EL PRODUCTO CUÑA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

RAÚL YESID FLÓREZ PLATA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2010

EL PRODUCTO CUÑA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

AUTOR:
RAÚL YESID FLÓREZ PLATA

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

DIRECTOR:
EDILBERTO JOSÉ REYES GONZÁLEZ
M.Sc. en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2010

"*Todo aquel que quiera ser sabio*
que comience por obedecer a Dios;
conocer al Dios santo
es dar muestras de inteligencia. "
Proverbios 9,10.

Agradecimientos

Agradezco a DIOS por ser la luz que ilumina todos los senderos que recorro día tras día en mi vida.

A la Familia PLATA ROJAS por su infaltable colaboración y apoyo en la realización de cada una de mis metas.

De manera muy especial doy gracias a mi madre MARÍA TERESA PLATA por su incansable sacrificio y por infundir en mi los valores que hoy en día se ven reflejados de alguna manera en la consecución de este título.

Al profesor EDILBERTO REYES por su colaboración y orientación en la elaboración de esta monografía.

A ADRIANA MARÍA por ser mi apoyo y mi complemento en estos dos últimos años.

Índice general

Índice de figuras

TÍTULO: EL PRODUCTO CUÑA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA*

AUTOR: RAÚL YESID FLÓREZ PLATA**

PALABRAS CLAVES:

Matrices, paralelepípedos, orientación, volumen, k-vectores simples, producto cuña.

DESCRIPCIÓN:

Esta monografía presenta un estudio sistemático y formal acerca de una operación de tipo vectorial denominada Producto Cuña entre k-vectores simples, los cuales están dotados con una magnitud (volumen) y una orientación que les permite relacionarse directamente con figuras k-dimensionales.

Además de ser una operación sencilla, el Producto Cuña es una excelente herramienta para la Geometría Analítica; por tanto, se muestra en este trabajo como a partir de este concepto se puede llegar a generalizaciones geométricas interesantes como la Ley de los Cosenos o el Teorema de Pitágoras.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos, así: el primero, titulado preliminares, muestra algunos elementos básicos (definiciones, teoremas, ejemplos) necesarios para la presentación de los capítulos posteriores; el segundo, titulado matrices y k-vectores simples, presenta la construcción del concepto de k-vector simple y menciona con anticipación la definición de volumen y orientación de un paralelepípedo k-dimensional a partir de los determinantes de matrices que representan conjuntos de vectores de R^n; el tercero, titulado producto cuña y el espacio vectorial $\Lambda^k R^n$ aborda dos temáticas importantes (las operaciones entre k-vectores simples, dentro de las cuales se encuentra el Producto Cuña, y la construcción de un espacio vectorial para los k-vectores simples); en el cuarto y último capítulo, titulado aplicaciones, se presenta algunos resultados a los que se llega a partir del Producto Cuña, en especial aquellos que están presentes en el campo de la Geometría Analítica.

---

* Monografía

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
Director: Edilberto José Reyes González.

TITLE: THE WEDGE PRODUCT AND ANALYTIC GEOMETRY*

AUTHOR: RAÚL YESID FLÓREZ PLATA**

PALABRAS CLAVES:

Matrices, parallelepipeds, orientation, volume, simple k-vectors, wedge product.

DESCRIPTION:

This monograph presents a systematic and formal study about an operation of vectorial type denominated the Wedge Product between simple k-vectors, which are equipped with a magnitude (volume) and an orientation that allows them to interact directly with k-dimensional figures.

Besides being a simple operation, the Wedge Product is an excellent tool for Analytic Geometry; therefore, is shown in this work like from this concept is could arrive to interesting geometric generalizations as the Law of Cosines or the Pythagorean theorem.

This work is divided in four chapters, thus: the first, entitled preliminaries, show us some basic elements (definitions, theorems, examples) necesary for the presentation of the later chapters; the second chapter, entitled matrices and simple k-vectors presents the construction of the concept of simple k-vector and mentions the definition of volume and orientation of a k-dimensional parallelepiped in advance from the determinants of matrices that represent sets of vectors of R^n; the third chapter, entitled wedge product and the vector space $\Lambda^k R^n$ broach two important themes (operations between simple k-vectors, inside which its found the Wedge Product, and the construction of a vector space for simple k-vectors); in the forth and last chapter, entitled applications, is presented some results to those that arrived from the Wedge Product, especially those that are present in the field of Analytical Geometry.

* Monograph

** Faculty of Sciences. School of Mathematics.
Director: Edilberto José Reyes González.

Introducción

A lo largo de la historia, los diferentes postulados e ideas geométricas han sido la base fundamental para el desarrollo de múltiples teorías en los diversos campos de la matemática. Si observamos por ejemplo en el cálculo, tanto el problema de la derivada como el de la integral están ligados netamente a conceptos geométricos tales como rectas tangentes y áreas de figuras planas. De igual forma, los diversos conceptos que manejamos en el álgebra lineal no podrían percibirse mejor si no fuera por la gran conexión que existe entre esta rama de la matemática y las grandes ideas geométricas.

Esta enorme conexión entre Álgebra y Geometría es el punto de apoyo para el desarrollo de este trabajo, el cual consiste en realizar un análisis riguroso acerca del artículo *The Wedge Product and Analytic Geometry* tratado en una de las ediciones de la revista norteamericana *The American Mathematical Monthly* [3], el cual tiene como objeto de estudio un concepto geométrico-algebraico denominado el Producto Cuña.

El Producto Cuña es considerado como una generalización del Producto Vectorial (o Producto Cruz) en tres dimensiones, es decir, no deja de ser un tipo de operación vectorial donde los elementos que se operan son llamados k-vectores simples, los cuales cuentan con impresionantes interpretaciones geométricas y una fuerte conexión con los factores determinantes y el volumen de orientación.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos, así: el primero muestra algunos elementos del álgebra tales como definiciones, teoremas, ejemplos, etc., necesarios para presentar la teoría de k-vectores simples; algunos de los teoremas no se demuestran, pues no son el objeto central de este trabajo. En el segundo capítulo utilizaremos matrices para representar conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^n$, también daremos a conocer el significado de un paralelepípedo k-dimensional, y además definiremos su orientación y volumen. Estos conceptos serán de gran utilidad para definir finalmente los k-vectores simples. El tercer capítulo trata dos temáticas muy importantes: primero definimos en él las operaciones entre k-vectores simples, dentro de las cuales encontramos el Producto Cuña; y luego construimos un espacio vectorial para los k-vectores simples partiendo de una relación entre el conjunto de los k-vectores simples y $\mathbb{R}$. En el cuarto y último capítulo mostraremos algunas aplicaciones geométricas y algebraicas basadas en toda la teoría estudiada en los capítulos anteriores. Una de las aplicaciones más interesante es la generalización del Teorema de Pitágoras para n-simplejos ortogonales.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo de esta monografía es necesario recordar temas importantes del Álgebra Lineal. Por tal razón, recopilamos en este capítulo algunas definiciones y teoremas básicos que nos darán pie para llegar hasta la presentación de los k-vectores simples y el Producto Cuña. Los conceptos teóricos que abarca este capítulo se pueden encontrar principalmente en [1] con sus respectivas demostraciones.

1.1. Vectores en $\mathbb{R}^n$.

La idea de emplear un número para situar un punto en una recta fue lo que dio inicio al estudio del Álgebra Vectorial. Se partió de la idea de una par ordenado (a_1, a_2) en el plano, después se extendió a la de una terna de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio, y finalmente se generalizó como una n-upla de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Así, se llegó a la definición de "vector", la cual mostramos a continuación.

Definición 1.1. Para todo entero $n \geq 1$, una n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se llama punto n-dimensional o vector n-dimensional, y llamamos a su vez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a las coordenadas o componentes del vector. El conjunto de todos los vectores n-dimensionales se llama Espacio Vectorial de n-uplas y lo denotamos por $\mathbb{R}^n$.

Dado que la noción de vector nace de una idea geométrica, es necesario mostrar una definición geométrica de vector, la cual solo se puede representar cuando $n \leq 3$.

Definición 1.2. Un par de puntos A y B se llama *vector geométrico* si uno de los puntos, por ejemplo A, es el punto inicial y el otro, B, es un punto extremo.

Esta definición tendrá gran utilidad en el último capítulo de esta monografía.

Representamos un vector geométrico con una flecha de A a B, como vemos en la Figura 1.1, y empleamos la notación $\overrightarrow{AB}$ o simplemente AB. La longitud de la flecha es una medida de la magnitud y la punta de la flecha indica la dirección que se precisa. Si dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma longitud y dirección, decimos que son *equivalentes* sin importar donde se localizan con respecto al origen. Esto es, decimos que $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a $\overrightarrow{CD}$ siempre que

$$B - A = D - C \quad (1.1)$$

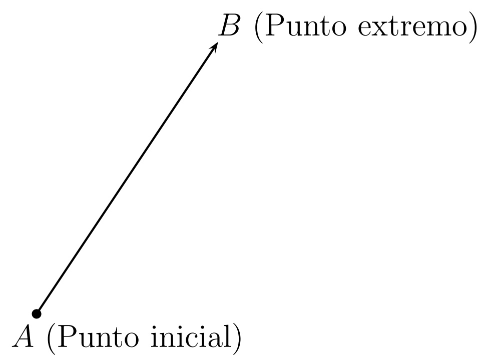

Figura 1.1. El vector geométrico $\overrightarrow{AB}$.

Observemos en la Figura 1.2 (a) que los cuatro puntos A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo. La ecuación (1.1) también se puede escribir en la forma $A+D = B + C$ lo que nos dice que los *vértices opuestos del paralelogramo tienen la misma suma.* En particular, si uno de los vértices, por ejemplo A, es el origen O, como en la Figura 1.2 (b), el vector geométrico que une O al vértice opuesto D corresponde al vector suma $D = B + C$. Esto se expresa diciendo que la "*adición de vectores corresponde geométricamente a la adición de vectores geométricos por medio de la ley del paralelogramo*".

A fin de simplificar la notación, utilizaremos el mismo símbolo para designar un punto de $\mathbb{R}^n$ y el vector geométrico que une el origen a ese punto. Así pues, escribimos por ejemplo, A en lugar de $\overrightarrow{OA}$. También escribiremos algunas veces A en lugar de cualquier vector geométrico equivalente a $\overrightarrow{OA}$.

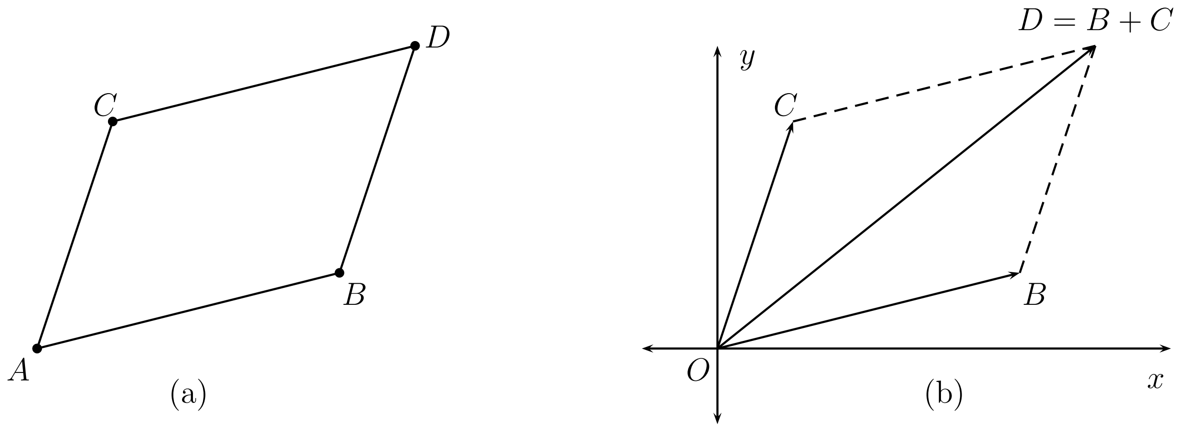

Figura 1.2. La adición de vectores interpretada con la ley del paralelogramo.

Para convertir $\mathbb{R}^n$ en una estructura algebraica, introducimos la *igualdad* de vectores y dos operaciones: la *adición* de vectores y la *multiplicación por escalares*. La palabra escalar se utiliza aquí como sinónimo de númeo real.

Definición 1.3. Dos vectores A y B de $\mathbb{R}^n$ son *iguales* siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares

$$a_1 = b_1\,, \quad a_2 = b_2\,, \quad \ldots, \quad a_n = b_n\,.$$

La *suma* $A + B$ se define como el vector obtenido sumando las componentes correspondientes

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Si c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)\,.$$

Partiendo de esta definición podemos establecer las siguientes propiedades de esas operaciones:

Teorema 1.1. (a) *La adición de vectores es conmutativa,*

$$A + B = B + A$$

(b) *La adición de vectores es asociativa,*

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

(c) *La multiplicación por escalares es asociativa*

$$c\,(dA) = (cd)\,A.$$

(d) *La multiplicación por escalares satisface las dos leyes distributivas*

$$c\,(A + B) = cA + cB \quad \text{y} \quad (c + d)\,A = cA + dA.$$

El vector con todos las componentes 0 se llama *vector cero* y se representa con O. Tiene la propiedad de que $A + O = A$ para todo vector A; dicho de otro modo, O es un elemento neutro o idéntico para la adición de vectores. El vector $(-1)\,A$ que también se representa con $-A$ se llama el opuesto de A. También escribimos $A - B$ en lugar de $A + (-B)$ y lo llamamos diferencia de A y B. La ecuación $(A + B) - B = A$ demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Observemos que $0A = O$ y que $1A = A$.

Puede demostrarse (aunque resulta difícil) que excepto para $n = 1$ y $n = 2$, no es posible introducir la multiplicación usual en $\mathbb{R}^n$ de modo que se satisfagan todas las propiedades del Teorema 1.1. Sin embargo, podemos introducir en $\mathbb{R}^n$ ciertos productos que satifacen algunas de esas propiedades. Por ejemplo, en la siguiente sección hablaremos del Producto Escalar de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ cuyo resultado no es un vector sino un escalar; y más adelante trataremos el Producto Vectorial el cual es una operación no conmutativa que sólo es aplicable en $\mathbb{R}^3$ y cuyo resultado es un vector.

1.2. Producto Escalar

Ahora vamos a introducir una nueva operación llamada Producto Escalar o Producto Punto o interior de dos vectores en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. Si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ su producto escalar se representa por $A \cdot B$ y se define con la igualdad

$$A \cdot B = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Esta operación tiene las siguientes propiedades algebraicas.

Teorema 1.2. *Para todos los vectores A, B, C de $\mathbb{R}^n$ y todos los escalares c, se tienen las siguientes propiedades:*

(a) $A \cdot B = B \cdot A$ *(ley conmutativa)*

(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(ley distributiva)*

(c) $c\,(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$ *(homogeneidad)*

(d) $A \cdot A > 0$ *si* $A \neq 0$ *(positividad)*

(e) $A \cdot A = 0$ *si* $A = 0$

El siguiente teorema es una propiedad bastante conocida en vectores de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si A y B son vectores de $\mathbb{R}^n$, tenemos*

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)\,(B \cdot B) \qquad (1.2)$$

Además, el signo igual es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Observemos que (1.2) es trivial si A o B es el vector cero. Por tanto, podemos suponer que A y B son ambos no nulos. Sea C el vector

$$C = xA - yB, \qquad \text{donde } x = B \cdot B \quad \text{y} \quad y = A \cdot B.$$

Las propiedades (d) y (e) implican que $C \cdot C \geq 0$. Cuando expresamos esto en función de x e y, resulta (1.2). Para expresar $C \cdot C$ en función de x e y, utilizamos las propiedades (a), (b) y (c) obteniendo

$$C \cdot C = (xA - yB) \cdot (xA - yB) = x^2\,(A \cdot A) - 2xy\,(A \cdot B) + y^2\,(B \cdot B)\,.$$

Utilizando las definiciones de x e y y la desigualdad $C \cdot C \geq 0$ se llega a

$$(B \cdot B)^2\,(A \cdot A) - 2\,(A \cdot B)^2\,(B \cdot B) + (A \cdot B)^2\,(B \cdot B) \geq 0.$$

La propiedad (d) implica que $B \cdot B > 0$ puesto que $B \neq 0$, con lo que podemos dividir por $(B \cdot B)$ obteniendo

$$(B \cdot B)\,(A \cdot A) - (A \cdot B)^2 \geq 0,$$

que coincide con (1.2). Esto también demuestra que el signo igual es válido en (1.2) si y sólo si $C = 0$. Pero $C = 0$ si y sólo si $xA = yB$. Como x e y son escalares distintos de cero, entonces uno de los vectores es el producto del otro por un escalar. De esta forma hemos demostrado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

La desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene importantes aplicaciones a las propiedades de la longitud o norma de un vector, concepto que veremos a continuación.

1.3. Longitud o Norma de un Vector

La Figura 1.3 muestra el vector geométrico que une el origen al punto $A = (a_1, a_2)$ en el plano. A partir del Teorema de Pitágoras encontramos que la longitud de A viene dada por la fórmula

$$\text{longitud de } A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

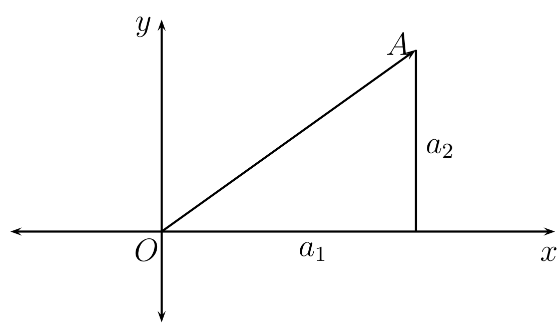

Figura 1.3. La longitud de A en $\mathbb{R}^2$

En la Figura 1.4 se muestra el dibujo correspondiente en $\mathbb{R}^3$. Aplicando el Teorema de Pitágoras dos veces, encontramos que la longitud de un vector geométrico A en $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\text{longitud de } A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Observemos que en uno u otro caso la longitud de A viene dada por $(A \cdot A)^{\frac{1}{2}}$, la raíz cuadrada del producto escalar de A por sí mismo. Esta fórmula sugiere un método para introducir el concepto de longitud en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.5. Si A es un vector en $\mathbb{R}^n$ su longitud o norma se designa con$\|A\|$ y se define mediante la igualdad

$$\|A\| = (A \cdot A)^{\frac{1}{2}} .$$

Las propiedades fundamentales del producto escalar conducen a las correspondientes propiedades de la norma.

Teorema 1.4. *Si A es un vector de $\mathbb{R}^n$ y c un escalar, tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $\|A\| > 0$ *si* $A \neq 0$ *(positividad)*

(b) $\|A\| = 0$ *si* $A = 0$

(c) $\|cA\| = |c| \, \|A\|$ *(homogeneidad).*

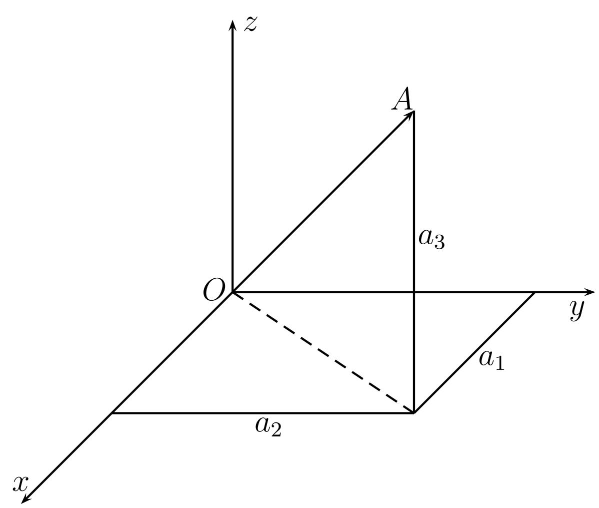

Figura 1.4. La longitud de A en $\mathbb{R}^3$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz también se puede expresar en función de la norma. Ella establece que

$$(A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2 . \quad (1.3)$$

Tomando la raíz cuadrada positiva de cada miembro, podemos también escribir la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma equivalente

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\| . \quad (1.4)$$

Ahora utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para deducir la desigualdad triangular.

Teorema 1.5. ***Desigualdad Triangular***. *Si A y B son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces tenemos*

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

Además, el signo igual es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Para evitar las raíces cuadradas, escribimos la desigualdad triangular en la forma equivalente

$$\|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2 . \quad (1.5)$$

El primer miembro de (1.5) es

$$\begin{aligned} \|A+B\|^2 &= (A+B)\cdot(A+B) = (A\cdot A) + 2\,(A\cdot B) + (B\cdot B) \\ &= \|A\|^2 + 2\,(A\cdot B) + \|B\|^2 , \end{aligned}$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\,\|A\|\,\|B\| + \|B\|^2 .$$

Comparando estas dos fórmulas vemos que (1.4) es válida si y sólo si

$$A\cdot B \leq \|A\|\,\|B\| . \quad (1.6)$$

Pero $A\cdot B \leq |A\cdot B|$ con lo que (1.5) resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en la forma (1.4). Esto prueba que la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz .

La proposición recíproca también es cierta. Esto es, si la desigualdad triangular es cierta también lo es (1.6) para A y para $-A$, de lo que obtenemos (1.3). Así pues, la desigualdad trianguar y la Cauchy-Schwarz son lógicamente equivalentes. Además, el signo de igualdad vale en una si y sólo si vale en la otra, con lo cual completamos la demostración de este teorema. ∎

1.4. Ortogonalidad de Vectores

A lo largo de la demostración de la dsigualdad triangular (Teorema 1.5), obtuvimos la fórmula

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\,(A\cdot B\ ) \quad (1.7)$$

que es válida para dos vectores cualesquiera A y B de $\mathbb{R}^n$. La Figura 1.5 muestra dos vectores geométricos perpendiculares en el plano. Forman un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes $\|A\|$ y $\|B\|$ y cuya hipotenusa tiene longitud $\|A+B\|$. El Teorema de Pitágoras establece que

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 .$$

Comparando este resultado con (1.7), vemos que $A \cdot B = 0$. Dicho de otro modo, el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. Esta propiedad da origen a la definición de vectores perpendiculares en $\mathbb{R}^n$.

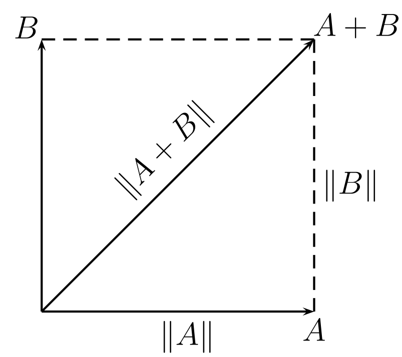

Figura 1.5. Dos vectores ortogonales

Definición 1.6. Dos vectores A y B de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si $A \cdot B = 0$.

La igualdad (1.7) muestra que dos vectores A y B de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. Esta es la identidad de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$.

1.5. Ángulo entre dos Vectores en el Espacio n-dimensional

El producto escalar de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ tiene una interpretación geométrica interesante. La Figura 1.6 (a) muestra dos vectores geométricos no nulos A y B que forman un ángulo θ. En este ejemplo tenemos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La Figura 1.6 (b) muestra el mismo vector A y dos vectores perpendiculares cuya suma es A. Uno de ellos, tB, es el producto de B por un escalar que llamamos la proyección de A sobre B. En este ejemplo, t es positivo ya que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Podemos utilizar los productos escalares para expresar t en función de A y B. Ponemos primero $tB + C = A$ y tomar luego el producto escalar de cada miembro por B obteniendo

$$tB \cdot B + C \cdot B = B \cdot A.$$

Pero $C \cdot B = 0$, debido a que C se dibujó perpendicular a B. Por consiguiente $tB \cdot B = B \cdot A$, con lo que tenemos

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}. \quad (1.8)$$

Por otra parte, el escalar t origina una sencilla relación para el ángulo θ. De la Figura 1.6 (b), vemos que

$$\cos\theta = \frac{\|tB\|}{\|A\|} = \frac{t\,\|B\|}{\|A\|}.$$

Aplicando (1.8) en esta fórmula, encontramos que

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|} \quad (1,9)$$

o

$$A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos\theta.$$

La igualdad (1.9) sugiere una manera de definir el concepto de ángulo en $\mathbb{R}^n$. La desigualdad de Cauchy- Schwarz, expresada en la forma (1.4), muestra que el cociente del segundo miembro de (1.9) tiene valor absoluto ≤ 1 para dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. O de otro modo tenemos

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|} \leq 1.$$

Por lo tanto, existe un solo número real θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que (1.9) es cierta. Definimos el ángulo entre A y B como ese número θ. La discusión anterior se resume en la siguiente definición.

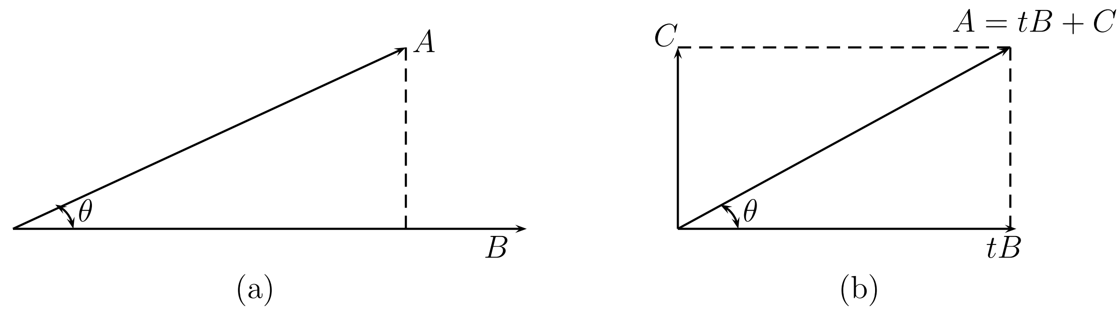

Figura 1.6. Ángulo entre dos vectores

Definición 1.7. Sean A y B dos vectores de $\mathbb{R}^n$, con $B \neq 0$. El vector tB, siendo

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B},$$

se llama la proyección de A sobre B. Si A y B son ambos no nulos, el ángulo θ que forman se define mediante la igualdad.

$$\theta = \arccos \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|}$$

Nota 1.1. La función arc coseno restringe θ al intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Observemos también que $\theta = \frac{\pi}{2}$ cuando $A \cdot B = 0$.

1.6. Los Vectores Coordenados Unitarios

Todo vector (a, b) de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse de la forma

$$(a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)\,.$$

Los dos vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ que multiplican los componentes a y b se denominan *vectores coordenados unitarios.* Introducimos ahora el concepto análogo en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.8. En $\mathbb{R}^n$, los n vectores

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, E_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,, \ldots, E_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

se llaman vectores coordenados unitarios. El i-ésimo componente de E_i es 1 y todos los demás componentes son cero.

La denominación de “vector unitario” procede del hecho de que cada vector E_i tiene longitud 1. Observemos que esos vectores son ortogonales entre sí, esto es, el producto escalar de dos cualesquiera de ellos es cero,

$$E_i \cdot E_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Teorema 1.6. *Todo vector $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse en la forma*

$$X = x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i.$$

Además, esta representación es única. Esto es, si

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i \quad y \quad X = \sum_{i=1}^{n} y_i E_i,$$

entonces $x_i = y_i$ para cada valor $i = 1, 2, \ldots, n$.

Una suma del tipo $\sum c_i A_i$ se llama *combinación lineal* de los vectores $A_1, \ldots, A_n$. El Teorema 1.6 nos dice que todo vector de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores coordenados unitarios. Expresamos esto diciendo que los vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots, E_n$ generan al espacio $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^2$ los vectores coordenados unitarios E_1 y E_2 frecuentemente se designan, respectivamente, con los símbolos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. En $\mathbb{R}^3$ se utilizan los símbolos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en lugar de E_1, E_2 y E_3.

1.7. Producto Vectorial

En muchas aplicaciones del Álgebra vectorial a problemas de Geometría y de Mecánica resulta útil disponer de un método fácil de obtener un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados A y B. Esto se consigue con el Producto Cruz o Producto Vectorial $A \times B$ que se define así:

Definición 1.9. Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial $A \times B$ (en este orden) se define como el vector

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

A partir de esta definición se deducen con facilidad las siguientes propiedades.

Teorema 1.7. *Para todos los vectores A, B, C de $\mathbb{R}^3$ y para todo número real c tenemos:*

(a) $A \times B = -(B \times A)$ *(simetría alternada)*

(b) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ *(ley distributiva)*

(c) $c\,(A \times B) = (cA) \times B$

(d) $A \cdot (A \times B) = 0$ *(ortogonalidad respecto a A)*

(e) $B \cdot (A \times B) = 0$ *(ortogonalidad respecto a B)*

(f) $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$ *(identidad de Lagrange)*

(g) $A \times B = 0$ *si y sólo si A es un multiplo escalar de B.*

Si expresamos cada uno de los componentes del producto vectorial como un determinante de orden dos, la fórmula que define $A \times B$ toma la forma

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Esto también lo podemos expresar en función de los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ como sigue:

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \quad (1.10)$$

Finalmente, la última expresión se puede representar mediante un determinante simbólico así:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El determinante anterior es considerado como un determinante simbólico porque la primera fila esta compuesta por vectores y las otras dos filas son las componentes de los vectores A y B respectivamente.

Ejemplo 1.1. *Para calcular el producto vectorial de $A = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $B = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, escribimos*

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -36\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \end{aligned}$$

La norma de $A \times B$ tiene una interpretación geométrica interesante. Si A y B son vectores no nulos que forman un ángulo θ, siendo $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos escribir $A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos\theta$ en la propiedad (f) del Teorema 1.7 obteniendo

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \, \|B\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) = \|A\|^2 \, \|B\|^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

de la que resulta

$$\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{sen}\theta \quad (1.12)$$

Puesto que $\|B\|\operatorname{sen}\theta$ es la altura del paralelogramo determinado por A y B (ver Figura 1.7), vemos que la norma de $A \times B$ es igual al área de ese paralelogramo.

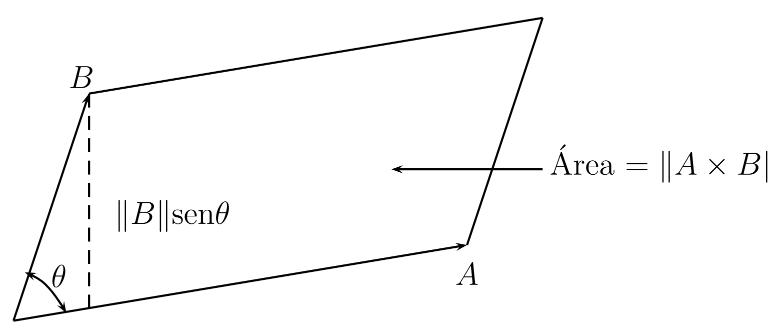

Figura 1.7. Interpretación geométrica de la norma de $A \times B$

Ilustramos el resultado anterior en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Consideremos los vectores* $A = (1, 0, 0)$ *y* $B = (0, 1, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*.Puesto que* $A \cdot B = 0$ *entonces* $\theta = \frac{\pi}{2}$*. Entonces aplicando (1.12) tenemos que*

$$\|A \times B\| = \sqrt{2}$$

Es decir, el área del pararlelogramo determinado por A y B es $\sqrt{2}$*.*

1.8. Producto Mixto

Los productos escalar y vectorial pueden combinarse para formar el Producto Mixto $A \cdot B \times C$, cuyo significado es $A \cdot (B \times C)$ exclusivamente. Puesto que este es un producto escalar de dos vectores, su valor es un escalar. Podemos calcular este escalar por medio de determinantes. Escribamos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ y expresemos $B \times C$ en la forma (1.10). Formando el producto escalar con A, obtenemos

$$\begin{aligned} A \cdot B \times C &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Así pues, $A \cdot B \times C$ es igual al determinante cuyas filas son los componentes de los factores A, B y C.

El producto mixto tiene una interesenta interpretación geométrica. La Figura 1.8 muestra un paralelepípedo determinado por tres vectores geométricos A, B, C no situados en el mismo plano. Su altura es $\|C\| \cos\phi$, siendo ϕ el ángulo que forman $A \times B$ y C. En esta figura, $\cos\phi$ es positivo porque $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. El área del paralelogramo que forma la base es $\|A \times B\|$, y ésta es también el área de cada sección paralela a la base. Integrando el área sección entre 0 y $\|C\| \cos\phi$, encontramos que el volumen del paralelepípedo es $\|A \times B\| \left(\|C\| \cos\phi\right)$, el área de la base multiplicada por la altura. Pero tenemos

$$\|A \times B\| \left(\|C\| \cos\phi\right) = (A \times B) \cdot C.$$

Dicho de otro modo, el producto mixto $A \times B \cdot C$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por A, B y C.

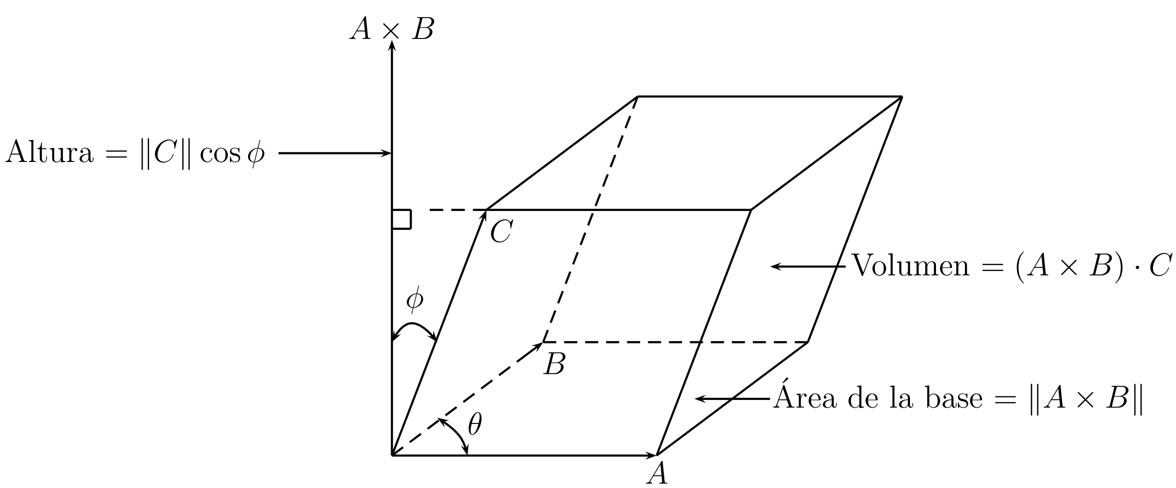

Figura 1.8. Interpretación geométrica del producto mixto

Observación 1.1. Cuando $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$, $\cos\phi$ es negativo. Luego el producto $A \times B \cdot C$ tendría un valor negativo. Pero teniendo en cuenta que un volumen siempre es una magnitud positiva entonces podemos encontrar el volumen de cualquier paralelepípedo determinado por vectores A, B y C de $\mathbb{R}^3$ por la siguiente expresión

$$|(A \times B) \cdot C|$$

donde las barras indican un valor absoluto.

Ilustramos el resultado anterior en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. *Consideremos los vectores* $A = (1, 5, 0)$, $B = (3, 5, 3)$, $C = (4, 4, 6)$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Entonces*

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = (15, -3, -10)$$

Luego el volumen del paralelepípedo determinado por A, B *y* C *es*

$$|(A \times B) \cdot C| = |(15, -3, -10) \cdot (4, 4, 6)| = |-12| = 12.$$

Capítulo 2

Matrices y k-Vectores Simples

En el presente capítulo se desarrolla uno de los objetivos fundamentales del trabajo, el cual consiste en abordar el concepto de k-vector simple. Para esto, es necesario definir primero las matrices que representan nuestros vectores en $\mathbb{R}^n$ al igual que conocer el significado de un paralepípedo k-dimensional y la manera como se definen su orientación y volumen.

2.1. Matrices

De aquí en adelante usaremos matrices para representar conjuntos de $\mathbb{R}^n$ con respecto a bases ortonormales. Por conveniencia, utilizaremos las primeras letras mayúsculas ordinarias para nombrar matrices y no vectores como veníamos trabajando anteriormente. Nombraremos los vectores con letras minúsculas ordinarias y sus componentes con letras griegas minúsculas acompañadas de subíndices.

A continuación citaremos un resultado muy importante del Álgebra Lineal que nos dará una pauta muy importante para el desarrollo de éste capítulo.

Teorema 2.1. *Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ entonces para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reales únicos tales que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (2.1)$$

Demostración. Existe al menos un conjunto de dichos escalares porque $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ genera a $\mathbb{R}^n$. Supongamos entonces que u se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base. Es decir, supongamos que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$$

Entonces, restando obtenemos la ecuación

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = O$$

Pero como los u_i son linealmente independientes, esta ecuación se cumple sólo si

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0.$$

Así, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\ldots$, $\alpha_n = \beta_n$ y el teorema queda demostrado. ∎

Fijando un orden en la base $\mathcal{B}$, el teorema anterior nos permite representar cada vector $u \in \mathbb{R}^n$ mediante la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Es decir,

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

En particular, si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una "base ortonormal ordenada" de $\mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^n$

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \alpha_i = u \cdot u_i$$

A partir de esto, trabajaremos en adelante con bases ortonormales ordenadas.

Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal ordenada de $\mathbb{R}^n$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$, podemos definir la matriz A de tamaño $n \times k$ como el conjunto de los k vectores cuyas columnas están dadas por (2.2). Esto es,

$$A = [a_1, \ldots, a_k]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

Este resultado se conoce como *"la representación matricial de vectores con respecto a una base ortonormal ordenada"*.

También podemos definir la matriz transpuesta de A, denotada por A^T, como

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \cdots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

Vemos que A^T es una matriz de $k \times n$ y que sus filas están dadas por (2.2).

De lo anterior, si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, $A = [a_1, \ldots, a_k]_{\mathcal{B}}$, $B = [b_1, \ldots, b_k]_{\mathcal{B}}$ y $B^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$; entonces el producto matricial $B^T A$ está dado por:

$$B^T A = \begin{pmatrix} b_1 \cdot a_1 & \ldots & b_1 \cdot a_k \\ \vdots & & \vdots \\ b_k \cdot a_1 & \ldots & b_k \cdot a_k \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

donde $B^T A$ es por supuesto una matriz de tamaño $k \times k$.

La siguientes proposiciones nos dicen que (2.3) es independiente de la escogencia de la base ortonormal ordenada.

Proposición 2.1. *Si $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ son dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'_1 &= \left\{(u_1)_{\mathcal{B}_2}, (u_2)_{\mathcal{B}_2}, \ldots, (u_n)_{\mathcal{B}_2}\right\} \quad y \\ \mathcal{B}'_2 &= \left\{(w_1)_{\mathcal{B}_1}, (w_2)_{\mathcal{B}_1}, \ldots, (w_n)_{\mathcal{B}_1}\right\} \end{aligned}$$

también son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Demostraremos solamente que $\mathcal{B}'_1$ es una base ortonormal ya que para $\mathcal{B}'_2$ se hace de la misma forma. Basta con demostrar que $(u_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_j)_{\mathcal{B}_2} = 0$ para i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Sean

$$(u_i)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (u_j)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \vdots \\ \alpha_{jn} \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_{i1}w_1 + \alpha_{i2}w_2 + \cdots + \alpha_{in}w_n \quad \text{y} \\ u_j &= \alpha_{j1}w_1 + \alpha_{j2}w_2 + \cdots + \alpha_{jn}w_n. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_i \cdot u_j &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}w_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}w_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}w_l\right) \cdot w_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(a_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}. \end{aligned}$$

Y como u_i, u_j $(i \neq j)$ son ortonormales entonces finalmente tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0 = (u_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_j)_{\mathcal{B}_2}.$$

Y de esta forma concluimos la demostración. ■

Proposición 2.2. *Sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases ortonormales para $\mathbb{R}^n$. Sean b_i y a_j dos vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$(b_i)_{\mathcal{B}_1} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_1} = (b_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_2}$$

Demostración. Sean b_i y a_j dos vectores en $\mathbb{R}^n$, por el Teorema 2.1 tenemos que existen escalares $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}, \alpha'_{1j}, \ldots, \alpha'_{nj}, \beta_{1i}, \ldots, \beta_{ni}, \beta'_{1i}, \ldots, \beta'_{ni}$ tales que

$$\begin{aligned} a_j &= \alpha_{1j}u_1 + \cdots + \alpha_{nj}u_n = \alpha'_{1j}w_1 + \cdots + \alpha'_{nj}w_n \qquad (2.4) \quad \text{y} \\ b_i &= \beta_{1i}u_1 + \cdots + \beta_{ni}u_n = \beta'_{1i}w_1 + \cdots + \beta'_{ni}w_n \qquad (2.5) \end{aligned}$$

para $i, j = 1, \ldots, k$.

Ahora, como $\mathcal{B}_2$ es una base para $\mathbb{R}^n$, cada u_m en $\mathcal{B}_1$ se puede escribir como una combinación lineal de las w_n. Así, existe un conjunto único de escalares $\varepsilon_{1m}, \ldots, \varepsilon_{nm}$ tales que para $m = 1, \ldots, n$

$$u_m = \varepsilon_{1m}w_1 + \cdots + \varepsilon_{nm}w_n \quad (2.6)$$

es decir,

$$(u_m)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1m} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nm} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

De este modo, sustituyendo (2.6) en (2.4) tenemos

$$\begin{aligned} \alpha'_{1j}w_1 + \cdots + \alpha'_{nj}w_n &= \alpha_{1j}(\varepsilon_{11}w_1 + \cdots + \varepsilon_{n1}w_n) + \cdots + \alpha_{nj}(\varepsilon_{1n}w_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}w_n) \\ &= (\alpha_{1j}\varepsilon_{11} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{1n})w_1 + \cdots + (\alpha_{1j}\varepsilon_{n1} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{nn})w_n \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \alpha'_{1j} &= \alpha_{1j}\varepsilon_{11} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{1n} \\ &\vdots \\ \alpha'_{nj} &= \alpha_{1j}\varepsilon_{n1} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{nn} \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento en (2.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta'_{1i} &= \beta_{1i}\varepsilon_{11} + \cdots + \beta_{ni}\varepsilon_{1n} \\ &\vdots \\ \beta'_{ni} &= \beta_{1i}\varepsilon_{n1} + \cdots + \beta_{ni}\varepsilon_{nn} \end{aligned}$$

Entonces,

$$(b_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \beta'_{1i} \\ \vdots \\ \beta'_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_{1j} \\ \vdots \\ \alpha'_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1i}\varepsilon_{11} + \cdots + \beta_{ni}\varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{1i}\varepsilon_{n1} + \cdots + \beta_{ni}\varepsilon_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1j}\varepsilon_{11} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{1j}\varepsilon_{n1} + \cdots + \alpha_{nj}\varepsilon_{nn} \end{pmatrix}$$

Así, efectuando el producto punto y agrupando y reagrupando términos, nos queda

$$\begin{aligned} (b_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_2} &= \beta_{1i}\alpha_{1j}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{11} + \cdots + \varepsilon_{n1}\varepsilon_{n1}) + \cdots + \beta_{1i}\alpha_{nj}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{1n} + ... + \varepsilon_{n1}\varepsilon_{nn}) \\ &\quad + \cdots + \beta_{ni}\alpha_{1j}(\varepsilon_{1n}\varepsilon_{11} + \cdots + \varepsilon_{nn}\varepsilon_{n1}) \\ &\quad + \cdots + \beta_{ni}\alpha_{nj}(\varepsilon_{1n}\varepsilon_{11} + \cdots + \varepsilon_{n1}\varepsilon_{n1}) \\ \\ &= \beta_{1i}\alpha_{1j}\left[(u_1)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_1)_{\mathcal{B}_2}\right] + \cdots + \beta_{1i}\alpha_{nj}\left[(u_1)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_n)_{\mathcal{B}_2}\right] + \cdots + \\ &\quad \beta_{ni}\alpha_{1j}\left[(u_n)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_1)_{\mathcal{B}_2}\right] + \cdots + \beta_{ni}\alpha_{nj}\left[(u_n)_{\mathcal{B}_2} \cdot (u_n)_{\mathcal{B}_2}\right] \end{aligned}$$

Pero por la Proposición 2.1 sabemos que $\left\{(u_1)_{\mathcal{B}_2}, \ldots, (u_n)_{\mathcal{B}_2}\right\}$ es ortonormal. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (b_i)_{\mathcal{B}_2} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_2} &= (\beta_{1i}\alpha_{1j} \times 1) + \cdots + (\beta_{1i}\alpha_{nj} \times 0) + \cdots + \\ &\quad (\beta_{ni}\alpha_{1j} \times 0) + \cdots + (\beta_{ni}\alpha_{nj} \times 1) \\ &= \beta_{1i}\alpha_{1j} + \cdots + \beta_{ni}\alpha_{nj} \\ &= (b_i)_{\mathcal{B}_1} \cdot (a_j)_{\mathcal{B}_1} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1. *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dadas con respecto a la base canónica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *para* $\mathbb{R}^2$*, la cual vimos anteriormente que es ortonormal. Luego, por el Teorema 2.1 tenemos que,*

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Y además,

$$B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$B^T A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, tomando la base ortonormal $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ *para* $\mathbb{R}^2$*, y haciendo uso nuevamente del Teorema 2.1 tenemos:*

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha'_{11} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \alpha'_{21} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

donde α'_{11} *y* α'_{21} *son escalares.*

Luego, $\qquad \alpha'_{11} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad y \qquad \alpha'_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por lo tanto,

$$a'_1 = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} \\ \alpha'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Haciendo lo mismo con a_2, b_1 *y* b_2 *obtenemos los escalares*

$$\alpha'_{12} = 0, \quad \alpha'_{22} = \sqrt{2}, \quad \beta'_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta'_{21} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \beta'_{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \beta'_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego,

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad y \qquad B' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$(B^T)'A' = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$(B^T)'A' = B^T A$$

Observación 2.1. Notemos que si consideramos la base canónica para $\mathbb{R}^n$ y hacemos uso del Teorema 2.1 tenemos que

$$(a_i)_{\mathcal{B}} = a_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, k.$$

Por conveniencia, en adelante usaremos $(b_i \cdot a_j)$ o $(b_i \cdot a_j)_{k \times k}$ para denotar el producto matricial $B^T A$.

Proposición 2.3. *Sean $\{a_1, ...a_k\}$ y $\{b_1, ..., b_k\}$ dos conjuntos cada uno con k vectores de $\mathbb{R}^n$. Si alguno de los dos conjuntos es linealmente dependiente entonces,*

$$\det(a_i \cdot b_j) = 0 \qquad \textit{para} \;\; i, j = 1, ..., k.$$

Demostración. Sean $A = [a_1, \ldots, a_k]_{\mathcal{B}}$, $B = [b_1, \ldots, b_k]_{\mathcal{B}}$ y $A^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Entonces tenemos:

$$A^T B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \ldots & a_1 \cdot b_i & \ldots & a_1 \cdot b_j & \ldots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i \cdot b_1 & \ldots & a_i \cdot b_i & \ldots & a_i \cdot b_j & \ldots & a_i \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j \cdot b_1 & \ldots & a_j \cdot b_i & \ldots & a_j \cdot b_j & \ldots & a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \ldots & a_k \cdot b_i & \ldots & a_k \cdot b_j & \ldots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es un conjunto lienalmente dependiente y que $\{b_1, \ldots, b_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Supongamos inicialmente que existen i, $j \leq k$, $i \neq j$, y $\rho \in \mathbb{R}$ tales que $a_i = \rho a_j$. En tal caso,

$$A^T B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_i & \dots & a_1 \cdot b_j & \dots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \rho a_j \cdot b_1 & \dots & \rho a_j \cdot b_i & \dots & \rho a_j \cdot b_j & \dots & \rho a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j \cdot b_1 & \dots & a_j \cdot b_i & \dots & a_j \cdot b_j & \dots & a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \dots & a_k \cdot b_i & \dots & a_k \cdot b_j & \dots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Como la i-ésima fila de $A^T B$ está multiplicada por el factor ρ, entonces,

$$\det A^T B = \rho \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_i & \dots & a_1 \cdot b_j & \dots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j \cdot b_1 & \dots & a_j \cdot b_i & \dots & a_j \cdot b_j & \dots & a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j \cdot b_1 & \dots & a_j \cdot b_i & \dots & a_j \cdot b_j & \dots & a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \dots & a_k \cdot b_i & \dots & a_k \cdot b_j & \dots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Y como las filas i-ésima y j-ésima de ésta matriz $k \times k$ son iguales, entonces,

$$\det A^T B = \rho \times 0 = 0$$

Por lo tanto,

$$\det(a_i \cdot b_j) = 0$$

Ahora, si $\{a_1, \dots, a_k\}$ es linealmente independiente entonces existen i, $j \leq k$, $i \neq j$, y $\rho \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_j = \sum_{i=1\ i \neq j}^{k} \rho_i a_i$$

Entonces, ralizando un procedimiento análogo al de los párrafos anteriores, concluimos finalmente que

$$\det(a_i \cdot b_j) = 0.$$

■

Esta proposición equivale a decir que si $\det(a_i \cdot b_j) \neq 0$ entonces $\{a_1, ...a_k\}$ y $\{b_1, ..., b_k\}$ son conjuntos linealmente independientes.

2.2. Paralelepípedos

Sabemos que un paralelepípedo es una figura en $\mathbb{R}^3$ cuyas caras son paralelogramos. En este trabajo, tomaremos la palabra paralelepípedo para hacer referencia a una figura k-dimensional especial. Los siguientes ejemplos en dos y tres dimensiones nos acercan a la definición de paralelepípedo que queremos mostrar.

Ejemplo 2.2. *Consideremos los vectores* $a_1 = (2, 3)$ *y* $a_2 = (1, -4)$ *de* $\mathbb{R}^2$*. Claramente* a_1 *y* a_2 *determinan el paralelogramo de la Figura 2.1 Observemos también que los vértices del paralelogramo son:* $O = (0, 0)$, $O + a_1 = (2, 3)$, $O + a_2 = (1, -4)$ *y* $O + a_1 + a_2 = (3, -1)$*, los cuales son de la forma* $O + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2$*, donde* τ_1 *y* τ_2 *toman los valores de* 0 *o* 1.

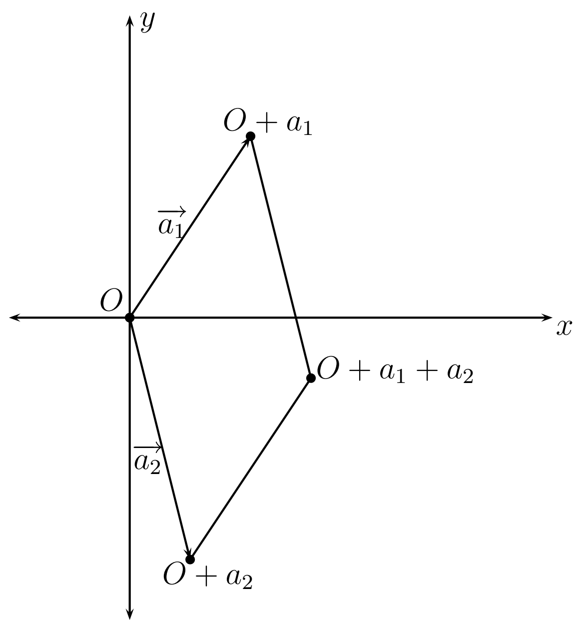

Figura 2.1. Un paralelelogramo en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.3. *Consideremos los vectores* $a_1 = (1, 5, 0)$, $a_2 = (3, 5, 3)$ *y* $a_3 = (4, 4, 6)$ *de* $\mathbb{R}^3$*. En este caso,* a_1, a_2 *y* a_3 *determinan las caras del paralelepípedo de la Figura 2.2. Los vértices se obtienen a partir de la expresión* $O + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$ *donde* τ_1, τ_2 *y* τ_3 *toman los valores de 0 o 1. Estos resultados se muestran en la Tabla 2.1.*

Expesión: $O + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$			
τ_1	τ_2	τ_3	Resultado (Vértice)
0	0	0	O
1	0	0	$O + a_1 = a_1 = (1, 5, 0)$
0	1	0	$O + a_2 = a_2 = (3, 5, 3)$
0	0	1	$O + a_3 = a_3 = (4, 6, 6)$
1	1	0	$O + a_2 + a_3 = (7, 9, 9)$
1	0	1	$O + a_1 + a_3 = (5, 9, 6)$
0	1	1	$O + a_1 + a_2 = (4, 10, 3)$
1	1	1	$O + a_1 + a_2 + a_3 = (8, 14, 9)$

Tabla 2.1

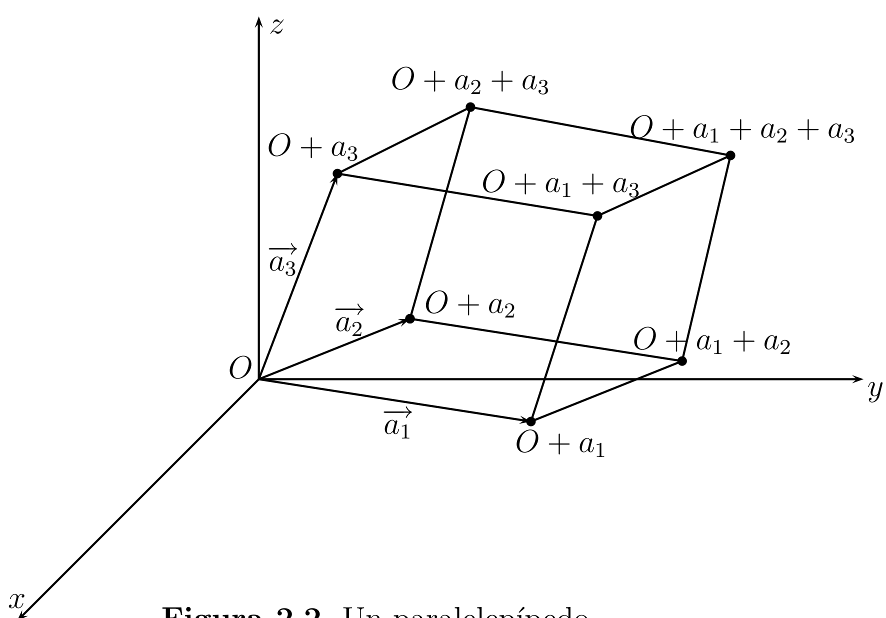

Figura 2.2. Un paralelepípedo.

A partir de estos ejemplos definiremos a continuación un paralelepípedeo k-dimensional.

Definición 2.1. Un *paralelepípedo* $\mathfrak{A}$ es una figura k-dimensional cuyas caras están determinadas por vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de $\mathbb{R}^n$ y cuyos vértices son de la forma $\sum_{i=1}^{n} \tau_i a_i$ donde $\tau_i = 0$ o $\tau_i = 1$.

Según la definición anterior tenemos que el paralelogramo de la Figura 2.1 es un paralelepípedo de dimensión 2 en $\mathbb{R}^2$.

Geométricamente nuestros paralelepípedos solo pueden ser representados cuando $2 \leq k \leq 3$. Sin embargo, siempre generalizaremos para el caso cuando $1 \leq k \leq n$ ya que es nuestro objetivo extender todos los resultados al espacio k-dimensional.

La siguiente definición menciona una propiedad muy importante de los paralelepípedos k-dimensionales.

Definición 2.2. Un paralelepípedo k-dimensional se considera *degenerado*, si y sólo si $\{a_1, ...a_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente. Si $\{a_1, ...a_k\}$ es linealmente independiente, decimos que el paralelepípedo es *no-degenerado*.

2.3. Orientación

Como un paralelepípedo k-dimensional $\mathfrak{A}$ está asociado a la k-upla de vectores ordenada $(a_1, ...a_k)$, entonces podemos asignar una orientación para $\mathfrak{A}$. El siguiente ejemplo en una dimensión, es sencillo y nos muestra una idea clara de lo que queremos definir.

Ejemplo 2.4. *Sean $a = (-2, 3)$, $b = (-4, 6)$, $c = (2, -3)$, y $d = (3, 2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 2.3) y $V = \left\{(x, y) : y = -\frac{3}{2}x, \right\}$ un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1. Notemos que $a, b, c \in V$. Además a y b tienen la misma orientación porque $a \cdot b = 26 > 0$, mientras que c tiene orientación opuesta a a y b porque $a \cdot c = -13 < 0$ y $b \cdot c = -26 < 0$. Por otro lado, veamos que $d \notin V$; esto implica que d no es comparable a a, b, c.*

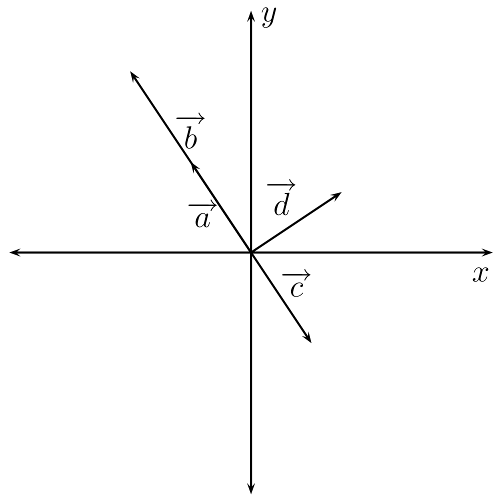

Figura 2.3. Orientación de vectores en una dimensión.

A partir de este ejemplo, podemos generalizar la idea para ordenar k-uplas de vectores.

Definición 2.3. Sean $(a_1, ..., a_k)$ y $(b_1, ..., b_k)$ dos k-uplas ordenadas de vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y $\{b_1, \ldots, b_k\}$ son dos conjuntos linealmente dependientes, entonces $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ tienen la misma orientación, la orientación 0.
2. Si $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y $\{b_1, \ldots, b_k\}$ son dos conjuntos linealmente independientes que pertenecen a un mismo subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ y si $\det(a_i \cdot b_j)_{k\times k} > 0$, entonces $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ tienen la misma orientación (diferente de cero). Si $\det(a_i \cdot b_j)_{k\times k} < 0$, entonces $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ tienen orientaciones opuestas.

Observación 2.2. Vemos que en 2 no podemos tener $\det(a_i \cdot b_j) = 0$. Además, si no se cumple 1 y 2 entonces decimos que las orientaciones de las dos k-uplas son *no-comparables.*

Ejemplo 2.5. *Consideremos los vectores* $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $b_1 = (0, 1, -1)$, $b_2 = (1, 1, -2)$ *en* $\mathbb{R}^3$, *los cuales pertenecen al subespacio vectorial de dimensión 2 definido por la ecuación* $x + y + z = 0$. *Como* $\det(a_i \cdot b_j) = 3$, *entonces por la Definición 2.3 deducimos que* (a_1, a_2) *y* (b_1, b_2) *tienen la misma orientación.*

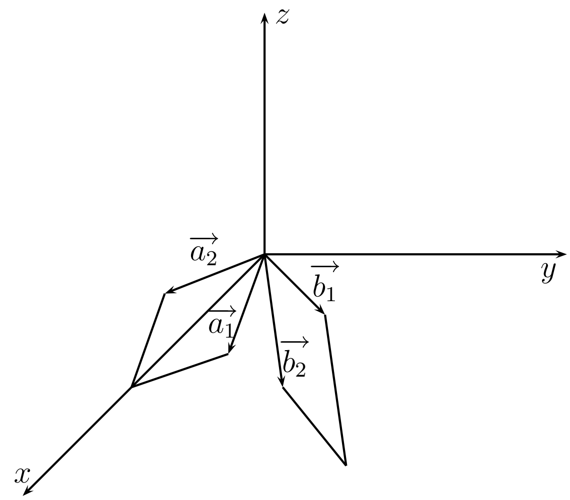

Figura 2.4. Dos duplas de vectores con la misma orientación.

En la Figura 2.4 podemos ver los paralelogramos formados por las duplas de vectores (a_1, a_2) y (b_1, b_2). Además podemos observar que a_1 puede rotar hacia a_2 y b_1 hacia b_2 en sus respectivos paralelogramos en el mismo sentido de las manecillas del reloj, lo cual muestra geométricamente la misma orientación de las duplas.

Ejemplo 2.6. *Consideremos los vectores* $a_1 = (1, 1, -2)$, $a_2 = (-3, 3, 6)$, $b_1 = (1, 0, -1)$, $b_2 = (0, 0, 0)$ *en* $\mathbb{R}^3$. *Observamos que* $\{a_1, a_2\}$ *y* $\{b_1, b_2\}$ *son conjuntos linealmente dependientes. Por lo tanto, por la Definición 2.3 tenemos que* (a_1, a_2) *y* (b_1, b_2) *tienen la misma orientación, la orientación 0.*

Observación 2.3. Si $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces al cambiar a_i por a_j, donde $i \neq j$, tenemos que $(a_1, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_k)$ y $(a_1, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_k)$ tienen orientaciones opuestas.

2.4. Volumen

Presentamos a continuación un par de ejemplos que nos darán una pauta importante para acercarnos a un resultado bastante interesante.

Ejemplo 2.7. *En el Ejemplo 1.1 vimos que el área de un paralelogramo generado por los vectores* $a_1 = (1, 0, 0)$ *y* $a_2 = (0, 1, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*es igual a* $\|a_1 \times a_2\| = \sqrt{2}$.

Ahora, si representamos los vectores a_1 *y* a_2 *con respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *obtenemos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y además tenemos que } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $\det A^T A = 2$, *es decir,* $\det(a_i \cdot a_j) = 2$.

Y en consecuencia, $\sqrt{\det(a_i \cdot a_j)} = \sqrt{2}$.

Por tanto, podemos observar que $\|a_1 \times a_2\| = \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}$. *De igual manera, podemos ver que* $\|a_1 \times a_2\|^2 = \det(a_i \cdot a_j)$

Ejemplo 2.8. *Vimos en el Ejemplo 1.2 que el volumen generado por los vectores* $a_1 = (1, 5, 0)$, $a_2 = (3, 5, 3)$ *y* $a_3 = (4, 4, 6)$ *es igual a* $|(a_1 \times a_2) \cdot a_3| = 12$.

Por otra parte, tenemos que la representación matricial de $\{a_1, a_2, a_3\}$ *con respecto a la base canónica para* $\mathbb{R}^3$ *es*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y además tenemos que } A^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como A *y* A^T *son matrices de igual tamaño, entonces tenemos que* $\det A^T = \det A = 12$.

Luego $\det(a_i \cdot a_j) = \det(A^T A) = \det A^T \det A = 12 \times 12 = 144$.

Y en consecuencia, $\sqrt{\det(a_i \cdot a_j)} = \sqrt{144} = 12$.

Por tanto, vemos que $|(a_1 \times a_2) \cdot a_3| = \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}$.

Los ejemplos anteriores nos muestran claramente que $\sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}$ es el área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ y el volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$. Si consideramos el área del paralelogramo como "*el volumen de un paralelepípedo dimensión 2*" entonces podemos definir de manera natural el volumen de un paralelepípedo k-dimensional.

Definición 2.4. Sea $\mathfrak{A}$ un paralelepípedo k-dimensional asociado a la k-upla de vectores $(a_1, ..., a_k)$. Entonces el volumen k-dimensional de $\mathfrak{A}$ está dado por

$$\text{vol}\ \mathfrak{A} = \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}.$$

Es necesario demostrar que el volumen siempre se puede evaluar. Para esto, solo bastará con probar que $\det(a_i \cdot a_j) \geq 0$

Proposición 2.4. *Sea $\{a_1, \ldots, a_k\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$. Sea V un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ tal que $\{a_1, \ldots, a_k\} \in V$, entonces* $\det(a_i \cdot a_j) \geq 0$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal para V. Como $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset V$, entonces por el Teorema 2.1 tenemos que $a_i = \alpha_{1i}u_1 + \ldots + \alpha_{ki}u_k$ para cada $a_i \in V$, donde $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ki}$ son números reales. Luego podemos escribir la matriz A como

$$A = [a_1, \ldots, a_k]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}$$

Claramente vemos que A es una matriz de tamaño $k \times k$. Entonces,

$$\det(a_i \cdot a_j) = \det(A^T A) = (\det(A))^2 \geq 0$$

Así que $\sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}$ puede ser siempre evaluado. ∎

A continuación mostramos un ejemplo para ilustrar la proposición anterior.

Ejemplo 2.9. *Sea $V = \{x + y + z = 0 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ un suebspacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ una base para V. Vimos en el Ejemplo que los vectores $a_1 = (1, 0, -1)$ y $a_2 = (1, -1, 0)$ están en V.Por lo tanto podemos escribir a_1 y a_2 como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$. Es decir,*

$$\begin{aligned} (1, 0, -1) &= \alpha_{11}(0, 1, -1) + \alpha_{21}(1, 1, -2) \ y \\ (1, -1, 0) &= \alpha_{12}(0, 1, -1) + \alpha_{22}(1, 1, -2) \end{aligned}$$

donde $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ son escalares. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\alpha_{11} = -1,\ \alpha_{21} = 1,\ \alpha_{12} = -2,\ \alpha_{22} = 1$$

Luego,

$$A = [a_1, a_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\det(a_i \cdot a_j) = \det(A^T A) = (\det(A))^2 = 1^2 = 1$$

Proposición 2.5. *El paralelepípedo k-dimensional $\mathfrak{A}$ asociado con la k-upla de vectores $(a_1, \ldots, a_k)$ de $\mathbb{R}^n$ es no-degenerado si y solo si* vol $\mathfrak{A} > 0$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si el paralelepípedo es no degenerado entonces por la Definición 2.2 tenemos que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es linealmente independiente. Luego $\det(a_i \cdot a_j) < 0$ o $\det(a_i \cdot a_j) > 0$, pero por la Proposición 2.4 sabemos que $\det(a_i \cdot a_j) \geq 0$. Por lo tanto $\det(a_i \cdot a_j) > 0$, es decir, vol $\mathfrak{A} > 0$.

$\Leftarrow$) Si vol $\mathfrak{A} > 0$ entonces $\det(a_i \cdot a_j) \gneqq 0$. Por lo tanto, por la Proposición 2.3 tenemos que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es linealmente independiente. Es decir, el paralelepípedo es no-degenerado. ∎

Observación 2.4. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos paralelepípedos k-dimensionales asociados a las k-uplas de vectores $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ respectivamente. Vemos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen el mismo volumen si y solo si $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j)$.

2.5. k-Vectores Simples

Es importante resaltar que cuando hablamos de la k-upla $(a_1, \ldots, a_k)$ estamos haciendo referencia a un elemento del producto cartesiano $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ veces}}$.

De esta manera, si denotamos $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ por $(\mathbb{R}^n)^k$, entonces podemos afirmar que $(a_1, \cdots, a_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$.

Además de esto, podemos probar que existe una relación de equivalencia "$\sim$" sobre $(\mathbb{R}^n)^k$ definida por el volumen y la orientación de un paralelepípedo k-dimensional. Es decir, podemos demostrar que si los paralelepípedos k-dimensionales $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ asociados a las k-uplas de vectores $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ tienen el mismo volumen y la misma orientación, entonces podemos escribir $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$. A partir de este hecho, planteamos lo siguiente:

Proposición 2.6. $\sim$ *es una relación de equivalencia sobre* $(\mathbb{R}^n)^k$.

Demostración. Debemos probar si se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

1. Por la Proposición 2.3 sabemos que $\det(a_i \cdot a_j) \geq 0$, y además es fácil ver que $\det(a_i \cdot a_j) = \det(a_i \cdot a_j)$. Por lo tanto, para todo $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ se cumple que $(a_1, \ldots, a_k) \sim (a_1, \ldots, a_k)$.

2. Si $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$ entonces $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j)$, luego $\det(b_i \cdot b_j) = \det(a_i \cdot a_j)$. Por otro lado,
$$\det(a_i \cdot b_j) = \det A^T B = \det(A^T B)^T = \det B^T A = \det(b_i \cdot a_j)$$
Luego $\det(a_i \cdot b_j) = \det(b_i \cdot a_j) \geq 0$. Por lo tanto, para todo $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ se cumple que si $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$ entonces $(b_1, \ldots, b_k) \sim (a_1, \ldots, a_k)$.

3. Si $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k) \sim (c_1, \ldots, c_k)$ entonces $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j) = \det(c_i \cdot c_j)$. Luego $\det(a_i \cdot a_j) = \det(c_i \cdot c_j)$. Además es fácil ver que $\det(a_i \cdot c_j) \geq 0$. Por lo tanto, para todo $(a_1, \ldots, a_k)$, $(b_1, \ldots, b_k)$ y $(c_1, \ldots, c_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ se cumple que si $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k) \sim (c_1, \ldots, c_k)$ entonces $(a_1, \ldots, a_k) \sim (c_1, \ldots, c_k)$.

De 1, 2 y 3 podemos concluir que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $(\mathbb{R}^n)^k$. ∎

También podemos establecer el conjunto entre k-uplas dadas por $\sim$. Este conjunto es conocido como la *clase de equivalencia* asociada a la k-upla $(a_1, \ldots, a_k)$, la cual definimos como
$$\overline{(a_1, \ldots, a_k)} = \left\{(b_1, \ldots, b_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid (b_1, \ldots, b_k) \sim (a_1, \ldots, a_k)\right\}$$
donde claramente $\overline{(a_1, \ldots, a_k)}$ es la notación de la clase de equivalencia asociada a la k-upla $(a_1, \ldots, a_k)$. Con base en esto, planteamos la siguiente definición.

Definición 2.5. Un *k-vector simple* es un elemento de la clase $\overline{(a_1, \ldots, a_k)}$, el cual denotamos por $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$.

Observación 2.5. Como $\det(a_i \cdot a_j) = 0$ si y sólo si $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente, entonces

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0 \Leftrightarrow \det(a_i \cdot a_j) = 0.$$

En particular tenemos que $a_i \wedge a_i = 0$ para $1 \leq i \leq k$.

Ejemplo 2.10. *En el Ejemplo 2.5 vimos que al considerar los vectores* $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $b_1 = (0, 1, -1)$ *y* $b_2 = (1, 1, -2)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *deducimos que* $\det(a_i \cdot b_j) = 3$. *Además de esto, podemos notar también que*

$$\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j) = 3$$

Por lo tanto, podemos afirmar que las duplas (a_1, a_2) *y* (b_1, b_2) *son equivalentes. Además, por la Definición 2.5 podemos decir que* $a_1 \wedge a_2$ *y* $b_1 \wedge b_2$ *son "2-vectores simples" .*

A partir del hecho de que dos k-uplas son equivalentes si estas tienen igual volumen e igual orientación, podemos definir la igualdad de k-vectores simples de la siguiente manera:

Definición 2.6. Dos k-vectores simples $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ y $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$ son iguales si y sólo si las k-uplas $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ son equivalentes. Es decir,

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \Longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$$

A partir de esta definición tenemos que los 2-vectores simples del Ejemplo 2.10 son iguales.

El siguiente lema y la siguiente definición tendrán gran utilidad en el siguiente capítulo.

Lema 2.1. *Sean* V *un subespacio vectorial* k*-dimensional de* $\mathbb{R}^n$, $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ *vectores en* V *y* A *y* B *matrices de tamaño* $k \times k$ *expresadas con respecto a una base ortonormal de* V*. Supongamos que* F *es una matriz de tamaño* $k \times k$ *tal que* $B = FA$*, entonces tenemos lo siguiente:*

1. Si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \neq 0$, entonces $\det A = \det B$ y $\det F = 1$.

2. Si $\det F = 1$, entonces $a \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$.

Demostración. 1. Si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \neq 0$, entonces en particular tenemos que $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j) > 0$. Es decir, $\det\left(A^T A\right) = \det\left(B^T B\right)$. Por ser A y B matrices cuadradas podemos deducir que $(\det A)^2 = (\det B)^2$. Por lo tanto, $\det A = \det B$. Ahora, dado que $B = FA$ entonces por el hecho de que A, B y F son matrices cuadradas podemos escribir $\det B = \det F \det A$. Esto obliga a que $\det F = 1$.

2. Si $\det F = 1$ entonces podemos notar que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es linealmente dependiente si y solo si $\{b_1, \ldots, b_k\}$ también lo es; siendo así, tenemos que $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = 0$. Si $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y $\{b_1, \ldots, b_k\}$ son linealmente independientes entonces tenemos que $\det A$, $\det B \neq 0$. Luego

$$\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j) > 0 \ \text{ y } \ \det(a_i \cdot b_j) > 0.$$

Por lo tanto, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$. Y de este modo finalizamos la demostración.

∎

Definición 2.7. Si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, decimos que a es un k-vector simple en V si podemos escribir

$$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \ \text{ donde cada } a_i \in V.$$

Capítulo 3

Producto Cuña y el Espacio Vectorial $\Lambda^k\mathbb{R}^n$

Ya definidos los k-vectores simples, el siguiente paso que debemos dar es mostar que se pueden realizar algunas operaciones entre ellos. En esta sección presentamos algunas operaciones vectoriales en k-vectores simples como el producto escalar o producto punto y la multiplicación por un escalar. De igual manera, definiremos una operación conocida como el *Producto Cuña*, la cual nos muestra como podemos obtener $(k+m)$-vectores simples a partir de k-vectores y m-vectores simples. Aquí lo más importante es demostrar que las operaciones están bien definidas ya que a partir de estas operaciones construiremos un espacio vectorial para los k-vectores simples.

3.1. Multiplicación por un Escalar

Definición 3.1. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ un k-vector simple, entonces

$$\lambda(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) = a_1 \wedge \cdots \wedge \lambda a_i \wedge \cdots \wedge a_k \quad \text{para } i \in 1, \ldots, k.$$

Nota 3.1. Por $-(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k)$ queremos decir $(-1)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k)$.

Proposición 3.1. *La multiplicación de un k-vector simple por un escalar está bien definida.*

Demostración. Supongamos $\lambda \neq 0$ y $\{a_1, \ldots, a_k\}$ un conjunto linealmente independiente, puesto que de otra manera todo es trivial. Por definición de k-vector simple existe un conjunto de vectores $\{b_1, \ldots, b_k\}$ linealmente independiente tal que $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$. Supongamos ahora que existen los conjuntos de vectores $\{c_1, \ldots, c_k\}$ y $\{d_1, \ldots, d_k\}$ tales que

$$(c_1, \ldots, c_k) = (a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_k) \quad \text{y} \quad (d_1, \ldots, d_k) = (b_1, \ldots, \lambda b_j, \ldots, b_k)$$

para $i, j = 1, \ldots, k$. Entonces

$$\det(c_i \cdot c_j) = \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 & \ldots & \lambda a_1 \cdot a_i & \ldots & a_1 \cdot a_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_i \cdot a_1 & \ldots & \lambda^2 a_i \cdot a_i & \ldots & \lambda a_i \cdot a_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot a_1 & \ldots & \lambda a_k \cdot a_i & \ldots & a_k \cdot a_k \end{pmatrix}$$

Veamos que tanto la i-ésima fila como la i-ésima columna están multiplicadas por el factor λ, por lo tanto tenemos que

$$\det(c_i \cdot c_j) = \lambda\lambda \det(a_i \cdot a_j) = \lambda^2 \det(a_i \cdot a_j).$$

Luego

$$\mathrm{vol}\,(c_1, \ldots, c_k) = \sqrt{\lambda^2 \det(a_i \cdot a_j)} = |\lambda| \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}.$$

Del mismo modo,

$$\mathrm{vol}(d_1, \ldots, d_k) = |\lambda| \sqrt{\det(b_i \cdot b_j)}.$$

Como $(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k)$ entonces por la definición de k-vector simple tenemos que

$$\mathrm{vol}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{vol}(b_1, \ldots, b_k) \Rightarrow \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)} = \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}.$$

Luego

$$|\lambda| \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)} = |\lambda| \sqrt{\det(b_i \cdot b_j)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{vol}\,(c_1, \ldots, c_k) = \mathrm{vol}(d_1, \ldots, d_k). \quad (3.1)$$

Por otro lado,

$$\det(c_i \cdot d_j) = \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \ldots & a_1 \cdot b_i & \ldots & \lambda a_1 \cdot b_j & \ldots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_i \cdot b_1 & \ldots & \lambda a_i \cdot b_i & \ldots & \lambda^2 a_i \cdot b_j & \ldots & \lambda a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j \cdot b_1 & \ldots & a_j \cdot b_i & \ldots & \lambda a_j \cdot b_j & \ldots & a_j \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \ldots & a_k \cdot b_i & \ldots & \lambda a_k \cdot b_j & \ldots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Tanto la i-ésima fila como la j-ésima columna de la matriz están multiplicadas por el factor λ, por lo tanto

$$\det(c_i \cdot d_j) = \lambda\lambda \det(a_i \cdot b_j) = \lambda^2 \det(a_i \cdot b_j).$$

Como $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ tienen la misma orientación, entonces $\det(a_i \cdot b_j) > 0$; y además $\lambda^2 > 0$.Luego

$$\det(c_i \cdot d_j) > 0 \qquad (3,2)$$

Es decir, $(c_1, \ldots, c_k)$ y $(d_1, \ldots, d_k)$ tienen la misma orientación. Por lo tanto, de (3.1) y (3.2) concluimos que

$$(c_1, \ldots, c_k) \sim (d_1, \ldots, d_k).$$

Es decir, demostramos que la multiplicación de un k-vector simple por un escalar está bien definida. ■

Ejemplo 3.1. *Consideremos el 2-vector simple* $(3, -1) \wedge (2, -3)$ *en* $\mathbb{R}^2$. *Entonces*

$$\begin{aligned} 3\,[(3,-1) \wedge (2,-3)] &= [3(3,-1)] \wedge (2,-3) = (9,-3) \wedge (2,-3) \\ &= (3,-1) \wedge [3(2,-3)] = (3,-1) \wedge (6,-9) \end{aligned}$$

Es decir, el par de 2-vectores $(9,-3) \wedge (2,-3); (3,-1) \wedge (6,-9)$ *son equivalentes.*

Observación 3.1. Si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ es un k-vector simple entonces $0(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) = 0$. Esto es claro puesto que obtenemos un k-vector simple $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$ tal que el vector $b_i = 0a_i$, es decir, b_i es el vector cero. Por lo tanto, deducimos que $\det(b_i \cdot b_j) = 0$. Entonces vemos fácilmente que $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = 0(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) = 0$

El siguiente ejemplo nos conduce a una deducción bastante interesante.

Ejemplo 3.2. *Consideremos el 2-vector simple* $a_1 \wedge a_2 = (2,0) \wedge (0,2)$ *en* $\mathbb{R}^2$. *Entonces*

$$-2\,[(2,0) \wedge (0,2)] = [-2(2,0)] \wedge (0,2) = (-4,0) \wedge (0,2) = b_1 \wedge b_2$$

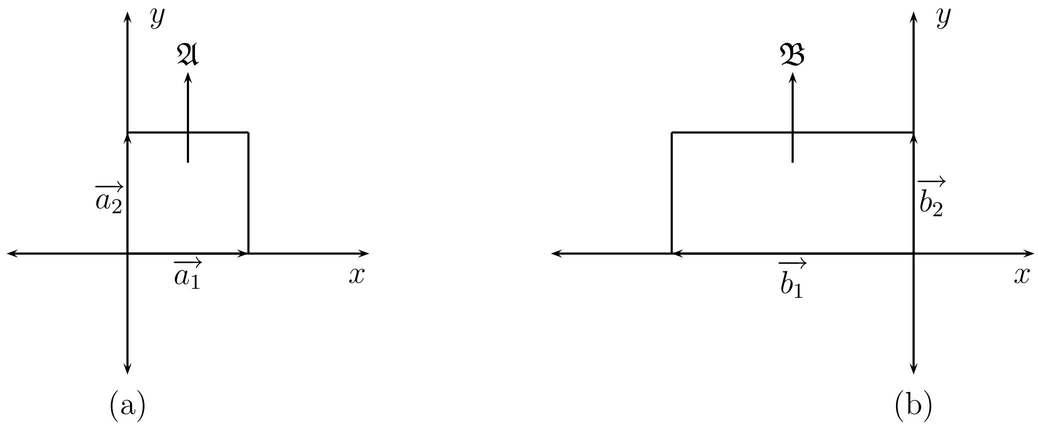

Figura 3.1. Interpretación geométrica de la multiplicación por un escalar.

A partir de este ejemplo, vemos que la multiplicación de un k-vector simple por un escalar tiene una interpretación geométrica bastante interesante. Si multiplicamos un lado de un paralelepípedo orientado por λ, entonces cambia el volumen por un factor $|\lambda|$. Si $\lambda > 0$ la orientación no cambia, pero si $\lambda < 0$ la orientación se invierte.

Vemos también que la dupla (a_1, a_2) genera el cuadrado $\mathfrak{A}$ de la Figura 3.1(a) y que *vol* $\mathfrak{A} = \sqrt{16} = 4$. Del mismo modo, vemos que la dupla (b_1, b_2) genera el rectángulo $\mathfrak{B}$ de la Figura 3.1(b) y que *vol* $\mathfrak{B} = \sqrt{64} = 8 = 2(4) = |-2|$*vol* $\mathfrak{A}$. Además, $\det(a_i \cdot b_j) = -32$. Entonces concluimos que $a_1 \wedge a_2$ y $b_1 \wedge b_2$ tienen orientaciones opuestas.

Ahora mostramos que el conjunto de k-vectores simples en un subespacio vectorial k-dimensional puede estar definido como un espacio unidimensional.

Proposición 3.2. *Si $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \neq 0$ es un k-vector simple en un subespacio vectorial k-dimensional V de $\mathbb{R}^n$, entonces todo k-vector simple en V es un múltiplo escalar de a.*

Demostración. Como $a \in V$ entonces por la Definición 2.7 $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset V$. También tenemos que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es linealmente independiente porque $a \neq 0$, luego $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ es una base para V. Supongamos ahora que existe otro k-vector simple $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$ en V, entonces podemos escribir

$$b_i = \alpha_{1i} a_1 + \cdots + \alpha_{ki} a_k$$

para $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, obtenemos la matriz

$$[b_1, \ldots, b_k]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}$$

Llamaremos α al determinante de esta matriz, es decir, $\alpha = \det(\alpha_{ij})$. Como α es un escalar entonces $\alpha a = a_1 \wedge \cdots \wedge \alpha a_i \wedge \cdots \wedge a_k$, luego existe un conjunto de vectores $\{c_1, \ldots, c_k\}$ tal que $(c_1, \ldots, c_k) = (a_1, \ldots, \alpha a_i, \ldots, a_k)$. Lo que debemos probar entonces es que $b = \alpha a$; para esto debemos considerar dos casos: cuando $\alpha = 0$ y cuando $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha = 0$ entonces $\{(b_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (b_k)_{\mathcal{B}}\}$ es linealmente dependiente, lo cual implica que $\{b_1, \ldots, b_k\}$ es linealmente dependiente. Por lo tanto $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = 0$. Además tenemos que $\alpha a = 0$, luego $b = 0 = \alpha a$.

Si $\alpha \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} b_i \cdot b_j &= (\alpha_{1i} a_1 + \cdots + \alpha_{ki} a_k) \cdot b_j \\ &= (\alpha_{1i} a_1) \cdot b_j + \cdots + (\alpha_{ki} a_k) \cdot b_j \\ &= \alpha_{1i} (a_1 \cdot b_j) + \cdots + \alpha_{ki} (a_k \cdot b_j) \\ &= (\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ki}) \cdot (a_1 \cdot b_j, \ldots, a_k \cdot b_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(b_i \cdot b_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \ldots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \ldots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} \det(b_i \cdot b_j) &= \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \ldots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \ldots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix} \\ &= \alpha \det (a_i \cdot b_j) \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento anterior tenemos que $\det(a_i \cdot b_j) = \alpha \det(a_i \cdot a_j)$. Entonces $\det(b_i \cdot b_j) = \alpha \det(a_i \cdot b_j) = \alpha^2 \det(a_i \cdot a_j)$. Por otro lado vemos que $\det(c_i \cdot c_j) = \alpha^2 \det(a_i \cdot a_j)$. Luego $\det(b_i \cdot b_j) = \det(c_i \cdot c_j)$. También obtenemos como resultado que $\det(b_i \cdot c_j) = \alpha \det(a_i \cdot c_j) = \alpha^2 \det(a_i \cdot a_j) > 0$. Por lo tanto $(b_1, \ldots, b_k) \sim (c_1, \ldots, c_k)$. Esto quiere decir que $b = \alpha a$ y de esta forma completamos la demostración. ■

3.2. Producto Escalar

Definición 3.2. El Producto Escalar o Producto Punto de dos k-vectores simples está dado por

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_k) = \det \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \ldots & a_1 \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_k \cdot b_1 & \ldots & a_k \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Observación 3.2. Notemos que a partir de la relación entre la definición anterior y la definición de orientación entre dos k-uplas de vectores podemos afirmar que el Producto Escalar es el que nos permite comparar la orientación entre dos k-vectores simples.

Para mostrar que el producto escalar entre dos k-vectores simples está bien definido necesitamos del siguiente lema:

Lema 3.1. *Sean V un subespacio k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in V$. Si x' es la proyección ortogonal de x sobre V, entonces $x \cdot y = x' \cdot y$.*

Demostración. Como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base ortonormal para V, podemos extenderla a $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ para que sea una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Luego por el Teorema 2.1 podemos escribir

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \ , \ \ y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \ \text{ y } x' = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

o bien,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ , \ \ y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i \quad \text{y} \quad x' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i .$$

También podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i$$

Luego

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \right) \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right) \cdot y + \left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \right) \cdot y \\ &= x' \cdot y + \left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \right) \cdot y \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i\right) \cdot y &= (\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) \cdot y = (\alpha_{k+1} v_{k+1}) \cdot y + \cdots + (\alpha_n v_n) \cdot y \\
&= \alpha_{k+1} v_{k+1} \cdot (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k) + \cdots + \alpha_n v_n \cdot (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k) \\
&= \alpha_{k+1} v_{k+1} \cdot \beta_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k+1} v_{k+1} \cdot \beta_k v_k + \cdots + \alpha_n v_n \cdot \beta_1 v_1 \\
&\quad + \ldots + \alpha_n v_n \cdot \beta_k v_k \\
&= \alpha_{k+1} \beta_1 (v_{k+1} \cdot v_1) + \cdots + \alpha_{k+1} \beta_k (v_{k+1} \cdot v_k) + \cdots + \alpha_n \beta_1 (v_n \cdot v_1) \\
&\quad + \cdots + \alpha_n \beta_k (v_n \cdot v_k)
\end{aligned}$$

Y como $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal, entonces

$$\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i\right) \cdot y = 0$$

Por lo tanto,

$$x \cdot y = x' \cdot y$$

Y de esta manera, el lema queda demostrado. ■

Proposición 3.3. *El producto escalar entre dos k-vectores simples está bien definido.*

Demostración. Basta con mostrar que si $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = c_1 \wedge \cdots \wedge c_k \neq 0$, entonces $\det(a_i \cdot b_i) = \det(a_i \cdot c_j)$. Sea V un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ generado por $\{b_1, \ldots, b_k\}$ y $\{c_1, \ldots, c_k\}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortonormal para V , la cual podemos extender a $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para que sea una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Sea $A', B,$ y C las matrices de tamaño $k \times k \quad A' = (a'_1, \ldots, a'_k), \quad B = (b_1, \ldots, b_k)$ y $C = (c_1, \ldots, c_k)$ calculadas con respecto a la base ortonormal para V, donde a'_i es la proyección ortogonal de a_i sobre V. Por el Lema 3.1 podemos afirmar que $\det(a_i \cdot b_j) = \det(a'_i \cdot b_j)$ y por el Lema 2.1 conocemos que $\det B = \det C$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\det(a_i \cdot b_j) &= \det(a'_i \cdot b_j) = \det(A'^T B) = (\det A')(\det B) \\
&= (\det A')(\det C) = \det(a'_i \cdot c_j) = \det(a_i \cdot c_j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el Producto Escalar entre dos k-vectores simples está bien definido. ■

Algunas propiedades del producto escalar entre vectores ordinarios que vimos en las secciones 1.2 y 1.3 funcionan también con los k-vectores simples. Entre estas tenemos:

1. Si a y b son k-vectores simples y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$ y $a \cdot b = b \cdot a$.

2. La magnitud o norma de a denotada por $\|a\|$ está dada por $\sqrt{a \cdot a}$. Es decir, $\|a\| = \sqrt{\det(a_i \cdot a_j)}$ =vol(a).

3. Si $a \neq b$, $a \cdot b = 0$ y $a \cdot a = b \cdot b = 1$ entonces $\{a, b\}$ es un conjunto ortonormal. Si solo se cumple $a \cdot b = 0$ entonces $\{a, b\}$ es ortogonal.

Ejemplo 3.3. *Algunos de los 2-vectores simples en* $\mathbb{R}^3$ *son* $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}$. *Cuando calculamos sus productos punto,*

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) &= (\mathbf{i}\wedge\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) = (\mathbf{j}\wedge\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) = 1\\ (\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) &= (\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\cdot(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) = (\mathbf{i}\wedge\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) = 0\end{aligned}$$

entonces vemos que ellos se comportan como un conjunto ortonormal.

Estamos familiarizados con el hecho de que en un espacio vectorial dos vectores son iguales si y solo si todas sus componentes son iguales y que en un espacio Euclidiano las componentes pueden ser calculadas tomando productos escalares. Un resultado similar se tiene para k-vectores simples.

Proposición 3.4. *Si a y b son k-vectores simples, entonces $a = b$ si y sólo si $a\cdot c = b\cdot c$ para todo k-vector simple c.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $a = b$ entonces inmediatamente obtenemos $a \cdot c = b \cdot c$.

$\Leftarrow$) Si $a \cdot c = b \cdot c$ entonces tomando $c = a$ tenemos que $a \cdot a = b \cdot a = a \cdot b = b \cdot b$. Puesto que $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ y $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$, entonces $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot a_j) = \det(a_i \cdot b_j) = \det(b_i \cdot b_j)$. Vemos que $a \neq 0$ si y solo si $b \neq 0$ y vol(a) =vol(b). Observemos también que a y b tienen la misma orientación si están en un mismo subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $a \neq b$, entonces esto solo se puede dar si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y $V = gen\{a_1, \ldots, a_k\} \neq W = gen\{b_1, \ldots, b_k\}$ puesto que $a \cdot c = b \cdot c$. Podemos prolongar $\{a_1, \ldots, a_k\}$ a $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots a_m\}$ y de este modo obtener una base para $V + W$, donde $a_{k+1}, \ldots, a_m$ son ortogonales a V . Construimos ahora una base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_k\}$ para W. Conocemos por la Propisición 3.2 que $b = (\beta w_1) \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k$, donde $\beta \neq 0$ puesto que $b \neq 0$. Podemos, sin perdida de generalidad, suponer que w_1 tiene una componente a_{k+1} diferente a cero, esto es, que

$w_1 \cdot a_{k+1} \neq 0$. Así, si tomamos el conjunto $\{a_{k+1}, w_2, \ldots, w_k\}$ y construimos el k-vector simple $c = a_{k+1} \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k$. Entonces

$$\begin{aligned} b \cdot c &= \det \begin{pmatrix} \beta w_1 \cdot a_{k+1} & \beta w_1 \cdot w_2 & \ldots & \beta w_1 \cdot w_k \\ w_2 \cdot a_{k+1} & w_2 \cdot w_2 & & w_2 \cdot w_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_k \cdot a_{k+1} & w_k \cdot w_2 & \ldots & w_k \cdot w_k \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \beta w_1 \cdot a_{k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ w_2 \cdot a_{k+1} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_k \cdot a_{k+1} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Claramente obtenemos un determinante de una matriz triangular, por lo tanto,

$$b \cdot c = \beta w_1 \cdot a_{k+1} \times \underbrace{1 \times \cdots \times 1}_{k-1\text{veces}} = \beta w_1 \cdot a_{k+1} \neq 0$$

Puesto que a_{k+1} es ortogonal a V, tenemos que $a \cdot c = 0$; lo cual nos muestra una contradicción dado que en principio partíamos del hecho de que $a \cdot c = b \cdot c$. Por lo tanto, $a = b$. ■

3.3. Producto Cuña

Definición 3.3. Sean $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ un k-vector simple y $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_m$ un m-vector simple. Definimos el Producto Cuña entre a y b por

$$a \wedge b = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_m) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m$$

Proposición 3.5. *El Producto Cuña entre un k-vector y un m-vector simple está bien definido.*

Demostración. Nuestra demostración se reduce al hecho de que si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = a'_1 \wedge \cdots \wedge a'_k$ entonces

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m = a'_1 \wedge \cdots \wedge a'_k \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m.$$

Supongamos en primer lugar que $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}$ es un conjunto linealmente dependiente. De este modo tenemos que $\{a'_1, \ldots, a'_k, b_1, \ldots, b_m\}$ también es un conjunto linealmente dependiente y nuestra igualdad deseada sigue trivialmente. Supongamos ahora que $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}$ y $\{a'_1, \ldots, a'_k, b_1, \ldots, b_m\}$ son conjuntos linealmente independientes. Entonces existen los espacios k-dimensional y m-dimensional $V = gen\{a_1, \ldots, a_k\} = gen\{a'_1, \ldots, a'_k\}$ y $W = gen\{b_1, \ldots, b_m\}$ respectivamente. Construimos a continuación una base ortonormal $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_{k+m}\}$ para $V \oplus W$ de tal manera que $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ sea una base para V. (Dado que V y W no son necesariamente ortogonales, no podemos asegurar que $\mathcal{B}_1$ es una base para W.) Sean E y E' las matrices $(k+m) \times (k+m)$

$$E = [a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m]_{\mathcal{B}_1} \quad y \quad E' = [a'_1, \ldots, a'_k, b_1, \ldots, b_m]_{\mathcal{B}_1}$$

Definimos entonces $T : V \oplus W \to V \oplus W$ para ser la transformación lineal tal que $T(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) = (a'_1, \ldots, a'_k, b_1, \ldots, b_m)$, y denotamos por F la matriz $(k+m) \times (k+m)$ de T con respecto a $\mathcal{B}_1$. Vemos que $E' = FE$. Si llegamos a que $\det F = 1$, entonces daremos por terminada la demostración.

Sean A y A' las matrices $k \times k$ calculadas con respecto a $\mathcal{B}_2$, es decir $A = [a_1, \ldots, a_k]_{\mathcal{B}_2}$ y $A' = [a'_1, \ldots, a'_k]_{\mathcal{B}_2}$. Entonces la restricción de T para V está dada por $T|_V \colon V \to V$, y de esta forma obtenemos la matriz $k \times k$ de $T|_V$ calculada con respecto a $\mathcal{B}_2$ la cual denotamos por F'. Vemos que $A' = F'A$ y por el Lema 2.1 tenemos que $\det F' = 1$. Ahora, sea $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base ortonormal para W, entonces el conjunto

$$\mathcal{B}_3 = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\}$$

es una base para $V \oplus W$, aunque no necesariamente ortonormal.

Supongamos que queremos calcular la matriz G de tamaño $(k+m) \times (k+m)$ de T con respecto a $\mathcal{B}_3$. Puesto que $T|_V$ lleva V a V, es decir $T|_V$ es la transformación idéntica, vemos que

$$G = \begin{pmatrix} F' & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz idéntica de tamaño $m \times m$. Puesto que F y G son matrices de T con respecto a bases diferentes, tenemos $F = MGM^{-1}$ para cualquier matriz cuadrada M. Por consiguiente, $\det F = \det G = \det F' = 1$, y obtenemos la conclusión deseada. ■

Ejemplo 3.4. *Consideremos el 2-vector simple* $a = (-3,1,5) \wedge (-1,4,-6)$ *en* $\mathbb{R}^3$ *y el 3-vector simple* $b = \left(\sqrt{3}, -7, \frac{1}{2}\right) \wedge (-2,-3,6) \wedge (1,-2,8)$ *también en* $\mathbb{R}^3$*. Entonces por la Definición 3.3 obtenemos el 5-vector simple*

$$a \wedge b = (-3,1,5) \wedge (-1,4,-6) \wedge (\sqrt{3}, -7, \frac{1}{2}) \wedge (-2,-3,6) \wedge (1,-2,8)\,.$$

Si consideramos ahora el 1-vector simple $c = \left(-\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2}\right)$ *entonces*

$$a \wedge b \wedge c = (-3,1,5) \wedge (-1,4,-6) \wedge \left(\sqrt{3}, -7, \frac{1}{2}\right) \wedge (-2,-3,6) \wedge (1,-2,8) \wedge \left(-\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2}\right)$$

Y vemos claramente que $a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

A raíz de esto, obtenemos el siguiente resultado inmediato y trivial.

Proposición 3.6. *Sean* a, b *y* c k-,l-, *y* m-*vectores simples respectivamente en un mismo subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Esto es, el Producto Cuña entre k-,l-, *y* m-*vectores simples es asociativo.*

3.4. Transformaciones lineales en k-vectores simples

Teniendo en cuenta que en el álgebra lineal encontramos con mucha frecuencia una clase especial de funciones llamadas Transformaciones lineales, queremos presentar en esta sección algo muy básico acerca de como se definen las Transformaciones lineales en k-vectores simples. Además cabe notar, que no incluiremos pruebas de los resultados que se encuentran en esta sección.

Ejemplo 3.5. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la transformación lineal definida por* $T(x, y) = (-x, y)$. *Si tomamos los vectores* $a_1 = (1, -3)$, $a_2 = (2, 5)$, $b_1 = (1, 2)$ *y* $b_2 = (-3, 5)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *entonces tenemos que*

$$T(a_1) = (-1, -3)\,,\ T(a_2) = (-2, 5)\,,\ T(b_1) = (-1, 2)\ \ y\ T(b_2) = (3, 5)$$

Por otro lado, si hacemos $a = a_1 \wedge a_2$ *y* $b = b_1 \wedge b_2$ *vemos que* $\det(a_i \cdot a_j) = \det(b_i \cdot b_j) = \det(a_i \cdot b_j) = 121$. *Entonces esto nos permite afirmar que* $a = b$.

De igual manera notemos que

$$\det(T(a_i) \cdot T(a_j)) = \det(T(b_i) \cdot T(b_j)) = \det(T(a_i) \cdot T(b_j)) = 121.$$

Por lo tanto podemos concluir que $T(a_1) \wedge \cdots \wedge T(a_k) = T(b_1) \wedge \cdots \wedge T(b_k)$.

A partir de este ejemplo tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.7. *Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ y $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$ son k-vectores simples en $\mathbb{R}^m$ tales que $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$, entonces $T(a_1) \wedge \cdots \wedge T(a_k) = T(b_1) \wedge \cdots \wedge T(b_k)$.*

La prueba de esta proposición puede encontrarse en [5]. La Proposición 3.7 nos permite afirmar lo siguiente:

Definición 3.4. Si $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces existe una transformación $\wedge^k T$ de k-vectores simples de $\mathbb{R}^m$ a k-vectores simples de $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\wedge^k T(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) = T(a_1) \wedge \cdots \wedge T(a_k)$$

El siguiente ejemplo ilustra como funciona la transformación $\wedge^k T$ en 2-vectores simples. Es decir, vamos a hablar específicamente de la transformación $\wedge^2 T$.

Ejemplo 3.6. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2 - \frac{1}{2}x_1)$. Entonces, para el 2-vector simple $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$, donde $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, -1)$, el resultado de aplicar $\wedge^2 T$ es*

$$\wedge^2 T\ (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \left(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \wedge (2\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Geometricamente, podemos ver esta aplicación en la Figura 3.2.

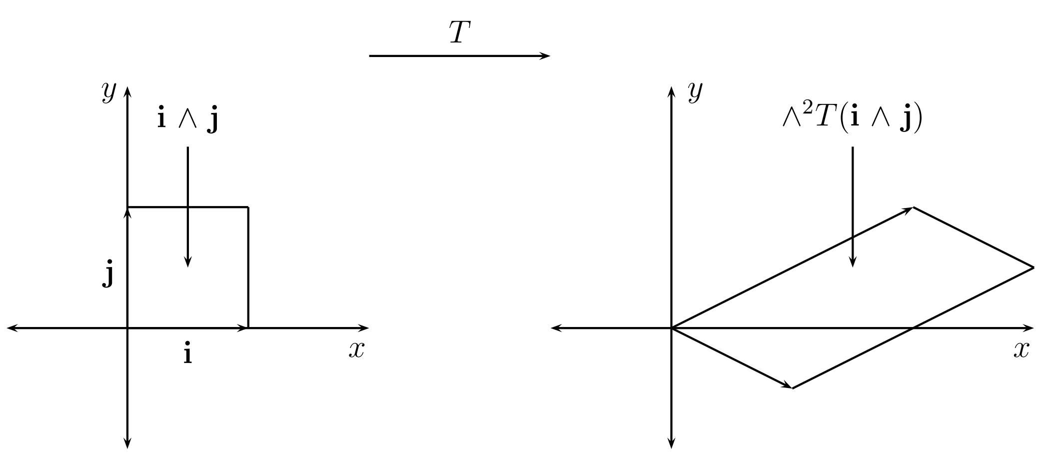

Figura 3.2. $\wedge^2 T$ aplicado a un 2-vector simple.

Aunque la Definición 2.8 nos dice que un k-vector simple puede encontrarse en un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es necesario construir un Espacio Vectorial que contenga los k-vectores simples y nos permita realizar las operaciones que definimos anteriormente. En la siguiente sección realizaremos la construcción de este Espacio Vectorial con el fin de caracterizar nuestros k-vectores simples y al mismo tiempo evitar cualquier tipo de ambigüedad con respecto al hecho de que los elementos de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ deben ser solo vectores ordinarios y no k-vectores simples.

3.5. El Espacio Vectorial $\Lambda^k\mathbb{R}^n$

Si bien ya hemos definido algunas operaciones entre k-vectores simples, es claro notar que no hemos introducido en ese listado la suma entre k-vectores simples. En este trabajo no daremos una definición formal de suma entre k-vectores simples aunque veremos en el último capítulo una noción de *ley de adición de vectores*, pero más como un resultado geométrico que como una función que actúa sobre los k-vectores simples.

Sin embargo, desde el punto de vista de función, veremos a continuación que la operación suma entre k-vectores simples existe y que a partir de ese hecho podemos ver que existe un espacio vectorial para los k-vectores simples.

Para ver esto, lo primero que vamos a hacer es definir una aplicación que vaya desde un conjunto que contenga los k-vectores simples hasta $\mathbb{R}$. De esta manera, vamos a suponer que $\mathcal{S}_k$ es el conjunto de los k-vectores simples en algún $\mathbb{R}^n$ fijo, y definiremos fijando un a arbitrario de $\mathcal{S}_k$, la aplicación $\phi_a : \mathcal{S}_k \to \mathbb{R}$ por $\phi_a(b) = a \cdot b$ para todo k-vector simple b.

Por lo tanto, por la Proposición 3.4 podemos ver que hay una correspondencia uno a uno entre $\{\phi_a : a \in \mathcal{S}_k\}$ y $\mathcal{S}_k$. Este hecho es muy importante puesto que podemos, sin ningún problema, multiplicar los ϕ_a por escalares y adicionarlos. Es decir, para $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y k-vectores simples de la forma $a_i = a_{i1} \wedge \cdots \wedge a_{ik}$, donde $a_{i1}, \ldots, a_{ik} \in \mathbb{R}^n$ y $a_i \in \mathcal{S}_k$, podemos escribir:

$$(\lambda_1\phi_{a_1} + \cdots + \lambda_m\phi_{a_m})(b) = \lambda_1 a_1 \cdot b + \cdots + \lambda_m a_m \cdot b$$

donde por supuesto, $b \in \mathcal{S}_k$. A su vez, esta correspondencia nos permite escribir la combinación lineal

$$\lambda_1\phi_{a_1} + \cdots + \lambda_m\phi_{a_m} \text{ como } \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m.$$

Ahora, si llamamos $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los a_i con las operaciones suma y multiplicación por un escalar, donde $1 \leq k \leq n$, entonces podemos ver claramente que $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Observación 3.3. Dado que $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = 0$ si $k > n$, entonces $\Lambda^k\mathbb{R}^n = \{0\}$ cuando $k > n$. Además es estándar y conveniente tomar a $\Lambda^0\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$.

De esta manera, hemos resuleto nuestro problema de construir un Espacio Vectorial que contenga nuestros k-vectores simples.

A raíz de los resultados anteriores vemos que para $\sum_i \lambda_i a_i \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$ y para un k-vector simple b, podemos remplazar la función simbólica $\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)(b)$ por $\left(\sum_i \lambda_i a_i\right) \cdot b$. Como $\left(\sum_i \lambda_i a_i\right) \cdot b = \sum_i \lambda_i (a_i \cdot b)$, podemos extender la definición de producto punto a $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ para establecer

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right) \cdot \left(\sum_j \xi_j b_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \xi_j (a_i \cdot b_j)$$

donde los a_i y los b_j son k-vectores simples.

Puesto que podemos escribir a $b \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$ como $\left(\sum_j \xi_j b_j\right)$ y como $\left(\sum_j \xi'_j b'_j\right)$ entonces

$$\sum_{i,j} \lambda_i \xi_j (a_i \cdot b_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \xi'_j (a_i \cdot b'_j).$$

Por lo tanto, podemos asegurar que el Producto Punto en $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ está bien definido.

A partir de este resultado tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y a,b,$c \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$, donde $1 \leq k \leq n$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. $a \cdot b = b \cdot a$
2. $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo 3.7. *En el Ejemplo 3.3 vimos que* $\{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}, \mathbf{i} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}\}$ *se comportaba como un conjunto ortonormal, ahora podemos asegurar que éste es un conjunto ortonormal en* $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ *De este modo, si* $a = \alpha_1(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) + \alpha_2(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) + \alpha_3(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k})$ *y* $b = \beta_1(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) + \beta_2(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) + \beta_3(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k})$ *entonces después de aplicar repetidas veces el Teorema 3.1 tenemos que* $a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.

A continuación vamos a encontrar una base para el espacio vectorial $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.

Supongamos que tenemos k-vectores simples $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ y $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$. Puesto que $a \cdot b = \det(a_i \cdot b_j)$ y a está completamente determinado por valores de la forma $a \cdot b$, entonces a debe cumplir la propiedad de linealidad en cada uno de los vectores $a_1, \ldots, a_k$. Por ejemplo, para el primer factor de a tenemos

$$(\lambda a_1) \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k = \lambda(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k)$$

y

$$(a_1 + a_1') \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_k = (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k) + (a_1' \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k)$$

Podemos usar esta idea para encontrar bases para $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.8. *Consideremos el caso especial* $\Lambda^2\mathbb{R}^3$. *Todo 2-vector simple aquí tiene la forma*

$$a = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \wedge (\alpha_1'\mathbf{i} + \alpha_2'\mathbf{j} + \alpha_3'\mathbf{k})$$

Apelando a la linealidad varias veces, tenemos que

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1\alpha_1'(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) + \alpha_1\alpha_2'(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) + \alpha_1\alpha_3'(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + \\ &\quad \alpha_2\alpha_1'(\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}) + \alpha_2\alpha_2'(\mathbf{j} \wedge \mathbf{j}) + \alpha_2\alpha_3'(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + \\ &\quad \alpha_3\alpha_1'(\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}) + \alpha_3\alpha_2'(\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}) + \alpha_3\alpha_3'(\mathbf{k} \wedge \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$, *entonces los 2-vectores simples de estas tres formas desaparecen y otros 2-vectores pueden ser inversos si se les cambia el signo, como el caso de* $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$. *De esta manera tenemos que*

$$a = (\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_2')\,(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) + (\alpha_1\alpha_3' - \alpha_3\alpha_1')\,(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + (\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2')\,(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k})$$

Haciendo $\beta_{12} = \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_2'$, $\beta_{13} = \alpha_1\alpha_3' - \alpha_3\alpha_1'$ *y* $\beta_{23} = \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2'$ *nos queda finalmente*

$$a = \beta_{12}(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) + \beta_{13}(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + \beta_{23}(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) \quad (3.3)$$

Este resultado nos permite constatar que todo elemento de $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ tiene la forma de (3.3). *Es decir, cualquier 2-vector simple en $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal de* $\{\mathbf{i}\wedge\mathbf{j},\ \mathbf{i}\wedge\mathbf{k},\ \mathbf{j}\wedge\mathbf{k}\}$.

Por otro lado, es claro ver que $\beta_{12} = a\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})$, $\beta_{13} = a\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k})$ *y* $\beta_{23} = a\cdot(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k})$

Ahora, supongamos que $c = \gamma_{12}(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) + \gamma_{13}(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) + \gamma_{23}(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) = 0$. *Entonces* $\gamma_{12} = c\cdot(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) = 0$, *y, de manera similar* $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$. *De este modo* $\{\mathbf{i}\wedge\mathbf{j},\ \mathbf{i}\wedge\mathbf{k},\ \mathbf{j}\wedge\mathbf{k}\}$ *no es solamente un conjunto ortonormal sino además es una base para* $\Lambda^2\mathbb{R}^3$.

El razonamiento del Ejemplo 3.8 lo podemos extender para obtener la siguiente generalización:

Teorema 3.2. *Si $1 \leq k \leq n$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de los k-vectores simples de la forma $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}$, tales que $i_1 < \cdots < i_k$, es una base ortonormal para $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 3.9. *Consideremos a $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, la cual es una base ortonormal para $\mathbb{R}^4$, entonces una base ortonormal para $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ se compone de los elementos*

$$e_1\wedge e_2,\quad e_1\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_4,\quad e_2\wedge e_3,\quad e_2\wedge e_4,\quad e_3\wedge e_4$$

Observación 3.4. Puesto que $\{\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}, \mathbf{i}\wedge\mathbf{k}, \mathbf{j}\wedge\mathbf{k}\}$ es una base para $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ entonces $dim\Lambda^2\mathbb{R}^3 = 3$. De igual forma tenemos que $dim\Lambda^2\mathbb{R}^4 = 6$, dado que

$$\{e_1\wedge e_2,\quad e_1\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_4,\quad e_2\wedge e_3,\quad e_2\wedge e_4,\quad e_3\wedge e_4\}$$

es una base para $\Lambda^2\mathbb{R}^4$. Esto nos permite concluir que $dim\Lambda^k\mathbb{R}^n = \binom{n}{k}$ y a la vez afirmar que el Espacio $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^m$ donde $m = \binom{n}{k}$ y $1 \leq k \leq n$.

También queremos, por supuesto, extender la noción del producto cuña a $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Esto lo podemos realizar estableciendo

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\wedge\left(\sum_j \xi_j b_j\right) = \sum_{i,j}\lambda_i\xi_j(a_i\wedge b_j)$$

donde los a_i y b_j son k- y m-vectores respectivamente. Como en el caso del producto punto, se puede demostrar que el producto cuña está bien definido. Sin embargo la prueba no es tan simple y no vamos a entrar en detalles aquí. Si aceptamos esta definición entonces podemos establecer el siguiente teorema que será de gran utilidad en el próximo capítulo.

Teorema 3.3. *Sean a y b k- y m-vectores simples respectivamente, c y d r-vectores simples y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. $\lambda(a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b)$
2. $a \wedge (c + d) = a \wedge c + a \wedge d$
3. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
4. $a \wedge b = (-1)^{km} b \wedge a$

Capítulo 4

Aplicaciones

Aunque ya definimos los k-vectores simples y logramos introducirlos dentro de un espacio vectorial, este trabajo no tendría ningún sentido si no mencionamos algunos resultados que podemos obtener a partir de todo el contenido estudiado.

En este capítulo aplicaremos lo estudiado en los capítulos anteriores acerca de k-vectores simples y del Producto Cuña para llegar a algunas generalizaciones geométricas tales como la Ley de los Cosenos para n-simplejos, la Ley del Paralelogramo para un paralelepípedo n-dimensional, y el Teorema de Pitágoras para un n-simplejo ortogonal. También llegaremos a generalizaciones de tipo algebraico como el Teorema de Binet-Cauchy.

4.1. El Operador Estrella

En esta sección, vamos a mostrar cómo a partir de un k-vector simple a, podemos definir un $(n-k)$-vector simple ${}^*a$ el cual es el complemento ortogonal de a. A partir de esto, describiremos algunos resultados que ilustraremos con ejemplos sencillos pero no demostraremos puesto que no es el objetivo principal de este trabajo.

Definición 4.1. Sea $a \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$. Si existe un $b = (b_1, \ldots, b_{n-k})$ tal que los vectores $b_1, \ldots, b_{n-k}$ son ortogonales a a entonces decimos que b es el *complemento ortogonal* de a.

Proposición 4.1. *Para $a \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$, existe un $^*a \in \Lambda^{(n-k)}\mathbb{R}^n$ tal que $^*a$ es el complemento ortogonal de a.*

Esta proposición nos señala una tranformación $a \mapsto^* a$ que va de un k-vector simple a un $(n-k)$-vector simple; esta transformación recibe el nombre de *Operador Estrella.* En el siguiente ejemplo mostramos como funciona esto en vectores de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.1. *Consideremos los vectores $a_1 = (1,1,0)$ y $a_2 = (0,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$. Si hacemos $a = a_1 \wedge a_2$, entonces vemos que el vector $(1,0,1)$ es ortogonal a $\{a_1, a_2\}$. Luego haciendo uso de la Proposición 4.1, tenemos que $^*a = (-1,2,2)$.*

La interpretación geométrica de este ejemplo la podemos observar en la Figura 4.1.

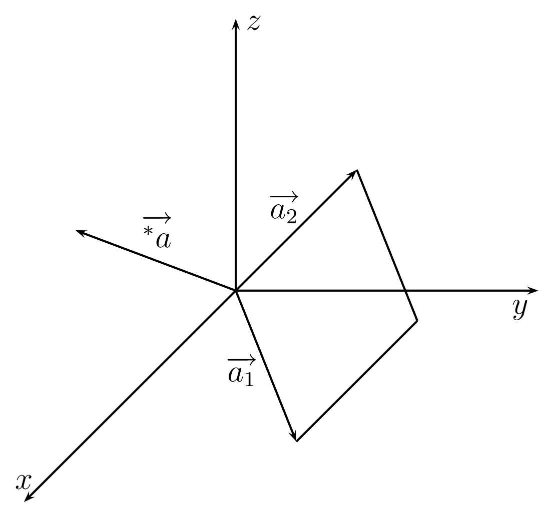

Figura 4.1. El Operador Estrella en vectores de $\mathbb{R}^3$

La idea del Operador Estrella nos permite obtener un resultado bastante interesante gracias al hecho de que $^*a$ es el complemento ortogonal de a. El siguiente ejemplo nos dará una pauta del resultado al que queremos llegar.

Ejemplo 4.2. *Consideremos los vectores* **i**,**j**,**k** *en $\mathbb{R}^3$. Sabemos que* **i**×**j**=**k**, **j**×**k**=**i** *y* **k**×**i**=**j**. *Pero si hacemos uso de la Proposición 4.1 tenemos que*

$$^*(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{k},\ ^*(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{i}\ \ y\ ^*(\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{j}$$

Luego finalmente podemos concluir que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} =^* (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{k},\ \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} =^* (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{i} \quad y \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} =^* (\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{j}$$

Esta idea la podemos generalizar a continuación.

Proposición 4.2. *Sean a y b vectores en $\mathbb{R}^3$ (o 1-vectores simples en $\Lambda\,\mathbb{R}^3$). Entonces el Producto Cruz entre a y b está dado por*

$$a \times b =^* (a \wedge b)$$

donde $a \wedge b$ representa por supuesto, el Producto Cuña entre a y b.

Este resultado es bastante interesante, ya que nos permite entender porque el Producto Cuña es considerado como una generalización del Producto Vectorial (o Producto Cruz) en tres dimensiones.

4.2. k-vectores simples determinados por $k+1$ puntos

Para el desarrollo de esta sección es necesario hacer las siguientes convenciones:

1. De aquí en adelante escribiremos nuestros k-vectores simples en términos de puntos en $\mathbb{R}^n$. Es decir, el k-vector simple $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ lo representaremos por $A_0A_1 \cdots A_k$, donde $A_0, A_1, \ldots, A_k$ son puntos en $\mathbb{R}^n$.
2. Representaremos geométricamente nuestros k-vectores simples como simplejos orientados más que como paralelepípedos orientados. (Ver Figura 4.2)

La segunda convención nos indica que lo primero que debemos hacer es definir un simplejo en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.2. El simplejo S determinado por los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_k$ en $\mathbb{R}^n$, es

$$S = \left\{ t_0A_0 + \cdots + t_kA_k : t_i \in \mathbb{R}, 0 \leq t_i, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

De la definición anterior podemos afirmar que S es el conjunto convexo más pequeño que contiene a $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Vemos también que $A_0, A_1, \ldots, A_k$ son los vértices de

S. Si le asignamos a S una orientación, podemos representar la clase de equivalencia para los k-simplejos orientados por un k-vector simple:

$$A_0A_1\cdots A_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{k!}(A_0A_1)\wedge(A_0A_2)\wedge\cdots\wedge(A_0A_k) \qquad (4,1)$$

donde cada A_0A_i es un vector en $\mathbb{R}^n$. El factor $\frac{1}{k!}$ es la razón entre el volumen del simplejo representado por $A_0A_1\cdots A_k$ y el volumen del paralelepípedo representado por $(A_0A_1)\wedge(A_0A_2)\wedge\cdots\wedge(A_0A_k)$.

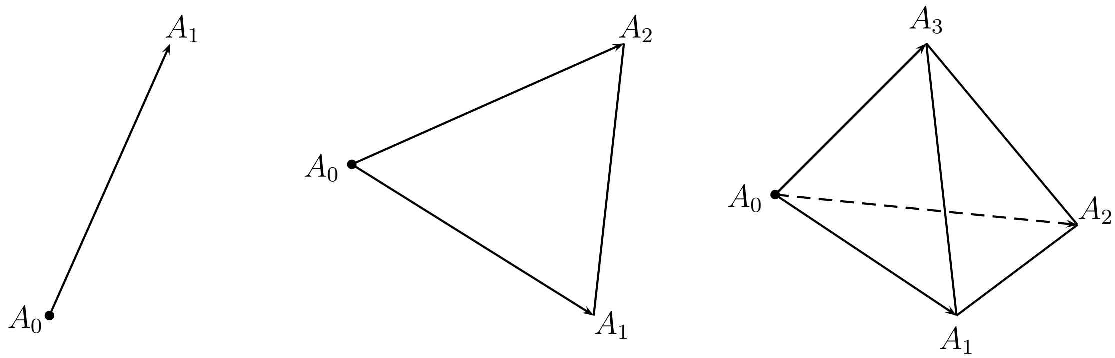

Figura 4.2. k-vectores simples de la forma $A_0\cdots A_k$

El siguiente Teorema tiene un significado geométrico demasiado importante.

Teorema 4.1. *Si $A_0\cdots A_k$ es un k-simplejo, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si intercambiamos A_i y A_j, donde $i<j$, entonces*

$$A_0\cdots A_j\cdots A_i\cdots A_k = -A_0\cdots A_i\cdots A_j\cdots A_k.$$

2. *Si $k\geq 2$ entonces*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i A_0A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_k = 0,$$

donde $\overline{A_i}$, denota omisión de A_i.

Demostración. 1. En primer lugar consideremos el caso donde $i=0$ y $j=1$.

Notemos que

$$\begin{aligned} A_0A_1\cdots A_k &= \frac{1}{k!}\left\{\begin{array}{c}(A_0A_1)\wedge(A_0A_1+A_1A_2)\wedge(A_0A_1+A_1A_3)\\ \wedge\cdots\wedge\\ (A_0A_1+A_1A_k)\end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{k!}\left\{\begin{array}{c}[(A_0A_1)\wedge(A_0A_1)+(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)]\\ \wedge\\ (A_0A_1+A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_0A_1+A_1A_k)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

Puesto que $(A_1A_0)\wedge(A_1A_0)=0$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} A_0A_1\cdots A_k &= \frac{1}{k!}(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_0A_1+A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_0A_1+A_1A_k) \\ &= \frac{1}{k!}\left\{\begin{array}{c}[(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_0A_1)+(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_1A_3)]\\ \wedge\cdots\wedge\\ (A_0A_1+A_1A_k)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

Como $(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_0A_1)=0$, entonces nos queda

$$A_0A_1\cdots A_k=\frac{1}{k!}(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_0A_1+A_1A_k)$$

De esta manera, aplicando repetidamente la Propiedad 2 del Teorema 3.3 obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} A_0A_1\cdots A_k &= \frac{1}{k!}(A_0A_1)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_1A_k) \\ &= -\frac{1}{k!}(A_1A_0)\wedge(A_1A_2)\wedge(A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_1A_k) \\ &= -A_1A_0A_2\cdots A_k\end{aligned}$$

Los casos donde $j>1$ se obtienen similarmente. Para los otros valores de i donde $j>i\geq 1$, la prueba es una consecuencia inmediata de (4.1).

2. Notemos que

$$\begin{aligned} A_1A_2\cdots A_k &= \frac{1}{(k-1)!}(A_1A_2)\wedge(A_1A_3)\wedge\cdots\wedge(A_1A_k) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left\{\begin{array}{c}(A_1A_0+A_0A_2)\wedge(A_1A_0+A_0A_3)\\ \wedge\cdots\wedge\\ (A_1A_0+A_0A_k)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

Aplicando repetidamente las Propiedades 2 y 4 del Teorema 3.3 tenemos que

$$A_1A_2\cdots A_k=\frac{1}{(k-1)!}\left\{\begin{array}{c}(A_1A_0)\wedge(A_1A_0)\wedge(A_0A_2)+\cdots+\\ (A_1A_0)\wedge(A_1A_0)\wedge(A_0A_{k-1})+\\ (A_0A_2)\wedge(A_0A_3)\wedge\cdots\wedge(A_0A_k)+\\ (A_1A_0)\wedge(A_0A_3)\wedge(A_0A_4)\wedge\cdots\wedge(A_0A_k)+\\ (A_0A_2)\wedge(A_1A_0)\wedge(A_0A_4)\wedge\cdots\wedge(A_0A_k)+\cdots+\\ (A_0A_2)\cdots\wedge(A_0A_{k-1})\wedge(A_1A_0)\end{array}\right\}$$

Puesto que

$$(A_1A_0) \wedge (A_1A_0) \wedge (A_0A_2) = \cdots = (A_1A_0) \wedge (A_1A_0) \wedge (A_0A_{k-1}) = 0,$$

entonces la expresión se nos reduce a

$$\begin{aligned} A_1A_2\cdots A_k &= \frac{1}{(k-1)!}(A_0A_2) \wedge (A_0A_3) \wedge \cdots \wedge (A_0A_k) + \\ & \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=2}^{k} \begin{bmatrix} (A_0A_2) \wedge \cdots \wedge (A_0A_{i-1}) \\ \wedge(A_1A_0) \wedge (A_0A_{i+1}) \wedge \cdots \wedge (A_0A_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vemos que A_1A_0 toma la i-ésima posición en la sumatoria pero queremos que esté siempre en el primer lugar. Como hay $i-1$ 1-vectores simples por delante de A_1A_0 entonces por la Propiedad 4 del Teorema 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} A_1A_2\cdots A_k &= A_0A_2A_3\cdots A_k + \\ & \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=2}^{k} \begin{bmatrix} (-1)^{i-1}(A_0A_1) \wedge (A_0A_2) \wedge \cdots \wedge \overline{(A_0A_i)} \\ \wedge \cdots \wedge (A_0A_k) \end{bmatrix} \\ &= A_0A_2A_3\cdots A_k + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}A_0A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_k \end{aligned}$$

Luego

$$A_1A_2\cdots A_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_0A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_k$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_0A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_k - A_1A_2\cdots A_k = 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}A_0A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_k = 0.$$

■

Este Teorema y su prueba también podemos encontrarlo en [5].

Ejemplo 4.3. *Consideremos los vectores de* $\mathbb{R}^2$ A_0A_1, A_0A_2 *y* A_1A_2 *que están en la Figura 4.3. La ley de Adición de Vectores nos dice que* $A_0A_2 = A_0A_1 + A_1A_2$. *Luego* $A_1A_2 - A_0A_2 + A_0A_1 = 0$. *Por lo tanto, este resultado es equivalente a la segunda parte del Teorema, con* $k = 2$.

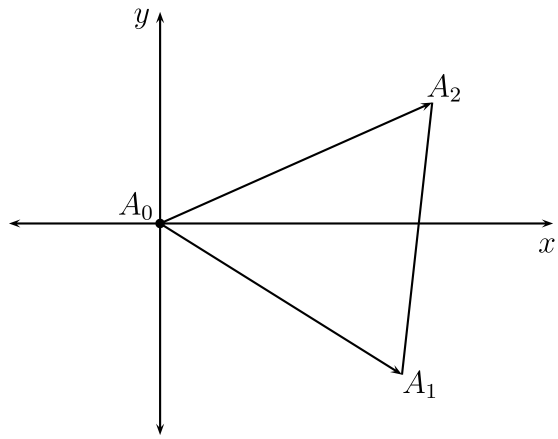

Figura 4.3. Ley de Adición de Vectores.

A partir del ejemplo anterior, podemos interpretar la segunda parte del Teorema 4.1 como una generalización de la Ley de Adición de Vectores. Es decir, que si las caras $(k-1)$-dimensionales de un k-simplejo son vistas como $(k-1)$-vectores con orientaciones apropiadas, entonces la suma de estos "vectores-cara" es 0.

4.3. La Ley de los Cosenos

Anteriormente vimos que $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^m$, donde $m = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ y $1 \leq k \leq n$. Por esta razón podemos tener la desigualdad triangular en $\Lambda^k\mathbb{R}^n$, la cual definimos de la siguiente manera:

Definición 4.3. Si a y b son k-vectores simples en $\mathbb{R}^n$ entonces $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \, \|b\|$

De igual manera podemos definir el ángulo entre dos k-vectores simples.

Definición 4.4. Si a y b son k-vectores simples diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$, entonces el ángulo entre a y b es el único θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y además

$$cos\ \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \, \|b\|}.$$

Ejemplo 4.4. *Consideremos los vectores* $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $b_1 = (0, 1, -1)$, $b_2 = (1, 1, -2)$ *en* $\mathbb{R}^3$. *Haciendo* $a = a_1 \wedge a_2$ *y* $b = b_1 \wedge b_2$, *entonces*

$$cos\ \theta = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1$$

Luego $\theta = 0$. *Por lo tanto, el ángulo entre los paralelogramos del Ejemplo 2.5 es 0.*

La Definición 4.4 nos permite hablar acerca del ángulo entre dos caras cualesquiera de un n-simplejo $A_0 \cdots A_n$, donde $n \geq 2$. A partir de esto, generalizaremos la Ley de Cosenos de triángulos para n-simplejos en el siguiente Teorema.

Teorema 4.2. *Sea* F_i *la cara* $(n-1)$*-dimensional* $A_0 \cdots \overline{A_i} \cdots A_n$ *que no contiene el vértice* A_i, *y sea* θ_{jl} *el ángulo entre* F_j *y* F_l. *Entonces para cualquier cara* F_i *de un* n*-simplejo* $A_0 \cdots A_n$ *se cumple que*

$$\|F_i\|^2 = \sum_{j \neq i} \|F_j\|^2 + 2 \sum_{j<l\ j,l \neq i} (-1)^{\ j+l}\ \|F_j\|\ \ \|F_l\|\ cos\ \theta_{jl}.$$

Demostración. Para la cara F_i podemos, por el Teorema, escribir

$$F_i = \sum_{j \neq i} (-1)^{\ j+1} F_j = \sum_{l \neq i} (-1)^{\ l+1} F_l;$$

y puesto que $\|F_i\|^2 = F_i \cdot F_i$ entonces tenemos

$$\|F_i\|^2 = \left(\sum_{j \neq i} (-1)^{\ j+1}\ F_j \right) \cdot \left(\sum_{l \neq i} (-1)^{\ l+1}\ F_l \right)$$

Aplicando repetidas veces la Propiedad 3 del Teorema 3.1 obtenemos

$$\|F_i\|^2 = \sum_{j \neq i} \|F_j\|^2 + 2 \sum_{j<l\ j,l \neq i} (-1)^{\ j+l} F_j \cdot F_l$$

Como $cos\ \theta_{jl} = \frac{F_j \cdot F_l}{\|F_j\| \|F_l\|}$ entonces finalmente obtenemos

$$\|F_i\|^2 = \sum_{j \neq i} \|F_j\|^2 + 2 \sum_{j<l\ j,l \neq i} (-1)^{\ j+l}\ \|F_j\|\ \ \|F_l\|\ cos\ \theta_{jl}.$$

donde $0 \leq j$, $j \leq n$. ■

Este resultado también puede ser visto en [4].

Calcular el volumen de una cara $(n-1)$-dimensional de un n-simplejo utilizando la la Ley de los Cosenos no es un proceso que resulte tan rápido puesto que implica cálculos tediosos. Sin embargo, hemos introducido este resultado porque nos ayudará más adelante en la construcción del Teorema de Pitágoras para n-simplejos ortogonales.

4.4. La Ley del Paralelogramo

La Ley del Paralelogramo en dos dimensiones puede ser entendida de la siguiente manera: "*Para cualquier paralelogramo dado, la suma de sus lados al cuadrado es igual a la suma de sus diagonales al cuadrado*", es decir

$$\sum lados^2 = \sum diagonales^2.$$

Ahora vamos a generalizar esta idea para paralelepípedos n-dimensionales.

A partir de lo visto en la sección 2.2, consideraremos un paralelepípedo n-dimensional $\mathcal{P}$ cuyas caras estan determinadas por los vectores $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathbb{R}^n$ y cuyos vértices son de la forma $A = \sum_{i=1}^{n} \tau_i a_i$ donde $\tau_i = 0$ o $\tau_i = 1$; esto último implica que el origen es un vértice del paralelepípedo. A partir de esto realizaremos las siguientes convenciones:

1. Llamaremos $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ a la secuencia binaria asociada con A.
2. Diremos que dos vértices A y B son adyacentes si $AB = \pm a_i$, para algún i.
3. Definiremos $F_i = a_1 \wedge \cdots \wedge \overline{a_i} \wedge \cdots \wedge a_n$ para ser una cara de $\mathcal{P}$.
4. Consideraremos las diagonales de $\mathcal{P}$ como simplejos orientados asociados con los vértices.

La última convención nos dirige hacia la definición de la diagonal de un paralelepípedo.

Definición 4.5. Sea A un vértice de un paralelepípedo n-dimensional $\mathcal{P}$. Entonces la diagonal asociada a A es el $(n-1)$-vector simple

$$D_A = A_1 \cdots A_n \;\text{ donde } AA_i = \pm a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Puesto que $AA_i = \pm a_i$ entonces vemos claramente que $A_1, \ldots, A_n$ son los vértices adyacentes a A. De este modo, existe una secuencia binaria $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ asociada a A tal que si $\tau_i = 0$, entonces $AA_i = a_i$; y si $\tau_i = 1$, entonces $AA_i = -a_i$. Por lo tanto, podemos asegurar que

$$AA_i = (-1)^{\tau_i} a_i \text{ y hacemos } \iota_A = (-1)^{\tau_1 + \ldots + \tau_n}.$$

De este modo, podemos extender un poco más el significado de la diagonal de un paralelepípedo n-dimensional.

De la fórmula (4.1) podemos deducir que

$$F_i = a_1 \wedge \cdots \wedge \overline{a_i} \wedge \cdots \wedge a_n = (n-1)! AA_1 \cdots A_n$$

Como $AA_i = \pm a_i$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces tenemos que

$$F_i = (n-1)!(-1)^{\tau_1} AA_1 \wedge \cdots \wedge (-1)^{\tau_i} \overline{AA_i} \wedge \cdots \wedge (-1)^{\tau_n} AA_n$$

Luego

$$F_i = a_1 \wedge \cdots \wedge \overline{a_i} \wedge \cdots \wedge a_n = (-1)^{\tau_i} \quad \iota_A \quad (n-1)! \ A_1 \cdots \overline{A_i} \cdots A_n \quad (4,2)$$

Por el Teorema 4.1 tenemos que $A_1 A_2 \cdots A_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\ i+1} AA_1 \cdots \overline{A_i} \cdots A_n$. Haciendo uso de la Definición 4.5 y de la fórmula (4.2), obtenemos

$$D_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{\tau_i + i + 1} \ \iota_A}{(n-1)!} F_i \quad (4.3)$$

Ejemplo 4.5. *Podemos hallar una diagonal para el paralelepípedo de dimensión 3 del Ejemplo 2.3. Si llamamos*

$$A = O + a_1 + a_3, \ A_1 = O + a_1, \ A_2 = O + a_1 + a_2 + a_3 \ y \ A_3 = O + a_3$$

entonces obtenemos la diagonal $A_1 A_2 A_3$ (Ver Figura 4.4). También podemos ver que $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (1, 0, 1)$, $\iota_A = 1$, y $D_A = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2 + F_3)$.

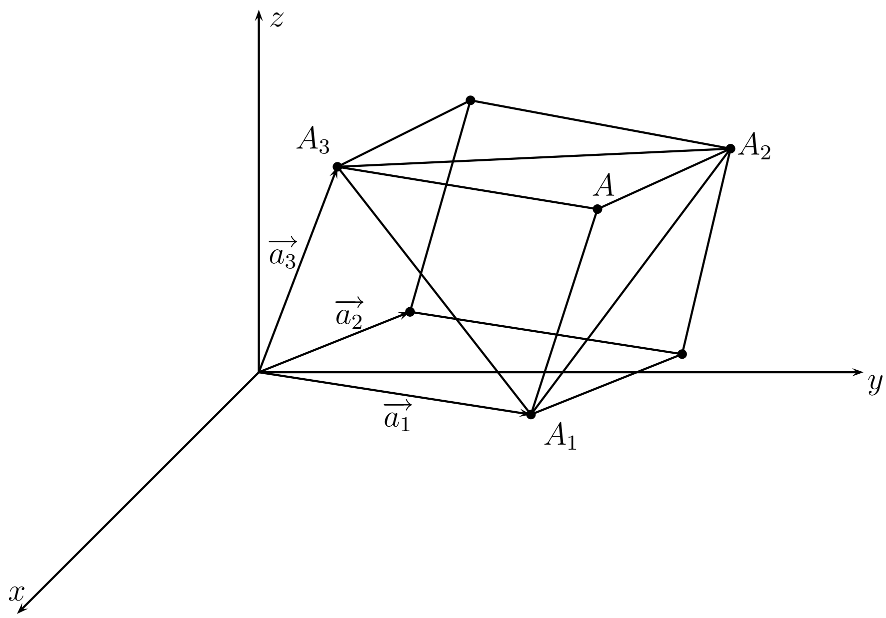

Figura 4.4. Una diagonal de un paralelepípedo de dimensión 3.

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{P}$ un paralelepipedo n-dimensional con $n \geq 2$, caras F_i, vertices A y diagonales D_A. Entonces se cumple que*

$$\sum_A \|D_A\|^2 = \frac{2^n}{[(n-1)!]^2} \sum_{i=1}^n \|F_i\|^2 . \qquad (4.4)$$

Demostración. Supongamos que para cada vértice A, la secuencia binaria asociada es $\left(\tau_1^A, \ldots, \tau_n^A\right)$. Apelando a (4.3) tenemos

$$\sum_A \|D_A\|^2 = \sum_A D_A \cdot D_A = \frac{1}{[(n-1)!]^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \|F_i\|^2 + \sum_A (-1)^{\tau_i^A + \tau_j^A} (F_i \cdot F_j) \right\} \quad (4.5)$$

Si fijamos a i, j de tal modo que $i \neq j$, entonces podemos notar que $\left(\tau_i^A, \tau_j^A\right) = (0,0)$, o $\left(\tau_i^A, \tau_j^A\right) = (0,1)$, o $\left(\tau_i^A, \tau_j^A\right) = (1,0)$, o $\left(\tau_i^A, \tau_j^A\right) = (1,1)$ y que cada posibilidad se produce en exactamente un cuarto de los términos de (5), los cuales contienen i y j. De este modo

$$\sum_A (-1)^{\tau_i^A + \tau_j^A} (F_i \cdot F_j) = 0 \text{ siempre que } i \neq j.$$

Puesto que el total de números de vértices es 2^n, entonces vemos finalmente que (4.5) se reduce a (4.4). ■

4.5. El Teorema de Pitágoras

Para llegar a una generalización del Teorema de Pitágoras necesitamos conocer en primer lugar la definición de un n-simplejo ortogonal.

Definición 4.6. Un n-simplejo $A_0A_1\cdots A_n$ es ortogonal si, existe una ordenación para los vértices $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tal que, el ángulo entre las caras $A_0\cdots\overline{A_j}\cdots A_n$ y $A_0\cdots\overline{A_l}\cdots A_n$ es $\frac{\pi}{2}$, donde $1 \leq j,\ l \leq n$ y $j \neq l$. Bajo estas circunstancias, llamamos $A_1\cdots A_n$ a la cara oblicua del n-simplejo.

Ejemplo 4.6. *Si tomamos la base canónica para* $\mathbb{R}^3$ $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ *entonces podemos hacer* $A_0 = O$*,* $A_0A_1 = \mathbf{i}$*,* $A_0A_2 = \mathbf{j}$ *y* $A_0A_3 = \mathbf{k}$*. De esta manera obtenemos el 3-simplejo de la Figura 4.5. Además podemos ver que*

$$(A_0A_2A_3)\cdot(A_0A_1A_3) = 0,\ (A_0A_2A_3)\cdot(A_0A_1A_2) = 0 \ y\ (A_0A_1A_2)\cdot(A_0A_1A_2) = 0.$$

Luego el ángulo entre las caras $A_0A_2A_3$ *y* $A_0A_1A_3$ *es* $\frac{\pi}{2}$ *y equivale a su vez al ángulo entre* $A_0A_2A_3$ *y* $A_0A_1A_2$ *y al ángulo entre* $A_0A_1A_2$ *y* $A_0A_1A_2$*. Por lo tanto, podemos concluir que el 3-simplejo de la Figura 4.5 es ortogonal, y además tenemos que* $A_1A_2A_3$ *es la cara oblicua del 3-simplejo.*

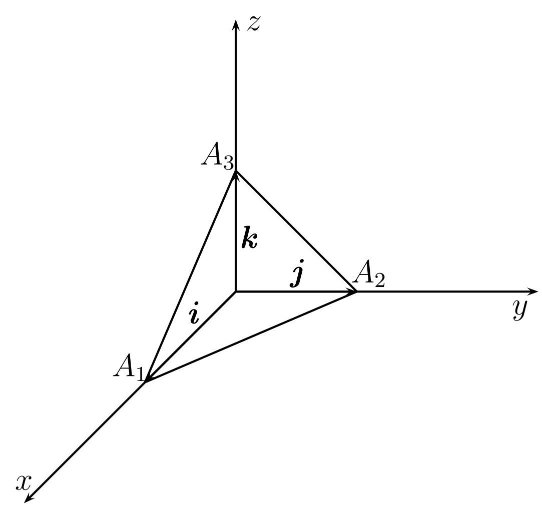

Figura 4.5. Un 3-simplejo ortogonal en $\mathbb{R}^3$

De esta manera, el érea de la cara oblicua es

$$\begin{aligned}\|A_1A_2A_3\|^2 &= (A_1A_2A_3)\cdot(A_1A_2A_3)\\ &= \left[\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\wedge(1,0,-1)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\wedge(1,0,-1)\right]\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Y el área de las otras caras es

$$\begin{aligned}\|A_0A_2A_3\|^2 &= (A_0A_2A_3)\cdot(A_0A_2A_3) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}\right)=\frac{1}{4}\\ \|A_0A_1A_3\|^2 &= (A_0A_1A_3)\cdot(A_0A_1A_3) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}\right)=\frac{1}{4}\\ \|A_0A_1A_2\|^2 &= (A_0A_1A_2)\cdot(A_0A_1A_2) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}\right)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos notar que

$$\|A_1A_2A_3\|^2 = \|A_0A_2A_3\|^2+\|A_0A_1A_3\|^2+\|A_0A_1A_2\|^2=\frac{3}{4}$$

Podemos generalizar esta idea en el siguiente Teorema:

Teorema 4.4. *Sea $A_0A_1\cdots A_n$ un n-simplejo ortogonal con $n\geq 2$, entonces el cuadrado del volumen de su cara oblicua es la suma de los cuadrados de los volumenes de las otras caras. Es decir,*

$$\|A_1\cdots A_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|A_0\cdots\bar{A}_i\cdots A_n\right\|^2$$

Demostración. Por el Teorema 4.2 sabemos que

$$\|A_1\cdots A_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|A_0\cdots\bar{A}_i\cdots A_n\right\|^2+2\sum_{1\leq i<j}^{n}\left\|A_0\cdots\bar{A}_i\cdots A_n\right\|\left\|A_0\cdots\bar{A}_j\cdots A_n\right\|\cos\theta_{ij}.$$

Como $A_0A_1\cdots A_n$ es un n-simplejo ortogonal entonces $\cos\theta_{ij}=0$. Por lo tanto nos queda

$$\|A_1\cdots A_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|A_0\cdots\bar{A}_i\cdots A_n\right\|^2$$

■

Este teorema es conocido como el "*Teorema de Pitágoras para n-simplejos ortogonales*".

4.6. La Fórmula Binet-Cauchy

Como una aplicación final presentamos una prueba de un resultado que es netamente algebraico, la Fórmula Binet-Cauchy.

Vamos a suponer que son dadas las matrices de tamaño $k \times n$ y $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

respectivamente, donde $1 \leq k \leq n$.

Entonces podemos describir las submatrices de tamaño $k \times k$ de A y B de la siguiente manera:

$$A_{i_1 \dots i_k} = \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki_1} & \dots & a_{ki_k} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_{i_1 \dots i_k} = \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & \dots & b_{i_1 k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_k 1} & \dots & b_{i_k k} \end{pmatrix}$$

donde se da por entendido que $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ y que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Con base en estas ideas, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.5. Teorema de Binet-Cauchy. *Sean A y B las matrices $k \times n$ y $n \times k$ descritas anteriormente, con submatrices de tamaño $k \times k$ $A_{i_1 \dots i_k}$ y $B_{i_1 \dots i_k}$ respectivamente. Entonces tenemos que*

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < \dots < i_k}^{n} (\det A_{i_1 \dots i_k}) \quad (\det B_{i_1 \dots i_k})$$

Demostración. Consideremos la base canónica para $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, \dots, e_n\}$, la cual sabemos que es ortonormal. De este modo, podemos escribir

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \quad \text{y} \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j.$$

Esto quiere decir que los a_i y los b_j son los vectores fila y columna de A y B respectivamente. En seguida, tomamos a y b para ser los k-vectores simples

$$a = a_1 \wedge \dots \wedge a_k \quad \text{y} \quad b = b_1 \wedge \dots \wedge b_k$$

Conocemos por el Teorema 3. que $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : i_1 < \cdots < i_k\}$ es una base ortonormal para $\Lambda^k \mathbb{R}^n$, luego podemos escribir a y b en términos de esta base. Usando la definición de producto escalar, vemos que $a \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \det A_{i_1 \ldots i_k}$ y que $b \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \det B_{i_1 \ldots i_k}$. Entonces podemos escribir

$$a = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (\det A_{i_1 \ldots i_k}) \; e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \quad \text{y} \quad b = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (\det B_{i_1 \ldots i_k}) \; e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

Y finalmente tenemos

$$\det(AB) = \det(a_i \cdot b_j) = a \cdot b = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (\det A_{i_1 \ldots i_k}) \quad (\det B_{i_1 \ldots i_k})$$

■

Podemos encontrar una prueba alternativa de este teorema en [5].

Bibliografía

[1] APOSTOL T., *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal*, segunda edición, Editorial Reverté S.A, Barcelona-Buenos Aires-México (1977).

[2] GROSSMAN S.I., *Algebra Lineal con Aplicaciones*, cuarta edición, Mc Graw-Hill (1992).

[3] KHOSRAVI M. and TAYLOR M. D., *The Wedge Product and Analytic Geometry*, The American Mathematical Monthly 115 (2008), pp. 623-644.

[4] KHOSRAVI M., *Some N-Dimensional Analytic Geometry: Angles and More*, Honors Thesis, University of Central Florida, Orlando (2002) .

[5] MIKUSINSKI P. and TAYLOR M. D., *An Introduction to Multivariable Analysis from Vector to Manifold*, Birkhäuser, Boston (2002).

[6] NASH A., *A Generalized Parallelogram Law*, The American Mathematical Monthly 110 (2003), pp. 52-57.

[7] QUADRAT J. P., LASERRE J. B., and HIRRIAT-URRUTY J. B., *Pithagora's Theorem for Areas*, The American Mathematical Monthly 108 (2001), pp. 549-551.