

PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Prácticas Variacionales en el Estudio de la Derivada como Razón de Cambio. Diseño de una Situación de Aprendizaje.

Brayan Andrey Guerrero Suárez y Ludwin Jaimes Espinosa

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de  
Licenciatura en Matemáticas

Directora

Haided Lised Arciniegas Rueda  
Magister en Educación Matemática

Codirectora

Edith Johanna Mendoza Higuera  
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

**Dedicatoria**

Dedicamos este trabajo principalmente a Dios por todas las oportunidades que nos ha brindado de formarnos como Licenciados en Matemáticas y por permitirnos participar en el desarrollo de la educación.

A nuestras familias por apoyarnos, formarnos y motivarnos en este proceso formativo y por nunca dejar de creer en nosotros.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

### **Agradecimientos**

*Brayan Andrey Guerrero Suárez*

Agradecerle a Dios por la vida, por la familia y por permitirme conocer a cada uno de las personas que estuvieron a lo largo de la carrera.

A mis padres, Doris Suárez y Ferney Guerrero, por todo el cariño, dedicación, esfuerzo y sobre todo el apoyo que me han ofrecido durante mi proceso de formación profesional.

A todos los profesores, que nos compartieron experiencias, conocimientos, quienes nos orientaron en cada uno de los cursos y que dejaron una huella significativa en mi formación como licenciado en matemáticas.

Especialmente, quiero dar un agradecimiento a mis directoras de tesis, Mgtr. Haided Arciniegas y Dr. Johanna Mendoza por su dedicación, orientación y acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo. De la misma forma, quiero agradecer a mi compañero de tesis Ludwin Jaimes, por su apoyo, disposición, colaboración y compromiso para culminar de manera exitosa esta investigación.

Agradezco a todos mis compañeros de la carrera y del programa de tutores SEA-Biblioteca UIS por su apoyo y compañía a lo largo del programa. También, quiero agradecer a mi mejor amiga, Stefanny Rivera, por su valiosa amistad, apoyo constante y por compartir valiosas experiencias conmigo en el transcurso de mi formación académica.

Finalmente, agradezco a todas las personas que estuvieron directa e indirectamente presentes en mi formación personal y académica ya que este logro también es de ustedes.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Ludwin Jaimes Espinosa*

Agradezco a Dios por la oportunidad de formarme y mantenerme en una disciplina que me apasiona y por permitirme recorrer este proceso acompañado de personas que han enriquecido significativamente mi aprendizaje. Por permitirme involucrarme en actividades y grupos que aportaron en mi crecimiento espiritual, social y profesional.

Agradezco de todo corazón a mis padres Luzbin Jaimes y María Espinosa, por su apoyo incondicional, su orientación constante y por constituirse como pilares fundamentales en mi desarrollo personal y académico.

Agradezco a las docentes, Mgtr. Haided Arciniegas y Dr. Johanna Mendoza, que guiaron este trabajo, por su compromiso, disposición y valiosos aportes a lo largo de su elaboración. De igual manera, agradezco a mi compañero Brayan Guerrero, cuyo acompañamiento y dedicación fueron esenciales en el desarrollo de este proceso.

Agradezco a todos los docentes que brindaron su amistad y su conocimiento para que pudiera llenar vacíos en mi conocimiento y deleitarme en el estudio de la matemática y su enseñanza

Agradezco también a mis amigos y familiares, quienes, con su apoyo permanente, han reforzado en mí la importancia del esfuerzo, la responsabilidad y la excelencia en cada meta propuesta.

# PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

## Contenido

<b>Introducción .....</b>	<b>10</b>
<b>1. Antecedentes.....</b>	<b>17</b>
1.1. Derivada en la Enseñanza del Cálculo .....	17
1.2. Enseñanza del Cálculo con Herramientas Digitales.....	21
1.3. Enseñanza de la Derivada con Tecnología.....	25
<b>2. Planteamiento del Problema .....</b>	<b>28</b>
<b>3. Aspectos Teóricos.....</b>	<b>32</b>
3.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa .....	32
3.2. Pensamiento y Lenguaje Variacional.....	33
3.3. Prácticas Variacionales .....	37
3.4. Situación de Aprendizaje .....	39
3.5. Derivada como Razón de Cambio .....	42
<b>4. Aspectos Metodológicos.....</b>	<b>47</b>
<b>5. La derivada como razón de cambio a través del desarrollo de las PV.....</b>	<b>58</b>
5.1. Momento 1 .....	58
5.2. Momento 2.....	69
5.3. Momento 3.....	77
<b>6. Ajustes del diseño.....</b>	<b>85</b>
6.1. Ajustes por orientación y redacción.....	85
6.2. Ajustes por recurso .....	88
6.3. Emergencia de las prácticas .....	91
<b>7. Descripción sobre el desarrollo de las Prácticas Variacionales en la SA .....</b>	<b>93</b>
7.1. Comparación .....	93
7.2. Seriación .....	94
7.3. Predicción .....	98
7.4. Estimación.....	99
<b>8. Orientaciones para el docente.....</b>	<b>102</b>

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

<b>9. Conclusiones .....</b>	<b>106</b>
<b>Referencias Bibliográficas.....</b>	<b>109</b>
<b>Apéndice .....</b>	<b>116</b>

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Gráfica de la función .....	44
<b>Figura 2.</b> Representación tabular .....	45
<b>Figura 3.</b> Tabla razón de cambio instantánea.....	46
<b>Figura 4.</b> Esquema del experimento de enseñanza .....	48
<b>Figura 5.</b> Camino metodológico .....	48
<b>Figura 6.</b> Derivada como razón de cambio a través del contexto económico y financiero.....	50
<b>Figura 7.</b> Momentos de la situación de aprendizaje relacionando las etapas dentro del contexto ..	56
<b>Figura 8.</b> Applet Balanza electrónica.....	59
<b>Figura 9.</b> Applet con el costo total de 5 kg de maní.....	62
<b>Figura 10.</b> Applet señalando la capacidad ocupada por 5 kg.....	63
<b>Figura 11.</b> Tabla para el comportamiento del costo total.....	64
<b>Figura 12.</b> Tabla para regresión lineal de función costo total .....	66
<b>Figura 13.</b> Indicaciones del análisis de regresión de dos variables.....	66
<b>Figura 14.</b> Razón de cambio instantánea para el costo .....	67
<b>Figura 15.</b> Entrada para escribir el modelo de regresión .....	68
<b>Figura 16.</b> Applet de la simulación que realizó Manfred.....	69
<b>Figura 17.</b> Applet de ingresos señalando cantidades de maní vendidas .....	70
<b>Figura 18.</b> Ingreso promedio por unidad o razón de cambio promedio .....	72
<b>Figura 19.</b> Ingreso marginal como razón de cambio instantánea.....	74
<b>Figura 20.</b> Análisis de regresión de dos variables para ingreso marginal .....	75
<b>Figura 21.</b> Applet para la comparación entre el ingreso total y costo total.....	78
<b>Figura 22.</b> Concepción de la utilidad total .....	79
<b>Figura 23.</b> Applet para graficar la función utilidad.....	80
<b>Figura 24.</b> Coordenadas de los puntos de ingreso total y costo total .....	81
<b>Figura 25.</b> Applet para obtener la gráfica la función de utilidad marginal .....	83
<b>Figura 26.</b> Entrada para escribir la función de utilidad marginal.....	84
<b>Figura 27.</b> Ajuste tarea 11 .....	88
<b>Figura 28.</b> Ajuste tarea 14.....	89
<b>Figura 29.</b> Ajuste tarea 15 .....	89
<b>Figura 30.</b> Ajuste tarea 22.....	90
<b>Figura 31.</b> Ajuste tarea 30.....	90
<b>Figura 32.</b> Ajuste tarea 33.....	91
<b>Figura 33.</b> Respuesta de E1 y E2 .....	93
<b>Figura 34.</b> Respuesta E3 .....	94
<b>Figura 35.</b> Respuesta E4 .....	95
<b>Figura 36.</b> Respuesta E5 .....	96
<b>Figura 37.</b> Respuesta E6 de la tarea 38 .....	97
<b>Figura 38.</b> Respuesta E6 de la tarea 39 .....	97
<b>Figura 39.</b> Respuesta E7 .....	98
<b>Figura 40.</b> Respuesta E8 .....	99
<b>Figura 41.</b> Respuesta E9 .....	100
<b>Figura 42:</b> Respuesta E10 .....	100

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

<b>Figura 43.</b> Respuestas E11 y E12 .....	101
--	-----

**Tabla de apéndices**

<b>Apéndice A.</b> <i>Situación de aprendizaje</i> .....	116
--	-----

## Resumen

**Título:** Prácticas Variacionales en el Estudio de la Derivada como Razón de Cambio. Diseño de una Situación de Aprendizaje\*

**Autores:** Brayan Andrey Guerrero Suárez y Ludwin Jaimes Espinosa\*\*

**Palabras clave:** Derivada, Razón de cambio, Prácticas variacionales, Situación de aprendizaje, Análisis marginal.

### Descripción:

En esta investigación se propone una situación de aprendizaje que incentive el desarrollo de las prácticas variacionales en el estudio de la derivada como razón de cambio en estudiantes de grado once, ya que se ha evidenciado que los estudiantes de primer ingreso de educación superior presentan dificultades en la significación de los conceptos del cálculo diferencial, especialmente de la derivada como razón de cambio (Fiallo y Parada, 2018). Incluso, en los Estándares básicos de competencias (MEN, 2006) se distingue 3 competencias relacionadas con el concepto de derivada, en donde se destaca la derivada como razón de cambio, la cual es fundamental para la formación de estudiantes de educación media matemáticamente competentes para ingresar a la educación superior.

La investigación se fundamenta en la articulación de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) las Prácticas Variacionales (PV) y el estudio de la derivada como razón de cambio (Promedio e instantánea) desde las tres epatas de la Situación de Aprendizaje (Factual, procedimental y simbólica). Metodológicamente, esta investigación basada en el diseño desde los principios del experimento de enseñanza enfocada en la conjetura de: Promover el desarrollo de las PV para abordar la noción de derivada como razón de cambio por medio del software GeoGebra.

Los resultados evidencian que al abordar una situación de aprendizaje contextualizada en el análisis marginal incentiva la significación de la derivada como razón de cambio desde el desarrollo de las PV, partiendo de la razón de cambio promedio hasta llegar a la razón de cambio instantánea. Además, al articular la SA con un contexto económico permite sincronizar conceptos económicos y financieros con conceptos del cálculo diferencial.

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.

Directora: Haided Lised Arciniegas Rueda. Magíster en Educación Matemática.

Codirectora: Edith Johanna Mendoza Higuera. Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa.

**Abstract**

**Title:** Variational Practices in the Study of the Derivative as a Rate of Change. Designing a Learning Activity\*

**Authors:** Brayan Andrey Guerrero Suárez and Ludwin Jaimes Espinosa\*\*

**Key Words:** Derivative, Rate of Change, Variational Practices, Learning Situation, Marginal Analysis.

**Description:**

This study proposes a learning situation designed to encourage the development of variational practices in the study of the derivative as a rate of change among 11th-grade students, as evidence shows that first-year college students struggle to grasp the concepts of differential calculus, particularly the derivative as a rate of change (Fiallo and Parada, 2018). Furthermore, the Basic Competency Standards (MEN, 2006) identify three competencies related to the concept of the derivative, highlighting the derivative as a rate of change, which is fundamental for preparing mathematically competent high school students to enter higher education.

The research is grounded in the integration of the Socio-Epistemological Theory of Mathematics Education (STME), Variational Practices (VP), and the study of the derivative as a rate of change (average and instantaneous) from the three dimensions of the Learning Situation (factual, procedural, and symbolic). Methodologically, this research is based on a design grounded in the principles of the teaching experiment, focused on the hypothesis of: Promoting the development of VP to address the notion of the derivative as a rate of change using GeoGebra software.

The results show that approaching a learning situation contextualized within marginal analysis highlights the significance of the derivative as a rate of change through the development of the VP, starting with the average rate of change and progressing to the instantaneous rate of change. Furthermore, by integrating LS with an economic context, it allows for the synchronization of economic and financial concepts with concepts from differential calculus.

Degree Work

\*\* Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in Mathematics.

Director: Doris Haided Lised Arciniegas Rueda. Master's degree in Mathematics Education.

Co-director: Edith Johanna Mendoza Higuera. Ph.D. in Science, specializing in Mathematics Education.

### Introducción

La enseñanza de los contenidos preliminares de cálculo en el bachillerato es fundamental para que los estudiantes adquieran las bases necesarias para enfrentarse al curso de Cálculo Diferencial en educación superior. Para la interpretación y construcción del significado formal de los conceptos se requiere la conexión de los conocimientos previos con los nuevos y, varias dificultades de los estudiantes se deben a las falencias en los prerrequisitos (Jara, 2018; Londoño et al, 2017). Una de estas dificultades es la concurrencia de asignar significados algorítmicos y cuantitativos a la razón de cambio, por ende, es esencial estudiar este último en la educación media para luego, abordar la derivada en la educación superior (Londoño et al, 2017).

Según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2003) los estudiantes al terminar la educación media deben alcanzar el *saber y saber hacer* propuestos en cuatro estándares para el pensamiento variacional, de los cuales tres están relacionados con el concepto de derivada y uno destaca la derivada como razón de cambio. Algo similar ocurre en los Principios y Estándares de la Educación Matemática publicado por la National Council of Teacher of Mathematics (2000/2003) donde proponen que, al terminar el grado 12 los estudiantes interpreten el cambio, al reconocer la razón de cambio como eje fundamental del pensamiento variacional. Sin embargo, los estudiantes de nuevo ingreso de instituciones de educación superior revelan dificultades en competencias relacionadas con conceptos como función, límites o derivadas y por ello, las dificultades al enfrentar el curso de Cálculo Diferencial (Fiallo y Parada, 2018).

Por ende, se han planteado diversas estrategias metodológicas que buscan mitigar aquellas dificultades que tienen los estudiantes y favorecer la construcción de conocimiento, en especial, sobre conceptos del cálculo como la derivada. En ese sentido, la Teoría Socioepistemológica de la

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Matemática Educativa (TSME) establece que la construcción del conocimiento matemático surge del estudio de prácticas sociales, que dan cuenta que el saber se construye desde la realidad de los humanos y es ahí, donde las justificaciones responden a lo funcional del conocimiento (Espinosa y Jiménez, 2014). luego, la mayoría de las situaciones de la cotidianidad se llegan a relacionar con la matemática desde la modelación de situaciones de variación y el cambio (Cordero et al., 2015, citado por Arciniegas, 2023), por lo tanto, es importante que los estudiantes desarrollen estrategias para caracterizar la variación y el cambio en situaciones cercanas donde puedan significar y desarrollar el pensamiento variacional. Es así, que Caballero (2018) propone las prácticas variacionales, como formas de razonar y operar el cambio y la variación en una situación, en la medida en que se caracterizan las variables que cambian, cómo cambian, cuánto cambian y porqué cambian de esa manera, desde la cualificación y cuantificación del cambio para la predicción (Caballero y Cantoral, 2018). Por lo tanto, el uso de las prácticas variacionales favorecería la interpretación de la derivada como razón de cambio, debido a que para predecir el comportamiento de las variables en una situación se caracteriza el cambio desde sus diferencias.

Ahora, una situación de aprendizaje permite estructurar de manera secuencial el proceso de enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto (Williner, 2018) pues, posibilita organizar, estructurar y analizar las actividades con el fin de que los estudiantes pongan en marcha los saberes previos para construir un significado del concepto más allá del uso de algoritmos y procedimientos, recurriendo a otras estrategias como la argumentación visual a partir de diversas representaciones de un objeto matemático (Farfán et al, 2016). Luego, GeoGebra como software de geometría dinámica permite rescatar la intuición geométrica y simulación de fenómenos físicos alusivos al cálculo (Dolores, 2000 y Villamizar et al. 2017 citados en Contreras, 2023), de allí su potencialidad para valorar, explorar y modelar situaciones, con el propósito de visualizar las

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

variaciones (Córdoba, 2018), lo que favorece la comprensión de la derivada como razón de cambio.

Por lo anterior, se propone diseñar una situación de aprendizaje que favorezca la interpretación significativa de la derivada como razón de cambio al enfrentar tareas que incentiven el desarrollo de prácticas variacionales con el uso de GeoGebra como recurso, desde la potencialidad de sus herramientas para la manipulación del objeto matemático.

La estructura de este documento inicia con el Capítulo 1, en donde se realiza una revisión bibliográfica sobre aquellos documentos que reportan resultados de investigación relacionados con el pensamiento variacional, especialmente con la enseñanza de la derivada como razón de cambio. Allí se discute sobre: (1) Derivada en la enseñanza del cálculo, (2) Enseñanza del cálculo con herramientas digitales y (3) Enseñanza de la derivada con tecnología.

En el capítulo 2, se expone la problemática que hay alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos del Cálculo Diferencial. Se centra la atención discutir cómo se ha abordado la enseñanza del concepto de la derivada como razón de cambio en la educación media y las tensiones que esto ha generado al ingresar a la Educación Superior.

El capítulo 3, se expondrá los aspectos teóricos que se utilizarán en la investigación y que serán de utilidad para diseñar la situación de aprendizaje. Entre estos aspectos teóricos se encuentra la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVa), Prácticas Variacionales, Situación de Aprendizaje (SA) y la Derivada como Razón de Cambio. Además, en la síntesis de este capítulo se aborda la articulación del concepto de derivada como razón de cambio desde el desarrollo de las cuatro prácticas variacionales que plantea Caballero (2018).

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Por otro lado, en el capítulo 4 se presentan los aspectos metodológicos de la investigación donde se consideró la estrategia investigativa del experimento de enseñanza propuesta por Camargo (2021), para el planteamiento de las fases. Además, se explicará la estructura de la situación de aprendizaje teniendo en cuenta las prácticas variacionales, las etapas de la SA y el concepto de derivada como razón de cambio relacionándolo con el contexto del análisis marginal y las herramientas de GeoGebra.

Posteriormente, en el capítulo 5, se describe el diseño y justificación detrás de cada tarea o instrucción que compone la SA, donde se especifica los objetivos de cada momento, el tipo de tareas variacionales y cómo se incentiva la noción de la derivada como razón de cambio a partir de las prácticas variacionales.

En el capítulo 6 se presentan aquellos ajustes que se realizaron en la situación de aprendizaje teniendo en cuenta los resultados en el pilotaje; en particular ajustes sobre orientación y redacción de las tareas y, ajustes por recurso que refiere a aquellas modificaciones relacionadas con los applets, recursos o herramientas en el software de GeoGebra. Así mismo, en el capítulo 7 se evidenciará, grosso modo, cómo los estudiantes emplearon las prácticas variacionales en aquellas tareas de la SA para acercarse a la noción del concepto de derivada como razón de cambio.

El capítulo 7, consiste en las orientaciones docentes que se plantean teniendo en cuenta las intervenciones que se realizaron en el pilotaje, con el fin de aclarar y guiar a futuros docentes que deseen implementar la SA.

Al finalizar, se exponen las conclusiones de la investigación que constituye una síntesis del proceso que se realizó para cumplir el objetivo de investigación *diseñar y valorar una situación de aprendizaje que incentive el desarrollo de prácticas variacionales en el estudio de la derivada*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*como razón de cambio en estudiantes de grado once.* Cabe destacar que, el abordaje de la SA a partir del análisis marginal permitió relacionar el concepto matemático con una situación cercana a los estudiantes, donde las prácticas variacionales favorecían la construcción de la noción de la derivada como razón de cambio (Razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea).

## **1. Antecedentes**

En este apartado se presenta la revisión bibliográfica que permitió estructurar y respaldar la propuesta de investigación. Así, se seleccionaron artículos, libros, tesis y memorias de eventos que han abordado los temas que se involucran con el pensamiento variacional, situación de aprendizaje, derivada, razón de cambio, modelación, implementación de tecnología en matemáticas y softwares de geometría dinámica. Por lo tanto, este capítulo se subdivide en tres secciones: (1) Derivada en la enseñanza del cálculo, (2) Enseñanza del cálculo con herramientas digitales y (3) Enseñanza de la derivada con tecnología.

### **1.1. Derivada en la Enseñanza del Cálculo**

Al concepto de derivada se asocian diferentes significados: derivada como razón de cambio, la pendiente de la recta tangente, límite de un cociente incremental o como la variación de un fenómeno, concepciones importantes para comprender el concepto de derivada como un todo (Hernández et al, 2023; y Castro et al, 2015, citado por Briceño et al, 2024). En especial, la derivada como razón de cambio se describe desde la interpretación de diversos contextos y representaciones que, posteriormente se relacionan con las concepciones de la derivada como la pendiente de la recta tangente y como límite de un cociente (Briceño et al, 2024). Luego, esta concepción posibilita el estudio de situaciones donde el cambio es el eje principal, allí se favorece la identificación de ideas intuitivas de los estudiantes sobre el cambio y la variación y, por ende, la posterior construcción y significación del concepto, más aún para el desarrollo del pensamiento predictivo (Cabrera y Cantoral, 2010).

Ahora, para que la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada tenga éxito es importante tener en cuenta como punto de partida los conocimientos previos del estudiante, el uso de representaciones gráficas, situaciones concretas y las posibles dificultades al pasar de las ideas

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

de aproximación y estimación desde el concepto de límite al concepto de derivada (Azcárate, et al., 1990 citado por Jara, 2018) pues, son recurrentes las dificultades de los estudiantes, a razón de que la derivada suele ser vista como un procedimiento algebraico donde la atención se desvía hacia el desarrollo de procedimientos algorítmicos con escasa comprensión de su significado (González y Dolores, 2016).

En ese sentido, Gonzáles y Dolores (2016) promueven el significado de la derivada como la rapidez promedio e instantánea a partir del uso del lenguaje verbal, algebraico y gráfico, con el fin de generalizar el concepto de derivada y asociar su significado al cambio, por lo tanto, establecen preguntas orientadoras como: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿qué tan rápido cambia? y ¿cuál es la rapidez en un instante? En respuesta al cambio, la medición y el comportamiento en situaciones problemáticas alrededor de fenómenos de movimiento. Luego, en las discusiones del diseño, los autores mencionan la importancia de proponer tareas que busquen contrarrestar el uso generalizado de la fórmula de velocidad media para priorizar el análisis de variaciones pequeñas, identificar la velocidad instantánea y evitar el abordaje procedimental sin significación. Por lo tanto, se destacarán investigaciones que se encargaron de enfrentar la concepción algorítmica de la enseñanza del concepto para priorizar el estudio de la derivada desde el análisis de la variación.

Vrancken y Engler (2014) proponen el estudio de la razón de cambio asociado al significado como velocidad media e instantánea en situaciones de movimiento rectilíneo uniforme y movimiento uniformemente acelerado, con el objetivo de que los estudiantes analicen la variación desde diversos registros de representación en la interacción con herramientas tecnológicas. En especial, se abordó la derivada como razón de cambio partiendo de las concepciones previas que tienen los estudiantes sobre la velocidad para así, identificar qué

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

magnitudes cambian, cuánto cambian y cómo cambian; e incentivar el desarrollo de estrategias variacionales para analizar los diversos estados del cambio. Dentro de la discusión de la secuencia, los autores destacan el planteamiento de actividades para diferenciar el cálculo de la velocidad media e instantánea, para propiciar el cálculo de aproximaciones para la razón de cambio promedio desde el registro tabular, donde es posible distinguir de forma cuantitativa los cambios. Además, las autoras resaltan que con la ayuda de la aproximación de la velocidad media se puede llegar a relacionar la razón de cambio con las pendientes de la recta secante y la pendiente de la recta tangente de una curva. No obstante, los resultados de una secuencia de actividades se restringen por la aptitud del estudiante para reconocer que para aprender se debe participar, hacer matemáticas y dar cuenta de que es posible aprender matemáticas.

De manera similar, Sánchez y Molina (2006) presentan la descripción de un taller orientado a favorecer la emergencia de argumentos numéricos relacionados con la diferencia como la variación entre dos estados consecutivos, exploración gráfica y reflexión algebraica de la derivada; luego, los autores resaltan la interpretación de la derivada desde sus representaciones gráficas o tabulares para caracterizar y significar el movimiento pues, la construcción de argumentos numéricos precisan el estado natural en el que se desarrolló el concepto. De hecho, se establece que la representación gráfica podría favorecer la interpretación de la derivada de orden superior. Por tanto, al igual que Vrancken y Engler (2014), se destaca la importancia de abordar el concepto de derivada desde situaciones del movimiento y otros fenómenos, teniendo en cuenta que el contexto numérico y las bases intuitivas fomentan la comprensión del concepto.

Leandro (2013) propone un análisis gráfico del concepto de razón de cambio, por medio del diseño de actividades que permiten significar la razón de cambio en los aprendizajes de los estudiantes promoviéndola como una herramienta para el análisis de la variación de parámetros de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

una función. Para esto se tuvo en cuenta las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes, las relaciones a establecer entre los procesos y objetos matemáticos y el análisis gráfico usado como herramienta que adjudique un significado a la razón de cambio.

Así mismo, Leandro (2013) parte de la importancia de la derivada para construir el significado del concepto de razón de cambio (instantánea) y de la facilidad de la comprensión de la idea de variación para realizar su diseño, trabajando directamente el concepto de razón de cambio. Sus resultados muestran que el éxito en el desarrollo de las actividades se ve influenciado por las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes y de la interpretación del contexto de la velocidad del flujo de agua, puesto que esto permite la toma de decisiones y la reflexión a las respuestas dadas. Por otra parte, el análisis gráfico permitió ver la razón de cambio como un valor que se relaciona con el cambio de parámetros variables. Sin embargo, también expresa que el proceso de construir el concepto de derivada a partir de la razón de cambio no es un proceso natural, esto debido a que este significado desde el análisis gráfico tiene su fundamento en el desplazamiento (promedio), pero al hablarse de un único punto no se evidencia desplazamiento, por lo que la razón de cambio en un punto (instantánea o derivada) fue un concepto de difícil comprensión ya que al no haber desplazamiento, para los estudiantes tampoco hubo cambio. Esto lleva a la conclusión de que el uso del significado de razón de cambio en relación con la derivada debe influenciarse por el uso de conceptos y procesos que se encuentren bajo el dominio de los estudiantes, como el concepto de límite. Por otro lado, el uso de las representaciones gráficas favorece el acercamiento al comportamiento de la variación y facilita el análisis de los conceptos, en este caso, la relación entre la razón de cambio con la variación de parámetros.

Por otra parte, Cardona (2012) realiza una propuesta didáctica partiendo de un recorrido epistemológico del concepto de derivada, especialmente como razón de cambio. Así, desde la

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

conexión con el pensamiento numérico - variacional, discute conceptos como: razón, proporción, proporcionalidad, función lineal y afín, al reconocer su articulación para la posterior interpretación de la derivada como razón de cambio. En particular, los autores destacan que esta interpretación es uno de los primeros significados asociados al concepto de derivada, en tanto que los contextos cercanos al estudiante favorecen el análisis de la variación y el cambio; por ejemplo, en una situación relacionada con el estudio de las variaciones del dólar en los últimos meses, es posible visualizar y medir los cambios de las variables en intervalos de la función para luego, establecer las razones de las diferencias de las dos variables y trastocar la razón de cambio instantánea. Luego, el autor destaca la valoración positiva acerca del uso de la epistemología como estrategia de enseñanza del concepto de la derivada y el uso de aspectos como: representaciones, elementos conceptuales y resolución de problemas para abordar la variación y el cambio y así, propiciar una mejor comprensión de la derivada como razón de cambio.

En conclusión, la revisión bibliográfica evidencia que el uso de un contexto apropiado es fundamental en el momento de trabajar los significados de la derivada (razón de cambio, pendiente de la recta tangente, tasa de variación, entre otros), al fomentar el desarrollo de argumentos mediados por las interpretaciones de las diferentes representaciones del objeto matemático. En ese sentido, la articulación con la modelación matemática como puente entre la matemática escolar y la funcional permite abordar fenómenos que signifiquen el concepto de derivada como razón de cambio.

### **1.2.Enseñanza del Cálculo con Herramientas Digitales**

Este apartado da cuenta de los trabajos de investigación que relacionan el uso favorable de herramientas digitales para la enseñanza del cálculo y desarrollo del pensamiento variacional.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

El cálculo suele verse como una serie de pasos que los estudiantes mecanizan sin comprender su significado por ello, las dificultades comunes al enfrentar el curso de cálculo diferencial (Tejeira, 2021). En ese sentido, las herramientas digitales, desde su versatilidad en el diseño de actividades, favorecen el estudio del cambio y la variación, al posibilitar la interacción directa con las diversas representaciones del objeto matemático, lo que incentiva la argumentación y exploración de ideas inmersas en el pensamiento variacional.

Por su parte, Gonzáles (2021) y Córdoba (2018) proponen talleres que articulan tareas en el software de GeoGebra, con el objetivo de potenciar el desarrollo de procesos matemáticos relacionados con el pensamiento variacional, destacando la resolución de problemas como protagonista. Ambos autores centran la atención en el concepto de función, sin embargo, Gonzáles (2021) establece que la validación del diseño evidenció que GeoGebra desde su facilidad de uso y versatilidad, posibilita la identificación de conocimientos previos, el estudio y comprensión del concepto de función y sus implicaciones desde las habilidades que se ven favorecidas en el proceso de modelación. De igual manera, Córdoba (2018) resalta la potencialidad de la herramienta digital para la manipulación de diversos registros de representación y profundización en los conceptos que podrían llevar a dificultades en actividades posteriores. Luego, ambos autores coinciden en que GeoGebra incentiva la autonomía y motivación en los estudiantes. Por tanto, el uso de herramientas digitales como el software de GeoGebra facilita la exploración del concepto e influencia positivamente en el desarrollo de la comprensión, además de modelar situaciones problema donde al interactuar, el estudiante puede descubrir propiedades y realizar inferencias respecto a lo que comprende y extrae de dicha interacción.

Por su parte, Ayala, et al (2006) establecen que un Entorno Virtual de Aprendizaje como medio de interacción proporciona oportunidades para la observación, manipulación,

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

experimentación de la variación y conceptos del pensamiento variacional (función seno, funciones de variable, derivada e integral) desde las diferentes representaciones e incentiva la motivación en los estudiantes. En ese sentido, los autores plantean una propuesta que involucra el estudio de situaciones de variación y cambio con el uso de recursos computacionales interactivos teniendo en cuenta situaciones de la vida diaria que permitan a los estudiantes identificar, describir, interpretar y predecir. Los resultados mostraron que es necesario aprovechar aquellas herramientas que poseen mejor nivel en los medios de representación simbólica, algebraica y gráfica, además de que dichos medios muestran la matemática de manera significativa y dinámica permitiendo la experimentación con los conceptos, pero a causa del desconocimiento es necesario que las actividades sean claras y tengan instrucciones precisas para lograr una mejor interacción. Por lo que, es importante hacer uso de dichos recursos computacionales relacionándolos con situaciones que permitan ver, describir, experimentar y concluir a través de las representaciones del concepto matemático.

De manera similar, Cortés (2017) sigue la idea de la facilidad que brindan las herramientas digitales en relación con la manipulación de representaciones del objeto matemático (tabular y gráfica) para enfrentar los retos relacionados con la concepción algebraica. En tanto, el autor propone una serie de actividades con el uso del software “Fun\_Der” con el propósito de que el estudiante desarrolle estrategias, para manipular incrementos a través de operaciones elementales, y establezca la razón entre incrementos para interpretar la pendiente de la recta tangente y así, acercarse a la significación del concepto de derivada desde la representación gráfica. Asimismo, se precisa la interacción de la progresión aritmética como camino para establecer la noción de diferencia de dos datos consecutivos en el registro tabular y distinguir la relación con su representación gráfica y posterior, con la expresión algebraica de la función polinomial. Luego,

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

desde la experimentación, el autor concluye que, abordar representaciones numéricas y gráficas a través de la tecnología, beneficia el estudio de la derivada a partir de los incrementos de las variables, en la razón de los incrementos, las diferencias, la pendiente de la recta tangente y la construcción de la función razón de cambio.

Por otro lado, Gonzales et al. (2013), diseñaron una situación de aprendizaje utilizando el software DataStudioR y Microsoft Excel para abordar la derivada como razón de cambio a partir de la experimentación de fenómenos físicos en tiempo real, que permiten evidenciar la cuantificación del cambio y a su vez, analizar la variación y el comportamiento del fenómeno desde la representación gráfica y tabular. Los autores muestran que el uso de estas herramientas ayuda a que los estudiantes asocien el cambio con el concepto de derivada y, su uso posibilita que los estudiantes enfrenten una situación de variación, identifiquen y determinen las variables que cambian y la rapidez a partir de la predicción y estimación de valores. De hecho, al implementar la situación de aprendizaje concluyen que, los estudiantes logran comprender el concepto de la derivada como una cuantificación de la variación instantánea y se sugiere profundizar en el discurso matemático de la variación, teniendo como eje principal el concepto de derivada.

En síntesis, Cortés (2017) destaca lo beneficioso que es el diseño de actividades con una herramienta digital, debido a que los estudiantes por medio de la exploración se van aproximando al concepto de la derivada y en general, a las ideas del cálculo diferencial desde diversos registros de representación. Por ende, el uso de herramientas digitales es de gran ayuda y beneficio para el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo y en especial, en el desarrollo del pensamiento variacional ya que favorece la manipulación e interpretación de representaciones gráficas y algebraicas e, interacción directa en tiempo real entre el estudiante y el concepto a tratar.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Adicionalmente, las herramientas digitales motivan el trabajo activo de los estudiantes y son novedosas para el desarrollo de tareas y habilidades en los procesos matemáticos.

### **1.3.Enseñanza de la Derivada con Tecnología**

En esta categoría se discuten aquellas investigaciones que articularon el software de GeoGebra para el estudio de la derivada como razón de cambio.

En varias investigaciones se encontró que se utiliza el software de GeoGebra como instrumento mediador para el diseño de las actividades e incentivar el aprendizaje de la derivada como razón de cambio, como se evidencia en Fiallo y Rodríguez (2019) y Londoño, et al. (2017), que afirman que el software brinda la posibilidad de que los estudiantes exploren a detalle las actividades y profundicen en la derivada como razón de cambio, al distinguir la variación de las variables dependientes e independientes de la situación desde diversas representaciones.

En particular, Londoño et al. (2017) diseñaron una serie de actividades que articulan el uso de lápiz y papel y archivos interactivos de GeoGebra al abordar fenómenos de movimiento, especialmente de movimiento rectilíneo uniforme y circular uniforme. Se menciona que la herramienta digital se conceptualiza como mediadora para la exploración, registro de datos y comprensión de la razón de cambio desde la representación gráfica, numérica y algebraica. El objetivo de las tareas se centró en identificar el comportamiento de las variables para el desarrollo de habilidades como la estimación, la visualización y la búsqueda de patrones. En tanto, desde la experimentación, los autores concluyeron que, la interacción de representaciones gráficas, tabulares y numéricas en GeoGebra favoreció la exploración y visualización dinámica del comportamiento de los fenómenos de movimiento, generando una idea global de la derivada como razón de cambio desde la interacción con gráficas continuas a escala, e interpretación de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

expresiones algebraicas que modelan las variables inmersas en el problema, a pesar de las dificultades al momento de extraer información de las tablas y conjeturar expresiones algebraicas sin el uso de la tecnología.

Pantoja y Leal (2017) plantean una secuencia didáctica con el propósito de propiciar el concepto de la derivada como razón de cambio y la pendiente de la recta tangente por medio de los softwares Tracker y GeoGebra usando la modelación matemática como medio para desarrollar el concepto, teniendo en cuenta la interacción oportuna del estudiante con la tecnología y el docente. Al implementar la secuencia, los autores dan cuenta de que el uso de tecnología motiva a los estudiantes a desarrollar las actividades y les permite apropiarse de conceptos fundamentales como la razón de cambio promedio y la pendiente de una recta que llevan posteriormente a la derivada, lo que favorece la modelación de situaciones problema desde el análisis, la experimentación y exploración por medio de las manipulaciones del objeto matemático en la herramienta. Además, se destaca que el uso del software de Tracker, permitió que los estudiantes modelen situaciones de movimiento de la vida cotidiana por medio de la grabación para que posteriormente con el software de GeoGebra puedan determinar las variables involucradas y manipular los datos obtenidos de la situación desde diversas representaciones, con el fin de obtener un acercamiento al concepto de la derivada como razón de cambio.

De hecho, Forero y López (2012) en su estudio sobre la noción temprana de la razón de cambio, proponen una secuencia didáctica inmersa en la modelación y uso del software de GeoGebra para estudiantes de sexto grado. Las actividades se orientan a la predicción de patrones de regularidad, relaciones en series aritméticas, correlación de magnitudes y comparación en las velocidades de llenado de varios envases. Los resultados evidenciaron que GeoGebra facilitó que los estudiantes determinarán las veces que aumenta una magnitud con respecto a otra en un mismo

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

instante de tiempo con la ayuda de la manipulación de deslizadores. De tal modo que, se resalta que la manipulación de objetos matemáticos desde las herramientas que ofrece GeoGebra promueve el aprendizaje y acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional. Por otra parte, se evidenció comprensión en aspectos relacionados con la razón de cambio, específicamente en aspectos como la relación entre magnitudes (tiempo y distancia) a través de análisis cualitativos y cuantitativos, estas relaciones fueron construidas gracias al uso del software en especial, las relaciones entre el tiempo y la magnitud relacionada (distancia o capacidad). Además, también permitió el paso de información de representaciones gráficas a tabulares y viceversa. Por lo que se muestra un gran beneficio para los estudiantes en su proceso de aprendizaje, ya que el uso del software permite al estudiante una mejor interacción con el concepto, realizando trasposos de información desde una representación a otra y permitiendo visualizar e identificar relaciones entre magnitudes establecidas, por lo que el estudiante puede desarrollar habilidades de análisis cuantitativo y cualitativo.

Lo anterior confirma que, el uso de la tecnología influye positivamente en la enseñanza del concepto de la derivada y conocimientos previos a él, por ser un facilitador para la exploración del concepto a través de la observación, manipulación y exploración de diferentes representaciones del objeto matemático. Sin embargo, es importante que las actividades incentiven la interpretación de modelos relacionados con la derivada como razón de cambio, al articular representaciones desde las vistas y herramientas que ofrece GeoGebra como: la calculadora gráfica, vista algebraica, la tabla de cálculo y el uso de los deslizadores; en especial el último pues, este favorece la identificación y cálculo de aproximaciones de la recta tangente o la razón de cambio promedio en dos puntos de una función (García et al. 2018).

## 2. Planteamiento del Problema

El pensamiento variacional juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático pues, precisa retroalimentar aspectos de otros pensamientos (numérico, métrico, espacial, etc.), que permiten resolver problemas contextualizados dentro o fuera de las matemáticas. En ese sentido el MEN (1998) sostiene que el desarrollo del pensamiento variacional centra la atención en dos elementos fundamentales: la variación y el cambio. Por lo cual es muy importante que los estudiantes desarrollen ideas alrededor de estas nociones, con el propósito de potenciar aquellos otros conceptos que hagan parte del sistema algebraico y analítico, en especial el concepto de derivada como razón de cambio.

Históricamente la noción de la variable y de función surgieron de la necesidad de cuantificar la razón de cambio, la rapidez de la variación y la rapidez con la que va cambiando una variable con respecto a otra (Dolores, 2013). Sin embargo, en ocasiones las tareas que se realizan con relación al pensamiento variacional y en especial, al cálculo diferencial se han llegado a interpretar como el desarrollo de procedimientos algebraicos y memorización de propiedades (Fiallo y Rodríguez, 2019). En ese sentido, Vasco (2006) afirma que los estudiantes no desarrollan correctamente el pensamiento variacional, debido a que se enfatizan en la memorización de leyes matemáticas y en remplazar valores, perdiendo la idea primordial de captar lo que varía, con qué varía y cómo varía. Esta afirmación es una de las más recurrentes en las investigaciones en educación matemática. La dificultad que se ha encontrado en los estudiantes es que no alcanzan un aprendizaje significativo de la concepción del objeto matemático y desde la enseñanza se favorece el estudio de fórmulas y propiedades para aplicarlas en las actividades matemáticas.

De manera similar, se han encontrado en varias investigaciones que los estudiantes de grado once y los de nuevo ingreso a las universidades tienen ciertas dificultades, en los cursos de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Cálculo Diferencial, para comprender el concepto de derivada y de la razón de cambio. Por ejemplo, Forero et al (2012) establece que, una de las principales dificultades que presentan los estudiantes es la poca claridad de la concepción de la razón de cambio y significación que se le da al concepto de derivada desde diversos contextos. Así mismo, Thompson y Carlson (2017) exponen que los estudiantes tienen dificultades en el momento de entender que la pendiente también se considera como una razón de cambio entre dos magnitudes.

Cabe mencionar, que otras de las razones por la cual los estudiantes tienen ciertas dificultades en el aprendizaje de los contenidos del cálculo diferencial, en especial la derivada como razón de cambio, tiene que ver con la manera en que se van presentando a los educandos cada uno de los contenidos, ya sea seguir un libro de forma textual o solo enseñar la parte algorítmica del objeto matemático, enfatizándose en la enseñanza tradicional. Inclusive, en varias investigaciones se ha evidenciado que los estudiantes se les dificulta manejar los diversos significados que tiene la noción de la derivada en el momento de realizar el proceso algorítmico, especialmente como razón de cambio, como la pendiente de la recta tangente, etc. (Artigue, 1995; Luna et al, 2013). Otro de los autores que también está de acuerdo con lo dicho anteriormente es Azcárate (1996), quien menciona que, a pesar de que los educandos aplican el algoritmo de la derivada de manera correcta, se sigue evidenciando falencias con respecto a la comprensión de la derivada como límite y como tasa instantánea de variación, partiendo de la tasa media de una función entre dos puntos (Azcárate, 1996, citado por Cardona, 2012).

La derivada como razón de cambio es un significado basado en la evidencia de la variación y el cambio de un fenómeno a partir de la comparación de datos que se pueden tomar en distintos puntos o intervalos de tiempo. En estas comparaciones se desarrollan las prácticas variacionales, acciones intencionales que permiten a los estudiantes predecir y estimar comportamientos futuros

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

y pasados de un fenómeno, gracias a la estructuración y evolución que el concepto (razón de cambio) se puede presentar en una situación desde diversas representaciones (Caballero, 2018).

No cabe duda de que la implementación de las tecnologías digitales ha sido un gran recurso en matemáticas, debido a que permite que los estudiantes construyan el conocimiento a partir de la exploración y experimentación, para resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas, al destacar el acondicionamiento de los recursos tecnológicos para que los estudiantes estructuren su forma de pensar sobre las matemáticas y puedan tomar decisiones de una situación (Arzarello, 2011). Así mismo Orts et al, resaltan que la inclusión de la tecnología permite que los estudiantes desarrollen habilidades para la resolución de problemas al posibilitar la interpretación de los conceptos a partir de varias representaciones y propiciar que los educandos realicen conjeturas y logren validarlas (Orts et al, 2018).

Ahora, gracias a la implementación de las tecnologías digitales, se han creado diversos recursos digitales, entre estos se encuentran los softwares de geometría dinámica que incentivan un espacio para la visualización, la manipulación de objetos, en donde se puede utilizar herramientas de arrastre, medición y la construcción de objetos. Así mismo, los softwares de geometría dinámica como GeoGebra posibilitan la coordinación de los cambios simultáneos y permite lograr la visualización de aproximaciones infinitesimales, lo que favorece el desarrollo del pensamiento variacional para resolver problemas (Sari et al, 2018).

Es así como se reconoce la potencialidad de combinar tareas con lápiz y papel con y el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, a razón de la amplia interfaz que permite diseñar actividades para incentivar la interpretación, construcción, relación y coordinación de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

representaciones; en particular para abordar la derivada como razón de cambio en la medida en que se incentiva el desarrollo de prácticas variacionales.

Por estas razones, la pregunta que se va a responder a lo largo de esta investigación es la siguiente: *¿Cómo una situación de aprendizaje que incentiva el desarrollo de prácticas variacionales, a través de geometría dinámica, favorece la construcción de la noción de la derivada como razón de cambio en estudiantes de grado once?*

Cabe mencionar, que el objetivo de este trabajo investigativo es: *diseñar y valorar una situación de aprendizaje que incentive el desarrollo de prácticas variacionales en el estudio de la derivada como razón de cambio en estudiantes de grado once.*

### **3. Aspectos Teóricos**

En este apartado se detallan cada uno de los aspectos teóricos que respaldaron el diseño de la situación de aprendizaje. Entre ellos: la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVa), las Prácticas Variacionales, Situación de Aprendizaje y la derivada como razón de cambio.

#### **3.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa**

Desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), el hombre adquiere conocimiento a partir del entorno social y sus prácticas, mostrando la “matemática funcional como resultado de la matemática conceptual y vivencial” (Cordero et al, 2015 citado por Arciniegas, 2022, p.58).

Cantoral (2016) a través de la TSME busca que los educandos exploren los conceptos matemáticos en actividades dentro y fuera del aula a través de “prácticas”, las cuales define como “actividades humanas consientes e intencionales” por las que se puede construir el conocimiento matemático a través de experiencias cotidianas de los estudiantes.

Además, Cantoral (2016) establece algunos principios que respaldan la construcción de conocimiento matemático desde las prácticas sociales. El primero habla de la racionalidad contextualizada, que indica que el proceso de construcción de conocimiento se ve altamente influenciado por el contexto, es decir, por el entorno donde el aprendiz se encuentre. El segundo, es el relativismo epistemológico que indica que no existe una única validez ya que esta varía dependiendo el punto de vista, por lo que el conocimiento matemático puede verse como un conjunto de verdades relativas, sin embargo, el conjunto estructurado de las verdades relativas es lo que compone el saber matemático. El tercer principio es la resignificación progresiva, este indica

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

que la significación del conocimiento se produce en las interacciones, situaciones y producción de nuevos conocimientos del objeto matemático y todo lo que le rodea, se desarrolla dependiendo del contexto en el que está el estudiante, incluso una situación que está en variación. El último principio es el normativo de la práctica social encargado orientar la construcción de conocimiento y orientar la actividad humana desde la apreciación del individuo.

Por lo tanto, el estudiante toma un papel activo en la interacción con el objeto matemático con el propósito de construir conocimiento a través de las experiencias planteadas desde un propósito, es decir, que responda a un “¿para qué se enseña?” acompañado de lo que se enseña y la población que aprende, contestando los interrogantes de “¿qué enseñar?” y “¿cómo enseñar?”. Luego, algunas de las experiencias inmersas en el entorno de los estudiantes están relacionadas con el cambio y la variación que llevan a la necesidad de predecir, lo que da paso a la búsqueda de mecanismos de representación, pues dentro de los contextos es posible identificar variables y analizar la forma en la que varían.

Según lo anterior, la situación de aprendizaje a desarrollar debe tener en cuenta el contexto escolar y social en el que se encuentra la población, además de buscar el desarrollo cognitivo y sociocultural de los estudiantes teniendo en cuenta la didáctica y epistemología del concepto de estudio. Las actividades por desarrollar deben tener propósito, coherencia y lo más cercanas posibles a los estudiantes, además de involucrar la interacción del estudiante con el objeto matemático a través de acciones consientes o prácticas según lo definido por Cantoral (2018).

### **3.2. Pensamiento y Lenguaje Variacional**

El pensamiento y lenguaje variacional (PyLVa) desde la Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa, es considerado como una línea de investigación y una forma del

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

pensamiento, que se enfatiza en el estudio de los fenómenos de aprendizaje, comunicación y enseñanza de la matemática, en especial la matemática en donde se presenta el cambio, haciendo énfasis en el uso de ideas variacionales y no solamente en el manejo analítico y simbólico. Además, el PyLVa se enfoca en “las formas de pensar, argumentar, organizar, comunicar y tratar de forma matemática los fenómenos de cambio” (Caballero y Cantoral, 2018, p.40), inclusive en los fenómenos que se involucren en el entorno escolar y en situaciones que se encuentran en el diario vivir del hombre.

En ese sentido, el estudio de la variación y el cambio surge a partir de la necesidad de saber lo que puede llegar a pasar o lo que pasará en una situación (la predicción). En ocasiones, se encuentran ciertas situaciones que dependen del tiempo en donde no se permite determinar los posibles resultados, por lo cual se necesita de diversos métodos para modelar los comportamientos y estudiar el cambio y la variación enmarcada a una práctica social. Cantoral (2016) denominó esa práctica social como “*Praediciere*”, que consiste en “la acción intelectual del sujeto epistémico sobre los datos fácticos para establecer los patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse” (Cantoral, 2016, p. 113, citado por Caballero y Cantoral, 2018).

Una de las características del PyLVa es que se centra en la manera en que los fenómenos que se estudian cambian de un estado a otro, en donde se identifica aquello que cambia, cuantificando el cambio y analizando la forma en que se da el cambio. Inclusive, Cabrera menciona que “el proceso de cambiar un estado a otro se necesita de mecanismos de cuantificación de variables y de las variaciones, porque el proceso del cambio se puede registrar y analizar desde el estudio de las formas en que varían las variables que se encuentran inmersas en el fenómeno” (Cabrera, 2009, p.57, citado por Caballero y Cantoral, 2013). En el PyLVa el *estado* a que se

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

refieren los autores consiste en el comportamiento o la cualidad que presenta el fenómeno de la situación en un instante o un valor particular de la variable.

Cabe resaltar, que el PyLVa está constituido por seis elementos que caracterizan esta línea de investigación: La situación variacional (SV), los argumentos variacionales (AV), los códigos variacionales (CV), las estructuras variacionales específicas (EstV), las estrategias variacionales (EV) y las tareas variacionales (TV) (Caballero y Cantoral, 2013). A continuación, se detalla en qué consiste cada uno de los elementos:

- *Situación variacional*: Se entiende la situación variacional como el conjunto de problemas en donde se pone en práctica las EV y a su vez se establece un análisis entre diversos estados del cambio, en el cual se debe conocer el crecimiento que presenta el fenómeno a partir del análisis de cuánto y cómo van cambiando las variables. Cabe recalcar, que aquellas situaciones que se pueden resolver utilizando un procedimiento algorítmico que lleve a la respuesta, no se puede considerar como una situación variacional, debido a que no se está teniendo en cuenta un análisis y cuantificación de la variación.
- *Argumentos variacionales*: Los AV consisten en el uso de maniobras, técnicas, ideas o explicaciones que establezcan el reconocimiento de forma cuantitativa y cualitativa del cambio del objeto u sistema del objeto en estudio. Estos AV permiten dar una explicación de la SV determinando los procesos de variación que se encuentran inmersos en la situación.
- *Códigos variacionales*: Los CV consisten en tablas, frases, dibujos, que contribuyen en el análisis variacional. En general, son expresiones orales y escritas que se articulan para generar los AV.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- *Estructura variacional específica:* La EstV consiste en aquellos procesos, procedimientos que tienen relación con el conocimiento matemático y científico, que se utilizan como un apoyo para estudiar la variación y el cambio que se presentan en las SV.
- *Estrategias variacionales:* Las EV son las diversas maneras en que el estudiante puede razonar y enfrentar una situación variacional, estas generan los argumentos variacionales para explicar la situación que se presente. Así mismo, los estudiantes a la hora de utilizar las EV pueden emplear las EstV para estudiar el cambio y la variación que se presenta en las situaciones. “Algunas EV reconocidas son la predicción, la comparación, la seriación y la estimación” (Salinas, 2003, como se citó en Caballero y Cantoral, 2013, p.1202). Cabe recalcar, que en investigaciones posteriores los autores renombran las EV como Prácticas Variacionales.
- *Tareas variacionales:* Las TV son las actividades que se plantean dentro de la situación variacional, donde los estudiantes pueden emplear las EV a partir de un contexto analítico que permita organizar el estudio del cambio y la variación en las SV, en donde se tienen las acciones y objetivos específicos dentro del contexto. Entre las tareas variacionales se encuentra: la tabulación como variación numérica, análisis de datos en tablas numéricas, construcción de gráficas con la variación como punto de referencia y análisis gráfico con la variación como punto de referencia.
  - *Tabulación como variación numérica:* consiste en dar diferentes valores a una variable, en donde se pueda observar y analizar el comportamiento, la forma y la posición de un determinado sistema de manera tabular. En el caso en que la situación le corresponda solamente llenar la tabla, no se puede considerar como una TV.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- *Análisis de datos en tablas numéricas:* consiste en el análisis de los datos obtenidos y agrupados en tablas numéricas, en el cual se determinen los patrones de los datos y cómo se relacionan.
- *Construcción de las gráficas con la variación como punto de referencia:* consiste en la realización de gráficas con el propósito de analizar la variación que presenta el fenómeno.
- *Análisis gráfico con la variación como punto de referencia:* consiste en la búsqueda de patrones, relaciones y tendencias al analizar el comportamiento en representaciones gráficas, con el fin de realizar el análisis de las variaciones, dichas gráficas pueden ser realizadas con la ayuda de herramientas tecnológicas.

Luego, para efectos de esta investigación a pesar de considerar todos los elementos del PyLVa mencionados anteriormente, se dará especial énfasis en las EV, reconocidas como Prácticas variacionales, para el diseño de la situación de aprendizaje.

### **3.3.Prácticas Variacionales**

Según Cantoral (2016), las prácticas variacionales pueden verse como prácticas centradas en abordar y operar el cambio y la variación con el propósito de predecir, además de consolidar tres grandes elementos que caracterizan la variación y que son mencionados como: “La medición del cambio, el análisis de la forma como esta medida evoluciona y el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen” (Caballero y Cantoral, 2018, p.51).

Siguiendo lo dicho por Arciniegas (2022) las prácticas variacionales se enfatizan en el desarrollo de acciones que buscan la predicción mediante el análisis del cambio y la variación. Las prácticas descritas son: comparación, seriación, predicción y estimación según lo descrito por Caballero (2018).

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*La comparación:* Es una acción consiente que pretende establecer diferencias y semejanzas ya sea entre dos estados diferentes de un fenómeno o dos estados de diferente fenómeno, con el fin de cuantificar el cambio, pues esta práctica es el paso inicial al hablar de variación y cambio, ya que sin comparar no se evidencia variación. Caballero (2018) aclara que la comparación también puede darse en forma de diferencia o de cociente, además, que su uso cambia según la información específica que brinde cada tipo. Inclusive, a la hora de analizar la variación y en el momento de recurrir al reconocimiento de algún orden de variación, se emplea el método de diferencias. Por otra parte, se expresa que, en una situación de variación, el hecho de realizar una comparación es imprescindible ya que, sin esta, la variación no existiría teniendo en cuenta que aquello que se compare debe guardar relación que permita establecer un punto de comparación coherente.

*La seriación:* Es una acción consiente que consiste en realizar análisis a más de dos estados consecutivos con el propósito de establecer patrones o relaciones que permitan conocer, definir o establecer comportamientos que determinan el cambio del fenómeno y, de la mano con la comparación, buscan extraer la información y expresarla en modelos que permitan desarrollar la práctica de predicción y estimación, o como Caballero (2018) los define “modelos predictivos”.

*La predicción:* Esta acción busca encontrar un valor de forma anticipada, dicho valor normalmente está cuantificado. Los valores por predecir pueden ser anterior o futuro a los datos de los que se establece el comportamiento y del modelo determinado por la comparación y seriación que establece el comportamiento de cambio.

*La estimación:* Similar a la predicción consiste en predecir y anticipar, pero la diferencia radica en que la predicción busca un valor mientras que la estimación desea anticipar tendencias,

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

caracteres o comportamientos del fenómeno de estudio normalmente en un intervalo a los que Caballero (2018) denomina intervalos concretos. Además, esta práctica precisa anticipar comportamientos, crecimientos o decrecimientos desde la generalización y confrontación del comportamiento.

Estas cuatro prácticas secuenciales orientan el análisis de la variación para la predicción de comportamientos, estados, tendencias o valores exactos, iniciando con la comparación, al identificar características de cambio entre dos estados o dos fenómenos para pasar a la seriación y analizar las comparaciones entre más de dos momentos y concretar un modelo de predicción que permitirá establecer un comportamiento para un intervalo en el caso de la estimación o un valor específico en caso de la predicción.

Cabe resaltar que las prácticas variacionales solo lo son cuando, según Caballero (2018), la comparación y seriación tiene como propósito abordar la variación. Las formas de abordar pueden variar en tipos de actividades que implican la comparación y la seriación, el cual busca llevar al estudiante a la predicción y la estimación mediante diferentes acciones que pueden ser diferentes según el diseño de la actividad y contexto del estudiante.

### **3.4.Situación de Aprendizaje**

Las situaciones de aprendizaje son un conjunto de secuencias organizadas que tienen el propósito de obtener el proceso de aprendizaje de los estudiantes y a su vez propiciar la construcción del conocimiento de forma significativa en un determinado contexto (Williner, 2018). Inclusive, las situaciones que se puede plantear en las situaciones de aprendizaje pueden estar contextualizadas en la vida diaria de los estudiantes. Según Feo, “una situación se puede convertir en una situación de aprendizaje en el momento en que los docentes propician la situación para el

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

aprendizaje desde diversas operaciones ordenadas y las articulan en secuencias” (Feo, 2018, p.196).

Así mismo, González, et al. (2011) afirma que “las situaciones de aprendizaje que diseña el docente tienen el objetivo de potenciar y construir el conocimiento en el estudiante de manera autónoma, en donde adquieran ciertas competencias dentro de un ambiente dialogante y cooperativo” (p.125). Cabe mencionar, que el rol que tiene el docente a la hora de diseñar y abordar una situación de aprendizaje es ser un guía, mediador y orientador en la implementación y desarrollo de habilidades según el objetivo que se persigue para abordar el objeto matemático.

Según Piraval (2013, citado por Feo, 2018) las acciones educativas que se encuentran inmersas en la situación de aprendizaje son:

- Entornos complejos, en donde el estudiante tenga un desafío para el aprendizaje y la realización de las tareas integradoras.
- Negociación social y responsabilidad hace parte del aprendizaje de los estudiantes.
- Diversas representaciones del objeto con el que se va a trabajar en la situación de aprendizaje.
- Comprensión del conocimiento que se va a abordar.
- La enseñanza del contenido debe centrarse en el estudiante.

Por otro lado, en la TSME las situaciones de aprendizaje consisten en un conjunto de tareas que se encuentran inmersas en actividades que contienen un contexto significativo y que permite problematizar el objeto, a partir del análisis que se realice de forma individual o colectiva del conocimiento (Reyes-Gasperini, 2016). Cabe mencionar, que en esta investigación se tendrá en cuenta la definición de situación de aprendizaje desde la TSME.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

La situación de aprendizaje desde esta perspectiva debe incentivar justificaciones y argumentaciones de los estudiantes para construir el conocimiento matemático a partir de la realidad, desde contextos coherentes, no forzados, que conlleven a la toma de decisiones. Esto lo apoya Williner (2018) argumentando que las situaciones de aprendizaje deben llevar al estudiante a tomar cada una de las actividades planteadas como un desafío que puedan resolver y así, entenderlas para encontrar las posibles soluciones a partir de los conocimientos previos que se tengan.

Por otra parte, la situación puede estar compuesta por las siguientes etapas secuenciales (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019a, 2019b, citado por Arciniegas, 2022):

- *Etapas factual:* En esta etapa se le introduce al estudiante a la situación, en donde comienza a identificar magnitudes, comparar y asociar los diversos valores. Inclusive, en esta etapa se puede promover las expresiones de manera significativa para indicar el valor de una magnitud con respecto a otra.
- *Etapas procedimental:* En esta etapa es donde los estudiantes van construyendo argumentos comparativos y procedimientos, en el cual se puede estudiar los datos expuestos en las representaciones del objeto matemático. En la etapa se espera que los estudiantes puedan emplear métodos y estrategias que les permitan extraer la información de la representación del objeto matemático y a su vez determinar el comportamiento de las variables.
- *Etapas simbólica:* En esta etapa el estudiante comienza a adquirir la información sobre el comportamiento de las variables desde una representación, en el cual compara los comportamientos, determina la tendencia de las variables y ejecuta las estrategias

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

(construcción de modelos) para realizar la comparación de los valores desde una o varias representaciones del objeto matemático.

### **3.5.Derivada como Razón de Cambio**

En esta parte se explicará el concepto de la razón de cambio y se especificará cómo se distingue la noción del objeto matemático desde el desarrollo de las prácticas variacionales en un contexto financiero.

Según Vidal (2012), “la razón de cambio es la medida del cambio de una variable con respecto a otra” (p.22). El cambio en esta ocasión se cuantifica a partir de las diferencias que hay en la abscisa y la diferencia de la ordenada. Es decir que la razón de cambio consiste en el cociente que existe entre las diferencias. Inclusive Dolores (2000) menciona que:

La diferencia es el modelo matemático para medir la variación y el cambio, que permite predecir el comportamiento variacional de las funciones. Además, al estudiar los procesos de variación, es fundamental relacionar un cambio con otro, es decir plantear una razón entre cambios. (Dolores 2000, citado por Engler y Camacho, 2012, p.24,).

Por otro lado, en la literatura se encuentran dos tipos de razón de cambio: La razón de cambio instantánea y la razón de cambio promedio.

*La razón de cambio promedio:* “La razón de cambio promedio de la ordenada con respecto a la abscisa corresponde al cociente que hay en las diferencias de dos puntos diferentes de la abscisa y la ordenada. Expresada de la siguiente manera:” (Cardona, 2012, p.21).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*La razón de cambio instantánea:* La diferencia que tiene la razón de cambio instantánea con la razón de cambio promedio corresponde al cociente de las diferencias en dos puntos, en donde la diferencia de los puntos de la abscisa es infinitamente pequeña. La razón de cambio instantánea se expresa de la siguiente manera” (Cardona, 2012, p.22).  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ahora, desde el contexto económico y financiero, se puede relacionar el concepto de derivada como razón de cambio desde el análisis marginal ya que la razón de cambio promedio se puede abordar desde la concepción del costo promedio por unidad y el ingreso promedio por unidad y a su vez la razón de cambio instantánea a partir del costo marginal, el ingreso marginal y la utilidad marginal. En tanto, se concibe la definición de dichos términos así:

*El costo promedio por unidad:* “El costo promedio de producir  $x$  artículos es el costo total,  $C(x)$ , dividido entre el número de artículos producidos” (Arya et al., 2009, p.476).

*Ingreso promedio por unidad:* “El ingreso promedio por artículo adicional vendido se obtiene dividiendo  $\Delta I$  entre el número de artículos adicionales  $\Delta x$ ” (Arya et al., 2009, p.477).

*Costo marginal:* “Es el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número artículos extra tiende a cero. El costo marginal se expresa de la siguiente manera” (Arya et al., 2009, p.474).

$$\text{Costo marginal} = C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

*Ingreso marginal:* “El ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. El ingreso marginal se expresa de la siguiente manera” (Arya et al., 2009, p.477).

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

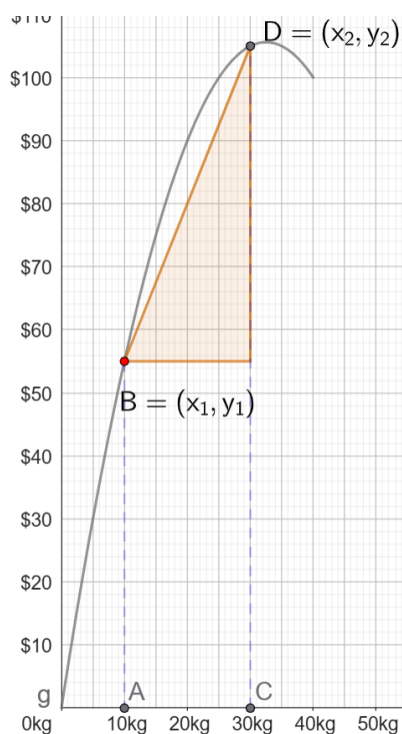
$$\text{Ingreso marginal} = I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}$$

*Utilidad marginal*: “Representa la utilidad adicional por artículo si la producción sufre un pequeño incremento” (Arya et al., 2009, p.478).

Luego, la razón de cambio promedio e instantánea se puede reflejar desde el desarrollo de las prácticas variacionales. Por ejemplo, en el contexto de la función de ingreso desde la representación gráfica (Figura 1) se distingue el desarrollo de las 4 PV como se describe a continuación:

**Figura 1.**

*Gráfica de la función*



La *comparación* se evidencia cuando se comparan dos datos de la gráfica, al tomar los puntos  $B = (x_1, y_1)$  y  $D = (x_2, y_2)$ , es posible comparar entre estados de la misma magnitud, ya sea cantidad de productos ( $x_1$  y  $x_2$ ) o ingresos ( $y_1$  y  $y_2$ ) a partir de la diferencia, o magnitudes

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

relacionadas, cantidad de producto adquirido e ingresos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , a partir del cociente; esto permitirá identificar el incremento que existe respecto los dos ingresos, que serán necesarios para calcular los ingresos promedio por unidad en varios intervalos, llegando así a la noción de la razón de cambio promedio a partir del cociente de las diferencias entre los ingresos y las cantidades adquiridas.

Para tener una idea más clara del posible comportamiento del ingreso marginal se propone tomar una cantidad de intervalos y determinar los ingresos promedios por unidad para analizar el crecimiento o decrecimiento que tendría el modelo del ingreso marginal como se observa en la figura (Ver figura 2). Dicha actividad pertenece estrictamente a la práctica variacional de *seriación*, pues es posible que los estudiantes identifiquen que los valores del ingreso promedio por unidad van disminuyendo, caracterizando el comportamiento de la variable desde datos que son estables, llegando a determinar el posible comportamiento de la razón de cambio promedio y a su vez dando un primer indicio del comportamiento de la razón de cambio instantánea.

### Figura 2.

Representación tabular

	A	B	C	D
1	Intervalos (Kg)	$\Delta x$	$\Delta I$	Ingreso promedio por unidad
2	[0, 8]	8	45.6	5.7
3	[8, 16]	8	32.8	4.1
4	[16, 25]	9	21.6	2.4
5	[25, 33]	8	5.6	0.7
6	[33, 39]	6	-4.2	-0.7

Partiendo en el análisis del comportamiento del ingreso promedio por unidad, es posible incentivar la práctica de la *predicción*, al cuestionar al estudiante sobre lo que sucedería en puntos específicos pasados o futuros, por ejemplo, cuánto es el ingreso promedio por unidad si se decide vender más de 40 kg de maní. En este caso la predicción se va dar en función de cómo el estudiante

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

interpreta el comportamiento de las razones de cambio promedio de la columna D (Figura 2) y a partir de esa información logra anticipar que sucede con un valor fijo posterior.

Por último, se procede a indagar o especificar el comportamiento del cambio del ingreso promedio por unidad en un intervalo en específico, para esto se plantean varios intervalos en donde las diferencias de la magnitud independiente sean infinitamente pequeñas, para encontrar el ingreso marginal en un punto (por ejemplo, en 10 kg) teniendo en cuenta las tendencias que se tienen al obtener los datos de la columna G (Ver figura 3). Siendo esto el nivel más grande de acción consiente de análisis o lo que corresponde a lo definido anteriormente como la práctica de *estimación*, pues el estudiante puede determinar la razón de cambio de instantánea de 10 kg al observar la tendencia de las razones de cambio promedio entre valores infinitamente pequeños llegando a que la razón de cambio instantánea de esa cantidad adquirida tienda a 4.5. Siendo esta una aproximación de la noción del concepto de derivada como razón de cambio instantánea en un punto.

### Figura 3.

Tabla razón de cambio instantánea

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x_1$	$x_2$	$l(x_1)$	$l(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta l = l(x_2) - l(x_1)$	$\Delta l / \Delta x$
2	10	10.15	55.6728	0.15	0.6728	0.6728	4.4853
3	10	10.1	55.449	0.1	0.449	0.449	4.49
4	10	10.01	55.045	0.01	0.045	0.045	4.5
5	10	10.001	55.0045	0.001	0.0045	0.0045	4.5
6	10	10	55	55	0	0	

#### 4. Aspectos Metodológicos

La metodología que se empleó para este estudio de tipo cualitativo fue la investigación basada en el diseño donde se consideró la estrategia investigativa del experimento de enseñanza propuesta por Camargo (2021).

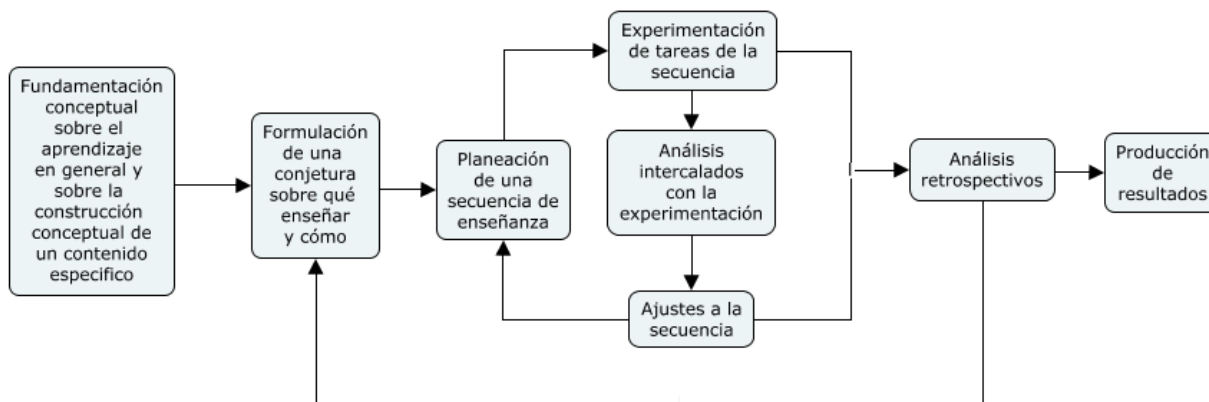
El experimento de enseñanza se enfoca en el diseño de una situación orientada a partir del planteamiento de una conjetura y una meta de aprendizaje relacionada con el objeto matemático en estudio. La conjetura consiste en “una proposición que tenga el papel de ser una condición que debe tener las situaciones, en donde se posibilite el desarrollo de la actividad matemática por parte de los estudiantes” (Correa, 2017, p. 32, citado por Correa, 2019).

Según Correa (2019), el experimento de enseñanza está constituido por dos ciclos. El primer ciclo hace referencia al diseño y planeación y, el segundo corresponde al análisis, ya sea un análisis local o retrospectivo. En el siguiente esquema (Figura 4) se presenta la orientación sobre cómo se ejecuta el experimento de enseñanza, que puede ser de forma cíclica (con repetición del diseño), teniendo en cuenta una prueba experimental y un refinamiento de la conjetura (Cobb, 2000; Lesh y Kelly, 2000; Steffe, Thompson y Von Glaserfeld, 2000, citados por Camargo, 2021).

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

**Figura 4.**

*Esquema del experimento de enseñanza*

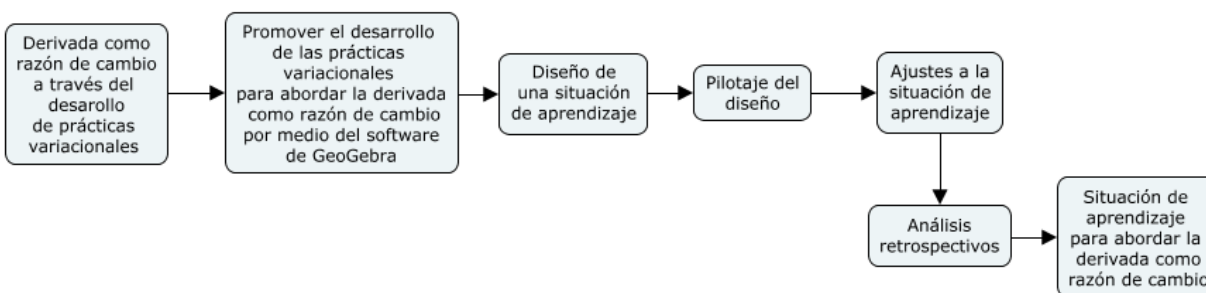


*Nota:* Adaptado del esquema propuesto por Camargo (2021)

Luego, teniendo en cuenta que la pregunta de investigación de este trabajo es ¿Cómo una situación de aprendizaje que incentiva el desarrollo de prácticas variacionales, a través de geometría dinámica, favorece la construcción de la noción de la derivada como razón de cambio en estudiantes de grado once?, se planteó el camino metodológico que se muestra en la figura 5.

**Figura 5.**

*Camino metodológico*



La meta de aprendizaje que describe el modelo de experimento de enseñanza para este trabajo de investigación es el mismo propósito con el que se diseñó la situación de aprendizaje, incentivar el desarrollo del pensamiento variacional, específicamente la noción de la derivada

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

como razón de cambio a través de la emergencia de las prácticas variacionales, lo que igualmente responder al qué enseñar y cómo enseñarlo. Por lo tanto, surgieron como fases metodológicas: (1) Planteamiento de la conjetura, (2) Diseño de la situación de aprendizaje, (3) Pilotaje de la situación de aprendizaje y (4) Rediseño de la situación de aprendizaje. Cabe mencionar, que la situación de aprendizaje se encuentra en el capítulo de Anexos.

***Fase 1 (Planteamiento de la conjetura)***: En esta fase se planteó la conjetura para abordar la enseñanza del concepto matemático para ello, se realizó una revisión bibliografía sobre lo que se iba a enseñar de la derivada como razón de cambio, el contexto de la SA y, en especial, cómo se evidencia el desarrollo de las prácticas variacionales con relación al concepto en el contexto. De allí, la conjetura fue promover el desarrollo de las prácticas variacionales para abordar la noción de derivada como razón de cambio por medio del software de GeoGebra.

Para abordar el concepto de la derivada como razón de cambio se decidió trabajar bajo el contexto económico y financiero, específicamente el análisis marginal (Costo marginal, Ingreso marginal y Utilidad marginal) donde, de igual modo, se incentivan competencias relacionadas con la toma de decisiones, al reconocer la importancia de formar estudiantes competentes frente a aspectos económicos y financieros en el ámbito escolar (MEN, 2022).

En general, la situación de aprendizaje que se planteó presenta como protagonista a Manfred quien plantea un proyecto sobre la adquisición y venta de maní, con ánimos de recolectar dinero para financiar sus estudios. Por ende, se distingue un momento para la adquisición, la venta y el análisis del beneficio o utilidad total, siendo esta última la que permitiría interpretar la rentabilidad que tendría el emprendimiento a partir del comportamiento variacional del costo e ingreso marginal o la utilidad marginal. Como bien menciona Ugarte (2009), el estudio de la

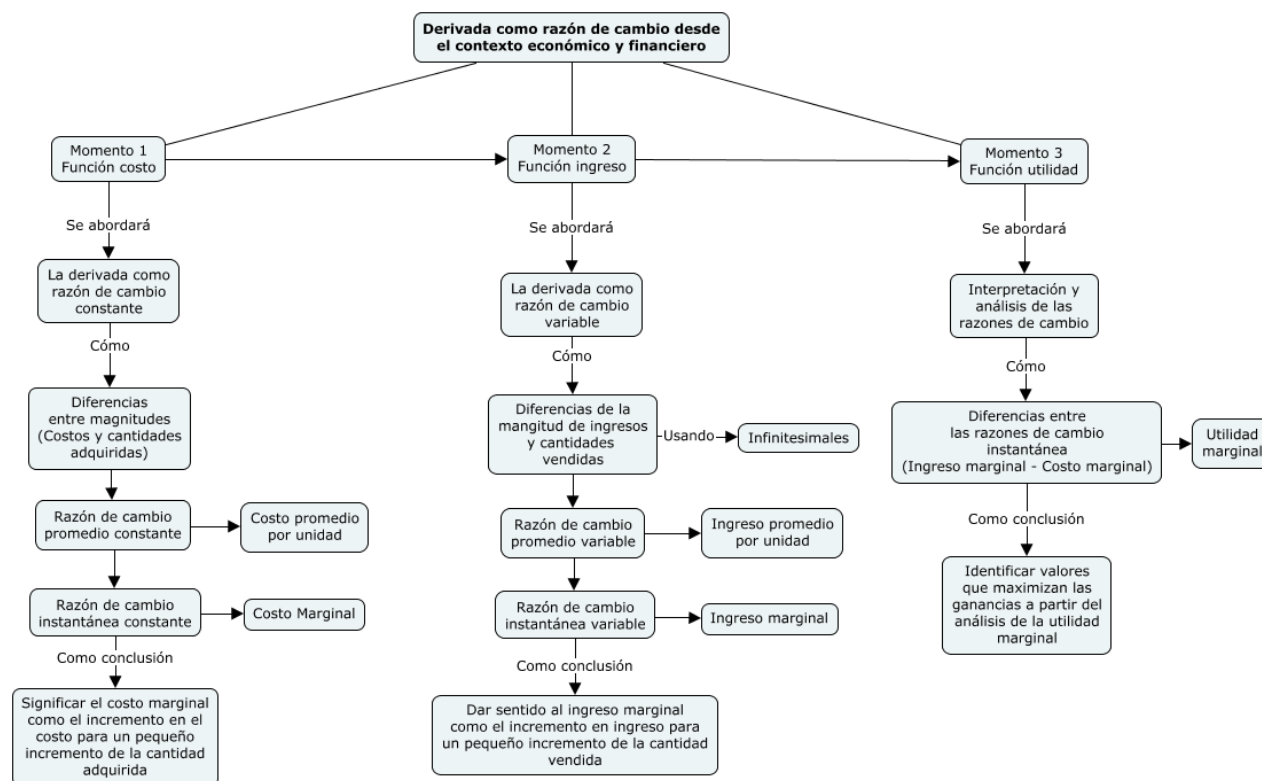
## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

aplicación de la maximización de la función utilidad, favorece la obtención de una mejor rentabilidad para el emprendedor.

Teniendo en cuenta la conjetura y el contexto planteado para la SA, se promovió la noción de derivada como razón de cambio en tres momentos como se describe en el siguiente esquema:

**Figura 6.**

*Derivada como razón de cambio a través del contexto económico y financiero*



Como se puede observar en la figura 6 en cada momento planteado se busca incentivar aspectos que permiten estudiar la noción de la derivada como razón de cambio desde el contexto del análisis marginal. Inicialmente, en el momento 1 se aborda la derivada como razón de cambio constante que se evidenciara en el momento en que los estudiantes realizan las diferencias entre los costos y las cantidades adquiridas en kg, para posteriormente abordar la razón de cambio promedio (Costo promedio por unidad) a partir del cociente de las diferencias de los costos

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

respecto a las cantidades adquiridas para cuantificar el cambio presentado que, en este caso es constante. Después de establecer la razón de cambio promedio se procede a promover la razón de cambio instantánea (Costo marginal), con el propósito de que los estudiantes comiencen a significar las razones de cambio en distintos intervalos para encontrar que dichas razones de cambio están siendo la misma constante, la que representa el precio unitario (precio de 1 kg) del producto.

En el momento 2 se aborda la derivada como razón de cambio promedio e instantánea, pero a diferencia del momento 1 las razones de cambio van a ser variables. Por ende, se llegará a esta noción de la derivada a partir de las diferencias de la magnitud ingreso y las cantidades vendidas (kg), donde dichas diferencias van a ser infinitamente pequeñas para posteriormente dar paso de la razón de cambio promedio que en relación con el significado de marginalidad sería el ingreso promedio por unidad. Una vez establecida la razón de cambio promedio desde el contexto económico se precisa el paso de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, puesto que el ingreso marginal puede verse en la situación, como el incremento en el ingreso promedio por unidad cuando se hace un pequeño aumento de la cantidad de kg de maní vendido (Bajo este contexto un pequeño aumento hace referencia a un incremento en las ventas del 0.001 kg es decir, 1 gramo) y a partir de varios puntos encuentren que la razón de cambio instantánea es variable.

Por otro lado, la utilidad se define a partir de la diferencia de las funciones de ingreso total y costo total, por lo tanto, la utilidad marginal es la diferencia entre las funciones de ingreso marginal y costo marginal. Así, podrá interpretarse como la diferencia de las razones de cambio instantánea de la función ingreso y la de la función costo. Siguiendo las propiedades se podía interpretar como la derivada de la función utilidad, y eso resalta varios usos como la optimización,

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

puesto que esta representa el cambio en la utilidad total cuando se adquiere y vende una pequeña cantidad adicional.

Gracias a la utilidad marginal, se pueden encontrar los puntos óptimos de producción sin excederla, pero garantizando que la utilidad llegue a su punto máximo; esto se muestra cuando la utilidad marginal es igual a cero, pues según Ugarte (2009) si la utilidad marginal es cero en algún punto, dicho punto es la producción que genera la ganancia máxima, resaltando también que si la utilidad es positiva en algún punto, se está generando ganancias y se debe aumentar la producción, y ya en el caso contrario, si es negativa se estaría generando pérdidas y se debe disminuir la producción.

Por tanto, el análisis marginal permite que los estudiantes puedan obtener una noción de la derivada como razón de cambio interpretando el concepto y las aplicaciones que tiene la derivada en el contexto de la economía y las finanzas, o de manera particular en el inicio de un emprendimiento.

***Fase 2 (Diseño de la situación de aprendizaje):*** En esta fase, el diseño de la situación de aprendizaje se orientó articulando las etapas de la situación de aprendizaje (factual, procedimental y simbólica) con el desarrollo de las PV (Comparación, seriación, predicción y estimación) y el concepto de derivada como razón de cambio. En particular, las tareas que componen la SA incluyen TV desde el PyLVa para promover la construcción de AV, donde se evidenciará el desarrollo de las PV.

En la etapa factual, se busca que los estudiantes identifiquen las magnitudes que intervienen en la situación de aprendizaje y caractericen las magnitudes que son variables (Costo total y costo variable) y constantes (Costo fijo). Esto permitió tener un primer acercamiento al

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

concepto de la derivada como razón de cambio constante, en el cual se incentivaron las prácticas de comparación, seriación, predicción y estimación. La práctica de comparación entre las magnitudes, se incentiva a medida que el estudiante realiza las diferencias de la magnitud costo total y las cantidades adquiridas (kg). Las prácticas de seriación y predicción en esta etapa se promueven en tareas variacionales de: tabulación como variación numérica y análisis de datos en tablas numéricas, debido a que se busca que el estudiante observe y analice el comportamiento del costo total teniendo en cuenta el costo fijo y el costo variable, con el propósito de anticipar aquellos costos totales que se tienen posteriormente de los datos presentados de forma tabular y pictórica para determinar las razones de cambio promedio. Por último, la práctica de estimación se incentiva al proponer tareas variacionales relacionadas al análisis de datos en tablas numéricas y la construcción de las gráficas con la variación como punto de referencia, ya que por dichas TV el estudiante puede analizar las tendencias de las razones de cambio instantánea desde diversos intervalos, encontrando que dichas razones de cambio son constantes. Es decir, el desarrollo del concepto de razón de cambio, basado en la búsqueda de diferencias en el costo total de dos cantidades distintas con el propósito de que el estudiante descubra el procedimiento para encontrar la razón de cambio constante en este caso. La razón de cambio instantánea se trabaja usando puntos cercanos en la función a través de la repetición de procedimientos de la búsqueda de diferencias, pero esta vez hecho de manera autónoma para el paso de razón de cambio promedio a instantánea.

En la etapa procedimental, se busca que el estudiante analice la información de la SA para establecer argumentos comparativos y el comportamiento de las razones de cambio, con el fin de tener un acercamiento a la derivada como razón de cambio variable, desde las cuatro prácticas variacionales. La práctica de comparación se distingue como la diferencia de la magnitud ingreso por medio del análisis gráfico con la variación como punto de referencia, para encontrar el

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

incremento del ingreso total en un intervalo. La práctica de seriación se incentiva por medio de la tarea variacional de tabulación como variación numérica, debido a que los estudiantes determinan las razones de cambio promedio en distintos intervalos para analizar la variabilidad. La práctica de predicción se promueve por medio del análisis de datos en tablas numéricas, ya que permite describir el comportamiento de la razón de cambio promedio en intervalos posteriores teniendo en cuenta la variabilidad de la razón de cambio promedio en los intervalos presentados de forma tabular. La práctica de estimación se fomenta cuando los estudiantes encuentran la razón de cambio instantánea por medio del análisis de datos en tablas numéricas y la construcción de las gráficas con la variación como punto de referencia, allí los estudiantes analizan la tendencia de la razón de cambio en un punto y representan el comportamiento de la función derivada a partir de las razones de cambio instantánea, que en este caso sería la representación de la función ingreso marginal. La razón de cambio se promueve a través del mismo proceso de comparación y seriación, pero en este caso la razón de cambio promedio es variable, por lo que adquiere más significado el uso de la predicción para el paso de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea y, aún más en la estimación puesto que se promovió la búsqueda del comportamiento de la función o ingreso marginal a partir de los incrementos infinitesimales.

En la etapa simbólica, las tareas planteadas buscaban que los estudiantes interpretaran la derivada como razón de cambio, teniendo en cuenta los resultados encontrados en los momentos anteriores, con el fin de construir conjeturas sobre la SA a partir de las cuatro prácticas variacionales. La práctica de comparación se promovió por medio del análisis gráfico con la variación como punto de referencia, allí los estudiantes comparan las gráficas que se presentan desde todos los puntos. La práctica de seriación, se incentiva en las tareas variacionales de construcción de las gráficas con la variación como punto de referencia y análisis gráfico con la

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

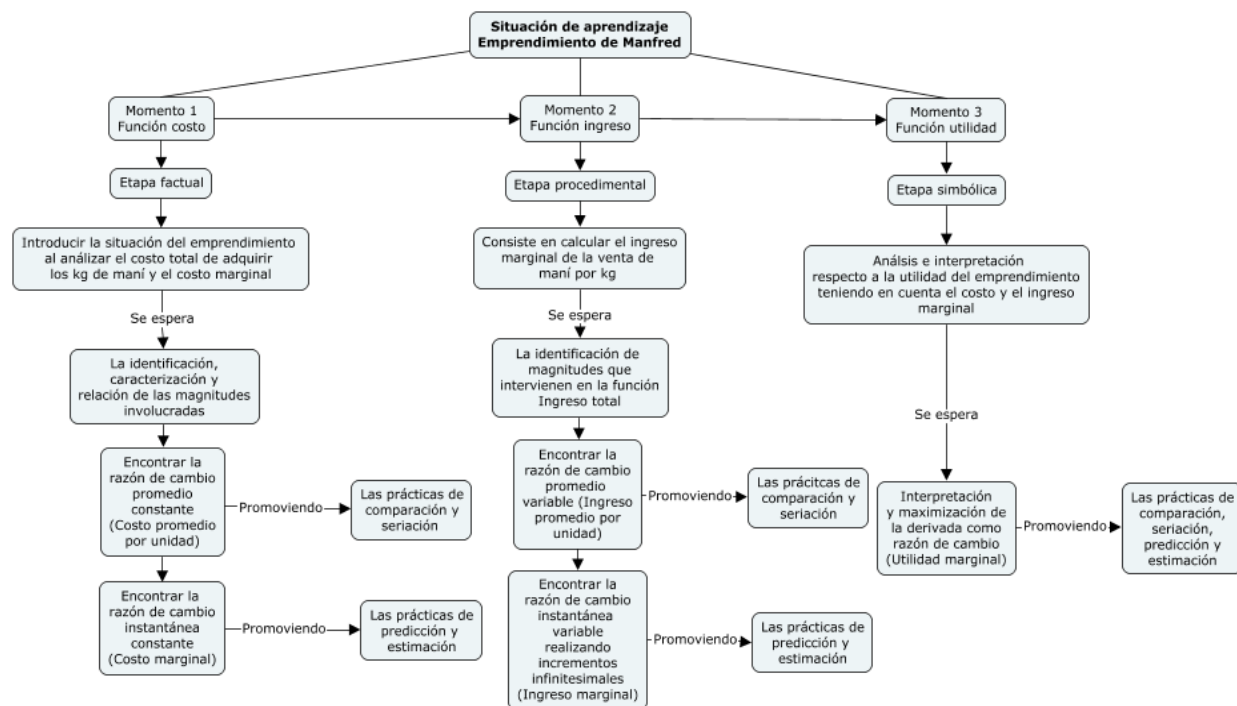
variación como punto de referencia, ya que solicita construir la gráfica de la función y luego, analizar su comportamiento para determinar los intervalos donde la función es positiva o negativa. Posteriormente, la práctica de predicción se fomenta en el análisis gráfico con la variación como punto de referencia, debido a que los estudiantes teniendo en cuenta el análisis del comportamiento de la función utilidad, anticipan lo que podría pasar posteriormente en la función si se tienen más datos. Finalmente, la práctica de estimación se promueve como el resultado de la aplicación de la derivada, especialmente en el momento de encontrar los puntos máximos de la función a partir de la tarea variacional del análisis gráfico con la variación como punto de referencia. Se realizó la interpretación de la razón de cambio instantánea y sus propiedades con el propósito de caracterizar la utilidad, y rentabilidad. En este momento se presentaron las gráficas y se incentivó a realizar la comparación de manera visual, pasando a realizar una seriación puesto que se procede a hacer un análisis de regresión lineal con el software de GeoGebra para determinar el posible comportamiento de la función utilidad. La parte más significativa es la predicción y estimación puesto que se promueven razonamientos sobre los comportamientos en relación con la utilidad positiva o ganancia y las ganancias máximas o puntos óptimos de venta. Por tanto, se convierte en el momento de cierre para recopilar los conocimientos y consolidar la interpretación de las razones de cambio.

En la figura 7, se presenta la síntesis de la SA desde las etapas que la componen y el acercamiento a la noción de derivada como razón de cambio en el contexto del emprendimiento de Manfred.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Figura 7.

Momentos de la situación de aprendizaje en relación con el contexto



**Fase 3 (Pilotaje de la situación de aprendizaje):** En esta fase se implementó la SA y se recolectaron los datos que surgen de la prueba experimental para realizar los ajustes correspondientes, teniendo en cuenta el contraste de los resultados y la conjetura planteada en la anterior fase.

El pilotaje se realizó con un grupo de estudiantes del Club Matemático EULER, modalidad virtual, de la Universidad Industrial de Santander (UIS), constituido por 19 estudiantes que cursaban los grados décimo y undécimo de varias instituciones educativas de Santander y Norte de Santander. Se destaca que el club es un espacio que busca potenciar el desarrollo y el gusto por las matemáticas a partir de actividades didácticas, que en su mayoría se abordan con el classroom

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

de GeoGebra. Por ende, los estudiantes ya contaban con experiencia en el uso de las herramientas digitales que se encuentran en el software.

Cabe mencionar, que en sesiones pasadas los estudiantes ya habían abordado temáticas relacionadas con el contexto económico y financiero como el estudio de la función costo, ingreso y utilidad, por lo que no se tuvieron muchas dificultades a la hora de explicar conceptos relacionados. Así, la implementación se llevó a cabo en dos sesiones, la primera sesión tuvo una duración de 4 horas y la segunda, de 2 horas, a través de la conexión por la plataforma de Zoom y la interacción directa con el Aula virtual de GeoGebra para dar seguimiento al proceso de desarrollo de cada una de las tareas propuestas de la SA.

En general, el pilotaje permitió identificar la aplicabilidad de la situación de aprendizaje bajo el contexto económico y financiero del análisis marginal y aquellos aspectos por mejorar con respecto a las tareas que se plantean en la SA desde la participación y resultados que los estudiantes proporcionaron en las hojas de trabajo online.

***Fase 4 (rediseño de la situación):*** En esta fase se realizó el análisis retrospectivo con respecto a los resultados obtenidos en el pilotaje. Así, se distinguieron cambios en la redacción de las preguntas, recursos disponibles y emergencia de las PV en las tareas de la SA.

## 5. La derivada como razón de cambio a través del desarrollo de las PV.

Para el diseño de la SA, se decidió utilizar el aula virtual de GeoGebra como espacio para el desarrollo de tareas e interacción dinámica. A continuación, se describe el diseño de la situación de aprendizaje en relación con las tareas y preguntas para el desarrollo de las prácticas variacionales en el contexto de análisis marginal.

### 5.1.Momento 1

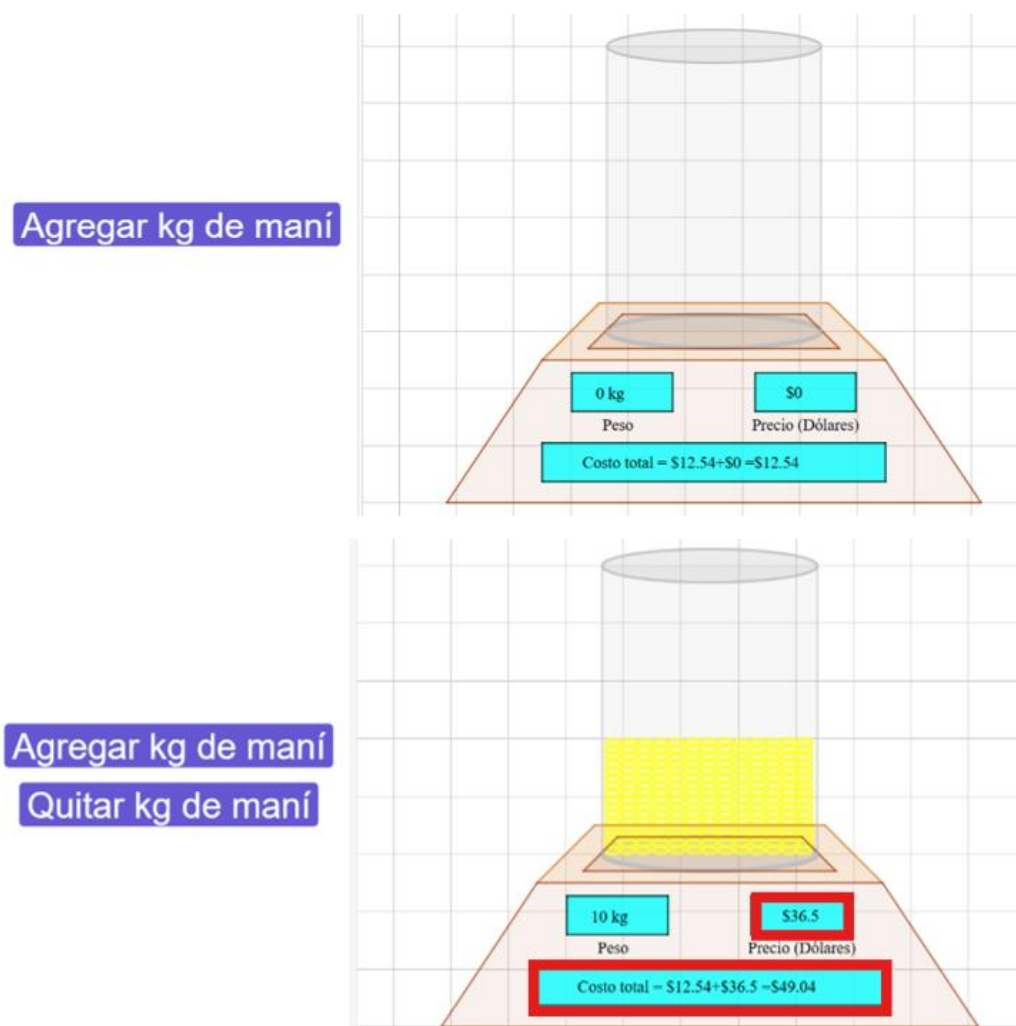
En el momento 1 se abordó la derivada como razón de cambio para la función de costo marginal, orientada a que los estudiantes encontraran la razón de cambio constante a partir de las cuatro prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación), teniendo en cuenta los datos que se obtenían en el simulador de una balanza electrónica (Ver figura 8). Así, la situación que se planteó fue la siguiente:

*Manfred tenía una capital disponible para invertir en un emprendimiento basado en la venta de maní, con el propósito de obtener ganancias y poder ayudarse con los estudios universitarios. Manfred necesita ayuda para evaluar si su proyecto es viable o no.*

*El primer paso del proyecto es evaluar los costos de producción para así determinar el precio de venta. En el siguiente applet se muestra una balanza electrónica que relaciona el costo por unidad de kg de maní y el costo fijo. Observa con detalle.*

*Tarea 1. Explore el applet.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 8.***Applet Balanza electrónica*

El applet muestra en la vista gráfica una balanza electrónica con un recipiente sin peso para evitar alteraciones en la balanza, también muestra la cantidad de peso en kilogramos (kg), el costo variable o precio de dicha cantidad y el costo total de la cantidad a adquirir, ambos en dólares (\$). Al lado izquierdo muestra dos botones para agregar o quitar 1.25 kg de maní en cada clic, esto también hace que la balanza muestre una representación de maní en amarillo que va aumentando al dar clic en “Agregar kg de maní” y disminuye al dar clic en “Quitar kg de maní”.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

El propósito de dicho applet es que los estudiantes encuentren los costos por kg de maní y los costos totales de diferentes cantidades puntuales de kg de maní. Lo anterior es el precedente para calcular las diferencias que permitan llegar a la razón de cambio promedio que en el momento 1 se describe como el costo promedio por unidad. Además de que dichos valores permiten realizar la comparación y la seriación encontrando el patrón de comportamiento de la función de costo siendo la herramienta de extracción de datos para la tabulación.

Luego, se presentan las siguientes preguntas que pretenden llevar al estudiante a la razón de cambio promedio incentivando la comparación, seriación y predicción teniendo en cuenta la exploración del applet de la tarea 1:

*Tarea 2: ¿Qué magnitudes intervienen en la situación?*

*Tarea 3: ¿Cuáles magnitudes no cambian? ¿Cuáles sí? (Justifique su respuesta)*

*Tarea 4: ¿Qué sucede con el costo si Manfred decide adquirir más maní?*

*Tarea 5: ¿Cuánto sería el costo total de 1.25 kg de maní?*

*Tarea 6: ¿Cuánto sería el costo total de 3.75 kg de maní?*

*Tarea 7: Manfred planea comprar 1.25 kg, luego cambia de opinión y decide comprar 3.75 kg ¿Cuánto incrementaría el costo total de 1.25 kg a 3.75 kg?*

*Tarea 8: Si Manfred decide adquirir 5 kg de maní ¿Cuánto sería el costo de la cantidad de kg?*

*Tarea 9: Según lo anterior ¿Cuánto sería el precio por cada kg?*

*Tarea 10: Teniendo en cuenta la balanza electrónica y los resultados encontrados ¿Cuánto es el costo total de adquirir 25 kg de maní?*

En la tarea 2 y 3, la intención es que los estudiantes con la ayuda de la simulación de la balanza electrónica, identifiquen las variables que intervienen en la situación, el peso de maní en kilogramos y el costo total al adquirir dicha cantidad de maní. Así, distinguir el peso (kg), costo variable o precio (por kilogramos que se muestran en la balanza) y costo total como magnitudes variables y el costo fijo, que en este caso de \$12.54, como magnitud fija. Esto, observando cómo

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

cambia el costo total a medida que va cambiando el peso del maní y así, establecer el primer paso para distinguir la relación entre el peso y el costo total de los kg de maní que Manfred piensa adquirir. Este proceso de análisis incentiva la práctica de comparación, dando cuenta de aumentos o disminuciones que sufre el costo al alterar la cantidad de maní adquirido para la venta.

Para la tarea 4, el objetivo es que los estudiantes describan lo que sucede con el costo cuando se aumenta la adquisición de kg de maní. En tanto, dar cuenta que, al dar clic en el botón “Agregar kg de maní” es posible apreciar cómo el aumento en la cantidad de producción de kg de maní genera aumento en el precio por kg (Costo variable) incluso, distinguir que la magnitud del costo total depende de la cantidad de kg que piensa adquirir Manfred. Al describir el comportamiento de la función costo los estudiantes están desarrollando la práctica de seriación y comparación, puesto que aportan ideas relacionadas a la observación del comportamiento de las variables y dan cuenta del aumento que hay al comparar la magnitud del costo variable.

En las tareas 5 y 6, el propósito es determinar el costo total de 1.25 kg y 3.75 kg de maní a partir de la interacción con el applet, esto para establecer 2 puntos de comparación y generar las bases para las diferencias que se deben encontrar en la tarea 7, puesto que el propósito de estas tres tareas es fomentar un primer acercamiento a la razón de cambio promedio.

Posteriormente en la tarea 7, se sigue desarrollando la práctica de comparación al solicitar describir el aumento en el costo total cuando se adquieren las dos cantidades de maní encontradas en las tareas 5 y 6, esto a partir de la diferencia entre los costos  $C(3.75) - C(1.25)$ . Por ende, los estudiantes primero deberán encontrar los costos  $C(1.25) = 17.1$  y  $C(3.75) = 26.23$  para luego, realizar la diferencia  $26.23 - 17.1 = 9.13$ . En ese caso, esta actividad precisa una noción a los

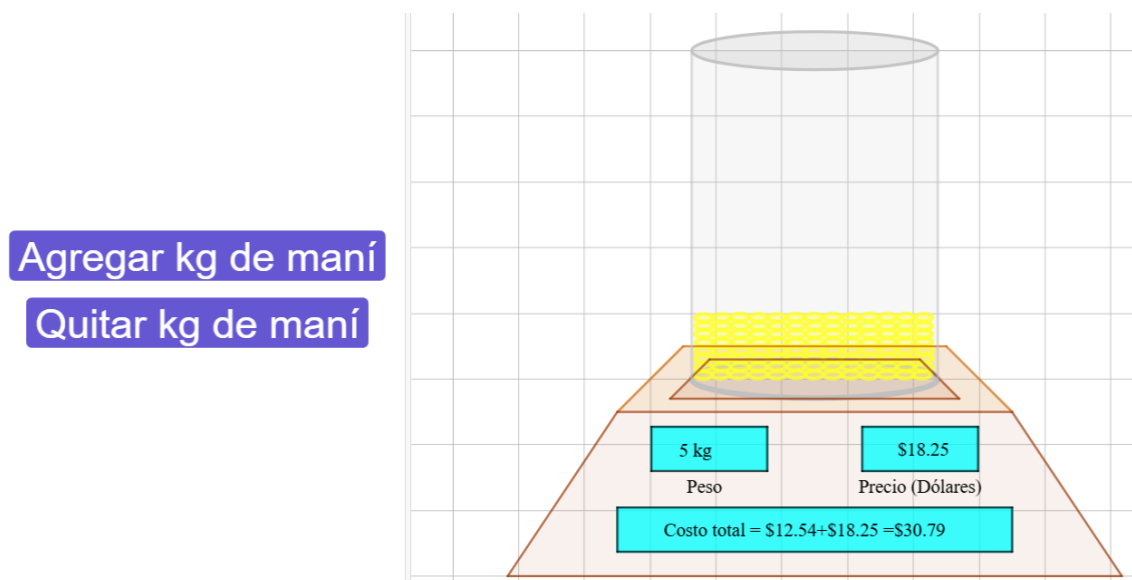
## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

diferenciales que van a ser importantes en el momento de abordar la noción de la razón de cambio promedio.

Por otro lado, en las preguntas 8 y 9 tiene por objetivo que el estudiante encuentre el costo variable o precio si Manfred decide adquirir 5 kg de maní y, que determine el precio por cada kg. Se espera que los estudiantes usando la balanza digital, distingan el precio de 5 kg de maní, que es de \$18.25 (como se muestra en la figura 9), y con esto, determinar el precio o costo variable de un kg de maní al dividirlo por 5, dando como resultado  $\frac{18.25}{5} = 3.65$ .

**Figura 9.**

*Applet con el costo total de 5 kg de maní*



Aquí se incentiva la seriación puesto que, si el estudiante divide el costo variable o precio en 5 partes iguales es consciente de que el cambio que presenta la función costo es constante y es posible usarlo para determinar el costo unitario.

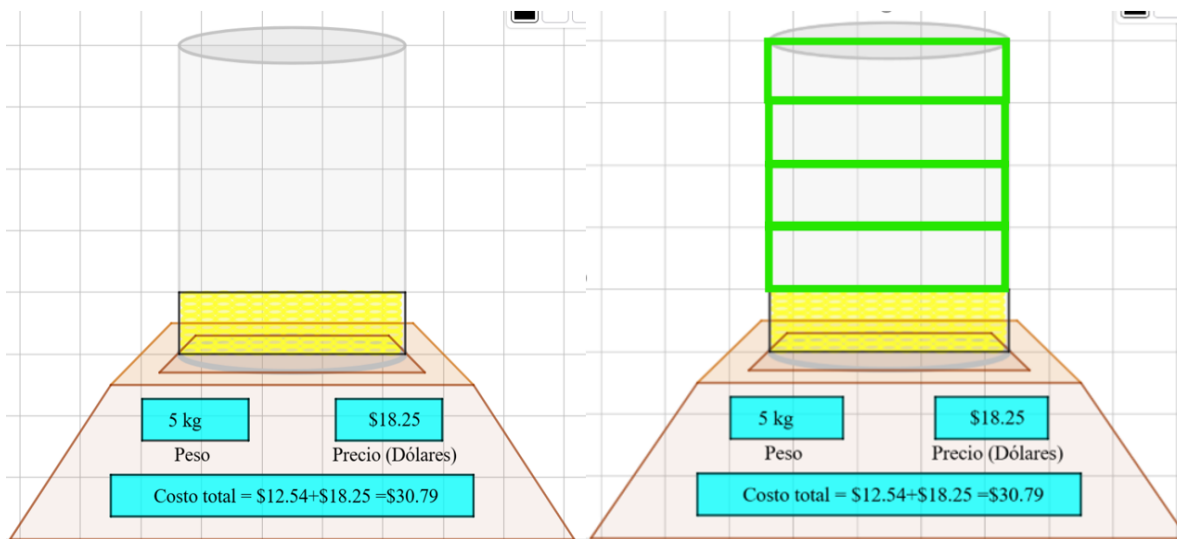
En la tarea 10, se incentiva las prácticas de seriación y predicción. Para encontrar el costo de 25 kg de maní teniendo en cuenta los resultados de la pregunta anterior, el estudiante puede dar

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

cuenta que el costo de 5kg se relaciona con la completitud de un rectángulo dentro del recipiente en la balanza (seriación) (como se observa en la figura 10) luego, 5 rectángulos de ellos establecerán el costo de 25 kg de maní (predicción).

**Figura 10.**

*Applet señalando la capacidad ocupada por 5 kg*



Las siguientes tareas están enfocadas a que el estudiante encuentre la razón de cambio promedio a partir de la tabulación como variación numérica, con el fin de caracterizar el comportamiento de la función costo y concluir que el cambio presente es constante. Por tanto, las tareas planteadas son las siguientes:

*Tarea 11: Complete la siguiente tabla para luego evaluar el comportamiento de la variación del costo total.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 11.**

Tabla para el comportamiento del costo total

	A	B	C	D
1	kg	Costo fijo	Costo variable	Costo total
2	0.25			
3	2.5			
4	4.8			
5	5			
6	7.5			
7	8.3			
8	10			
9	12.5			
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				

Tarea 12: ¿Cuánto es el costo total de comprar 10 kg de maní? ¿Cuánto es el costo total de comprar 3 kg más?

Tarea 13 Según la tarea 12 ¿Cuánto es el costo total de cada kg adicional de los 3 kg que se compró de más?

El **costo promedio por unidad** o el costo por kg adicional se puede calcular a partir del cociente de la diferencia de los costos totales, respecto a la diferencia de las cantidades adquiridas.

$$\text{Costo promedio por unidad} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Con  $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$  y  $\Delta x = x_2 - x_1$ , para  $[x_1, x_2]$

En la tarea 11 se promueve la práctica de seriación pues, el estudiante necesita determinar el costo variable (\$3.65), que se puede obtener a partir del resultado encontrado en la tarea 9, y multiplicarlo con el kilogramo para el que se desea calcular el costo y así, completar la tabla de datos, teniendo en cuenta que el costo fijo es de \$12.54 y el costo total, es la suma del costo variable y el costo fijo, como se muestra en el applet.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Las tareas 12 y 13, tienen el propósito de promover la razón de cambio promedio en un intervalo dado. En este caso los estudiantes determinaran el costo total de producción de 10 kg y de 13 kg, para que posteriormente realicen el cociente de las diferencias entre el costo total y los kg que Manfred compro de más, de la siguiente manera:

$$\frac{C(13) - C(10)}{13 - 10}$$

Las tareas 11, 12 y 13 introducen y formalizan el concepto de costo promedio por unidad, estableciendo que este concepto es la misma razón de cambio promedio, incluso el lenguaje simbólico se presenta para incentivar a los estudiantes a los procedimientos formales relacionados con el análisis de datos en tablas numéricas.

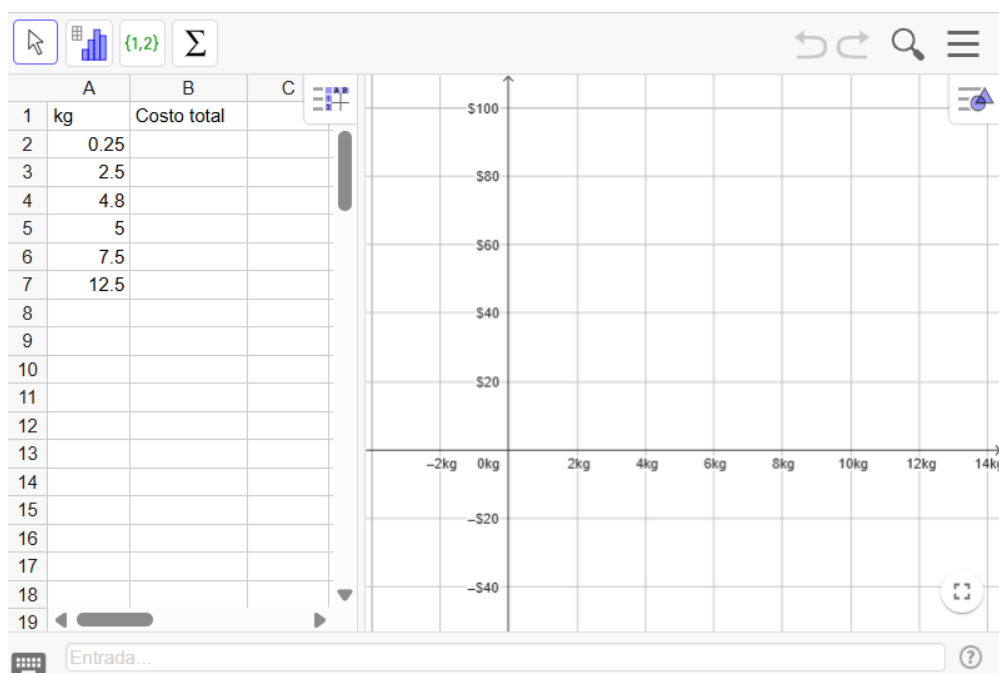
Las tareas de la 14 a la 17 pretenden generalizar el comportamiento de la función costo por medio de la tabulación como variación numérica y la construcción de las gráficas con la variación como punto de referencia, para llegar a la razón de cambio instantánea, a partir de intervalos con diferencias infinitamente pequeñas en las cantidades de kg de maní (diferencias de 0.1 kg, 0.01 kg y 0.001 kg). Además, se promueve la estimación al solicitar el análisis del comportamiento de la razón de cambio instantánea, la cual se definió como el costo marginal.

*Tarea 14: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, Manfred quiere saber el comportamiento del costo total ( $C(x)$ ). Para esto, Manfred propone una serie de pasos que se encuentran en la parte inferior del applet.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 12.**

*Tabla para regresión lineal de función costo total*



- *Llenar la tabla teniendo en cuenta los resultados anteriores.*
- *Seleccione los datos de la columna “kg” y “costo total”, y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.*
- *Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.*
- *Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.*

**Figura 13.**

*Indicaciones del análisis de regresión de dos variables*



## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 15: Si Manfred tiene 2 kg y después desea incrementar a 2.15 kg, 2.1 kg, 2.01 kg, 2.001 kg. Calcule el costo por kg adicional para cada incremento. (Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento).*

### Figura 14.

*Razón de cambio instantánea para el costo*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$x_1$	$x_2$	$C(x_1)$	$C(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$	$\Delta C / \Delta x$	
2	2	2.15						
3	2	2.1						
4	2	2.01						
5	2	2.001						
6	2	2						
7								

*El costo marginal es el costo promedio por artículo extra (En este caso los kg extras) cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad que se adiciona. En otras palabras, es el comportamiento de la variación del costo total cuando se incrementa una pequeña cantidad.*

*Tarea 16: Teniendo en cuenta la definición del costo marginal y el incremento encontrado en las preguntas anteriores, ¿Cuál sería el costo marginal en este caso?*

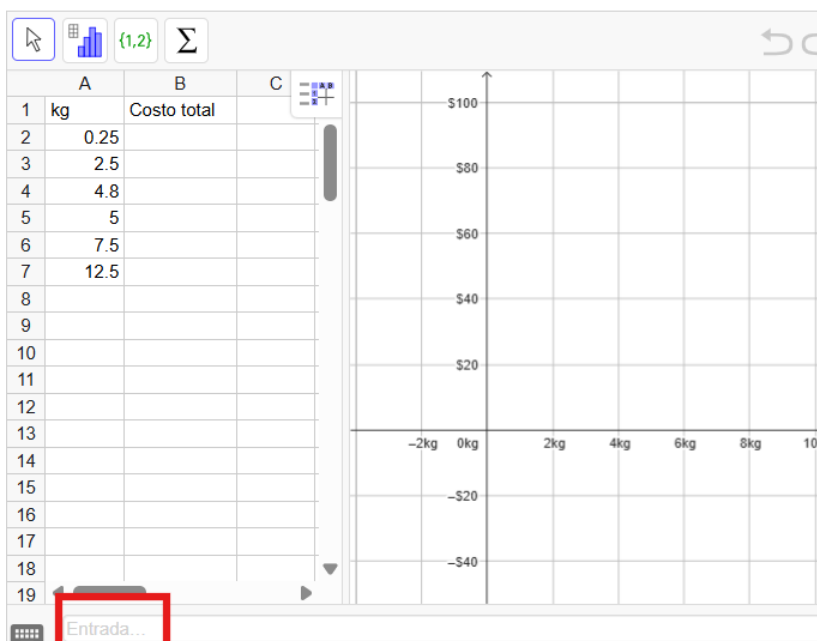
*Tarea 17: ¿Qué relación tiene el costo marginal encontrado y los resultados de las tareas 9 y 14?*

En la Tarea 14 se incentiva la práctica de estimación, debido a que se busca que el estudiante pueda encontrar y representar el comportamiento del costo total de producción de cualquier kilogramo de maní que desee comprar Manfred. Para esto, el estudiante seguirá los pasos que sugiere Manfred para encontrar el modelo que mejor se ajusta a los datos, con la ayuda de la herramienta de “Análisis de regresión de dos variables” y, al finalizar escribir el modelo de regresión en la entrada que se encuentra en el applet.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 15.**

*Entrada para escribir el modelo de regresión*



Por otra parte, en las tareas 15 y 16 se busca promover la razón de cambio instantánea constante a partir de la práctica de estimación, debido a que se tiene la expectativa de que los estudiantes completen cada una de las columnas de la tabla, realizando las diferencias y el cociente entre ellas, para encontrar el costo marginal en el dato correspondiente. En este caso, se incentiva la noción de la derivada como razón de cambio a partir de la idea del límite de las razones de cambio promedio cuando hay un incremento infinitamente pequeño de adquisición de maní. Además, en la columna G se evidenciará que la derivada es constante y que, en este caso, representa el costo unitario de kg de maní y/o también la pendiente de la recta que representa la función de costo total.

Por último, en la tarea 17, se busca que el estudiante a partir de los resultados de las tareas 9 y 14 identifiquen que el costo marginal en este caso es el precio por kg de maní (3.65), adquirido por Manfred, que desde la interpretación geométrica es la pendiente de la función costo total.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

### 5.2.Momento 2

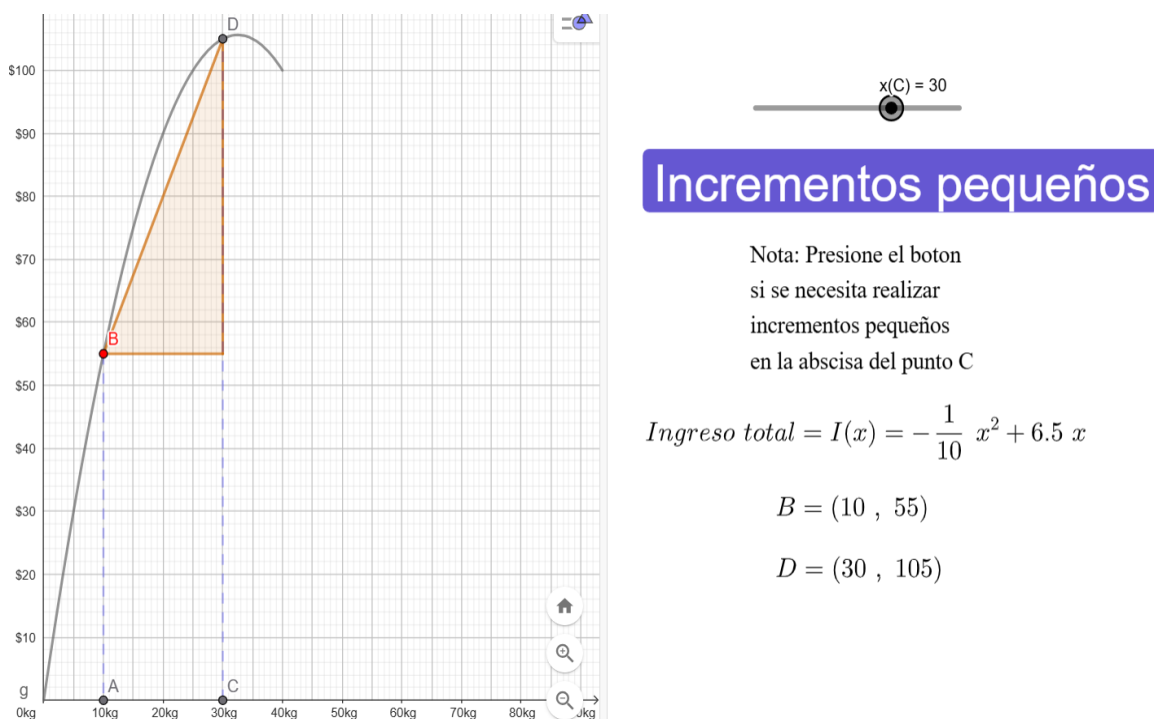
En el momento 2 se aborda la derivada como razón de cambio desde el contexto del ingreso marginal como parte del segundo paso para evaluar el proyecto de Manfred. Aquí, se busca que los estudiantes determinen la derivada como razón de cambio a partir de las prácticas variacionales, teniendo en cuenta el applet que se muestra en la figura 16, solo que a diferencia del momento anterior, la razón de cambio no va a ser constante.

*Manfred, propone vender 40 kg de maní en el día. Para esto realizó en el computador una simulación de la posible venta de kg de maní.*

*Tarea 18: Mueva los puntos A y C para explorar la simulación que realizó Manfred.*

**Figura 16.**

*Applet de la simulación que realizó Manfred*



El applet que se muestra en la figura 16 consiste en la simulación de la posible venta que realizaría Manfred, en donde los estudiantes al mover los puntos A y C pueden observar que los

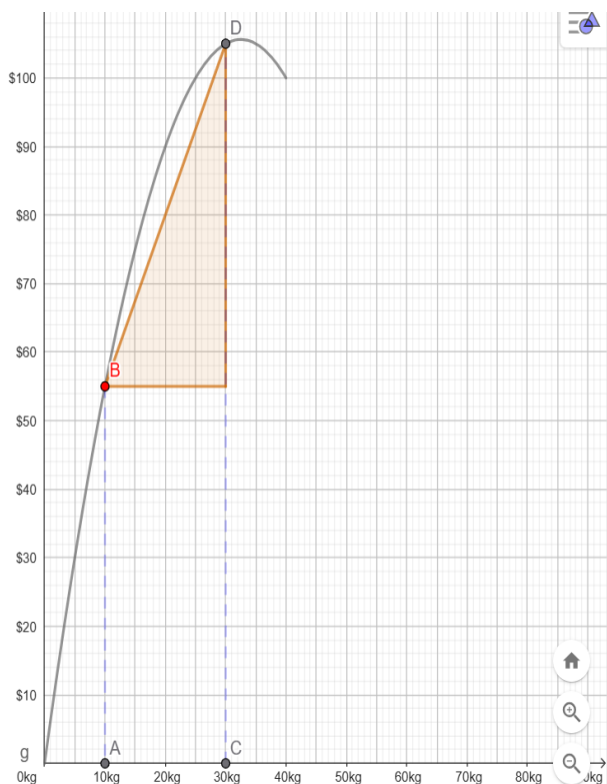
## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

puntos B y D (tarea 18) se están desplazando en la función ingreso total dado, además de que se muestra un triángulo rectángulo que permite evidenciar cómo sería el incremento del ingreso total en un intervalo. Asimismo, se presentan las coordenadas de los puntos B y D para que los estudiantes distingan con precisión el valor de la magnitud del costo y de los kilogramos. En este caso el punto  $B = (x, y)$  establece la coordenada en el eje  $x$  según el  $x$  del punto A y la coordenada en el eje  $y$  representa el valor de la función al evaluarla en el kilogramo correspondiente, de forma análoga para el punto D con respecto al punto C.

Por otro lado, el botón de “Incrementos pequeños” permite realizar incrementos de 0.001 en la abscisa del punto C, como se evidencia en el deslizador  $x(C)$  y, a su vez, ubicar los puntos para establecer los intervalos. Ver figura 17.

**Figura 17.**

*Applet de ingresos señalando cantidades de maní vendidas*



$$x(C) = 30.001$$

### Incrementos pequeños

Nota: Presione el botón si se necesita realizar incrementos pequeños en la abscisa del punto C

$$\text{Ingreso total} = I(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6.5x$$

$$B = (10, 55)$$

$$D = (30.001, 105.0005)$$

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

A continuación, se presentan las tareas de la 19 a la 21, relacionadas con la exploración del applet y la interpretación de las partes que lo componen. Además, hace énfasis en las diferencias de los ingresos como bases para la razón de cambio promedio.

*Tarea 19: ¿Qué representa la ordenada y abscisa de los puntos B y D en la simulación de Manfred?*

*Tarea 20: Mueva el punto A ¿Qué representa todos los puntos por donde pasa el punto B?*

*Tarea 21: Teniendo en cuenta el applet ¿Cuánto incrementa el ingreso al pasar de vender 10 kg a 20 kg?*

En la tarea 19 se tiene el objetivo de identificar las magnitudes que se presentan en el simulador del ingreso total que obtendría Manfred. En esta pregunta se tiene la expectativa de que los estudiantes al mover los puntos A y B puedan observar que la abscisa del punto A representa la magnitud del kilogramo de maní y la ordenada del punto B, el ingreso total según el kilogramo establecido.

Progresivamente, la tarea 20 tiene el objetivo de reconocer e interpretar cada uno de los objetos geométricos que se presentan en la simulación, donde se espera que los estudiantes al explorar el applet moviendo los puntos A y C, (en especial el A) describan que al mover el punto A, el punto B pasa por todos los puntos de la función de ingreso, la separación entre los puntos A y B se muestra en el applet como un segmento (Segmento AB) que representa la altura desde la coordenada abscisa hasta la función ingreso total en el punto correspondiente. Además, el applet muestra un triángulo, con el fin de que los estudiantes relacionen el cateto horizontal con la diferencia entre las abscisas (peso) y el cateto vertical como la diferencia entre las distancias entre las ordenadas (ingreso).

Por otro lado, en la tarea 21 se incentiva la práctica de comparación, debido a que se espera que los estudiantes ubiquen los puntos A y C en los valores dados, para que encuentren el ingreso

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

total de producción y realicen la diferencia en este caso entre el ingreso obtenido por vender 10 kg y 20 kg para luego, determinar cuánto fue el incremento, en este caso haciendo la diferencia entre  $I(20) - I(10)$  obteniendo que el incremento es de 35.

Las siguientes tareas están enfocadas en que los estudiantes observen el comportamiento de las razones de cambio promedio (Ingreso promedio por unidad) a partir de la tabulación como variación numérica, con el propósito de analizar las razones de cambio en diversos intervalos presentes en la tabla y, así, concluir que la razón de cambio está disminuyendo. A continuación, las tareas 22, 23 y 24.

*Tarea 22: Use el punto A y el punto C en la simulación para establecer los intervalos y completar la tabla*

### Figura 18.

*Ingreso promedio por unidad o razón de cambio promedio*

	A	B	C	D	
1	Intervalos (Kg)	$\Delta x$	$\Delta I$	Ingreso promedio por unidad	
2	[0,5]				
3	[5,10]				
4	[10,15]				
5	[15,25]				
6	[25,33]				
7	[33,36]				
8	[36,39]				
9					
10					
11					
12					
13					
14					

*Nota 1: para  $[x_1, x_2]$  se tiene que  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta I = I(x_2) - I(x_1)$*

*Nota 2: Para ubicar los puntos, seleccione el punto que va a desplazar y con la ayuda de las flechas del teclado desplácelo.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*El ingreso promedio por unidad se puede calcular por el cociente de la diferencia de los ingresos totales, respecto a la diferencia de las cantidades vendidas.*

$$\text{Ingreso promedio por unidad} = \frac{\Delta I}{\Delta x}$$

*Tarea 23: Si Manfred decide vender más de 40 kg de maní ¿Qué pasaría con el ingreso promedio por unidad?*

*Tarea 24: Si Manfred se proyectara seguir vendiendo kg de maní, describa el comportamiento del ingreso promedio por unidad encontrado en la tabla.*

En la tarea 22, se incentiva la práctica de seriación a través de la tabulación de la razón de cambio promedio en diferentes intervalos mostrando un patrón de variación a diferencia del momento 1. Se espera que los estudiantes desplacen los puntos A y C en el applet para establecer los intervalos dados y completar las columnas de la tabla determinando la diferencia entre las cantidades vendidas (abscisas A y C) y el ingreso total (ordenadas B y D). Además, esta pregunta promueve la razón de cambio promedio a partir del cálculo del cociente de las diferencias de las magnitudes en un intervalo, que bajo el contexto de la situación se evidencia en la columna del ingreso por unidad promedio (Columna D, figura 18).

Posteriormente, en la tarea 23 se busca incentivar la práctica de predicción. Se espera que el estudiante después de completar la tabla reconozca cómo se está comportando el ingreso promedio por unidad y determine lo que podría suceder si Manfred decide vender más de los 40 kg de maní. Es decir, que el ingreso promedio por unidad va a ir decreciendo.

En la tarea 24, se incentiva la práctica de estimación, ya que se tiene la expectativa de que los estudiantes, al analizar las razones de cambio promedio de la tarea 22, describan que si Manfred siguiera vendiendo más kg de maní el ingreso promedio por unidad tendería a decrecer e inclusive que los ingresos promedio por unidad serán negativos.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Para las tareas de la 25 a la 28 se realiza el paso a la razón de cambio instantánea a través del análisis de la tendencia a cero de la diferencia entre las cantidades vendidas, mediante la tabulación como variación numérica y los datos en tablas numéricas. Además se incluye formalmente el concepto de análisis marginal promoviendo, la práctica de estimación.

*Tarea 25: Si Manfred vende 10 kg y después le compran 10.2 kg, 10.15 kg, 10.1 kg, 10.01 kg, 10.001 kg. Calcule el ingreso promedio por unidad que se obtendría en el aumento evidenciado en cada caso.*

*Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento.*

### Figura 19.

*Ingreso marginal como razón de cambio instantánea*

	A	B	C	D	E	F	G	
1	$x_1$	$x_2$	$l(x_1)$	$l(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta l = l(x_2) - l(x_1)$	$\Delta l / \Delta x$	
2	10	10.15						
3	10	10.1						
4	10	10.01						
5	10	10.001						
6	10	10						
7								

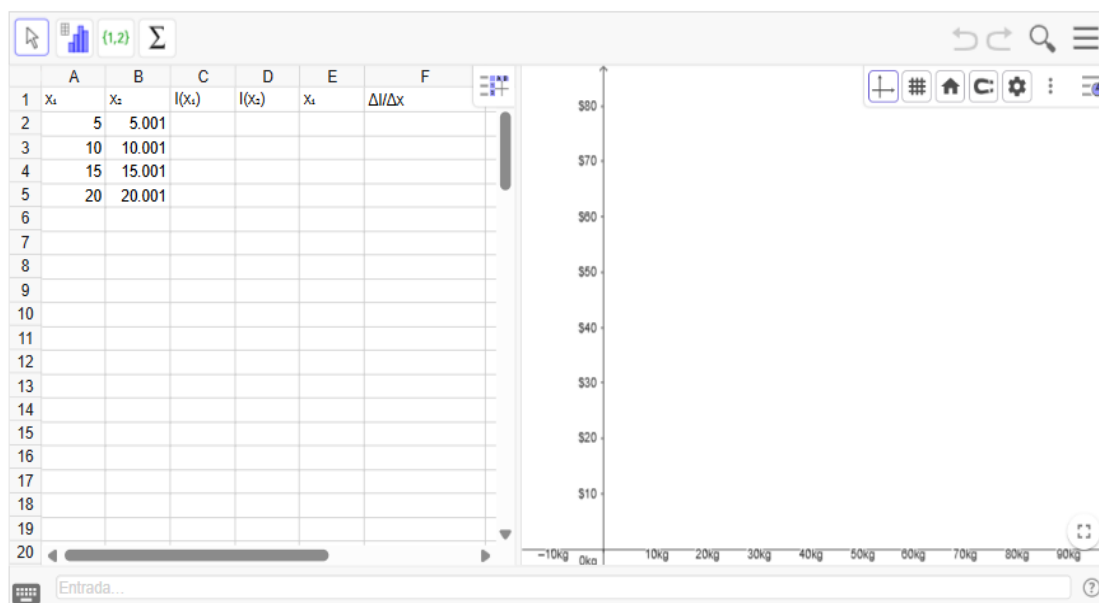
*El **ingreso marginal** son las entradas adicionales que tendrá Manfred por kg adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de kg vendidos.*

*Tarea 26: Encuentre la función del ingreso marginal.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 20.**

*Análisis de regresión de dos variables para ingreso marginal*



*Pasos a seguir.*

1. Llenar la tabla con la ayuda del simulador y utilizar los puntos A y C (con el mouse o con las flechas del teclado) y el botón de incrementos pequeños para ubicar mejor los datos.
2. Seleccionar los datos de la columna " $x_1$ " y " $\Delta I/\Delta x$ ", y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.
3. Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.
4. Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.

*Tarea 27: Teniendo en cuenta la definición y las respuestas anteriores cuál es la función ingreso marginal del emprendimiento de Manfred.*

*Tarea 28: Compara la función ingreso y la función ingreso marginal ¿Qué relación se distingue? ¿Cómo se podría describir esa relación según el contexto?*

Por su parte, en la tarea 25 se espera incentivar la práctica de estimación, debido a que se tiene la expectativa de que los estudiantes al utilizar el applet ubiquen el punto A en 10 kg y el punto C con ayuda del botón de “incrementos pequeños”, y así, con las coordenadas de los puntos B y D encuentren el valor del ingreso para cada punto. Luego, realicen el cociente de las

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

diferencias. En este caso, la diferencia de la magnitud kg va disminuyendo hasta llegar a ser infinitamente pequeña. Cabe mencionar que en la tarea 25 se está promoviendo la razón de cambio instantánea desde la idea del límite de la razón de cambio promedio, ya que los estudiantes al completar la tabla pueden estimar el incremento del ingreso si le adicionan una cantidad muy pequeña de kg de maní.

Por otra parte, en la tarea 26 para completar la tabla, los estudiantes deberán encontrar el ingreso con los datos correspondientes y realizar el cociente de las diferencias para luego, obtener la gráfica con la variación como punto de referencia, pues, a partir del análisis de regresión de dos variables en las columnas E y F deberán seleccionar el modelo que mejor represente la función derivada ( $Ingreso\ marginal = -\frac{1}{5}x + 6.5$ ), que refiere al ingreso marginal.

Así, el propósito de la tarea es mostrar algebraica y gráficamente la función de ingreso marginal como resultado del análisis previo, con el fin de que estudiante al encontrar el comportamiento de la función de ingreso marginal y representarlo se le facilite relacionar las tareas del momento 3 con los momentos 1 y 2, en este caso, el ingreso marginal como punto de inicio para trabajar el concepto de utilidad más adelante.

Luego, en la tarea 27, se solicita escribir la función que encontró en la tarea anterior para, con ella, en la tarea 28 comparar las expresiones algebraicas de la función de ingreso total e ingreso marginal e inducir el patrón de la derivada como razón de cambio o en este caso, el ingreso marginal como derivada de la función ingreso total. Cabe mencionar, que en la tarea 28 la comparación puede ser entre las expresiones algebraicas y/o las representaciones gráficas de ambas funciones.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Finalmente, se espera que el estudiante concluya que el ingreso marginal es la derivada del ingreso total, o en pocas palabras la razón de cambio instantánea del ingreso total.

### 5.3. Momento 3

Este momento consiste en el análisis e interpretación de la derivada como razón de cambio sobre el beneficio del emprendimiento de la venta de maní a partir de las cuatro prácticas variacionales. En este caso, se presenta un applet que muestra las funciones del costo marginal e ingreso marginal con las coordenadas de los puntos correspondientes, para encontrar la utilidad marginal.

*Como último paso, Manfred desea estudiar que tan útil resultaría su emprendimiento teniendo en cuenta el costo y el ingreso. Para esto debes ayudarlo buscando la utilidad del negocio y analizando las cantidades que le generaran más ganancias.*

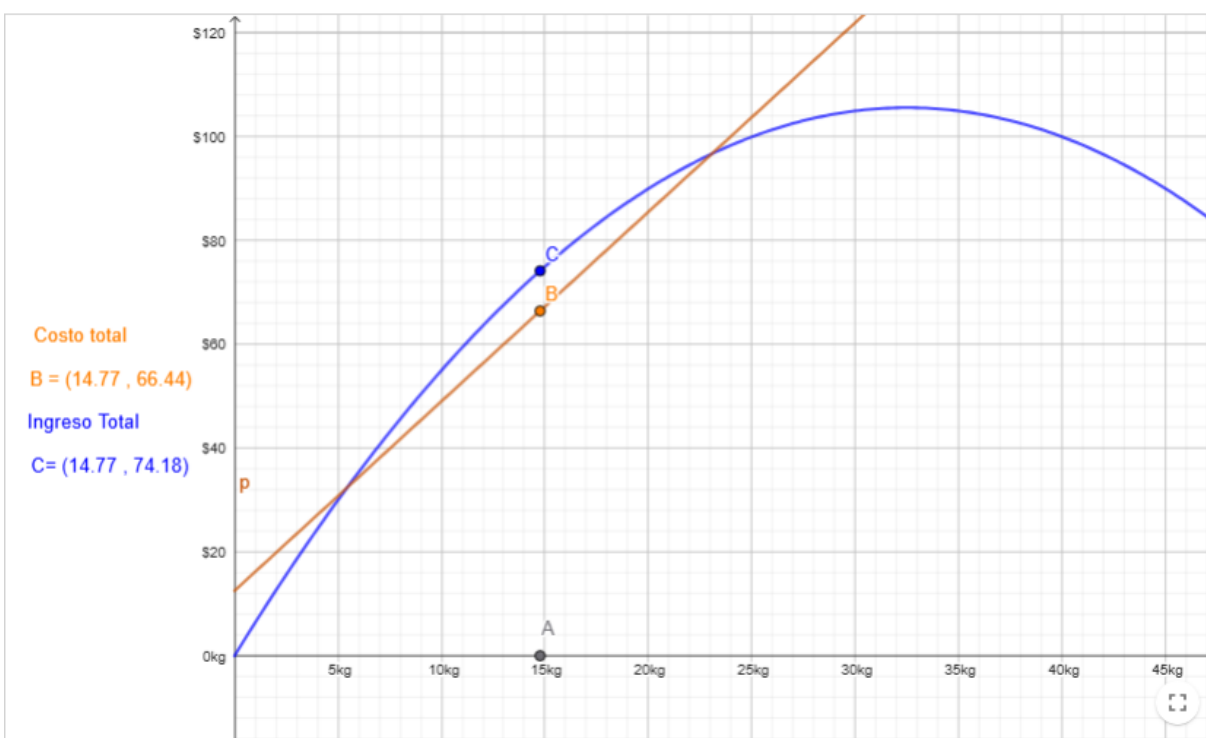
*Tener en cuenta que la **utilidad** es el resultado de la diferencia entre el ingreso total y el costo total, si el ingreso total es mayor al costo total la diferencia será positiva, es decir, el emprendimiento dejará ganancias, en caso contrario la diferencia será negativa y daría pérdidas.*

*Tarea 29: Mueva el punto A para ver lo que sucede con el punto B y C.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 21.**

*Applet para la comparación entre el ingreso total y costo total*



El applet muestra algebraica y gráficamente las funciones de ingreso total (color azul) y costo total (color naranja) y un punto A, donde la abscisa  $x(A)$  representa la cantidad de maní en kg a adquirir y vender, mientras que las ordenadas del punto B y C representan respectivamente el costo e ingreso de dicha cantidad. Así los estudiantes parten de una relación entre el costo e ingreso para llegar al concepto de utilidad. Luego, se espera que los estudiantes distingan qué sucede con los puntos B y C según el cambio en el punto A.

A continuación, se presentan las tareas orientadas a que el estudiante realice comparaciones de las funciones costo e ingreso para llegar al concepto de utilidad a partir del análisis gráfico con la variación como punto de referencia. Además, se solicita analizar el comportamiento de las funciones y hallar la utilidad en puntos específicos.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 30: ¿Qué representan los puntos B y C?*

*Tarea 31: ¿Es conveniente recomendar a Manfred adquirir y vender más de 40 kg de maní? (Justifique su respuesta)*

*Tarea 32: Si Manfred vende 20 kg de maní ¿De cuánto sería la ganancia? ¿Y si vende 14 kg?*

*Tarea 33: ¿En cuál de los dos casos generaría más ganancia?*

La tarea 30 se orienta a la identificación de las magnitudes que se presentan en el applet. En tanto, se espera que los estudiantes al mover el punto A puedan observar que el punto B representa el costo total en el kilogramo que se establece en la abscisa del punto A y, el punto C es la representación del ingreso total en el kilogramo que se encuentra en la abscisa del A.

La tarea 31 tiene el propósito de incentivar la práctica de comparación, ya que se espera que los estudiantes muevan el punto A y con la ayuda de las coordenadas, y lo que se menciona en la figura 22, comparen las alturas de los puntos B y C cuando el punto A es mayor o igual a 40 kg de maní. Así, se espera que establezcan que no se recomendaría vender más de 40 kg, porque el ingreso total es menor que costo total para el intervalo  $[40, +\infty)$ .

**Figura 22.***Concepción de la utilidad total*

Tener en cuenta, que la **utilidad** es el resultado de la diferencia entre el ingreso total y el costo total, si el ingreso total es mayor al costo total la diferencia será positiva, es decir, el emprendimiento dejará ganancias, en caso contrario la diferencia será negativa y daría pérdidas.

Así mismo en las tareas 32 y 33 se sigue incentivando la práctica de comparación, debido a que los estudiantes ubicaran los puntos B y C al mover el punto A para comparar las ordenadas en cada uno y hallar la diferencia entre el ingreso y el costo que corresponde a la utilidad total. Es decir, encontrarán el ingreso y el costo total de 20 kg y 14 kg para realizar la diferencia, esto es:

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

$$\begin{aligned}
 U(20) &= I(20) - C(20) & U(14) &= I(14) - C(14) \\
 &= 90 - 85.54 & &= 71.4 - 63.64 \\
 &= 4.46 & &= 7.76
 \end{aligned}$$

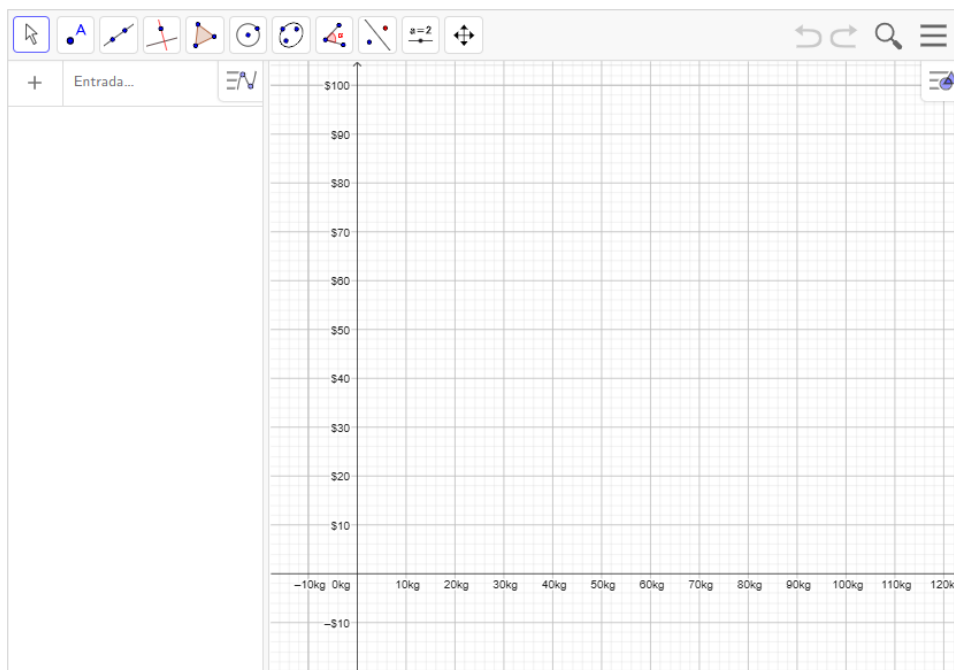
Así, se identificarán las ganancias en cada caso y concluirán que al adquirir y vender 14 kg de maní se obtiene mayor ganancia que al adquirir y vender 20 kg de maní.

Las tareas 34 a la 39 se orientan a generalizar el concepto de utilidad y el comportamiento de su función, incentivando el uso de patrones que surgen de la práctica de seriación y, con ello analizar la estabilidad del emprendimiento a partir de la predicción y estimación.

*Tarea 34: Obtenga la gráfica de la función utilidad*

**Figura 23.**

*Applet para graficar la función utilidad*



## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 35: ¿Cómo es el comportamiento de la utilidad según la cantidad de kg que se adquieren y venden?*

*Tarea 36: ¿Qué sucede si Manfred adquiere y vende 40 kg de maní? ¿Por qué sucede eso?*

*Tarea 37: ¿Para qué cantidades de maní, resulta el emprendimiento una pérdida para Manfred?*

*Tarea 38: ¿Qué posibles cantidades de maní debe adquirir y vender Manfred para generar ganancias?*

*Tarea 39: ¿Para qué cantidad de kg se obtiene la mayor ganancia?*

En las tareas 34 y 35 se promueve la práctica de seriación, debido a que se tiene la expectativa de que los estudiantes encuentren el modelo en el software de GeoGebra (Figura 23), ya sea por medio de la definición de utilidad en la figura 22 o usando la herramienta del análisis de regresión de dos variables a partir de los datos del applet de la figura 24, para que posteriormente en la tarea 35 describan cómo se comporta la función que encontraron.

### Figura 24.

*Coordenadas de los puntos de ingreso total y costo total*



A partir del modelo encontrado en la tarea 34, se plantea las preguntas 36, 37 y 38, que tienen el objetivo de incentivar la práctica de predicción, debido a que los estudiantes después de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

describir el comportamiento de la función utilidad determinarían lo que sucede si Manfred decide vender 40 kg de maní y a su vez, concretar el intervalo de las cantidades de maní en las que Manfred obtendría ganancias y pérdidas en su emprendimiento.

Por último, en la tarea 39, se espera incentivar la práctica de estimación, pues los estudiantes deberán establecer la cantidad de maní que le permita a Manfred obtener la mayor ganancia teniendo en cuenta el comportamiento de la variación de la función encontrada.

Las siguientes tareas implican el uso del concepto de la utilidad y la utilidad marginal, buscando que el estudiante a partir de la concepción de utilidad total infiera que la utilidad marginal es la diferencia del ingreso y el costo marginal. Luego, representar la utilidad marginal teniendo en cuenta las funciones ingreso y costo marginal encontradas en los momentos anteriores y, por último, interpretar que el máximo de una función se puede encontrar cuando la derivada (utilidad marginal) es igual a cero.

*Tarea 40: Teniendo en cuenta el ingreso marginal y el costo marginal ¿Cómo encontraría la utilidad marginal?*

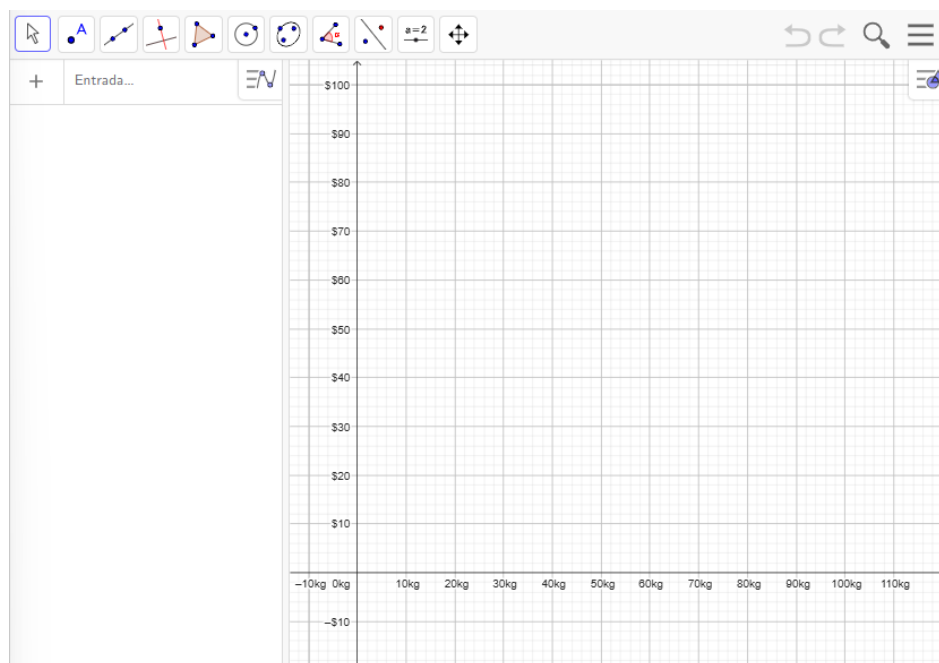
*La **utilidad marginal** es la utilidad por artículo al sufrir un pequeño incremento en la producción.*

*Tarea 41: Obtenga la gráfica de la utilidad marginal.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 25.**

Applet para obtener la gráfica la función de utilidad marginal



*Tarea 42: ¿En algún valor la utilidad marginal es igual a cero?, ¿Qué significa que sea cero en ese valor?*

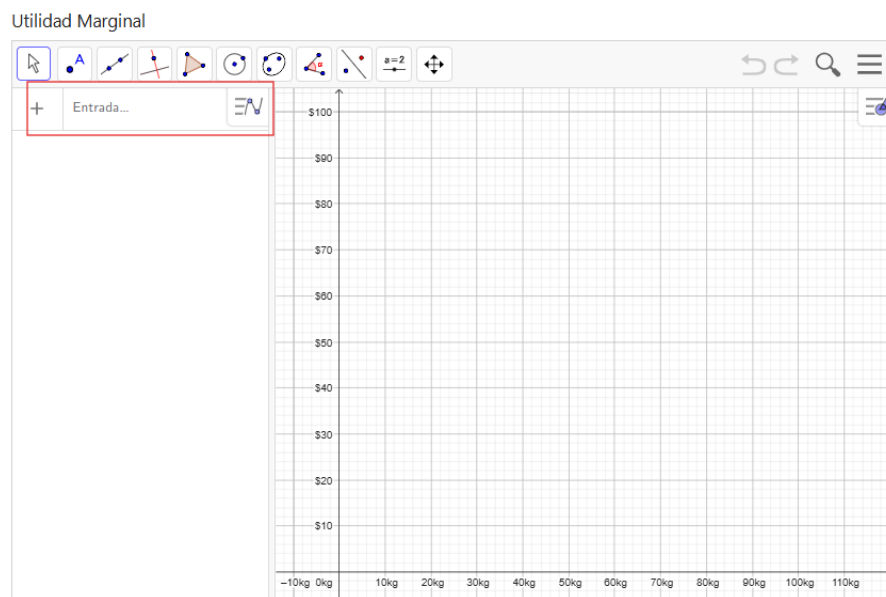
La tarea 40, tiene el objetivo de que los estudiantes con la definición de utilidad que se muestra en la figura 22 infieran que la utilidad marginal es la diferencia de la función ingreso marginal con la función costo marginal y de esa manera encontrar la utilidad marginal. Inclusive, esta tarea promueve la propiedad de la derivada de la resta de dos funciones.

Posteriormente, en la tarea 41 se busca que los estudiantes obtengan la gráfica de la función de utilidad marginal escribiéndola en la entrada del applet (Ver figura 26).

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 26.**

*Entrada para escribir la función de utilidad marginal.*



Por último, en la pregunta 42 se tiene por objetivo que los estudiantes, con ayuda de la gráfica, determinen la cantidad de kilogramos que debe adquirir y vender Manfred para que la utilidad marginal sea igual a cero. Así mismo, se busca promover la interpretación de la derivada desde la optimización, en donde se tiene la expectativa de que los estudiantes identifiquen que el kg en que la derivada es igual a cero sucede cuando Manfred obtendría la mayor ganancia, que ya se había estimado en la tarea 39.

## 6. Ajustes del diseño

En este apartado se evidenciará todos los ajustes que se realizaron a la situación de aprendizaje teniendo en cuenta los resultados en las hojas de trabajo y las grabaciones de la sesión de pilotaje. En tanto, se evalúan los objetivos que se plantearon en cada una de las tareas de los tres momentos en función de las respuestas dadas por los estudiantes. En ese sentido, se encontraron tres tipos de ajuste para las tareas de la SA: Ajuste de orientación y redacción, ajustes por recurso y emergencia de las prácticas variacionales. Cabe mencionar, que la enumeración de las tareas cambia respecto al diseño mostrado del capítulo 5 a partir de la tarea 22, debido a que se agregaron preguntas que se consideraron necesarias para el desarrollo del momento 2.

### 6.1. Ajustes por orientación y redacción.

A continuación, se describen los ajustes que se realizaron de orientación y redacción según los resultados en el pilotaje.

En las tareas 14 y 30, cuando los estudiantes escribieron el modelo de regresión en la barra de entrada, no se mostró la representación en la vista gráfica pues, esta última se ocultaba detrás de la ventana del análisis de regresión de dos variables. Por ende, se añadió una nueva indicación en las instrucciones (se distingue en negrilla), con el propósito de favorecer la observación del comportamiento de las funciones encontradas. Las tareas que se ajustaron quedaron de la siguiente manera:

*Tarea 14: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, Manfred quiere saber el comportamiento del costo total ( $C(x)$ ). Para esto Manfred propone una serie de pasos que se encuentran en la parte inferior del applet.*

*Pasos:*

- *Llenar la tabla teniendo en cuenta los resultados anteriores.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- *Seleccionar los datos de la columna “kg” y “costo total”, y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.*
- *Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.*
- *Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.*
- ***Dar clic en los tres puntos de la ventana emergente del análisis de regresión de dos variables, ubicados en la parte superior derecha y luego, seleccionar la opción cerrar.***

*Tarea 30: Encuentre la función del ingreso marginal.*

*Pasos a seguir*

- *Llenar la tabla con la ayuda del simulador y utilice los puntos A y C (con el mouse o con las flechas del teclado) y el botón de incrementos pequeños para ubicar mejor los datos.*
- *Seleccionar los datos de la columna " $x_1$ " y " $\Delta I/\Delta x$ ", y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.*
- *Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.*
- *Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.*
- ***Dar clic en los tres puntos de la ventana emergente del análisis de regresión de dos variables, ubicados en la parte superior derecha y luego, seleccionar la opción cerrar.***

En la tarea 32 los estudiantes evidenciaron dificultades para distinguir el concepto de derivada como razón de cambio. En la mayoría de respuestas se encontraron afirmaciones como: *la relación de la función ingreso total y la función ingreso marginal es que ambas son decrecientes*, la cual no cumple el objetivo que se tenía planteado, debido a que en el enunciado de la tarea no se especifica qué se debe comparar exactamente de las dos funciones, en tanto, los estudiantes realizan un análisis encaminado a comparaciones comunes como el decrecimiento de las funciones y no se llega a relacionar el ingreso marginal como la razón de cambio instantánea de la función ingreso. Por tanto, se decidió cambiar la redacción de la tarea y plantear dos preguntas adicionales para guiar al estudiante y al objetivo:

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 28: ¿Qué representa  $\Delta x$  y  $\Delta I$ ?*

*Tarea 29: ¿Qué representa los datos de la columna G?*

Así, la pregunta que se planteó para llegar al objetivo fue:

*Tarea 32: Compara los resultados de la tarea 22 con las tareas 28, 29 y 30 ¿Qué relación puedes establecer entre el ingreso promedio por unidad y el ingreso marginal? ¿Cómo podrías describir esa relación según el contexto?*

Por otro lado, en las tareas 38 y 43 los estudiantes tuvieron inconvenientes al momento de graficar las funciones, debido a la necesidad de retroceder a los momentos 1 y 2 (Función costo total y función ingreso total) para obtener la expresión de las funciones de costo (total y marginal) e ingreso (total y marginal) para trasladarlas a la barra de entrada y obtener la función de utilidad total y la función utilidad marginal. Por lo tanto, para la tarea 38 se decidió dejar una nota instructiva con el fin de hallar las intersecciones de las funciones con el eje  $x$  y así, responder las preguntas posteriores. La tarea se ajustó de la siguiente forma:

*Tarea 38: Obtenga la gráfica de la función utilidad total teniendo en cuenta las funciones costo total e ingreso total de la tarea 33.*

*Nota: Marque un punto sobre la gráfica y desplácelo para encontrar las intersecciones de la gráfica con el eje  $x$ .*

Análogamente en la tarea 45, se incluyó una nota con las funciones de ingreso y costo marginal para evitar que los estudiantes retrocedan en los momentos anteriores. La tarea se replanteó de la siguiente manera:

*Tarea 45: Obtenga la gráfica de la utilidad marginal.*

*Nota: La función ingreso marginal es  $IMg(x) = -\frac{1}{5}x + 6.5$  y la función costo marginal es  $CMg(x) = 3.65$*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

### 6.2. Ajustes por recurso

En esta sección se presentan los ajustes que se realizaron por recurso; este tipo de ajuste hace referencia a los arreglos que implica los applets del software de GeoGebra.

En las tareas 11, 14, 15 y 22 se decidió reducir los datos en las tablas, a razón exceso de tiempo para completar los datos restantes, considerando que el objetivo no era mecanizar el cálculo de datos sino incentivar la interpretación y relación de las variables desde la representación tabular.

Las tareas correspondientes se ajustaron de la siguiente manera:

*Tarea 11: Complete la siguiente tabla para luego evaluar el comportamiento de la variación del costo total.*

#### Figura 27.

*Ajuste tarea 11*

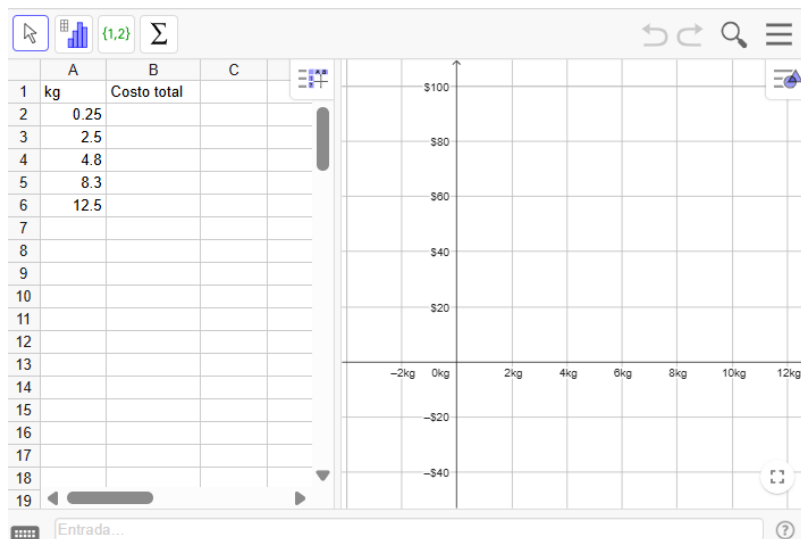
	A	B	C	D
1	kg	Costo fijo	Costo variable	Costo total
2	0.25			
3	2.5			
4	4.8			
5	8.3			
6	12.5			

*Tarea 14: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, Manfred quiere saber el comportamiento del costo total ( $C(x)$ ). Para esto Manfred propone una serie de pasos que se encuentran en la parte inferior del applet.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 28.**

Ajuste tarea 14



Tarea 15: Si Manfred tiene 2 kg y después desea incrementar a 2.1 kg, 2.01 kg, 2.001 kg. Calcule el costo por kg adicional para cada incremento. (Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento).

**Figura 29.**

Ajuste tarea 15

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x_1$	$x_2$	$C(x_1)$	$C(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$	$\Delta C / \Delta x$
2	2	2.1					
3	2	2.01					
4	2	2.001					
5	2	2					

Tarea 22: Use el punto A y el punto C en la simulación para establecer los intervalos y completar la tabla.

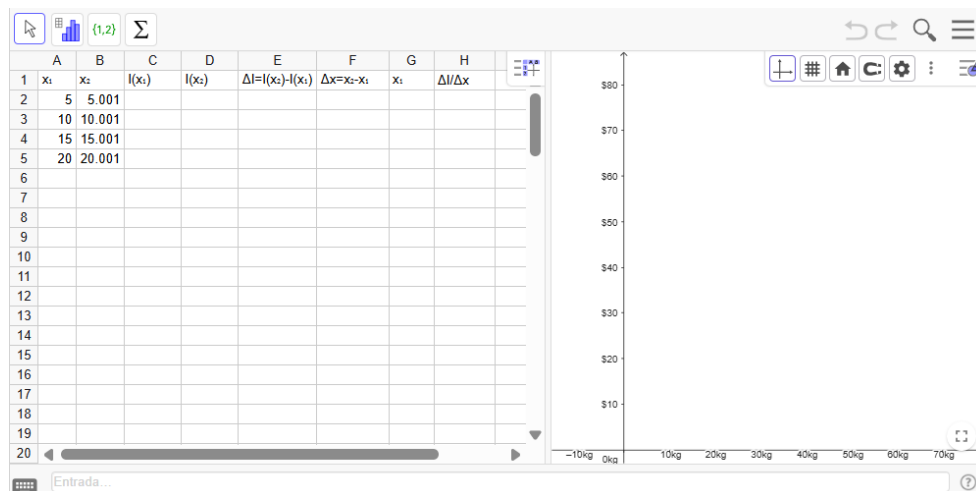
## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 30.***Ajuste tarea 22*

	A	B	C	D
1	Intervalos (Kg)	$\Delta x$	$\Delta I$	Ingreso promedio por unidad
2	[0, 8]			
3	[8, 16]			
4	[16, 25]			
5	[25, 33]			
6	[33, 39]			

Con respecto a la tarea 30, los estudiantes presentaron dificultades para calcular el cociente de las dos diferencias, necesario para el análisis de regresión de dos variables; por consiguiente se decidió agregar en la tabla las columnas  $\Delta I$  y  $\Delta x$ . Observe la figura 31.

*Tarea 30: Encuentre la función del ingreso marginal.*

**Figura 31.***Ajuste tarea 30*

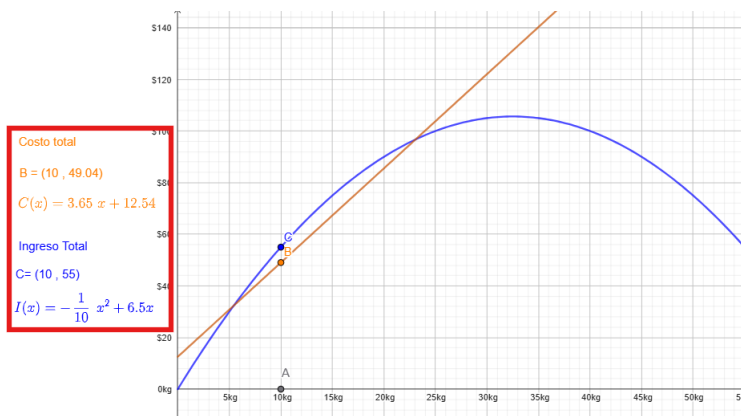
Por otro lado, en la tarea 33 se agregó en el applet la expresión de las funciones de ingreso total y costo total (recuadro rojo en la figura 32), para evitar la necesidad de retroceder a los momentos anteriores para obtener las expresiones de las funciones correspondientes. El applet se modificó de la siguiente manera:

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 33: Mueva el punto A para ver lo que sucede con el punto B y C.*

### Figura 32.

*Ajuste tarea 33*



### 6.3. Emergencia de las prácticas

En esta sección se presentan los ajustes que se realizaron teniendo en cuenta la emergencia de las prácticas variacionales. Específicamente, se modificaron las tareas donde no se evidenció el desarrollo de las PV esperadas.

En la tarea 22 se esperaba promover la práctica de seriación a través de la tabulación de la razón de cambio promedio en diferentes intervalos mostrando el carácter estable del cambio. Sin embargo, los estudiantes no contaban con el espacio para describir el comportamiento del ingreso promedio por unidad, lo que dificultó la identificación del patrón entre los datos; por lo cual se decidió agregar la siguiente tarea:

*Tarea 23: Teniendo en cuenta los resultados de la columna D de la tarea 22 ¿Cómo se comporta el ingreso promedio por unidad?*

Por otro lado, la tarea 23 (del capítulo 5) buscaba incentivar la práctica de predicción donde el estudiante anticipe el ingreso promedio por unidad en un punto en específico teniendo en cuenta el comportamiento. Sin embargo, la tarea que se planteó no llega a incentivar la práctica de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

predicción, sino la práctica de estimación en un intervalo, ya que el estudiante anticipa el comportamiento que hay en el intervalo de  $[40, +\infty)$ . Por lo cual, se decidió agregar una pregunta que incentive la práctica de predicción, en donde el estudiante anticipe el ingreso total de 41 kg para posteriormente anticipar el ingreso promedio por unidad. También se decidió dejar la tarea que incentiva la práctica de estimación de la siguiente manera:

*Tarea 24: Si Manfred decide vender 40 kg de maní y después vende 1 kg más ¿Qué sucede con el ingreso promedio por unidad?*

*Tarea 25: Si Manfred decide vender más de 40 kg de maní ¿Qué pasaría con el ingreso promedio por unidad?*

En la tarea 25 (del capítulo 5), se esperaba incentivar la práctica de estimación, al momento de encontrar las razones de cambio usando incrementos infinitamente pequeños para estimar la razón de cambio instantánea de una cantidad en específico, teniendo en cuenta las razones de cambio anteriores para determinar la tendencia del ingreso marginal en dicha cantidad. No obstante, no todos los estudiantes mencionaron la tendencia del ingreso marginal pues, únicamente completaron la tabla. Por lo tanto, se decidió agregar la siguiente tarea para incentivar que los estudiantes escriban la tendencia y expliquen como encontraron dicha tendencia:

*Tarea 27: Teniendo en cuenta los resultados encontrados en la tarea 26 ¿Cuánto es el ingreso promedio por unidad si Manfred decide vender 10 kg exactamente? (Explique su respuesta).*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

### 7. Descripción sobre el desarrollo de las Prácticas Variacionales en la SA

En este apartado se presentan algunos resultados de los estudiantes en relación al desarrollo de las PV en el estudio de la derivada como razón de cambio. Esto, con el fin de revelar cómo el uso de las PV desde el diseño de las tareas fundamentadas de la SA favorece la enseñanza de la noción de derivada como razón de cambio en un contexto económico.

#### 7.1.Comparación

En las tres etapas de la situación se plantearon preguntas que buscaban incentivar la práctica de comparación, en donde se esperaba que los estudiantes determinaran el incremento del costo o el ingreso cuando se adquiere o vende más kg de maní, teniendo en cuenta los datos en el applet. Un ejemplo de esto es la respuesta de algunos estudiantes en la tarea 7, ver figura 33.

*Tarea 7: Manfred planea comprar 1.25 kg, luego cambia de opinión y decide comprar 3.75 kg ¿Cuánto incrementaría el costo total de 1.25 kg a 3.75 kg?*

**Figura 33.**

*Respuesta de E1 y E2*

E1	E2
<p>el costo de la primera es de 17.1 dolares mientras que la de la segunda es de 26.23 dolares tubo un aumento de 9,13 dolares</p>	<p><math>26,23-17,1=9,13</math></p> <p>El costo total aumentaría en 9,13 dólares</p>

Allí se evidencia que los estudiantes primero, determinaron el costo total de 1.25 kg y 3.75 kg para encontrar el incremento a partir de la diferencia entre los dos resultados y así, concluir que el incremento del costo total es de 9.13 dólares. Además, se evidencia que la tarea permite

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

introducir las diferencias, que serán útiles para calcular las razones de cambio promedio e instantánea en cualquier intervalo a partir del cociente de los diferenciales.

Por otro lado, la comparación también se evidenció cuando los estudiantes analizaron el comportamiento de las funciones costo total e ingreso total en la siguiente tarea:

*Tarea 35: Recomendarías a Manfred adquirir y vender más de 40 kg de maní? (Justifique su respuesta).*

### Figura 34.

*Respuesta E3*

#### Respuesta

No, no le conviene vender más de 40 kg, porque a partir de ese punto el ingreso total comienza a disminuir, mientras que el costo sigue aumentando. Eso significa que la utilidad deja de crecer y el negocio empezaría a tener menores ganancias o incluso pérdidas.

Como se muestra en la figura 34 el estudiante analiza y compara las gráficas de las funciones ingreso total y costo total. Observa que después de 40 kg el costo total es mayor que el ingreso total, llegando a generar pérdidas. Además, reconoce que la función utilidad es la diferencia entre el ingreso y el costo. Así mismo, el estudiante al mencionar que “*después de 40 kg la utilidad deja de crecer*” se da una interpretación del posible comportamiento de las razones de cambio dentro del intervalo  $[40, +\infty)$ , para concluir que el negocio generaría pérdidas muy grandes.

## 7.2.Seriación

La práctica de seriación en las tres etapas de la situación de aprendizaje se orientaba a la caracterización del comportamiento de las funciones o de las razones de cambio, con el fin de establecer modelos que faciliten el análisis de la variación de las magnitudes. Estos modelos son usados para realizar predicciones y estimaciones de intervalos futuros, intermedios o anteriores a los datos e intervalos usados para crear el modelo. Por ejemplo, en las siguientes tareas se evidencia

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

que la práctica de seriación favoreció el desarrollo del concepto de razón de cambio al mostrar la relación entre las variables y el comportamiento de la función.

*Tarea 11: Complete la siguiente tabla para luego evaluar el comportamiento de la variación del costo total.*

**Figura 35.**

*Respuesta E4*

	A	B	C	D	
1	kg	Costo fijo	Costo variable	Costo total	
2	0.25	12.54	0.91	13.45	
3	2.5	12.54	9.13	21.67	
4	4.8	12.54	17.52	30.06	
5	5	12.54	18.25	30.79	
6	7.5	12.54	27.38	39.92	
7	8.3	12.54	30.3	42.84	
8	10	12.54	36.5	49.04	
9	12.5	12.54	45.63	58.17	
10	13	12.54	47.45	59.99	
11					

Al completar correctamente la tabla se distingue que para cualquier peso, el costo fijo es el mismo (\$12.54) y que, al variar los kg de maní, también varían el costo variable y el costo total. Además, el comportamiento de la función es creciente, puesto que al aumentar la cantidad de kg de maní también aumentan el costo variable y el costo total. Esta tabla permitió establecer el modelo de comportamiento de la función costo total, que fue la base para posteriormente realizar la predicción y la estimación. Esta, también favoreció el desarrollo del concepto de la razón de cambio al generar los puntos de referencia para calcular las diferencias en las cantidades de kg de maní y en los costos. Así, los estudiantes llenaron las tablas encontrando los costos variables que se pueden obtener al usar el applet de la simulación de la báscula y posteriormente, sumaron el costo variable con el costo fijo encontrando el costo total de los datos correspondientes, como se

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

observa en la figura 35, esto permitió construir un modelo de comportamiento de la función costo total.

*Tarea 22: Use le punto A y el punto C en la simulación para establecer los intervalos y completar la tabla.*

**Figura 36.**

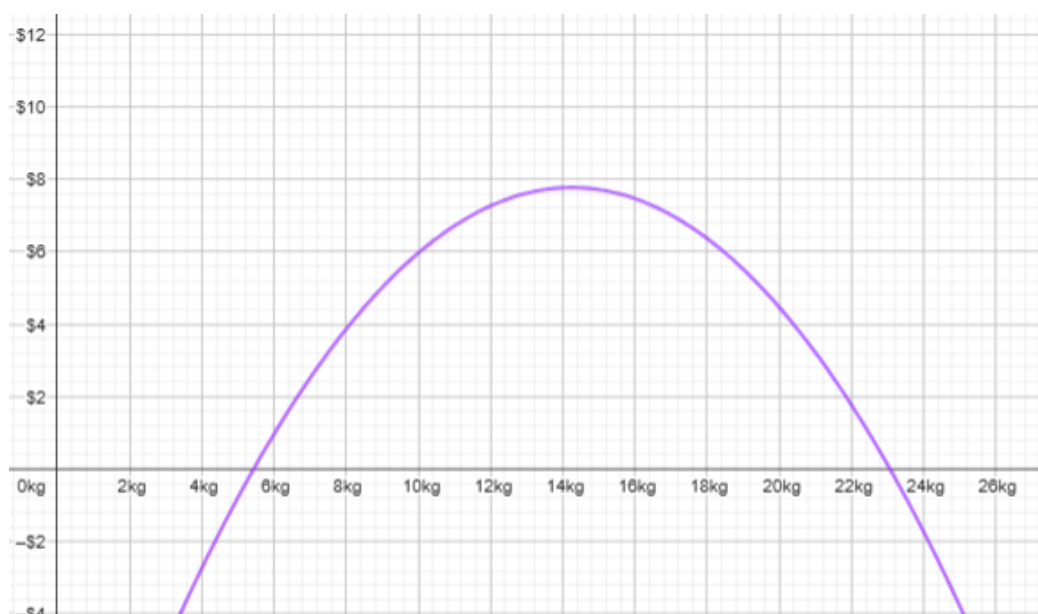
*Respuesta E5*

	A	B	C	D
1	Intervalos (Kg)	$\Delta x$	$\Delta I$	Ingreso promedio por unidad
2	[0,5]	5	30	6
3	[5,10]	5	25	5
4	[10,15]	5	20	4
5	[15,25]	10	25	2.5
6	[25,33]	8	5	0.63
7	[33,36]	3	-1.2	-0.4
8	[36,39]	3	-3	-1
9				
10				

Así mismo, en la tarea 22 el estudiante realizó las razones de cambio promedio de todos los intervalos que se plantearon (Figura 36), lo que evidencia comprensión sobre los cálculos que conllevan las diferencias de las cantidades vendidas y de los ingresos totales. Además de relacionar el ingreso promedio por unidad con el cociente de dichas diferencias. Sin embargo, para tener certeza del comportamiento de la variación se sugirió en el capítulo 6, un espacio para que los estudiantes describan que la razón de cambio promedio disminuye (Columna D).

*Tarea 38: Obtenga la gráfica de la función utilidad total teniendo en cuenta la función costo total e ingreso total de la tarea 33.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 37.***Respuesta E6 de la tarea 38*

*Tarea 39: ¿Cómo es el comportamiento de la utilidad según la cantidad de kg que se adquieren y venden?*

**Figura 38.***Respuesta E6 de la tarea 39***Respuesta**

La utilidad aumenta al inicio cuando Manfred vende más kg de maní, pero después de cierto punto empieza a disminuir, mostrando que hay un límite donde ya no conviene producir más.

Por otro lado, en la tarea 39 se evidencia la práctica de seriación, debido a que el estudiante describe el comportamiento de la función en todo el intervalo destacando que la función utilidad total es creciente en un intervalo y posteriormente en un determinado punto la función comienza a decrecer, por lo que concluye que hay un momento en donde no conviene adquirir y vender más kg de maní, permitiendo tener un acercamiento de lo que se podría obtener al analizar las razones de cambio de la utilidad del emprendimiento e inclusive encontrar la ganancia máxima con la razón de cambio.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**7.3.Predicción**

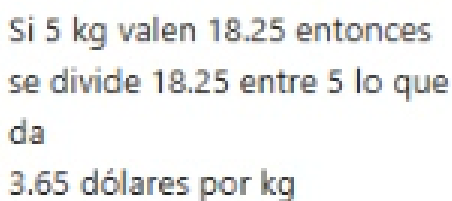
La práctica de predicción se evidencia en las tres etapas de la situación de aprendizaje orientada en la anticipación de un valor en específico a partir de una configuración aritmética o por el análisis del comportamiento de las funciones costo, ingreso y utilidad total.

En el transcurso de la etapa factual se planteó una tarea para incentivar la práctica de predicción, allí se solicitaba anticipar un valor específico con el uso de una configuración aritmética como se evidencia en la siguiente tarea, ver figura 39.

*Tarea 9: Según lo anterior ¿Cuánto sería el precio por cada kg?*

**Figura 39.**

*Respuesta E7*



Si 5 kg valen 18.25 entonces  
se divide 18.25 entre 5 lo que  
da  
3.65 dólares por kg

En ese caso, el estudiante encontró el costo de 1 kg de maní a partir del costo de 5 kg de maní, al realizar la división entre 5.

Adicionalmente, en las etapas procedimental y simbólica se plantearon tareas que buscaban la predicción desde el análisis en tareas variacionales de análisis gráfico con la variación como punto de referencia, como se evidencia en la respuesta del estudiante (Figura 40).

*Tarea 40: ¿Qué sucede si Manfred adquiere y vende 40 kg de maní? ¿Por qué sucede eso?*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 40.***Respuesta E8***Respuesta**

Si Manfred adquiere y vende 40 kg, la utilidad disminuye o incluso puede volverse negativa, porque los costos superan el ingreso. Esto ocurre por el exceso de producción o de gasto.

Como se puede observar en la figura 40, el estudiante después de representar gráficamente la función utilidad total en la tarea 38 y al reconocer el comportamiento de la función, anticipa que al adquirir y vender 40 kg de maní el proyecto de Manfred no obtendría ganancias, sino pérdidas.

**7.4. Estimación**

En las etapas factual y procedimental se plantearon tareas orientadas al desarrollo de la práctica de estimación, cuando se incentiva encontrar las razones de cambio usando incrementos infinitamente pequeños para posteriormente estimar la razón de cambio instantánea de una cantidad, teniendo en cuenta las razones de cambio anteriores y así determinar la tendencia del ingreso marginal, favoreciendo la razón de cambio instantánea desde la noción del límite de las razones de cambio promedio a partir de los incrementos infinitesimales, que bajo el contexto de la SA fue la adición de una cantidad muy pequeña de kg de maní, como se muestra en la respuesta de la tarea 26 (Figura 41).

*Tarea 26: Si Manfred vende 10 kg y después le compran 10.15 kg, 10.1 kg, 10.01 kg, 10.001 kg. Calcule el ingreso promedio por unidad que se obtendría en el aumento evidenciado en cada caso. (Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Figura 41.***Respuesta E9*

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x_1$	$x_2$	$l(x_1)$	$l(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta l = l(x_2) - l(x_1)$	$\Delta l / \Delta x$
2	10	10.15	55	55.6728	0.15	0.6728	4.4853
3	10	10.1	55	55.449	0.1	0.449	4.49
4	10	10.01	55	55.045	0.01	0.045	4.5
5	10	10.001	55	55.0045	0.001	0.0045	4.5
6	10	10	55	55	0	0	4.5

Como se puede observar en la figura 41, el estudiante realiza las razones de cambio a partir de pequeños incrementos para posteriormente encontrar la tendencia de la razón de cambio instantánea de 10 kg exactamente. Sin embargo, para tener certeza de que el estudiante encontró la razón de cambio instantánea de 10 kg se sugirió en el capítulo 6, una tarea adicional con el fin de que el estudiante explique el procedimiento para encontrar que dicha razón de cambio instantánea es de 4.5.

Adicionalmente, en la etapa procedimental se plantearon tareas que buscaban la estimación desde el análisis en tareas variacionales de tabulación como variación numérica como se evidencia en la respuesta del estudiante (Figura 42).

*Tarea 25: Si Manfred decide vender más de 40 kg de maní ¿qué pasaría con el ingreso promedio por unidad?*

**Figura 42:***Respuesta E10***Respuesta**

si Manfred sigue vendiendo mas kg de mani, el ingreso promedio por unidad empieza a disminuir, tanto q llega a tomar valores negativos a partir de q se vendan mas de 40 kg de mani, es decir, q se puede tomar como una relacion inversamente proporcional entre kg de mani vendido y el ingreso promedio x unidad

Como se puede observar en la figura 42, el estudiante después de completar la tabla de la tarea 22 y al reconocer que el ingreso promedio por unidad disminuye obteniendo hasta valores

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

negativos, anticipa que al vender más de 40 kg de maní el ingreso promedio por unidad va a seguir siendo negativa, lo que evidencia el análisis de la variación en las razones de cambio, lo que favorece la toma de decisiones para que el emprendimiento sea rentable.

Por otra parte, en la etapa simbólica se planteó una tarea que llevaba al estudiante a estimar el valor máximo de la función o la cantidad de kg que debe adquirir y vender para obtener la mayor ganancia del emprendimiento analizando la variación de la función utilidad encontrada en la tarea 38 de forma visual, como se evidencia en las respuestas de la siguiente tarea.

*Tarea 43: ¿Para qué cantidad de kg se obtiene la mayor ganancia?*

### Figura 43.

*Respuestas E11 y E12*

E11	E12
<p><b>Respuesta</b> Según la gráfica la mayor ganancia es a los 14Kg de maní vendidos siendo de 8\$</p>	<p><b>Respuesta</b> alrededor de 14 kg</p>

En la figura 43, se evidencia que los estudiantes E11 y E12 a partir de la gráfica representada en la tarea 38, estiman de forma visual la cantidad de kg en las que se obtiene la mayor ganancia del emprendimiento de Manfred, la cual afirman que al adquirir y vender alrededor de 14 kg se obtiene una mayor ganancia.

### **8. Orientaciones para el docente**

Este apartado contiene algunas orientaciones dirigidas al docente con el propósito de aclarar y guiar las acciones de los estudiantes alrededor de la SA y así, favorecer el aprendizaje de la noción de la derivada como razón de cambio; no obstante, se reconoce la flexibilidad en algunas orientaciones según las características de los estudiantes. Esta guía es resultado de las intervenciones realizadas en el pilotaje y de la necesidad de complementar la óptima implementación de la situación de aprendizaje apoyada con GeoGebra.

Como orientaciones generales, el docente debe estar atento a los avances mostrados en el aula virtual de GeoGebra en todo momento, teniendo en cuenta que el estudiante inicie la actividad y este avanzando en el desarrollo de la situación, además de responder a cualquier falla en el applet o en el aula.

Además, deberá tener claro el vocabulario que se maneja dentro en la situación planteada y el vocabulario del software, puesto que esto evita confusiones sobre la terminología y permite que los estudiantes puedan seguir instrucciones con el manejo de los applets. En caso de presentarse alguna confusión con los términos del vocabulario de la situación de aprendizaje o del software GeoGebra se debe aclarar al estudiante en el momento que se presente la confusión.

En el momento 1, la situación requiere de la definición de tres conceptos básicos para comprender el contexto de la situación. Por lo que se recomienda que, con anterioridad, se definan los conceptos de función costo, ingreso y utilidad total. Asimismo, discutir características y relaciones entre ellas, con ánimos de poder enfrentar las interpretaciones de las preguntas y evitar confusiones. Por ejemplo, en el pilotaje surgió confusión con el precio o costo por unidad y el costo total, entre otras cosas.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Por otra parte, es importante orientar las tareas relacionadas con el análisis regresión de dos variables, en el momento 1 y también en el momento 2, por ejemplo, en la tarea 14 donde se usa para obtener el comportamiento de la función costo total. Por tanto, se sugiere realizar un ejemplo del procedimiento con datos distintos, siguiendo el paso a paso que se encuentran en la descripción de las tareas.

Se recomienda, respecto al uso de GeoGebra que se pause la actividad en el Classroom en el momento en que se realicen intervenciones generales o aclaraciones de procedimientos relacionados a la situación de aprendizaje con el fin de obtener mayor atención y evitar repeticiones o dificultades con el tiempo.

En las preguntas relacionadas con el análisis marginal se sugiere apoyar, aclarar y guiar al estudiante para encontrar las pequeñas diferencias entre los datos pues, esto es fundamental para abordar el concepto de razón de cambio como un límite, teniendo en cuenta las relaciones entre las preguntas de este análisis y las tareas anteriores.

En el momento 2, el docente debe estar atendiendo las confusiones que se lleguen a presentar sobre el lenguaje y redacción de las preguntas; de hecho, la interpretación de algunos símbolos o signos y su representación o significado dentro de la situación. En caso de notar dificultad con la definición de ingreso marginal, se sugiere brindar un ejemplo sobre el cambio en el ingreso que provocaría producir 5, 2 o 1 gramo que se representa como 0.001 kg en las unidades de la situación.

Una de las intervenciones que se hace muy necesaria e importante (una de las preguntas por la que surge la necesidad de las orientaciones docente) es la generalización del concepto de derivada como razón de cambio en la tarea 29 y 30, teniendo en cuenta que el estudiante deberá

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

reconocer que al tratarse de un número cada vez más pequeño se debe llevar a la noción del límite cuando estas diferencias se hacen cada vez más pequeñas. El docente debe mostrar que esa diferencia tiende a cero en la abscisa, por lo que se requiere relacionar esa tendencia al concepto de límite cuando esa diferencia tiende a cero, esto haciendo uso de las tablas del análisis marginal y de los procedimientos generalizados en las tareas anteriores para cuantificar el cambio.

En el momento 3, es importante orientar sobre cómo graficar la función utilidad y la función de utilidad marginal. Esto aclarando que en el applet inicial se encuentran las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones de costo e ingreso total y recordando el concepto de utilidad. Además, el docente deberá intervenir en el análisis de la utilidad marginal mostrando según la teoría qué significa la parte positiva, negativa y neutra de la función y, las decisiones que implica cada parte respecto a la producción, por ejemplo, una vez se pause la actividad mostrar y comentar de manera verbal que, si la utilidad es positiva, entonces se recomienda aumentar la producción, si es negativa entonces se debe reducir la producción y si es neutra se debe mantener la producción igual puesto que, estos puntos de optimización (cuando la utilidad marginal sea cero) son los puntos máximos de utilidad, es decir, donde se genera mayor ganancia.

Estas orientaciones deben tenerse en cuenta según el contexto donde se aplique la situación, por lo que se recomienda que el docente planee sus intervenciones de manera detallada, además de explorar y conocer el applet junto al objetivo de cada pregunta respecto al aprendizaje que se busca generar en el estudiante.

El desarrollo de las prácticas variacionales mostró coherencia al abordar el concepto de derivada como razón de cambio, puesto que la estructura de las prácticas permite comprender un

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

paso a paso de la construcción del concepto de razón de cambio partiendo de la búsqueda de las diferencias con la comparación y la seriación en las variables ordenadas y abscisas y realizando el debido cociente entre dichas diferencias, repitiendo dicho procedimiento donde la diferencia entre las abscisas se hace cada vez más pequeña para así, dar pasar de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea a partir de la predicción y la estimación.

Por su parte, las etapas de la SA permiten establecer un orden de acceso al conocimiento a causa de la exploración, generalización y profundización del conocimiento usando las tareas de esta como conductos de acceso y estructuración de procedimientos. Esto debido a que los estudiantes avanzan por etapas explorando el concepto y sus características, pasando a la generalización de procedimientos a través de las semejanzas en las tareas de las etapas para luego, llegar al concepto y usarlo para la toma de decisiones que implican las propiedades del concepto.

### 9. Conclusiones

Teniendo en cuenta el objetivo y la pregunta de investigación que se planteó, se concluye que la SA favorece un acercamiento a la noción de la derivada como razón de cambio, a través del desarrollo de las prácticas variacionales; esto a razón de la articulación de las PV con los diferentes tipos de tareas en las etapas de la SA. Así, incentivar el abordaje de la derivada a partir de la razón de cambio promedio y posteriormente, a la razón de cambio instantánea lo que responde a la conjetura del experimento de enseñanza.

Se destaca el abordaje de la SA a partir del contexto económico en particular, sobre el análisis marginal, pues se distingue el concepto de derivada inmerso en una situación cercana al estudiante y que permita sincronizar conceptos económicos y financieros (costo, ingreso, utilidad) con conceptos del cálculo diferencial (función, razón de cambio promedio e instantánea). Así mismo el contexto favoreció la coherencia de las magnitudes involucradas para el desarrollo del concepto de derivada, puesto que los kg son una unidad cuya continuidad tiene sentido, esto gracias a las conversiones de unidades tomando el aumento de 0.1 kg o 0.001 kg siendo esta última un aumento en gramos. Esto al hablar de costo, ingreso y utilidad en un aumento tan pequeño sigue teniendo sentido y con ello, la articulación de las definiciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal a partir del concepto de razón de cambio instantánea al usar incrementos infinitamente pequeños.

Además, emplear la situación con el contexto de análisis marginal favoreció la toma de decisiones gracias a la interpretación teórica del contexto con relación a las aplicaciones de la razón de cambio como los puntos de optimización y su significado.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

El uso del software GeoGebra facilitó el desarrollo y abordaje de la SA, especialmente el diseño de applets que incentivan la interacción con el concepto y abordaje de las tareas variacionales planteadas para cada una de las etapas de la SA, de manera dinámica. Además, con el software se plantearon tareas que permiten abordar el concepto de derivada a partir de diversas representaciones (Tabular, gráfica, pictórica) incentivando a su vez, las prácticas variacionales y la construcción de conjeturas sobre la situación. Cabe mencionar que el aula virtual de GeoGebra favoreció el seguimiento al progreso y desarrollo constante de las tareas, para posteriormente realizar el análisis sobre los posibles ajustes del diseño.

Respecto a la validación del diseño a través del pilotaje, se logró evidenciar que los estudiantes cumplen los objetivos de la mayoría de las tareas que se plantearon, pues la mayoría de los ajustes estuvieron relacionados con la reducción de datos en las tablas, redacción y orientación de las preguntas más no por el no desarrollo de la PV. Por otro lado, se evidencia que las tareas que buscaban incentivar las prácticas variacionales cumplen el objetivo de desarrollar el concepto de derivada como razón de cambio en cada una de las etapas de la SA gracias al desarrollo de las prácticas, sin embargo, en el caso del objeto matemático, no se habla directamente de una definición formal de derivada, pues su uso es implícito, esto gracias a las preguntas que van relacionadas con el costo, ingreso y utilidad marginal. Aquí, se busca que el estudiante signifique la razón de cambio o derivada a partir del incremento de una variable cuando la otra se incrementa en un valor infinitamente pequeño.

Por último, esta investigación se considera un punto de partida para futuros trabajos de investigación relacionados al pensamiento variacional y al contexto económico y financiero de la derivada como razón de cambio. Además, la situación de aprendizaje constituye un buen recurso para implementar en el aula de clase teniendo en cuenta las orientaciones docentes.



**Referencias Bibliográficas**

- Arciniegas, H. (2022). *Aula inclusiva de matemáticas: Un estudio de situaciones de variación y cambio* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. <https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/12622>
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en la Educación Matemática* (pp.97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Arya, J. C., Lardner, R. W. y Ibarra, V. H. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5.ª ed.)*. México: Pearson Educación.
- Arzarello, F., Bartolini, M., Leung, A., Mariotti, M. & Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 97–143). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_5)
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). *Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. En Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 274–281). Cinvestav-IPN. <https://www.researchgate.net/publication/331563013>.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flórez, R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1197-1205.
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. [Tesis de

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN]. Archivo digital. <https://www.researchgate.net/publication/331563013>.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Editorial Universidad de Antioquia.
- Cardona, R. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.
- Contreras, C. (2023). *Diseño de una propuesta didáctica para promover el concepto de la derivada en la educación virtual y a distancia* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD]. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
- Cortés, J. (2017). Explorando el concepto de derivada y el diseño de actividades para su aprendizaje. En C. Martínez Hernández y J. Cuevas Romo (Coords.), *La enseñanza del cálculo en ambientes tecnológicos* (pp. 41–66). CENEJUS-UASLP.
- Córdoba, A. (2018). *Desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso del programa matemático GeoGebra en estudiantes de grado noveno* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.
- Correa, M. (2019). *Construcción del significado de las expresiones algebraicas a partir del diseño de un experimento de enseñanza centrado en el álgebra como actividad*. Comunicación presentada en el XV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIAEM-IACME), Medellín, Colombia.
- Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. Díaz de Santos.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- Engler, A. y Camacho, A. (2012). Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Premisa*, 14 (54), 18-36.
- Espinosa, C. y Jiménez, A. (2014). Construcción del concepto de razón y razón constante desde la óptica socioepistemológica. *Praxis & Saber*, 5, 53-80.
- Farfán, R. M. y Romero, F. W. (2016). El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente. *Perfiles Educativos*, 38(número especial), 116–139.
- Feo, R. (2018). Diseño de situaciones de aprendizaje centradas en el aprendizaje estratégico. *Tendencias pedagógicas*, (31), 187-206.  
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6383455>
- Fiallo Leal, J. E. y Rodríguez Santamaría, G. (2019). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la derivada como razón de cambio mediante el uso de software de geometría dinámica. *Revista Educación Matemática*, 32(2), 141–149.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.
- Forero, C. y López, D. (2012). *Una aproximación al concepto de razón de cambio con estudiantes de grado sexto a partir de la mediación con geometría dinámica* [Trabajo de especialización]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- García, D., Martínez, M. y Flores, J. (2018). Génesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. *Revista Educación Matemática*, 31(2), 1876–1880.  
<https://www.researchgate.net/publication/326250601>

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

García, M. y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 49–70.

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Revista Científica, (Edición especial)*, 115–118.

Gonzales, V., Gonzales, R. y López, A. (2011). Diseño de Situaciones de Aprendizaje que Potencien Competencias Profesionales en la Enseñanza Universitaria. *Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa*, 24(1), 121 – 134.

Jara, O. (2018). *La enseñanza de la derivada en educación media: Una experiencia para pensar en el aula* (Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional). Universidad Pedagógica Nacional; Ministerio de Hacienda de la República del Paraguay.

Leandro Valdivia, A. (2013). *Un análisis gráfico de la razón de cambio* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

Londoño, N., Ávila, A. y Kakes, A. (2017). La razón de cambio a través de una interacción electrónica. *Revista Electrónica AMIUTEM*, 5(1), 1–10. <https://revista.amiutem.edu.mx>

Luna, J., Ruiz, O., Loera, E., Barrón, J. y Salazar, M. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Ciencia Universitaria en Línea, Ciencia y Tecnología (CULCyT)*, 10(51, especial 1), 4–14.

MEN (1998). *Serie lineamientos curriculares de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

MEN (2022). *Mi plan, vida y futuro. Orientaciones pedagógicas para la educación económica y financiera*. Corpovisionarios. Qualificar.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (M.F. Reyes, Trans.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Orts, A., Boigues, F.J. y Llinares, S. (2018). Génesis Instrumental del Concepto de Recta Tangente. *Acta Scientiae*, 20(2), 72-83.  
<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833>

Pantoja, R. y Leal, O. (2017). Sistema de prácticas de modelación con el tracker y geogebra de cuerpos en movimiento para el aprendizaje del objeto matemático derivada. En C. Martínez y J. Cuevas (Coords.), *La enseñanza del cálculo en ambientes tecnológicos* (pp. 67–96). CENEJUS-UASLP.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].  
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26128.40968>

Sánchez, M., y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: Una aplicación al estudio de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 738–744.

Sari, P., Hadiyan, A., & Antari, D. (2018). Exploring derivatives by means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2(1), 65-78.  
<https://doi.org/10.12928/ijeme.v2i1.8670>

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

- Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.
- Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421.
- Ugarte Susaeta, J. V. (2009). *Matemáticas para economía y empresa: cálculo de una variable* (Ed.). Editorial Desclee de Brouwer. <https://elibro-net.bibliotecavirtual.uis.edu.co/es/ereader/uis/47892?page=282>
- Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(3), 1–20.
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *En Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. (pp. 134-148). Universidad Pedagógica Nacional.
- Vidal, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL
- Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449–468. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22>

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Vrancken, S., Engler, A., y Müller, D. (2018). *La modelación del movimiento y la razón de cambio.*

*Una situación de aprendizaje usando GeoGebra.* Universidad Nacional del Litoral.

Williner, B. (2018). Situación de aprendizaje sobre conceptos involucrados en el estudio de funciones. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (99), 7–26. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

**Apéndice****Apéndice A. Situación de aprendizaje**

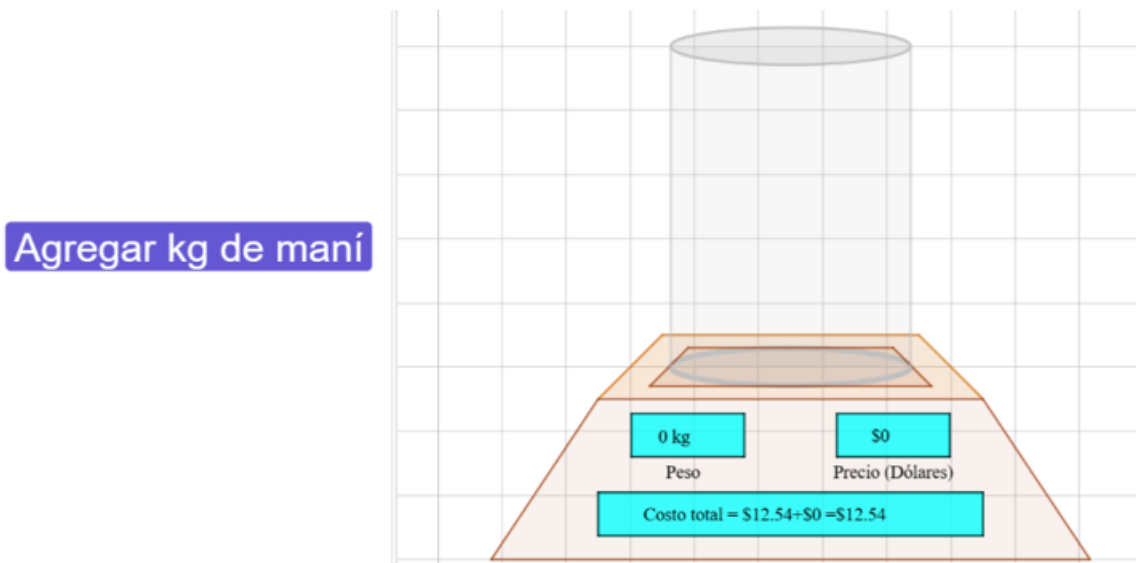
Link de la situación de aprendizaje: <https://www.geogebra.org/m/hnrhu9wc>

**Momento 1 (Función costo total)**

*Manfred tenía una capital disponible para invertir en un emprendimiento basado en la venta de maní, con el propósito de obtener ganancias y poder ayudarse con los estudios universitarios. Manfred necesita ayuda para evaluar si su proyecto es viable o no.*

*El primer paso del proyecto es evaluar los costos de producción para así determinar el precio de venta. En el siguiente applet se muestra una balanza electrónica que relaciona el costo por unidad de kg de maní y el costo fijo. Observa con detalle.*

*Tarea 1. Explore el applet.*



*Tarea 2: ¿Qué magnitudes intervienen en la situación?*

*Tarea 3: ¿Cuáles magnitudes no cambian? ¿Cuáles sí? (Justifique su respuesta).*

*Tarea 4: ¿Qué sucede con el costo si Manfred decide adquirir más maní?*

*Tarea 5: ¿Cuánto sería el costo total de 1.25 kg de maní?*

*Tarea 6: ¿Cuánto sería el costo total de 3.75 kg de maní?*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Tarea 7: Manfred planea comprar 1.25 kg, luego cambia de opinión y decide comprar 3.75 kg  
¿Cuánto incrementaría el costo total de 1.25 kg a 3.75 kg?

Tarea 8: Si Manfred decide adquirir 5 kg de maní ¿Cuánto sería el costo de la cantidad de kg?

Tarea 9: Según lo anterior ¿Cuánto sería el precio por cada kg?

Tarea 10: Teniendo en cuenta la balanza electrónica y los resultados encontrados ¿Cuánto es el costo total de adquirir 25 kg de maní?

Tarea 11: Complete la siguiente tabla para luego evaluar el comportamiento de la variación del costo total.

	A	B	C	D
1	kg	Costo fijo	Costo variable	Costo total
2	0.25			
3	2.5			
4	4.8			
5	8.3			
6	12.5			
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				

Tarea 12: ¿Cuánto es el costo total de comprar 10 kg de maní? ¿Cuánto es el costo total de comprar 3 kg más?

Tarea 13 Según la tarea 12 ¿Cuánto es el costo total de cada kg adicional de los 3 kg que se compró de más?

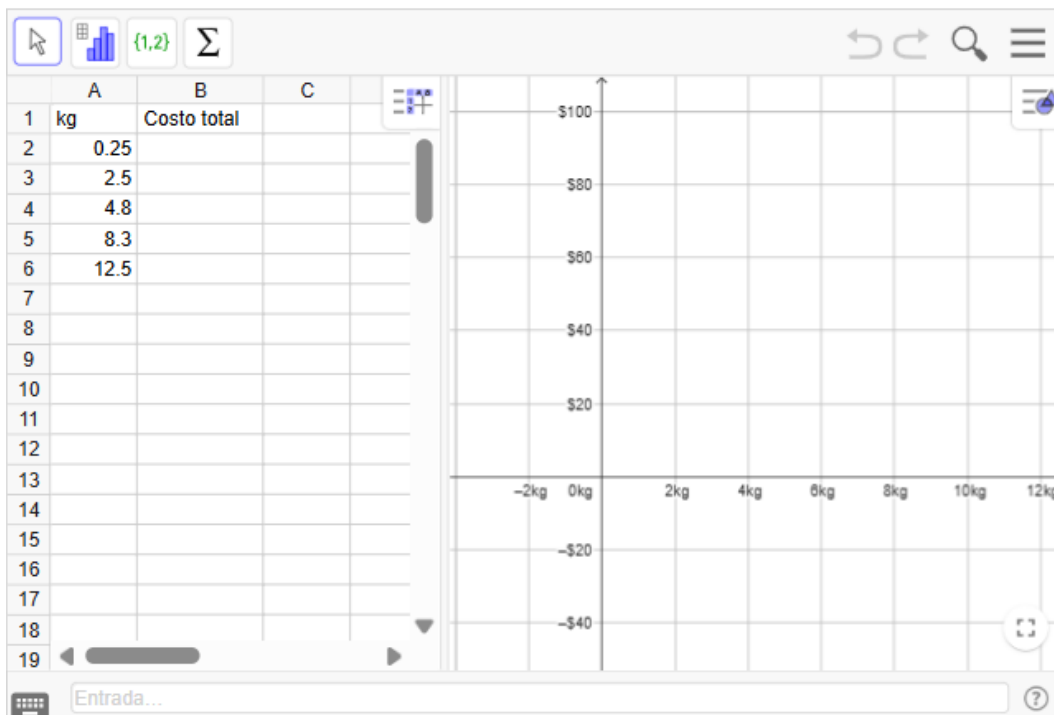
El **costo promedio por unidad** o el costo por kg adicional se puede calcular a partir del cociente de la diferencia de los costos totales, respecto a la diferencia de las cantidades adquiridas.

$$\text{Costo promedio por unidad} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Con  $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$  y  $\Delta x = x_2 - x_1$ , para  $[x_1, x_2]$

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

*Tarea 14: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, Manfred quiere saber el comportamiento del costo total ( $C(x)$ ). Para esto Manfred propone una serie de pasos que se encuentran en la parte inferior del applet.*



*Pasos:*

- 1. Llenar la tabla teniendo en cuenta los resultados anteriores.*
- 2. Seleccionar los datos de la columna “kg” y “costo total”, y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.*
- 3. Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.*
- 4. Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.*
- 5. Dar clic en los tres puntos de la ventana emergente del análisis de regresión de dos variables, ubicados en la parte superior derecha y luego seleccionar la opción cerrar.*

*Tarea 15: Si Manfred tiene 2 kg y después desea incrementar a 2.1 kg, 2.01 kg, 2.001 kg. Calcule el costo por kg adicional para cada incremento. (Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento).*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$x_1$	$x_2$	$C(x_1)$	$C(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$	$\Delta C / \Delta x$		
2	2	2.1							
3	2	2.01							
4	2	2.001							
5	2	2							
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									

*El costo marginal es el costo promedio por artículo extra (En este caso los kg extras) cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad que se adiciona. En otras palabras, es el comportamiento de la variación del costo total cuando se incrementa una pequeña cantidad.*

*Tarea 16: Teniendo en cuenta la definición del costo marginal y el incremento encontrado en las preguntas anteriores, ¿Cuál sería el costo marginal en este caso?*

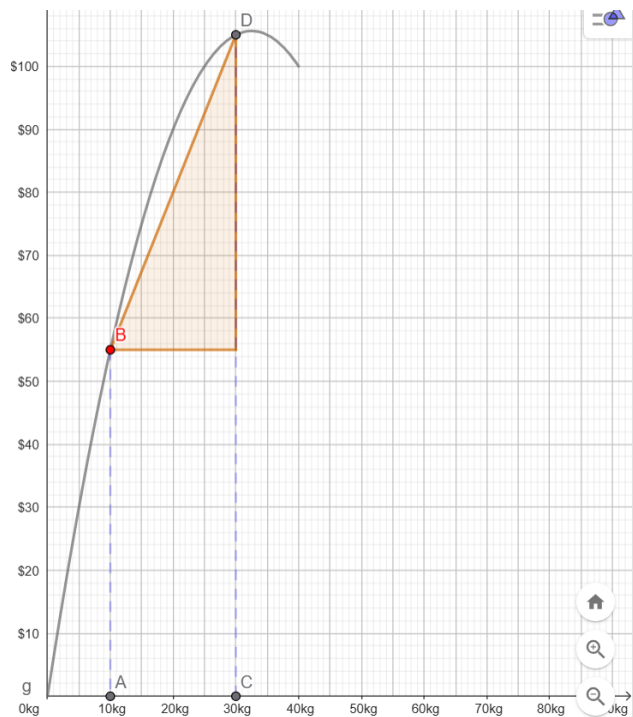
*Tarea 17: ¿Qué relación tiene el costo marginal encontrado y los resultados de las tareas 9 y 14?*

## Momento 2 (Función ingreso total)

*Manfred, propone vender 40 kg de maní en el día. Para esto realizó en el computador una simulación de la posible venta de kg de maní.*

*Tarea 18: Mueva los puntos A y C para explorar la simulación que realizó Manfred.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO



## Incrementos pequeños

Nota: Presione el botón si se necesita realizar incrementos pequeños en la abscisa del punto C

$$\text{Ingreso total} = I(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6.5x$$

$$B = (10, 55)$$

$$D = (30, 105)$$

*Tarea 19: ¿Qué representa la ordenada y abscisa de los puntos B y D en la simulación de Manfred?*

*Tarea 20: Mueva el punto A ¿Qué representa todos los puntos por donde pasa el punto B?*

*Tarea 21: Teniendo en cuenta el applet ¿Cuánto incrementa el ingreso al pasar de vender 10 kg a 20 kg?*

*Tarea 22: Use el punto A y el punto C en la simulación para establecer los intervalos y completar la tabla*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

	A	B	C	D
1	Intervalos (Kg)	$\Delta x$	$\Delta I$	Ingreso promedio por unidad
2	[0, 8]			
3	[8, 16]			
4	[16, 25]			
5	[25, 33]			
6	[33, 39]			
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

*Nota 1: para  $[x_1, x_2]$  se tiene que  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta I = I(x_2) - I(x_1)$*

*Nota 2: Para ubicar los puntos, seleccione el punto que va a desplazar y con la ayuda de las flechas del teclado desplácelo.*

*El **ingreso promedio por unidad** se puede calcular por el cociente de la diferencia de los ingresos totales, respecto a la diferencia de las cantidades vendidas.*

$$\text{Ingreso promedio por unidad} = \frac{\Delta I}{\Delta x}$$

*Tarea 23: Teniendo en cuenta los resultados de la columna D de la tarea 22 ¿Cómo se comporta el ingreso promedio por unidad?*

*Tarea 24: Si Manfred decide vender 40 kg de maní y después vende 1 kg más ¿Qué sucede con el ingreso promedio por unidad?*

*Tarea 25: Si Manfred decide vender más de 40 kg de maní ¿Qué pasaría con el ingreso promedio por unidad?*

*Tarea 26: Si Manfred vende 10 kg y después le compran 10.15 kg, 10.1 kg, 10.01 kg, 10.001 kg. Calcule el ingreso promedio por unidad que se obtendría en el aumento evidenciado en cada caso.*

*Nota: Utilizar los datos de la tabla para encontrar el incremento.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x_1$	$x_2$	$I(x_1)$	$I(x_2)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta I = I(x_2) - I(x_1)$	$\Delta I / \Delta x$
2	10	10.15					
3	10	10.1					
4	10	10.01					
5	10	10.001					
6	10	10					
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Tarea 27: Teniendo en cuenta los resultados encontrados en la tarea 26 ¿Cuánto es el ingreso promedio por unidad si Manfred decide vender 10 kg exactamente? (Explique su respuesta).

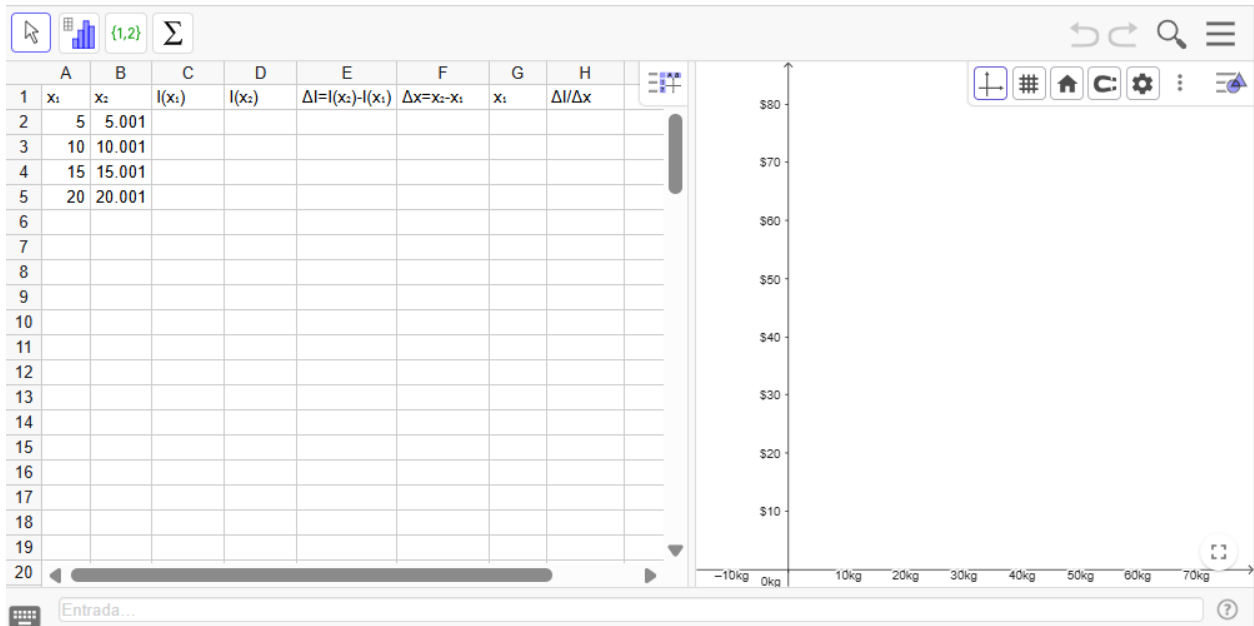
Tarea 28: ¿Qué representa  $\Delta x$  y  $\Delta I$ ?

Tarea 29: ¿Qué representa los datos de la columna G?

El **ingreso marginal** son las entradas adicionales que tendrá Manfred por kg adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de kg vendidos.

Tarea 30: Encuentre la función del ingreso marginal.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO



- Llenar la tabla con la ayuda del simulador y utilice los puntos A y C (con el mouse o con las flechas del teclado) y el botón de incrementos pequeños para ubicar mejor los datos.
- Seleccionar los datos de la columna " $x_1$ " y " $\Delta l / \Delta x$ ", y dar clic en la herramienta de análisis de regresión de dos variables que se encuentra en la barra de herramientas.
- Explorar la ventana emergente y seleccionar el modelo de regresión que mejor se adapte a los datos obtenidos.
- Escribir en la entrada el modelo de regresión encontrado.
- Dar clic en los tres puntos de la ventana emergente del análisis de regresión de dos variables, ubicados en la parte superior derecha y luego seleccionar la opción cerrar.

Tarea 31: Teniendo en cuenta la definición y las respuestas anteriores, cuál es la función ingreso marginal del emprendimiento de Manfred.

Tarea 32: Compare los resultados de la tarea 22 con las tareas 28, 29 y 30 ¿Qué relación se distingue? ¿Cómo se podría describir esa relación según el contexto?

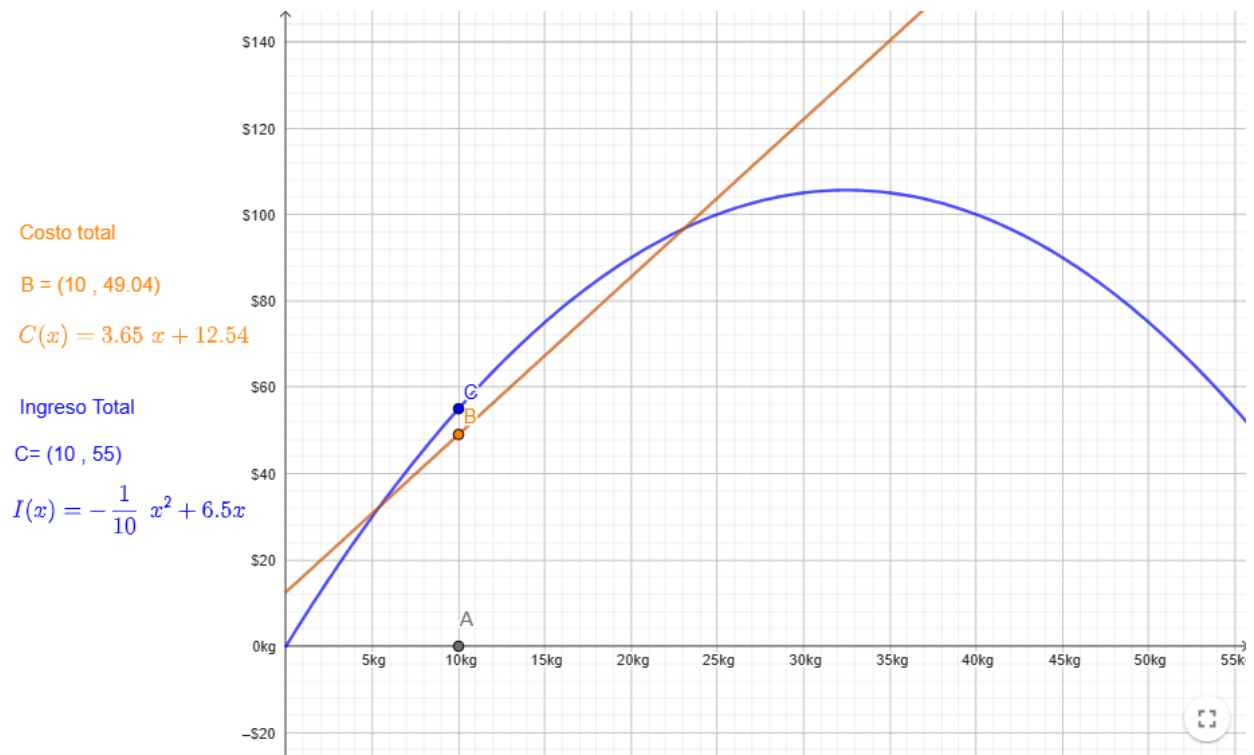
### Momento 3 (Utilidad total)

Como último paso, Manfred desea estudiar que tan rentable resultaría el emprendimiento, teniendo en cuenta el costo y el ingreso. Para esto debes ayudarlo buscando la utilidad del negocio para analizar las cantidades que le generan más ganancias.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Tener en cuenta, que la **utilidad** es el resultado de la diferencia entre el ingreso total y el costo total, si el ingreso total es mayor al costo total la diferencia será positiva, es decir, el emprendimiento dejará ganancias, en caso contrario la diferencia será negativa y daría pérdidas.

Tarea 33: Mueva el punto A para ver lo que sucede con el punto B y C.



Tarea 34: ¿Qué representa los puntos B y C?

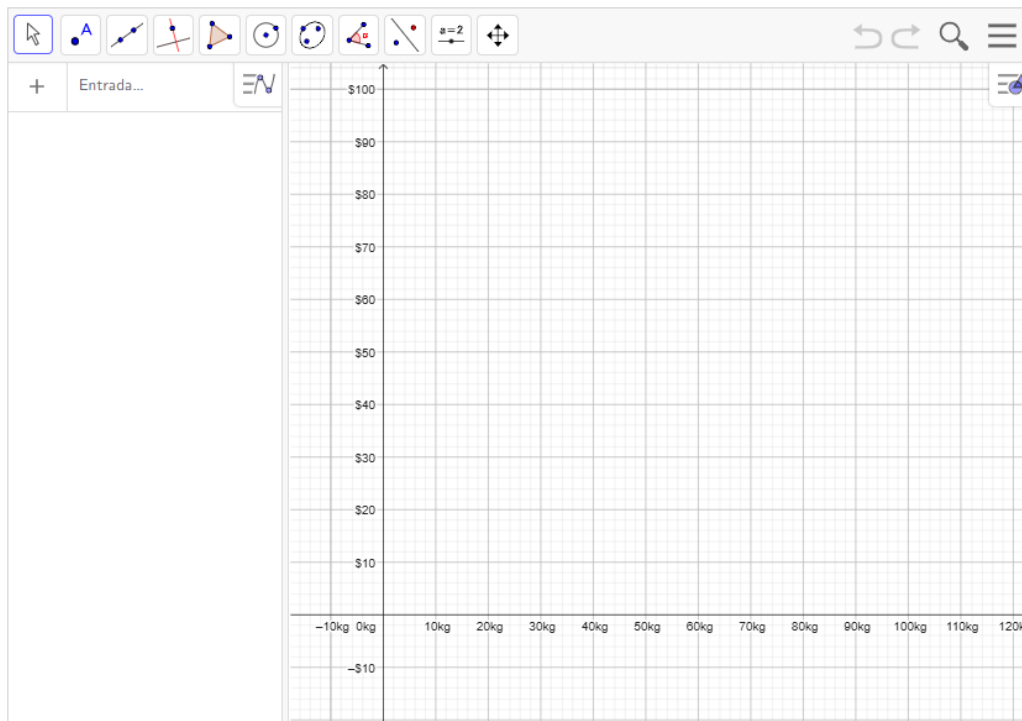
Tarea 35: ¿Es conveniente recomendar a Manfred adquirir y vender más de 40 kg de Maní? (Justifique su respuesta).

Tarea 36: Si Manfred vende 20 kg de maní ¿De cuánto sería la ganancia? ¿Y si vende 14 kg?

Tarea 37: ¿En cuál de los dos casos se genera más ganancia?

Tarea 38: Obtenga la gráfica de la función utilidad total teniendo en cuenta las funciones costo total e ingreso total de la tarea 33.

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO



*Nota: Marque un punto sobre la gráfica y desplácelo para encontrar las intersecciones de la gráfica con el eje x.*

*Tarea 39: ¿Cómo es el comportamiento de la utilidad según la cantidad de kg que se adquieren y venden?*

*Tarea 40: ¿Qué sucede si Manfred adquiere y vende 40 kg de maní? ¿Por qué sucede eso?*

*Tarea 41: ¿Para qué cantidades de maní, resulta el emprendimiento una pérdida para Manfred?*

*Tarea 42: ¿Qué posibles cantidades de maní debe adquirir y vender Manfred para generar ganancias?*

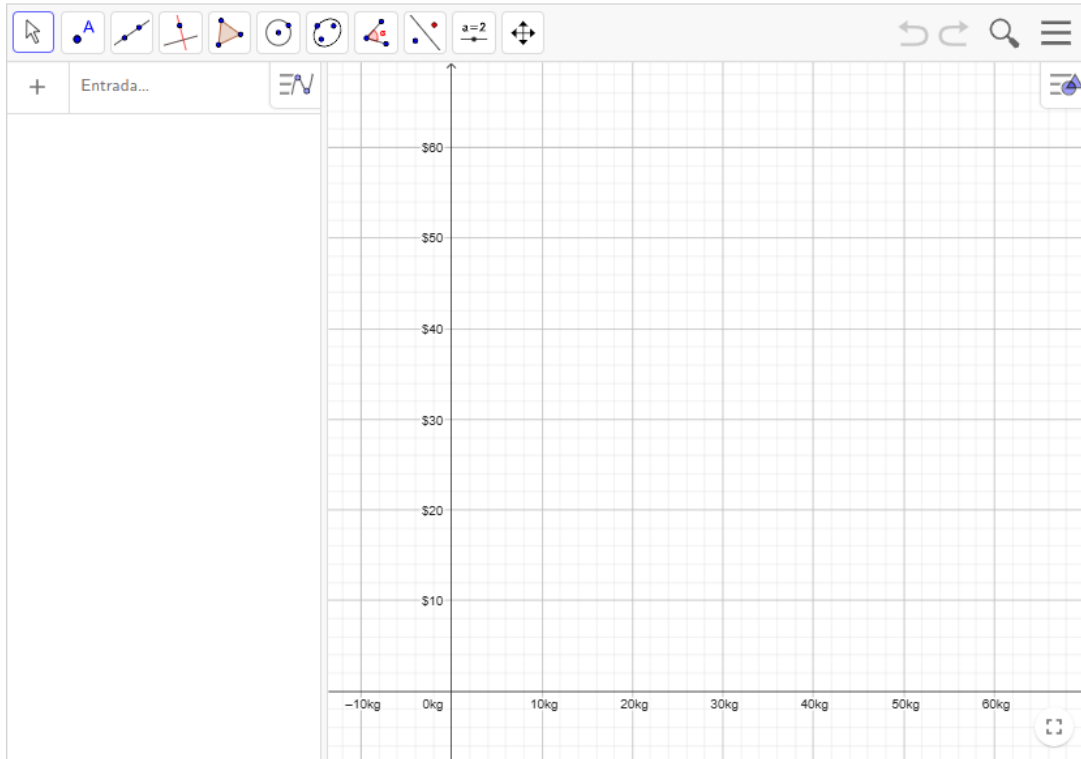
*Tarea 43: ¿Para qué cantidad de kg se obtiene la mayor ganancia?*

*Tarea 44: Teniendo en cuenta el ingreso marginal y el costo marginal ¿Cómo encontraría la utilidad marginal?*

*La **utilidad marginal** es la utilidad promedio por artículo al sufrir un pequeño incremento en la producción.*

*Tarea 45: Obtenga la gráfica de la utilidad marginal.*

## PV EN EL ESTUDIO DE LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO



*Nota: La función ingreso marginal es  $IMg(x) = -\frac{1}{5}x + 6.5$  y la función costo marginal es  $CMg(x) = 3.65$*

*Tarea 46: ¿En algún valor la utilidad marginal es igual a cero?, ¿Qué significa que sea cero en ese valor?*