en el espacio

$$H_0 = \{y(x)/y'(x) \in C^2[a, b] \text{ y}$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0,$$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0\}$$

Luego $Ly \equiv (p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$, $y \in H_0$, $p \in C^1[a, b]$; $q \in C[a, b]$; $p > 0$ y $q \geq 0$.

Veamos algunas propiedades del operador L .

Teorema 1.1. Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces.

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(pW[u, v]), \quad (1.6)$$

donde $W[u, v] = uv' - vu'$ es el wronskiano de u y v y $L \in H_0$.

Demostración. Usamos la regla del producto para la derivación y sumamos y restamos $pu'v'$ para tener

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u[(pv')' + qv] - v[(pu')' + qu] \\ &= u(pv')' + quv - v(pu')' - quv \\ &= u(pv')' + u'(pv') - v'(pu') - v(pu')' \\ &= [u(pu')] - [v(pu')] \\ &= [p(uv' - vu)]' \\ &= \frac{d}{dx}[pW[u, v]]. \end{aligned}$$

□

Al integrar la identidad (1.6) obtenemos la ecuación llamada función de Green. Veamos el siguiente corolario.

Corolario 1.0.1. Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = (pW[u, v])(x) \Big|_a^b. \quad (1.7)$$

Si además u y v son funciones del espacio H_0 , la función de Green se simplifica a

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = 0. \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) asume una forma útil al ser expresada en términos de un producto interno. Si hacemos

$$(f, g) = \int_a^b f(x).g(x)dx, \quad (1.9)$$

entonces (f, g) es un producto interno en el conjunto de funciones con valores reales definidos en $[a, b]$; Con esta notación, podemos escribir (1.8) como:

$$(u, L[v]) = (L[u], v). \quad (1.10)$$

Veamos la siguiente definición que nos permite introducir el concepto de operador adjunto.

Definición 1.2. Sea L un operador diferencial dado por:

$$L[y] = A_2y'' + A_1y' + A_0y \quad (1.11)$$

en donde $A_2, A_1, A_0 \in C[a, b]$.

Podemos introducir el concepto de operador adjunto formal diferencial L^+ , asociado a L , para esto formemos el producto (g, Ly) e integremos por partes, el resultado puede expresarse como (g, Ly) :

$$\int_a^b gLy dx = [\dots]_a^b + \int_a^b yL^+g dx. \quad (1.12)$$

En este cálculo, las funciones g y y son arbitrarias; ellas no son necesariamente una solución de la ecuación diferencial (1.4). Para ver el procedimiento, consideremos la ecuación (1.11) del operador

$$L[y] = A_2(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + A_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + A_0(x)y(x)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_a^b gLy dx &= \int_a^b (gA_2y'' + gA_1y' + gA_0y) dx \\ &= (gA_2y' + gA_1y)|_a^b + \int_a^b [-(gA_2)'y' - (gA_1)'y + gA_0y] dx \\ &= [gA_2y' + gA_1y - (gA_2)'y]_a^b + \int_a^b [(gA_2)''y - (gA_1)'y + gA_0y] dx \\ &= [A_2gy' - (A_2g)'y + A_1gy]_a^b + \int_a^b y[(A_2g)'' - (A_1g)' + A_0g] dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comparando (1.12) con (1.13), podemos ver que

$$L^+g = (A_2g)'' - (A_1g)' + A_0g. \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.6. Determinar el adjunto formal de

$$L[y](x) = x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x). \quad (1.15)$$

Solución. En este caso, $A_2(x) = x^2$, $A_1(x) = x$ y $A_0(x) = 4$.

Al sustituir en (1.14) tenemos

$$L^+[y] =: (A_2y)'' - (A_1y)' + A_0y; \quad (1.16)$$

y

$$\begin{aligned} (x^2y(x))'' &= 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x) \\ (xy(x))' &= y(x) + xy'(x) \end{aligned}$$

reemplazando en (1.16)

$$\begin{aligned} L^+[y](x) &= [x^2y(x)]'' - [xy(x)]' + 4y(x) \\ &= x^2y''(x) + 3xy'(x) + 5y(x). \end{aligned}$$

Sea L el operador diferencial definido en (1.11) y sea L^+ su adjunto formal. Entonces

$$\int_a^b (L[u]v - uL^+[v])(x)dx = p(u, v)(x) \Big|_a^b. \quad (1.17)$$

En donde $p(u, v)(x)$ se define como

$$p(u, v)(x) = uA_1v - u(A_2v)' + u'A_2v.$$

De la definición de producto interior

$$(f, g) = \int_a^b f(x).g(x)dx,$$

la fórmula de Green se convierte en

$$(L[u], v) = (u, L^+[v]) + p(u, v) \Big|_a^b.$$

Aunque los operadores L y L^+ se pueden aplicar a funciones y que tengan segunda derivada continua en $[a, b]$ es decir ($y \in C^2[a, b]$); nos interesa aplicar L sólo a aquellas funciones

que pertenezcan a H_0 . Por ahora consideremos que dominio de L es H_0 , $D(L) = H_0$. Por tanto L estará definido en H_0 y veamos cual será el $D(L^+)$; observemos por ahora que $D(L^+)$ es un subespacio de $C^2[a, b]$ Dado el operador diferencial lineal L con dominio $D(L) = H_0$ y restringiendo el adjunto formal L^+ a un dominio $D(L^+)$ de modo que:

$$(L[u], v) = (u, L^+[v]) \quad (1.18)$$

se cumpla para toda $u \in D(L) = H_0$ y toda $v \in D(L^+)$. Eligiendo $D(L^+)$ como el conjunto más grande posible de funciones en $C^2[a, b]$ para el que se cumpla (1.18). Con esta elección de $D(L^+)$, decimos que L^+ es el operador adjunto de L .

Gracias a la fórmula de Green, el adjunto será simplemente la restricción de L^+ a una clase adecuada de funciones v de modo que.

$$p(u, v) \Big|_a^b = 0, \text{ para } u \in D(L) \text{ y } v \in D(L^+). \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.7. Determinar el operador adjunto de

$$L[y] = y'' + 2y' + 2y, \quad (1.20)$$

donde el dominio de L consta de aquellas funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[0, \pi]$ y satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\pi) = 0 \\ L[y] &= y'' + 2y' + 2y. \end{aligned}$$

Solución. Primero hallamos $L^+[v]$, en este caso $A_2 = 1$, $A_1 = A_0 = 2$. Al sustituir en la fórmula (1.14) $L^+[y] = (A_2y)'' - (A_1y)' + A_0y$ tenemos:

$$L^+[v] = v'' - 2v' + 2v.$$

Ahora determinamos el dominio de L^+ . Primero observamos que v'' debe ser continua en $[0, \pi]$. Además para que se cumpla $(L[u], v) = (u, L[v])$ (1.18), debemos tener

$$p(u, v)|_0^\pi = 0, \quad (1.21)$$

para toda u en $D(L)$ y $v \in D(L^+)$.

La fórmula para $p(u, v) = uA_1v - u(A_2v)' + u'A_2v$, con $A_2 = 1$ y $A_1 = 2$ implican sobre la condición $p(u, v)|_0^\pi = 0$ que

$$\{2u(\pi)v(\pi) - u(\pi)v'(\pi) + u'(\pi)v(\pi)\} - \{2u(0)v(0) - u(0)v'(0) + u'(0)v(0)\} = 0.$$

Como u esta en el $D(L)$, sabemos que $u(0) = u(\pi) = 0$. Así la ecuación anterior se simplifica a

$$u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0) = 0 \quad (1.22)$$

$u'(\pi)$ y $u'(0)$ pueden tomar cualquier valor, por lo que debemos tener $v(0) = v(\pi) = 0$ para que se cumpla $u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0) = 0$ para toda $u \in D(L)$. Por lo tanto, el dominio de L^+ consta de aquellas funciones v que tienen segundas derivadas continuas en $[0, \pi]$ y satisfacen las condiciones de frontera

$$v(0) = v(\pi) = 0.$$

Un problema de valor de frontera

Un problema de valor de frontera muy usado en la ciencia es el problema de Sturm-Liouville; veamos en que consiste: Hallar la función $y(x)$ que satisface

$$L[y](x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = -f(x); a \leq x \leq b \quad (1.23)$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad (1.24)$$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \quad (1.25)$$

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0; \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \quad (1.26)$$

donde $p(x), q(x) \in C[a, b]$ con $p(x) > 0$ en $[a, b]$. Supongamos que $f(x) \in C[a, b]$.

El siguiente teorema nos permite hallar la forma explícita de la solución del problema (1.23)-(1.25).

Teorema 1.2. Sea $G(x, s)$ la función de Green para el problema (1.23)-(1.25) entonces la función

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds, \quad (1.27)$$

es solución del problema (1.23)-(1.25); para cualquier función $f(x) \in C[a, b]$.

Demostración. Utilizando el método de variación de parámetros se deduce $y(x)$ de modo que satisfaga (1.23). Por lo tanto basta mostrar que satisface (1.24) (1.25), veamos esto;

$$-f(x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y. \quad (1.28)$$

Escribamos (1.28) en forma canónica:

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y = \frac{-f(x)}{p(x)}. \quad (1.29)$$

Una solución particular de (1.29) es :

$$y(x) = c_1(x)z_1(x) + c_2(x)z_2(x) \quad (1.30)$$

con

$$c_1'(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \frac{z_2(x)}{W[z_1z_2](x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{-f(x)}{p(x)} \frac{z_1(x)}{W[z_1 z_2](x)}$$

$W[z_1 z_2]$ es el wronskiano de las funciones $z_1(x)$, $z_2(x)$; donde $z_1(x)$, $z_2(x)$ son soluciones de la ecuación $L(y) = 0$; $z_1(x)$ satisface (1.24) y $z_2(x)$ satisface (1.25). Integrando $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$ de x a b y de a a x respectivamente; haciendo $x = s$.

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{p(s)W[z_1 z_2](s)} ds$$

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{p(s)W[z_1 z_2](s)} ds.$$

Al sustituir en (1.30) obtenemos la siguiente solución de (1.23)

$$y(x) = \left[\int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{p(s)W[z_1 z_2](s)} ds \right] z_1(x) + \left[\int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{p(s)W[z_1 z_2](s)} ds \right] z_2(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds. \quad (1.31)$$

En donde

$$G(x, s) \equiv \begin{cases} \frac{-z_1(s)z_2(x)}{p(s)W[z_1 z_2](s)}, & a \leq s \leq x \\ \frac{-z_1(x)z_2(s)}{p(s)W[z_1 z_2](s)} & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (1.32)$$

consideremos la expresión que se encuentra en el denominador de (1.32); como z_1 y z_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L[y] = 0$, entonces podemos hacer:

$$p(x)W[z_1, z_2](x) = C, \quad x \in [a, b].$$

Demostremos que la función dada por (1.27) satisface la condición (1.24) para esto encontremos $y'(x)$:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= z_1'(x) \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + \frac{z_1(s)z_2(x)f(x)}{C} + \\
&+ z_2'(x) \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{C} ds - \frac{z_2(s)z_1(x)f(x)}{C} = \\
&= z_1'(x) \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + z_2'(x) \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{C} ds
\end{aligned} \tag{1.33}$$

entonces

$$\begin{aligned}
a_1y(a) + a_2y'(a) &= a_1 \left[z_1(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + z_2(a) \int_a^a \frac{-z_1(s)f(s)}{C} ds \right] + \\
&+ a_2z_1'(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + z_2'(a) \int_a^a \frac{-z_1(s)f(s)}{C} ds \\
&= a_1z_1(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds + a_2z_1'(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds = \\
&= [a_1z_1(a) + a_2z_1'(a)] \left[\int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds \right]
\end{aligned} \tag{1.34}$$

como z_1 satisface (1.24) entonces (1.34) nos queda:

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = [a_1z_1(a) + a_2z_1'(a)] \left[\int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{C} ds \right] = 0. \tag{1.35}$$

Análogamente se demuestra que $y(x)$ satisface la ecuación (1.25) con esto queda verificado

el teorema. □

Ejemplo 1.8. Determinar la función de Green $G(x, s)$ para el problema con valores en la frontera

$$y''(x) = -f(x); \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (1.36)$$

Usar la función de Green para obtener la solución cuando $f(x) = x$

Solución: Una solución al problema homogéneo $y = 0$ es $y_h = Ax + B$ de modo que z_1 y z_2 deben tener esta forma. Para obtener $z_1(x)$ elegimos A y B de tal forma que $z_1(0) = 0$ entonces $z_1(x) = Ax$; como A es arbitrario hacemos $A = 1$, luego $z_1(x) = x$. Para obtener $z_2(x)$ elegimos A y B de tal forma que $z_2(\pi) = 0$ entonces $z_2(\pi) = A\pi + B$ luego $A\pi = -B$, hacemos $A = -1$, por lo tanto $\pi = B$; concluimos que $z_2(x) = \pi - x$.

Entonces $z_1(x) = x$; $z_2(x) = \pi - x$.

$$W[z_1; z_2] = -1(x) - (\pi - x)1 = -x - \pi + x = -\pi. \quad (1.37)$$

por lo tanto $p(x)W[z_1, z_2](x) = -\pi$. Concluimos que la función de Green para nuestro problema es:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{s(\pi - x)}{\pi}; & 0 \leq s \leq x \\ \frac{x(\pi - s)}{\pi} & x \leq s \leq \pi. \end{cases} \quad (1.38)$$

La solución esta dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x, s)f(s)ds = \int_0^x \frac{s(\pi - x)}{\pi} sds + \int_x^\pi \frac{x(\pi - s)}{\pi} sds \\ y(x) &= \frac{x(\pi^2 - x^2)}{6}. \end{aligned}$$

Propiedades de la función de Green

Sea $G(x, s)$ la función de Green definida por:

$$G(x, s) \equiv \begin{cases} \frac{-z_1 z_2(x)}{C}, & a \leq s \leq x \\ \frac{-z_x z_2(s)}{C} & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (1.39)$$

para el problema (1.23) con valores en la frontera (1.24) - (1.25). Entonces:

1. $G(x, s)$ es continua en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Para s fija, las derivadas parciales $\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)$ y $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, s)$ son funciones continuas de x , para $x \neq s$.
2. En $x = s$, la derivada parcial $\frac{\partial G}{\partial x}$ tiene una discontinuidad de salto:

$$\lim_{x \rightarrow s^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) - \lim_{x \rightarrow s^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) = \frac{-1}{p(s)}. \quad (1.40)$$

3. Para cada s fija, la función $G(x, s)$ satisface el problema homogéneo correspondiente para $x \neq s$; es decir:

$$L[G(\cdot, s)](x) = 0, \quad (1.41)$$

para $x \neq s$;

$$a_1 G(a, s) + a_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a, s) = 0. \quad (1.42)$$

$$b_1 G(b, s) + b_2 \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) = 0. \quad (1.43)$$

4. Sólo existe una función que satisface las propiedades (1) a (3).
5. $G(x, s)$ es simétrica; es decir,

$$G(x, s) = G(s, x).$$

La función de Green también se puede caracterizar mediante la función delta de Dirac. Suponiendo que existe una función $G(x, s)$ tal que:

Donde la función delta de Dirac $\delta(t)$ se caracteriza por las siguientes dos propiedades :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

para cualquier función $f(t)$ que sea continua en un intervalo abierto que contiene a $t = 0$.

Al recorrer el argumento de $\delta(t)$, tenemos que $\delta(t - a) = 0$, cuando $t \neq a$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a) \quad (1.45)$$

para cualquier función $f(t)$ que sea continua en un intervalo abierto que contiene a $t = a$.

Suponiendo que existe una función $G(x, s)$ tal que:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds \quad (1.46)$$

sea la solución de (1.23) - (1.25), entonces podemos operar con L a ambos lados, podemos intercambiar la integración y la derivación para tener

$$L[y](x) = \int_a^b L[G(\cdot, s)](x)f(s)ds = -f(x). \quad (1.47)$$

Es decir $L[G(\cdot, s)](x)$ debe actuar como la delta de Dirac $-\delta(x - s)$. Además $G(\cdot, s)$ debe satisfacer las condiciones de frontera (1.24) y (1.25). Si definimos la $G(x, s)$ como la solución de

$$\begin{aligned} L[G(\cdot, s)](x) &= -\delta(x - s), \\ a_1G(a, s) + a_2\frac{\partial G}{\partial x}(a, s) &= 0 \end{aligned}$$

$$b_1G(b, s) + b_2\frac{\partial G}{\partial x}(b, s) = 0.$$

Generalización de la función de Green

Consideremos en el segmento $[a, b]$ la ecuación diferencial de orden n , ($n \geq 1$).

$$a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x) = f(x). \quad (1.48)$$

Con condiciones de frontera :

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \dots, y^{(k-1)}(a) = 0 \quad (1.49)$$

$$y(b) = 0, \quad y'(b) = 0, \dots, y^{(m-1)}(b) = 0. \quad (1.50)$$

Donde los coeficientes $a_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n$ son funciones continuas dadas en $[a, b]$; $|a_n(x)| > 0$. Y los números k y m satisfacen las condiciones: $k \geq 0$, $m \geq 0$, $k + m = n$.

Definición 1.3. Se llama función de Green para el problema de frontera (1.48) -(1.50) a una función $G(x, s)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $G(x, s)$ es continua y tiene derivadas continuas respecto a x hasta de orden $n - 2$, inclusive para todos los valores de x y s que pertenecen a $[a, b]$.
2. Para cualquier $s \in [a, b]$ la función $G(x, s)$ tiene derivadas continuas de orden $(n - 1)$ y de orden n respecto a x en cada uno de los intervalos (a, s) y (s, b) , además:

$$\lim_{x \rightarrow s^+} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, s) - \lim_{x \rightarrow s^-} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, s) = -\frac{1}{a_n(s)}. \quad (1.51)$$

3. En cada uno de los intervalos $[a, s)$ y $(s, b]$ la función $G(x, s)$ considerada como función de x satisface la ecuación (1.48) con $f(x) = 0$ y las condiciones de frontera (1.49) y (1.50).

Teorema 1.3. Si el problema de frontera (1.48) - (1.50) con $f(x) = 0$ para $x \in [a, b]$ tiene solo la solución nula, entonces la función de Green para el problema (1.48)-(1.50) existe.

En forma analoga al teorema (1.27) tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4. Si el problema de valor de frontera (1.48)-(1.50) con $f(x) = 0$ para $x \in [a, b]$ tiene solo solución nula, entonces para cualquier $f(x) \in [a, b]$ existe una única solución del problema (1.48)-(1.50):

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds. \quad (1.52)$$

Ejemplo 1.9.

$$x^3y'' + 3x^2y' + xy = 0 \quad (1.53)$$

$$y(1) = 0 \quad (1.54)$$

$$y(2) + 2y'(2) = 0. \quad (1.55)$$

De la ecuación diferencial $x^3G_{xx} + 3x^2G_x + xG = 0$, $1 \leq x \leq 2$, $x \neq s$

Encontramos

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \ln x}{x} & \text{si } 1 \leq x < s \\ \frac{c_3}{x} + \frac{c_4 \ln x}{x} & \text{si } s \leq x < 2 \end{cases} \quad (1.56)$$

la función $G(x, s)$ debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$G(1, s) = \frac{c_1}{1} + \frac{c_2 \ln 1}{1} \quad (1.57)$$

$$G(2, s) = \frac{c_3}{2} + \frac{c_4 \ln 2}{2} \quad (1.58)$$

$$2G'(2, s) = -\frac{c_3}{2} + c_4 \left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) \quad (1.59)$$

$$\frac{c_4}{2} = 0 \quad (1.60)$$

$$c_1 = 0. \quad (1.61)$$

Ahora la condición de continuidad en $x = s$

$$c_2 \ln s = c_3 \quad (1.62)$$

y la condición de salto:

$$-\frac{c_3}{s^2} - c_2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\ln s}{s^2} \right) = \frac{1}{s^3}$$

Resolviendo el sistema tenemos

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{xs} & \text{si } 1 \leq x < s \\ -\frac{\ln s}{xs} & \text{si } s \leq x < 2. \end{cases}$$

Ejemplo 1.10. Determinemos la función de Green $G(x, s)$ para la ecuación de cuarto orden $y^{(4)} = f(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Sea

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 & \text{si } 0 \leq x < s \\ c_5 x^3 + c_6 x^2 + c_7 x + c_8 & \text{si } s \leq x < b \end{cases}$$

y las condiciones de frontera: $y(0) = 0$; $y(b) = 0$; $y''(0) = 0$ $y''(b) = 0$ la función $G(x, s)$ debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$G(0, s) = c_1 0^3 + c_2 0^2 + c_3 * 0 + c_4 = 0$$

$$G''(0, s) = 6c_1 0 + 2c_2 = 0$$

$$G(x, \pi) = c_5 \pi^3 + c_6 \pi^2 + c_7 \pi + c_8 = 0$$

$$G''(x, \pi) = 6c_5 \pi + 2c_6 = 0,$$

ahora la condición de continuidad en

$$c_1 s^3 + c_3 s = c_5 s^3 + c_6 s^2 + c_7 s + c_8$$

$$3c_1 s^2 + c_3 = 3c_5 s^2 + 2c_6 s + c_7$$

$$6c_1s = 6c_5s + 2c_6$$

y la condición de salto

$$6c_1 - 6c_5 = -1.$$

Resolviendo las ecuaciones llegamos a

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{-\pi + s}{6\pi}\right)x^3 + \left(\frac{-3s^2\pi + 2\pi^2s + s^3}{6\pi}\right)x & \text{si } 0 \leq x < s \\ \left(\frac{x}{6\pi}\right)s^3 + \left(\frac{-x}{2}\right)s^2 + \left(\frac{2\pi x + x^3}{6\pi}\right)s + \left(\frac{-x^3}{6}\right) & \text{si } s \leq x < \pi \end{cases}$$

y haciendo $x = s$ tenemos

$$\frac{-\pi x^3 + x^4}{6\pi} + \frac{-3x^2\pi + 2x\pi^2 + x^4}{6\pi} = \frac{x^4}{6\pi} - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{2\pi x^2 + x^4}{6\pi}\right) + \left(\frac{-x^3}{6}\right)$$

Lo que significa que la función en $x = s$ es continua.

Tomemos las condiciones de frontera

$$G''(0) = 0$$

$$G''(\pi) = 0$$

entonces

$$G''(0) = 6 \left(0 \left(\frac{-\pi + s}{6\pi} \right) \right) = 0$$

$$G''(\pi) = 6\pi \left(\frac{x}{6\pi} \right) + 2 \left(\frac{-x}{2} \right) = 0$$

las cuales son las propiedades de los splines naturales por lo tanto esta solución es un spline cúbico natural que definiremos mas adelante .

CAPÍTULO 2

INTERPOLACIÓN

Dos de las tareas importantes en la computación científica son la interpolación de datos discretos y la aproximación de la solución por medio de funciones conocidas.

El problema lo podemos definir de la siguiente manera: asumamos que tenemos un conjunto de datos sobre un conjunto discreto de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con sus correspondientes valores $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ entonces nosotros construimos una función $P_n(x)$ que pase a través de los valores $(x_i, f(x_i))$ esto es: $f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$. Donde $P_n(x)$ se define como el polinomio de interpolación; los coeficientes a_k son los desconocidos. Los polinomios $\phi_k(x)$ se acostumbra a llamarlos polinomios bases y su elección es muy importante para obtener una aproximación eficiente. Por ejemplo, asumamos que los $\phi_k(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n$ entonces tenemos que en los puntos $(x_i, f_i), f_i = f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n$ $i = 0, \dots, n$. Obteniendo el sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$\forall a_i = f_i$

Donde V es llamada la matriz de Vondermande. Esta matriz es no singular debido a que asumimos que los $\{x_0, \dots, x_n\}$ son distintos, por lo tanto existe un único polinomio de

orden n que representa el conjunto de datos. Otro polinomio de interpolación que usamos son los splines. A continuación daremos una discusión ante todo pedagógica.

2.1. Interpolación de splines

Dado un intervalo $[a, b]$, y en él un conjunto de nodos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, en donde se dan los valores $\{f_i\}_{i=0}^n$ de la función $f(x)$ definida en $[a, b]$. Supongamos que se ha fijado un entero $k \geq 0$. Una función Spline de grado k con nodos en t_0, t_1, \dots, t_n es una función S que satisface las siguientes condiciones:

1. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ la función $S(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que k .
2. La función $S(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden $(k - 1)$ en el intervalo $[t_0, t_n]$.

Por lo anterior la función S es un polinomio continuo a tramos de grado menor o igual que k el cual tiene derivadas continuas hasta de orden $(k - 1)$.

2.2. Splines de grado 0

Definición 2.2.1. Los splines de grado 0 son funciones constantes a tramos. Una forma explícita de presentar un spline de grado 0 es la siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 & \text{si } x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = c_1 & \text{si } x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} & \text{si } x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

Los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ no se intersecan entre sí y por ello no surge ambigüedad al definir la función en los nodos.

Ejemplo 2.2.1. Supongamos que se dan los valores de cierta función $f(x)$ en forma de tabla:

x	0	1	2	3	4	5
f	1	-0.5	4	6	-3	2

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -0,5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ -3 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 2 & \text{si } 5 \leq x < 6 \end{cases}$$

la siguiente figura muestra un spline de grado 0 con seis nodos.

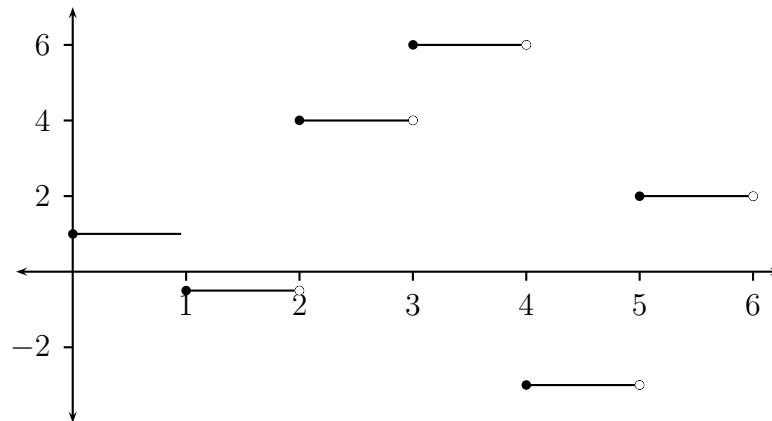


Figura 2.1: Un Spline de grado cero

2.3. Splines de grado 1

Definición 2.3.1. una función de spline de grado uno se puede definir de la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0 & \text{si } x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = a_1x + b_1 & \text{si } x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} & \text{si } x \in [t_{n-1}, t_n). \end{cases}$$

Si se han dado los nodos t_i y los coeficientes a_i, b_i , el valor de S se obtiene identificando primero el subintervalo $[t_i, t_{i+1})$ que contiene a x . La función spline se puede definir sobre toda la recta real. Por conveniencia podemos utilizar la expresión $a_0x + b_0$ sobre el intervalo $(-\infty, t_1)$ y la expresión $a_{n-1}x + b_{n-1}$ sobre el intervalo $[t_{n-1}, \infty)$. La función S es continua, y por ello los polinomios que la integran se unen en los nodos; es decir, $S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1})$.

Ejemplo 2.3.1.

$$y(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -x + 7 & \text{si } 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

Su gráfica es:

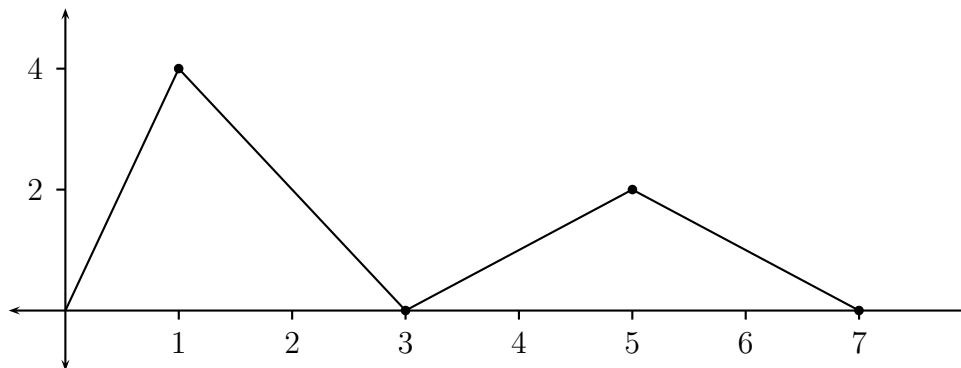


Figura 2.2: Spline de grado uno

2.4. Splines de grado 3

Los splines de orden cúbico son ampliamente usados en el análisis numérico; y $S(x)$ es llamado un spline cúbico si satisface:

1. $S(x) \in C^2[a, b]$.
2. En cada segmento $[t_i, t_{i+1}]$, la función $S(x)$ es un polinomio de grado 3

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{j=0}^3 a_j^i (t_i - x)^j; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3. En los nodos de la región $\{t_i\}_{i=0}^n$, se cumple $S(t_i) = f_i$ donde $i = 0, 1, \dots, n$.
4. $S''(x)$ satisface las condiciones de frontera $S''(a) = S''(b) = 0$.

Los polinomios, S_{i-1}, S_i interpolan el mismo valor en el punto t_i y por ello

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i), \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

Esto hace que S sea continuo automáticamente. Además, se supone que S' y S'' son continuos y S'' lineal en cada segmento (t_{i-1}, t_i) . Mostremos que la función propuesta puede ser encontrada de manera única. Para esto emplearemos las condiciones dadas anteriormente.

Deducimos ahora la ecuación para $S_i(x)$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Primero definimos los números $m_i = S''(t_i)$ obviamente los m_i existen para $0 \leq i \leq n$ y satisfacen:

$$\lim_{x \rightarrow t_i^+} S''(x) = z_i = \lim_{x \rightarrow t_i^-} S''(x) \text{ donde } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Debido a que S'' es continua en cada nodo interior. Ya que S_i es un polinomio cúbico en $[t_i, t_{i+1}]$, $S''_i(x)$ es una función lineal que satisface:

$$S''(t_{i-1}) = m_{i-1} \text{ y } S''(t_i) = m_i$$

y por lo tanto corresponde a la línea recta entre m_{i-1} y m_i

$$S''(x) = m_{i-1} \frac{t_i - x}{h_i} + m_i \frac{x - t_{i-1}}{h_i}, \quad (2.1)$$

donde

$$h_i = t_{i+1} - t_i; \quad y \quad t_{i-1} < x < t_i.$$

Si integramos dos veces ambas partes tenemos:

$$S_i(x) = m_{i-1} \left(\frac{t_i - x}{6h_i} \right)^3 + m_i \left(\frac{x - t_{i-1}}{6h_i} \right)^3 + A_i \frac{t_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - t_{i-1}}{h_i}, \quad (2.2)$$

donde A_i y B_i son constantes de integración, ellas se determinan a partir de las condiciones de interpolación $S_i(t_{i-1}) = f_{i-1}$ y $S_i(t_i) = f_i$. Reemplazando $x = t_{i-1}$ y $x = t_i$ en (2.2) tenemos:

$$\begin{aligned} m_i \frac{h_i^2}{6} + B_i &= f_i = S_i(t_i) \\ m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i &= f_{i-1} = S_i(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Reempazando los valores A_i y B_i en (2.2)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= m_{i-1} \frac{(t_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - t_{i-1})^3}{6h_i} \\ &+ \left(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{t_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{m_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - t_{i-1}}{h_i}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Una vez se han establecido los valores de m_0, m_1, \dots, m_n , se pueden utilizar la condición $S_i(x) \in (t_i, t_{i+1})$ y (2.3) para calcular $S(x)$ en cualquier x del intervalo $[t_0, t_n]$.

Si derivamos la ecuación(2.3) obtenemos $S'_i(x)$.

$$S'_i(t_i) = -m_{i-1} \frac{(t_i - x)^2}{2h_i} + m_i \frac{(x - t_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6} h_i. \quad (2.4)$$

De (2.3) y de las condiciones de continuidad impuestas sobre S' . En los nodos interiores t_i debemos tener que: $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$, y sustituyendo $x = t_i$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
S'_{i-1}(t_i) &= \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i}{3}m_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \\
S'_i(t_i) &= -\frac{h_i + 1}{3}m_{i+1} - \frac{h_i + 1}{6}m_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}
\end{aligned}$$

De acuerdo a la condición 1 las funciones $S'(x)$ y $S''(x)$ son continuas en $[a, b]$. De la condición de continuidad de $S'(x)$ en los puntos t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Obtenemos $n - 1$ ecuaciones, el resultado se puede escribir como

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \quad (2.5)$$

Recordemos que tenemos $n + 1$ incógnitas, podemos elegir m_0 y m_n de manera arbitraria, hagamos $m_0 = m_n = 0$ esto es completamos un sistema lineal algebraico para determinar $m_1 \cdots m_{n-1}$; un spline con esta elección se denomina Spline cúbico natural.

Describamos (2.5) en forma matricial

$$Am = Hf \quad (2.6)$$

Donde la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3 + h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix}$$

y los vectores m y f y la matriz rectangular H son de la forma:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & \frac{-1}{h_2} & \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{-1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3} & \frac{-1}{h_3} & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{-1}{h_n} & \frac{-1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Así vemos que el sistema (2.6) es simétrico, tridiagonal, diagonalmente dominante, lo que nos permite usar un algoritmo eficiente para la solución llamada Eliminación Gaussiana, pivoteo de filas escalonadas, como se muestra a continuación.

Veamos un ejemplo para ilustrar el empleo de splines cúbicos para interpolar los valores de una tabla.

Ejemplo 2.4.1. En la siguiente tabla se muestran algunos valores tabulados, obtener el spline cúbico que interpola la siguiente tabla y determinar el valor de interpolación en $x = 5$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	4	6	9	10
$f(x_i)$	4	9	15	7	3

El spline cúbico que interpola la tabla viene determinado por los siguientes coeficientes para las m_i : hagamos $Am = Hf$ según la ecuación (2.6)

$$\frac{5}{3}m_1 + \frac{2}{6}m_2 = \frac{15 - 9}{2} - \frac{9 - 4}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{6}m_1 + \frac{5}{3}m_2 + \frac{3}{6}m_3 &= \frac{7-15}{3} - \frac{15-9}{2} \\ \frac{3}{6}m_2 + \frac{4}{3}m_3 &= \frac{3-7}{1} - \frac{7-15}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\{m_1 = 1,56932, m_2 = -3,84661, m_3 = 0,44248\}$

de acuerdo a la ecuación (2.3) la función $g(x)$ se convierte en los polinomios:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 8,718510^{-2}(x-1)^3 + 3,118 + 0,88201x & 1 \leq x \leq 4 \\ g_2(x) &= 0,13078(6-x)^3 - 0,32055(x-4)^3 - 9,6981 + 4,5438x & 4 \leq x \leq 6 \\ g_3(x) &= -0,02137(9,0-x)^3 + 2,458210^{-2}(x-6)^3 + 31,761 - 2,473x & 6 \leq x \leq 9 \\ g_4(x) &= 7,3746 * 10^{-2}(10-1,0x)^3 + 42,263 - 3,9263x & 9 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

calculamos $g(5)$ en $g_2(x)$

$$g_2(5) = 0,13078(6-5)^3 - 0,32055(5-4)^3 - 9,6981 + 4,5438(5) = 12,831$$

Y su gráfica es

Ejemplo 2.4.2. Determinar el spline cúbico que interpola la tabla

i	0	1	2	3
x_i	0	1	1.5	2.25
$f(x_i)$	2	4.4366	6.7134	13.9130

Estimar su valor en los puntos $x = 0,66$ y en $x = 1,75$

El spline cúbico que interpola la tabla viene determinado por los siguientes coeficientes para las m_i : hagamos $Am = Hf$ según la ecuación (2.6)

$$\frac{1+0,5}{3}m_1 + \frac{0,5}{6}m_2 = \frac{6,7134-4,4366}{0,5} - \frac{4,4366-2}{1}$$

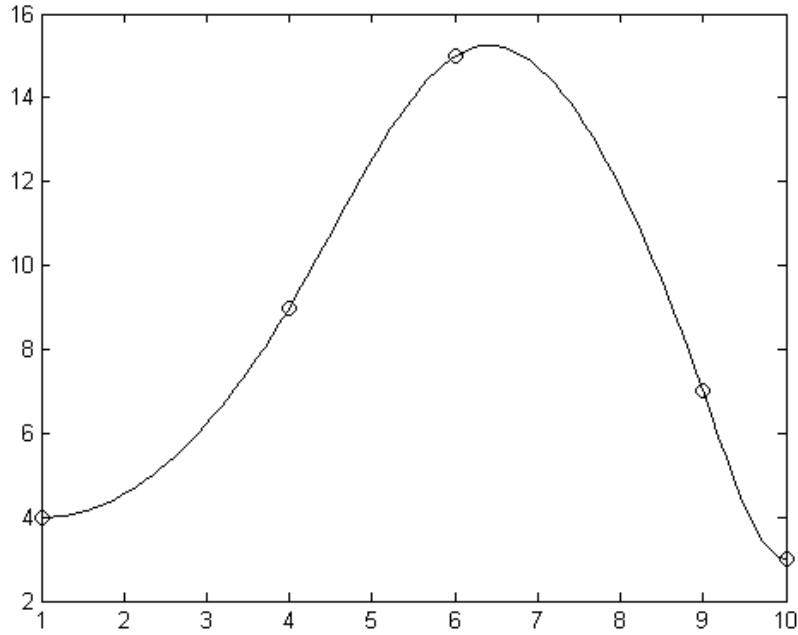


Figura 2.3: Gráfica del Ejemplo 2.4.1

$$\frac{0,5}{6}m_1 + \frac{0,5 + 0,75}{3}m_2 = \frac{13,9130 - 6,7134}{0,75} - \frac{6,7134 - 4,4366}{0,5}$$

por tanto el valor de las m_i es: $\{m_2 = 11,652, \quad m_1 = 2,2921\}$

y resultan los polinomios de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0,38202x^3 + 2,0546x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) &= 0,76403(1,5 - x)^3 + 3,884(x - 1)^3 - 0,49902 + 4,7446x & 1 \leq x \leq 1,5 \\ g_3(x) &= 2,5893(2,25 - 1,0x)^3 - 12,055 + 11,541x & 1,5 \leq x \leq 2,25 \end{aligned}$$

el valor para $x = 0,6$ y $x = 1,75$ las hallamos con $g_1(x)$ y con $g_3(x)$

$$g_1(0,6) = 0,38202(0,6^3) + 2 + 2,0546(0,6) = 3,3153$$

$$g_3(1,76) = 2,5893(2,25 - 1)1,75^3 - 12,055 + 11,541(1,75) = 8,4654$$

y su gráfica es

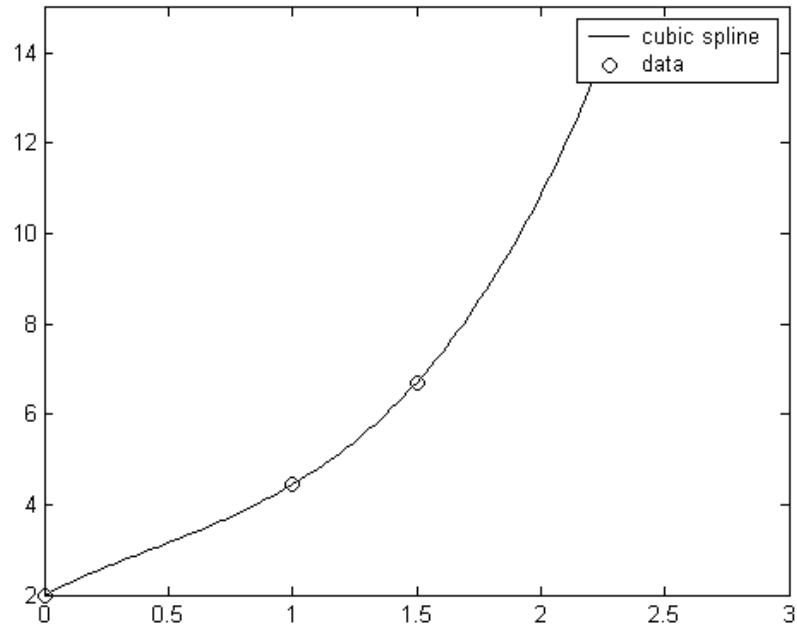


Figura 2.4: Gráfica del Ejemplo 2.4.2

2.5. Propiedades de los splines cúbicos

La función spline cúbica tiene varias propiedades importantes que permiten una interpolación efectiva y alta. Una de las propiedades importantes de un spline cúbico es la siguiente:

Propiedad extremal

Consideremos en el segmento $[a, b]$ la clase de funciones $W_2^2[a, b]$ que consiste de funciones donde la segunda derivada al cuadrado es integrable. Planteemos el problema de encontrar una función de interpolación para u :

$$u \in W_2^2[a, b], u(x_k) = f_k \quad k = 0, \dots, n \quad (2.7)$$

que minimize la funcional

$$\phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx \quad (2.8)$$

en la clase $W_2^2[a, b]$.

Probemos que el mínimo de la función (2.8) se alcanza en una función $g(x)$ que es un spline cúbico a tramos; consideremos la magnitud:

$$\phi(u - g) = \int_a^b [u'' - g'']^2 dx. \quad (2.9)$$

Integrando por partes y empleando las propiedades de $(u, g) \in W_2^2[a, b]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(u - g) &= \int_a^b [u''(x)]^2 - 2[u''g''] + [g''(x)]^2 dx \\ &= \phi(u) - 2 \int_a^b u''g'' dx + \phi(g) \\ &= \phi(u) - 2 \int_a^b u''g'' dx + 2 \int_a^b (g'')^2 dx - 2 \int_a^b (g'')^2 dx + \phi(g) \\ &= \phi(u) - 2 \int_a^b u''g'' - (g'')^2 dx - 2\phi(g) + \phi(g) \\ &= \phi(u) - \phi(g) - 2 \int_a^b (u'' - g'')(g'') dx \\ &= \phi(u) - \phi(g) - 2 \left([(u' - g')g''] \Big|_a^b - \int_a^b (u' - g')(g''') \right) dx \\ &= \phi(u) - \phi(g) - 2 \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [u' - g']g''' dx \end{aligned}$$

pero $g''' = c_k$ constante en el segmento $[x_{k-1}, x_k]$, por tanto

$$\phi(u - g) = \phi(u) - \phi(g) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (u - g) \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = \phi(u) - \phi(g).$$

De aqui y de (2.9) se desprende

$$\phi(g) = \phi(u) - \phi(u - g) \leq \phi(u),$$

para cualquier $u \in W_2^2[a, b]$, $u(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, \dots, n$ por lo tanto, en la función spline cúbico a tramos $g(x)$ la funcional (2.8) alcanza su mínimo.

Observación 2.1. *Esta propiedad es interesante ya que podemos interpretar como el valor del funcional $\phi(u)$ como el análogo a la energía potencial de un resorte elástico, sujeto en los puntos (x_k, f_k) y sobre los splines se alcanza el mínimo de esta energía.*

Definición 2.5.1. (Otra definición de splines) Un spline cúbico a tramos es una función de clase $W_2^2[a, b]$ que toma ciertos valores en los nodos de una región y minimiza la funcional (2.8).

Observación 2.2. *Recordemos que la curvatura de una curva descrita por la ecuación $y = f(x)$ es la cantidad $\frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$ si se elimina el término entre corchetes, $|f''(x)|$ queda una aproximación de la curvatura. En la interpolación de spline cúbico natural lo que encontramos debido a que la cantidad $\int_a^b [f(x)]^2 dx$ se minimiza, es un curva con (aproximadamente) curvatura mínima sobre el intervalo.*

Otra propiedad importante de los splines es que es un buen aproximante; esto es, si la función que se va a interpolar f es de clase $C^k[a, b]$ ($k = 0, 1, \dots, 4$). Entonces para la función error $\varphi = f(x) - g(x)$ se cumple la desigualdad:

$$\max_x |\phi^{(p)}(x)| \leq ch^{k-p}, \text{ donde } k \geq p \text{ } a \leq x \leq b.$$

Donde c es una constante no negativa, que no depende del peso de la malla:

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

2.6. Splines naturales de orden superior

Un spline natural de grado $2m + 1$ con nodos en $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ es una función $S \in C^{2m}(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes condiciones:

1. S es un polinomio de grado menor o igual que $2m + 1$ en cada intervalo $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ y es un polinomio de a lo más grado m en $(-\infty, t_0)$ y en (t_n, ∞) ; donde $m \in \mathbb{N}$.
2. S tiene derivadas continuas de grado hasta $n - 1$.
3. S satisface las condiciones de frontera: $S^{(j)}(a) = S^{(j)}(b) = 0$ en donde $m < j \leq 2m$ y $S^{(j)}$ es la derivada j -ésima; $a = t_0, b = t_n$.

El espacio lineal de estos splines se denota como $N^{2m+1}(t_0, \dots, t_n)$, o, N_n^{2m+1} . Existe una escritura bastante compacta para los splines si usamos el concepto de función de potencias truncada, denotada por x_+^n . A continuación la definimos:

$$x_+^n = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta función pertenece a la clase de continuidad C^{n-1} . Porque la n -ésima derivada en 0 no es continua

Teorema 2.6.1. *Cada miembro de N_n^{2m+1} tiene una representación del tipo :*

$$S(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i (x - t_i)_+^{2m+1}, \text{ con } \sum_{i=0}^n b_i x_i^j = 0, \text{ para } 0 \leq j \leq m.$$

Demostración. En $(-\infty, t_0)$ el spline S es un polinomio p_0 $0 \leq j \leq m$ de a lo más grado m . Este polinomio determina los coeficientes a_i . En el intervalo $[t_0, t_1]$ S se reduce a un polinomio p_1 de grado $2m + 1$. Las condiciones de continuidad en t_0 son $p_0^{(j)}(t_0) = p_1^{(j)}(t_0)$ ($0 \leq j \leq 2m$).

Por el teorema de Taylor p_1 se puede escribir como :

$$\begin{aligned}
 p_1(x) &= \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{1}{j!} p_1^{(j)}(t_0)(x - t_0)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{2m} \frac{1}{j!} p_0^{(j)}(t_0)(x - t_0)^j + b_0(x - t_0)^{2m+1} \\
 &= p_0(x) + b_0(x - t_0)^{2m+1}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que en $(-\infty, t_1)$ se tiene;

$$S(x) = p_0(x) + b_0(x - t_0)_+^{2m+1}.$$

Observación 2.3. *Es importante resaltar que $S^{(j)}(t_0) = 0$ para $m < j \leq 2m$. El argumento utilizado en t_0 se repite ahora en cada nodo, obteniendo los términos restantes b_i y $(x - t_i)_+^{2m+1}$.*

En el intervalo (t_n, ∞) , S debe corresponder a un polinomio de grado $\leq m$. Por tanto, en ese intervalo:

$$0 = S^{(m+1)}(x) = \sum_{i=0}^n b_i(2m+1)(2m) \cdots (m+1)(x - t_i)^m.$$

A partir de esta ecuación, y utilizando el teorema del binomio obtenemos:

$$0 = \sum_{i=0}^n b_i(x - t_i)^m = \sum_{i=0}^n b_i \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} (-t_i)^j = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_i (-t_i)^j \binom{m}{j} x^{m-j}.$$

Lo que aquí tenemos es un polinomio en x de grado menor o igual a m . Sus coeficientes deben anularse y, por tanto, $\sum_{i=0}^n b_i t_i^j = 0$ para $j = 0, 1, \dots, m$. □

El siguiente teorema es análogo a la propiedad extremal de los splines cúbicos.

Teorema 2.6.2. *Sean $m \leq n$ y $f \in C^{m+1}[a, b]$. Sea S el spline natural de grado $2m + 1$ que interpola a f en los nodos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Entonces:*

$$\int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f^{(m+1)}(x)]^2 dx.$$

Demostración. Sea $g = f - S$. Entonces $g(t_i) = 0$ para $0 \leq i \leq n$. Integrando por partes repetidamente podemos demostrar que:

$$\int_a^b g^{(m+1)}(x)S^{(m+1)}(x)dx = 0$$

. Tomando el lado derecho de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f^{(m+1)}(x)]^2 dx &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x) + g^{(m+1)}(x)]^2 dx = \\ &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S^{(m+1)}(x)g^{(m+1)}(x)dx + \\ &+ \int_a^b [g^{(m+1)}(x)]^2 dx = \\ &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx + \int_a^b [g^{(m+1)}(x)]^2 dx \geq \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

□

Obteniendo el resultado deseado.

La demostración del siguiente teorema puede hallarse en [1]

Teorema 2.1. Sea $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ un conjunto de nodos y tomemos $0 \leq m \leq n$. Existe un único spline natural de grado $2m + 1$ que ajusta los valores preestablecidos en los nodos.

2.7. Splines-B :Teoría básica

En esta parte se dedicará al estudio de un sistema de funciones spline a partir de las cuales se pueden obtener, mediante combinaciones lineales, todas las demás funciones spline. Dichos splines constituyen bases para ciertos espacios de splines y por tanto se llaman splines-B.

Iniciamos con un sistema de nodos, t_i , sobre la recta real. Para efectos prácticos, sólo se necesita un número finito de nodos, pero en lo que respecta al desarrollo teórico es más sencillo suponer que los nodos forman un conjunto infinito que se extiende hasta $+\infty$ por la derecha y hasta $-\infty$ por la izquierda:

$$\cdots t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

Supongamos que esta sucesión de nodos es fija, y que los splines se basan en ella.

2.8. Splines-B de grado 0

B_i^0 denota a los splines-B de grado 0 y estos tienen la apariencia que se muestra en la Figura 2.5. El índice i abarca a todos los enteros.

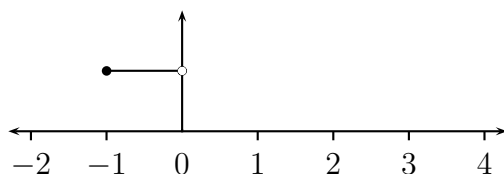


Figura 2.5: Spline-B B_i^0 , $t_i = -1$; $t_{i+1} = 0$

La definición formal es:

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Estos splines-B constituyen una sucesión infinita, $\{B_i^0 : i \in \mathbb{R}\}$. Veamos algunas propiedades:

1. El soporte de B_i^0 , definido como el conjunto de las x donde $B_i^0(x) \neq 0$, es el intervalo $[t_i, t_{i+1})$; por definición.
2. $B_i^0(x) \geq 0$ para toda i y toda x ; por definición.
3. B_i^0 es continua por la derecha en toda la recta real; por definición.
4. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ para toda x .

Esta última ecuación se verifica eligiendo cualquier $x \in \mathbb{R}$ y luego determinando el intervalo entre nodos en el cual se encuentra la x , digamos $t_j \leq x < t_{j+1}$; entonces $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_j^0(x) = 1$.

B_i^0 constituye una base para todos los splines de grado 0 definidos sobre la sucesión dada, de manera que sean continuos por la derecha. Para verificar esta afirmación; sea S una de tales funciones spline. Por tanto, es constante a tramos y se define mediante un conjunto de reglas de la forma

$$S(x) = c_i \text{ si } t_i \leq x < t_{i+1}, \text{ donde } i \in \mathbf{Z}.$$



Figura 2.6: Un Spline-B de grado cero, $t_i = -1$; $t_{i+1} = 3$

Por consiguiente $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^0(x)$. (Lo que tenemos es una base en el sentido de Schauder: cada vector en el espacio tiene una representación única en términos de una serie infinita $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^0$.)

Veamos como podemos extender este concepto para definir todos los splines-B de grado 1, de grado 2 y así sucesivamente. Tomemos la siguiente relación de recurrencia:

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.10)$$

para $k \geq 0$. Todas las propiedades de los splines-B de orden superior se deducen de esta definición recursiva. Denotemos a partir de:

$$V_i^k(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}. \quad (2.11)$$

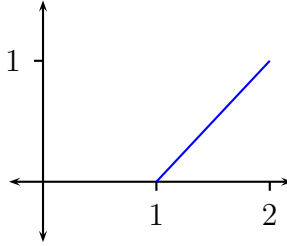


Figura 2.7: $t_i = 1$; $t_{i+1} = 2$

Tomemos $k = 1$.

Realicemos algunas transformaciones a (2.11)

$$\begin{aligned} B_i^k(x) &= \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - t_{i+1} - x + t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ &= \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} + \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \\ &= \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(1 - \left(\frac{x - t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) \right) B_{i+1}^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto usando (2.11) podemos escribir (2.10) de la siguiente forma:

$$B_i^k = V_i^k B_i^{k-1} + (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1}. \quad (2.12)$$

En vista que B_i^0 es un polinomio por tramos de grado 0, y dado que V_i^k es lineal, B_i^1 es un polinomio por tramos de grado ≤ 1 . Ya que $B_i^1 = V_i^1 B_i^0 + (1 - V_{i+1}^1) B_{i+1}^0$. El mismo razonamiento demuestra que, en general, B_i^k será un polinomio por tramos de grado $\leq k$. Veamos la forma de la Base Spline-B de grado 1; cuando $k = 1$

2.9. Splines-B de grado 1

Con ayuda de la ecuación (2.10) daremos una fórmula explícita para $B_i^1(x)$, para $k = 1$ y usando la definición de los splines-B de grado 0 tenemos:

$$B_i^1(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) B_i^0(x) + \left(\frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^0(x)$$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < t_i \text{ o } x \geq t_{i+2}; \quad B_i(x) = 0; B_{i+1}(x) = 0 & \text{en } (t_i, t_{i+2}] \\ \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} & \text{si } t_i \leq x < t_{i+1}; \quad B_i^1(x) \neq 0 & \text{en } [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} & \text{si } t_{i+1} \leq x < t_{i+2}; \quad B_{i+1}^1(x) \neq 0 & \text{en } [t_{i+1}, t_{i+2}) \end{cases}$$

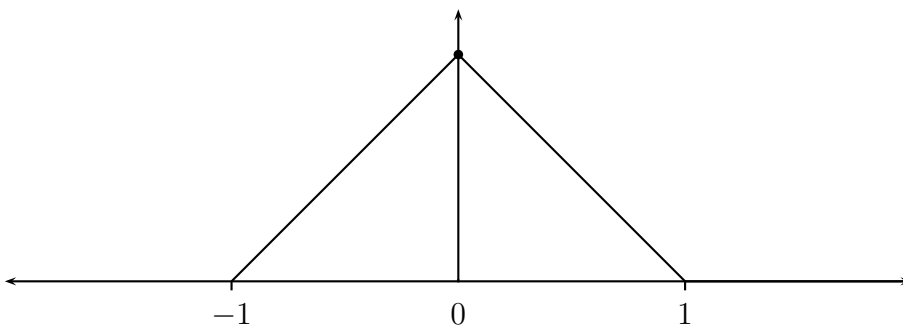


Figura 2.8: Un Spline-B de grado 1 con $t_i = -1, t_{i+2} = 1$

En la figura 2.8 se muestra la gráfica de $B_i^1(x)$. De grado uno tomando $t_i = -1, t_{i+1} = 0, t_{i+2} = 1$.

Propiedades de los splines-B de grado 1

1. El soporte de B_i^1 es (t_i, t_{i+2}) .
2. $B_i^1(x) \geq 0$ para toda i y toda x .
3. B_i^1 es continua y diferenciable en todo punto excepto en t_i, t_{i+1} , y t_{i+2} .

Las tres primeras propiedades se ven fácilmente a partir de la definición de B_i^1

4. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = 1$ para toda x .

Verificando la validez de 4, entonces se encuentra un índice j tal que $t_j \leq x < t_{j+1}$; así $B_i^1(x) = 0$ para toda i excepto posiblemente en $i = j$ o $i = j - 1$. Por consiguiente, para esta x ,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = B_{j-1}^1(x) + B_j^1(x) = \frac{t_{j+1} - x}{t_{j+1} - t_j} + \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} = 1.$$

2.10. Propiedades de los splines-B

Siguiendo el mismo razonamiento observemos que B_i^k es un polinomio por tramos de grado menor o igual a k de la familia B_i^k ; asumamos $i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Propiedad 2.10.1. Si $k \geq 1$ y $x \notin (t_i, t_{i+k+1})$, entonces $B_i^k = 0$.

Demostración. Ya se ha visto que esto resulta cierto para $k = 1$, pero no para $k = 0$. Si es cierto para un cierto índice $k - 1$, entonces, es cierto también para k . Si $x \notin (t_i, t_{i+k+1})$, entonces $x \notin (t_i, t_{i+k})$ y $x \notin (t_{i+1}, t_{i+k+1})$. Por hipótesis de inducción, $B_i^{k-1}(x) = 0$ y $B_{i+1}^{k-1}(x) = 0$. De la ecuación (2.10) tenemos $B_i^k(x) = 0$. \square

Propiedad 2.10.2. Sea $k \geq 0$. Si $x \in (t_i, t_{i+k+1})$, entonces $B_i^k > 0$.

Demostración. Ya se ha visto que la afirmación de esta propiedad es cierta cuando $k = 0$ o $k = 1$. Supongamos verdadera la afirmación para un índice $k - 1$, con $k \geq 2$.

(Que es cierto para $k = 1$ se deduce de las fórmulas explícitas que se dieron antes para B_i^1 .)

Esta suposición y la propiedad 1 implican que $B_i^{k-1}(x) \geq 0$ para toda x y toda i . Sea ahora $t_i < x < t_{i+k+1}$. Entonces los factores lineales del lado derecho de la ecuación (2.10) son positivos. Por la hipótesis de inducción, $B_i^{k-1}(x) > 0$ en (t_i, t_{i+k}) y $B_{i+1}^{k-1}(x) > 0$ en (t_{i+1}, t_{i+k+1}) .

Dado $k \geq 2$, estos intervalos se superponen, y de la ecuación (2.10) vemos que $B_i^k(x) > 0$. □

La siguiente propiedad nos permite usar los splines $B - B_i^k$ como una base para todos los splines de grado 0.

Propiedad 2.10.3. .

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [c_i V_i^k + c_{i-1}(1 - V_i^k)] B_i^{k-1}. \quad (2.13)$$

Demostración. De la ecuación (2.12) y las propiedades de series se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i [V_i^k B_i^{k-1} + (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i V_i^k B_i^{k-1} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i-1} (1 - V_i^k) B_i^{k-1}. \end{aligned}$$

□

Esta propiedad nos dice que el sistema de funciones B_i^k forman una base para el espacio de splines de grado k . La importancia de este resultado se da en los cálculos numéricos.

PROCEDIMIENTO NUMÉRICO Es de anotar que en la Propiedad 3 los coeficientes c_i pueden ser constantes o funciones. Este hecho nos proporciona una manera de

calcular los valores de una función dada en la forma.

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x) B_i^k(x).$$

Suponemos que las funciones C_i^k están dadas, éstas pueden ser constantes.

Definamos

$$C_i^{k-1}(x) = C_i^k(x) V_i^k(x) + C_{i-1}^k(x) [1 - V_i^k(x)]. \quad (2.14)$$

Usando la Propiedad 3 y (2.14) obtenemos:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^{k-1}(x) B_i^{k-1}(x).$$

Repetiendo para $k - 1, k - 2, \dots, 0$ llegamos a

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^0(x) B_i^0(x).$$

La expresión del lado derecho se puede calcular fácilmente para $t_j \leq x < t_{j+1}$, su valor es $C_j^0(x)$. Usando la ecuación (2.11) expresamos con todo detalle la ecuación (2.14) obteniendo

$$C_i^{j-1}(x) = \frac{[(x - t_i) C_i^j(x) + (t_{i+j} - x) C_{i-1}^j(x)]}{(t_{i+j} - t_i)}. \quad (2.15)$$

ALGORITMO Si se dan los coeficientes C_i^k , la función Spline $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} C_i^k B_i^k(x)$ para una x dada se puede calcular de la siguiente manera. Determine el índice m tal que $t_m \leq x < t_{m+1}$. Calcule el arreglo triangular:

$$\begin{array}{cccccc}
C_m^k & C_m^{k-1} & \cdots & C_m^1 & C_m^0 & \\
C_{m-1}^k & C_{m-1}^{k-1} & \cdots & C_{m-1}^1 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \\
C_{m-k+1}^k & C_{m-k+1}^{k-1} & \cdots & 0 & 0 & \\
C_{m-k}^k & 0 & \cdots & 0 & 0 &
\end{array}$$

usando la ecuación 2.15 Entonces $S(x) = C_m^0$.

Propiedad 2.10.4. . Para toda k ,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1.$$

Demostración. Utilizando el algoritmo anterior. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x)B_i^k(x)$, en donde $C_i^k = 1$ para toda i . Luego fijamos x y usamos la ecuación (2.15) para calcular

$$\begin{aligned}
C_i^{k-1}(x) &= \frac{[(x - t_i)C_i^k + (t_{i+k} - xt)C_{i-1}^k]}{(t_{i+k} - t_i)} \\
&= \frac{[x - t_i + t_{i+k} - x]}{(t_{i+k} - t_i)} = 1.
\end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento, llegamos a $C_i^j = 1$ para toda i y para toda $j = k, k-1, \dots, 0$. Por lo tanto

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1.$$

□

2.11. La derivada y la integral de los splines-B

En esta sección veremos que los splines-B al igual que las bases son linealmente independientes para esto veamos las siguientes propiedades: La siguiente propiedad presenta una fórmula para la derivada de B_i^k . De la fórmula (2.11) para V_i^k y tomar

$$\alpha_i^k = \frac{1}{t_{i+k} - t_i} \quad (2.16)$$

con esta notación,

$$\frac{d}{dx} V_i^k(x) = \alpha_i^k. \quad (2.17)$$

Otras fórmulas útiles, que se comprueban trivialmente son

$$\alpha_i^k V_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} V_i^k \quad (2.18)$$

$$\alpha_{i+1}^k (1 - V_i^{k+1}) = \alpha_i^{k+1} (1 - V_{i+1}^k) \quad (2.19)$$

Proveamos la igualdad $\alpha_i^k V_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} V_i^k$

$$\begin{aligned} \alpha_i^k V_i^{k+1} &= \left(\frac{1}{t_{i+k} - t_i} \right) \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k+1} - t_i} \right) \\ &= \left(\frac{1}{t_{i+1k+1} - t_i} \right) \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) = \alpha_i^{k+1} V_i^k \end{aligned}$$

Similarmente se comprueba la otra igualdad; utilizando las definiciones de α_i^k , y de V_i^k

Propiedad 2.11.1. Sea $k \geq 2$,

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \left(\frac{k}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x). \quad (2.20)$$

Cuando $k = 1$, la ecuación es válida para toda x excepto $x = t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$

Demostración. La demostración se hace por inducción, probemos para $k = 1$ y $k = 2$.

para $k = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_i^1(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)B_i^0(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^0(x) \\
\frac{d}{dx}B_i^1(x) &= \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\right)B_i^0(x) + \left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\frac{d}{dx}B_i^0(x) \\
&+ \left(\frac{-1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^0(x) + \left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)\frac{d}{dx}B_{i+1}^0(x)
\end{aligned}$$

como $B_i^0(x)$ y B_{i+1}^0 son constantes entonces su derivada es cero luego

$$\frac{d}{dx}B_i^1(x) = \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\right)B_i^0(x) + \left(\frac{-1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^0(x)$$

para $k = 2$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_i^2(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)B_i^1(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+3}-t_{i+2}}\right)B_{i+1}^1(x) \\
\frac{d}{dx}B_i^2(x) &= \left(\frac{1}{t_{i+2}-t_i}\right)B_i^1(x) + \left(\frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}\right)\frac{d}{dx}B_i^1(x) \\
&+ \left(\frac{-1}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^1(x) + \left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}}\right)\frac{d}{dx}B_{i+1}^1(x)
\end{aligned}$$

sumando términos y utilizando la definición de $B_i^1(x)$ llegamos a:

$$\frac{d}{dx}B_i^2(x) = \frac{2B_i^1}{t_{i+2}-t_i} - \frac{2B_{i+1}^1}{t_{i+2}-t_{i+1}}$$

Suponemos que la fórmula es válida para una k fija, y con esta hipótesis demostramos que se cumple para $k + 1$. La hipótesis de inducción es la ecuación (2.20) y utilizando las ecuaciones (2.18) y (2.19)

$$\frac{d}{dx}B_i^k = k\alpha_i^k B_i^{k-1} - k\alpha_{i+1}^k B_{i+1}^{k-1} \quad (2.21)$$

de la ecuación (2.12) tenemos:

$$\frac{d}{dx}B_i^{k+1} = \frac{d}{dx}[V_i^{k+1}B_i^k + (1 - V_{i+1}^{k+1})B_{i+1}^k] \quad (2.22)$$

$$= V_i^{k+1} \frac{d}{dx} B_i^k + \alpha_i^{k+1} B_i^k + (1 - V_{i+1}^{k+1}) \frac{d}{dx} B_{i+1}^k - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k \quad (2.23)$$

Aquí utilizamos dos veces la ecuación (2.16), y la hipótesis de inducción ecuación (2.21) en el lado derecho de la ecuación (2.22). El resultado es :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_i^{k+1} &= V_i^{k+1} (k\alpha_i^k B_i^{k-1} - k\alpha_{i+1}^k B_{i+1}^{k-1}) + \alpha_i^{k+1} B_i^k \\ &+ (1 - V_{i+1}^{k+1}) (k\alpha_{i+1}^k B_{i+1}^{k-1} - k\alpha_{i+2}^k B_{i+2}^{k-1}) - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k \end{aligned} \quad (2.24)$$

reagrupando términos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_i^{k+1} &= \alpha_i^{k+1} B_i^k + k\alpha_i^k V_i^{k+1} B_i^{k-1} - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k \\ &- k\alpha_{i+2}^k (1 - V_{i+1}^{k+1}) B_{i+2}^{k-1} - k\alpha_{i+1}^k V_i^{k+1} B_{i+1}^{k-1} \\ &+ k\alpha_{i+1}^k (1 - V_{i+1}^{k+1}) B_{i+1}^{k-1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

reemplazando en la ecuación (2.25) las ecuaciones (2.18) y (2.19):

$$\begin{aligned} k\alpha_i^k V_i^{k+1} B_i^{k-1} &= k\alpha_i^{k+1} V_i^k B_i^{k-1} \\ &- k\alpha_{i+2}^k (1 - V_{i+1}^{k+1}) B_{i+2}^{k-1} \\ &= -k\alpha_{i+1}^{k+1} (1 - V_{i+2}^k) B_{i+2}^{k-1} \\ &- k\alpha_{i+1}^k V_i^{k+1} B_{i+1}^{k-1} + k\alpha_{i+1}^k (1 - V_{i+1}^{k+1}) B_{i+1}^{k-1} \\ &= k\alpha_{i+1}^k (1 - V_i^{k+1}) B_{i+1}^{k-1} - k\alpha_{i+1}^k V_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^{k-1} \\ &= k\alpha_i^{k+1} (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1} - k\alpha_{i+1}^{k+1} V_{i+1}^k B_{i+1}^{k-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

reemplazando en (2.25)

$$\frac{d}{dx} B_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} B_i^k + k[\alpha_i^{k+1} V_i^k B_i^{k-1} + \alpha_i^{k+1} (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1}] - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k -$$

$$- k[\alpha_{i+1}^{k+1}V_{i+1}^k B_{i+1}^{k-1} + \alpha_{i+1}^{k+1}(1 - V_{i+2}^k)B_{i+2}^{k-1}] \quad (2.27)$$

utilizando la ecuación de recurrencia (2.12) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_i^{k+1} &= \alpha_i^{k+1} B_i^k + k\alpha_i^{k+1} B_i^k - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k - k\alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k \\ &= (k+1)\alpha_i^{k+1} B_i^k - (k+1)\alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^k \end{aligned}$$

luego se demostró que se cumple para $k+1$ ya que esta es la ecuación (2.21) siendo $k = k+1$. \square

Propiedad 2.11.2. Para $k \geq 1$, los splines-B B_i^k pertenecen a $C^{k-1}(\mathbb{R})$.

Demostración. B_i^1 es continuo $B_i^1 \in C_i^0(R)$. Supongamos ahora que $B_i^k \in C^{k-1}(R)$. Por la propiedad 5, $(\frac{d}{dx})B_i^{k+1} \in C^{k-1}(R)$, debido a que esta derivada es una combinación lineal de B_i^k y B_{i+1}^k . Por tanto $B_{i+1}^k \in C^k(R)$. Según el principio de inducción, esto completa la demostración. \square

Usando la propiedad 5 sobre la derivada de los splines-B se obtiene la formula siguiente:

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) = k \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x). \quad (k \geq 2). \quad (2.28)$$

Definición 2.11.1. Sea f es una función definida en su dominio $D(f)$ y sea K un subconjunto de $D(f)$, entonces $f|K$ denota la restricción de f a K . Por ello

$$(f|K)(x) = f(x) \quad (x \in K).$$

Este concepto resulta útil al trabajar con splines, debido a que cada función $B_i^k| (t_j, t_{j+1})$ es un polinomio (la restricción de un polinomio). Cuando se dice que un conjunto de funciones f_i es linealmente independiente sobre un conjunto K , esto significa que el conjunto de funciones restringidas $f_i|K$ es linealmente independiente en sentido usual.

Consideremos ahora los splines-B $B_0^k, B_1^k, \dots, B_k^k$. Cuando éstos se restringen a un sólo intervalo entre nodos (t_v, t_{v+1}) , el resultado es un conjunto de polinomios de grado $\leq k$. Si el intervalo considerado es (t_k, t_{k+1}) , dichas restricciones forman una base del espacio polinomial Π_k .

Propiedad 2.11.3. *El conjunto de splines-B $\{B_j^k, B_{j+1}^k, \dots, B_{j+k}^k\}$ es linealmente independiente en (t_{k+j}, t_{k+j+1}) .*

Demostración. Considere primero el caso $k = 0$. El lema afirma que $\{B_j^0\}$ es linealmente independiente en (t_j, t_{j+1}) . Esto es cierto. Aplicando inducción, hagamos $k \geq 1$, y supongamos que la propiedad se cumple para el índice $k - 1$. Partiendo de esta suposición probaremos la propiedad para el índice k . Sea

$$S = \sum_{i=0}^k c_{j+i} B_{j+i}^k,$$

y suponga que $S | (t_{k+j}, t_{k+j+1}) = 0$. De la ecuación (2.28) tenemos

$$0 = S' | (t_{k+j}, t_{k+j+1}) = k \sum_{i=1}^k \frac{c_{j+i} - c_{j+i-1}}{t_{j+i+k} - t_{j+1}} B_{j+i}^{k-1} | (t_{k+j}, t_{k+j+1}). \quad (2.29)$$

Para llegar a esta ecuación usamos que $B_{j+k+1}^{k-1} = 0$ y $B_j^{k-1} = 0$ en (t_{k+j}, t_{k+j+1}) . Usando la hipótesis de inducción en $\{B_{j+1}^{k-1}, B_{j+2}^{k-1}, \dots, B_{j+k}^{k-1}\}$, concluimos que el conjunto es linealmente independiente en el intervalo (t_{k+j}, t_{k+j+1}) . Entonces en la ecuación (2.28) todos los coeficientes deben ser 0. y por ello $c_0 = c_1 = \dots = c_k$. Si este valor común se denota por λ , tendremos que, por la propiedad 4. $S(x) = \lambda$, en (t_{k+j}, t_{k+j+1}) .

(Observe que en la propiedad 4 los únicos términos que no son cero son $B_j^k, B_{j+1}^k, \dots, B_{j+k}^k$) En vista de haber supuesto que S se anulaba en (t_{k+j}, t_{k+j+1}) , concluimos que $\lambda = 0$. \square

Propiedad 2.11.4. *El conjunto de splines-B $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, \dots, B_{n-1}^k\}$ es linealmente independiente en (t_0, t_n) .*

Demostración. Sea

$$S = \sum_{i=-k}^{n-1} c_i B_i^k,$$

y suponga que $S|_{(t_0, t_n)} = 0$. En el intervalo (t_0, t_1) sólo $B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, \dots, B_0^k$ son distintos de cero, y por consiguiente

$$0 = S|_{(t_0, t_n)} = \sum_{i=-k}^0 c_i B_i^k|_{(t_0, t_1)}. \quad (2.30)$$

Por la propiedad 7 el conjunto $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, \dots, B_0^k\}$ es linealmente independiente en (t_0, t_1) . Por tanto, de la ecuación (2.30) deducimos que $c_i = 0$ cuando $-k \leq i \leq 0$.

Si todos los c_i son 0, hemos llegado a la conclusión deseada. Si no todos los c_i son *cero*, tomemos j como el primer índice para el cual $c_j \neq 0$. En vista de lo anterior, $j \geq 1$. Por consiguiente, $(t_j, t_{j+1}) \subset (t_0, t_n)$. Para cualquier $x \in (t_j, t_{j+1})$ obtenemos la contradicción

$$0 = S(x) = \sum_{i=j}^{n-1} c_i B_i^k(x) = c_j B_j^k(x) = 0.$$

Por tanto todos los c_i son cero. □

Observación 2.4. *Las funciones que presentamos en la sección son de clase C^{k-1} globalmente y se componen de polinomios por tramos de grado menor o igual a k en los n intervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$. Denotemos por S_n^k a la familia de estos splines. Cualquier función $S(x) \in S_n^k$ tiene dominio $[t_0, t_n]$. Un teorema que nos relaciona las funciones de S_n^k con los splines-B B_i^k para $(n \geq 1)$ es el siguiente.*

Teorema 2.11.1. *Una base para el espacio S_n^k es*

$$\{B_i^k|_{[t_0, t_n]} : -k \leq i \leq n-1\}. \quad (2.31)$$

Por consiguiente, la dimensión de S_n^k es $k+n$.

Demostración. Observemos que las funciones $B_i^k|_{[t_0, t_n]}$ son de la clase S_n^k , ya que son splines de grado soportados (con soporte) en la sucesión de nodos:

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

Demostremos que la dimensión de S_n^k es a lo más $k + n$. Construyamos un conjunto $k + n$ de funciones que generen a S_n^k . Cada elemento de S_n^k se puede expresar como:

$$S(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x - t_i)_+^k. \quad (2.32)$$

Donde

$$(x - t_i)_+^k = \begin{cases} (x - t_i)^k & \text{si } x \geq t_i \\ 0 & \text{si } x < t_i. \end{cases} \quad (2.33)$$

La expresión del lado izquierdo de (2.33) se llama potencia truncada. Para demostrar la validez de (2.32) empecemos con el intervalo $[t_0, t_1]$ en el que todas las potencias truncadas son cero. Ahora sobre el segmento $[t_0, t_1]$ la función $S(x)$ es un polinomio de grado k :

$$p_0(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad (2.34)$$

La expresión (2.34) determina todos los coeficientes a_i . Tomemos ahora el intervalo $[t_1, t_2]$, nuevamente $S(x)$ es un polinomio que denotamos como p_1 ; teniendo en cuenta las condiciones de continuidad en t_i tenemos:

$$(p_1 - p_0)^{(r)}(t_1) = 0 \quad (0 \leq r \leq k - 1)$$

$$r = 0 \quad p_1(t_1) = p_0(t_1)$$

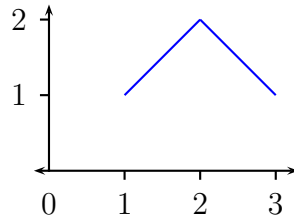


Figura 2.9: $t_0 = 1, t_i = 2, t_{i+1} = 3$

Ya que $(p_i - p_0)$ es a lo más de grado k , concluimos que

$$(p_1 - p_0)(x) = b_1(x - t_1)^k \text{ para alguna } b_1$$

$$(p_1 - p_0)'(x) = kb_1(x - t_1)^{k-1} \text{ evaluando en } x = t_1, \text{ tenemos:}$$

$$(p_1 - p_0)'(t_1) = k(b_1 t_1 - t_1)^{k-1} = 0.$$

Por tanto, escribimos:

$$S(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i + b_i(x - t_1)_+^k \quad (t_0 \leq x \leq t_2).$$

Repitiendo este mismo argumento para t_2, t_3, \dots, t_{n-1} obtenemos los términos restantes en la función (2.32). Para demostrar que este conjunto es linealmente independiente nos basamos en la propiedad 8 y por consiguiente $B_i^k|_{[t_0, t_n]} \quad -k \leq i \leq n-1$ es linealmente independiente; por lo tanto es base de S_n^k .

□

CAPÍTULO 3

INTERPOLACIÓN CÚBICA A TRAMOS CON SUAVIZAMIENTO

Un problema bastante frecuente en la recolección de datos a través de la experimentación consiste en que los valores d_k no se conocen de manera exacta sino con ruido esto es

$$\tilde{d} = d_k + \gamma_k \quad (3.1)$$

donde γ_k es el ruido aleatorio, en este caso no tiene sentido construir una función de interpolación que tome en los nodos los valores \tilde{d}_k . Mas bien construimos una función que pase cerca de estos valores dados mas suavemente que la interpolante. A estas funciones no se les denomina interpolantes sino "suavizantes".

En el contexto de los problemas de aproximación, la idea básica de la regularización es estabilizar la solución por medio de cierto funcional auxiliar no negativo que introduce información apriori, esto es, restricciones de alisamiento sobre el mapeo de entrada-salida (la solución del problema de aproximación.) para así hacer el problema mal puesto en un problema bien puesto.

De acuerdo a la teoría de Regularización de Tikhonov, la función f se determina minimizando cierto funcional de costo.

$$M(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\tilde{d}_i - y_i)^2 + \frac{1}{2} \alpha \|Pf\|^2 = \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\tilde{d}_i - f(x_i))^2 + \frac{1}{2} \alpha \|Pf\|^2, \quad (3.3)$$

recordemos que el segundo término llamado regularizador (estabilizador) depende de las propiedades geométricas de la función $f(x)$, el operador P es un operador diferencial lineal. La información a priori acerca de la solución (o sea la función $f(x)$) se introduce dentro del operador P .

El enfoque usado aquí tiene una fuerte analogía entre los operadores diferenciales lineales y las matrices. Nosotros asumiremos que P actúa en cierto espacio de Hilbert H .

Encontremos la derivada del funcional $M(f)$

$$dM(f, h) = \left[\frac{d}{d\theta} M(f + \theta h) \right]_{\theta=0}. \quad (3.4)$$

La derivada del primer término de (3.4) nos da

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^n (d_i - f(x_i) - \theta h(x_i))^2 \right]_{\theta=0} = - \sum_{i=1}^n (d_i - f(x_i)) h(x_i). \quad (3.5)$$

Esta diferencial la podemos escribir de la forma

$$- \left(h, \sum_{i=1}^n (d_i - f) \delta_{x_i} \right)_H \quad (3.6)$$

donde hemos usado el teorema de representación de Riez para un funcional lineal. El símbolo $(\cdot, \cdot)_H$ se refiere al producto interior definido en el espacio de Hilbert H ; la función δ_{x_i} denota la distribución delta de Dirac centrada en el punto x_i , esto es

$$\delta_{x_i}(x) = \delta(x - x_i). \quad (3.7)$$

La derivada del término regularizador es

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \alpha \|Pf\|^2 \right]_{\theta=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{R^k} [(P(f + \theta h))^2 dx]_{\theta=0} \quad (3.8)$$

$$\int_{R^k} [(P(f + \theta h))Ph dx]_{\theta=0} = \int_{R^k} [PfPh dx] = (Pf, Ph)_H. \quad (3.9)$$

En resumen, la derivada de Frechet del funcional $M(f)$ es

$$dM(f, h) = 2 \left[(h, P^*Pf) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f) \delta_{x_i} \right]_H \quad (3.10)$$

donde P^* es el operador adjunto del operador diferencial P . Debido a que el parámetro de regularización α toma valores en el intervalo abierto $(0, \infty)$, la derivada es cero para cualquier valor $h(x) \in H$ si y sólo si la siguiente condición se satisface en el sentido de las distribuciones

$$P^*Pf - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f) \delta_{x_i} = 0 \quad (3.11)$$

o en forma equivalente

$$P^*Pf = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f) \delta_{x_i} \quad x \neq x_i. \quad (3.12)$$

Nosotros llamaremos a la ecuación (3.12) Ecuación de Euler Lagrange.

La solución de esta ecuación es conocida y consiste en aplicar una transformación integral al lado derecho de la ecuación como un Núcleo dado por la función de Green para el operador diferencial P^*P . La función de Green juega el mismo papel para una ecuación diferencial lineal como es la matriz inversa para un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. Sea $G(x, x_i)$ centrada en el punto x_i como se definió la función de Green satisface la ecuación diferencial $y(x)$

$$P^*PG(x, x_i) = 0$$

para todo x excepto en el punto $x = x_i$, donde la función de Green tiene una singularidad. O en forma equivalente en el sentido de las distribuciones

$$P^*PG(x, x_i) = \delta(x - x_i). \quad (3.13)$$

Por lo tanto la solución de (3.12) viene dada por al fórmula

$$f(x) = \int_{R^k} G(x, \varepsilon)\phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (3.14)$$

donde la función $\phi(\varepsilon)$ denota la parte derecha de (3.12) con x sustituido por ε , esto es:

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f(\varepsilon_i))\delta(\varepsilon - x_i) \quad (3.15)$$

sustituyendo (3.12) en (3.15) tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f(x_i))G(x, x_i) \quad (3.16)$$

Esta ecuación significa que la solución $f(x)$ que minimiza el problema de regularización es una superposición de n funciones de Green. Los x_i representan los centros de expansión y los pesos $(d_i - f(x_i))/\alpha$ representan los coeficientes de la expansión. En otras palabras, la solución del problema regularizado está en un subespacio de dimensión n del espacio de las funciones de suavizamiento, y el conjunto de las funciones de Green $\{G(x, x_i)\}$ centrada en $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ constituye una base para este subespacio. Sea

$$w_i = (d_i - f(x_i))/\alpha \quad (3.17)$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i G(x, x_i) \quad (3.18)$$

Evalutando en $x = x_j$, $j = 1, \dots, n$, tenemos:

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n w_i G(x_j, x_i), j = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Introduciendo las siguientes definiciones $f = [f(x_1), f(x_1), \dots, f(x_n)]^T$, $d = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$

$$G = \begin{pmatrix} G(x_1, x_1) & \dots & G(x_1, x_n) \\ G(x_2, x_1) & \dots & G(x_2, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ G(x_n, x_1) & \dots & G(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

$w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$. Reescribiendo la ecuación $w_i = (d_i - f x_i)/\alpha$ en forma matricial tenemos:

$$w = \frac{1}{\alpha}(d - f) \quad (3.20)$$

$$f = d - \alpha w$$

$$f = Gw \quad (3.21)$$

$$d - \alpha w = Gw$$

$$d = (G + \alpha I)w.$$

Eliminando f de las dos anteriores tenemos el sistema de ecuaciones algebraicas con incógnitas $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$.

$$(G + \alpha I)w = d.$$

La matriz G se denomina matriz de Green.

En conclusión el enfoque de regularización es equivalente a expandir la solución en términos de un conjunto de funciones de Green, cuya caracterización depende sólo en la norma adoptada para el estabilizador P junto con las condiciones de frontera. El número de funciones de Green que se usa en la expansión es igual al número de datos empíricos. Las

funciones de Green se llaman funciones radiales cuando el ruido en (3.1) esta relacionado con valores grandes de la segunda derivada, de la función (3.1) se toma como estabilizador al operador $Pf = \frac{d^2 f}{dx^2}$ cuya norma es:

$$\|Pf\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad (3.22)$$

El operador $P^*Pf = f^{(IV)}(x)$, donde el símbolo (IV) denota la cuarta derivada y se obtiene de la ecuación diferencial:

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (d_i - f) \delta x \quad (3.23)$$

la solución de esta ecuación es dada por (3.16), donde $G(x, x_i)$ satisface la ecuación:

$$G^{(4)}(x - x') = \delta(x - x') \quad (3.24)$$

y es un spline cúbico natural.

$$G(x - x') = \sum_{i=0}^3 a_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x - x')_+^3. \quad (3.25)$$

Donde:

$$(x - x')_+^3 = \begin{cases} (x - x')^3 & \text{si } x \geq x' \\ 0 & \text{si } x < x'. \end{cases}$$

Por consiguiente el problema de suavización se expresa a través de splines cúbicos que tienen nodos exactamente en los puntos de medición.

Observación 3.1. Si f es una función continua, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dt = f(x_0) \quad (3.26)$$

la función (3.26) se puede tomar como la definición de la $\delta(x - x_0)$. Este resultado es una propiedad cernidora, porque $\delta(x - x_0)$ tiene el efecto de cernir y apartar el valor de $f(x_0)$ fuera del conjunto de valores de f en $(-\infty, \infty)$. Nuestro problema de encontrar el spline suavizante puede formularse como una ecuación integral:

$$\int_a^b K(x_i, y)u(y)dy = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

donde $K(x_i, y) = \delta(y - x_i)$

Los splines suavizantes fueron introducidos por Semoemberg [2]. El fórmula un problema de minimización para la aproximación de las funciones a partir de una tabla de sus valores

$$\min \phi_1(u) = p \int_a^b \left| \frac{d^q y}{dx^q} \right|^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2 \quad (3.28)$$

La solución de este problema en el espacio $W_2^q[a, b]$ es un spline de orden $2q - 1$ con condiciones de frontera naturales (esto es $s^j(a) = s^j(b)$ con $j = 1, \dots, 2q - 1$)

El primer término en (3.28) caracteriza lo "ruidoso" de la solución y el segundo término controla la "fidelidad" (exactitud) de los datos, el parámetro $p \geq 0$ determina el "trueque" (balance) entre estos dos propósitos y se denomina parámetro de suavización. Rein consideró el caso de splines cúbicos y redujo el problema minimización a un sistema de ecuaciones algebraicas. A continuación daremos una exposición para este caso

El problema lo podemos plantear de la siguiente manera: encontrar una función $g(x)$ que minimize el funcional en la clase $W_2^2[a, b]$

$$\phi_1(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 + \sum_{k=0}^n p_k [u(x_k) - \tilde{f}_k]^2. \quad (3.29)$$

Donde p_k son ciertos números positivos. Demostremos que la solución del problema variacional (3.29) es un spline cúbico, o sea, una función que satisface las condiciones (1) - (4) definidas en la **sección** 2.4.

Sea $u_0 \in W_2^2[a, b]$ solución del problema; Construimos el spline $g(x)$ tal que $g(x_k) = u_0(x_k)$ ($k = 0, \dots, n$).

El segundo miembro en (3.29) es igual para las funciones $g(x)$ y $u_0(x)$, por lo tanto :

$$\int_a^b [u_0''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx \quad (3.30)$$

Pero como se determino en la propiedad extremal de los splines cúbicos $g(x)$ es la única función que da para la interpolación $u_0(x_k)$ el valor mínimo para la expresión:

$$\int_a^b [u''(x)]^2 dx. \quad \text{Por lo tanto} \quad u_0 \equiv g$$

Por lo que el min de $\phi_1(u)$ es suficiente buscarlo en la clase de splines cúbicos.

Ya que el spline cúbico se determina unívocamente por los valores $\{\mu_k\}_{k=0}^n$ en los nodos $\{x_k\}_{k=0}^n$, entonces la minimización de $\phi_1(u)$ se convierte en encontrar el mínimo de una función que depende de las variables μ_1, \dots, μ_n .

Nosotros ya conocemos que $g''(x)$ es una función lineal a tramos, a demás:

$$g''(x) = m_{k-1} \frac{x_k - x}{h_k} + m_k \frac{x - x_{k-1}}{h_k}. \quad (3.31)$$

Cuando

$$x \in [x_{k-1}, x_k]; \quad m_k = g''(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad m_0 = m_n = 0.$$

Por lo tanto :

$$\phi_1(g) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[m_{k-1} \frac{x_k - x}{h_k} + m_k \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \right]^2 dx + \sum_{k=0}^n p_k (\mu_k - \tilde{f}_k)^2 \quad (3.32)$$

Integrando en (3.32)

$$\sum_{k=1}^n m_k \left[m_{k-1} \frac{h_k}{6} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3} m_k + \frac{h_{k+1}}{6} m_{k+1} \right] + \sum_{k=0}^n p_k (\mu_k - \tilde{f}_k)^2.$$

$$\phi_1(g) = (Am, m) + \sum p_k (\mu_k - \tilde{f}_k)^2.$$

Debido a que $Am = \mu f$, entonces m linealmente se expresa a través de μ ; esto es

$$m = A^{-1}Hf = A^{-1}H\mu. \quad (3.33)$$

Donde A se definió anteriormente como:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es definida positivamente. Y por consiguiente $\phi(\mu)$ es una función convexa y cuya condición;

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \mu_s} \equiv \frac{\partial}{\partial \mu_s} (Am, m) + 2P_s (\mu_s - \tilde{f}_k) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

La matriz A no depende de μ por lo tanto en base a $Am = h\mu$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_s} (Am, m) &= 2 \left(\frac{\partial (Am)}{\partial \mu_s}, m \right) = 2 \left(\frac{\partial (H\mu)}{\partial \mu_s}, m \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_s}, H^* m \right) = 2(H^m)_s. \quad \text{La } s\text{-ésima componente.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aquí H se determina por la fórmula $Am = Hf$; por consiguiente la condición del mínimo en forma vectorial tiene la forma:

$$H^* m + P\mu = P\tilde{f}. \quad (3.36)$$

Donde $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n)$ y P es una matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Multiplicando HP^{-1} por la izquierda de (3.36) obtenemos

$$HP^{-1} H^*m + H\mu = H\tilde{f} \quad (3.38)$$

$$Am = H\mu \quad (3.39)$$

finalmente teniendo en cuenta $Am = H\mu$

$$(A + HP^{-1} H^*)_m = H\tilde{f}. \quad (3.40)$$

La matriz en el sistema (3.37) es pentadiagonal, simétrica y definida positiva.

Después de resolver (3.37) podemos determinar el spline regularizado a través de (3.36)

$$\mu = \tilde{f} - P^{-1}H^*m \quad (3.41)$$

y luego por la fórmula (2.3) obtenemos $g(x)$.

Ejemplo 3.0.1. Se darán ejemplos utilizando algoritmos en matlab los cuales se encuentran en los anexos.

ANEXOS

Se implementara en matlab los siguientes programas para realizar ejemplos de aplicación del último capítulo.

```
function w = graficar
```

```
syms y k;
```

```
x=[1 4 6 9 10]'; fx=[4 9 15 7 3]'; dfx=[3.98 9.98 14.98 7.98 2.98]';
```

```
plot(x,fx,'*');
```

```
n=length(x);
```

```
for i=1:n-1
```

```
    h(i)=x(i+1)-x(i);
```

```
end; h'
```

```
a = [(h(1)+h(2))/3, h(2)/6, 0;
```

```
    h(2)/6, (h(2)+h(3))/3, h(3)/6;
```

```
    0, h(3)/6, (h(3)+h(4))/3];
```

```
MH = [1/h(1), (-1/h(2)-1/h(1)), 1/h(2), 0, 0;
```

```
    0, 1/h(2), (-1/h(3)-1/h(2)), 1/h(3), 0;
```

```
    0, 0, 1/h(3), (-1/h(4)-1/h(3)), 1/h(4)];
```

```

c=symmul(MH,fx); m = symmul(inv(a),c);

p= [1.01, 0, 0, 0, 0;
    0, 0.1, 0, 0, 0;
    0, 0, 0.03, 0, 0;
    0, 0, 0, 0.03, 0;
    0, 0, 0, 0, 0.0001]

pinv= symmul(inv(p),transpose(MH));
miu1 = eval(dfx-pinv*m) for j=1:5
    error(j)=(miu1(j)-fx(j))/fx(j);
end;
e1=sum(error/5)
% Segunda comparacion:
p= [1.0*rand(1), 0, 0, 0, 0;
    0, 1.0*rand(1), 0, 0, 0;
    0, 0, 1.0*rand(1), 0, 0;
    0, 0, 0, 1.0*rand(1), 0;
    0, 0, 0, 0, 1.0*rand(1)]
pinv= symmul(inv(p),transpose(MH));
miu2 = eval(dfx-pinv*m) for j=1:5
    error(j)=(miu2(j)-fx(j))/fx(j);
end;
e2=sum(error/5)
p= [1.2, 0, 0, 0, 0;
    0, 1.2, 0, 0, 0;
    0, 0, 1.2, 0, 0;
    0, 0, 0, 1.2, 0;
    0, 0, 0, 0, 1.2]

```

```

pinv= symmul(inv(p),transpose(MH));
miu3 = eval(dfx-pinv*m) for j=1:5
    error(j)=(miu3(j)-fx(j))/fx(j);
end;
e3=sum(error/5)
menor_error=min([abs(e1), abs(e2), abs(e3)])
if menor_error==abs(e1)
    miu=miu1;
end;
if menor_error==abs(e2)
    miu=miu2;
end;
if menor_error==abs(e3)
    miu=miu3;
end;
hold on; xx=1:0.25:10; yy=spline(x,fx,xx); plot(x,fx,'+');
plot(xx,yy,'b'); yy=spline(x,miu,xx); plot(x,dfx,'*');
plot(xx,yy,'r'); yy=spline(x,dfx,xx); plot(x,miu,'o');
plot(xx,yy,'g'); hold off;
>> liz
ans =
    3
    2
    3
    1
p =
Columns 1 through 4
    1.0100         0         0         0
         0    0.1000         0         0
         0         0    0.0300         0

```

```

    0      0      0      0.0300
    0      0      0      0
Column 5
    0
    0
    0
    0
    0.0001
miu1 =
1.0e+003 *
    0.0035
    0.0423
   -0.1229
    0.0704
   -4.4218
e1 =
-294.3019
p =
Columns 1 through 4
    0.9501      0      0      0
    0      0.2311      0      0
    0      0      0.6068      0
    0      0      0      0.4860
    0      0      0      0
Column 5
    0
    0
    0
    0
    0.8913

```

miu2 =

3.4294

23.9589

8.1617

11.8323

2.4836

e2 =

0.3164

p =

Columns 1 through 4

1.2000	0	0	0
--------	---	---	---

0	1.2000	0	0
---	--------	---	---

0	0	1.2000	0
---	---	--------	---

0	0	0	1.2000
---	---	---	--------

0	0	0	0
---	---	---	---

Column 5

0

0

0

0

1.2000

miu3 =

3.5441

12.6726

11.5320

9.5401

2.6113

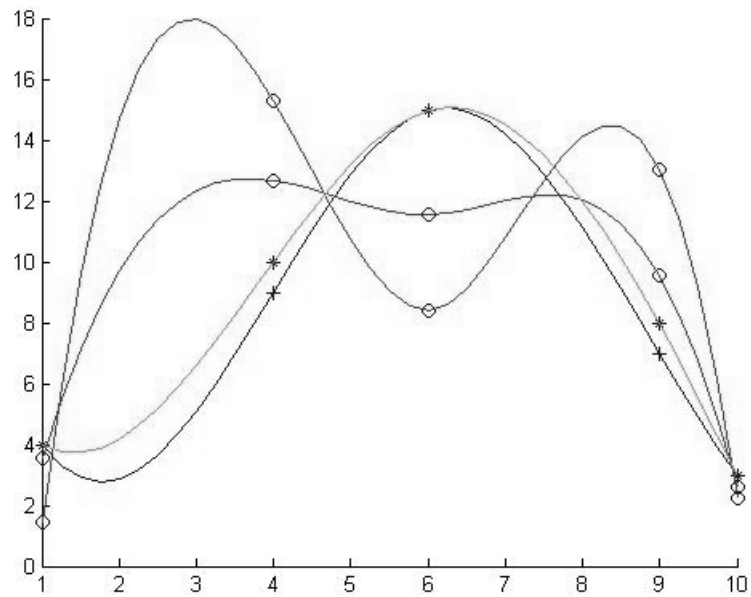
e3 =

0.0592

menor_error =

0.0592

luego grafica la curva con menor error, junto con la verdadera y la cercana:



La azul es la real, la verde es la cercana y la roja es el Spline

Bibliografía

- [1] A. N. TIJONOV, A. A. SAMARSKY, *Ecuaciones de la física matemática*. Moscu: URSS. 1972.
- [2] BOYCE, William, DiPrima, Richard, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cuarta Edición. México: Editorial Limusa. 2001.
- [3] APOSTOL, Tom. *Análisis matemático*. Barcelona: Reverté. 1979.
- [4] SOLANO, Silvia, *Métodos de regularización para la solución de problemas inversos*. Bucaramanga: Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. 2002.
- [5] BURDEN, Richard y FAIRES, Douglas, *Análisis numérico*. México: International Thomson editores. 1998.
- [6] O. M. Alifanov, E. A. Artyukhin y S. V. Rumyantsev. *Extreme methods for solving III-Posed problems whit aApplications to inverse heat transfer problems.*, New York, Wallingford, Begell House, inc. 1995