PROBLEMAS DE DIVISIÓN: ESTRATEGIA Y RAZONAMIENTO DE LOS NIÑOS DE TERCERO PRIMARIA

EDITH JOHANNA MENDOZA HIGUERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

PROBLEMAS DE DIVISIÓN:
ESTRATEGIA Y RAZONAMIENTO DE LOS NIÑOS
DE TERCERO PRIMARIA

Edith Johanna Mendoza Higuera
Licenciada en Matemáticas

Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

Directora
Diana Jaramillo Quiceno
Ph. D. en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios,
con todo mi corazón.
A Evelio, mi querido esposo,
con todo mi amor.

Agradecimientos

A Rubiela, Laura, Marcela y Tatiana por ayudarme a hacer realidad este proyecto con su entusiasmo y colaboración.

A Diana Jaramillo por animarme a alcanzar esta meta.

A Jorge Fiallo, porque a pesar de su distancia, no he dejado de sentir su apoyo incondicional.

Al grupo de Educación Matemática, por ayudarme a crecer profesionalmente, y al Semillero Matemático por brindarme la oportunidad de vivir nuevas experiencias.

A Evelio, mi querido esposo, por su amor, apoyo incondicional, por estar ahí siempre que lo necesito y por brindarme las condiciones necesarias para realizar este proyecto.

A mis familiares, por creer en mí y por el apoyo que me brindan.

A Cristian, mi amigo, por cada consejo, por cada palabra de apoyo y por el tiempo dedicado.

A Marcela y Michael, por todo su apoyo, cariño y verdadera amistad: me han ayudado a ser una mejor persona.

A Rubi, Roci, Laura, Johanna y Glorita, compañeras del colegio, por enseñarme con sus experiencias de vida a ser esposa, amiga y docente.

ÍNDICE

RESUMEN

TÍTULO:
PROBLEMAS DE DIVISIÓN: ESTRATEGIA Y RAZONAMIENTO DE LOS NIÑOS DE TERCERO PRIMARIA[1]

AUTOR:
MENDOZA HIGUERA, Edith Johanna[**]

PALABRAS CLAVES:
1. Problemas de división 2. Resolución de problemas 3. Estrategias y razonamientos

Esta investigación tiene como objetivo **identificar y comprender los razonamientos y las estrategias que utilizan las estudiantes de primaria del grado 3° cuando se enfrentan a la búsqueda de la solución de problemas de división.**

La pregunta orientadora de este estudio de casos fue: **¿Cómo son los razonamientos y las estrategias utilizadas por las estudiantes de tercero en la solución de problemas de división?**

Para responder esta pregunta se desarrollaron actividades con estudiantes del grado tercero de Aspaen Gimnasio Cantillana, actividades orientadas a la solución y formulación de problemas de división. Además, fue necesario realizar observaciones directas en el aula de clase y una entrevista a cuatro estudiantes del mismo curso.

Después de hacer una análisis de lo que piensan las estudiantes de los problemas de matemáticas y de mostrar las diferentes estructuras de cantidades que existen alrededor de los problemas de división, relato las diferentes estrategias que utilizaron las estudiantes para abordar problemas.

Este estudio muestra, entre otros resultados, que los estudiantes pueden enfrentarse a situaciones de división, sin tener un conocimiento previo del algoritmo; que para resolver un problema, una de las estrategias que utilizaron es la búsqueda de la operación teniendo en cuenta el tamaño de la respuesta con respecto a los datos, las palabras claves que se encuentran en el texto del problema y simplemente, realizar operaciones hasta encontrar una respuesta más o menos razonable.

[1] Trabajo de Grado

[**]Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática. Directora: Diana Jaramillo Quiceno, Ph. D. en Educación.

SUMMARY

TITLE:
DIVISION PROBLEMAS: STRATEGY AND REASONING PROCESSES OF THIRD GRADERS[2]

AUTHOR
MENDOZA HIGUERA, Edith Johanna[**]

KEY WORDS
1. Division problems 2.Problem solutions 3.Strategies and reasoning processes

The objective of this research is to identify and comprehend the reasoning processes and the strategies third graders use when facing the division problems.

The leading question of this investigation was: How are the reasoning processes and strategies used by third graders when solving division problems?

To answer this question some solution and formulation division problem activities were done with third graders studying at Aspaen Gimnasio Cantillana. Furthermore, some observations of classes were needed as four interviews with students.

After having performed an análisis of what students think about mathematics problems and show different quantitiy structures around division problems, different strategies that students used to solve these problems are mentioned.

This research shows, among other results, students may face division situations without previously having internalized the algorithm. Besides, they used the operation search taking into account the answer size compared with the data, key words found in the problem text so they perform operations to find a reasonable answer

[2] Work of Degree

[**]Science Faculty. Mathematics School. Specialization Mathematics Education. Director: Diana Jaramillo Quiceno, Ph. D. in Education

Descubriendo la ruta

Mi trabajo con estudiantes de cursos de la educación básica primaria (primero a tercero) ha estado lleno de múltiples experiencias que me han generado la necesidad de evaluar día a día mi práctica pedagógica en búsqueda de nuevas estrategias orientadas a fortalecer los procesos en los que los estudiantes necesitan más apoyo para lograr un aprendizaje acorde a lo estipulado en los Estándares y Lineamientos Curriculares, incluso el aprendizaje esperado por padres e instituciones educativas.

En el diario vivir con mis estudiantes en las aulas de clase he podido observar los aciertos y desaciertos de cada uno de ellos en su aprendizaje. La intranquilidad y angustia que algunos niños demuestran en la clase de matemáticas contrasta con la motivación y entrega de otros, actitudes que se ven reflejadas, para estos cursos, cuando el estudiante se enfrenta al aprendizaje de los algoritmos de las operaciones básicas y a la tarea de resolver problemas.

Al ver como algunos de los estudiantes se enfrentan a las actividades planteadas -específicamente a situaciones donde la división se encuentra involucrada-, comprendiendo los datos dados en el problema, interpretando dentro de un contexto los resultados de las operaciones efectuadas, indagando, arriesgándose, creando soluciones, participando en discusiones, contrario a otros estudiantes que solicitan se les muestre los caminos para avanzar, que al parecer no analizan, ni buscan salir de sus dudas; me inquieta y me hace reflexionar queriendo buscar la manera de ayudar a los segundos a fortalecer la compresión de los problemas de división y en general los procesos de resolución de problemas.

Es así como estas inquietudes y las lecturas alrededor de la problemática planteada fueron las que motivaron mi experiencia de aula. Surgiendo de ese contexto la pregunta que orientó mi trabajo de investigación: **¿Cómo son los razonamientos y las estrategias utilizadas por las estudiantes de tercero en la solución de problemas de división?** Pregunta con la cual buscaba entender la forma como las estudiantes abordan los problemas y las situaciones que implican procesos de división.

Para llevar a cabo mi investigación, realicé actividades en las que mis estudiantes debían enfrentarse a la solución de problemas diseñados con el propósito de observar los razonamientos que utilizarían para resolverlos, los significados que le atribuían a los resultados de las operaciones, las estrategias que aplicaban para elaborar un camino de solución, entre otros.

Para tal fin, fue necesario grabar en medio magnetofónico algunos de los diálogos e intervenciones de las estudiantes en las actividades, la observación directa de las mismas y una entrevista individual.

Esta investigación se desarrolló como estudio exploratorio de caso abordado desde una perspectiva cualitativa, ya que esta posibilita la profundización de un tema y a la vez permite al investigador contar las experiencias observadas en el desarrollo de la misma. Además, este abordaje es interesante en la medida que permite que el lector escuche las voces de los investigados.

Este estudio de caso se llevó a cabo en el 2004 en el Colegio Femenino ASPAEN Gimnasio Cantillana del Área Metropolitana de Bucaramanga, ubicado en la vía Floridablanca - Girón, de carácter privado y con jornada única, en un grupo de 18 estudiantes de tercer grado.

Por otro lado, para el análisis que aquí presento utilicé la información tomada a cuatro estudiantes del curso; la selección de las estudiantes la hice teniendo en cuenta el rendimiento académico y las habilidades demostradas por cada una de ellas en las clases y evaluaciones, dos de las estudiantes tenían buen rendimiento académico y las otras dos necesitaban apoyo para alcanzar con éxito las actividades.

Este trabajo lo desarrollo en tres capítulos, así:

En el primer capítulo, *Viviendo la experiencia*, expongo lo que sucedió alrededor de la experiencia de aula, las motivaciones que me llevaron a realizar este trabajo, a plantearme el objetivo; la importancia del trabajo y las actividades que realicé.

En el segundo capítulo, *Problemas: lo que dicen las estudiantes,* presento las interpretaciones dadas por mis estudiantes tanto a los problemas matemáticos como a los problemas de división, al igual que los aportes de algunos autores y las clasificaciones hasta ahora elaboradas de este tipo de problemas.

En el tercer capítulo, *¿Cuáles son las estrategias y los razonamientos que usaron?,* analizo las actividades realizadas. Inicialmente hago una reflexión de las estrategias y razonamientos utilizados por las estudiantes al enfrentarse a un problema de división presentado con anterioridad a la enseñanza del algoritmo, en seguida propongo las tres categorías que emergieron de los datos.

Viviendo la experiencia
Capítulo 1

En los primeros años de escolaridad desarrollar el pensamiento numérico[3] ha sido uno de los objetivos centrales de la enseñanza de la matemática. Es en esos momentos cuando el estudiante tiene sus primeras experiencias escolares con la matemática, además de que formalizará algunos de los conocimientos informales que ha creado en el contexto familiar o en su interacción social.

De igual forma, es ahí cuando el docente busca acercar a los estudiantes a conocimientos que hacen parte de las actividades que diariamente una persona realiza.

La aritmética ha sido desarrollada año tras año en la escuela partiendo de la enseñanza del sistema de numeración, las cuatro operaciones básicas y la solución de problemas aplicando una o más operaciones. Los últimos estudios en la educación matemática, han enriquecido esta enseñanza con nuevas estrategias metodológicas que le dieron un nuevo enfoque, dando a la resolución de problemas una gran importancia, a partir del cual se va llevando al estudiante a alcanzar los estándares propuestos para estos cursos.

Según Maza (1999, p. 26), numerosos artículos y libros empezaron a dedicarse en los años ochenta a descifrar la forma adecuada de aprendizaje, los factores más relevantes que intervenían en el mismo, la enseñanza más

[3] Según Mcintosh (1992), citado en los Lineamientos Curriculares (1998, p. 43), el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad e inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones.

oportuna para favorecerlo. Fruto de todo ello es la conclusión de que la resolución de problemas es cualquier cosa menos un aprendizaje sencillo. Numerosos factores intervienen en el mismo, desde los propios del problema (de origen sintáctico o semántico) hasta los característicos del resolutor (factores afectivos, sexuales, etc).

Concordando con lo anterior, en la implementación de la resolución de problemas como metodología de la enseñanza hay que tener en cuenta que el estudiante se ha enfrentado a situaciones en las que ha tenido aciertos y otras en las cuales los desaciertos han sido constantes. Esto muestra que aún bajo este enfoque aún algunos estudiantes continúan teniendo dificultades para el aprendizaje de la aritmética.

Es ahí en donde nace la idea de orientar mi trabajo de investigación, en primera instancia, hacia la búsqueda de respuestas frente a las dificultades que para algunos estudiantes acarrea la labor de resolver problemas; y, en segunda instancia, hacia la comprensión del comportamiento de los más diestros para esta labor, pues considero que al conocer y entender lo que viven nuestros estudiantes mientras fortalecen sus habilidades, podremos idear soluciones o estrategias que motiven a los estudiantes con dificultades a continuar.

La pregunta, **¿cómo son los razonamientos y las estrategias utilizadas por las estudiantes de tercero en la solución de problemas de división?,** que se intenta resolver en esta investigación surge de observar constantemente en el aula de clase las diferencias a la hora de resolver problemas entre una y otra estudiante, de ver la rapidez y facilidad con la que algunas estudiantes crean conexiones entre las operaciones y entre ellas con los problemas; de ver que son “las mismas de siempre” las que responden y participan frente a las diversas situaciones que se presentan en el aula.

Fue esa verdad diaria la que me llevó a querer saber cómo razonan los estudiantes, cuáles estrategias utilizan para abordar los problemas, en qué piensan cuando buscan un camino de solución, cuáles son sus inquietudes y debilidades.

Al respecto, Puig y Cerdán (1995, p. 20) afirman: "De ahí que si se quiere comprender cómo se produce naturalmente el aprendizaje o cómo se puede facilitar éste en una situación de instrucción, sea preciso analizar con detalle las conductas de los sujetos mientras resuelven problemas".

Para dar inicio a la investigación, analicé el rendimiento académico presentado hasta el momento por las estudiantes del curso de tercero primaria del Colegio y, teniendo en cuenta lo observado durante el año anterior y el que estaba cursando, elegí a cuatro estudiantes, Rubiela, Marcela, Tatiana y Laura[4], que colaboraron con el desarrollo de este trabajo. A continuación realizo una breve presentación.

- **Rubiela.** Tenía 9 años y le gustaba las matemáticas, hacía parte del grupo de Talentos Matemáticos del Colegio y lo representaba en las Olimpiadas Matemáticas organizadas por la Universidad Antonio Nariño. Ella comentaba que en su casa tenía muchos juegos de lógica y rompecabezas que desde pequeña sus padres le compraban y con los que ella se divertía y sentía que aprendía mucho. En las clases constantemente preguntaba hasta quedar convencida de lo que se estaba explicando.

- **Marcela.** Tenía 8 años, se esforzaba por estar entre las mejores niñas del salón, extrovertida, inquieta y un poco insegura, constantemente buscaba llamar la atención con su tono de voz y le gustaba ser escuchada por todas sus compañeras.

[4] Los nombres de los estudiantes utilizados en el presente trabajo son ficticios.

- **Laura.** Tenía 9 años, era una niña bastante colaboradora y amable, mostraba un poco de rechazo frente a las matemáticas pero este mejoró cuando su padre decidió ayudarla con el estudio de esta materia en casa. Era necesario apoyarla constantemente para que avanzara en su trabajo.

- **Tatiana.** Tenía 9 años, era una niña descomplicada, que manifestaba en diversas ocasiones que la multiplicación y la división eran muy difíciles de aprender y que en casa estudiaba mucho, pero que siempre le costaba trabajo.

Por otro lado, para este estudio de caso me apoyé en diversos autores que han venido trabajando alrededor de este tema y que permitieron dar vida a mi investigación.

Entre los autores que tratan la resolución de problemas está Polya con su libro, *¿Cómo resolver problemas?,* pero de él no tomé mayor argumentación teórica pero aún así considero que es una obra de lectura obligatoria para el docente de matemáticas ya que este referente resulta ser de apoyo para otros que más adelante voy a presentar.

Además, en este libro el autor presenta la resolución de problemas en fases que el resolutor debe seguir sin un orden jerárquico, pero que si desea éxito, debe tener en cuenta cada una de las fases que él describe; incluso, da pautas al estudiante para lograr con entusiasmo enfrentarse a la resolución de problemas.

Enfocándome un poco más en la solución de problemas en la aritmética, consulté investigaciones como la de Contance Kamii (1995), la cual apoyándose en los planteamientos de Piaget, analiza el aprendizaje de conocimientos tales como la numeración posicional y los algoritmos de las operaciones básicas. Muestra, también, experimentalmente que estos conocimientos en los que se invierte mucho tiempo en las escuelas no son realmente asimilados por los niños cuando se pretende simplemente trasmitirlos como un conocimiento social, cuando deben ser producto de hipótesis y de construcciones de los mismos estudiantes.

Por último, en cuanto a Kamii, los resultados de sus investigaciones son presentados en *Reinventando la Aritmética II y Reinventando la Aritmética III: Implicaciones de la teoría de Piaget.*

Ahora, Gadino (1996), quien en su obra cita a Vergnaud, muestra los decisivos e importantes pasos que hace este autor hacia la construcción de una teoría unificadora sobre la enseñanza y aprendizaje de los problemas de multiplicación y división, dividiendo estos problemas no por su estructura matemática (de multiplicación y de división), como era tradicional, sino en virtud de que responde a una función lineal o una función bilineal entre distintas espacios de medida.

Luis Puig y Fernando Cerdán (1995), en su libro *Problemas aritméticos escolares*, recogen de varios autores los estudios e investigaciones que se han realizado en los últimos años, muestran un análisis de las estructuras de los problemas aditivos, multiplicativos y de varias operaciones, al igual que dan cuenta de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando resuelven problemas y describen las estrategias que estos utilizan.

Por su parte, Carlos Maza, en sus libros *Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas y Enseñanza de la Multiplicación y la División*, al igual que los autores anteriores, trata de los problemas multiplicativos, estudia qué tipos de problemas se deben trabajar con los alumnos y en qué grado de escolaridad, de las clases de problemas multiplicativos y de las estrategias que inicialmente el estudiante usa para resolverlos, dando cuenta así de los diferentes enfoques de cada una de las operaciones.

También, autores como Celia Rizo Cabrera y Luis Campistrous Pérez publicaron en la revista *Relime* un trabajo de investigación que está en desarrollo y que tiene como objetivo “aislar”, mediante estudio de casos, algunas de las estrategias que utilizan los alumnos en la solución de problemas. Ellos afirman que estas estrategias en muchos casos, se adquieren de forma espontánea al no ser objeto de enseñanza las técnicas de solución de problemas (Rizo & Campistrous, 1999, p. 34).

En este artículo, presentan algunas de las estrategias que hasta ese entonces habían podido identificar: Busca las palabras claves (ellas dicen qué operación utilizar), procedimiento rutinario asociado a un indicador textual, tanteo, operar con los números dados en el texto, usar números cómodos, identificar los significados de las operaciones en el texto.

Finalmente, teniendo en cuenta los anteriores antecedentes al igual que la pregunta y el objetivo trazado, inicié mi trabajo de campo, para ser exacta, la recolección de datos a través de la observación directa de los estudiantes en el aula de clase durante el desarrollo actividades en las cuales se enfrentarían a problemas de división.

A continuación mostraré las actividades planteadas, la metodología de trabajo y algunas observaciones de la misma.

ACTIVIDAD No. 1

En esta primera actividad, realizada el 12 de octubre de 2004, propuse a las estudiantes resolver el siguiente problema:

> Ligia trabaja en una empacadora de chocolates. Si tiene que empacar 120 chocolates en 15 bolsas,
> ¿cuántos debe empacar en cada bolsa?

Les indiqué que tenían 15 minutos para dar alguna solución, después les dije que se reunieran con una de sus compañeras y comentaran lo que hasta el momento cada una hubiera hecho y que entre las dos, posteriormente, concretaran una solución que sería socializada frente al grupo. La metodología fue aceptada por las estudiantes y algunas de ellas lograron verdaderas discusiones por defender los razonamientos utilizados para resolver el problema.

Los objetivos de esta actividad eran el observar el comportamiento de las estudiantes frente a un problema de división antes de recordarles el algoritmo, e identificar las estrategias de razonamiento que utilizarían para su solución, qué procedimientos realizarían, cómo los terminarían, etc.

Inicialmente, las estudiantes no lograban encajar las operaciones trabajadas anteriormente para solucionar este problema y querían iniciar una discusión grupal, en ese momento, fue necesario animarlas a que pensaran solas en la actividad ya que después tendrían tiempo para comentar con las compañeras, y fue allí en donde casi la mitad del grupo empezó a crear diferentes estrategias, a ejecutarlas y probar lo acertado o no de las mismas, hasta lograr encontrar una solución.

Sin embargo, las estudiantes generalmente buscaban mi aprobación para los procedimientos con los cuales intentaban solucionar la pregunta del problema, a lo cual respondía animándolas a revisar sus resultados y analizar su coherencia con la pregunta.

Esta actividad fue bastante enriquecedora tanto para las estudiantes como para mí. Para las estudiantes, puesto que cada grupo presentó diferentes caminos para la solución de la situación, uno de ellos fue la elaboración de un dibujo que representara la situación y a partir de el tomar los datos necesarios y decidir si a través del ensayo con varias multiplicaciones o de sumas encontraban la solución. Además, la metodología seguida en la actividad permitió que todo el curso se enterara de lo que hicieron los demás, generando en algunos casos admiración o sorpresa por algunos de los razonamientos usados, puesto que en las clases anteriores donde resolvíamos problemas, no era necesario ensayar tanto para encontrar la solución pues esta se encontraba tomando los datos y realizando una de las operaciones conocidas e inmediatamente encontraban la solución. Y para mí, fue muy enriquecedora, ya que en el desarrollo de la actividad fue necesario cambiar los esquemas que tradicionalmente venía manejando en clase, puesto que ante la pregunta de una de mis estudiantes, inmediatamente les mostraba o las inducía a seguir el camino que yo tenía trazado. Pero en esta experiencia fue necesario mantenerme al margen, y permitir y animar a las estudiantes a trabajar solas y a crear sus propios razonamientos.

ACTIVIDAD No. 2

En esta actividad, realizada el 19 de octubre, entregué a cada una de las estudiantes el taller que se enmarca bajo el rótulo de la figura 1 que debía ser resuelto inicialmente en forma individual, y después por parejas.

En él planteé tres problemas con el objetivo de observar, primero, si las estudiantes utilizarían en algunos de ellos otros procedimientos diferentes a la ejecución operaciones aritméticas con los datos del problema; segundo, la forma cómo abordarían problemas en los que no toda la información suministrada se debía escoger para resolver el problema.

En el primer problema, se hacían dos preguntas, en una de ellas se pedía indagar por la cantidad de busetas necesarias para transportar una cantidad de niños, teniendo en cuenta que cada buseta tenía un número máximo de pasajeros a transportar, para dar una respuesta acertada, las estudiantes debían contextualizar los datos obtenidos en el algoritmo; la otra pregunta hacia referencia a la posibilidad de que dos estudiantes viajaran en la misma buseta, teniendo en cuenta el lugar que ocupaban en la fila de acceso a cada buseta, la cual, se podía resolver a través de listas sistemáticas, de un conteo, o de la utilización del algoritmo de la división, en la utilización de esta última estrategia, el estudiantes debía tener un buen entendimiento del algoritmo y así poder dar respuesta a la pregunta. Este primer problema generó confusión en algunas de las estudiantes puesto que se hacían dos preguntas y había información que no sabían cómo utilizar para ejecutar algún algoritmo y poder responder.

ASPAEN
Gimnasio Cantillana

Nombre ___________________
Fecha_________________ 3º__

TALLER DE PROBLEMAS

Resuelve los siguientes problemas. Deja escrito todos los procedimientos que realizaste para enfrentar el problema y llegar a su solución.

1. Los estudiantes de un colegio se forman para abordar el medio de trasporte que los llevará de paseo. Cada buseta puede transportar a 9 estudiantes. Margarita ocupa el lugar 26 de la fila y Javier el 35. ¿Se subirán Margarita y Javier a la misma buseta? Si el total de alumnos es 214, ¿cuántas busetas se necesitan para transportar a todos los alumnos?

2. Una barra de chocolate se debe dividir en 6 pedazos iguales. ¿Cuántos cortes se debe hacer a la barra? Si la barra de chocolate pesa 198 miligramos, ¿cuántos miligramos pesa cada pedazo?

3. En la escuela de Andrea quieren sembrar pinos a lo largo de un prado que mide 10 m. Los huecos para cada árbol tienen 5 cm de ancho. Si entre cada árbol se dejan 40 cm de distancia. ¿Cuántos pinos se pueden sembrar a lo largo del prado? ¿Cuánto espacio quedará entre el último árbol y el final del prado?

Figura 1. Taller de la Actividad No. 2

El segundo problema, al igual que el primero, se plantean dos preguntas. La primera pregunta hacía referencia a los cortes necesarios para dividir una barra de chocolate en 6 pedazos iguales, con esta pregunta quería observar si las estudiantes necesitarían algún tipo de dibujo para resolverlo o no, y si las estudiantes que hicieron una representación mental lograron obtener una respuesta acertada.

Con el último problema, pretendía observar en las estudiantes la forma como interpretarían la situación y como organizarían los datos para realizar las operaciones. En la solución de esta situación, algunas estudiantes recurrieron a usar tabletas que cubrían el piso del salón –esta iniciativa se dio porque en una clase de geometría anterior habíamos medido el ancho de las tabletas– para simular la siembra de árboles, esto les permitió orientar sus razonamientos y entender la información del problema.

ACTIVIDAD No. 3

Para esta actividad, realizada el 22 de octubre, entregué a las estudiantes el siguiente taller que está enmarcado bajo el rótulo de figura 2, el cual constaba de cuatro problemas

Con el primer problema pretendía observar la forma como las estudiantes interpretarían el residuo de la división y si este tendría algún sentido para ellas.

El segundo problema podría resolverse por dos caminos, cada uno de ellos surgía de la primera pregunta que cada estudiante se hiciera para resolverlo, si la pregunta era ¿Cuántas cajas de chocolates le corresponde a cada persona?, la solución se orientaba a realizar primero una división y después una multiplicación, para saber el total de chocolates que cada persona recibiría; pero si la pregunta era ¿Cuántos chocolates hay en total? primero se debía realizar una multiplicación y después una división para saber cuántos chocolates, de ese total, le correspondería a cada persona análisis previo para la solución de este problema.

El penúltimo problema estaba planteado para observar el nivel del análisis que las estudiantes hacían sobre el algoritmo de la división y, simultáneamente, los medios a través de los cuales encontrarían el dato que cumpliera las condiciones del problema.

Y con el cuarto y último punto, buscaba observar si las estudiantes estaban utilizando el algoritmo de la división por costumbre o si realmente estaban analizando las situaciones una a una.

ASPAEN
Gimnasio Cantillana

Nombre __________________
Fecha_______________ 3º__

TALLER DE PROBLEMAS

Resuelve los siguientes problemas. Deja todo los procedimientos que realizaste para enfrentar el problema y llegar a su solución.

1. Javier recorrió en su automóvil 3.444 kilómetros; si por cada 25 kilómetros de recorrido hizo una parada, ¿Cuántas paradas hizo Javier durante el viaje?

2. Ramón compra 36 cajas de 24 chocolates cada una. Si debe repartirlas por igual entre 12 personas, ¿Cuántos chocolates entrega a cada persona?

3. José tiene menos de $3.250 y más de $3.200. Si los reparte entre sus tres hijos, se da cuenta que no le sobra nada. Sin embargo, cuando los reparte entre él y sus tres hijos, se da cuenta que le sobra dos pesos. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

4. Carolina le comenta a su mamá que sólo tiene $1.000 para comprar su refrigerio del viernes, y que ese dinero no le alcanza, pues el refrigerio diario cuesta $1.500. Si la mamá de Carolina le da el lunes el dinero para los refrigerios de la semana, ¿Cuánto le dio ese lunes?

Figura 2. Taller de la Actividad No. 3

Durante la actividad de desarrollo del Taller, las estudiantes trabajaron tal cual se había planeado. Se presentó bastante dificultad para resolver el tercer problema, puesto que para algunas estudiantes fue necesario realizar muchos cálculos y otras no pudieron resolverlo. El segundo, generó discusiones ya que al tener dos caminos de solución las estudiantes buscaban ponerse de acuerdo para elegir el mejor, pero, al momento de la socialización, se mostró que ambas formas eran correctas y se hizo énfasis en el por qué se presentó esta situación.

ACTVIDAD No. 4

Esta actividad, realizada el 26 de octubre de 2004, fue particularmente divertida y a la vez extraña para la mayoría de las estudiantes, pues les pedí que elaboraran una carta para una niña que consideraran su mejor amiga, pero debían estructurarla de tal manera que la invitaran a resolver un problema que requiriera la división como herramienta de solución.

Algunas se entusiasmaron demasiado y elaboraron cartas muy bonitas que doblaron cuidadosamente de diferentes formas como aviones, pájaros y barcos.

El propósito inicial de la actividad era observar el modelo de división que estaban creando las estudiantes hasta ese momento para determinar cómo creaban un problema, y saber si tenían en cuenta los parámetros necesarios para su formulación.

Después de elaboradas las cartas, se introdujeron en una caja y una a una las fui sacando y entregando a alguna compañera para que resolviera la situación planteada. En este momento quería establecer si las estudiantes tenían la capacidad de criticar, evaluar y resolver las actividades planteadas por sus compañeras, pues como era de esperarse algunas de ellas no plantearían problemas de división.

ACTIVIDAD No. 5

Para finalizar el ciclo de actividades, del 1 al 3 de diciembre, realicé una entrevista en la cual les planteaba a las estudiantes el problema que presento en la siguiente página.

A través del desarrollo del problema, les pedí que explicaran cada procedimiento y la razón por la cual lo realizaban; de igual forma, indagué por la idea que se habían formado de problemas y de problemas de división.

Camila tiene una empresa que confecciona camisas y por temporada navideña debe entregar el siguiente pedido

Talla	Cantidad
8	348
10	463
12	3.894

Si debe empacar 18 camisas en una caja, ¿cuántas cajas necesita para enviar el pedido?

Finalmente, recolectados los datos entré a la etapa final, analizarlos. Para este análisis realicé una triangulación entre la información recolectada, la teoría consultada y mis apreciaciones y conclusiones como investigadora, para la cual fue necesario revisar uno a uno los datos y buscar en ellos lo más relevante para dar origen a las categorías planteadas.

Problemas: lo que dicen las Estudiantes
Capítulo 2

"[...] es algo que las profesoras nos ponen para aprender"
(Marcela, Entrevista, Dic. 2004).

Desde los inicios de la matemática los problemas han sido la tarea principal que ha permitido su nacimiento y expansión. Esos problemas corresponden a la aritmética elemental como lo describe a continuación Puig y Cerdán (1995. p. 13):

> Aunque se desconozca si la aritmética fue anterior o no a la escritura, lo que sí se sabe es que ya 3.000 años antes de Jesucristo, en Babilonia, los «escolares» aprendían a calcular la distancia que media entre el pie de la escalera y la pared en que ésta se apoyaba; obtener el peso de la piedra que pesaba un kilo más que la mitad de su propio peso; y recibían, también, la instrucción necesaria para saber la parte de herencia que su padre, ya anciano, les había legado tras un peculiar y ecuánime reparto, como atestigua uno de los problemas que se encuentran en las tablillas babilónicas:
>
> *Un anciano dejó al morir 65 monedas de oro, que debían repartirse entre sus 5 hijos de modo que cada uno recibiera 3 monedas menos que el hermano que le antecede.*

Así como la historia nos muestra sobre la relación entre los problemas y la enseñanza de la matemática, hoy día, el Ministerio con su última reforma curricular, propone que la actividad de resolver problemas en la escuela sea un elemento importante para la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, propone que deben ser el eje central del currículo de las matemáticas, y como tal, deben ser un objetivo primario en la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Para llegar a esta reforma, la enseñanza de la matemática debió pasar por varias reformas, entre ellas la de los años 60 y 70, donde las matemáticas modernas propusieron llevar a las aulas la estructura y lenguaje formal de la matemática, y fue así, como al currículo ingresaron contenidos que llevaron al estudiante a aprender conjuntos, lógica formal e incluso los métodos de demostración.

En Colombia, a principios de los 70 se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados, que los problemas e inconvenientes surgidos superaban las supuestas ventajas, tales como: facilitar a los niños el acceso a las matemáticas más avanzadas, pero que, por el contrario, llevaron al detrimento de la geometría elemental y del pensamiento espacial; ausencia de actividades y problemas interesantes (MEN, 1998, p. 15).

Surge, entonces, un nuevo movimiento denominado *Back to Basics*, el cual proponía el regreso de las operaciones y los procedimientos algorítmicos y dejaba atrás el formalismo de las matemáticas modernas. En esta reforma se observó que los estudiantes eran capaces de resolver los algoritmos, pero sin dar alguna explicación al sentido de los mismos. Cuando los estudiantes resolvían problemas, daban respuestas a estos con datos insuficientes o sin sentido, mostrando así, que el regreso a lo básico no era suficiente para mejorar el estudio de las matemáticas escolares (MEN, 1998, p.16).

Por la tanto, es la historia misma de la educación la que da la importancia a la resolución de problemas dentro del aula de clase; y, a la vez crece la necesidad de entender el pensamiento del estudiante que los resuelve, sus procesos y las estrategias que utiliza para tal fin –preocupaciones que se abordan y reflejan en los trabajos de Polya.

La investigación en educación matemática centra entonces su atención en la resolución de problemas, entendida no como la sola introducción de los problemas al currículo, al modo de "ejercicio y práctica", donde los conocimientos adquiridos se apliquen, sino que los problemas hagan parte de la producción de conocimientos significativos para el que los resuelve.

De esta manera, afirman Puig & Cerdán (1995, p. 20), se da un giro importante al currículo de las matemáticas, pues este ya no estaría determinado por los conocimientos sino por los procesos de producción de este conocimiento. Estos autores, además, afirman que:

> [...] La resolución de problemas ha de ser el lugar de la producción de conocimiento, o el lugar donde se apliquen los conocimientos adquiridos a situaciones no familiares nuevas, esto es, el lugar donde mostrar y poner de manifiesto la transferencia del mismo, se concluye que la tarea de resolver problemas es una tarea privilegiada para el aprendizaje. De ahí que si se quiere comprender cómo se produce naturalmente el aprendizaje o cómo se puede facilitar éste en una situación de instrucción, sea preciso analizar con detalle las conductas de los sujetos mientras resuelven problemas (Puig & Cerdán, 1996, p. 20).

Teniendo en cuenta esto, traté de llevar problemas al aula y de mantener una estrategia de resolución de problemas a la hora de introducir algún tema. Además, traté de introducir el tema de división a partir de algunos problemas en los cuales pude observar el trabajo de las estudiantes, y darme cuenta de que a medida que resolvían problemas, ganaban confianza en el uso de las matemáticas desarrollando así una actitud investigadora y perseverante que, paralelamente, aumentaba su capacidad de comunicarse matemáticamente y utilizar procesos de pensamiento.

Pero frente a esta estrategia es de gran importancia indagar acerca de las concepciones de "problema" que los estudiantes tienen y que, según algunos teóricos, es recomendable tener en cuenta dicha interpretación como principio de cualquier intervención pedagógica. Esto me condujo a cuestionarme sobre cuál era la concepción de “problema” que tenían mis estudiantes.

2.1 CONCEPCIONES DE PROBLEMA

Según Acevedo & García (2001, p. 143), no puede desconocerse que la actividad de “formular y resolver problemas” presenta tradicionalmente dificultades que podrían ser motivadas por experiencias previas con ella (por ello se insiste en reiterar que se constituya en eje del trabajo escolar).

Entre las significaciones previas que el estudiante da al término problema, esta el de asociarlo a un “problema cotidiano” (problema familiar, social, personal) y, por ende, cuando se le presentan cuestionamientos sobre qué es un problema hace referencia a este tipo de contextos; para otros es cualquier ejercicio algorítmico de rutina (una operación , la aplicación de una fórmula); para otros, un problema es aquel que tiene un esquema tipo enunciado (texto, prueba, experiencia de aula) que usualmente no puede ser modificado, es cerrado, tiene solución única y “exacta”, explicita un camino o estrategia a seguir; para otros un problema es simplemente un juego lógico que no involucra condiciones especiales, ni intenta modelar una situación de aplicación (Acevedo & García, 2001, p. 143).

Al indagar sobre las concepciones previas de mis estudiantes corroboré lo dicho por estos autores con algunas de las interpretaciones que dieron mis estudiantes tienen sobre lo que es un problema y la forma como lo interpretan. Veamos lo que respondieron Rubiela y Tatiana al respecto:

“Es como algo para resolver” (Rubiela, entrevista, dic. de 2004)

“Pues que toca que resolverlo” (Tatiana, entrevista, dic. de 2004).

Inicialmente, al escuchar sus definiciones, pensé que las niñas veían los problemas como algo que requería solución, que necesitaba de su intervención o manipulación para indagar y aclarar la situación. Tras sus manifestaciones se puede decir que subyacía un convenio: hay un problema, entonces debemos buscarle solución. Pero la palabra "toca" en la definición dada por Tatiana hablaba de una "obligación" ante la tarea de resolver problemas; es decir, las niñas podrían estar viendo los problemas como una tarea que tenían que, en primera instancia, cumplir y, por ende, resolver.

Posiblemente, lo anterior se da en muchos estudiantes porque con frecuencia la enseñanza de la resolución de problemas en el nivel primaria consiste en poco más que asignar problemas de enunciado verbal extraídos de libros escolares.

No obstante, esta posición de las estudiantes va en contravía de lo que afirma Polya citado por Santos (1997, p. 29), en su definición de problema, donde la motivación que le debe asistir al resolutor es un elemento importante a la hora de resolver un problema.

Por lo tanto, la falta de disposición para resolver problemas no permite al estudiante crear habilidades como la de conjeturar y probar hipótesis, estructurar argumentos sobre sus procedimientos, entre otros. Para Baroody, (2000, p. 55), cuando los niños participan voluntariamente en una tarea que tiene significado para ellos, buscan y emplean relaciones y controlan y ajustan sus acciones de una manera espontánea.

Es así como la motivación o deseos de resolver una situación resultan ser necesarias a la hora de resolver problemas pues hace que el estudiante realice un proceso más consiente. Incluso, como lo afirma Polya citado por Santos (1997, p. 29), lleva al estudiante a que lo vea como una actividad de aprendizaje que le permitirá alcanzar mayores conocimientos.

"[...] es algo que las profesoras nos ponen para aprender"
(Marcela, entrevista, dic. de 2004).

Esta definición permite ver que Marcela entiende los problemas como una oportunidad para aprender, para utilizar lo aprendido y establecer nuevas relaciones entre lo que sabe y lo que está aprendiendo. Pero de su definición me surgió una preocupación pues ella podía estar viendo la resolución de problemas como una actividad de las tantas actividades de instrucción planeadas para que ella aprenda. Es decir, la profesora debe enseñarle a resolver problemas; entonces, ella debe aprender a resolverlos, es decir, hay que aprender a resolver problemas, entonces "hagamos problemas".

"[...] es una situación que se hace por medio de una
resta, suma, multiplicación o división"
(Laura, entrevista, dic. de 2004)

Según la intervención de Laura, se puede observar que en sus pocos años de escolaridad ha trabajado con problemas que se resuelven a través de una de las cuatro operaciones. Este tipo de problemas son los que generalmente aparecen en los libros de texto en los que el camino para resolverlos, de alguna manera, es evidente y está determinado por la realización de alguna de las cuatro operaciones básicas con los datos que les proporciona en el enunciado del problema.

Durante el año escolar trabajé el proyecto Calendario Matemático[5], cuyo lema es "Un día para cada problema y un problema para cada día", que presenta problemas de lógica, de conteo, monedas, criptoaritméticas, etc.

Las actividades enmarcas por este proyecto se desarrollaron de diferentes formas, algunas semanas se trabajó el problema diario, ellas lo traían resuelto de casa y compartíamos las soluciones. Pero el trabajo se hizo más

[5] El Calendario Matemático corresponde a una actividad propuesta por el grupo Colombia Aprendiendo, dirigido por el profesor Carlos Zuluaga.

enriquecedor cuando asigné una hora de clase para esta actividad y planteaba como objetivo, resolver los problemas de la semana –eran seis.

Como resultado de ellos, pude observar las habilidades y capacidades de algunas para resolver cualquier tipo de problemas, puesto que estos problemas no son rutinarios y además son diferentes de los que traen los textos guía.

Por su parte, las niñas los reconocieron con el nombre de "problemas del calendario", abordándolos como uno de los problemas rutinarios de los textos ya que en algunas situaciones buscaban datos numéricos a los cuales aplicarles alguna operación, y como algunos no contenían estos datos numéricos entonces los consideraban incompletos. Esto lo corroboraba cuando les preguntaba acerca de la dificultad del problema y ellas respondían que no encontraban los números para sumar, restar, multiplicar o dividir.

En una de las entrevistas con Laura, cuando se le preguntó "¿Para ti qué es multiplicar?" ella respondió: "es un problema" (entrevista, dic. de 2004); y al preguntársele "¿y la división?", volvió a decir: "es un problema" (entrevista, dic. de 2004).

De lo anterior, parece ser que para Laura un ejercicio algorítmico es igual a un problema. En este sentido, para Laura "problema" es la dificultad que le genera encontrar el resultado de una operación, o la dificultad de ejecutar los pasos que hacen parte del algoritmo (de cualquier operación); de no poder memorizarlos y así no llegar a la respuesta adecuada.

Ahora bien, la discusión acerca de que si un ejercicio algorítmico es considerado problema o no, sigue siendo un punto a tratar en la resolución de problemas de matemáticas, y hay diferentes versiones. Incluso algunos autores clasifican los problemas y los ejercicios algorítmicos son incluidos en esta clasificación, puesto que ellos cumplen algunas condiciones para ser llamado problema. Por ejemplo, Butts (1980), los clasifica desde el punto de vista del nivel de creatividad necesario para atacarlos y los jerarquiza en: ejercicios de razonamiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas.

Godino, Batanero, & Font (2003, p. 43) muestran las siguientes respuestas que han dado estudiantes de educación infantil y del primer ciclo de primaria a la pregunta de “¿qué es un problema?”:

⇒ "Un problema es tener un hermanito" (3 años).
⇒ "Un problema es que mi hermano me pegue" (3 años).
⇒ "Un problema es alguna cosa que nos preocupa" (3 años).
⇒ "Un problema es no hacer las cosas bien" (4 años).
⇒ "Un problema es perder alguna cosa" (4 años).
⇒ "Que Maria se haga pipi encima" (4 años).
⇒ "Un problema es que pasa alguna cosa" (5 años).
⇒ "Que te dicen una pregunta que no sabes" (1º Primaria).
⇒ "Que te dicen una cosa y has de decir la respuesta" (1º Primaria).
⇒ "Es una pregunta que tienes que pensar con la cabeza" (1º Primaria).
⇒ "Es una pregunta que tienes que adivinar" (1º Primaria).
⇒ "Son preguntas que te hacen y al principio no las sabes, pero luego haces un dibujo en el papel o lo dibujas en la cabeza o te lo imaginas y luego ya lo ves más claro" (1º Primaria).
⇒ "Un problema es una pregunta que no sabes la respuesta y tienes que pensar y pensar para dar la respuesta (2º Primaria).

Estas respuestas son el reflejo de la interpretación y la asimilación que los estudiantes hacen de los problemas presentados en el aula de clase. Además, de aquellas salta la importancia y la necesidad de, en las primeras edades, contextualizar y hacer más real y creíbles los problemas aritméticos que se plantean a los estudiantes, pues ellos hacen referencia a problemas como dificultad y los relacionan con problemas cotidianos.

Para Schoenfeld (1985), el término problema se refiere a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla, pero a aclara que esta dificultad debe ser un “impasse intelectual” y no solamente a nivel operacional o de cálculo. Entonces, encontrar el cociente de dos números puede ser, para el nivel en el que se realice esta tarea, un proceso en el cual se atraviesen muchos obstáculos pero no será problema para el que ya sabe resolver el algoritmo de la división.

De todo lo anterior, podría decir que las estudiantes interpretaron los problemas como problemas aritméticos, es decir, para ellas los problemas en matemáticas siempre son resueltos por alguna multiplicación o alguna otra operación; además de que los problemas son aquellas actividades propias de una clase de matemáticas que la profesora asigna como tarea y que debe ser resuelta.

Aún así, esas ideas que hasta el momento las estudiantes habían creado podían ser producto de la poca experiencia con otro tipo de problemas, o que no consideraban como problemas las actividades de juegos de lógica, cuadrados mágicos, criptoaritméticas, conteo de cubos en un sólido, etc. Es decir que aquellos problemas donde se utilizan estrategias como contar, realizar listas, graficar, entre otras estrategias para solucionarlos, no son considerados como problemas.

Es importante aclarar qué es un problema aritmético, mencionar algunas de las diferencias con otro tipo de problemas y tratar de esclarecer la definición de algunos autores. Esto porque este es el tipo de problemas fueron los que las estudiantes identificaron y los que, finalmente, son trabajados en estos grados.

En este referente, Puig & Cerdán (1996 p. 17) dicen que los problemas aritméticos se proponen, se enuncian o se presentan enunciados, y se resuelven. Así que, situados ahora en el ambiente escolar, si queremos saber qué entenderemos por un problema aritmético, habrá que describir las características de su enunciado y de su resolución. En el enunciado, la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades.

Es así como la resolución del problema, o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta del problema, fundamentalmente parece consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas.

2.1.1 Problema aritmético

Un problema aritmético es un problema cuya estrategia principal para solucionarlo requiere de la aritmética, sin importar que se necesite de otros conocimientos no aritméticos para tratar de solucionarlo. Es decir, la estrategia que prima en el problema es netamente aritmética, por ejemplo[6]:

> **Ejemplo 1.** Julio se da cuenta de que el kilometraje de su auto es 4.320 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para hacer la revisión del auto que es a los 5.000 km?
>
> **Ejemplo 2.** Don Carlos desea cercar con alambre de púas un corral de su finca. Si el metro de alambre de púas vale 2.000 pesos, ¿cuánto dinero necesita?

[6] Los problemas que se van a presentar fueron elaborados por mí para ejemplificar la definición de problemas aritméticos.

> **Ejemplo 3.** En el almacén de calzado del centro, hay diferentes descuentos 20%, 30% y 40%. Por cada producto hay que pagar el 15% de IVA y cada comprador puede decidir si le calculan primero, el descuento o el IVA. ¿Qué harías tú?

Estos tres problemas son aritméticos, aunque poseen algunas diferencias, el Ejemplo 1 es denominado por Puig y Cerdán como problema aritmético estándar, ya que la información está explícitamente dada en el enunciado en forma numérica, al igual que lo debe ser su respuesta.

En el Ejemplo 2, se pregunta también por una cantidad (el costo del alambre para encerrar el corral), la diferencia entre este y el anterior es que falta información necesaria para resolver la pregunta aritméticamente. Sin embargo, se considera problema aritmético ya que para encontrar la solución se debe realizar una serie de operaciones aritméticas.

Por último, el Ejemplo 3 es semejante al primero, solo que para responder la pregunta se debe hacer una relación entre dos cantidades que se deben determinar previamente.

El siguiente no sería un problema aritmético a pesar que se necesite del conteo para solucionarlo, pues en este caso es más importante para la solución los conocimientos geométricos.

> **Ejemplo 4.** ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

Los problemas aritméticos son, en general, problemas de aplicación, lo que hacen que aparezcan enunciados en contextos variados. Así, puede parecer difícil en ocasiones decidir si un problema puede ser considerado como un problema aritmético, cuando está sumergido en un contexto geométrico, físico o biológico.

Por lo tanto, un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado no sean decisivos a la hora de resolver el problema (Puig & Cerdán, 1995, p. 19).

Hasta aquí he tratado, primero, de mostrar lo que las estudiantes entendían por problemas; segundo, de esclarecer, lo que son y no son problemas aritméticos. Pero qué son los problemas de división. A continuación hablaré acerca de ellos, de cómo se pueden identificar y clasificar.

2.2 PROBLEMAS DE DIVISIÓN

Dentro de las aulas de clase, tanto profesores como estudiantes, hemos relacionado los problemas de división con la acción de repartir, posiblemente, sin percatarnos que la repartición de una cantidad se puede hacer de dos formas: conociendo los grupos en los que se quiere repartir o conociendo la cantidad de unidades que se desean dejar en cada grupo, repartición que permite distinguir dos tipos de problemas de división teniendo en cuenta el dato que se desea encontrar en el problema. Es necesario tener también en cuenta que este reparto que se realiza en la división es equitativo, es decir, siempre se reparte la misma cantidad de elementos para cada persona, grupo o partes en las que se divida.

Al iniciar las actividades con las estudiantes, esperaba que los problemas (de división) planteados fueran resueltos a través de dos estrategias: sumas o restas sucesivas. Pero me sorprendí cuando algunas de ellas rápidamente encontraron otros caminos para llegar a la solución: se dieron cuenta de que a través de un gráfico donde iban repartiendo los elementos del problema, podrían encontrar la solución; o que una multiplicación con un dato desconocido podría ser también la solución.

Ahora bien, los problemas de división se suelen trabajar después de un adecuado conocimiento de los problemas de multiplicación, puesto que muchos docentes creemos que mostrar la relación entre división y multiplicación facilita su aprendizaje. Pero podríamos considerar este planteamiento y trabajar con los problemas de división desde los primeros cursos, pues el estudiante puede crear otro tipo de estrategias, de tal forma que no necesita ni saber multiplicar, ni saber dividir para resolverlos.

En relación a ello, Maza (1999, p. 28) afirma que lo cuestionable de este planteamiento [trabajar la división después de la multiplicación] es que olvida que los problemas de división son también de fácil planteamiento y de una resolución no tan complicada, sea por reparto, por resta reiterada o por otras estrategias.

2.2.1 Problemas de Partición y Agrupamiento

Al sumergirse en el estudio de los problemas de división, y teniendo en cuenta la relación que mantiene con la multiplicación, se observa que en estos se pueden distinguir dos tipos, partiendo de la diferencia que existe entre los términos de la multiplicación, donde el multiplicando es el número que se suma y el multiplicador es el que indica el número de veces que reitera la suma del multiplicando así: los problemas de división donde se debe encontrar el multiplicando se denominan de “Partición” y aquellos en los que se busque el multiplicador se llaman de “Agrupamiento” (Maza, 1991, p. 19).

A continuación ejemplifico este tipo de problemas de división a partir del siguiente problema de multiplicación.

> **Ejemplo 5.** Un paquete tiene 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos tengo si compro 3 paquetes?

$$\underset{\text{Multiplicador}}{\underset{\Downarrow}{\boxed{3}}} \;\; \text{X} \;\; \underset{\text{Multiplicando}}{\underset{\Downarrow}{\boxed{6}}} \;\; = \;\; \underset{\text{Producto}}{\underset{\Downarrow}{\boxed{18}}}$$

Para dar solución al anterior problema se suma repetidamente el número de caramelos (6, denominado multiplicando) según la cantidad de paquetes que se han comprado (3, denominado multiplicador). Aquí nos podemos dar cuenta que cada uno de los términos representa papeles diferentes, puesto que uno de los factores indica las veces que se repite el otro.

Consecuentemente, Maza (1991, p. 16) llama al multiplicando elemento «pasivo»; y al multiplicador, elemento «activo», seguramente porque el multiplicando recibe la acción del multiplicador.

Teniendo en cuenta esta concepción de la multiplicación como suma repetida y partiendo de problemas como este para su enseñanza, la multiplicación podría considerarse como una operación no conmutativa, puesto que cada uno de los factores tiene un papel importante dentro del problema. Y es aquí, en esta diferencia, donde se puede ver que dependiendo del dato desconocido el problema de división da lugar a dos situaciones diferentes: se puede preguntar por el número de paquetes (multiplicador) o por la cantidad de caramelos en cada paquete (multiplicando).

> **Ejemplo 6.** Compré 3 paquetes de caramelos, ¿Cuántos caramelos trae cada paquete si en total tengo 18 caramelos?
>
> **Ejemplo 7.** Cada paquete de caramelos trae 6 caramelos. Compré 18 caramelos, ¿cuántos paquetes compré?

Estos dos ejemplos plantean problemas que se pueden clasificar como problemas de división y están estrechamente relacionados con una multiplicación. Por ejemplo, el Ejemplo 6 se puede relacionar con el problema del Ejemplo 1 a través de una multiplicación donde uno de sus factores es desconocido y el producto está dado, pero, además, se puede platear el primer tipo de división mencionado por Maza.

Es decir, en este problema nos da como información la cantidad total de caramelos que son 18, los cuales están agrupados en 3 paquetes, y se pregunta por la cantidad de unidades que conforman un paquete.

3	X	?	=	18		18	÷	3	=	?
Multiplicador		Multiplicando		Producto		Producto		Multiplicador		Multiplicando

En términos aritméticos y haciendo relación con la multiplicación, en el problema se está preguntando por el multiplicando. Entonces, se trata en ellos de repartir una cantidad (18 caramelos) en partes iguales (3 paquetes), y es por esto que se Maza denomina a estos problemas de partición (1991, p. 17).

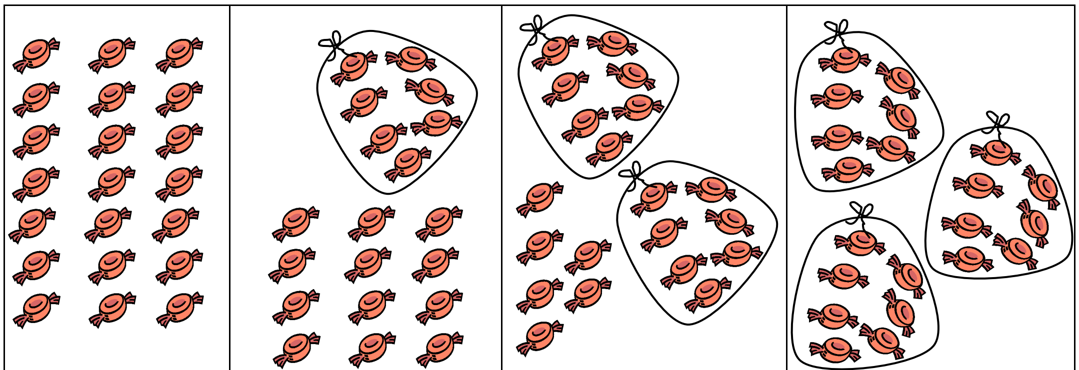
Al igual que este, el problema del Ejemplo 7, llamado Agrupamiento, se puede relacionar con el primero a través de una multiplicación y a partir de ella plantear el otro tipo de división.

?	X	6	=	18		18	÷	6	=	?
Multiplicador		Multiplicando		Producto		Producto		Multiplicando		Multiplicador

Aquí se pide encontrar la cantidad de paquetes en los que se encuentran agrupados los caramelos, es decir, se da una cantidad global que debe ser repartida en grupos de un tamaño ya conocido. La diferencia con el problema del Ejemplo 6, es que aquí se conoce el tamaño de las partes pero se ignora en cuántas partes se pueden repartir la cantidad total.

En este momento, vale la pena adelantarnos un poco a las estrategias de solución de este tipo de problemas, ya que estas permiten diferenciar aún más estos dos tipos de división. De igual manera, aclaro, que esta solución que se dará aquí no es la única y que en el siguiente capítulo, serán estudiadas con mayor profundidad.

Inicialmente, el problema del Ejemplo 7 es resoluble por restas sucesivas de la cantidad menor (6 caramelos) respecto de la mayor (18 caramelos). El número de grupos que se pueden formar (o número de veces que se efectúa la resta) indica la solución del problema. Nuevamente, la cantidad de veces que puedo restarle el 6 al 18, será la cantidad de grupos que se puede formar. Las restas y la representación gráfica de este proceso serían así:



Tengo 18 caramelos	Formo el 1er paquete 18 – 6 = 12 caramelos	Formo el 2º paquete 12 – 6 = 6 caramelos	Formo el 3er paquete 6 – 6 = 0 caramelos

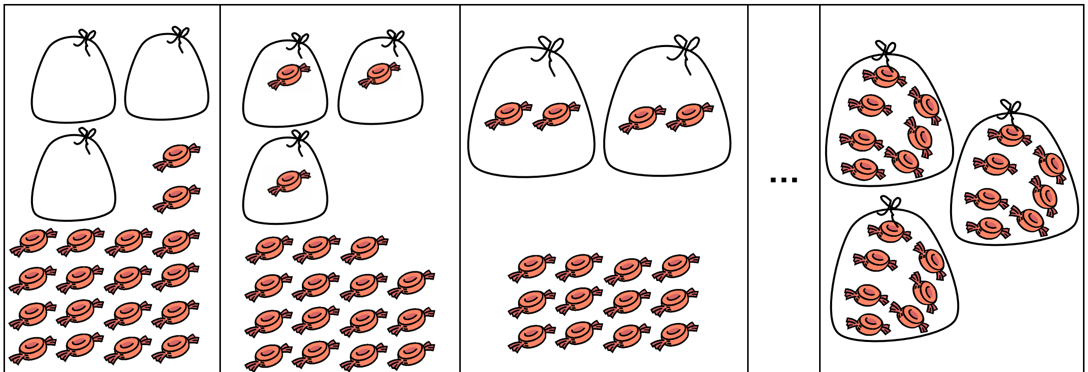
Figura 3. Estrategia de resta reiterada[7]

Formé 3 paquetes y no sobró ningún caramelo, por tanto compraron 3 paquetes.

Sin embargo, el problema del Ejemplo 6 no puede ser resuelto por este método. Según Maza (1999, p. 30), este problema no puede resolverse por resta reiterara por una razón muy sencilla: 18 caramelos no se pueden restar de 3 paquetes. No son cantidades homogéneas.

En este problema, que llamamos de Partición, se requiere realizar un reparto. Sólo en este sentido se podría sostener que interviene la resta reiterada de nuevo:

[7] La representación gráfica que modela esta estrategia es adicional a lo presentado por Maza (1999).



Tengo 18 caramelos y 3 paquetes	Reparto un caramelo en cada paquete: Me quedan 18 – 3 = 15 caramelos	Reparto un segundo caramelo en cada paquete: Me quedan 15 – 3 = 12 caramelos	…	Reparto el sexto caramelo en cada paquete: Me quedan 3 – 3 = 0 caramelos

Figura 4. Estrategia de reparto[8]

En cada paquete quedan 6 caramelos.

Al resolver el problema por este método, se puede observar, que difiere de la solución anterior, puesto que lo que se hace es repartir, y para ello se utiliza la resta y no al revés, como sucede con el problema 2.

Como lo dije anteriormente, estos no son los únicos métodos de solución, incluso los estudiantes, abordan otro tipo de estrategias, que revisaremos más adelante. Lo clave en este momento, es ver la diferencia entre los dos tipos de problemas de división.

En la tabla comparativa de la Figura 5, elaborada por Puig & Cerdán (1995, p. 3), de los tipos de problemas de división anteriormente analizados se agrupan los posibles nombres que se encuentran en la literatura, la

[8] La representación gráfica que modela esta estrategia es adicional a lo presentado por Maza (1999)

representación gráfica, las clases de problema presentados por Hart (1981) y Freudenthal (1963), las expresiones generales, el problema como fracción, las expresiones en inglés y lo que se desea encontrar al resolver los dos tipos de problemas[9].

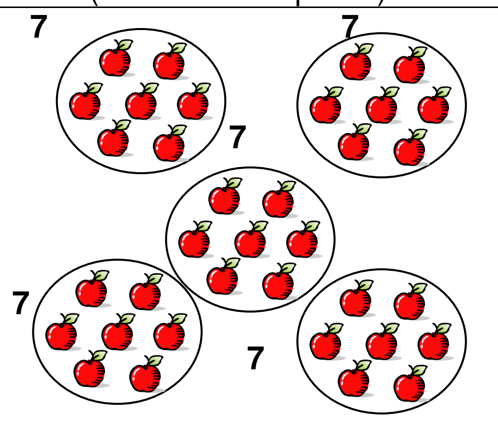
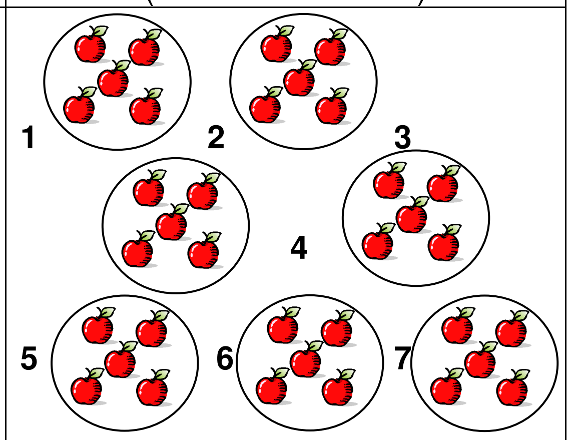
División por Partición (Distribuir - Repartir)	**División por Agrupamiento** (Razón – Cuotición)
	
Tengo 35 manzanas para repartir entre 5 personas. ¿Cuántas para cada uno? (Hart)	Tengo 35 manzanas y quiero dar 5 por persona. ¿Para cuántas personas tengo? (Hart)
¿Cuántos florines recibe cada una de q personas si se distribuyen a florines? (Freudenthal)	¿A cuántas personas se les puede dar d florines si se dispone de a florines? (Freudenthal)
Dar a q personas partes iguales de un número o magnitud a	Restar reiteradas veces d en un número o magnitud a
Cada uno recibe una q-ésima parte o un q-avo	
¿Cuál es la q-ésima parte de a? ¿Cuánto es un q-avo de a?	¿Cuántas veces cabe d en a ?
«a divided by q»	«d divided into a»
Preguntar por el tamaño de cada partir	Preguntar por el número de partes

Figura 5. Tabla Comparativa de la División por Partición y Agrupamiento

[9] La representación gráfica que modela esta estrategia es adicional a lo presentado por Maza (1999).

Dentro de los problemas de división se pueden encontrar también los de combinación, estos problemas, son de mayor complejidad para su aprendizaje, y están relacionados con el producto cartesiano (otra interpretación de la multiplicación, y que es la más acertada matemáticamente hablando). Un ejemplo de este tipo de problema puede ser el siguiente:

> Juliana dice que puede vestirse de 12 formas diferentes si combina 3 de sus blusas con sus faldas. ¿Cuántas faldas tiene Juliana?

El dato numérico 12, representa las combinaciones posibles entre 3 blusas y algunas faldas. Según Maza (1999, 931), difícilmente una resta reiterada o un reparto pueden resolver este problema, tal como se ha presentado. Es posible a través de su representación matricial pero esto corresponde a una fase de aprendizaje posterior.

Este tipo de problemas no los tuve en cuenta para este trabajo, puesto que es necesario un conocimiento más claro de la multiplicación como combinación para poder abordarlos, lo cual no es recomendable para estos grados iniciales.

Ahora, teniendo en cuenta los dos tipos de división presentados, realizo un análisis de lo que percibieron las estudiantes en el aula frente a los problemas de división propuestos.

Como se dijo anteriormente, en la Actividad No. 4 se planteó la elaboración de una carta para una amiga en la que se planteara un problema que alguna compañera, posteriormente, debía resolver. El objetivo de ello era determinar el modelo que las estudiantes estaban construyendo de la división, si era de partición o de agrupamiento.

Pero antes de esta actividad y dentro de las clases diarias, se realizaron diferentes actividades con problemas de los dos tipos. Dentro de los problemas elaborados por las estudiantes, se encuentra el siguiente que fue planteado por Laura:

Querida Amiga
Juan tiene una fabrica de chocolates y nececita empacar 100 chocolates en 35 cajas ¿cuantos chocolates empaca en cada caja?

El problema planteado por Laura, es bastante sencillo y semejante a uno de los trabajados en clase: como información presenta una cantidad (100 chocolates) que debe ser repartida en un número dado de partes (35 cajas), y pregunta por el número de partes que debe ser colocada en cada caja; siendo todas estas las condiciones necesarias para ser un problema de partición. Es decir, Laura recordó con facilidad, dentro de los problemas trabajados en clase, los de partición.

Ahora veamos el problema de partición de Tatiana:

Querida Amiga: te quiero retar a un 26 10 04
Problema [redacted]
Si Alvaro tiene una tienda de bombillas de 34.550 bombillas y afuera de la tienda tiene una fila de 90 personas ¿cuántas bombillas le da a cada persona

A pesar de que el problema que Tatiana plantea no se encuentra bien planteado, ya que la situación expuesta en el problema no es muy clara pues en ningún momento dice que todas las personas que están fuera de la tienda haciendo fila van a comprar bombillos, se puede considerar de partición pues la pregunta elaborada hace referencia a la cantidad de bombillos que corresponde a cada persona después de repartir la cantidad total de bombillos (34.550) en la cantidad de personas que están haciendo la fila (90).

A continuación, presento la situación planteada por Rubiela:

> FLORIDABLANCA, OCT 26 / 04
> SRITA. NIÑA
>
> TE QUIERO RETAR A QUE HAGAS ESTE DIFICIL PROBLEMA.
>
> Malinda tiene 70 cajas de 12 gomitas cada caja.
> Ella toma 1 caja para ella, 2 para sus padres y 5 para el resto de la familia. Si le quiere dar a 5 de sus mejores amigas igual cantidad de cajas y gomas, y quiere repartir las que le sobran, ¿Cuantas cajas son para cada una? ¿Cuantas gomas son para cada una? ¿Cuantas gomitas sobran?
>
> MXRC

Al hacer la lectura de su problema, notamos que es más elaborado y que para su solución se necesita de las cuatro operaciones básicas; además, hace preguntas que están relacionadas con el cociente y el residuo de la división; al igual que los de sus otras compañeras, el problema es de partición pues tiene una cantidad de cajas que desea distribuir entre algunas personas y desea saber, cuántas cajas le corresponden a cada persona.

Adicional a lo anterior, hay información con respecto a la cantidad de gomitas que hay en una caja, lo cual le permite preguntar cuantas gomitas le corresponde a cada una de sus amigas. Este problema resulta ser muy rico y dinámico en su estructura de repartición ya que esta inicialmente no es equitativa, ya que asigna a la protagonista de la historia una caja, dos para sus padres, cinco para el resto de la familia y las que quedan deben ser repartidas en partes iguales entre sus cinco amigas.

A diferencia de los problemas planteados Laura y Tatiana, en el de Rubiela se ve claramente que la repartición que se desea hacer en un momento dado debe ser en partes iguales, pues si recordamos la división permite repartir una cantidad de objetos equitativamente.

Con lo observado anteriormente en los tres problemas puedo concluir que las estudiantes consideraron el modelo de división de Partición dado que este fue el que lograron construir a lo largo de las clases. Esta situación de alguna manera la había intuido al iniciar el desarrollo de las actividades pues, además, este tipo de problemas son más frecuentes en nuestro diario vivir ya que generalmente surge la necesidad de repartir objetos en una cantidad determinada.

A finales de los setenta, el programa de investigación *Concepts in Secondary Mathematics and Sciences* quiso trazar un mapa de los niveles de comprensión de las matemáticas de los niños de once a dieciséis años (*Children Understanding of Mathematics)* en el que se trata, además, de dar cuenta del área de aplicación de las operaciones aritméticas a situaciones reales y de la capacidad de los niños para construir problemas verbales que se corresponden con un enunciado determinado (Puig & Cerdán, 1995, p. 83).

En tal estudio, se concluye que los niños que fueron capaces de inventar historias proporcionaron más de un modelo de división que del otro; siendo el modelo de reparto o partición el que casi todos los niños construyeron. De igual forma, esto se vivenció en el trabajo realizado por las niñas de mi curso pues en una situación similar tres de ellas elaboraron problemas que modelaban la división por reparto o partición.

2.2.2 Estructura de un problema de división

Seguidamente mostraré la estructura de los problemas de división teniendo en cuenta las cantidades que aparecen en ellos, dado el papel importante que ellas desempeñan. De igual forma, mostraré las combinaciones de estas cantidades; recordando que en este trabajo se tuvo en cuenta los problemas de división de partición y de agrupamiento para el análisis y elaboración de categorías y no otro tipo de clasificaciones. Veamos el siguiente ejemplo:

> **Ejemplo 8.** Rocío debe comprar algunas bolsas de bombas para la piñata de su hijo. Si necesita 120 bombas de diferentes colores y cada paquete contiene 24 bombas de diferentes colores, ¿cuántos paquetes debe comprar?

En esta situación, el número 120 es una cantidad que corresponde al número de bombas, mientras que el número 24 no se refiere a las bombas en total sino a las que hay en un paquete. Por consiguiente, las dos cantidades son diferentes pues una representa una magnitud (bombas) y la otra representa la razón entre dos magnitudes (bombas por paquete).

Según Maza (1991, p. 20), en el primer caso la unidad de medida corresponde a una cantidad extensa mientras que en el segundo caso se refiere a la intensidad con que una magnitud está presente en otra, por ello se expresa como una razón entre dos magnitudes. Es por este motivo que la primera recibe el nombre de "cantidad extensiva" (E), y la segunda "cantidad intensiva" (I).

Al respecto, Puig & Cerdán (1995, p. 125) dicen una cantidad extensiva como 120 bombas, expresa la extensión de una entidad o substancia y se refiere a un conjunto, montón o trozo de esa entidad o substancia. Las cantidades extensivas son aditivas, en el sentido de que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña.

Por otra parte, los mismos autores afirman que las cantidades intensivas, por su parte, son razones como «velocidad», «densidad», «estudiantes por profesor», «precio unitario», etc. Es decir, ellas describen un aspecto interior, intensivo de una entidad o substancia mas no una propiedad del montón de objetos, sino de uno de ellos, ese montón y otro montón de cualquier tamaño. Las cantidades intensivas tienen unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas y, contrario a las extensivas, no son aditivas (Puig & Cerdán 1995, p. 125).

Según Puig & Cerdán, (1995, p. 126), hay otro tipo de cantidades que es frecuente usar en los problemas de división y que han sido consideradas como carentes de unidades: es el caso de los escalares. Cantidades de este tipo aparecen en los enunciados de los problemas como «mitad», «tercera parte» o expresiones con la palabra «veces». En relación a esto, Kaput (1986) y Schwartz (1986) mantienen conveniente considerar que se trata también de cantidades intensivas.

> **Ejemplo 9.** Milena ha coleccionado 130 stickers. Milena ha coleccionado cinco veces tantos stickers como Carolina, ¿cuántos stickers tiene Carolina?

En el anterior problema, la expresión «cinco veces» representa una cantidad intensiva, cuya unidad es «stickers de Milena por stickers de Carolina» lo cual representa una razón.

Teniendo en cuenta las cantidades anteriormente definidas y la división como operación, Puig & Cerdán (1995, p. 127) presentan las siguientes posibilidades de estructuras de cantidades, recordando que E representa las cantidades extensivas e I representa las cantidades intensivas:

E/E E/I I/I I/E

Las dos primeras expresiones representan problemas de división ya trabajados, los de partición y los de agrupamiento. Retomando los problemas que fueron allí planteados:

> **Ejemplo 10.** Compré 3 paquetes de caramelos, ¿cuántos caramelos trae cada paquete si en cada uno tengo 18 caramelos?
>
> **Ejemplo 11.** Cada paquete de caramelos trae 6 caramelos. Compré 18 caramelos. ¿Cuántos paquetes compré?

Tenemos que «caramelos» y «paquetes» representan las cantidades extensivas y «caramelos por paquete» representa la cantidad intensiva, entonces la división E/E (18 caramelos / 3 paquetes) es una partición pues se pregunta por la cantidad de caramelos en un paquete, es decir, por el tamaño de las partes y el resultado de esta división sería una cantidad Intensiva; y la división E/I (18 caramelos / 6 caramelos por paquete) es un agrupamiento porque pregunta por la cantidad de paquetes, es decir, por el número de partes y el resultado de esta división sería una cantidad extensiva.

Por otro lado, la estructura I/I puede ejemplificarse con los siguientes problemas ya que aparecen las dos clases de división: partición y agrupamiento:

Ejemplo 12. En una caja de galletas hay 18 paquetes de galletas. Si hay 720 galletas en una caja, ¿cuántas galletas hay en un paquete?

Ejemplo 13. En una caja de galletas hay varios paquetes. Si cada paquete tiene 4 galletas y hay 720 galletas en cada caja, ¿cuántos paquetes hay en una caja?

Para la solución de estos problemas se debe considerar las galletas en una caja como el todo, los paquetes de galletas en una caja como las partes y las galletas en un paquete como el tamaño de cada parte.

Con lo cual, si los datos son las 720 galletas en cada caja y los 18 paquetes de galletas en cada caja, entonces la incógnita serían las galletas por paquete. Al realizar la operación se cancelan las unidades «caja» (ver abajo) y la solución se va a obtener mediante una división por partición y es, al igual que los datos, una cantidad.

$$\frac{720\ galletas\Big/cajas}{18\ paquetes\Big/cajas} \rightarrow 4\,\frac{galletas}{paquetes}$$

Ahora, si los datos son las 720 galletas en una caja y las 4 galletas por paquete, y la incógnita son los paquetes en cada caja las partes, tenemos que las unidades «galletas» se cancelan y el resultado se obtiene mediante una división por agrupamiento. El resultado será entonces una cantidad intensiva, así:

$$\frac{720\,galletas\Big/cajas}{4\,galletas\Big/paquetes} \rightarrow 18\,\frac{paquetes}{cajas}$$

Finalmente, la estructura I/E no es trabajada por Puig & Cerdán pues asegura que corresponde a situaciones más complejas, las cuales tendrán que ser trabajadas con conocimientos previos (1995, p. 129).

Para finalizar, presentaré la clasificación de los problema de división planteada por Puig y Cerdán (1995, p. 129) en la cual reúne las clasificaciones planteadas por Vergnaud (1983), Nesher (1987) y Brown (1981).

2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE DIVISIÓN

2.3.1 Isomorfismo de medidas

La primera categoría que definen Puig y Cerdán recibe el nombre de "Regla de Correspondencia o Problemas de Razón", y trata de los problemas en los que hay una proporción simple directa entre dos espacios de medida. En su enunciado más típico aparece una proposición que es una descripción de existencia, y otra que expresa la regla de correspondencia (cantidad intensiva) entre los espacios de medida. Los Ejemplos 10 y 11 plantean problemas de esta categoría.

> **Ejemplo 10.** Compré 3 paquetes de caramelos ¿Cuántos caramelos trae cada paquete si en total compré 18 caramelos?
>
> **Ejemplo 11.** Cada paquete de caramelos trae 6 caramelos. Compré 18 caramelos. ¿Cuántos paquetes compré?

En el Ejemplo 10 se pregunta por la cantidad intensiva o regla de correspondencia, y la estructura de cantidades es E/E, por lo tanto se trata de una división por Partición – Razón. En cuanto al Ejemplo 11, se pregunta por la descripción existencial o cantidad extensiva, y la estructura de cantidades es E/I, luego se trata de una división Agrupamiento – Razón.

2.3.2 Comparación multiplicativa

Puig y Cerdán (1995, p. 132) llaman a la segunda categoría "Comparación Multiplicativa", y es denominada "Problemas de Factor Multiplicativo", y según Maza (1999, p. 36) podría llamarse "Problemas de Comparación".

Los autores indican que en ellos hay una función escalar que se usa para compara dos cantidades extensivas del mismo tipo de magnitud. En su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial, y otra que expresa la regla de asociación o cantidad intensiva, para comparar las cantidades. Los siguientes ejemplos, plantean problemas para esta categoría:

> **Ejemplo 14.** Josefina tiene 7.200 pesos. Josefina tiene 6 veces tanto dinero como tiene Camila. ¿Cuánto dinero tiene Camila?

> **Ejemplo 15.** Camila tiene 1.200 pesos. Josefina tiene 7.200 pesos. ¿Cuántas veces tiene Josefina el dinero que tiene Camila?

En este caso Puig y Cerdán (1995, p. 133) han indicado, sin embargo, que para los problemas de comparación multiplicativa el asunto es más complicado ya que la regla de asociación puede interpretarse de dos maneras distintas.

Así, en el Ejemplo 14, la frase «Josefina tiene 6 veces tanto dinero como tiene Camila» puede interpretarse como «por cada peso de Camila, Josefina tiene 6 pesos». Con esta interpretación, el problema sería de agrupamiento y el problema del Ejemplo 15 de partición, como en los isomorfismos de medidas.

Ahora bien, esa frase puede interpretarse también como «para el conjunto de pesos de Camila, hay 6 conjuntos de pesos iguales de Josefina». Con esta interpretación, la situación del Ejemplo 11 es de partición y el 12 de agrupamiento, contrario a lo que sucede en el caso anterior.

En las siguientes figuras (6 y 7) presento una representación gráfica de las dos interpretaciones para el Ejemplo 11 hecha por Puig y Cerdán (1995, p. 133); en la primera se pregunta por el número de partes (agrupamiento); en la segunda, por el tamaño de cada parte (partición).

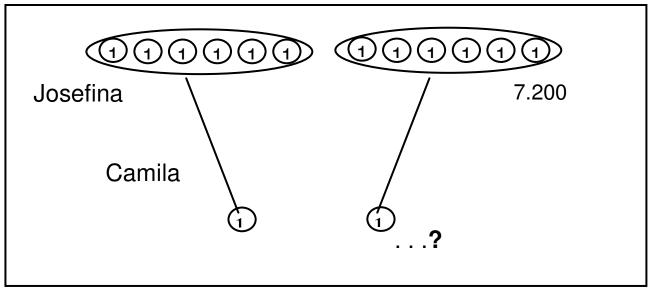


Figura 6. Interpretación «por cada peso de Camila, Josefina tiene 6 pesos»

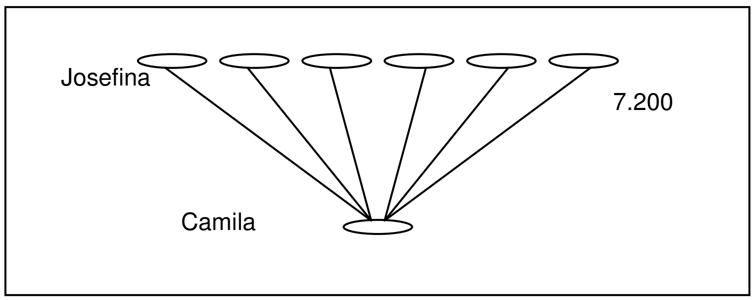


Figura 7. Interpretación «para el conjunto de pesos de Camila, hay 6 conjuntos de pesos iguales de Josefina»

2.3.3 Producto de medidas

Nesher (1987) llama a esta categoría "Multiplicación Cartesiana", y Brown (1981)los denomina como problemas que corresponden al modelo de la multiplicación y los llama *producto cartesiano.* Por su parte, Maza (1991, p. 31) llama a estos "Problemas de Combinación", al parecer porque uno de los datos es resultado de la combinación de dos cantidades, uno de las cuales es necesario averiguar.

Según Puig y Cerdán (1995, P. 134), en estos problemas hay una composición cartesiana de dos espacios de medida, M_1, M_2, en un tercer espacio de medida M_3. Los problemas en que aparecen área, volumen o trabajo, y otros conceptos físicos son de esta categoría. También los problemas combinatorios. En este caso la multiplicación es semánticamente conmutativa, por lo que solo hay dos posibilidades, según la incógnita sea M_3 o de cualquiera de los otro dos, M_1, o M_2.

Al tomar la multiplicación como producto cartesiano, no se otorgan papeles diferentes a los factores en juego. Además, si el isomorfismo de medidas era una operación asimétrica, en este caso la multiplicación resulta siendo simétrica (Maza, 1991, p. 20). Por lo tanto, esta simetría hace que solo aparezca un único tipo de división, en el cuál la incógnita es un dato cualquiera perteneciente a uno de los espacios de medida iniciales.

El siguiente problema, ya trabajado, ejemplifica esta categoría en donde las cantidades involucradas son extensivas y su estructura de cantidades es E/E; luego, se trata de una división por partición.

> Juliana dice que puede vestirse de 12 formas diferentes si combina 3 de sus blusas con sus faldas. ¿Cuántas faldas tiene Juliana?

2.3.4 Problemas de Conversión

Esta categoría no es considerada por Puig y Cerdán pero Maza (1999, p. 38) la tiene en cuenta y afirma que: "se ha solido asociar el planteamiento de estos problemas a las cuestiones físicas de conversión de medidas, propias de un nivel de enseñanza muy superior al tratado. [...] Aplicaciones de este tipo han llevado a concluir a distintos educadores matemáticos que los problemas de conversión no deben encontrarse en las aulas de primaria. Ello depende, sin embargo, del enfoque que se le dé a estos problemas".

Desde esta visión, es claro que los problemas de conversión de medidas no serán trabajados en estos niveles de enseñanza, pero ello no impide que se trabajen problemas de esta clase pues estos no son los únicos que hacen parte de esta categoría. Maza (1999, p. 38) ejemplifica lo dicho anteriormente con los siguientes problemas:

> Te dan una propina cada domingo. Cada mes tiene 4 domingos. Si al cabo de un mes te han dado 100 pesetas. ¿Cuánta propina recibes cada domingo?

> Cada estuche grande de pastillas de caldo tiene 18 pastillas y es 3 veces más grande que un estuche pequeño. ¿Cuántas pastillas tiene este último?

Estos problemas tienen una estructura de cantidades del tipo I/I los cuales han sido ampliamente analizados anteriormente. Pero aún así vale la pena resaltar que los problemas presentados tienen una diferencia con respecto al tipo de cantidades que en ellos se tiene puesto que en el primero las dos cantidades intensivas son de razón, y en el segundo una de ellas es de razón y la otra es un escalar. Incluso se presentan problemas donde las dos cantidades son escalares.

Para finalizar, los tipos de problemas anteriormente presentados se pueden resumir de la siguiente manera[10]:

Isomorfismo de medidas

Partición – Razón	$E/E = I$ (razón)
Agrupamiento – Razón	$E/I = E$ (razón)

Problemas de comparación

Agrupamiento – comparación	Su estructura de cantidades depende de la interpretación del escalar.
Partición – comparación	

Problemas de medidas

Partición – combinación	$E/E = E$

Problemas de conversión

División – conversión RR	$I/I = I$
División – conversión CR	
División – conversión CC	

[10] Este resumen está basado en lo presentado por Maza (1991, p. 24).

¿Cuáles son las estrategias y los razonamientos que usaron?
Capítulo 3

"Dibujé 15 bolsas y tengo 120 chocolates, reparto un chocolate en cada bolsa. Ahora a 120 resto 15 porque ya coloqué 15 en las bolsas" (Rubiela, Actividad No. 1, octubre 12 de 2004).

En este capítulo quiero exponer las categorías que emergieron para el análisis de las estrategias y razonamientos que las estudiantes mostraron cuando se enfrentaron a los problemas de división. Además, quiero a la luz de los autores que han abordado el tema, sustentar cada categoría así como mencionar y destacar algunas soluciones que a mi parecer son pertinentes para este trabajo. Estas categorías son: Procedimientos Informales, Buscando la operación , Y… ¿Cuál es la pregunta?

Es importante aclarar que las estudiantes no se enmarcaron en cada una de las categorías, al contrario, utilizaban una y otra en la solución de los diferentes problemas que fueron planteados.

3.1. PROCEDIMIENTOS INFORMALES

A continuación expondré los razonamientos y estrategias utilizados por las estudiantes en la solución del problema planteado en la primera actividad. Recuerdo al lector que con esta actividad pretendía observar la forma como las estudiantes lo enfrentarían e intentarían crear caminos para llegar a la respuesta correcta. Además, esta actividad era un instrumento que permitiría introducir el tema de división y observar el comportamiento de las estudiantes frente a la Actividad No. 1 realizada el 12 de octubre de 2004.

Ligia trabaja en una empacadora de chocolates. Si tiene que empacar 120 chocolates en 15 bolsas, ¿cuántos debe empacar en cada bolsa?

En la realización de la actividad, las estudiantes individualmente analizaron el problema a lo largo de 15 minutos, posteriormente trabajaron por parejas compartiendo lo que cada una había observado en el problema y en algunos casos, mostraron el camino planteado para su solución, buscando llegar a un acuerdo y finalmente presentar a todo el curso su proceso de solución.

Por medio de esta metodología de trabajo, las estudiantes mostraron diferentes estrategias de solución, plantearon desde una representación gráfica hasta, sumas, restas y multiplicaciones, lo cual me sorprendió bastante.

No obstante, esperaba que lo resolvieran utilizando un gráfico para realizar la partición hasta terminar y contar los chocolates en cada bolsa o a través de sustracciones sucesivas, ya que en la mayoría de textos de segundo y tercero primaria, la enseñanza de la división se introduce relacionándola con la resta, por lo tanto, suponía que los pensamientos de las estudiantes tenderían hacia este razonamiento.

Pero esto particular evento no solo me sucedió a mí, al respecto Kammi (1995, p. 97) comenta lo que le sucedió en su investigación:

> Antes de empezar nuestra investigación, esperábamos que los niños resolvieran los problemas de división mediante sustracciones repetidas. Estábamos equivocadas. Los niños de tercer curso evitan la sustracción lo más posible. Olivier y sus colegas (1991) llegaron a la misma conclusión en Sudáfrica en relación a los problemas de división. En palabras de estos autores, «encontramos que muy pocos niños utilizan de manera natural la sustracción: más bien tienden a emplear estrategias de «llegar a» o de adición, y si usan la sustracción rápidamente pasan a otras estrategias».

Maza (1991, p. 37) también afirma que existe la creencia generalizada entre los profesores de que la resta reiterada es el procedimiento más eficaz y el más válido de cara a la introducción posterior del algoritmo.

Las estrategias utilizadas por las estudiantes en esta actividad fueron:

3.1.1. Estrategia gráfica - multiplicativa

Esta estrategia de solución está basada en la representación gráfica de la situación planteada y les permitió a las estudiantes iniciar un plan que las llevó a traducir lo entendido en procedimientos algorítmicos

A continuación me permito relatar en las siguientes líneas lo que hizo Laura con una de sus compañeras para resolver el problema planteado en la Actividad No. 1 el 12 de octubre de 2004:

> Laura: Dibujé una bolsa y empecé a colocar los caramelos.
> Profesora: ¿Entonces, Laura dibujó una bolsa, ó 15 bolsas?
> Laura y el grupo: 15 bolsas.
> Profesora: Entonces has las quince bolsas…
> Laura: Después metí de a un chocolate.
> Profesora: ¿Y qué pasó cuando metiste de a un chocolate?
> Laura: Estaba multiplicando.
> Profesora: ¿Qué estabas multiplicando?
> Laura: Estaba multiplicando 15 por 1, 15 por 2 y así lo hice, cuando multipliqué por 8 me dio 120.

En ese momento intervine para persuadir a Laura a que contara todo el proceso pues durante la actividad me mantuve al tanto de sus razonamientos y antes de multiplicar ella realizó un conteo para averiguar los chocolates que ya había repartido, pero no lo expresó en el relato anterior, entonces después de esto ella dijo:

> Laura: Yo tenía tres chocolates en cada bolsa y empecé a contar: 1, 2, 3, 4, 5, 6 , …
> Profesora: Y después.
> Laura: Me di cuenta que podía sumar 15 veces el 3.
> Profesora: ¿Cuánto te dio la suma?

> Laura: No sumé, multipliqué 3 por 15, coloqué otro chocolate y luego multipliqué por cuatro.
> Profesora: Multiplicó por cuatro y le dio sesenta.
> Laura: Fui colocando más chocolates y multiplicando.
> Profesora: Hasta llegar a cuánto.
> Laura: A ocho.
> Profesora: Cuando Laurita llegó a ocho le dio…
> Laura: 120.
> Compañera: Pero ella podía sumar sesenta más sesenta y le daba ciento veinte porque 4 + 4 le daba 8.

Ahora bien, teniendo en cuenta los procedimientos elaborados por Laura, podemos ver como pasó de una estrategia a otra en búsqueda de la solución: Inicialmente, modeló la situación a través de una representación pictórica que le fue de gran ayuda ya que le generó preguntas que la llevaron a construir un camino a la solución.

Posteriormente, repartió los 120 chocolates en cada bolsa, cuando llevaba tres chocolates en cada bolsa necesitó saber cuántos había repartido, por lo que empezó un conteo que abandonó rápidamente para hacer uso de las operaciones como adición y multiplicación para responderse la pregunta.

Así, continuó repartiendo chocolates hasta que se dio cuenta que multiplicando era suficiente para encontrar la solución al problema y, por ende, se centró en esta estrategia hasta hallar la solución. Finalmente, prueba con varios números, uno de ellos al multiplicarlo por 15 le dio 120.

Representar gráficamente la situación a resolver es una de las estrategias que frecuentemente recomiendo a mis estudiantes pues, al igual que Santos, considero que dentro de los métodos y estrategias de solución para la solución de un problema se encuentra el de dibujar una figura o diagrama cuando sea posible ya que una representación gráfica puede ser útil en la identificación de componentes importantes para el problema (1997, p. 54).
Además, en la fase de comprensión del problema, el pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos

importantes del problema sino que también puede sugerir alguna estrategia para resolverlo (Santos, 1997, p. 54).

Finalmente, la estrategia utilizada por Laura explicita claramente lo dicho por Santos ya que su representación del problema le aportó significativamente a la búsqueda del camino que le permitiría solucionar la situación.

3.1.2. Estrategia de ensayo y error – Multiplicativa

En esta estrategia las estudiantes buscaron la cantidad de chocolates que debían colocar en las 15 bolsas ensayando con diferentes cantidades. Multiplicaron la cantidad a ensayar y controlaron el resultado de las operaciones con la cantidad de chocolates que se debían empacar.

En seguida la exposición de los razonamientos utilizados para encontrar la solución presentada por Tatiana y su compañera al curso el 12 de octubre de 2004.

> Tatiana: Primero empezamos a hacer 15 por 10 […]
> Profesora: ¿Por qué empezar multiplicando 15 x 10?
> Tatiana: Ah, pues porque sí.
> Compañera: Entonces empezamos a mirar si 10 caramelos cabían en las 15 bolsitas.
> Profesora: ¿Cómo sabías que para encontrar si 10 caramelos cabían en las 15 bolsitas, había que multiplicar?
> Tatiana: Pues multiplicamos y llegamos a hasta 16.
> Compañera: Pero, 15 x 10 es igual a 150.
> Profesora: ¿Qué significa este 150?
> Compañera: Pues que se pasa de la raya.
> Tatiana: Se nos pasa.
> Compañera: Luego multiplicamos el 15 hasta el 19.
> Profesora: Siguieron aumentando.
> Compañera: Después decidimos hacer las 15 bolsitas.
> Tatiana: Empezamos a poner uno en cada bolsita, y como daba mucho, hicimos 15 x 8 y nos dio 120.

Tatiana y su compañera buscaron desde el inicio de la solución del problema un número que al multiplicarlo por las 15 bolsas, “no se pasara de la raya”, es decir, no se pasara de los 120 chocolates que se debían empacar; ese fue el análisis utilizado para realizar la siguiente hipótesis: “Entonces empezamos a mirar si 10 caramelos cabían en las 15 bolsitas”. Y fue así como empezaron a probar con diferentes números hasta encontrar el factor que les dio como producto el 120.

Implícitamente, en esta estrategia las estudiantes realizaron un reparto cada vez que multiplicaban el 15 por un número estaban asignando esa cantidad de chocolates en cada uno de los paquetes, situación que se percibe cuando deciden hacer las 15 bolsas, quizás para ser más conscientes de lo que estaban haciendo. Además, al darse cuenta de que realizarían procesos más largos si continuaban con la estrategia gráfica, buscaron otro tipo de estrategias que hicieran más corto el proceso.

Maza (1991, p. 38) comenta que este tipo de problemas son resueltos por niños de 7 años, por medio del recuento unitario tanto a través de la estrategia de reparto como a través de la formulación de conjeturas, es decir por ensayo y error con distintos agrupamientos.

Rubiela, también utilizó esta estrategia para resolver el problema a partir de los siguientes razonamientos:

> Rubiela: Primero, pensé que era un número muy grande y exageré multiplicando 15 por 400 y me dio 6.000.
> Profesora: ¿Por qué empezar a multiplicar 15 por algo?
> Rubiela: Para saber si al multiplicarlo me da ciento veinte.
> Profesora: Entonces no te sirvió.
> Rubiela: Entonces tuve que quitarle un cero y me daba 600. Que tampoco me sirvió. Entonces multipliqué por diez que abreviadamente da 150, y también me pasaba, después puse 15 x 9 que me dio 135, entonces puse un número menos, 15 x 8 y me dio 120.

Rubiela desde el momento que inició el proceso de solución del problema, pensó en buscar un número que multiplicado por 15 le diera 120, convencida que con este número resolvería la situación. Esto se reflejó en sus primeras palabras: “Primero, pensé que era un número muy grande y exageré multiplicando 15 por 400 y me dio 6.000". Después continuó ensayando razonadamente hasta encontrar la respuesta al problema.

En cuanto al razonamiento de Marcela y su compañera de trabajo, considero que aunque haya, inicialmente, planteado una división para resolver el problema, su estrategia debe ser incluida ya que, finalmente, utilizó la relación que existe entre la división y la multiplicación para encontrar la solución. Veamos:

> Marcela: Empezamos a dividir 15 por 120.
> Profesora: ¿Por qué dividir?
> Marcela: Porque estábamos buscando un número que multiplicado por 15 me diera 120.
> Profesora: Entonces se escribe 15 por un número que no conocemos…
> Marcela: Yo escribí 15 dividido en 120, y comencé a multiplicar 15 x 1 igual 15, 15 x 2 igual 30 hasta que llegué a 15 x 8 que me dio 120.
> Compañera: Entonces son 8 caramelos, porque 15 x 8 es 120, entonces 120 dividido en 15 es 8.
> Marcela: Ah sí, es 120 dividido en 15 (corrige en el tablero).
> Profesora: ¿Por qué sabías que tenías que dividir?
> Compañera: Porque Marcela dijo, además tú nos enseñaste el año pasado.
> Profesora: Pero, ¿por que dividir en el problema?
> Compañera: Porque dice que hay que empacar …
> Marcela: Porque el problema dice que hay que meter una cantidad de chocolates en cada bolsa.

Aquí Marcela abordó el problema con una división, aunque no sabía expresar correctamente cuál era la cantidad que se iba a dividir ni en cuántas partes; ella, sin embargo, resolvió la división a partir de una multiplicación buscando un número que al multiplicarlo por el más pequeño, el producto fuera el más grande y al final corrigió su error en la escritura de la operación. Al igual que las otras compañeras, Marcela ensayó con diferentes números hasta encontrar la solución.

Finalmente, la mayoría de docentes sabemos, gracias a su experiencia, que la estrategia de ensayo y error es una de las más utilizadas por los estudiantes, y cuando el estudiante logra sistematizar claramente los procesos que realiza y cada vez trabajar más razonadamente, esta estrategia crea el camino que lo conduce a la solución.

3.1.3. Estrategia de Reparto – Sustracción

Rubiela desarrolló otra estrategia buscando explicar a su compañera el problema pues la solución dada anteriormente no fue clara para ella. Por ende, decidió realizar inicialmente un reparto y después restar y así explicar la situación de otra manera. Los razonamientos elaborados por Rubiela son los siguientes:

> Rubiela: Dibujé 15 bolsas y tengo 120 chocolates, le reparto un chocolate en cada bolsa (resta en tablero 120 -15).
> Rubiela: Resté 15 porque ya coloqué 15 en las bolsas.
> Profesora: ¿Entienden?
> La mayoría dice que no y pedí a Rubiela ser más clara con sus razonamientos.
> Rubiela: Porque tengo 120 chocolates para repartirlos en 15 bolsas, entonces ya cogí 15 chocolates de ahí (señala una bolsa con 120 chocolates) entonces no van a quedar 120, van a quedar menos.
> Compañera: Eso es como de una profesora de sexto o séptimo (refiriéndose a la explicación de su compañera)
> Profesora: Entonces ¿cuántos caramelos le quedaron?
> Todas: 105
> Rubiela: Ahora voy a poner otro y vuelvo a restar 105 – 15.
> Marcela: ¿Joha, cómo se llama eso?
> Profesora: Eso se llama hacer restas sucesivas, cuando restas el mismo número varias veces. ¿En qué momento dejará Rubiela de restar?
> Compañera: Cuando tenga ocho palitos en las bolsas.
> Marcela: Cuando no tenga más chocolates para repartir.
> Profesora: Ahora 90 – 15 da, 75 y menos 15 nos da 60.
> Rubiela: Entonces ahí yo dije menos 30 y agregué de a dos chocolates en cada bolsa.
> Profesora: No seguiste restando de a 15 sino treinta.
> Rubiela: Vuelvo a poner dos chocolates y quito otros treinta y me da cero. Entonces ya no tengo más chocolates por repartir.
> Profesora: ¿Cómo supiste que eran ocho chocolates?
> Rubiela: Porque conté los chocolates en cada bolsa.

La estrategia usada por Rubiela para explicar a su compañera un camino de solución del problema, se movía entre la representación gráfica de la situación y la representación simbólica de los repartos realizados. A diferencia de las otras estrategias, por ejemplo la de Laura, en la que hizo la repartición, ella se preguntó cuántos chocolates había repartido; Rubiela se preguntó cuántos chocolates le quedaban para repartir. La pregunta que se hizo Laura, la llevó a sumar o multiplicar; y la pregunta de Rubiela la llevó a realizar una sustracción.

Esta estrategia captó toda la atención de sus compañeras quienes se mostraron interesadas por no perderse ni un paso de la explicación y realizaron preguntas acerca de la estrategia. Además, creo conveniente resaltar lo expresado por una de sus compañeras con respecto a su estrategia:

> "Eso es como de una profesora de sexto o séptimo [...] uy, no, eso es como para estudiantes de once" (Actividad 1, Octubre 12 de 2004).

Además, Marcela se mostró intrigada por el procedimiento realizado a través de la resta y me preguntó "¿cómo se llama eso?" (Actividad 1, Octubre 12 de 2004).

Referente a la estrategia usada por Rubiela, considero importante recordar las palabras de Olivier y sus colegas, citados por Kammi (1995, p. 97), a cerca de la estrategia usada por Rubiela: "Encontramos que muy pocos niños utilizan de manera natural la sustracción: más bien tienen a emplear estrategias de «llegar a» o de adición, y si usan la sustracción rápidamente pasan a otra estrategia".

Finalmente, todo el análisis realizado a los razonamientos y estrategias usadas por mis estudiantes al iniciar la temática de división, me lleva a re-pensar todo lo que nuestros estudiantes pueden hacer si les permitiéramos pensar y no como la mayoría de veces hacemos, pensar por ellos.

Aquellos razonamientos son una muestra de que los estudiantes pueden crear procedimientos que nosotros como docentes no tenemos en cuenta ya que equívocamente creemos que con dar el algoritmo, ayudarle a memorizarlo y aplicarlo en la solución de problemas el estudiante podrá caminar solo por estos procesos. Considero, pues, que el estudiante debe ir paso a paso, construyendo con la comunidad que lo rodea su conocimiento.

Además, estas estrategias descritas anteriormente, nos muestran la forma como un problema de división puede ser resuelto a través de diferentes caminos o estrategias de razonamiento, siendo una de ellas el conteo o el uso de las cuatro operaciones básicas.

Reiterando, es así como un problema que llamamos de división se puede resolver a través de sumas, restas o multiplicaciones. Deseo recalcar este aspecto ya que siempre presentamos los problemas «categorizados», es decir, los agrupamos según la operación, en lugar de brindarle al estudiante la oportunidad de que resuelva problemas utilizando la estrategia que él considere.

De igual forma, vale la pena resaltar la metodología de trabajo usada en esta actividad, como el lector pudo observar en los párrafos anteriores, se mostraron los diferentes caminos o estrategias de solución para *un* problema: las estudiantes razonaron paso a paso, creando planes de acción para alcanzar la meta planteada inicialmente con una de sus compañeras, realizando un intercambio de ideas, donde ningún procedimiento de cálculo fue impuesto.

Además, el hacer conocer a todo el grupo lo realizado por cada pareja, favoreció sus procesos de pensamiento, permitió que conocieran los caminos que no hicieron parte de sus razonamientos y aprendieron de sus pares.

En los siguientes numerales quiero describir las categorías de análisis que surgieron a la luz de los datos y que son resultado de las posteriores actividades a la anteriormente comentada.

3.2. BUSCANDO LA OPERACIÓN

Buscando la operación es una de las estrategias más usadas por los estudiantes de primaria en muchas instituciones del país pues en los foros, seminarios y congresos organizados por las universidades nacionales, a los cuales he tenido la oportunidad de asistir, se han planteado talleres alrededor de la enseñanza de la aritmética o de la matemática en primaria, y uno de los comentarios que la mayoría de los docentes hace es el siguiente: "Los estudiantes siempre me preguntan si deben sumar, restar, multiplicar o dividir" cuando van a buscar la solución a un problema, reduciendo la solución del problema a esta búsqueda.

Para Maza (1991, p. 41) también uno de los principales problemas que se presentan cuando el escolar resuelve problemas aritméticos, consiste en que elija una operación inadecuada. Problemas que son resueltos por la división son interpretados por el estudiante como resolubles a través de una multiplicación, y viceversa.

Por los antecedentes anteriores es que planteo esta categoría ya que fue una de las estrategias de solución en los problemas de aritmética que primó entre mis estudiantes.

A continuación presento una adaptación del modelo de resolución de problemas de Polya, a la resolución de problemas aritméticos –este planteamiento es mostrado por Puig & Cerdán (1995, p. 25). Con esta exposición pretendo mostrar que el proceso de solución de un problema aritmético no se puede reducir a resolver solamente una operación pues hay procesos que el estudiante debe desarrollar y, creo que de alguna manera, al ser saltados o no tenidos en cuenta, están permitiendo que la solución de un problema aritmético se reduzca a esta estrategia (buscar una operación) y no hagan al estudiante pensar y así reconocer la verdadera esencia de las operaciones. Dichas fases de la resolución de problemas son:

1. Lectura
2. Comprensión
3. Traducción
4. Cálculo
5. Solución
6. Revisión. Comprobación.

La fase de *lectura* es el primero de los pasos en la solución de un problema aritmético, aquí debemos considerar que los estudiantes que se enfrentan a estos problemas están iniciando también el aprendizaje de la lectura, entonces esta fase no solo es básica para este proceso sino que hace parte del proceso de lecto-escritura desarrollado en cada una de las instituciones y al cual desde todas las áreas debemos apoyar.

Según Puig & Cerdán (1995, p. 26), la complejidad sintáctica del problema y la familiaridad con las palabras que aparecen en los enunciados puede ser una de las causas que imposibiliten la comprensión y, como consecuencia, la resolución del problema.

Desde mi experiencia corroboro lo que el colega dice pues después de cuatro años de trabajo con estudiantes de 1° a 5° de primaria, he podido observar que una de las dificultades en la comprensión del problema planteado radica en las palabras desconocidas para los estudiantes que aparecen en el texto, incluso, palabras que para nosotros son tan comunes, para ellos que están iniciando este proceso de ampliación de su vocabulario, no lo son. Por ejemplo, en una de las actividades realizadas Laura dice no entender el siguiente problema (Actividad No. 2, octubre 19 de 2004):

Una barra de chocolate se debe dividir en 6 pedazos iguales. ¿Cuántos cortes debe hacer? Si la barra de chocolate pesa 198 miligramos, ¿cuántos miligramos pesa cada pedazo?

Al preguntarle por lo que no entiende del problema ella dice:

> "¿Qué es miligramo?" (Actividad 2, octubre 19 de 2004).

Después de sostener un diálogo, pudo comprender que era una unidad de medida que indicaba cuanto pesaba la chocolatina y que al ser dividida en seis partes iguales, su peso también estaría dado en miligramos.

Ahora, la *lectura* y la *comprensió*n están ligadas y difícilmente se pueden separar, sin embargo, Puig & Cerdán (1995, p. 26), reconocen la comprensión como el proceso en el que el estudiante transforma el texto usando los «esquemas o modelos conceptuales que le parecen pertinentes con el fin de dotarlo de sentido»

Seguidamente, la fase de *traducción* es la etapa más crucial en la resolución de un problema aritmético, y consiste en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente. Aquí es donde [los docentes] hacemos ver la solución de problemas como algo mecánico en donde solo hay que aplicar una operación. Pero esto no debería ser así, pues el estudiante debe decidir cuál información de la presente debe tomar, cómo la debe organizar, qué operaciones debe hacer primero, etc.

Además Puig & Cerdán (1995, p. 27) afirman que esta fase es percibida por los alumnos casi de forma explícita cuando éstos identifican los problemas con la decisión que han de tomar para resolverlos y los clasifican en consecuencia: «es de sumar», «es de restar».

Finalmente, la fase de *cálculo* es donde el estudiante demuestra sus habilidades algorítmicas; se ha llamado así pues es la tarea que suele predominar en esta fase. Pero considero que no es la única pues si el estudiante decide a partir de la transformación de los datos en una representación gráfica realizar un conteo, o a través de una lista buscar la solución, esta será la tarea que predomine.

De igual forma, soy consciente de que los problemas que se presentan en el aula, al nivel de primaria en la mayoría de los casos son problemas que se resuelven con alguna de las cuatro operaciones. Pero la problemática es: si no sé cuál operación realizar, ¿qué hago para averiguarlo?, ¿será que un gráfico me ayuda?, ¿será que recordar algún problema que se parezca me ayuda?

Para llevar a cabo la fase de traducción, que finalmente es donde se ejecuta el plan, en este caso la operación, las estudiantes descartaron entre las cuatro operaciones conocidas teniendo en cuenta el tamaño del resultado y las palabras claves.

3.2.1. Por el tamaño del resultado

Dentro de las estudiantes que utilizaba como estrategia *Por el tamaño del resultado*, encontré que Marcela al solucionar el siguiente problema, dirigió sus razonamientos hacia la búsqueda de la operación que resolviera el problema.

Camila tiene una empresa que confecciona camisas y por temporada navideña debe entregar el siguiente pedido

Talla	Cantidad
8	348
10	463
12	3.894

Si debe empacar 18 camisas en una caja ¿Cuántas cajas necesita para enviar el pedido?

Al preguntarle a Marcela por la forma como iba a resolver el problema respondió:

> Profesora:¿Qué vas a hacer?
> Marcela: ¿A dividir? […]
> Profesora: ¿Por qué vas a dividir?
> Marcela: Porque… no sé.
> Profesora: Entonces ¿por que no sumar, o restar o multiplicar?
> Marcela: Por que si resto, no me va a dar lo que necesito, sino me va a dar menos.
>
> (Entrevista, diciembre 2004)

Marcela inicialmente no pudo explicar por qué iba a usar la división para resolver el problema, pero al preguntarle por qué no era posible usar una de las otras tres operaciones básicas; argumentó, comparando el resultado, que creía era la respuesta con el posible resultado que obtendría si restaba los números que estaba pensando. Es así como decidió dividir en lugar de restar.

Al continuar con el diálogo y preguntarle a Marcela, de qué forma le explicaría a una compañera la operación que debe utilizar para resolver este problema respondió:

> Marcela: Pues le diría que si sumamos, le daría más de la cantidad, si resto. Umm, me daría ...
> Profesora: ¿Qué pasa con la resta?
> Marcela: Me da menos, y si multiplico me da más.
> (Entrevista, diciembre de 2004)

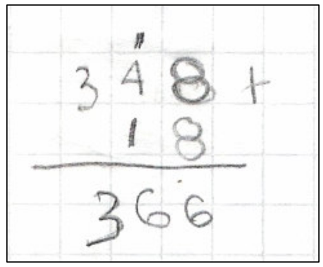
Esto muestra que Marcela continuaba comparando los resultados posibles al operar los números que ella decidió dividir con el posible resultado que resolvería la pregunta.

Asimismo, Laura desde el inicio de la solución del problema, cuando estaba en la etapa de traducción, mostró claramente que ésta era la estrategia que le permitiría decidir cuál era la operación que iba a realizar. A continuación expongo los razonamientos de Laura:

> Profesora: ¿Qué estás pensando para resolver el problema?
> Laura: En sumar la cantidad de la ropa con las 18 cajas.
> Profesora: Y ¿por qué crees que hay que sumar estos cuatro datos?
> Laura: Porque si los restamos, nos da una cosa menor.
> Profesora: ¿Qué irías a restar?
> Laura: Esta cantidad con esta cantidad (señala la cantidad de camisas de talla 8 y la cantidad que representa la talla). Si multiplicamos, nos da una cantidad mayor y si dividimos nos da una cantidad regular.
> Profesora: ¿Para ti qué es regular?
> Laura: Que no nos da a lo que estamos llegando.
> (Entrevista, Diciembre 2004)

Se puede observar que para Laura el resultado de la resta de dos números era siempre menor, el resultado de la multiplicación era siempre mayor y para el resultado de la división decía que daba una cantidad "regular". Al parecer no encontraba otra palabra diferente de "menor" que ya había utilizado para mostrar como era el resultado de la división.

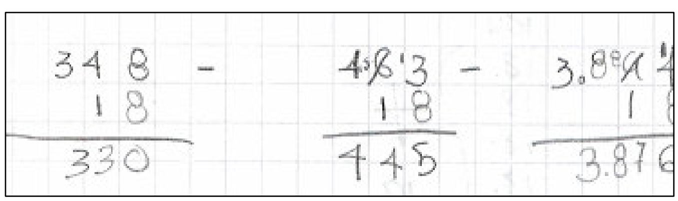
A pesar de que Laura realizó el anterior análisis con las operaciones, tomó una decisión incorrecta, mostrando con ellos que no entendió, o posiblemente no pudo interpretar, correctamente la información pues inició la solución del problema realizando una adición:



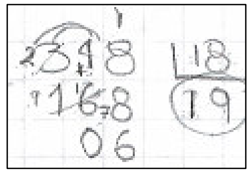
Después de pedirle que analizara el resultado de la operación, y llevarla a que revisara tanto los datos como la posibilidad de su respuesta, Laura expresó lo siguiente:

> Profesora: ¿Cuántas camisas talla 8 van a enviar?
> Laura: 348
> Profesora: Según tu solución, ¿cuántas cajas necesitas para enviar esas camisas?
> Laura: 366
> Profesora: Y ¿cuántas camisas vas a meter en cada caja?
> Laura: 18
> Profesora: ¿Ves que esto sea posible?
> Laura: No
> Profesora: ¿Por qué no?
> Laura: Porque son más cajas de las que se necesitan.

Al observar que la suma de los datos no satisfizo la pregunta, decidió realizar una resta, ya que reconocía que el resultado de la operación debía ser un número menor, entonces realiza las siguientes restas:



Nuevamente, le pedí revisar los resultados de las operaciones con la pregunta del problema, pero observó que la respuesta era menor que la de la suma pero que igualmente seguían siendo muchas cajas; indicando, así, que con la división podría encontrar un número más pequeño. Entonces realizó la siguiente división:



A pesar de que Laura intentaba analizar la pregunta y lo posibles resultados de la operación, fue necesario ensayar con varias operaciones hasta lograr una respuesta razonable. Asumo, que decidió no utilizar la multiplicación, ya que ésta también aumenta las cantidades en lugar de disminuirlas que era lo que estaba buscando, un resultado menor en la operación.

Al preguntarle también a Laura la forma como explicaría a una compañera la solución del problema respondió:

> "Que aquí no se puede hacer una suma porque si cojo estos dos me daría mucho más de lo que vamos a empacar, y si resto me da menos cajas…" (Entrevista, diciembre de 2004).

Asimismo, al pedirle a Tatiana que explicara a una compañera el por qué dividiendo resolvería el problema respondió:

> Profesora: ¿Por qué tengo que dividir para resolver el problema?
> Tatiana: Pues sumar no porque yo lo que necesito saber es cuántas cajas, no esto... subirle más cajas
> Profesora: Te da más y no necesitamos toda esa cantidad de cajas, ¿tú le dirías a la compañerita que tiene que dividir?
> Tatiana: Dividir o restar.
> Profesora: ¿Por qué tienes que dividir o restar?
> Tatiana: Porque yo lo que necesito saber es un número menos, no un número más.

Aquí Tatiana también mostró la forma como iba comparando los resultados de las posibles operaciones que efectuaría con los datos dados en el problema. Para ella, al igual que sus otras compañeras, si se sumaban o multiplicaban dos números, el resultado era mayor que ellos, y si se restaba o dividía el resultado era menor.

Para Maza (1991, p. 41) existen factores que parecen tener suficiente peso en la decisión que toman estudiantes y que, además, han influido de manera independiente en la elección de la operación adecuada para resolver un problema. Dentro de estos factores se encuentran los modelos intuitivos que se tienen de cada operación. Estos modelos han permitido al estudiante generar creencias orientadas hacia la comparación entre el resultado de una operación aritmética y los números a los que se efectúa esta operación. Creencia que ha sido fundamentada por el desarrollo ejercicios algorítmicos con las cuatro operaciones básicas por parte del estudiantes.

Maza (1991, p. 43) plantea tres posibles creencias:

1. La multiplicación da un resultado mayor que cualquiera de los dos factores.
2. La división produce un número (el cociente) menor que el dividendo.
3. La división sólo es posible si el dividendo es mayor que el divisor.

Situaciones que no fueron ajenas a mis estudiantes pues algunas de ellas crearon la misma teoría alrededor de los resultados que se obtienen con cada una de las operaciones básicas utilizando esta teoría. o creencia como lo denomina Maza. para decidir cual operación utilizar en la solución de algún problema. Posiblemente estas creencias han sido infundadas por nosotros los docentes al querer ayudar a nuestros estudiantes a resolver problemas.

De alguna manera, podría afirmar que estas creencias elaboradas por las estudiantes generan una buena estrategia que le permite elegir la operación adecuada para resolver la pregunta. Claro está, que si la estudiante no ha comprendido el problema a cabalidad y mucho menos la pregunta, tampoco podrá prever el tamaño de la respuesta con respecto a las cantidades dadas.

Además, se debe tener en cuenta que estas creencias solo funcionan si las operaciones se efectúan en los números naturales pues, según Maza (1991, p.42), se ha mostrado que cuando el estudiante se enfrenta a problemas similares con números decimales, aplica estas creencias, ocasionando confusiones y errores.

El autor en mención muestra también un problema presentado a estudiantes de 12 a 15 años donde la respuesta más común resultaba ser la división 1,20/0,22. El problema es el siguiente:

> Encontrar el coste de 0.22 galones de petróleo si un galón cuesta1,20 libras.

Este resultado se contrasta con la obtenida del siguiente problema semejante con naturales: "Encontrar el coste de 5 galones de petróleo si un galón cuesta 2 libras", en donde la respuesta la correcta sería que los cinco galones costarían 5 x 2 libras.

La explicación dada por Maza a estos resultados es que "el alumno observaba, acertadamente, que el coste de 0,22 galones debía ser menor que el de un galón. Si el resultado había de ser menor, la operación adecuada sería la división, porque la división «hace menor los números»".

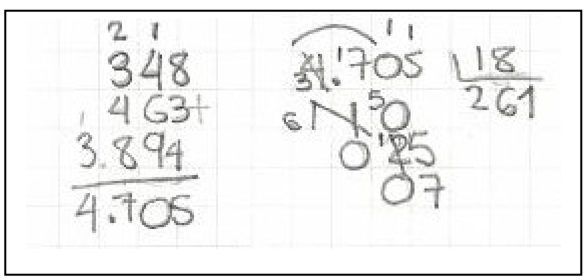
Finalmente, es así como estas creencias pueden generar dificultades en el futuro. Siendo importante que al abordar las operaciones en otros conjuntos numéricos se hace necesario mostrar al estudiante qué relaciones existen entre estos números y el resultado de las operaciones básicas. Y más aún, a medida que el estudiante va creando nuevos conocimientos hacerle caer en cuenta de que estas relaciones funcionan en los números naturales.

3.2.2. PALABRAS CLAVE

Desde los primeros grados de escolaridad la estrategia, *Palabras clave,* es usada por los estudiantes para encontrar la operación que resuelve el problema, por lo que palabras como "comprar", "agregar", "reunir", entre otras se relacionan con la suma; "quitar", "vender", "regalar" con la resta; "duplicar", "repetir", "reiterar", con la multiplicación; y, "repartir" con la división. Estas palabras se denominan "Palabras Clave" y de alguna manera, al menos parcialmente, determinan la elección de la operación o influyen en esta elección.

Rubiela relaciona la división con la palabra repartir,

> Profesora: ¿Cómo lo resolverías?
> Rubiela: Primero, sumo todo esto (indica en el cuadro la cantidad de camisas) para saber el total de las camisas; después como tengo que repartirlas en partes iguales, entonces cojo el total y lo divido en 18.



De esta manera Rubiela clarificó que si debía repartir una cantidad en partes iguales tenía, entonces, que dividir y para encontrar un total debía sumar. Es decir, Rubiela logró establecer conexiones entre las acciones con las operaciones.

Según Puig & Cerdán (1995, p. 116), en el proceso de traducción necesario para la resolución de un problema aritmético, su comprensión y la posibilidad de que se realice en un sujeto individual depende, en primer lugar, de la comprensión que el sujeto tenga de los lenguajes entre los que se lleva a cabo la traducción, esto es, el lenguaje vernáculo[11] y el lenguaje aritmético. En segundo lugar, depende de la comprensión de las correspondencias que existen entre estos dos lenguajes.

También afirma que para algunos investigadores las correspondencias entre ambos lenguajes se establecen fundamentalmente por medio de las palabras clave. Imaginando, por tanto, un proceso de traducción *secuencial* en el que el sujeto decide la operación que tiene que realizar en función del significado que atribuye a la palabra clave con que se encuentra al recorrer el enunciado.

Para Puig y Cerdán (1995, p. 94), las palabras clave constituyen un conjunto heterogéneo de palabras que podemos dividir en tres grupos:

1. Palabras propias de la terminología matemática y, por tanto, con significado preciso en el contexto matemático (añadir, doblar, substraer, dividir, repartir…).

2. Palabras tales como conectivas, verbos, etc., que no son propias de la terminología matemáticas, pero cuyo significado en el contexto del problema suele ser suficiente para decidir la operación que hay que realizar para resolver el problema.

3. Palabras –o grupos de palabras– que expresan relaciones. Poner ejemplos como en el primero

Igualmente, la primera actividad en la que Marcela y su compañera explicaron la solución del problema planteado y en el que decidieron dividir, justificaron la elección de la operación de la siguiente forma:

[11] Según el diccionario de la RAE, vernáculo significa dicho especialmente de idioma o lengua: doméstico, nativo, de nuestra casa o país.

> Profesora: Pero, ¿por qué dividir en el problema?
> Compañera: Porque dice que hay que empacar…
> Marcela: Porque el problema dice que hay que meter una cantidad de chocolates en cada bolsa.
>
> (Actividad 1, Octubre 12 de 2006)

En su explicación, Marcela y su compañera relacionaron la acción de empacar los chocolates en bolsas con repartir los chocolates, aproximándose así a la decisión de realizar una división para solucionar el problema.

Por último, estos autores, exponen una lista de los verbos que son palabras claves para la división, algunas de ellas son:

Bifucar	Diezmar	Fragmentar
Bisecar	Distribuir	Partir
Compartir	Dividir	Repartir
Desmenuzar	Dosificar	Romper
Despedazar	Fraccionar	Trocear

También es sabido que algunos de nosotros como docentes, influenciamos a los estudiantes en la creación de este tipo de estrategias pues somos nosotros quienes constantemente estamos relacionando una u otra palabra con las operaciones.

En sí, esta estrategia resulta ser muy útil cuando la palabra clave se toma dentro del texto en el sentido global y no local, pues en ocasiones al mirarla de manera local no funciona; por ejemplo, si se plantea a un estudiante la siguiente situación:

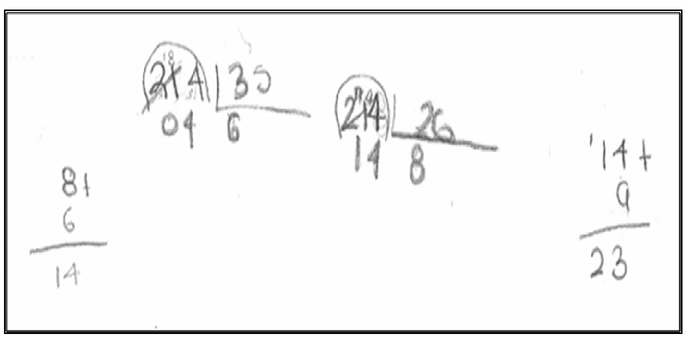
> La profesora de Carolina repartió a cada uno de sus alumnos 15 hojas, después volvió a repartir 3 hojas a cada uno ¿Cuántas hojas repartió la profesora?

Se debe tener en cuenta, en esta situación, que la palabra repartir se debe tomar de manera global en el texto, analizando que esta acción no implica que se debe dividir 15 en 3.

3.2.3 OPERA CON LOS DATOS

Las estudiantes tienen la tendencia de realizar algún tipo de operación u operaciones para resolver un problema dado, ya sea porque no entienden los datos del problema, porque no entienden la pregunta, porque sienten que deben escribir algo en la hoja y dar una respuesta, porque los últimos problemas que se han trabajado son de cierta operación, etc., todos estas razones –y otras– conducen al estudiante a tomar los datos dados en el problema y operarlos. Situación que no permaneció ajena a esta experiencia.

Laura soluciona el problema de la cantidad de buses que se necesitan para transportar a los estudiantes de un colegio realizando las siguientes operaciones:

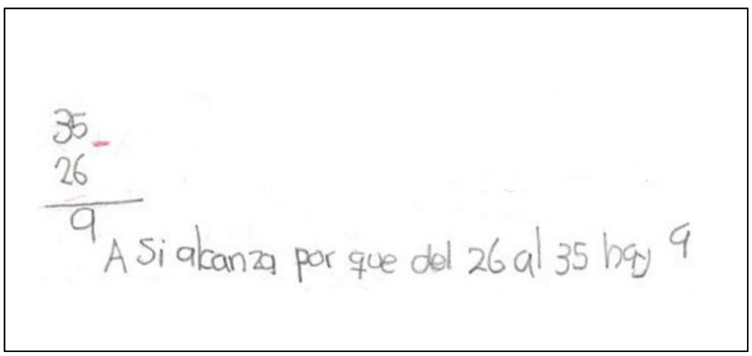


Lo primero que hizo Laura fue realizar las dos divisiones, en una tomó la cantidad de niños de la institución y los repartió en 35 que era la posición de la fila en la que se encontraba Javier; después, tomó los mismos 214 y los dividió en la posición en la que se encontraba Margarita; continuó sumando los cocientes e ignorando los residuos. Además, no mostró ninguna reflexión respecto a los resultados obtenidos en la división pues los sumó y, finalmente, al resultado anterior le adicionó 9, la cantidad de estudiantes que podían transportar cada buseta.

En este caso, al parecer Laura a través de algunas compañeras pudo obtener la posible respuesta al problema, puesto que algunas de las estudiantes dividieron

214 en 9 obteniendo como cociente 23 y residuo 9, y tomaban como respuesta el 23. De esta manera, Laura intentó llegar a este número a través de las diferentes operaciones observados anteriormente.
Es tal la importancia que las estudiantes le dan a la solución de los problemas a través de algoritmos que existiendo otro tipo de estrategias, posiblemente más sencillas, ellas insistieron en operar con los datos.

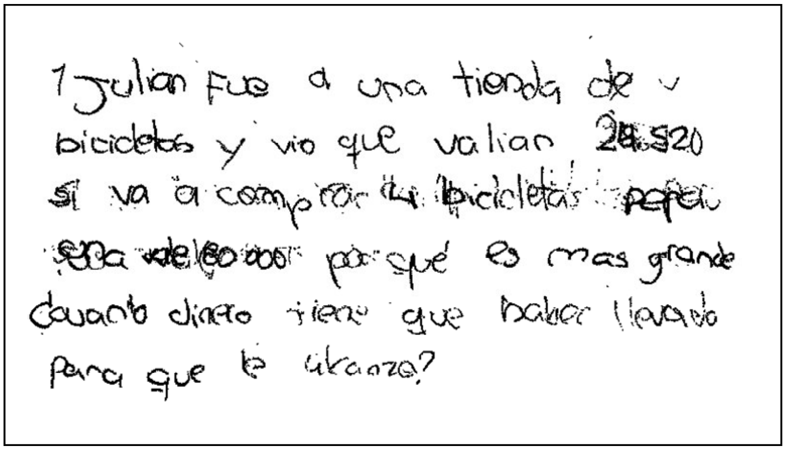
Para responder la pregunta relacionada al primer problema de la Actividad No. 2 en la que se interrogaba por la posibilidad de que Margarita y Julián se encontraran en la misma buseta si cada uno ocupa la posición 26 y 35 respectivamente en la fila para subirse a las busetas. Veamos lo que Marcela hizo:



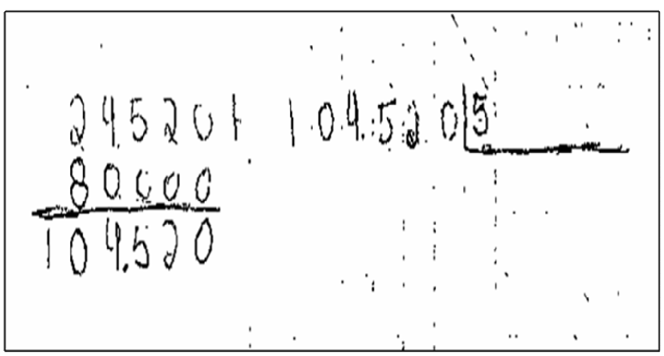
Ella realizó una sustracción que le permitió saber cuántas personas o puestos había entre Margarita y Julián, y comparó este resultado con la cantidad de estudiantes que cabían en una buseta. Lo anterior se reflejó en su respuesta: “si alcanza porque del 26 al 39 hay 9”, al ser igual estos resultados ella responde afirmativamente a la pregunta.

Rizo y Campistrous (1999, p. 6) relacionan esta estrategia de solución con la creencia de los estudiantes de que un problema siempre debe conducir a resolver operaciones y, además, aseguran que los estudiantes tienden a identificar los números del problema y operar con ellos de manera muy irreflexiva.

El siguiente problema fue elaborado por una de las estudiantes del curso en la actividad en la que se les pidió elaborar una carta donde se planteara un problema de división.


1 Julian fue a una tienda de bicicletas y vio que valian 24.520 si va a comprar 4 bicicletas pero esa vale 80.000 porqué es mas grande cuanto dinero tiene que haber llevado para que le alcanzo?

Como vemos, la estudiante no planteó un problema resoluble a través de una división ya que era necesario realizar una suma o una multiplicación y una suma. Pero Tatiana, a quien le correspondió resolver este problema, realizó las siguientes operaciones:

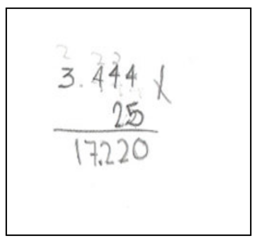


Posiblemente, Tatiana realizó estas operaciones, especialmente la división, porque al iniciar la actividad se había pedido que elaboraran problemas resolubles por división pero la estudiante, al parecer encasillan por esta indicación, no realizó un correcto análisis del problema que la llevara a darse cuenta de esto.

Esta misma situación se presenta constantemente en el aula de clase cuando el conocimiento se presenta organizado por temas, primero se amplia la numeración, después vienen las operaciones en el siguiente orden: adición, sustracción, multiplicación y división. Por lo que los problemas también llegan a ser vistos como problemas de aplicación de estas operaciones.

Por lo tanto, los estudiantes simplemente toman los datos del problema y aplican la operación que días antes han practicado, sin prestar mucha atención a la información dada en el problema.

En cuanto a la Actividad No. 3, en la que se pedía averiguar por las paradas realizadas por un auto, Laura realizó la siguiente operación:



Respecto a este tipo de soluciones, Maza (1991, p. 41) afirma, como se dijo anteriormente, que los problemas que son resueltos por la división son interpretados por el estudiante como resolubles a través de una multiplicación, y viceversa.

3.3. Y… ¿Cuál era la pregunta?

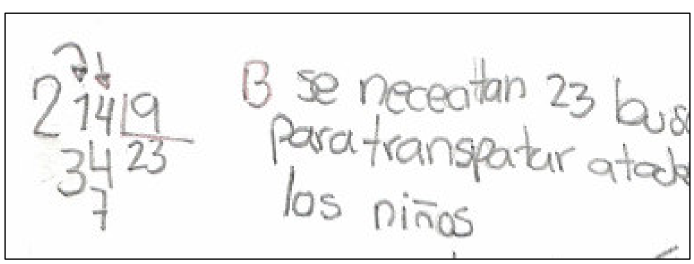
Como se observó en la categoría anterior los estudiantes buscan dar solución al problema a través de la ejecución de un algoritmo que es elegido tendiendo en cuenta los factores aquí mencionados, entre otros. Ahora bien, la ejecución de este algoritmo no es suficiente para dar por terminada la solución al problema, puesto que es necesario dar respuesta a la pregunta planteada en él.

Pero la respuesta no solo es un requisito más en la solución de un problema, es un mecanismo que permite al docente saber los conocimientos que el estudiante ha creado con respecto a los algoritmos y a las operaciones que está aprendiendo, pues la respuesta demuestra la conexión que el estudiante ha elaborado entre los datos, la pregunta y la operación, al igual que creatividad que pueda utilizar, para solucionar en un problema de tipo verbal resuelto por división con residuo diferente de cero.

El siguiente fue el primer problema planteado a las estudiantes en la Actividad No. 2:

> Los estudiantes de un colegio se forman para abordar el medio de trasporte que los llevará de paseo. Cada buseta puede transportar a 9 estudiantes. Margarita ocupa el lugar 26 de la fila y Javier el 35. ¿Se subirán Margarita y Javier al mismo carro? Si el total de alumnos es 214 ¿Cuántos carros se necesitan para transportar a todos los alumnos?

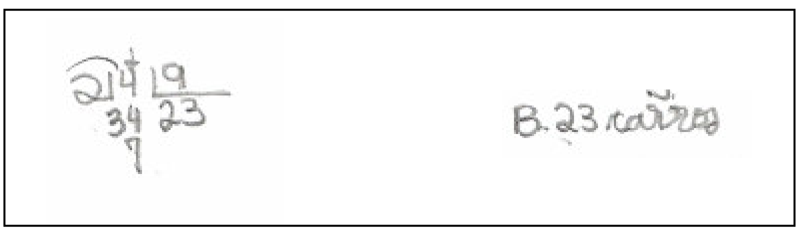
Como bien se había dicho, con este problema pretendía observar si las estudiantes interpretaban las cantidades que obtendrían después de realizar la operación que resolviera el problema, puesto que este pequeño análisis las llevaría a dar una respuesta acertada. Marcela resolvió y respondió de la siguiente forma:



Notamos que resuelve correctamente la operación, dividiendo 214 niños, que se necesita transportar, en 9, que es el tamaño de cada grupo que se debe formar, o la cantidad de estudiantes que puede transportar una buseta. Pero al responder la pregunta del problema, Marcela no tiene en cuenta todas las cantidades obtenidas en la operación.

Es decir, interpreta correctamente el cociente de la división, entendiendo que este número representa las busetas que se necesitan pero no tiene en cuenta que la división tiene residuo, y que este representa la cantidad de niños que no podrían subirse a ninguna buseta, pues para ella solo se necesitarían 23 busetas, dejando a 7 estudiantes sin la posibilidad de ir al paseo. En la respuesta de Marcela también se observa que ella cree haber incluido a todos los niños de la escuela, "olvidando" que realmente con 23 buses, solo se puede transportar a 207 niños.

Esto me llevó a analizar con mayor profundidad las razones por la cuales no podía responder correctamente la pregunta del problema y, además, a continuar observando las respuestas de sus otras compañeras. Es así como Tatiana también resuelve correctamente el problema, pero nuevamente no responde bien a la pregunta, pues "olvida" los 7 estudiantes que sobran:

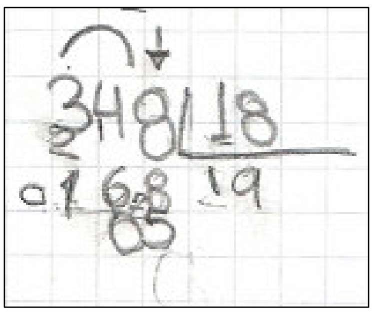


En estas respuestas, las estudiantes claramente no tuvieron en cuenta el 7 que estaba en el residuo que representaba a 7 estudiantes que tendrían que ir en otra buseta.

Posiblemente, las estudiantes dieron estas respuestas al problema por no salirse de los parámetros que seguramente han creado con otros problemas que pudieron, a su vez, haber delimitado la respuesta que siempre daban a un problema de división pues al preguntar por la respuesta de una división generalmente respondían con la cantidad que se encontraba en el cociente olvidando el residuo.

Además, en algunas ocasiones las estudiantes eran concientes de que las cantidades representaban magnitudes y que pertenecían al contexto de un problema, pero respondían incorrectamente porque no sabían cómo dar una respuesta diferente a la cantidad que se obtiene en cociente.

Lo anterior lo evidenció Marcela en la solución del problema planteado en la entrevista, en el que también al realizar la división se obtiene un residuo que debía ser tenido en cuenta para la respuesta; ella realizó la división y dio respuesta al problema de la siguiente manera:

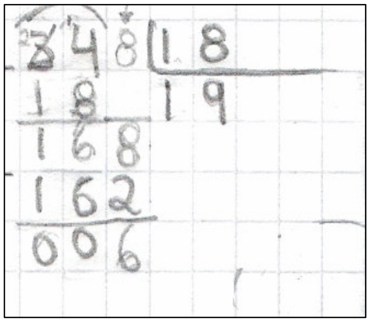


Profesora: Ya hiciste la operación, ¿cuál es la respuesta al problema?
Daniela: que necesita 19 cajas.

Como se observó, no tuvo en cuenta la respuesta, al cuestionarla acerca de si sobraron camisas y qué iba a hacer con ellas responde así:

Profesora: Y le quedan camisas.
Daniela: Si.
Profesora: ¿Cuántas?
Daniela: Cinco.
Profesora: Y esas camisas no las vas a enviar
Daniela: No
Profesora: Pero, ¿el pedido es de 348 camisas?
Daniela: Entonces, ¿dónde las meto?
Profesora: Es lo que yo te pregunto.
Daniela: En otra caja.
Profesora: Entonces, ¿cuántas cajas necesitas?
Daniela: Una
Profesora: Una más, ¿es decir?
Daniela: 20

Esta también se presentó en el análisis que Tatiana hizo a la respuesta del problema en la entrevista. Veamos:



Profesora: Vamos a dejar hasta ahí, entonces, resuélveme el problema para las camisas talla 8. ¿Cuál sería la solución del problema?
Tatiana: 19 cajas y me sobran 6 camisas.

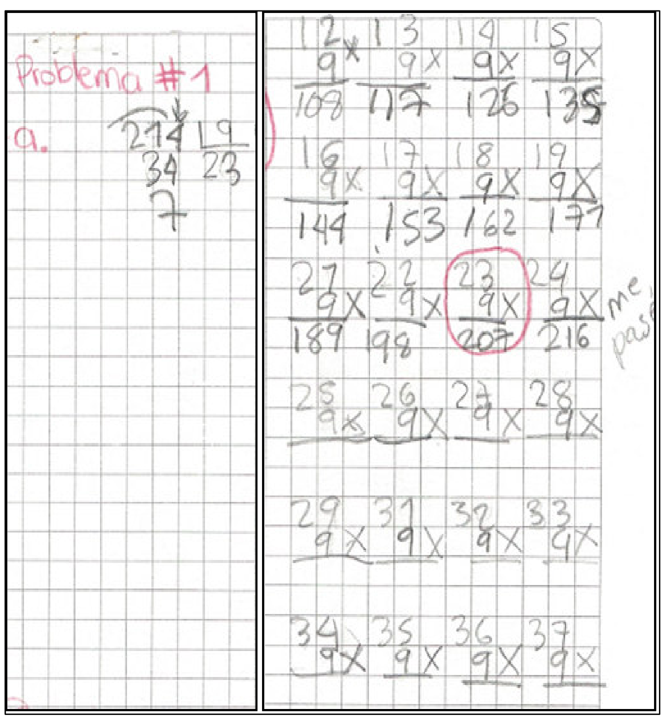
Tatiana respondió según lo que observó en la división, pero sin tener en cuenta el contexto del problema. Entonces, al preguntarle que haría con lo que sobra responde:

Profesora: Entonces, ¿no mandas esas seis camisas con el pedido?
Tatiana: Pues sí las tengo que mandar…
Profesora: ¿Pero cómo las mandas?
Tatiana: No sé.
Profesora: ¿No sabes cómo hacer para enviarlas?, y ¿qué tal la posibilidad de utilizar 20 cajas en vez de 19 y enviar en la última las seis camisas que sobran?
Tatiana: Pues,sí se puede… (No pareció muy convencida).
Profesora: Entonces, ¿cuál sería la respuesta del problema?
Tatiana: 20 cajas y en la última van seis, o también se puede reunir… O no sé si se pueda porque tengo empacadas las 348 me sobraron 6, pero ¿yo no puedo empacar talla 10 y las seis talla 8?
Profesora: El problema no dice que no lo puedas hacer, entonces solucionarías esa situación, mirando si te sobran camisas talla 10 y reuniéndolas para meterlas en una caja con las que sobran de la talla 8 (asienta con la cabeza).
Profesora: ¡Ah, muy bien! Entonces ahí si tocaría hacerlo para mirar si sobran camisas talla 10 y 12.
Tatiana: Y si sobran en la de 10 pues la pongo con las de talla 8, y si sobran en la de 12 pues las pongo en otra caja

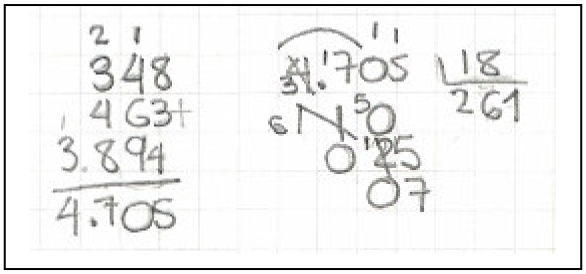
Es notorio que a los estudiantes, en general, les cuesta salirse de estas respuestas tan mecánicas pues al dar mayor importancia a la operación, la respuesta pasa a un segundo plano y no se le da el lugar que merece. Se puede también pensar, que las estudiantes buscan cumplir siempre con las condiciones dadas en el problema, es decir, en una caja deben ir 18 camisas, considerando así que no pueden ir mas o menos que la cantidad indicada.

En este sentido, creo que podríamos avanzar si presentamos a los estudiantes situaciones donde para responder no sea suficiente con tomar el dato que se obtuvo después de realizadas la operaciones, sino enfrentarlos a preguntas en las que deban comparar estos resultados con algunos datos en el problemas, con las operaciones que realizaron, o mejor aún, preguntas donde los cuestionemos frente a lo que creen podría pasar con los números.

Por su parte, Rubiela resuelve correctamente el problema pero aunque en su respuesta mostró que tuvo en cuenta el residuo, no dio una solución correcta a la situación.



En la entrevista, al contrario, Rubiela si dio una respuesta acertada:

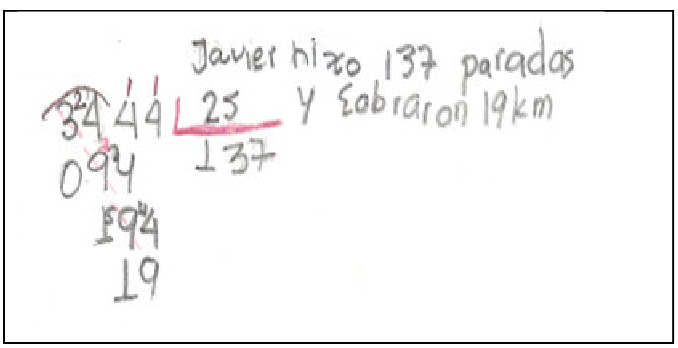


"Necesita 261 cajas y le sobran 7 camisas , entonces necesita 262 cajas por que estas (las que sobran) no las podemos dejar afuera".

La eventualidad de que las estudiantes no respondieran correctamente a la pregunta del problema, también se presentó en el primer problema de Actividad No. 3 en que se planteó la siguiente situación:

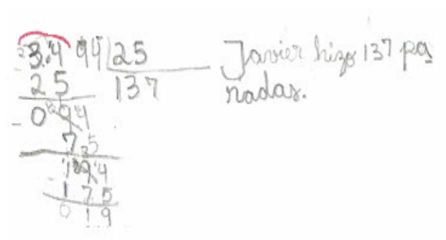
> Javier recorrió en su automóvil 3.444 kilómetros; si por cada 25 kilómetros de recorrido hizo una parada, ¿cuántas paradas hizo Javier durante el viaje?

Por ejemplo, Rubiela tuvo en cuenta que sobraron "kilómetros", es decir, interpretó el residuo correctamente, pero no conectó la respuesta con la pregunta del problema.

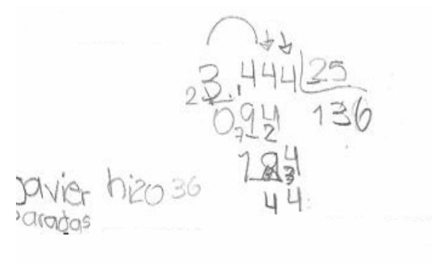


Tatiana y Marcela, por su parte, al igual que en el problema de la Actividad No. 2, ni siquiera tuvieron en cuenta que sobraron 19 kilómetros; es decir, para la última parada no necesitaba recorrer 25 km sino 19. Tampoco tuvieron en cuenta que el automóvil recorrió todos los 3.444 km, por lo tanto, era necesario contar con una parada más.

TATIANA



MARCELA



La ausencia de respuestas contextualizadas en los anteriores problemas, también pueden ser causa de la enseñanza de los problemas y de los algoritmos, a través de la cual se ha encaminado al estudiante a la solución de problemas por los algoritmos ya establecidos sin darles la oportunidad de generar los propios.

En mi experiencia de aula, sucedió que en ocasiones las estudiantes esperaban mis respuestas para cuando se les presentara un problema parecido al trabajado, dar respuestas similares. Es decir, recordaban problemas ya realizados para responder un nuevo.

Con respecto a esta categoría, los Lineamientos Curriculares (1998, p. 56) dicen que:

> Cuando se produce una solución, las personas con pensamiento numérico examinan su respuesta a la luz del problema original (considerando los números incluidos lo mismo que la pregunta pedida) para determinar si la respuesta "tiene sentido". Esta revisión generalmente se hace en forma rápida y natural y llega a ser una parte integral del proceso de resolución de problemas. Esta reflexión metacognitiva del contexto del problema podría involucrar una reflexión de las estrategias que se usaron, lo mismo que una evaluación de la estrategia particular seleccionada, y finalmente una comprobación para determinar si la respuesta que se produjo fue sensata o razonable.

De igual forma se dice que los estudiantes a menudo omiten esta comprobación precisamente porque el resultado (en realidad el problema en sí) no es importante para ellos –lo que le pudo haber sucedido a mis estudiantes.

Finalmente, con lo analizado en esta categoría, resulta necesario tener más en cuenta al plantear a los estudiantes un problema de división, la pregunta que se haga de manera que a través de ella los invitemos a pensar y a crear opciones para solucionar la pregunta. Pero no solo en problemas de división, puesto que debido a mi práctica docente he observado que sucede lo mismo con otro tipo de preguntas.

Finalmente, y a través de toda la experiencia de aula alrededor de los problemas de división, las estudiantes mostraron que se enfrentaban a la solución de problemas con diferentes estrategias de razonamiento y con procedimientos que tanto ellas como yo recibimos con sorpresa.

Todo ello apunta a que es necesario darle la oportunidad al estudiante para que piense y construya por sí mismo estrategias de solución. Pero debemos estar atentos a orientarlos y hacer que estrategias como la de buscar la operación a través de las palabras claves y del tamaño de respuesta no ocasionen errores más adelante.

PARA FINALIZAR

Teniendo en cuenta el marco teórico y los análisis elaborados en las categorías puedo decir que las estrategias usadas por las estudiantes para resolver problemas de división fueron desde el reparto de las cantidades del problema a través de gráficos, la resta sucesiva de la cantidad a repartir, hasta no tener que repartir, la adición de los elementos del grupo que se va a formar hasta llegar a la cantidad total de elementos, la búsqueda de un término desconocido en la multiplicación que representa el cociente de la división, la búsqueda de la operación que resuelva el problema teniendo en cuenta el efecto que produce las operaciones en los números y, además, las palabras claves dentro del texto hasta hacer simplemente cualquier operación.

Por otro lado, como se pudo observar a través de las estrategias usadas por las estudiantes, los problemas de división se pueden abordar desde los primeros años de escolaridad con datos cuyas cantidades sean números de una cifra para 1° y hasta dos cifras para 2° primaria, pues seguramente utilizaran estrategias de ensayo y error ayudados por la adición o sustracción, al igual que el reparto directo a través de gráficos de las cantidades planteadas en el problema.

Resulta importante brindar a las estudiantes más espacios para comunicar lo que piensan sin limitar sus conocimientos nos permitió, tanto a ellas como a mí, darnos cuenta de que los problemas que encasillamos como de división se pueden resolver apoyados en las cuatro operaciones, teniendo en cuenta cuales son las cantidades que se deben operar según el camino que se escoja.

Además, los docentes debemos estar atentos a los razonamientos de nuestros estudiantes ya que las estrategias que ellos encuentran en el día a día no son generales y menos aplicables para toda clase de problemas en los que, muy seguramente, cambia el grupo numérico en el que se suscribe.

También hay que estar vigilantes frente al sentido que los estudiantes le dan a los problemas ya que algunos estudiantes, a este nivel, consideran que los algoritmos de multiplicación y división son un problema dando, así, al problema el sentido de la actividad que se les dificulta acceder proporcionando, de este modo, un grado –tal vez inexistente– de dificultad alto a estos algoritmos.

Finalmente, este trabajo me dejó como reflexiones personales varios aspectos relacionados con mi práctica docente: la forma de abordar los contenidos, la metodología, la construcción de los algoritmos y su entendimiento. Además de algunas inquietudes por resolver y que pueden ser abordadas en trabajos futuros como: ¿Es necesario enseñar los algoritmos? ¿Cómo debo abordar los algoritmos desde la enseñanza? ¿Cómo entienden mejor los estudiantes la aritmética?

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, M. & García, G. (2001). *Competencias y proyecto pedagógico*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Baroody, A. (2000). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Trabajo original publicado en 1988. (S.B. Genis. Trads). Madrid: Editorial Visor.

Brown, M (1981) *Number Operations.* En: Hart, K. (ed.) (1981).

Butts, T. (1980). *Posing Problems Properly.* En: Puig y Cerdán (1995)

Freudenthal, H. (1963) *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques? L'Ensignement Mathématique*. Vol 9, págs. 24 – 44. [Trad. Castellana, ¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas?, en Hernández (ed.) (1978)]

Gadino, A. (1996). *Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela.* Buenos Aires: Editorial Magisterio del Río de la Plata.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. Recuperado el 15 de diciembre de 2004 http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/*.*

Hart, K. (1981) *Children´s Understanding of Mathematics: 11 – 16. A Report of Concepts in Secondary Mathematics and Science*. (Londres: John Murray)

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*, Madrid: Editorial Visor.

Kaput, J. (1986) *Quantity Structure of Algebra Word problems: A preliminary análisis.* Sputheastern Massachussets University, manuscrito.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas.* (1ª. Ed.). Bogotá: Cooperativo Editorial Magisterio.

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir, a través de la resolución de problemas.* Madrid: Editorial Visor.

______. (1999). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Editorial Síntesis.

Nesher, P. (1987) *Multiplicative School Word problems: Theoretical Approaches and Empirical Findigs.* Paper presented at the meeting of the Working Group on Middle School Number Concepts, Northern Illinois university, DeKalb, 11 de mayo de 1987.

Puig, L., Cerdán F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Editorial Síntesis.

Rizo, C. & Campistrous L. (1999). "*Estrategias de resolución de problemas en la escuela*", Relime, noviembre, 2(3): 31-45.

Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Schwartz, J. (1986) *Intensive Quantity and Referent Transforming arithmetic Operations.* MIT, Cambridge, manuscrito.

Schoenfeld A. (1985), *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academia Press.

Vergnaud, G. (1983), *Mulriplicative structures,* en Puig y Cerdán (1995).