

Péndulo de Furuta con control LQR y PID como herramienta pedagógica para el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control

Camilo Andrés Cabrera Montaña y Estefany Melissa Torres Angarita

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Mecánico

Director

Carlos Borrás Pinilla

PhD. Ingeniería Mecánica

Codirector

Helio Sneyder Esteban Villegas

MSc. Ingeniería Mecánica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2023

### **Dedicatoria**

Este triunfo lo dedico enteramente a mi familia; a mi mamá, a mi papá y a mis hermanas, son el motor de mi vida y agradezco a Dios por permitirme celebrar este logro tan soñado junto a ellos.

Melissa

Primero, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo del desarrollo de este proyecto. A mi hermana, quien ha sido una guía invaluable y me ha mostrado el camino correcto. Y a Karen, por ser una compañera infalible en todo momento.

Camilo

### **Agradecimientos**

Doy agradecimientos especiales a los profesores que me han guiado a lo largo de este arduo camino, a los que están y a los que ya no están, han forjado mi manera de afrontar las adversidades y están grabados en mi manera de pensar, de decidir y de vivir.

Infinitas gracias a nuestro director y codirector de tesis, sus conocimientos y acompañamiento han sido realmente valiosos para darle un valor agregado a este proyecto.

Agradecimientos totales a todas las personas que hicieron parte del desarrollo de este proyecto, desde la más mínima sugerencia, hasta tomarse el tiempo de ayudar en la solución de los problemas que se presentaron en el transcurso del mismo. Muchas, muchas gracias.

**Tabla de Contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	12
1. Objetivos .....	14
1.1 Objetivo General .....	14
1.2 Objetivos Específicos.....	14
2. Marco teórico .....	15
2.1 Péndulo Invertido Rotacional .....	15
2.2 Modelado dinámico Euler Lagrange.....	16
2.3 Técnicas de control .....	17
2.3.1 Control PID.....	19
2.3.1.1 Función de transferencia.....	20
2.3.2 Control LQR .....	20
2.3.2.1 Espacio de estados .....	22
2.3.3 Control Swing-up.....	23
3. Construcción de la planta física .....	24
3.1 Diseño mecánico.....	24
3.1.1 Diseño acople péndulo .....	27
3.1.2 Diseño brazo péndulo .....	28
3.1.3 Diseño acople-motor.....	31
3.2 Elección de componentes electrónicos .....	33

3.2.1	Arduino Due.....	34
3.2.2	PCB.....	35
3.2.3	Sensor de ángulo giratorio .....	35
3.2.4	Puente H BTS7960 .....	36
3.2.5	Motor cepillado con encoder HEDS-5500.....	37
3.2.6	Fuente DC 36V .....	38
3.2.1	Convertor de niveles bidireccional de 5v a 3.3v .....	39
4.	Modelo matemático .....	40
4.1	Obtención del modelo no lineal del péndulo Furuta a través de Euler-lagrange .....	40
4.2	Modelamiento del motor DC .....	45
5.	Calibración y ajuste del modelo matemático .....	48
5.1	Calibración de los sensores.....	48
5.1.1	Caracterización del motor .....	48
5.1.2	Ajuste lectura de los sensores giratorios.....	51
5.2	Estimación de parámetros del modelo matemático .....	51
6.	Sintonización de los controladores PID y LQR.....	62
6.1	Linealización del modelo matemático .....	62
6.2	PID .....	63
6.2.1	Modelo matemático a función de transferencia .....	63
6.2.2	Sintonización controlador PID.....	66
6.3	LQR.....	70
6.3.1	Sintonización controlador LQR .....	70
7.	Comparación de las técnicas de control aplicadas .....	74

8.	Presupuesto .....	83
9.	Conclusiones .....	86
	Referencias Bibliográficas .....	88
	Apéndice .....	92

### Lista de Tablas

	<b>Pág.</b>
Tabla 1 <i>Propuestas de diseño para el péndulo Furuta</i> .....	25
Tabla 2 <i>Resultados del análisis de esfuerzo al brazo del péndulo</i> .....	29
Tabla 3 <i>Componentes electrónicos</i> .....	33
Tabla 4 <i>Características Arduino Due</i> .....	34
Tabla 5 <i>Características Sensor giratorio</i> .....	36
Tabla 6 <i>Características Puente H BTS7960</i> .....	37
Tabla 7 <i>Características Motor</i> .....	38
Tabla 8 <i>Características Fuente 36V</i> .....	39
Tabla 9 <i>Toma pruebas para caracterización del motor</i> .....	49
Tabla 10 <i>Condiciones iniciales en la prueba 1. para el modelo de motor</i> .....	54
Tabla 11 <i>Condiciones finales en la prueba 1</i> .....	56
Tabla 12 <i>Condiciones iniciales en la prueba 2. para el modelo completo del péndulo de Furuta</i> .....	59
Tabla 13 <i>Parámetros propios del modelo matemático</i> .....	61
Tabla 14 <i>Tabla comparativa: técnicas control en modelo matemático</i> .....	74
Tabla 15 <i>Tabla comparativa rango oscilación: técnicas con perturbación</i> .....	82
Tabla 16 <i>Tabla Presupuesto destinado al desarrollo del proyecto</i> .....	84
Tabla 17 <i>Tabla Compra de accesorios electrónicos y eléctricos</i> .....	85

## Lista de Figuras

	<b>Pág.</b>
Figura 1 <i>Modelo simplificado de un péndulo de Furuta</i> .....	15
Figura 2 <i>Clasificación de las técnicas de control, elaboración propia</i> .....	18
Figura 3 <i>Control PID de una planta</i> .....	19
Figura 4 <i>Diagrama esquemático del LQR</i> .....	21
Figura 5 <i>Estructura reutilizada de un proyecto anterior sobre las cuales se especifican requerimientos de diseño</i> .....	24
Figura 6 <i>Partes del péndulo de Furuta</i> .....	27
Figura 7 <i>Vista seccionada – Acople péndulo</i> .....	28
Figura 8 <i>Vista seccionada – Acople motor</i> .....	31
Figura 9 <i>Despiece del equipo – Ensamble equipo</i> .....	32
Figura 10 <i>Diagrama de conexión</i> .....	33
Figura 11 <i>PCB utilizada en la conexión</i> .....	35
Figura 12 <i>Convertor de nivel lógico</i> .....	39
Figura 13 <i>Modelo matemático 1 – Vista 3D</i> .....	40
Figura 14 <i>Modelo matemático 2 - Vista Lateral</i> .....	42
Figura 15 <i>Modelo matemático 3 - Motor</i> .....	46
Figura 16 <i>Curva PWM – RPM motor</i> .....	50
Figura 17 <i>Esquema funcionamiento de método caja gris</i> .....	51
Figura 18 <i>Diagrama Prueba 1: Señal sinusoidal</i> .....	52
Figura 19 <i>Respuesta del ángulo del brazo a la entrada sinusoidal</i> .....	53

Figura 20	<i>Desempeño del modelo con datos de validación</i> .....	55
Figura 21	<i>Diagrama Prueba 2: Señal step condicionada</i> .....	57
Figura 22	<i>Respuesta del ángulo del brazo al Step</i> .....	57
Figura 23	<i>Respuesta del ángulo del péndulo al Step</i> .....	58
Figura 24	<i>Desempeño del modelo matemático con datos de validación</i> .....	59
Figura 25	<i>Polos y ceros de la función de transferencia del sistema</i> .....	63
Figura 26	<i>Esquema de un sistema de control según modelReducer</i> .....	65
Figura 27	<i>Reducción de la función de transferencia del sistema</i> .....	65
Figura 28	<i>Plano complejo de la función de transferencia reducida controlada por PID</i> .....	68
Figura 29	<i>Respuesta de la función de transferencia reducida controlada por PID</i> .....	69
Figura 30	<i>Diagrama de bloques modelo matemático con controlador PID</i> .....	69
Figura 31	<i>Respuesta del modelo matemático con controlador PID</i> .....	70
Figura 32	<i>Diagrama de bloques modelo matemático con controlador LQR</i> .....	71
Figura 33	<i>Respuesta del modelo matemático al controlador LQR</i> .....	72
Figura 34	<i>Respuesta del modelo matemático al control LQR reduciendo la corriente</i> .....	72
Figura 35	<i>Diagrama de bloques para control dual PID y LQR con Swing-up</i> .....	74
Figura 36	<i>Zonas de aplicación del control.</i> .....	75
Figura 37	<i>Aplicación del control Swing-up al sistema real</i> .....	76
Figura 38	<i>Respuesta del sistema real al control Swing-up con control LQR</i> .....	77
Figura 39	<i>Aplicación del control PID al sistema real</i> .....	78
Figura 40	<i>Aplicación del control LQR al sistema real</i> .....	79
Figura 41	<i>Aplicación del control PID al sistema real con presencia de perturbaciones</i> .....	80
Figura 42	<i>Aplicación del control LQR al sistema real con presencia de perturbaciones</i> .....	81

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A Planos para la fabricación.....	92
Apéndice B Datasheet elementos electrónicos .....	101

## Resumen

**Título:** Péndulo de Furuta con control LQR y PID como herramienta pedagógica para el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control

**Autor:** Camilo Andrés Cabrera Montaña y Estefany Melissa Torres Angarita

**Palabras Clave:** Péndulo de Furuta, Control, PID, LQR, Swing-Up

La ingeniería de control, fundamental en la optimización y automatización de procesos industriales, ha impulsado avances como el Segway, ejemplificando el uso del péndulo invertido o "péndulo de Furuta". Sin embargo, la formación académica se ve desafiada cuando los estudiantes no disponen de herramientas prácticas para comprender conceptos teóricos. Respondiendo a esta necesidad, el presente trabajo propuso el desarrollo de un péndulo invertido rotacional como instrumento pedagógico para la Universidad Industrial de Santander.

A través del método Euler-Lagrange, se modeló matemáticamente el sistema, obteniendo una similitud superior al 70% en comparación con el sistema real. Se implementaron controladores PID y LQR, aunque para la obtención de las ganancias se tuvieron que hacer una serie de simplificaciones, el control resultó exitoso y se logró el objetivo de controlar el péndulo en su punto de equilibrio inestable ayudado por el balanceo que otorga la incorporación de un bloque de control swing-up. En la aplicación al modelo no lineal, el LQR presentó una respuesta más rápida en términos de tiempo de establecimiento, pero con un sobrepaso mayor que el PID. En la aplicación real, ambos controladores mostraron eficacia, aunque el LQR demostró superioridad en respuesta a perturbaciones.

Este estudio no solo logra integrar teoría y práctica en la formación académica, sino que también ofrece una base sólida para futuras investigaciones en técnicas de control y sus aplicaciones en sistemas similares. Es indispensable que las instituciones educativas equipen a los estudiantes con herramientas pedagógicas eficientes, y este péndulo invertido rotacional sirve como un ejemplo pedagógico de cómo se puede lograr dicho objetivo.

### Abstract

**Title:** *Furuta pendulum with LQR and PID control as a pedagogical tool for the dynamic systems and control engineering laboratory.*

**Author(s):** *Camilo Andrés Cabrera Montaña y Estefany Melissa Torres Angarita*

**Key Words:** *Furuta pendulum, Control, PID, LQR, Swing-Up.*

Control engineering, fundamental in the optimization and automation of industrial processes, has propelled advancements such as the Segway, exemplifying the use of the inverted pendulum or "Furuta pendulum". However, academic training is challenged when students do not have practical tools to understand theoretical concepts. Responding to this need, the present work proposed the development of a rotational inverted pendulum as a pedagogical tool for the Universidad Industrial de Santander.

Through the Euler-Lagrange method, the system was mathematically modeled, achieving a similarity of more than 70% compared to the real system. PID and LQR controllers were implemented, and although a series of simplifications had to be made to obtain the gains, the control was successful, and the objective of controlling the pendulum at its unstable equilibrium point was achieved, aided by the balancing provided by the incorporation of a swing-up control block. In the application to the nonlinear model, the LQR showed a faster response in terms of settling time but with a larger overshoot than the PID. In real-world application, both controllers demonstrated effectiveness, although the LQR exhibited superiority in response to disturbances.

This study not only succeeds in integrating theory and practice in academic training, but also provides a solid foundation for future research on control techniques and their applications in similar systems. It is imperative that educational institutions equip students with efficient pedagogical tools, and this rotational inverted pendulum serves as a pedagogical example of how that goal can be achieved.

## Introducción

La ingeniería de control es una materia de carácter teórico-práctica, que permite entender los conceptos relacionados con la automatización y el control de procesos industriales, con fines de optimización y ahorro de recursos. A causa de esto, a lo largo de las últimas décadas han surgido avances tecnológicos cuyo funcionamiento se basa en principios básicos del control, un ejemplo de ello es el Segway o péndulo invertido, vehículo estabilizado de tipo monopatín que cuenta con dos ruedas paralelas, y se emplea ampliamente en centros comerciales para facilitar el transporte y evitar la congestión en los pasillos.

Para el estudio de su estabilidad se han desarrollado prototipos de sistemas inestables a tamaño real, que permiten obtener mejoras en su diseño y composición, pero estos sistemas además de representar un riesgo humano a la hora de ser testeados, suelen ser extremadamente costosos y de difícil adquisición. De allí que se haga necesario desarrollar herramientas pedagógicas para demostrar principios de control sin necesidad de adquirir un dispositivo de talla industrial.

Actualmente, el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control cuenta con un banco de péndulo invertido rotacional, sin embargo, los estudiantes no pueden hacer uso de este instrumento porque se encuentra dañado e incompleto. No tener herramientas que integren la enseñanza dada en el salón de clases con los sucesos que pueden presentarse en la vida real, dificulta la comprensión de los principios básicos allí expuestos, perjudicando el aprendizaje de forma directa, al no permitir el acoplamiento de la teórica con la práctica.

En consecuencia, a esta falta de adecuada instrumentación para poder comprender los conceptos impartidos en la materia de ingeniería de control relacionados con modelos lineales y

no lineales, el presente proyecto propone el desarrollo de un péndulo invertido rotacional como herramienta pedagógica que permita ver y controlar las variables del sistema en tiempo real.

El péndulo de control invertido rotacional, también llamado péndulo de Furuta, es un instrumento diseñado por Katsuhisa Furuta en 1992, ampliamente utilizado en el ámbito académico para representar la manera en que un sistema sub-actuado tiende a comportarse.

La ingeniería de control tiene la necesidad de aplicar sus conocimientos de forma tal que se busque el bienestar humano, muestra de ello es la creciente presencia de los sistemas automáticos en los procesos industriales, pues permite optimizar el tiempo, la mano de obra y los recursos requeridos para la realización de tareas, obteniendo así sistemas más seguros y eficientes.

La implementación de un banco de péndulo invertido rotacional sirve como herramienta didáctica al proceso de aprendizaje de los estudiantes, pues permite la experimentación y resolución de problemas específicos en el área de control, al implementar métodos de control lineales y no lineales a sistemas que suelen presentarse en la vida real, como sistemas de navegación, sistemas de control de posición y estabilidad de grúa.

En consecuencia, las prácticas de laboratorio enfocadas en la aplicación del control de un péndulo invertido rotacional permiten a los estudiantes desarrollar su criterio y aportar soluciones robustas y eficientes a problemas ingenieriles de carácter complejo, generando un espacio en el que se implementan estrategias pedagógicas teórico-prácticas capaces de impulsar y estimular las capacidades resolutivas de los estudiantes de la escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander.

## 1. Objetivos

### 1.1 Objetivo General

Desarrollar un péndulo invertido rotacional aplicando las técnicas de control óptimo LQR y control clásico PID, como herramienta pedagógica dispuesta para el uso de los estudiantes de la escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander.

### 1.2 Objetivos Específicos

Modelar matemáticamente el péndulo invertido rotacional mediante el método de energía Euler-Lagrange para obtener un modelo lineal y no lineal del sistema.

Sintonizar los controladores PID y LQR para el péndulo de Furuta con respecto a un punto de equilibrio inestable que reaccione ante perturbaciones en el péndulo, y garantice el seguimiento de la posición del brazo.

Validar el funcionamiento de los controladores PID y LQR mediante su implementación en el prototipo físico del péndulo y compararlos a través de variables de desempeño tales como el tiempo de establecimiento y sobrepaso, de manera que pueda utilizarse como herramienta pedagógica en el laboratorio de sistemas dinámicos e ingeniería de control.

## 2. Marco teórico

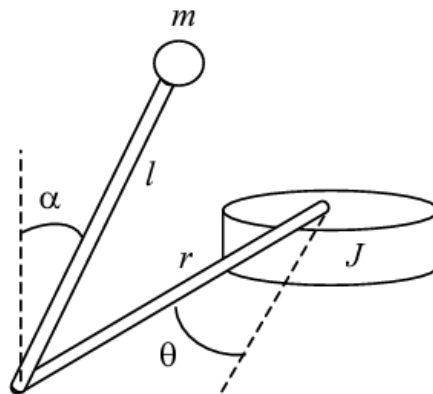
### 2.1 Péndulo Invertido Rotacional

Este mecanismo fue diseñado por Katsuhisa Furuta, Doctor del Instituto de Tecnología de Tokio, en 1992, como mejora al péndulo invertido tradicional. El péndulo de Furuta o péndulo invertido rotacional, está compuesto por dos enlaces, una barra horizontal que gira alrededor de un eje sobre un plano horizontal con el fin de intervenir otra barra vertical que gira en un plano ortogonal al brazo. El primer enlace suele estar accionado por un motor que le otorga la capacidad de girar, al tener dos grados de libertad y un único actuador, el sistema es de carácter subactuado.

El problema de control del péndulo rotacional invertido consiste en diseñar un sistema capaz de balancear el péndulo a la zona de equilibrio, y allí mantenerse en una posición vertical aun aplicando perturbaciones.

#### Figura 1

*Modelo simplificado de un péndulo de Furuta*



Nota: Tomado de Desarrollo y control de un péndulo de Furuta. (2012). A. Valera, M. Vallés, M. Cardo.

El sistema Péndulo de Furuta es un sistema sub-actuado de dos grados de libertad, ambos rotacionales y suele aplicarse en la academia como introducción a la ingeniería de control de sistemas sub-actuados, siendo este uno de los péndulos con dos grados de libertad más complejo y difícil de controlar. Es por esto que, para poder ejecutar acciones de control modernas, el modelo que describe el sistema debe linealizarse, pues la complejidad de sus ecuaciones lo convierten en un sistema no lineal.

## 2.2 Modelado dinámico Euler Lagrange

Es un modelo matemático que describe las relaciones existentes entre las magnitudes, variables y parámetros que caracterizan el sistema dinámico, basado en un modelo de energías que propone que la energía total del sistema es una magnitud escalar, no vectorial y, por ende, en un sistema multicuerpo, las energías cinética y potencial pueden ser halladas para cada cuerpo independientemente y luego sumadas para conformar las energías de todo el sistema (Toro, 2009). De mismo modo, propone que el Lagrangiano ( $L$ ) del sistema está dado por la energía cinética menos la energía potencial del mismo

$$L = Ek - Ep \quad (1)$$

El Lagrangiano se basa en el principio de la acción mínima, que postula que la trayectoria real que un sistema sigue entre dos puntos en el tiempo es aquella que minimiza la 'acción' denotada como  $S$ . Esta acción se calcula a lo largo de la trayectoria del sistema como una integral que involucra el Lagrangiano del sistema. En consecuencia, se establece que la derivada de la

integral de acción con respecto a la trayectoria es igual a cero, pues se trata de un punto mínimo.

Esta ecuación se conoce como el principio de mínima acción.

$$\frac{d}{dt}(S(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} \left( \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \right) = 0 \quad (2)$$

La ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada generalizada  $q_i$  está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange garantizan el cumplimiento del principio de mínima acción.

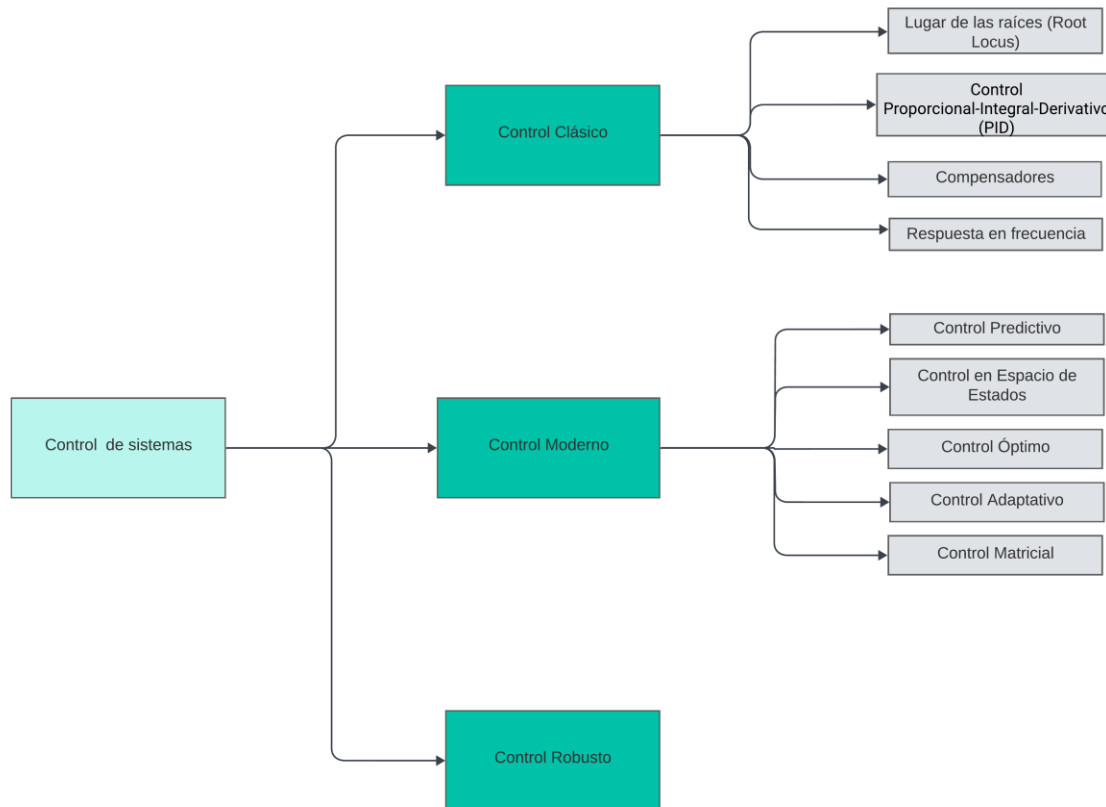
### 2.3 Técnicas de control

Un sistema de control está demarcado como el conjunto de elementos que trabajan de manera conjunta para suministrar la respuesta esperada. Un sistema de control ideal debe garantizar estabilidad y, adicionalmente, ser lo suficientemente vigoroso para hacer frente a las perturbaciones y errores que se pueden presentar en los modelos. Además de esto, debe ser sumamente eficiente y sencillo de implementar (Carrillo, 2011).

Para ello, se han creado distintas técnicas de control que mantienen o modifican el comportamiento de un sistema bajo una serie de criterios y/o especificaciones, una clasificación de estas técnicas bastante aceptada las agrupa en la teoría clásica, la teoría de control moderno y la teoría de control robusto.

**Figura 2**

*Clasificación de las técnicas de control, elaboración propia*



Las técnicas de control clásicas suelen destinarse a problemas simples, que cuentan con una única entrada y una única salida, por lo que para sistemas de mayor complejidad pierden su eficiencia y eficacia. Aun así, técnicas de control clásicas están presentes fuertemente en la industria, resulta destacable que actualmente un gran porcentaje de los sistemas de control utilizados en la industria se basan en enfoques de control PID convencional o versiones modificadas del control PID.

El péndulo invertido rotacional cuenta con una única entrada, el voltaje suministrado al motor del sistema, y dos salidas; el ángulo del brazo y el ángulo del péndulo. Es por esto que, el control se realizará mediante dos técnicas: el control LQR, una técnica de control óptimo, y el

control PID, una técnica de control clásica, con el fin de comparar sus resultados e identificar pros y contras de cada una de ellas.

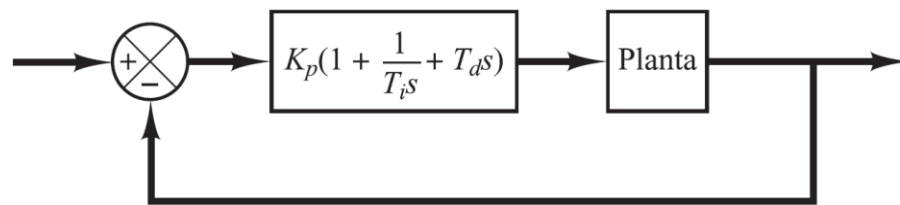
### 2.3.1 Control PID

Las siglas PID obedecen a Proporcional-Integral-Derivativo. El PID es una técnica de control clásico que permite realizar el control de una planta, y para la cual existen diversas técnicas de sintonización, por ejemplo, la aplicación de las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols son muy utilizadas en sistemas lineales simples.

Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales; la acción proporcional P, da una señal de control que es proporcional al error, la acción integral I, posee una señal de control que es proporcional al error acumulado y la acción derivativa D, ofrece una señal de control de carácter predictivo (González, 2016).

### Figura 3

*Control PID de una planta*



Nota.\* Tomado del Ogata, (2010).

En el campo de los sistemas para control de procesos, es un hecho bien conocido que los esquemas de control PID básicos y modificados han demostrado su utilidad para aportar un control satisfactorio, aunque tal vez en muchas situaciones específicas no aporten un control óptimo. (Ogata, 2010, capítulo 2).

### 2.3.1.1 Función de transferencia

Para poder aplicar el LQR el sistema debe expresarse en función de transferencia, es decir, como la relación de la transformada de Laplace de la salida sobre la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de condiciones iniciales cero, es decir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_1 s + 1)}{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_1 s + 1)} \quad (4)$$

Donde:

$G(s)$  es la función de transferencia

$Y(s)$  es la transformada de Laplace de la variable de salida

$X(s)$  es la transformada de Laplace de la variable de entrada

$K, a, b$  son constantes

### 2.3.2 Control LQR

El control LQR (por sus siglas en inglés Linear Quadratic Regulator), es un método de control óptimo con el cual se asegura la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación. (González, 2016). Al ser parte de la teoría de control óptimo, su intención es minimizar o maximizar un criterio de desempeño, en este caso, minimizar la función de costo para lograr una especificación impuesta, el equilibrio del sistema en una posición de equilibrio inestable.

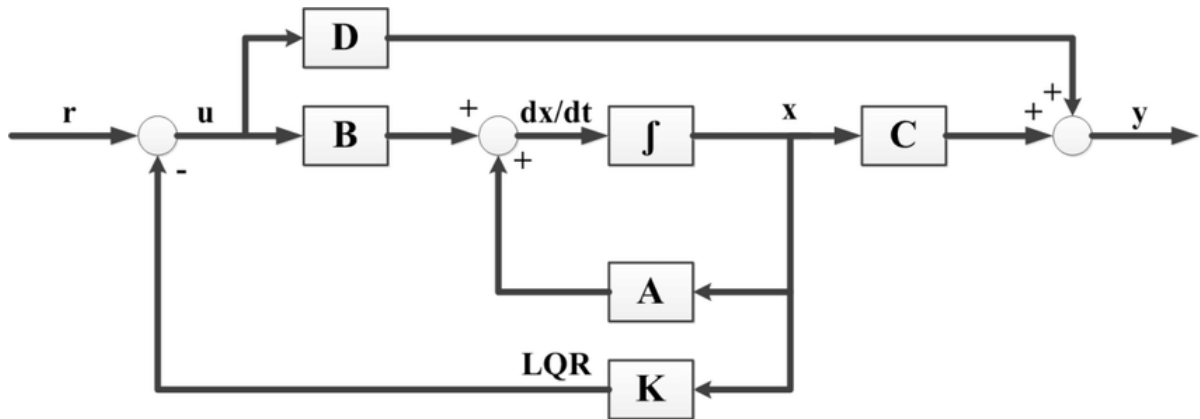
Cuando un sistema posee muchas entradas y salidas que se relacionan entre sí de forma complicada, reducir estos sistemas a ecuaciones más simples se hace necesario, una técnica efectiva para simplificar este tipo de sistemas es el enfoque en espacio de estados. Para la aplicación del control por LQR es necesario contener el sistema en espacio de estados, estos

estados deben ser medibles y la linealización del sistema debe hacerse alrededor del punto de interés.

El control LQR se obtiene al resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales acopladas cuadráticas, también llamadas ecuación de Riccati algebraica. Esta ecuación describe la ganancia óptima del controlador en función de las matrices que caracterizan al sistema dinámico, la matriz de ponderación del estado y la matriz de ponderación de la entrada.

**Figura 4**

*Diagrama esquemático del LQR.*



Nota.\* Optimal tuning of a Linear Quadratic Regulator for Position Control using Particle Swarm Optimisation.

De esta manera, La acción de control o vector de control  $u(t)$

$$u(t) = Kx(t) \quad (5)$$

es regido por la matriz  $K$  que estabiliza el sistema en lazo cerrado y minimiza la ecuación de costos:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) dt \quad (6)$$

La acción de control LQR depende de la entrada y los estados del sistema. A su vez, depende de una matriz R y Q, matrices reales, simétricas y positivas, las matrices Q y R determinan la importancia relativa del error y del coste de esta energía (Ogata, 2010) de forma que cuando la matriz R es más grande que la matriz Q, el sistema ahorra energía, ya que la regulación de los estados es más lenta.

### 2.3.2.1 Espacio de estados

El análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado.

La Ecuación 3 es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo y la Ecuación 3 es la ecuación de salida para el mismo sistema. (Ogata, 2010, capítulo 7).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx + Du \quad (8)$$

Donde:

x = vector de estado (vector de dimensión n)

y = vector de salida (vector de dimensión m)

u = vector de control (vector de dimensión r)

A =matriz de estado (matriz de dimensión n×n)

B = matriz de control (matriz de dimensión n×r)

C = matriz de salida (matriz de dimensión m×n)

D = matriz de transmisión directa (matriz de dimensión m×r)

### 2.3.3 *Control Swing-up*

El control swing-up utiliza técnicas de control para llevar un sistema desde un estado inicial hasta un estado final deseado, en este caso, elevar el péndulo desde su punto de baja energía potencial o estado de reposo, hasta su punto de máxima energía potencial. Este control balanceará el péndulo hasta alcanzar su punto de equilibrio inestable.

Para su aplicación se utilizan técnicas basadas en control por energía, control por retroalimentación de estados, control por trayectoria, entre otros. Por ejemplo, una forma de hacer oscilar el péndulo a la posición vertical es darle una energía que corresponda a la posición vertical, pasando por la posición de equilibrio inestable (Astrom, Furuta, 1999).

En este proyecto, se implementó un método de control basado en energía diseñado por Jitendra Singh, para lograr la oscilación controlada del péndulo desde su posición vertical hacia abajo. El enfoque de este controlador se centra en el cálculo de la cantidad total de energía presente en el sistema. Al agregar la cantidad adecuada de energía, se logra que el péndulo se balancee hasta alcanzar su punto de equilibrio inestable. Aunque existen diversas estrategias de control para el balanceo, el método de control basado en energía (Singh, J. 2021) se destaca por su enfoque natural y eficaz para la tarea en cuestión.

A grandes rasgos, este enfoque se basa en la observación de órbitas homoclínicas, que son curvas de energía constante que pasan por el punto fijo inestable del sistema y determina la cantidad máxima que puede lograr el péndulo en la subida, para poder cambiar su dirección y entregar este movimiento de balanceo. La aplicación de este método permitirá controlar de manera eficiente el movimiento del péndulo, logrando la oscilación deseada desde su posición inicial hasta su punto de equilibrio inestable.

### 3. Construcción de la planta física

La construcción del banco se estructuró en dos componentes: El diseño mecánico, que agrupa el diseño y manufactura de las piezas que forman el péndulo, y los componentes electrónicos utilizados en el banco.

#### 3.1 Diseño mecánico

Para el diseño mecánico del péndulo se tomó como referencia la estructura utilizada en un proyecto anterior, este comprendía una estructura metálica robusta y una especie de brazo pivotado desde la mitad de su largo.

#### Figura 5

*Estructura reutilizada de un proyecto anterior sobre las cuales se especifican requerimientos de diseño.*



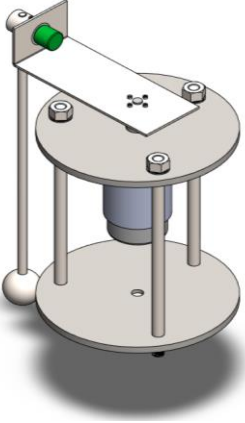
Partiendo de esta estructura se plantearon las siguientes especificaciones de diseño:

- En medida de lo posible, se deben utilizar las piezas con las que cuenta el modelo previo, para ello se le harán pruebas al motor para conocer su estado.
- El sistema de péndulo no debe exceder 10kg en peso, ya que el brazo deberá soportar este peso y el movimiento de balanceo cuando el motor se active por la acción de control Swing-up.
- Los componentes por fabricar deben tener una manufactura sencilla, debe haber un equilibrio respecto al costo total de fabricación del equipo, esto considerando materia prima, procesos de manufactura y elementos electrónicos.

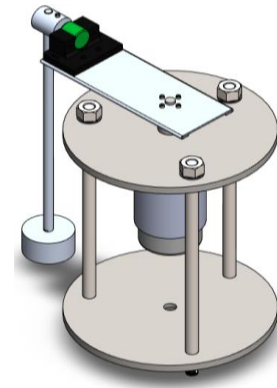
Se realizaron distintas propuestas, de las cuales se eligió la tercera opción.

**Tabla 1**

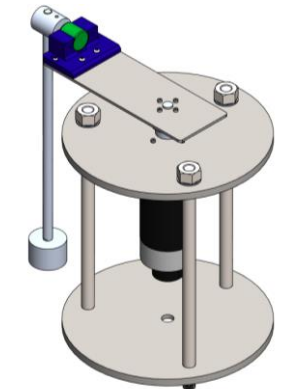
*Propuestas de diseño para el péndulo Furuta*

Características	Ejemplar
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Estructura base en acero inoxidable, largo 250mm.</li> <li>▪ Rodamiento rígido de bolas SKF 626-2RSL para acoplar el eje del encoder.</li> <li>▪ Barra péndulo 300mm.</li> <li>▪ Masa péndulo esférica 20mm de radio.</li> <li>▪ Brazo péndulo con dobléz a 90° para reposar el rodamiento.</li> <li>▪ Todas las piezas en acero inoxidable.</li> </ul>	

- 
- Estructura base en acero inoxidable, largo 250mm.
  - Acople encoder en plástico PLA.
  - Barra péndulo 270mm.
  - Masa péndulo cilíndrica 25 mm de radio, 25,4 mm de largo.
  - Brazo péndulo con dos dobleces a 180° que le proporcionan mayor resistencia.
  - Todas las piezas en aluminio.

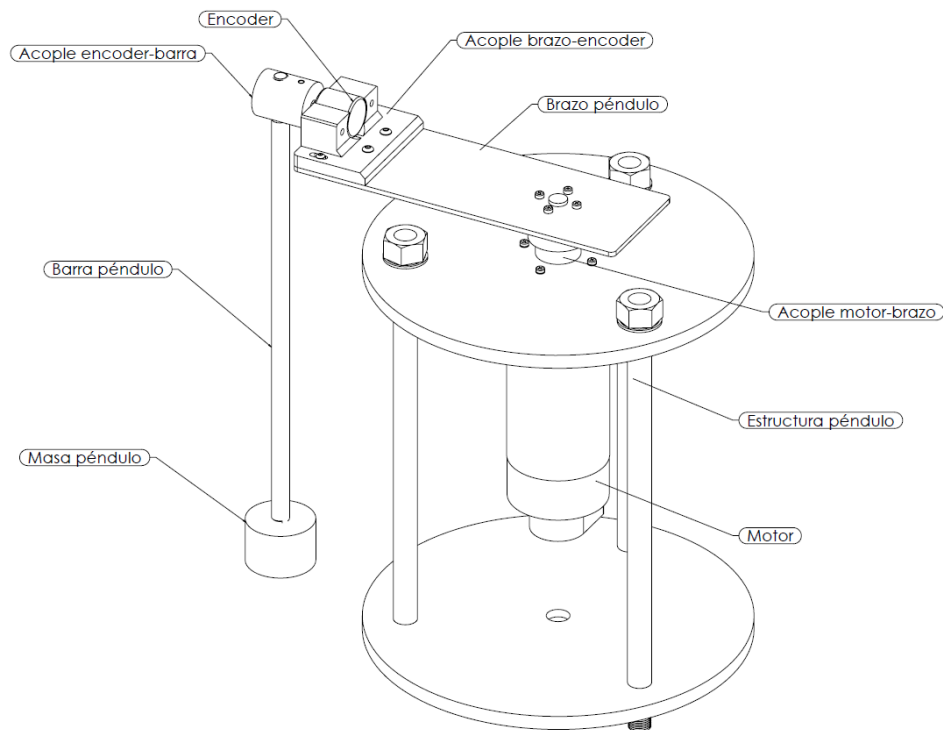


- 
- Estructura base en acero inoxidable, largo 250mm.
  - Acople encoder en plástico PLA.
  - Barra péndulo 270mm.
  - Masa péndulo cilíndrica 18,5 mm de radio por 25,4 mm de largo.
  - Brazo en lámina calibre 14 acero inoxidable 304, las piezas que giran y rotan en aluminio.



---

Inicialmente se propuso un ensamble completamente en acero inoxidable (Ejemplar 1), pero fabricarlo completamente en acero inoxidable resultaría muy costoso además de ser muy pesado para su finalidad. La masa-péndulo se propuso esférica pero para cuestiones de inercias era más compleja su geometría. Se había elegido un rodamiento capaz de soportar las cargas generadas por la rotación del péndulo, de referencia SKF 626-2RSL, pero el encoder elegido contiene internamente un rodamiento que otorga libertad de giro al eje.

**Figura 6***Partes del péndulo de Furuta*

Nota. A partir de ahora se le llamará a cada elemento como se evidencia en la imagen.

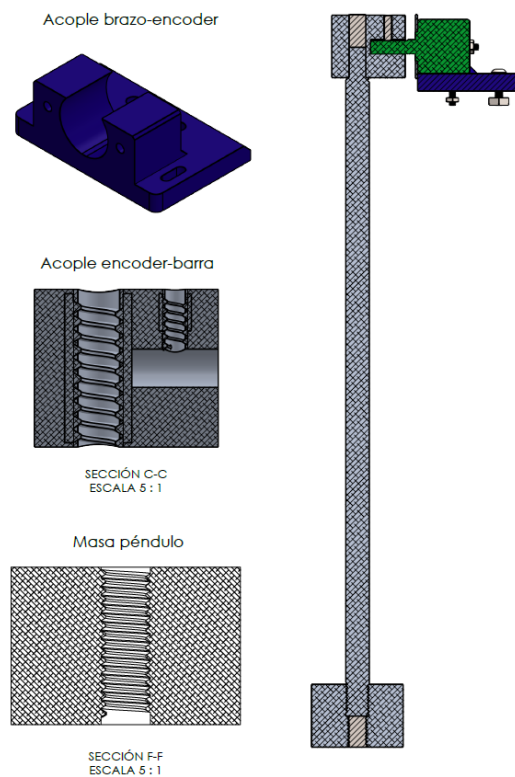
### ***3.1.1 Diseño acople péndulo***

Estos elementos se han sido diseñados de manera que puedan acoplarse tanto desde la parte superior como desde la inferior. En otras palabras, los componentes roscados han sido maquinados a lo largo de todo su eje de simetría, mientras que la barra-péndulo cuenta con roscas en ambos extremos. Esta característica nos permite llevar a cabo el mismo ensamblaje tanto a  $180^\circ$  como a  $360^\circ$  en relación al eje del encoder. Como resultado, logramos una mayor precisión durante el proceso de calibración.

Para reducir el número de piezas, se decidió cambiar el acople brazo-encoder. Se diseñó un soporte que calca el diámetro externo del encoder incremental del péndulo, se fabricó en impresora 3D con plástico PLA de 1.75mm. Este cambio aligera el peso que debe soportar el brazo-péndulo.

### Figura 7

*Vista seccionada – Acople péndulo*



#### 3.1.2 Diseño brazo péndulo

Para el brazo del péndulo se diseñaron 3 propuestas a las cuales se les realizó el estudio de esfuerzos, las opciones eran lámina calibre 14 inoxidable 304 para evitar la corrosión de la estructura, o lámina de aluminio 2 mm para conservar toda la estructura en el mismo material y disminuir el peso del ensamble que estaría girando. Esta opción al tener menor espesor se diseñó

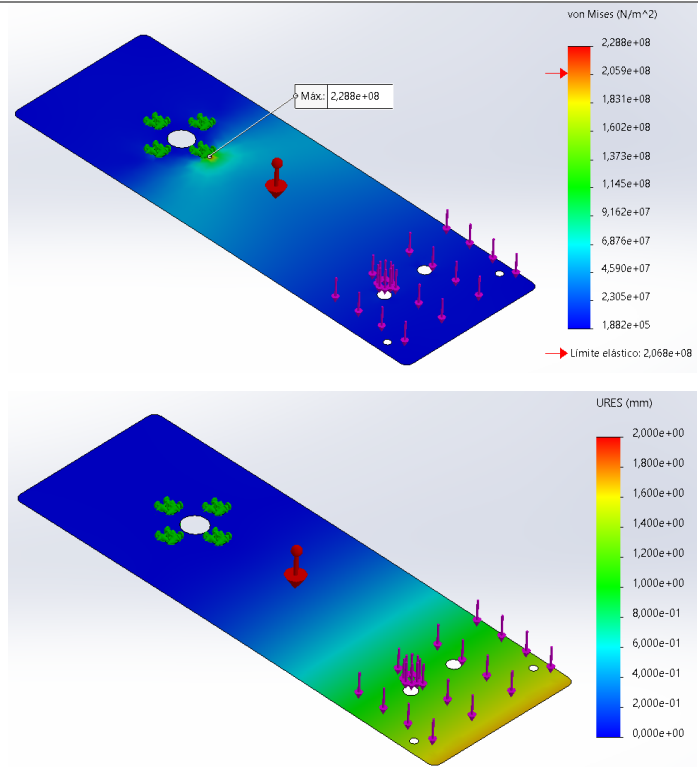
con dos dobleces a los lados, estos dobleces dificultaban el acople de todos los accesorios del péndulo, pero le proporcionarían mayor rigidez, por otro lado, la lámina calibre 14 se diseñó en voladizo para no añadir más material del necesario.

**Tabla 2**

*Resultados del análisis de esfuerzos al brazo del péndulo*

Brazo péndulo	Análisis de esfuerzos estáticos
<p>Material: Lámina aluminio 2 mm                      Viga en voladizo con dobleces a sus costados                      Carga distribuida 3kgf</p>	

Material: Lámina calibre 12 acero  
 inoxidable 304  
 Viga en voladizo  
 Carga distribuida 5kgf



Nota.\* Simulación de esfuerzos estáticos. Método Von Mises, realizado en SolidWorks 2021

Haciendo uso de la herramienta SOLIDWORKS Simulation en SolidWorks, se emplea el criterio de Von Mises como herramienta para determinar si el material es seguro cuando se somete a diversas cargas bajo un análisis estático. Se realizó el estudio de esfuerzos a cada opción de diseño, con la unión al acople motor como la zona fija y con la carga en uno de sus extremos, la fuerza a soportar se calculó como:

$$F_{total} = m_{brazo} + m_{acople\ brazo-encoder} + m_{encoder} + m_{acople\ encoder-barra} + m_{barra} + m_{masa\ pendulo} \quad (9)$$

$$F_{total} = 0.264 + 0.029 + 0.025 + 0.037 + 0.051 + 0.071$$

$$F_{total} = 0.478Kg$$

El cálculo para la lámina en acero inoxidable es  $0.478Kg$  y para la lámina en aluminio  $0.305Kg$ .

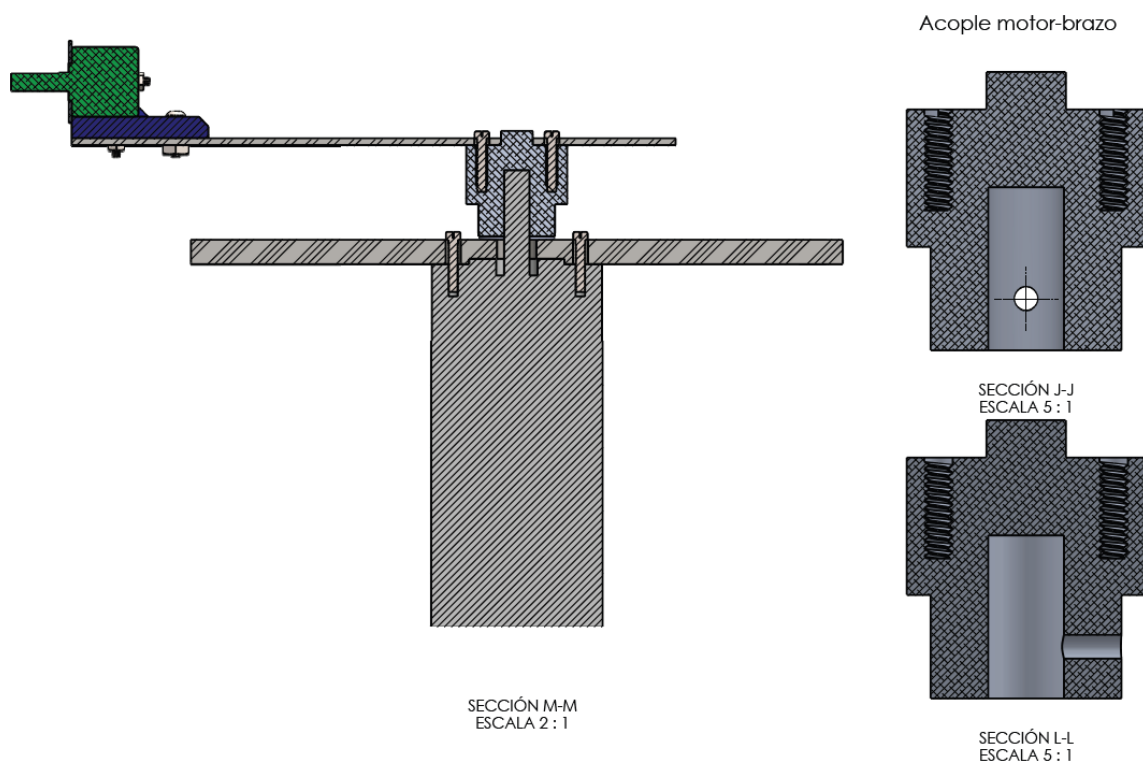
Se puede notar que la opción en acero inoxidable se deflecta la mitad que la opción en aluminio debido a los esfuerzos máximos que ambas reciben, y su desplazamiento es menor a  $1mm$ .

### 3.1.3 Diseño acople-motor

Por último, para el ensamble del motor con todo el sistema, se diseñó un acople con un agujero de  $0.05mm$  más que el eje del motor con un agujero para sujetarlo con un tornillo prisionero, se une a la barra con 4 tornillos de  $3/16pul$  de tal manera que actúan como una unión rígida.

## Figura 8

*Vista seccionada – Acople motor*

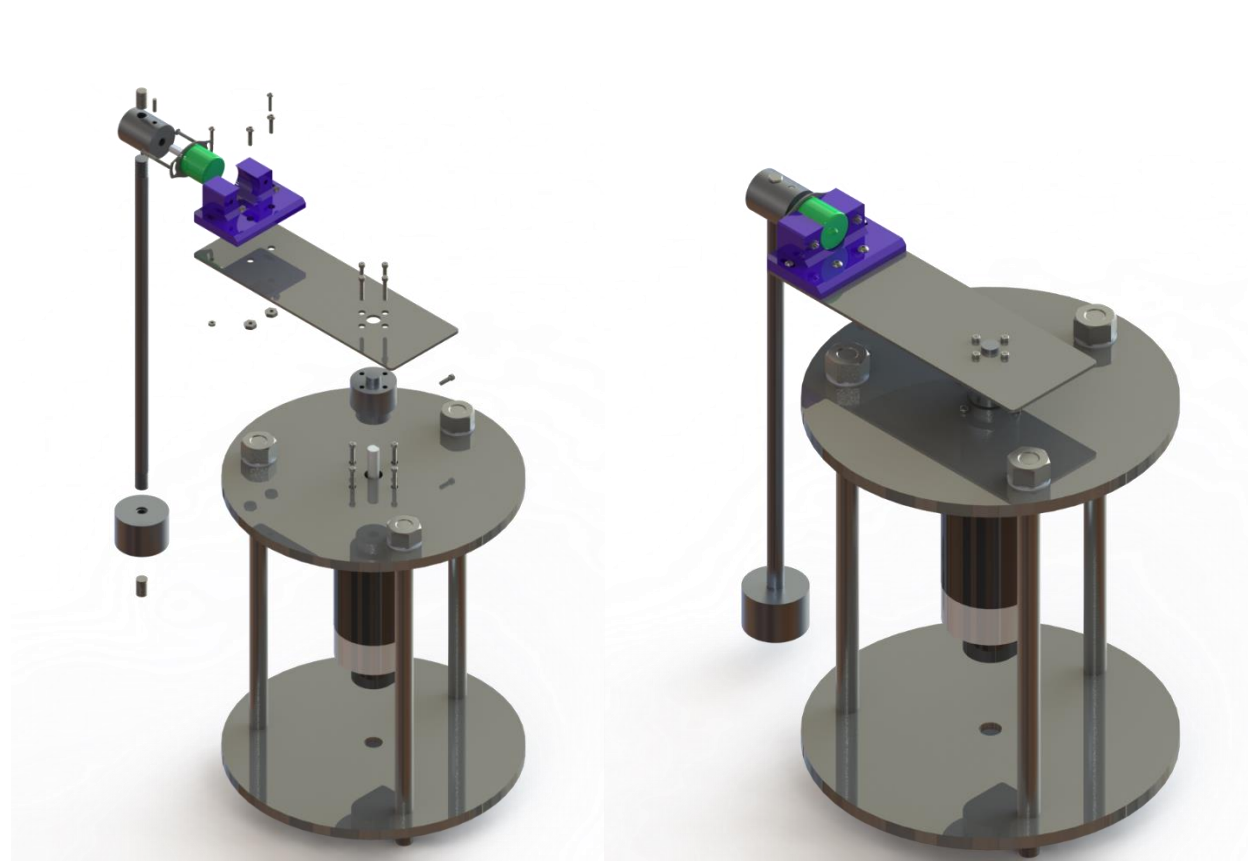


La conexión entre el motor y el brazo tiene la finalidad de transferir eficazmente la fuerza de giro del motor al brazo, no debe permitir vibraciones excesivas o asimetrías, un buen mecanizado nos dará mayor precisión tanto en la toma de datos como en el control del sistema.

El despiece del equipo evidencia la forma en que todos sus elementos se encuentran acoplados:

### Figura 9

*Despiece del equipo – Ensamble equipo*



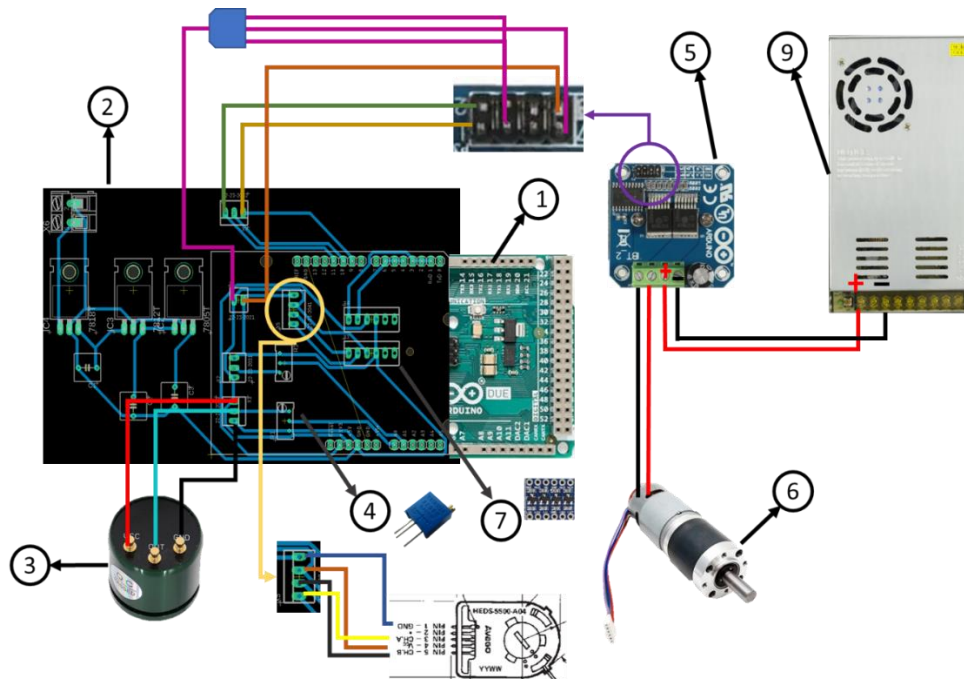
Nota. Toda la sección de diseño mecánico fue desarrollada en la versión estudiantil del programa SolidWorks 2021.

### 3.2 Elección de componentes electrónicos

Para terminar el ensamble del equipo, se acoplaron los elementos electrónicos elegidos para la aplicación, las conexiones se hicieron como se muestra en el diagrama de conexión:

**Figura 10**

*Diagrama de conexión.*



**Tabla 3**

*Componentes electrónicos*

Ítem	Elemento
1	Arduino Due
2	Baquela
3	Sensor de ángulo giratorio
4	Trimmer de 5 Kohm
5	Puente H BTS7960
6	Motor DC 36V con encoder HEDS-5500
7	Convertor de niveles bidireccional de 5v a 3.3v
8	Fuente DC 36V

A través de las librerías y bloques de Simulink, el Arduino Due recibe información del sensor de ángulo y del encoder del motor para procesar estos datos en tiempo real con un algoritmo de control diseñado en Simulink. Considerando la discrepancia entre la posición actual y la deseada del péndulo, el Arduino envía señales al módulo Puente H para modificar la dirección y velocidad del motor, con el fin de estabilizar el péndulo verticalmente.

### 3.2.1 *Arduino Due*

Se utiliza un Arduino Due para la conexión e interacción con otros componentes, como encoders y controladores de motor, además que su capacidad para procesar señales digitales y analógicas asegura una captura y acción efectiva basada en los datos del sistema.

**Tabla 4**

*Características Arduino Due*

---

**Arduino™ Due Original Italiano**

---



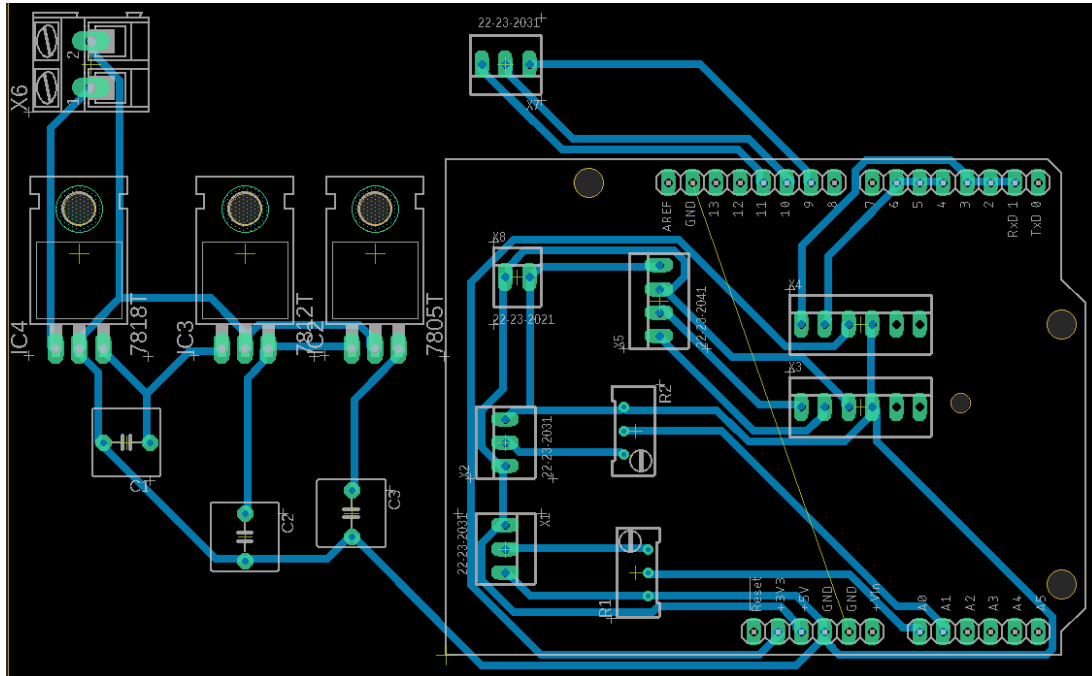
<b>Tensión de funcionamiento</b>	3.3V
<b>Voltaje de entrada (recomendado)</b>	7-12V
<b>Microcontroladores</b>	AT91SAM3X8E
<b>Velocidad del reloj</b>	84 MHz
<b>Corriente continua en todas las líneas de E / S</b>	130 Ma

### 3.2.2 PCB

Sirve como base para conectar todos los componentes eléctricos y electrónicos.

**Figura 11**

*PCB utilizada en la conexión*



### 3.2.3 Sensor de ángulo giratorio

El Sensor de ángulo giratorio de 0 a 360 grados en el péndulo de Furuta tiene la función de monitorear y registrar continuamente el ángulo de rotación del péndulo. Esta medición precisa y constante del ángulo permite a las técnicas de control PID y LQR aplicadas en el presente proyecto, ajustar o mantener el estado de equilibrio del péndulo.

**Tabla 5***Características Sensor giratorio*


---

**Sensor de ángulo giratorio 0 a 360  
grados**

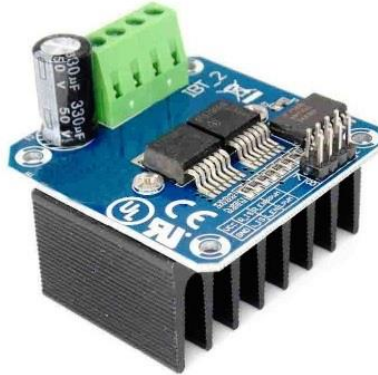
---



<b>Tensión de funcionamiento</b>	5V ± 10%
<b>Velocidad de actualización</b>	0,6 ms/0,2 ms (alta velocidad)
<b>Señal de salida</b>	0 ~ 5V (proporcional)
<b>Resolución</b>	360 °/4096(12 bit) y asyp;0.088 °
<b>Ángulo eléctrico eficaz</b>	360 °

**3.2.4 Puente H BTS7960**

El controlador motor puente H BTS7960 43A regula el movimiento bidireccional del motor en el péndulo de Furuta. Debido a su diseño, facilita inversiones rápidas de corriente, lo que permite cambios ágiles en la dirección de giro del motor y ayuda a mantener el péndulo en equilibrio.

**Tabla 6***Características Puente H BTS7960***Controlador motor puente H BTS7960 43A**

<b>Corriente máxima</b>	43 A
<b>Voltaje de entrada</b>	5,5 V - 27 V
<b>Señal PWM</b>	2 canales
<b>Entradas lógicas</b>	Si

**3.2.5 Motor cepillado con encoder HEDS-5500**

Como actuador del sistema se eligió un motor de escobillas CC de Alta Eficiencia de 200 W, con una capacidad de trabajo a 36 V y opera en un rango de velocidades que va 0 hasta 4500 rpm.

El motor fue seleccionado debido a su disponibilidad en el momento de la elección, y posteriormente, durante las pruebas, se pudo verificar que se adecuaba de manera satisfactoria a los requisitos de funcionamiento del proyecto.

**Tabla 7***Características Motor*

<b>Motor DC 36V con encoder HEDS-5500</b>	
	
<b>Tipo motor</b>	Motor de escobillas
<b>Potencia</b>	200 W
<b>Voltaje</b>	36 V
<b>Corriente</b>	DC
<b>Diámetro eje</b>	8 mm
<b>Velocidad angular</b>	1000-4500 rpm

**3.2.6 Fuente DC 36V**

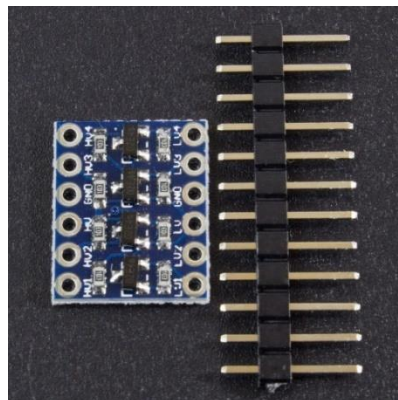
La fuente es responsable de proporcionar energía regulada al sistema. Para garantizar un funcionamiento adecuado y la estabilidad del sistema, el voltaje de la fuente debe coincidir con el especificado para el motor.

Si se utiliza una fuente con un voltaje superior al recomendado para el motor, puede resultar en sobrecalentamiento debido a un flujo de corriente excesivo. Por otro lado, emplear una fuente con un voltaje inferior al requerido genera menor velocidad y torque del motor.

**Tabla 8***Características Fuente 36V*

<b>Fuente Conmutada 36V 10A</b>	
<b>Potencia de salida</b>	301 -400 W
<b>Corriente de entrada</b>	20A -120 VAC (arranque en frío)
<b>Voltaje de salida</b>	36 VDC
<b>Corriente de salida</b>	10 A

### 3.2.1 *Convertor de niveles bidireccional de 5v a 3.3v*

**Figura 12***Convertor de nivel lógico*

Debido a que el Arduino Due opera a 3.3V, mientras que algunos componentes como el controlador de motor puente H BTS7960 43A, requieren una alimentación de 5V, se incorpora un módulo conversor de nivel lógico 5V a 3.3V / 3.3V a 5V para facilitar la comunicación y el funcionamiento adecuado entre dispositivos, tanto en la dirección de 5V a 3.3V como en la inversa, de 3.3V a 5V.

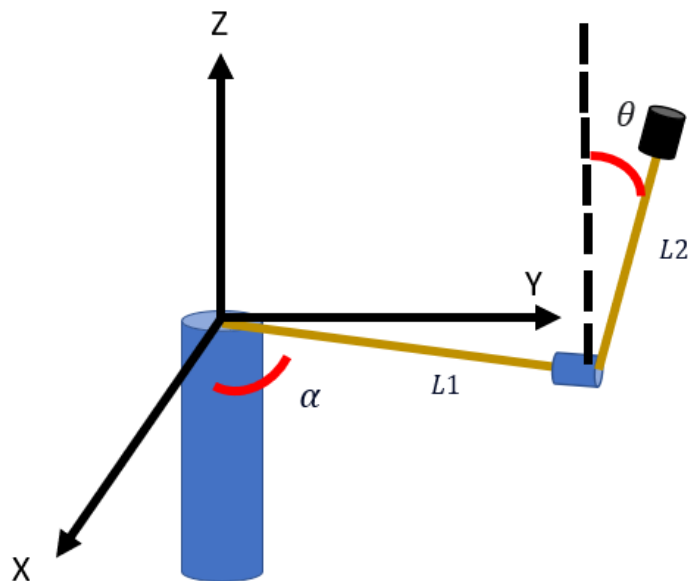
#### 4. Modelo matemático

##### 4.1 Obtención del modelo no lineal del péndulo Furuta a través de Euler-lagrange

A continuación, se muestra un plano que sirve para descomponer las velocidades y posiciones del sistema, facilitando el análisis de dichos componentes.

##### Figura 13

*Modelo matemático 1 – Vista 3D*



$L_{1c}$  =Distancia desde el centro de rotación de la barra L1 hasta su centro de inercia

$L_{2c}$  =Distancia desde el centro de rotación de la barra L2 hasta su centro de inercia

$w_1$  =Velocidad angular del eslabón

$w_2$  =Velocidad angular del péndulo

$\alpha$  =Angulo de rotación del eslabón

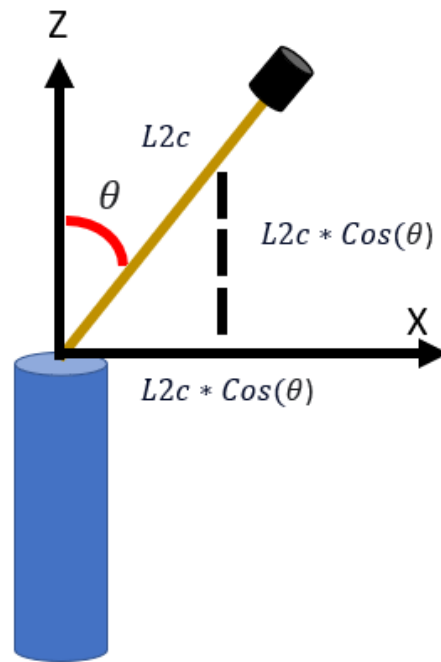
$\theta$  =Angulo de rotación del péndulo

Se deben definir dos vectores para el eslabón: uno que se extienda desde su centro de rotación hasta el centro de inercia, y otro que se dirija hacia el extremo del eslabón. Es importante tener en cuenta que el eslabón se sitúa a lo largo del eje Y, por lo tanto, solo consideramos su componente en ese eje. Esto se describe de la siguiente manera:

$$R_1 = L_1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R_{1c} = L_{1c} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

En lo que respecta a las coordenadas del péndulo, su posición se descompone en la componente, Z e Y, como se muestra en la figura.

**Figura 14***Modelo matemático 2 - Vista Lateral*

$$R_{2c} = L_{2c} * \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Luego se establece la velocidad angular, que es definida como la tasa de cambio de cada ángulo de rotación:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

La velocidad lineal del eslabón se calcula como el producto cruz entre la velocidad angular y la distancia, de la siguiente manera:

$$V_{1c} = w_1 \times R_{1c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ L_{1c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}L_{1c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

La velocidad lineal del péndulo es el resultado de la combinación de su propia velocidad angular y la velocidad angular del eslabón, debido a la configuración física, esto se puede expresar en la ecuación que se muestra a continuación:

$$V_{2c} = w_1 \times R_1 + w_2 \times R_{2c} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos \theta L_{2c} \\ 0 \\ \sin \theta L_{2c} \end{bmatrix}$$

$$V_{2c} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}L_1 - \dot{\theta} * L_{2c} \cos \theta \\ 0 \\ \dot{\theta}L_{2c} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesario tener información sobre la energía cinética y potencial del sistema, debido a que el lagrangiano se obtiene a partir de la diferencia entre estas dos energías. La energía cinética se define de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2} w_1 J_{1p} + \frac{1}{2} V_{1c} m_1 + \frac{1}{2} w_2 J_{2p} + \frac{1}{2} V_{2c} m_2$$

$$T = \frac{1}{2} J_{1p} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\alpha}^2 L_{1c}^2 + \frac{1}{2} J_{2p} \dot{\theta}^2 - m_2 \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \theta L_1 L_{2c} + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 m_2 L_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 m_2 L_{2c}^2 \quad (17)$$

La energía potencia solo la experimenta el péndulo, como se observa en la figura 14 correspondiente a la vista lateral, la componente en Z :

$$V = L_{2c} \cos \theta m_2 g \quad (18)$$

Como fue mencionado anteriormente se calcula el Lagrangiano como la energía cinética menos la energía potencia:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} J_{1p} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\alpha}^2 L_{1c}^2 + \frac{1}{2} J_{2p} \dot{\theta}^2 - m_2 \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \theta L_1 L_{2c} + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 m_2 L_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 m_2 L_{2c}^2 - L_{2c} \cos \theta m_2 g \quad (19)$$

Se procede a ingresar el lagrangiano en la ecuación Euler Lagrange para modelar sistemas mecánicos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau - b_1 \dot{\alpha} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -b_2 \dot{\theta} \quad (21)$$

Se parte del supuesto de que la variación de la corriente es mínima, lo que resulta en el torque:

$$\tau = \frac{K_t}{R_m} (U - K_e \dot{\alpha}) \quad (22)$$

Solucionando la ecuación (20), se obtiene:

$$J_{1p} \ddot{\alpha} + m_1 \ddot{\alpha} L_{1c} - m_2 \ddot{\theta} \cos \theta L_1 L_{2c} + m_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta L_1 L_{2c} + \ddot{\alpha} m_2 L_1^2 = \frac{K_t (U - K_e \dot{\alpha})}{R_m} - b_1 \dot{\alpha} \quad (23)$$

Solucionando la ecuación (21), se obtiene:

$$J_{2p} \ddot{\theta} - m_2 \ddot{\alpha} \cos \theta L_1 L_{2c} + m_2 \ddot{\theta} L_{2c} = -b_2 \dot{\theta} \quad (24)$$

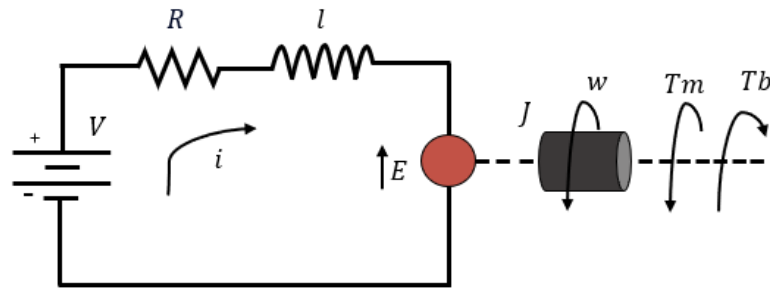
#### 4.2 Modelamiento del motor DC

En su forma más básica, el modelo de un motor DC se compone de dos componentes principales: la parte eléctrica y mecánica. En la parte eléctrica, se considera la relación entre el voltaje aplicado al motor, la corriente que fluye a través de él y la resistencia interna del motor. Esta relación se describe mediante la Ley de Ohm y la Ley de Kirchhoff. Además, se tiene en

cuenta la inductancia interna del motor. Adicionalmente se genera un voltaje que se denomina fuerza contraelectromotriz, que es producido por la interacción del campo magnético con las bobinas cuando estas están girando.

**Figura 15**

*Modelo matemático 3 - Motor*



$$\sum_j^n V_j = 0$$

$$V - V_R - V_L - V_E(t) = 0$$

$$V - R i(t) - L * \frac{di(t)}{dt} - V_b(t) = 0 \quad (25)$$

Donde:

$V$  = Voltaje del motor

$i$  = Corriente que fluye a través del motor

$R$  = Resistencia del motor

$L$  = Inductancia del motor

$V_b$  = Fuerza contraelectromotriz

$W$  = Velocidad angular

$T_m$  = Torque generado por el motor

$T_b$  = Torque por fricción

$I$  = Inercia

En cuanto a la parte mecánica, se describe utilizando las leyes de Newton aplicadas a un cuerpo en rotación. Se considera tanto el torque generado por el motor como el torque de fricción, este último actúa de la siguiente manera, a medida que el motor gira más rápido, el par de fricción viscosa aumenta.

$$J\dot{\omega} = \sum_j^n T_j$$

$$J\dot{\omega}(t) = T_m - T_b$$

$$J\dot{\omega}(t) = T_m - B\omega(t) \quad (26)$$

Para realizar la interacción entre la ecuación eléctrica y mecánica, se utilizan unas ecuaciones de acoplamiento. La constante de torque  $K_t$  surge de la Ley de Ampere, la cual establece que establece que la fuerza magnética (y, por lo tanto, el torque en un motor) es directamente proporcional a la corriente eléctrica cuando se tiene un campo magnético presente.

$$T_m = K_t i(t) \quad (27)$$

La velocidad a la que gira un motor ( $\omega$ ) depende de la tensión eléctrica proporcionada  $V_b$ . La relación entre la tensión eléctrica y la velocidad angular se describe con una constante llamada coeficiente de velocidad electromotriz  $K_e$ . Si se incrementa la tensión aplicada al motor, este aumentará su velocidad de giro; en contraste, al reducir la tensión, la velocidad disminuirá.

$$V_b = K_e \omega(t) \quad (28)$$

Se reemplaza la ecuación (28) dentro de la (25)

$$V - R i(t) - L * \frac{di(t)}{dt} - K_e \omega(t) = 0 \quad (29)$$

Se reemplaza la ecuación (27) dentro de la (26)

$$J\dot{\omega}(t) = K_t i(t) - B \omega(t) \quad (30)$$

Las ecuaciones (29) y (30) describen la modelo electromecánica del motor de corriente directa. Estas son necesarias al momento de determinar los parámetros que modelan el péndulo de Furuta.

## 5. Calibración y ajuste del modelo matemático

### 5.1 Calibración de los sensores

#### 5.1.1 Caracterización del motor

Para corregir el voltaje que ingresa al código de toma de pruebas reales, se realiza la caracterización del motor. Para ello, se realiza una evaluación de la región en la que el motor no responde a las señales de entrada. Se inicia el proceso evaluando la respuesta del motor desde un valor de entrada de pulso igual a 1, y se continúa hasta identificar el punto en el que el motor comienza a moverse, en este caso, para un valor de PWM igual a 5, el motor comienza a girar. Este rango, de 0 a 5 PWM, es la zona muerta del motor, parte de la curva de par corriente con

tensión de entrada no nula y salida nula. Esta zona muerta debe ser considerada durante el diseño de los controladores, con el fin de asegurar que no existe un impacto negativo en la precisión y la respuesta del sistema.

Incluso si el motor es nuevo, es necesario tener en cuenta que la mayoría de los motores eléctricos tienen alguna asimetría en su funcionamiento debido al proceso de fabricación y el bobinado. Esto significa que pueden generar más fuerza o torque en un sentido de giro que en el contrario.

En base a esto, se realiza una prueba a distintos valores de PWM en un sentido y en el otro, y se obtiene que:

**Tabla 9**

*Toma pruebas para caracterización del motor*

PWM	W[rpm]	-PWM	W[rpm]
20	285	-20	-282
40	612	-40	-610
60	936	-60	-931
80	1256	-80	-1250
100	1577	-100	-1570

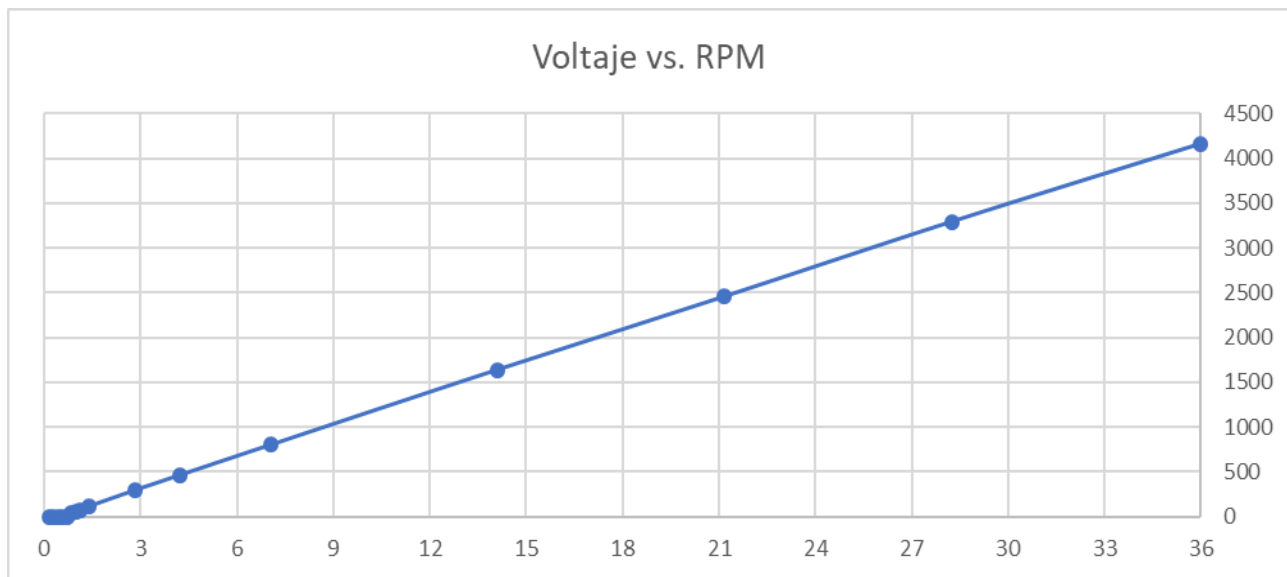
La relación entre el valor de PWM positivo y el valor de PWM negativo es en promedio 0.99, por ende, se añade una ganancia con este valor al código para tomar los datos reales que ingresarán a la caja gris (Esquema mostrado en la Figura 18).

Contribuyendo al entendimiento de las características operativas del equipo, se realizó una toma de datos que consta de ingresar valores desde 0 hasta 255 al motor, es decir, llevando el

voltaje de 0 a 36V y se grafica respecto a la velocidad arrojada. Se puede observar en la gráfica la zona muerta que comprende voltajes menores a 2V.

**Figura 16**

*Curva PWM – RPM motor*



Dado que no se dispone de la capacidad para medir la corriente en el sistema, en el marco de esta investigación se procedió a realizar la caracterización del motor a partir del análisis de la gráfica de voltaje frente a las RPM, en la cual se pudo identificar una tendencia lineal ascendente. Se determinó que la velocidad máxima alcanzada por el motor es de 4162 RPM, lo que conduce a una similitud respecto a la velocidad teórica máxima del motor del 93%. Estos resultados se obtuvieron como parte de la evaluación del rendimiento del sistema.

### 5.1.2 Ajuste lectura de los sensores giratorios

Para caracterizar los sensores, inicialmente se realiza el ajuste con el sensor óptico incorporado en el motor, se le da una vuelta completa al motor y la lectura nos muestra 2000, por ende, esta primera ganancia es  $360/2000$ .

Para caracterizar el sensor giratorio ubicado en el extremo del brazo se ajustó su resolución, añadiendo una ganancia de  $4095/4030$  y al girarlo  $180^\circ$  obtenemos la segunda ganancia de  $360/4095$ .

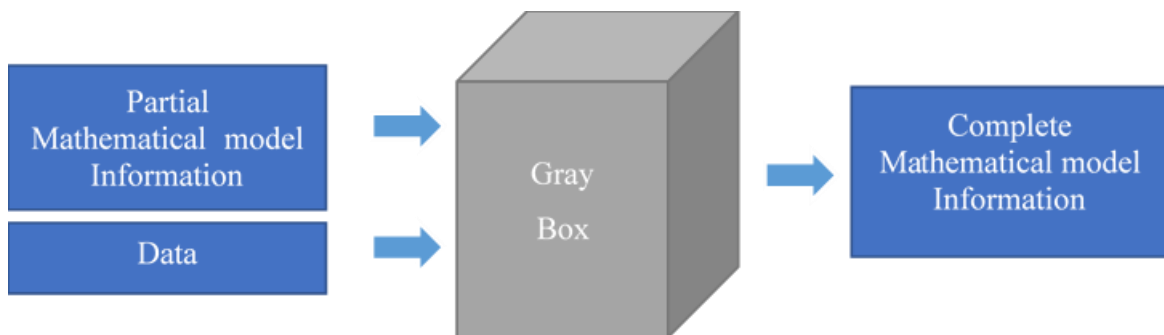
Parte del diseño del acople brazo-péndulo se dispuso de tal manera en que para una misma posición del eje del encoder, la barra pueda estar arriba o abajo, esto facilita la calibración del encoder y la precisión de las ganancias.

## 5.2 Estimación de parámetros del modelo matemático

Para la obtención de los parámetros reales del péndulo se usará la herramienta nlgr, Nonlinear Grey-Box de MatLab, esta herramienta estima los parámetros desconocidos del modelo y los estados iniciales utilizando datos medidos. (MatLab, 2023).

### Figura 17

*Esquema funcionamiento de método caja gris*

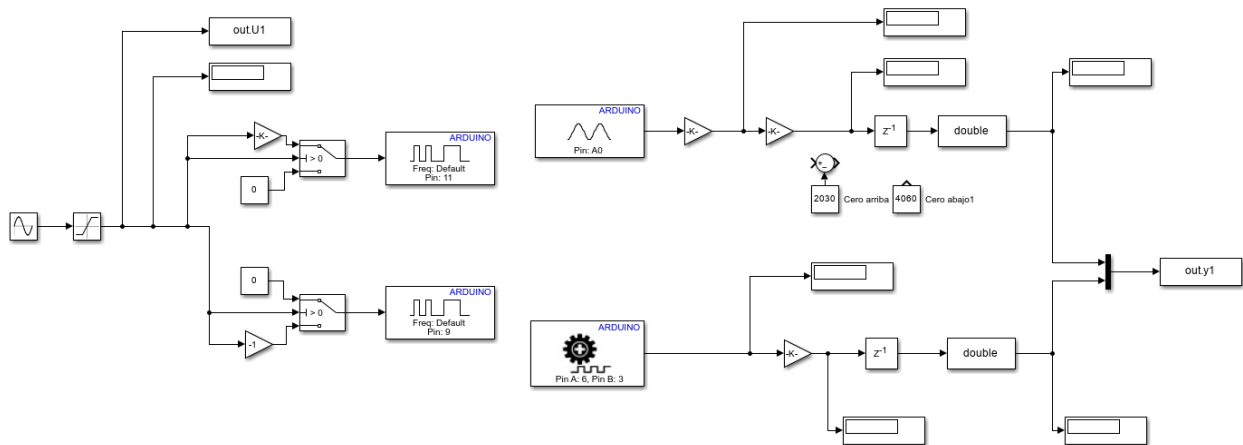


Para la obtención de datos se utilizó SimuLink support package for Arduino Hardware y Matlab support package for Arduino Hardware, estos complementos permiten la integración de hardware Arduino con el entorno de desarrollo de MATLAB y Simulink mediante bloques Arduino. En consecuencia, los códigos se realizaron en scripts de MatLab y en diagramas de bloques por SimuLink,

Para la obtención de datos reales, se realizó el siguiente esquema de bloques:

**Figura 18**

*Diagrama Prueba 1: Señal sinusoidal*



Los bloques de Arduino leen y envían señales, en la primera parte del diagrama se envía una señal sinusoidal de amplitud 20 y frecuencia 5 con saturador de porcentaje de PWM [255, -255], esta pasa a una configuración que envía la señal al pin 11 si se trata de un valor positivo, y una señal al pin 9 si se trata de un valor negativo, estos pines están conectados a las entradas del puente H, de forma que el motor gire a la derecha y a la izquierda según el signo y la intensidad de la señal.

El pin A0 lee la señal discreta generada por el encoder incremental del péndulo. Se añade una ganancia que corrige la resolución del encoder y una segunda ganancia que convierte esta

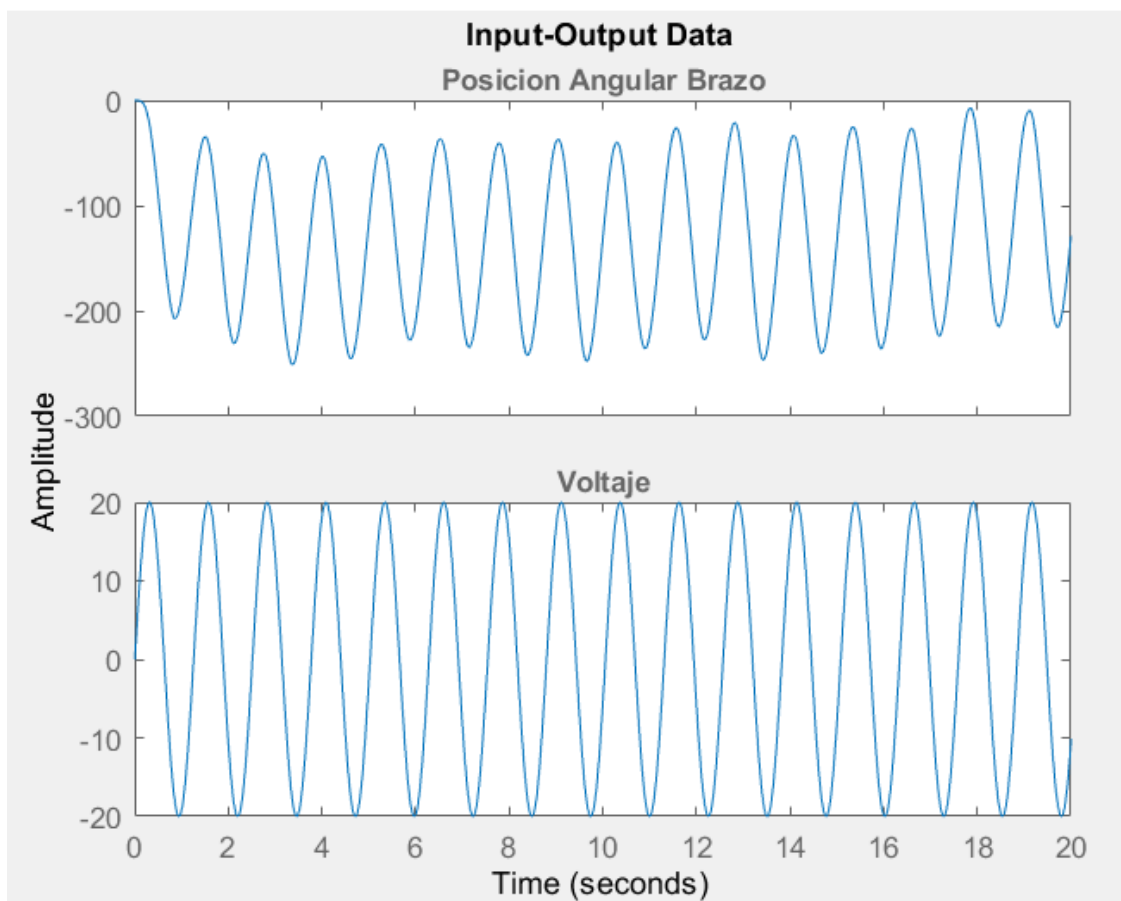
señal en un ángulo. Los bloques delay y double se añaden para otorgar al diagrama de bloques un comportamiento más real.

El pin 6 y 3 pertenecen a las salidas A y B del encoder acoplado al motor, por ende, por cada movimiento giratorio que realice el motor el encoder generará señales que serán leídas por este bloque.

Para el primer proceso de estimación de parámetros se define una salida; el ángulo del brazo. Esta prueba tuvo una duración de 20 segundos.

### Figura 19

*Respuesta del ángulo del brazo a la entrada sinusoidal*



Aunque el modelo matemático contempla todos los parámetros de interés del sistema, se optó por realizar una sintonización inicial del sistema acoplado únicamente hasta el brazo y posteriormente con el péndulo incorporado. Para el primer paso se trabajaron las siguientes ecuaciones:

La función de derivadas de los estados está compuesta por:

$$dx = \left[ \frac{-b_1 * x(1) + K_t * x(3)}{J1p}; x(1); \frac{\left( \left( 32 * \frac{u(1)}{255} \right) - (R * x(3)) - Ke * x(1) \right)}{Lm} \right];$$

Donde:

$x(1) \rightarrow$  velocidad angular del brazo

$x(2) \rightarrow$  posición angular del brazo

$x(3) \rightarrow$  corriente del motor

La salida entonces será el ángulo del brazo pasado a grados:

$$y = [57.2958 * (x(2))];$$

Para la estimación, se establecieron los siguientes parámetros como valores iniciales:

**Tabla 10**

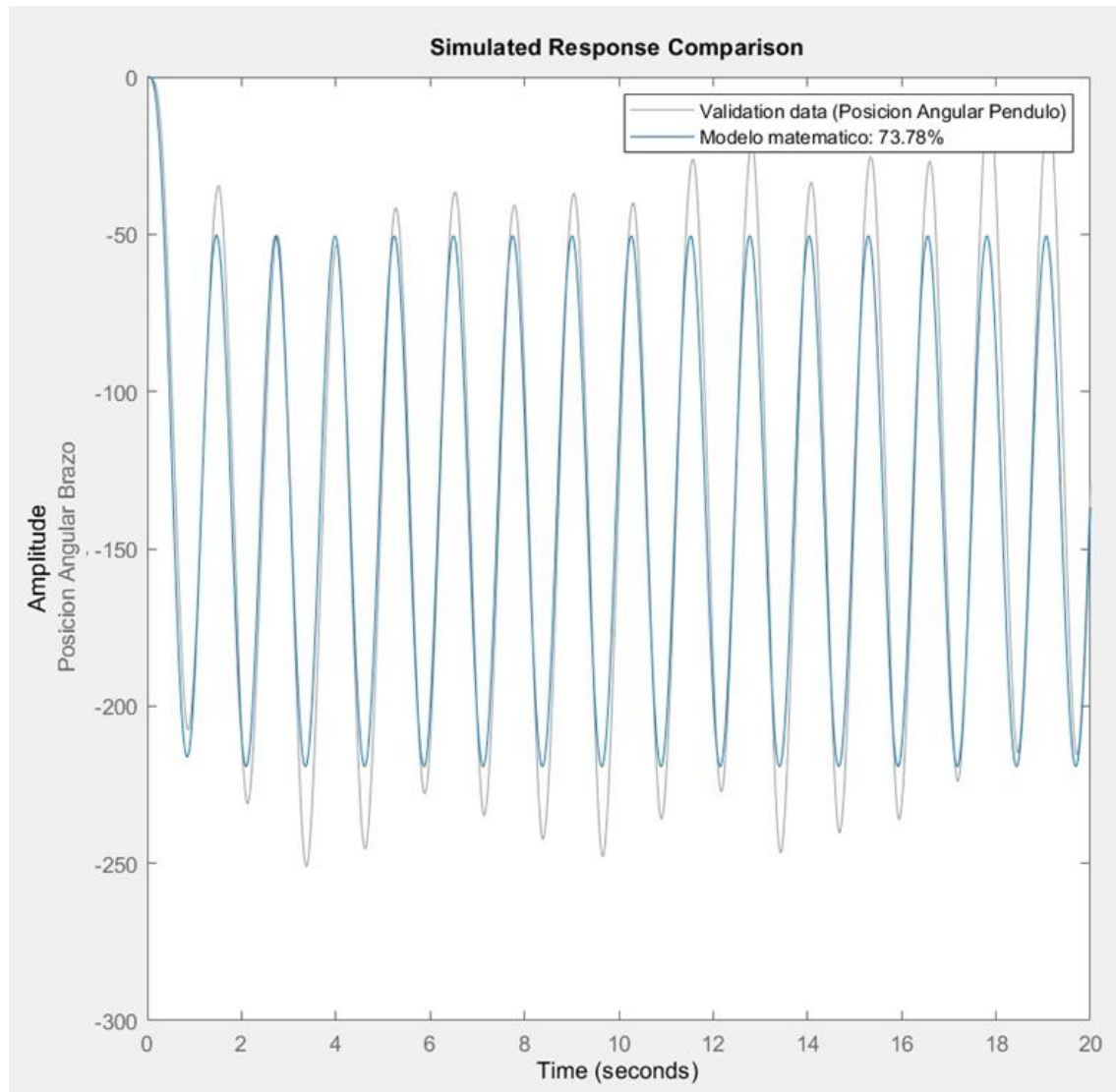
*Condiciones iniciales en la prueba 1. para el modelo de motor*

Parámetro	Valor inicial
<b>R</b>	2.6
<b>Kt</b>	0.01
<b>Ke</b>	0.01
<b>Lm</b>	0.01
<b>J1p</b>	0.001
<b>b1</b>	0.01

Una vez termina la iteración, la respuesta que se obtiene del procedimiento se muestra a continuación:

**Figura 20**

*Desempeño del modelo con datos de validación*



Se puede observar el modelo estimado respecto a la toma de datos del ángulo del brazo, se obtuvo un porcentaje de coincidencia del 73.78%, este valor es aceptable. La iteración arroja los parámetros de la Tabla 11, estos parámetros obtenidos se fijan para realizar la estimación del

modelo matemático del sistema completo. Para considerar como aceptable esta respuesta no debe haber valores negativos en inercias ni viscosidades, pues carecen de lógica física.

**Tabla 11**

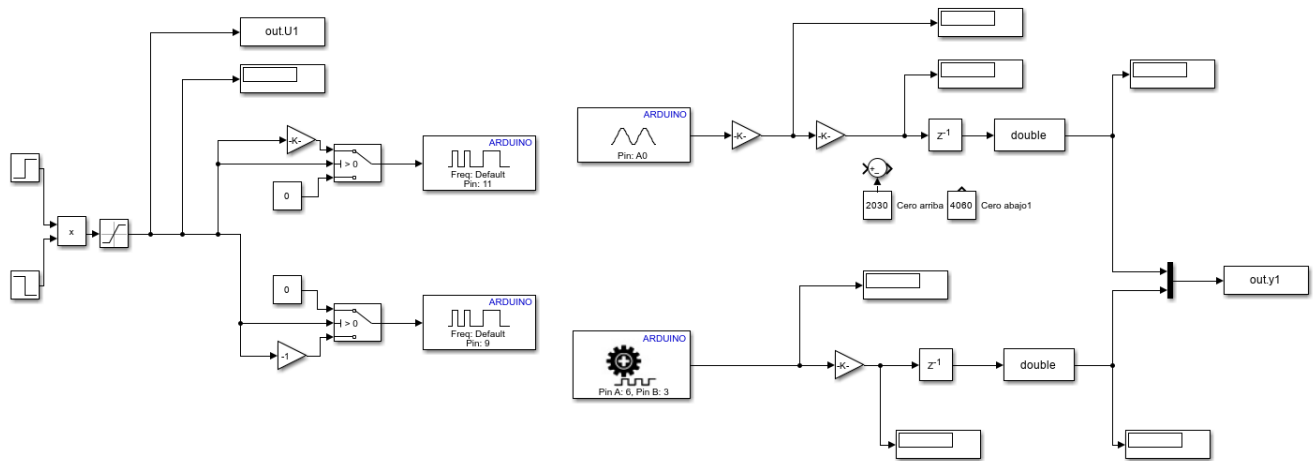
*Condiciones finales en la prueba 1*

<b>Parámetro</b>	<b>Valor final</b>
<b>R</b>	2.6
<b>Kt</b>	0.233590432412956
<b>Ke</b>	0.121746622828274
<b>Lm</b>	0.0909831614599060
<b>J1p</b>	0.0036
<b>b1</b>	0.0081

Para hallar los parámetros del modelo matemático del péndulo se ejecutó el diagrama mostrado anteriormente, pero con una señal step inicial condicionada, que envía un pulso de amplitud 20 después de 1 segundo, y se detiene a los 1.2 segundos, pero definiendo como salidas la posición angular del péndulo y la posición angular del brazo, ambas pruebas tuvieron una duración de 20 segundos.

**Figura 21**

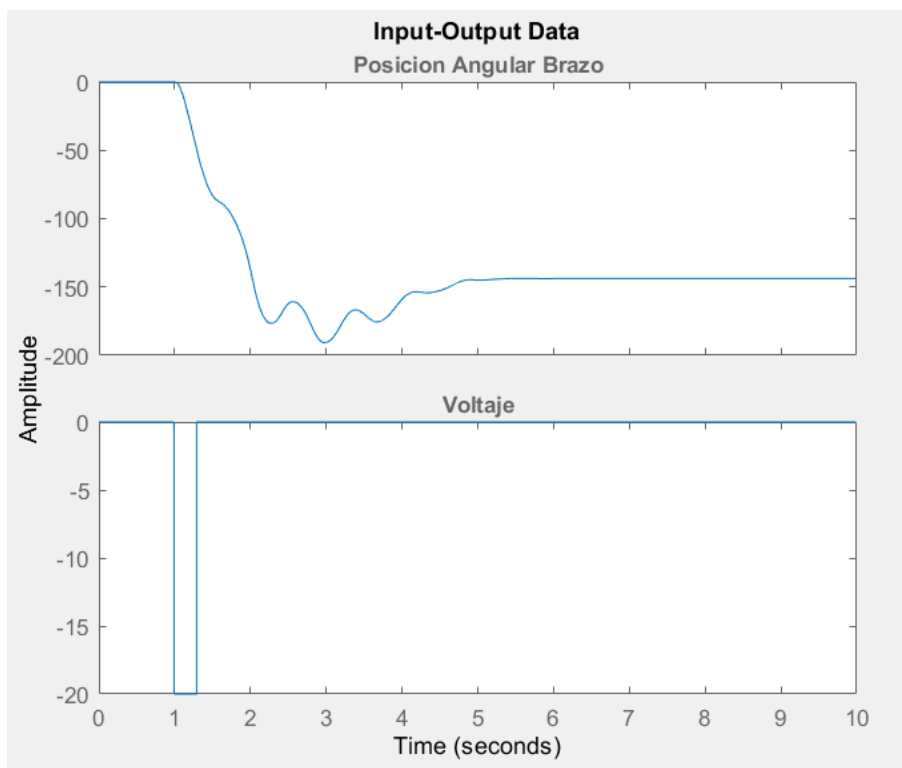
*Diagrama Prueba 2: Señal step condicionada*

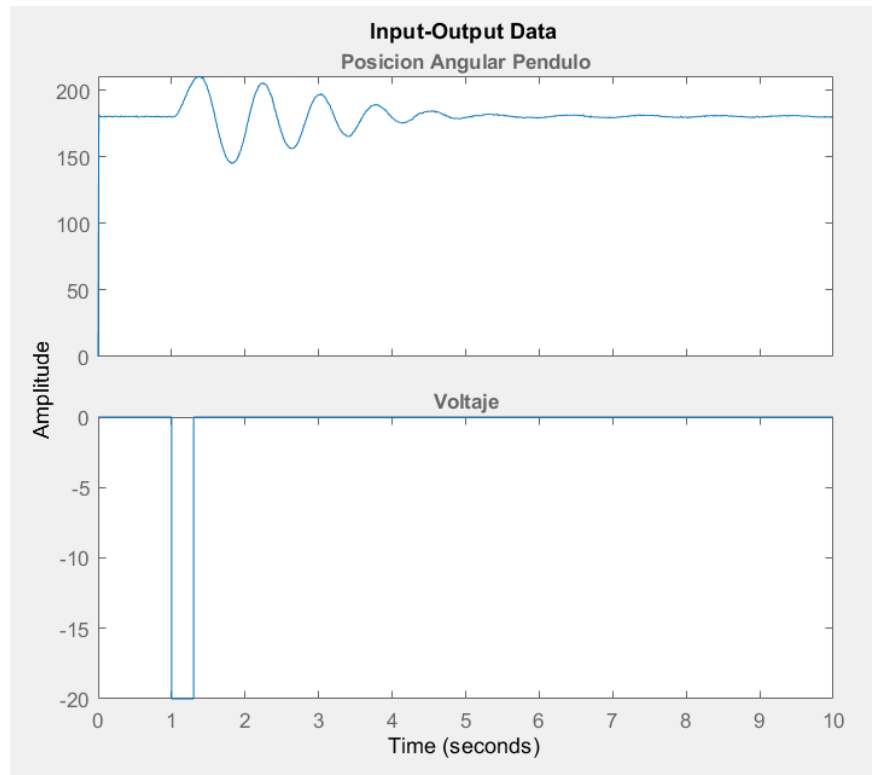


El comportamiento del brazo y el péndulo para este sistema se muestra a continuación:

**Figura 22**

*Respuesta del ángulo del brazo al Step*



**Figura 23***Respuesta del ángulo del péndulo al Step*

Para el proceso de estimación de parámetros del sistema completo se utilizaron las ecuaciones mencionadas en el apartado de modelo matemático, más explícitamente las ecuaciones 23, 24 y 29 y se definió la función de derivadas de los estados con los estados como:

$x(1) \rightarrow$  velocidad angular del brazo

$x(2) \rightarrow$  velocidad angular del péndulo

$x(3) \rightarrow$  posición angular del brazo

$x(4) \rightarrow$  posición angular del péndulo

$x(5) \rightarrow$  corriente del motor

Para la función de las salidas se estableció:

$$y = [ 57.2958 * (x(4)); \\ 57.2958 * (x(3))] ]$$

**Tabla 12**

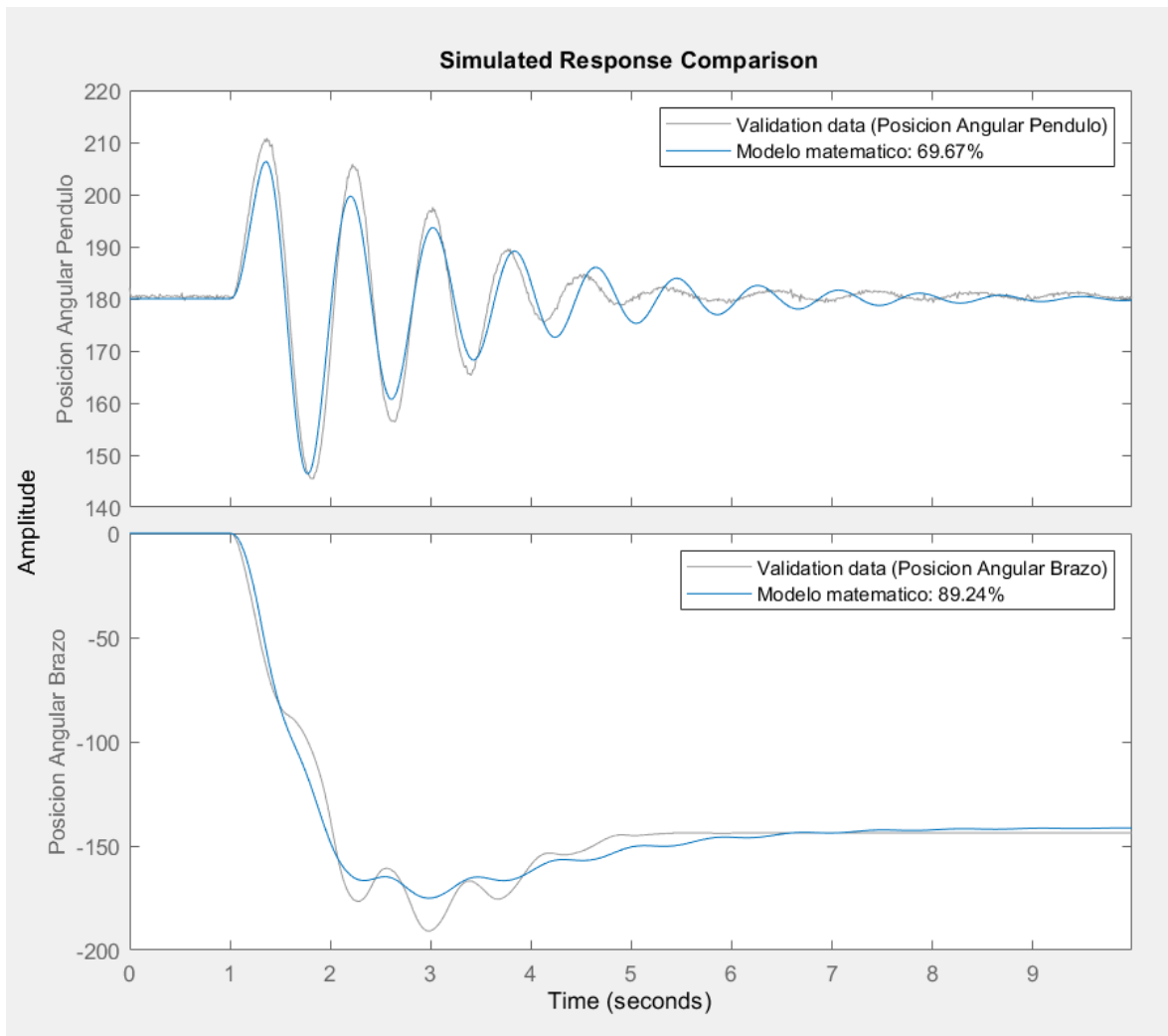
*Condiciones iniciales en la prueba 2. para el modelo completo del péndulo de Furuta*

Parámetro inicial	Valor inicial
<b>b2</b>	0.01
<b>l2</b>	0.05
<b>J2cg</b>	0.01
<b>J1p</b>	0.0036

Parte de los parámetros iniciales salen de la estimación anterior, estos se fijan para no iterarlos y facilitar el cálculo. Algunos como la masa y el alto del péndulo se obtienen con una balanza y un flexómetro. También se estableció como parámetro inicial el  $Kt$ , aunque ya se había iterado en la prueba anterior, para tener un punto de partida de qué tan real está siendo el cálculo.

**Figura 24**

*Desempeño del modelo matemático con datos de validación*



Como se logra observar, el sistema obtuvo parámetros que coinciden en un 69.67% y 89.24%, una posible causa de que en uno de ellos el porcentaje sea inferior a 70% es por la pequeña vibración que se puede apreciar en la toma de datos del ángulo del péndulo, este fenómeno puede ser ocasionado por distintas razones como el desalineamiento o el desgaste en partes internas del motor.

Aun así, el modelo generado replica muy bien la dinámica de la barra y se procede a trabajar con ella. Los parámetros totales que describen el sistema se enlistan en la siguiente tabla:

**Tabla 13***Parámetros propios del modelo matemático*

<b>Parámetro</b>	<b>Valor final</b>
<b>g</b>	9.81
<b>R</b>	2.6
<b>Kt</b>	0. 233590432412956
<b>Ke</b>	0. 121746622828274
<b>Lm</b>	0. 0909831614599060
<b>b1</b>	0. 00153634046367207
<b>L1</b>	0.190
<b>m2</b>	0.159
<b>J1p</b>	0.0042066152065277
<b>l2</b>	0.0943098052610395
<b>b2</b>	0.00272007376324891
<b>J2cg</b>	0.00178999524444115

Una vez obtenido el modelo matemático completo para el sistema de péndulo de Furuta, se procede a realizar la sintonización de los controladores.

## 6. Sintonización de los controladores PID y LQR

### 6.1 Linealización del modelo matemático

Para obtener el modelo lineal se utiliza el método del Jacobiano aplicado al modelo matemático de naturaleza no lineal que describe el sistema. Para ello, en bloques de MatLab y utilizando el comando *jacobian* se ingresa la matriz de derivada de los estados, misma utilizada en el apartado anterior, se especifican los estados y la entrada, que en nuestro caso es el voltaje suministrado al motor. De esta manera obtenemos las matrices A, B, C, D bajo el punto de equilibrio inestable  $\theta = 0$ , es decir, en la posición vertical superior del péndulo y suponiendo los demás estados igual a 0.

Las matrices obtenidas se muestran a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2072 & -0.3263 & 0 & 17.6445 & 31.5102 \\ -0.1843 & -1.1390 & 0 & 61.5987 & 28.0182 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3381 & 0 & 0 & 0 & -28.5767 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.3793 \end{bmatrix};$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0];$$

$$D = [0];$$

Se calcula la controlabilidad del sistema con el comando *ctrb(A,B)* en MatLab

$$CO = 1.0e + 05 * \begin{bmatrix} 0 & 0.0004 & -0.0126 & 0.3498 & -9.4729 \\ 0 & 0.0004 & -0.0116 & 0.3386 & -9.2414 \\ 0 & 0 & 0.0004 & -0.0126 & 0.3498 \\ 0 & 0 & 0.0004 & -0.0116 & 0.3386 \\ 0 & -0.0004 & 0.0107 & -0.2883 & 7.7719 \end{bmatrix};$$

El rango de esta matriz es de 5 por ende este sistema puede ser controlado.

## 6.2 PID

Los parámetros de los bloques PID se configuran utilizando la herramienta Control System Designer en Matlab. Esta herramienta es útil para diseñar controladores SISO, (Singular Input Singular Output), por ende, así como en el caso del control LQR, se aplicará el control al ángulo del péndulo. En esta herramienta se pueden utilizar los métodos de Bode Editor o Root Locus Editor para agregar y eliminar polos y ceros del controlador hasta obtener las ganancias deseadas.

### 6.2.1 Modelo matemático a función de transferencia

En base a las matrices A, B, C, D que describen la planta en el espacio de estados se tiene que;

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} C (sI - A)^{-1} B + D \quad (31)$$

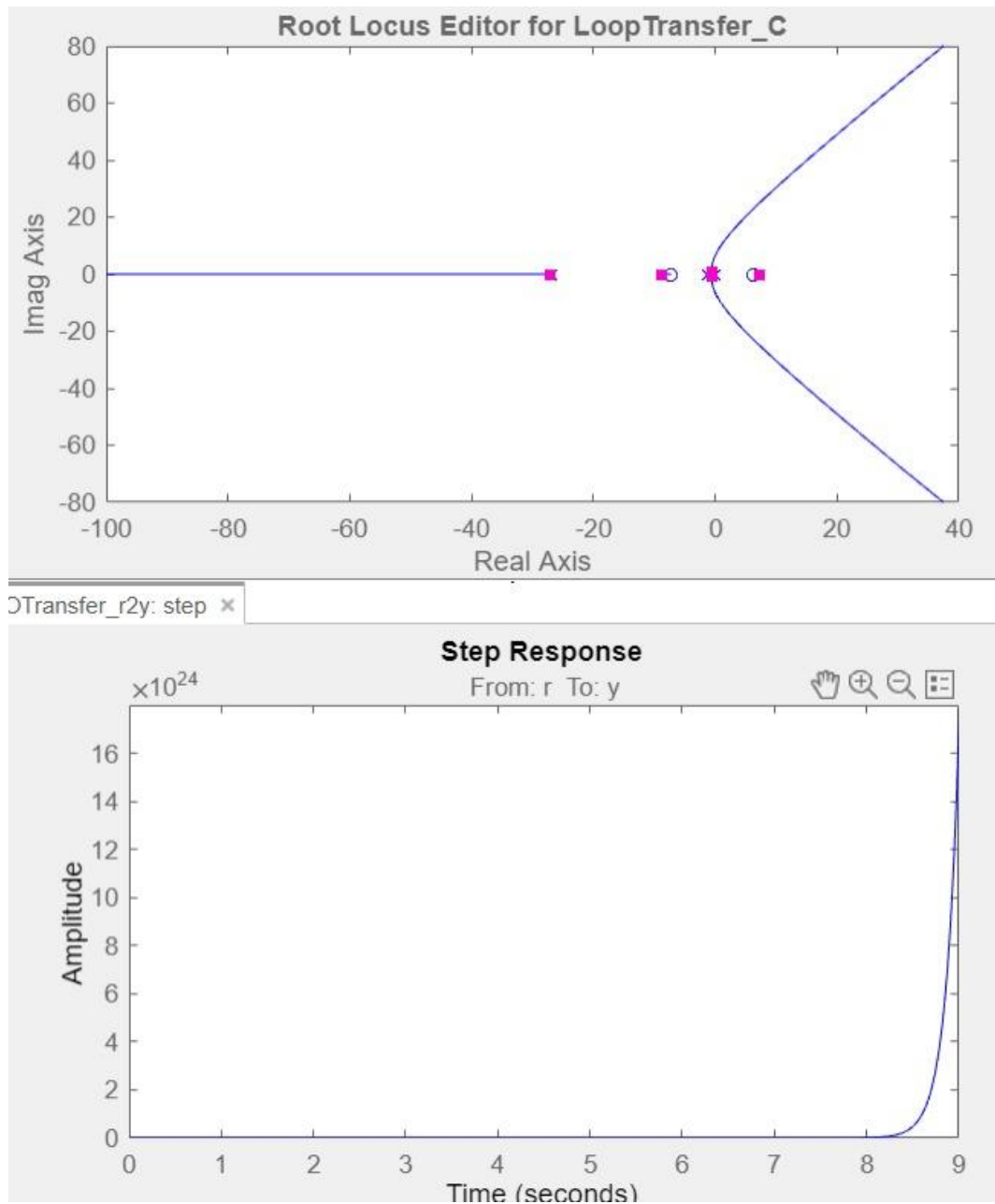
La función de transferencia que describe la relación entre la entrada y la salida del sistema con la salida como el ángulo del péndulo, es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{43.46 s^2 + 36.89 s - 1995}{s^5 + 29.92 s^4 + 19.21 s^3 - 1729 s^2 - 2208 s}$$

La función resultante es una función de orden 5, cuyos polos y ceros se muestran en la siguiente figura

### Figura 25

*Polos y ceros de la función de transferencia del sistema*

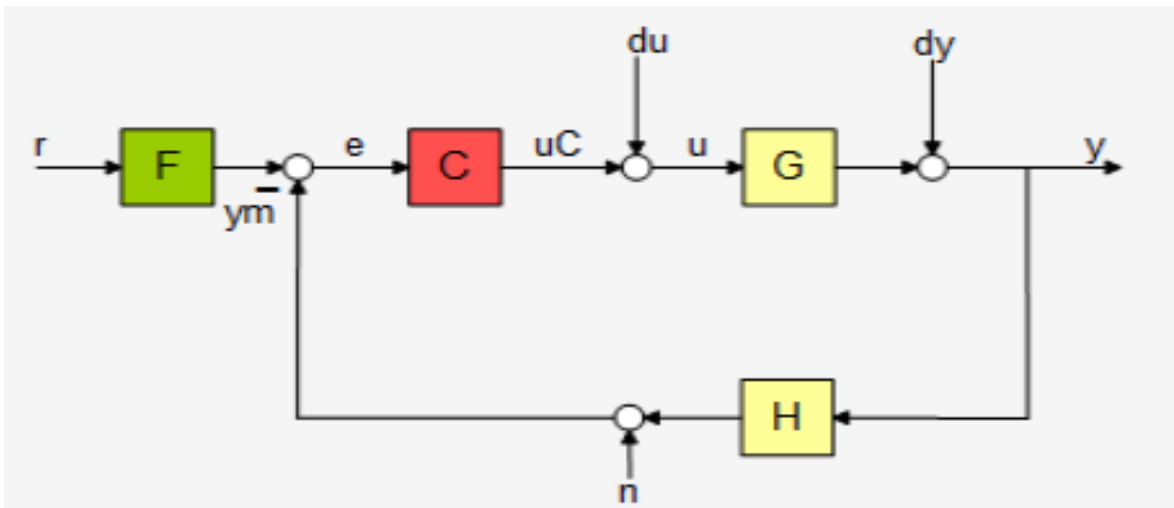


Como era de esperarse, el sistema tiene un comportamiento inestable, pues tiene un polo y un cero superpuestos en la región derecha del plano complejo (polos no dominantes). Por esto, configurar un controlador PID capaz de estabilizarlo es prácticamente imposible, pues al no ser estable el sistema no responderá de manera adecuada a las señales de control y por ende el controlador no cumplirá con los objetivos de control.

Para solucionar este problema, se realiza al proceso de reducción de orden a la función de transferencia del sistema, para esta tarea se hizo uso de la herramienta modelReducer.

**Figura 26**

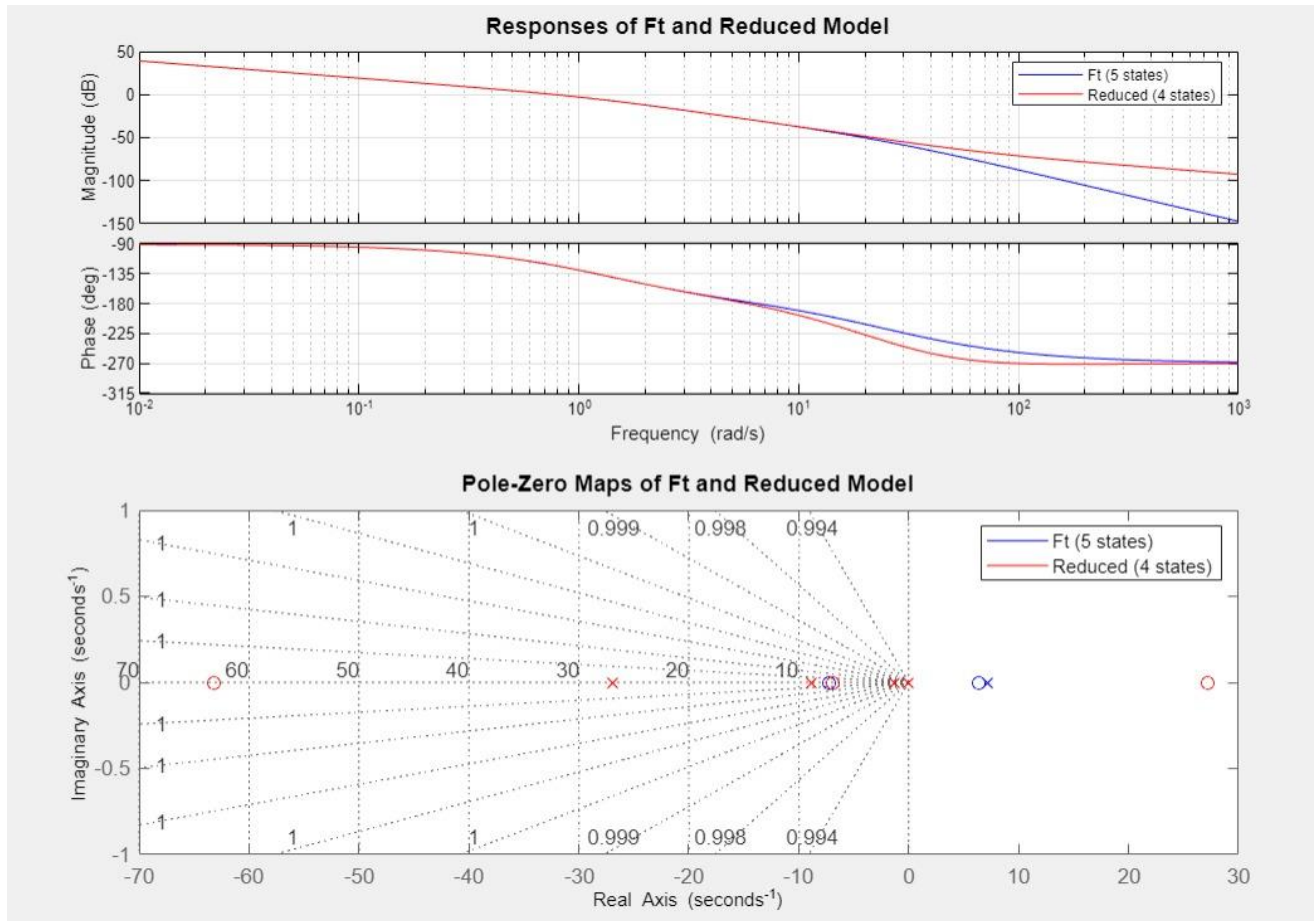
*Esquema de un sistema de control según modelReducer*



Esta herramienta permite la incorporación de diversos componentes, como un bloque C encargado de asumir el rol de controlador, una matriz G que representa la planta, una matriz F que actúa como referencia, y un bloque H que desempeña la función de filtro en el sistema. Se configuran la matriz C y H para este caso.

**Figura 27**

*Reducción de la función de transferencia del sistema*



La reducción arroja una función de transferencia de orden 4, cuyos polos y ceros se encuentran en la parte imaginaria del plano complejo. La función de transferencia reducida es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-0.02336 s^3 - 1.003 s^2 + 34.39 s + 278.8}{s^4 + 37.08 s^3 + 284.6 s^2 + 308.4 s - 0.002491}$$

### 6.2.2 Sintonización controlador PID

Una vez garantizada la estabilidad del sistema, se optó por emplear el método del Root Locus en el diseño del controlador PID. A través de este enfoque, se pudo analizar de manera

visual cómo variaban las ubicaciones de los polos del sistema en respuesta a cambios en los parámetros del controlador, obteniendo la siguiente ecuación para el controlador:

$$C = \frac{5.6 * (1 + 0.54s)(1 + 1.6s)}{s(1 + 0.015s)}$$

Llevándolo a la forma canónica de un controlador PID

$$P + I * \frac{1}{s} + D * \frac{N}{1 + N * \frac{1}{s}} \quad (32)$$

se logró una determinación eficiente de las ganancias proporcional, integral y derivativa, resultando en los siguientes parámetros:

$$P = 11.9962320402872$$

$$I = 5.59957846311$$

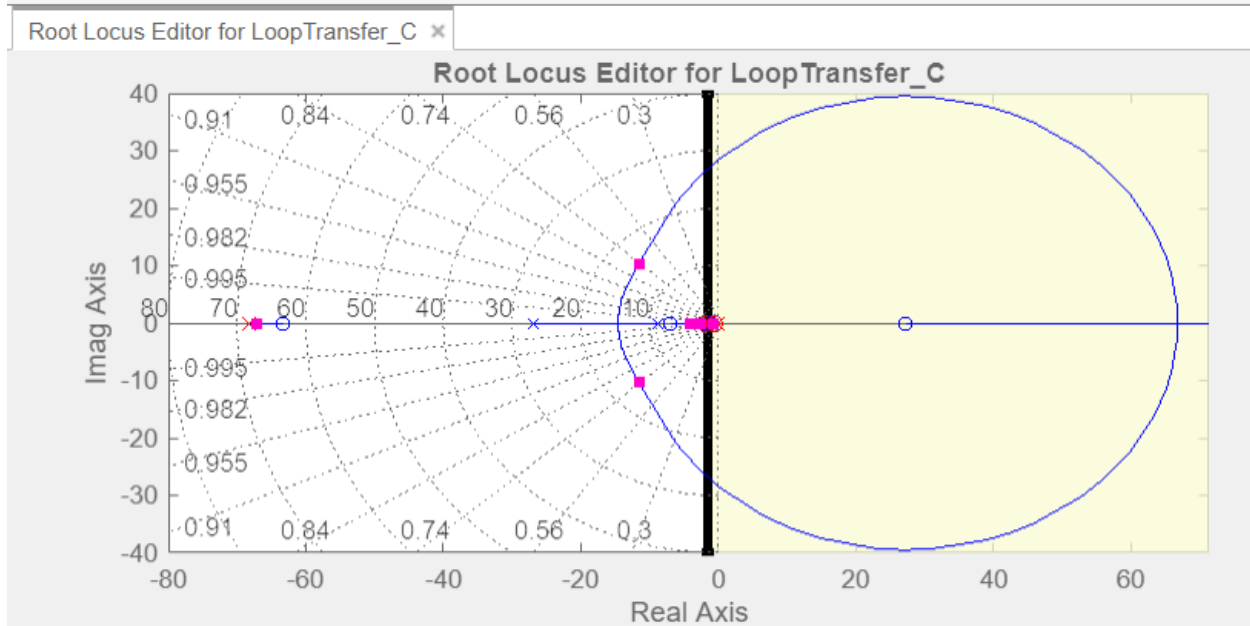
$$D = 4.73725616908345$$

$$N = 68.2142191645745$$

El parámetro "N" en el filtro de derivación del controlador PID se usa para disminuir la influencia del ruido en la señal de entrada y, al aumentar su valor, suaviza la respuesta derivativa del controlador.

**Figura 28**

*Plano complejo de la función de transferencia reducida controlada por PID*

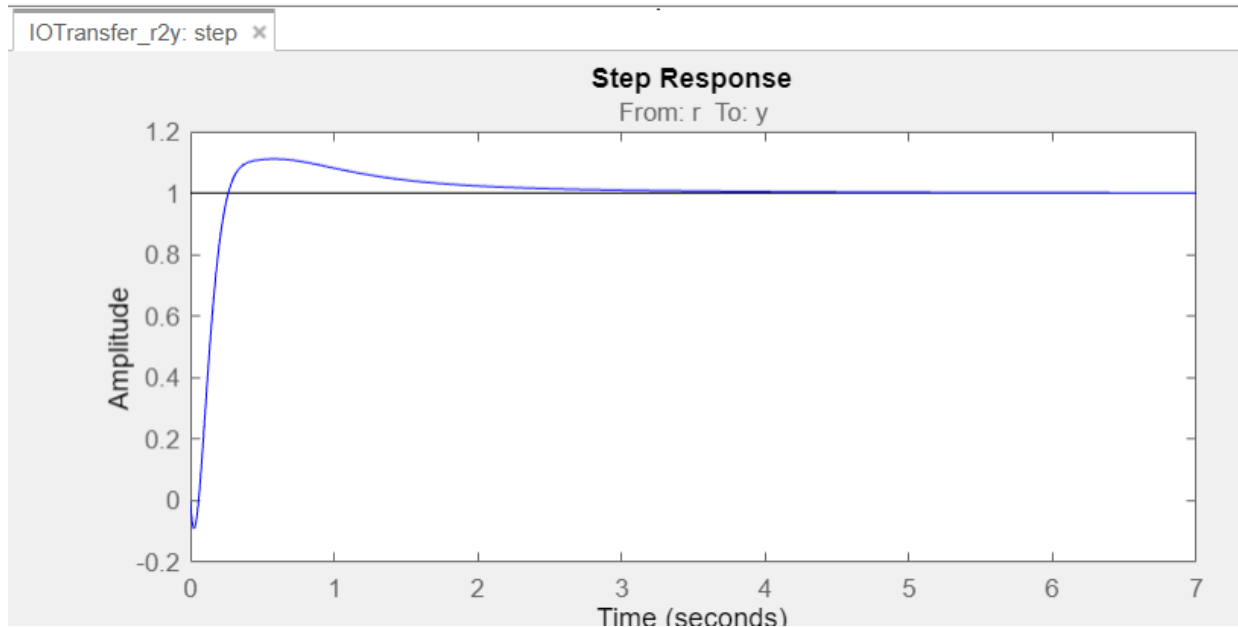


Colocando restricciones de diseño sobrepaso inferior a 10% y tiempo establecimiento menor a 4 segundos, se ubican los polos de tal forma que todos pertenezcan a la parte compleja.

Para lograr obtener las ganancias P, I y D del controlador PID, fue necesario reducir la función de transferencia de orden 5 asociado al sistema a un orden menor, pues al haber una superposición de los polos y ceros la sintonización del controlador se convertía en una tarea imposible de realizar; al obtener las ganancias en base a la función de orden 4, se aplicó al modelo matemático no lineal y cumplió con las expectativas de control.

**Figura 29**

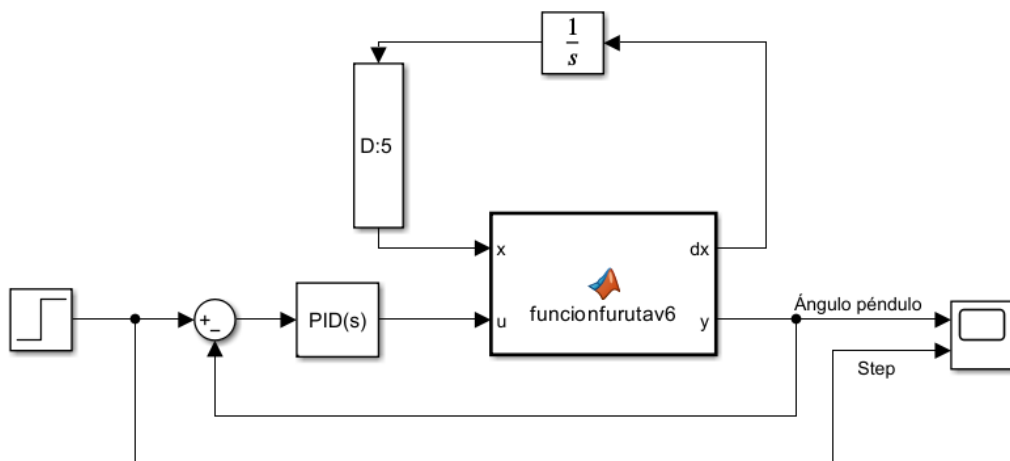
*Respuesta de la función de transferencia reducida controlada por PID*



Ingresando estos parámetros al diagrama de bloques mostrado en la Figura 30, se obtuvieron los siguientes resultados:

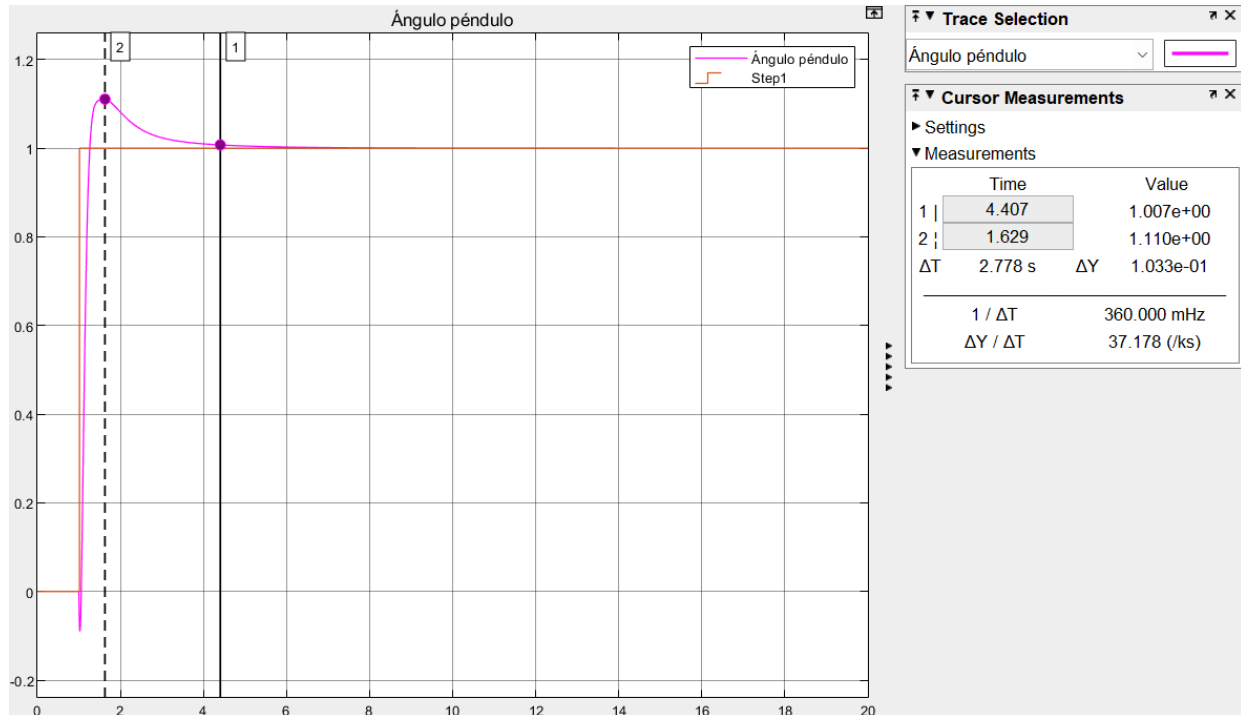
**Figura 30**

*Diagrama de bloques modelo matemático con controlador PID*



**Figura 31**

*Respuesta del modelo matemático con controlador PID*



Podemos observar un tiempo de estabilización aproximado de 4.4 segundos, y un sobrepaso igual al 11,11%. Ahora realizaremos el proceso correspondiente a la técnica de control moderno LQR.

### 6.3 LQR

El sistema de ecuaciones que describe la planta es de carácter no lineal, pues no cumple con el criterio de superposición, básicamente al contener en sus ecuaciones operaciones aritméticas múltiples entre sus estados. Al no ser lineal, se hace necesario aplicar una linealización del sistema en torno a su punto de equilibrio inestable deseado.

#### 6.3.1 Sintonización controlador LQR

Para obtener la matriz de ganancias  $K$  se eligieron las matrices  $Q$  y  $R$

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0e + 06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0e + 05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

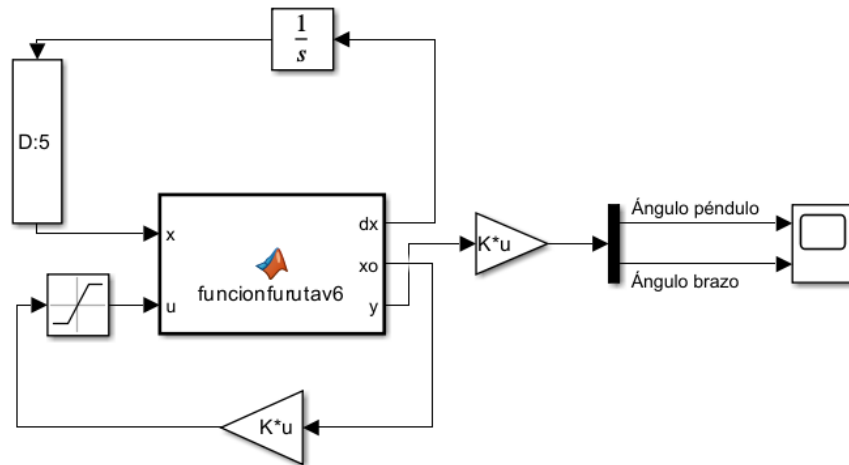
$$R = [0.01];$$

Con estas matrices se resuelve la ecuación algebraica de Riccati asociada y se obtienen las ganancias:

$$K = 1.0e + 03 * [-0.0473 \quad 0.2294 \quad -0.0552 \quad 1.0526 \quad 0.0108];$$

**Figura 32**

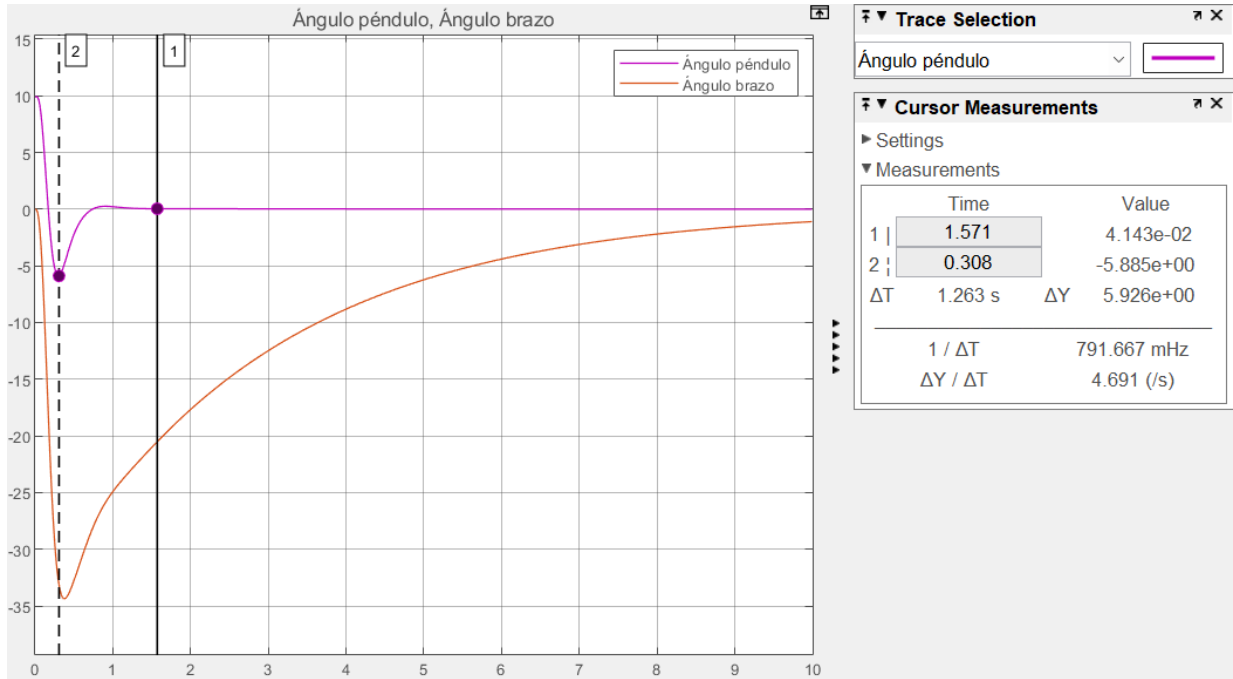
*Diagrama de bloques modelo matemático con controlador LQR*



Se aplicó el control LQR al sistema lineal de la planta, obteniendo un tiempo de estabilización de  $T_s = 1.6$  [s] con condiciones iniciales de  $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0]$ .

**Figura 33**

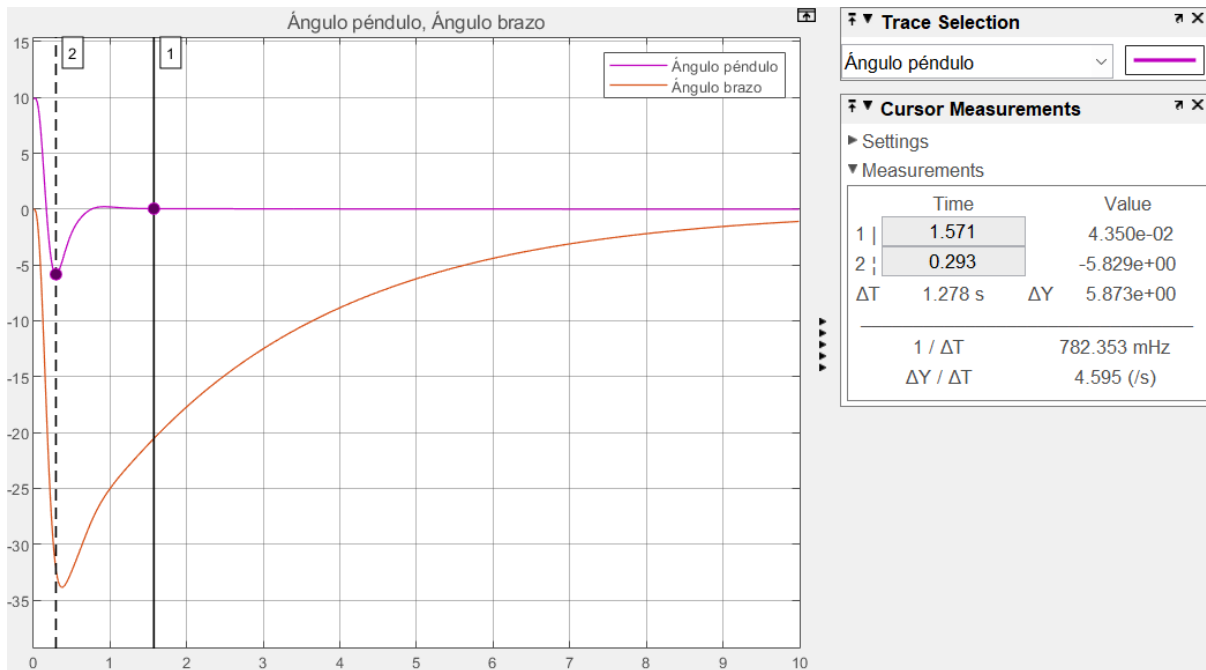
*Respuesta del modelo matemático al controlador LQR*



Idealmente los estados que componen el sistema deben ser medibles y controlables, ya que no contamos con un elemento que lea la corriente de forma continua en el tiempo, se aplicará el control anulando la ganancia para este estado y se evaluará su comportamiento.

**Figura 34**

*Respuesta del modelo matemático al control LQR reduciendo la corriente*



Para un mismo tiempo, el delta del error para cada simulación respecto a la referencia es de 0,002 grados, es ínfimo y despreciable. Por ende, se reescribe la matriz de ganancia reduciendo el valor asociado a la corriente:

$$K = 1.0e + 03 * [-0.0473 \quad 0.2294 \quad -0.0552 \quad 1.0526 \quad 0];$$

En conclusión, el controlador LQR fue sintonizado contando con la corriente como estado, pero el banco no cuenta con un componente capaz de leer la corriente en tiempo real, por ende, se optó por reducir el estado y la ganancia asociada al estado, llegando a que el controlador mantiene su robustez y mantiene la referencia de manera exitosa.

**Tabla 14**

*Tabla comparativa: técnicas control en modelo matemático*

<b>Control</b>	<b>Tiempo establecimiento</b>	<b>Sobrepaso</b>
<b>PID</b>	4,4 [s]	1,11[°]
<b>LQR</b>	1,6 [s]	5,829 [°]

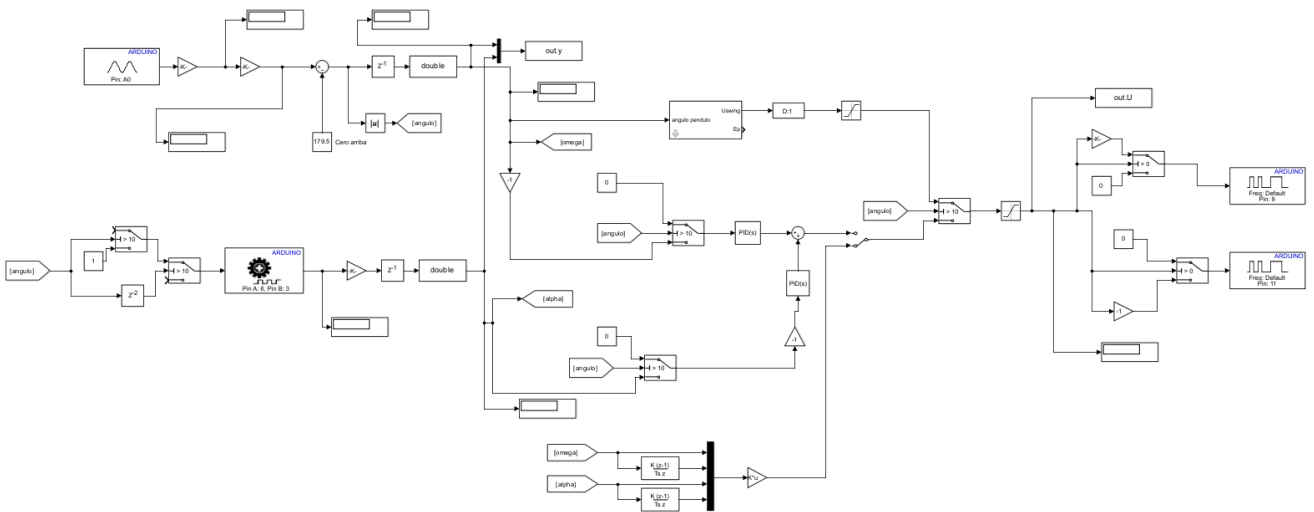
Como se puede observar, el control mediante PID resulta ser menos efectivo, si del tiempo de estabilización hablamos, pues su tiempo de estabilización es el triple que el tiempo en el que lo logra el PID, pero el sobrepaso del PID es de únicamente 1,11°, mientras que para el LQR este sobrepaso si es mayor a las 5 unidades.

## 7. Comparación de las técnicas de control aplicadas

Por último, para validar el desempeño de los controladores PID y LQR en su implementación en el prototipo físico del péndulo, se creó el siguiente código. Este diagrama aparte de tener ambos controladores con un switch manual para poder alternar su funcionamiento, contiene la técnica de control avanzado Swing-up.

**Figura 35**

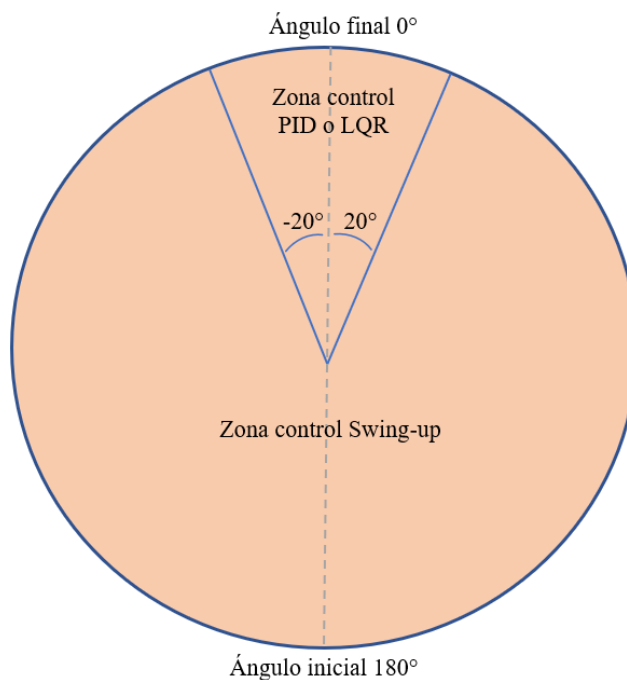
*Diagrama de bloques para control dual PID y LQR con Swing-up*



Dado que el objetivo principal de este proyecto no se centra en la exploración de técnicas de control avanzadas, como el método de swing-up, se toma de la literatura una ecuación que, en base a la energía potencial máxima total del péndulo, cambia su dirección de giro, esta información se amplía en el apartado de marco teórico.

**Figura 36**

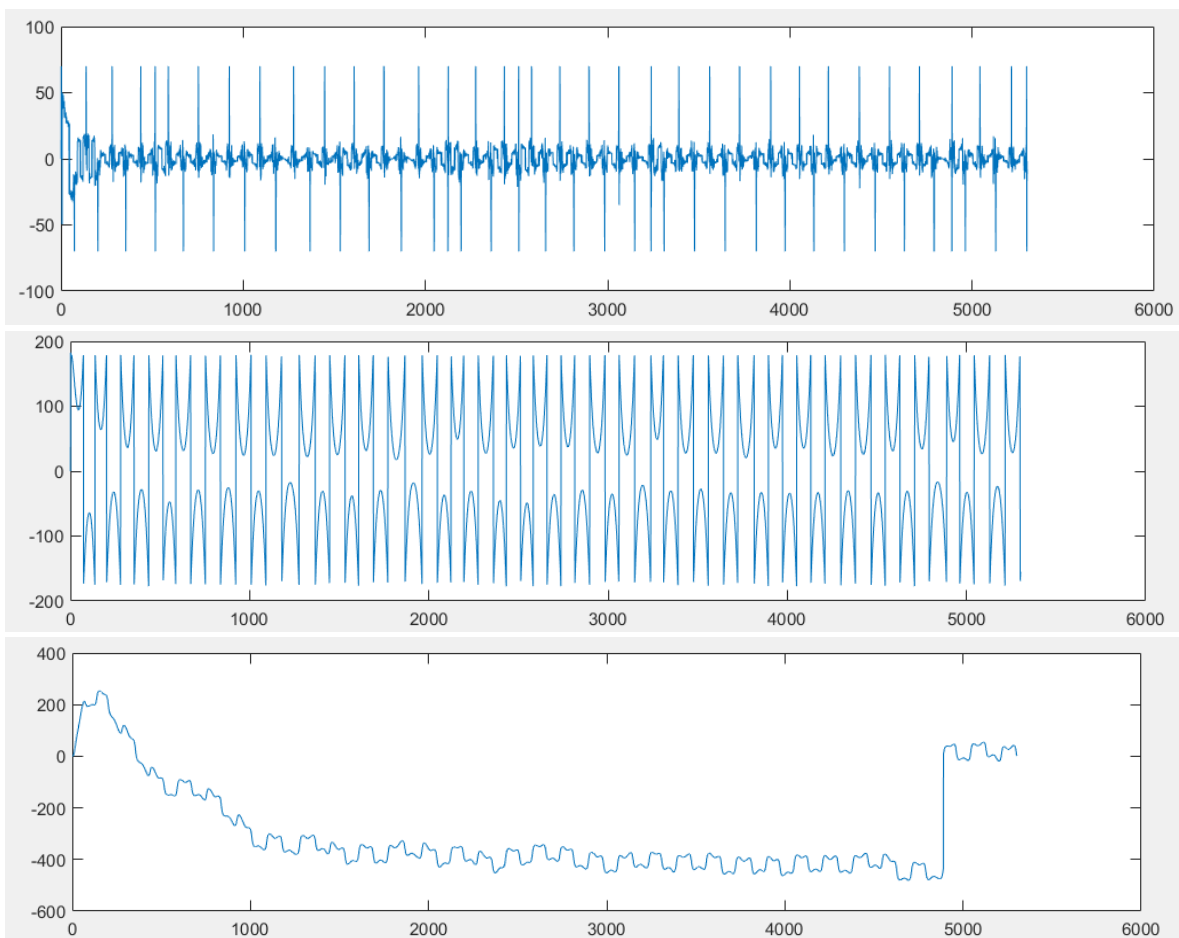
*Zonas de aplicación del control.*



Como se evidencia en las tomas de datos, el péndulo realiza la acción de balanceo deseada, y llega a un punto en donde pasa por el 0 o cercano a este. En este punto el control Swing-up se inactiva y comienza a ejecutarse ya sea el control LQR o el control PID. En las gráficas se puede ver que el péndulo pasa por el punto de equilibrio, cumpliendo con el esquema y llevando el péndulo al punto en que el otro control puede actuar.

### Figura 37

#### *Aplicación del control Swing-up al sistema real*

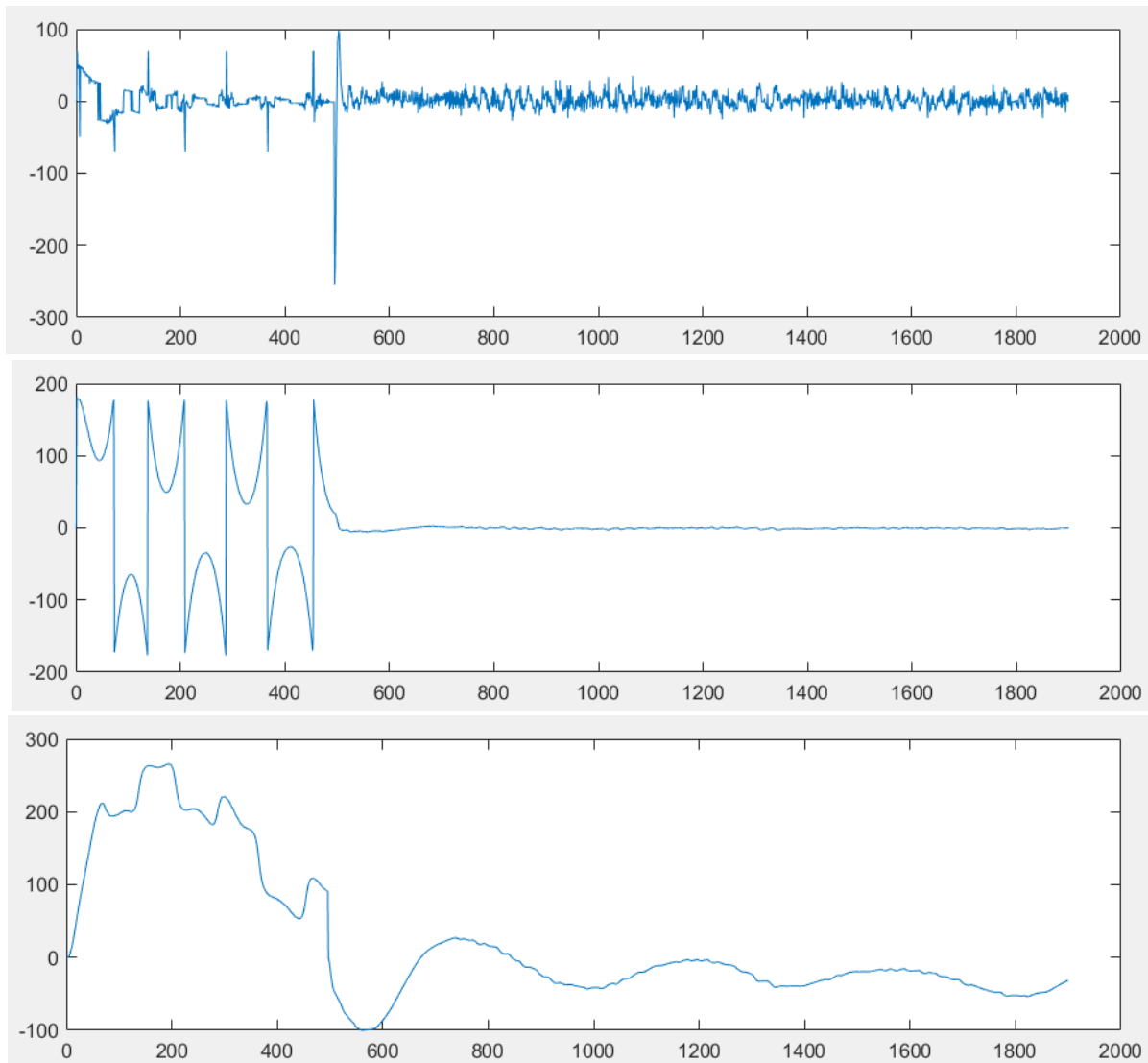


Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

Aplicando ambas técnicas en el prototipo real, y alternando las técnicas para el equilibrio, se obtuvo la siguiente toma de datos:

**Figura 38**

*Respuesta del sistema real al control Swing-up con control LQR*



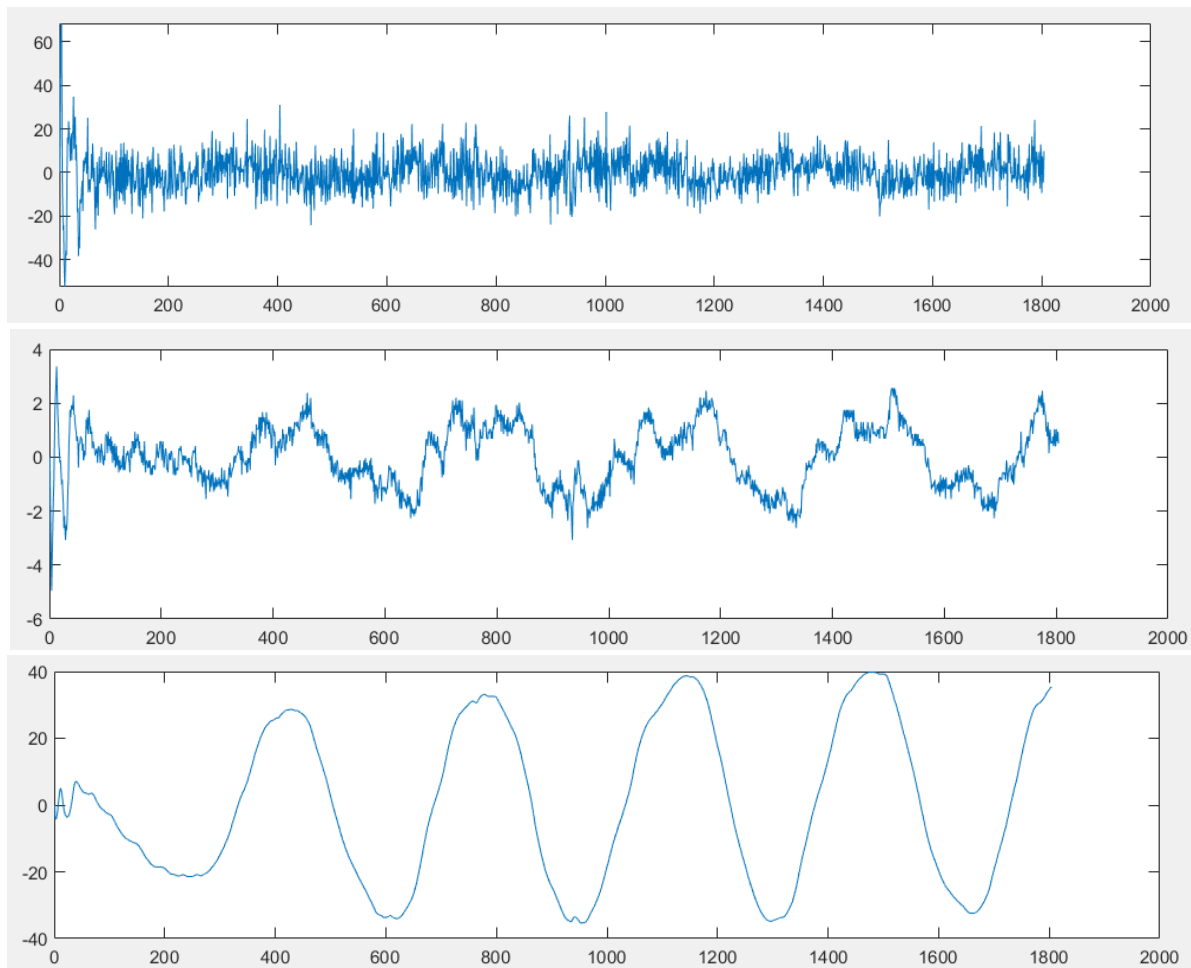
Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

En la toma se aprecia el excelente resultado de la implementación con una primera parte de porcentaje de pwm alto hasta que pasa por la zona cercana a los  $20^\circ$ , aquí se activa el control LQR y se equilibra la barra con un porcentaje de oscilación mínimo.

Se obtuvieron los siguientes resultados para el control PID, esta toma de datos se realizó sin la presencia del control Swing-up, ya que la comparación entre las técnicas se hace cuando están en el rango de activación.

**Figura 39**

*Aplicación del control PID al sistema real*

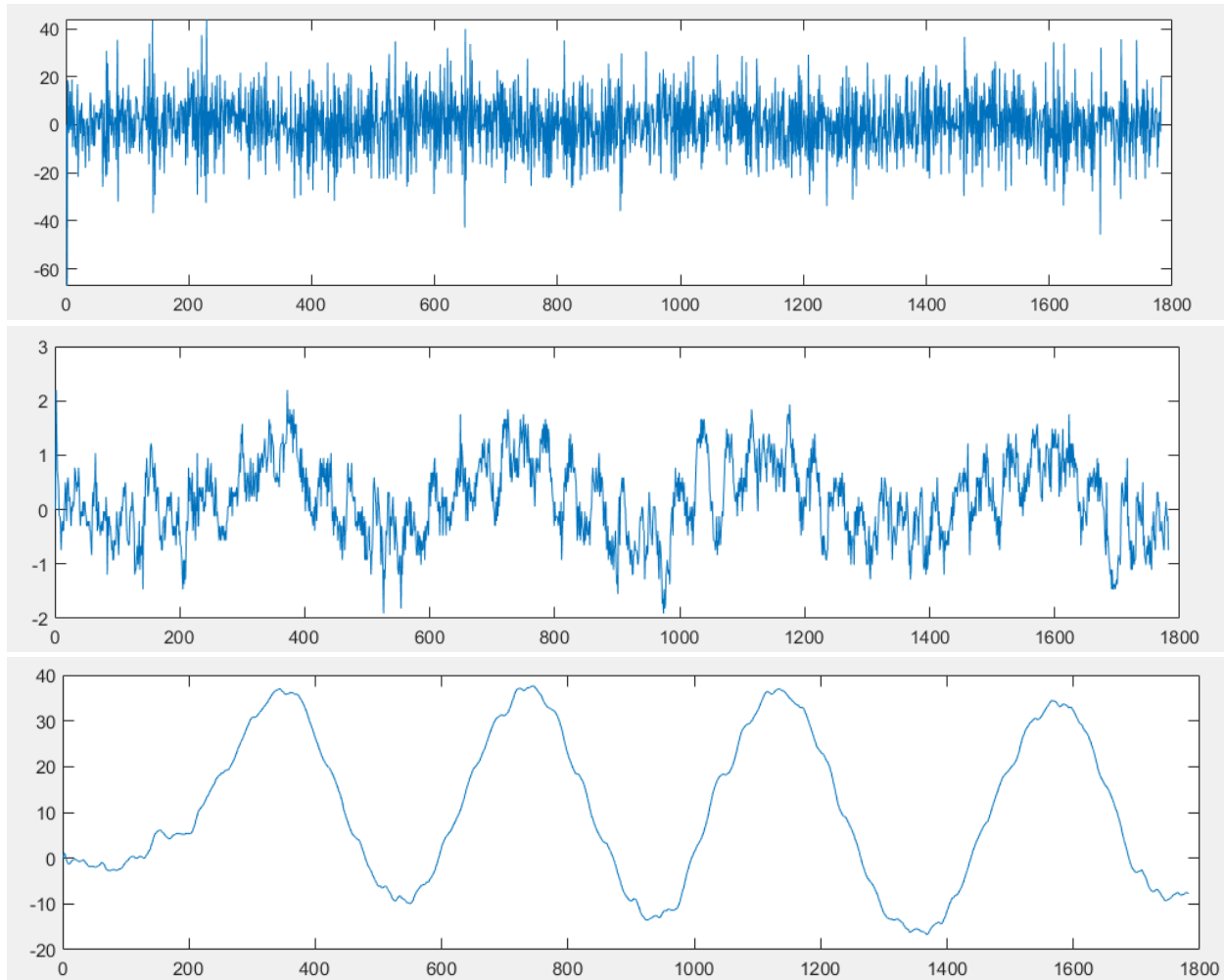


Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

Para el control LQR también se tomó como estado inicial del péndulo un ángulo próximo al cero y no desde  $180^\circ$  pues no hizo la toma con el swing-up. Se obtuvieron las siguientes gráficas:

**Figura 40**

*Aplicación del control LQR al sistema real*



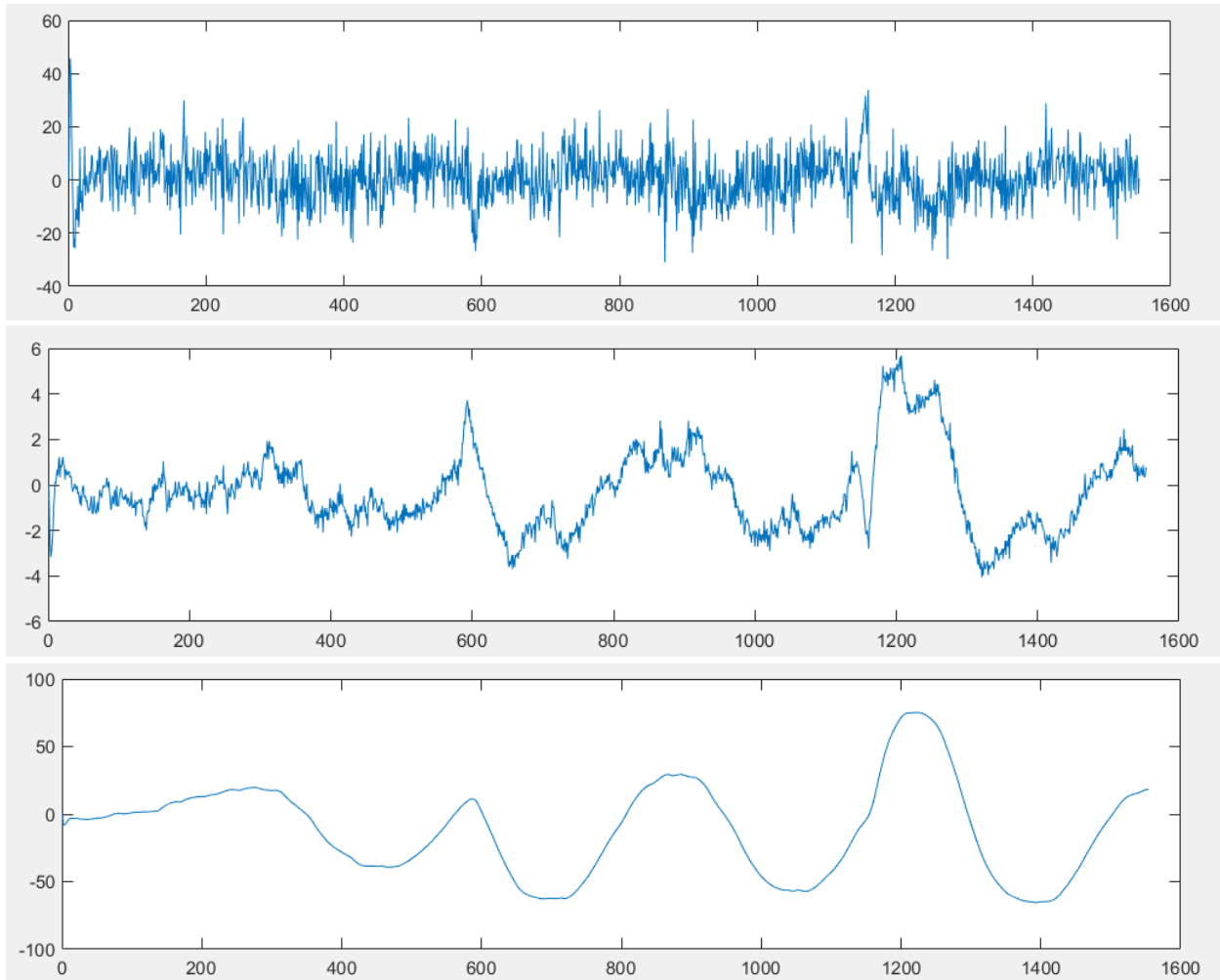
Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

Por último, con ánimos de comparar el comportamiento del péndulo ante perturbaciones, se realizó la toma sometiendo el péndulo en su punto de equilibrio inestable al golpe de una barra de

aluminio, cada que el sistema entraba en equilibrio después de la perturbación, se golpeaba nuevamente con la barra.

### Figura 41

*Aplicación del control PID al sistema real con presencia de perturbaciones*

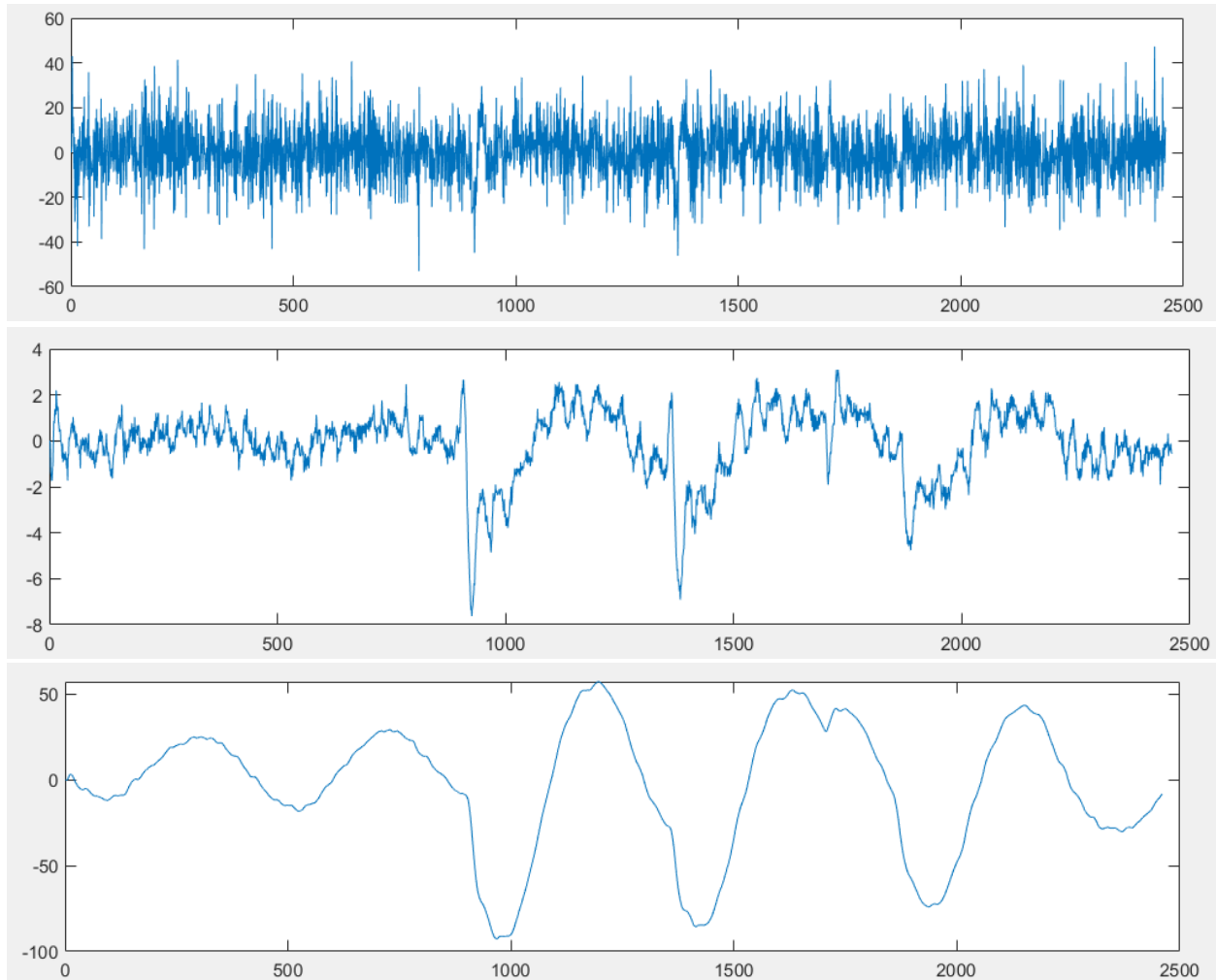


Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

La respuesta a perturbaciones con el método LQR fue el siguiente, a este se le aplicaron más golpes o perturbaciones.

**Figura 42**

*Aplicación del control LQR al sistema real con presencia de perturbaciones*



Nota. Estas gráficas pertenecen al tiempo en el eje x con un dato cada 0.01 segundos versus, (1) el porcentaje de PWM aplicado, (2) el ángulo del péndulo, (3) el ángulo del brazo.

**Tabla 15***Tabla comparativa rango oscilación: técnicas con perturbación*

<b>Tipo de control</b>	<b>Rango oscilación del ángulo péndulo</b>	<b>Rango oscilación del ángulo brazo</b>
<b>PID</b>	[2,-2]	[40,-40]
<b>LQR</b>	[2,-1.5]	[35,-20]
<b>PID perturbación</b>	[6,-4]	[55,-50]
<b>LQR perturbación</b>	[2,-6]	[50,-90]

Aunque las diferencias en los rangos de oscilación del ángulo del péndulo entre los controladores LQR y PID puedan no ser notoriamente distintas en la prueba libre de perturbaciones, resulta fundamental destacar que, al implementar la acción de control en el equipo real, se observa claramente una respuesta más apropiada y ventajosa por parte del controlador LQR. Esta diferencia se manifiesta en una acción de control más suave y precisa, donde el brazo del péndulo tiende a mantenerse más estable en comparación con la respuesta del control PID.

Cuando se evalúan las respuestas de ambos controladores frente a la presencia de perturbaciones, ambos logran ejecutar la acción de control necesaria. Sin embargo, es importante señalar que en el caso del control PID se observa un rango de oscilación en el brazo del péndulo de menor amplitud, alrededor de 50 grados, especialmente durante las transiciones. Por otro lado, el controlador LQR muestra un comportamiento más enérgico con oscilaciones que pueden alcanzar hasta 90 grados en el ángulo del brazo. Esto sugiere que el controlador LQR prioriza la velocidad de respuesta sobre la suavidad del movimiento.

## **8. Presupuesto**

Con el fin de estimar los costos asociados a la realización del proyecto de forma efectiva y puntual, se presenta la tabla contenida por costos fijos y variables relacionados a la ejecución de las actividades propuestas, se tiene en cuenta un 10% de imprevistos dadas las fluctuaciones económicas que ha experimentado el dólar.

Tabla 16

Tabla Presupuesto destinado al desarrollo del proyecto

ITEM	Descripción	Unidad	Fuente de financiamiento	Precio Unitario	Cantidad	Costo total
Restauración hardware						
1	Revisión técnica y renovación del sistema de cableado	Cantidad	Autores	\$ 100.000	1	\$ 100.000
2	Limpieza del sistema mecanico	Piezas	Autores	\$ 30.000	1	\$ 30.000
3	Piezas intervenidas o reemplazadas	Piezas	Autores	\$ 300.000	1	\$ 300.000
4	Compra de accesorios electrónicos y electricos	Piezas	Autores	\$ 910.523	ND	\$ 700.000
Elementos necesarios para el desarrollo del sistema						
5	Disco duro para almacenamiento del progreso del proyecto	Pieza	Autores	\$ 170.000	1	\$ 170.000
6	Plan de acceso a Internet durante el tiempo que dure el proyecto	Meses	UIS	\$ 52.000	6	\$ 312.000
7	Material bibliográfico y documentación de interés	Meses	UIS	\$ -	4	\$ -
8	Licencia Office 365	Meses	UIS	\$ -	4	\$ -
9	Licencia SolidWorks	Meses	UIS	\$ -	4	\$ -
10	Licencia Matlab/App Designer	Meses	UIS	\$ -	4	\$ -
Recursos humanos						
11	Acompañamiento Director de Proyecto	Horas	UIS	\$ 150.000	40	\$ 6.000.000
12	Acompañamiento Co-directores	Horas	UIS	\$ 80.000	100	\$ 8.000.000
13	Producción Intelecual de los autores	Horas	Autores	\$ 20.000	600	\$ 12.000.000
Otros						
14	Medio de transporte requerido para movilizarse hasta el laboratorio	Días	Autores	\$ 10.800	120	\$ 1.296.000
15	Computador para trabajar en cada fase del proyecto	Piezas	Autores	\$ 2.500.000	2	\$ 5.000.000
16	Poliza Uis	Cantidad	Autores	\$ 16.500	2	\$ 33.000
17	Papeleria	Cantidad	Autores	\$ 60.000	1	\$ 60.000
					<b>Subtotal:</b>	\$ 33.908.000
					<b>Imprevisto (10%):</b>	\$ 3.390.800
					<b>Total:</b>	\$ 37.298.800

Al realizar una explosión de valor asociada al ítem 4, se presenta la siguiente tabla que incluye todos los productos.

**Tabla 17**

*Tabla Compra de accesorios electrónicos y eléctricos*

Compra de accesorios electrónicos y eléctricos		Precio Unitario	Cantidad	Costo total
4.1	Arduino Due	\$ 297.500	\$ 1	\$ 297.500
4.2	Baquela	\$ 50.000	\$ 1	\$ 50.000
4.3	Sensor de ángulo giratorio	\$ 128.300	\$ 1	\$ 128.300
4.4	Trimmer de 5 Kohm	\$ 5.000	\$ 1	\$ 5.000
4.5	Puente H BTS7960	\$ 44.700	\$ 1	\$ 44.700
4.6	Motor DC 36V con encoder HEDS-5500	\$ 150.000	\$ 1	\$ 150.000
4.7	Convertor de niveles bidireccional	\$ 2.023	\$ 1	\$ 2.023
4.8	Fuente DC 36V	\$ 233.000	\$ 1	\$ 233.000
Total				\$ 910.523

## 9. Conclusiones

El presente proyecto de control logró con éxito su objetivo principal de desarrollar un sistema de péndulo invertido rotacional como herramienta educativa para los estudiantes de la escuela. a través del método de energía enunciado y las técnicas de control LQR y PID, el proyecto demostró la aplicación práctica de la teoría de control en el sistema real del péndulo de Furuta.

Se realizó el modelamiento matemático del sistema utilizando el método de energía de Euler-Lagrange, y se pudo validar la calidad de este modelo, ya que los porcentajes de similitud superaron el 70% en comparación con los datos del sistema real. Además, dado el excelente desempeño de las técnicas de control implementadas en el sistema real, se puede concluir que las suposiciones realizadas en torno a las linealizaciones aplicadas al modelo mantienen su integridad. Esto se traduce en que el ensamblaje, diseño y construcción del péndulo se llevaron a cabo de manera efectiva, minimizando las vibraciones y reduciendo las perturbaciones no controladas durante la adquisición de datos.

Al aplicar las técnicas de control al modelo matemático del equipo siendo este de naturaleza no lineal, se obtuvo como resultado que el control LQR proporciona una respuesta más rápida en términos de tiempo de establecimiento respecto al control PID (Tabla 14), sin embargo, este rendimiento rápido viene con un costo en términos de un mayor sobrepaso. En contraste, el control PID tiene un tiempo de establecimiento más lento, pero un sobrepaso menor.

En ausencia de perturbaciones, se validó que las técnicas de control en las que se enfoca el presente proyecto funcionan en el equipo real de manera satisfactoria, pues siguen el punto de equilibrio inestable y responden correctamente ante perturbaciones, como se demuestra en las gráficas 39 y 40. De la misma forma, se validó que el ángulo del brazo siguiera una referencia de valor 0. Tanto el controlador PID como el controlador LQR demostraron un rendimiento comparable al mantener el péndulo de Furuta dentro de un rango de oscilación del ángulo del péndulo que va desde 2 grados hasta -2 grados aproximadamente. Esto sugiere que ambos controladores son adecuados para el control del péndulo en un entorno sin perturbaciones que lo saquen del rango de operación de los controladores, para este caso, 20 grados y -20 grados.

Al aplicar perturbaciones, en lo que respecta el tiempo de establecimiento, se aplicaron las técnicas de control sintonizadas y se observó un mejor tiempo con el controlador LQR, pues, para retornar al punto de equilibrio inestable, las variaciones en el ángulo del brazo tienen un rango menor al que se muestra con el controlador PID, como se evidencia en la gráfica 41 y 42. En contraste, el controlador LQR tiene un rango de oscilación más limitado, que va desde 2 grados hasta -6 grados ante perturbaciones, y por ende, su funcionamiento responde mejor a los objetivos de control.

### Referencias Bibliográficas

Carrillo, A. (2011). Sistemas automáticos de control: Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado. *UNERMB*.

Valera, A. Vallés, M. & Cardo, M. (2002). DESARROLLO Y CONTROL DE UN PÉNDULO DE FURUTA. [Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad Politécnica de Valencia]

Franco, A. (2016). Dinámica de la partícula y de los sistemas de partículas. *Las ecuaciones de Lagrange*. Tomado de: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/lagrange/lagrange.html>

González, C. (2016). Comparación de un controlador LQR VS un controlador PID implementados en un helicóptero de dos grados de libertad pivotado. [Título de Ingeniería En Control, Universidad Distrital Francisco José De Caldas.]

Lamiña, A. & Maricela, C. (2016). Diseño de un Sistema de control para un péndulo invertido rotacional [Título de Ingeniero Electrónico, Automatización Y Control, La Universidad de Ciencias Aplicadas de Brandeburgo].

Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna. (5<sup>a</sup> edición). Pearson.

Ornelas, F. (2016). Introducción al control óptimo. *Control óptimo*. Tomado de: <http://dep.fie.umich.mx/~fornelas/index.php?id=control-optimo-y-adaptivo>

Pimentel Medina, R. I. (2016). Péndulo invertido de Furuta: control y diseño mecánico [Título de licenciado en ingeniería en sistemas electrónicos industriales, Universidad Autónoma de la Ciudad de México].

Toro, R. (2009). Diseño y control de un péndulo Furuta para su utilización en las aulas de clase de la Universidad EAFIT. Tomado de: <https://repository.eafit.edu.co/handle/10784/4389>

Ceferino Orjuela, N. X., & Contreras Bernal, C. A. (2016). COMPARACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL MODERNO (OBSERVADORES DE ESTADO VS LQR) IMPLEMENTADAS SOBRE UN AR DRONE 2.0 PARROT. Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Oswaldo, J., & Villamizar, M. (2012). DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO ROTATIVO COMO HERRAMIENTA DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA EL LABORATORIO DE SISTEMAS DINÁMICOS E INGENIERÍA DE CONTROL.

Esparza C, & Ruiz P. (2012). DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UNA PLATAFORMA EXPERIMENTAL (DE PÉNDULO INVERTIDO LINEAL) COMO HERRAMIENTA DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA EL LABORATORIO DE SISTEMAS DINÁMICOS, INGENIERIA DE CONTROL Y ROBÓTICA.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA. (2015). Función Transferencia.

Furuta, K., & AsstroKm, K. J. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36, 287–295. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)

Gonzalez Uribe, C. D. (2016). COMPARACIÓN DE UN CONTROLADOR LQR VS UN CONTROLADOR PID IMPLEMENTADOS EN UN HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD PIVOTADO. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Mérida Rubio, J. O., Chávez Vázquez, P. A., Coria de los Ríos, L. N., & Chávez Guzmán, C. A. (2020). Diseño de control óptimo para el péndulo de furuta. *REVISTA DE CIENCIAS TECNOLÓGICAS*, 1(2), 49–53. <https://doi.org/10.37636/recit.v124953>

Nise, N. S. (2010). *Control Systems Engineering* (6th ed.). Wiley.

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna* (5th ed., Vol. 5). Pearson Educación.

Singh, J. (2021). *Energy Based Collocated Partial Feedback Linearization Control for Swing up & LQR Control for Balance*.

Smith, C. A., & Corripio, A. B. (1991). *Principles and practice of automatic process control* (1st ed.). EDITORIAL LIMUSA.

Villota Cerna, E. (2010). Problema del Regulador Cuadrático Lineal. In *CONTROL MODERNO Y ÓPTIMO (MT 227C)* (Lima, pp. 17–34). Universidad Nacional de Ingeniería.

Didácticas Electrónicas. (n.d.). *Arduino™ Due Original Italiano*. Retrieved September 25, 2023, from <https://www.didacticaselectronicas.com/index.php/sistemas-de-desarrollo/arduino/arduino-2/A000062-detail>

Didácticas electrónicas. (n.d.). *Sensor de ángulo giratorio 0 a 360 grados*. Retrieved September 25, 2023, from <https://www.didacticaselectronicas.com/index.php/sensores/encoders/P3022-V1-CW360-detail>

Vistrónica - Tienda virtual de electrónica. (n.d.-a). *FUENTE SUICHEADA / CONMUTADA 36V 10A 360W*. Retrieved September 25, 2023, from <https://www.vistronica.com/fuente-de-voltaje/fuente-conmutada/fuente-conmutada-36v-10a-detail.html>


Vistrónica - Tienda virtual de electrónica. (n.d.-b). *MODULO CONVERTOR DE NIVEL LOGICO DE 5V A 3.3V / 3.3V A 5V*. Retrieved September 25, 2023, from <https://www.vistronica.com/comunicaciones/serial/modulo-convertor-de-nivel-logico-de-5v-a-3-3v-3-3v-a-5v-detail.html>

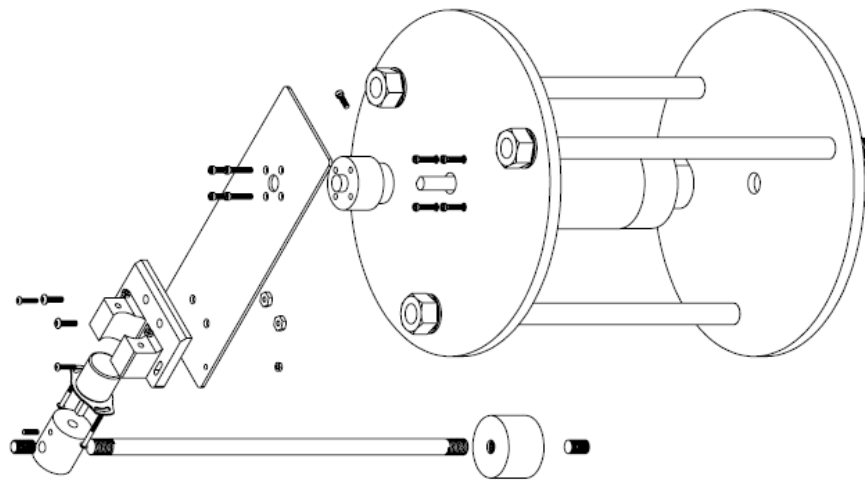
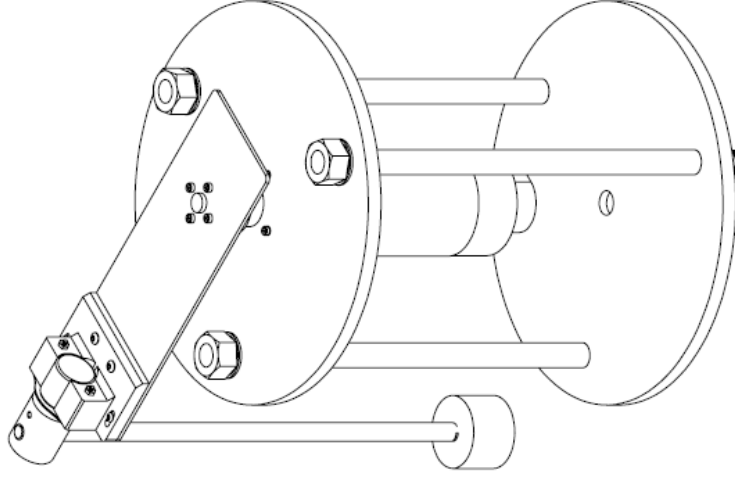
Vistrónica - Tienda virtual de electrónica. (n.d.-c). *MÓDULO PUENTE H BTS7960 DE 43A*. Retrieved September 25, 2023, from <https://www.vistronica.com/robotica/motores/drivers-de-motores/modulo-puente-h-bts7960-de-43a-detail.html>

## **Apéndice**

### Apéndice A Planos para la fabricación

PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL




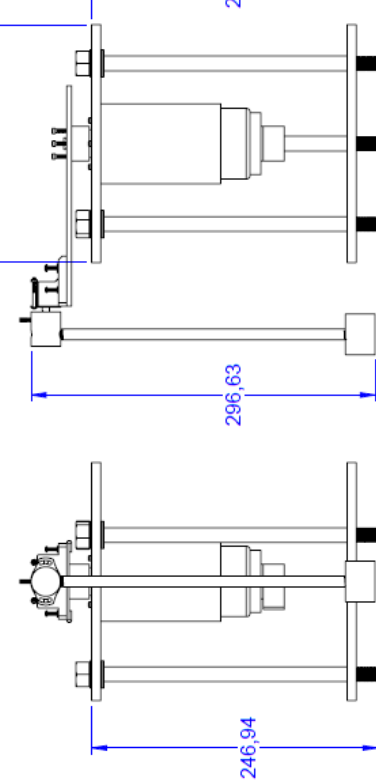



NOMBRE PIEZA:		FECHA ACTUAL: 28/02/2023		DIBUJO: MELISSA TORRES		CANT. PIEZAS	
MATERIAL:		CONTROL DE CAMBIO		MODIFICACION		<b>PROCESO ENSAMBLE</b>	
MECANIZADO		VERSION		RESPONSABLE DE CAMBIO			
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS		LINKA		ACABADO		HOJA No.	
MILIMETROS		0		Z		1 DE 8	
METALURGIA		+1 -1		SERAN SERA			
MILIMETROS		+0.1 -0.1		SERAN SERA			
METALURGIA		+1 -1		SERAN SERA			
MILIMETROS		+0.1 -0.1		SERAN SERA			
DIMENSIONES NO ESPECIFICADAS EN MILIMETROS							

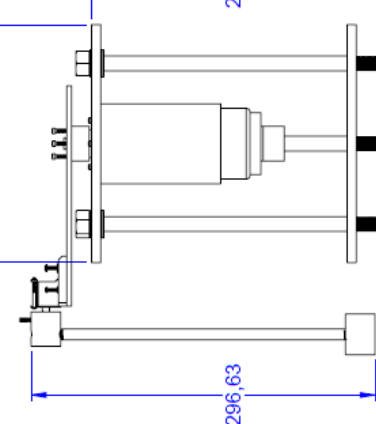
Producto SOLIDWORKS Educational. Solo para uso en la enseñanza.

PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

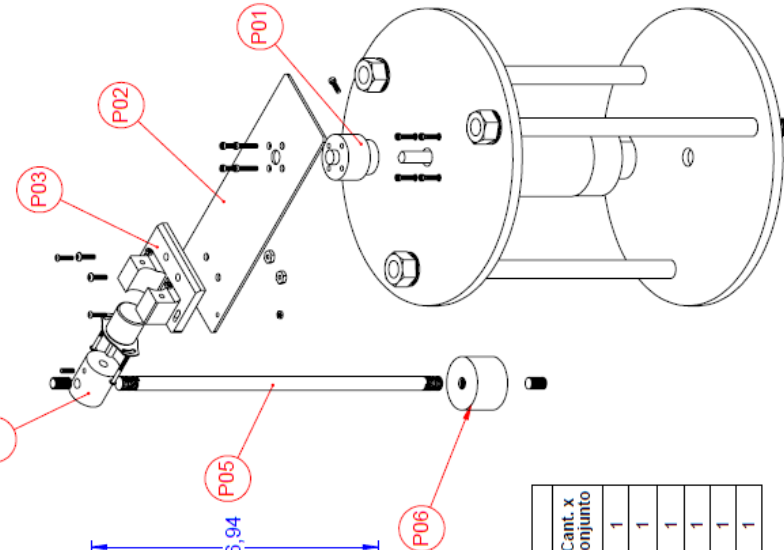




Vista frontal



Vista lateral



**LISTADO DE COMPONENTES**

Item	Nombre	Descripción	Cant. x conjunto
P01	ACOPLE MOTOR BRAZO	BARRA REDONDA ALUMINIO CALIBRE 1.1/4 PUL	1
P02	BRAZO PENDULO	LAMINA CALIBRE 12 INOX 304 SATINADA	1
P03	ACOPLE BRAZO ENCODER	PLASTICO PLA 1.75MM	1
P04	ACOPLE ENCODER BARRA	BARRA REDONDA ALUMINIO CALIBRE 1 PUL	1
P05	BARRA PENDULO	TUBO REDONDO 3/8 PUL ALUMINIO	1
P06	MASA PENDULO	BARRA REDONDA ALUMINIO CALIBRE 2 PUL	1

**TOLERANCIAS DE FABRICACION**

TIPO DE TOLERANCIA	LINEAL	ANGULAR	ACABADO
MECANIZADO	+0,05 -0,02	+0,1 -0,1	R0,32
MEZCLADO	+0,1 -0,1	+0,1 -0,1	R0,32
METALURGIA	+0,1 -0,1	+0,1 -0,1	R0,32

DIMENSIONES, NO ESPECIFICADAS, EN MILIMETROS.

**CONTROL DE CAMBIO**

VERSION	MODIFICACION

RESPONSABLE DE CAMBIO: \_\_\_\_\_  
DIBUJO: \_\_\_\_\_  
FECHA: \_\_\_\_\_

**PROCESO ENSAMBLE**

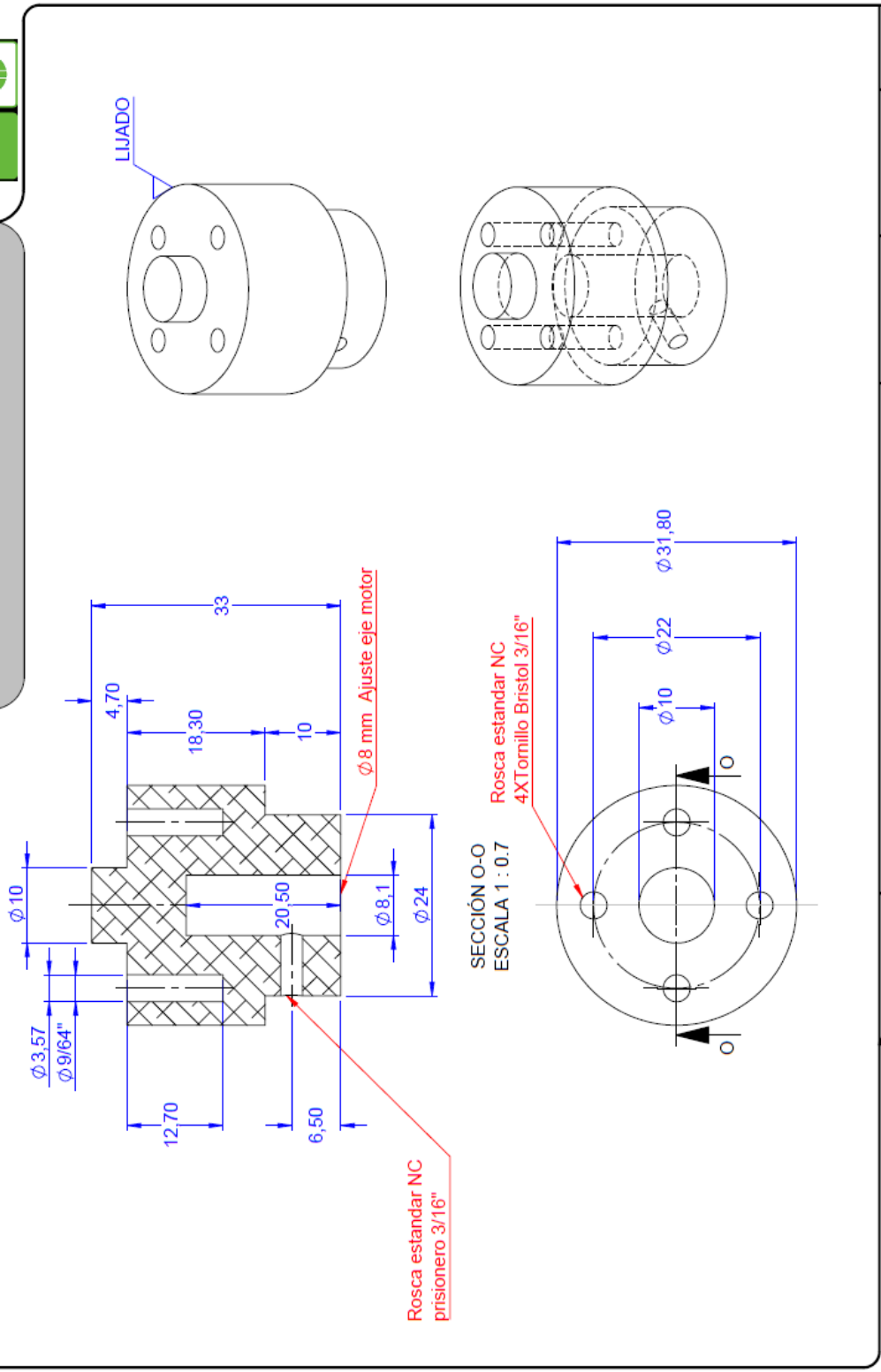
FECHA ACTUAL: 26/02/2023    DIBUJO: MELISSA TORRES

CANT. PIEZAS: **01**

FOJA No. 2 DE 8



**PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**

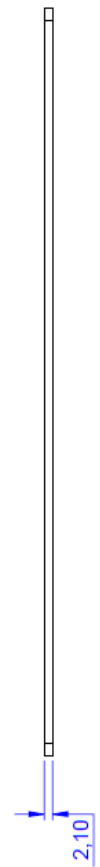
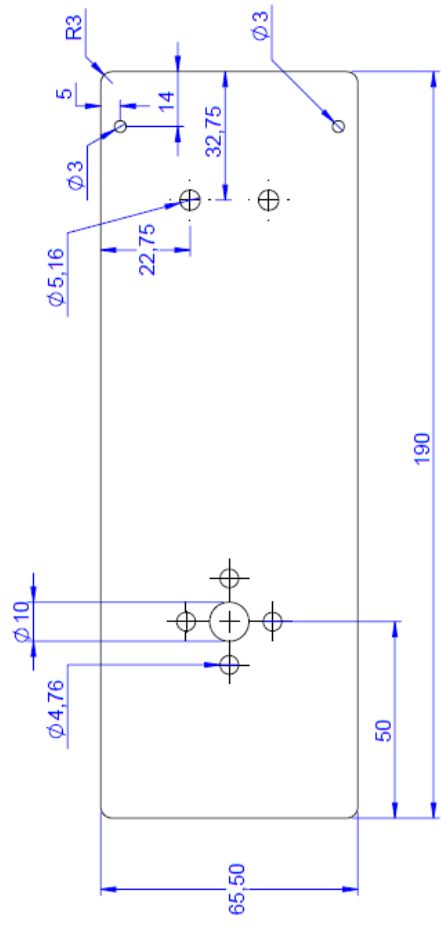
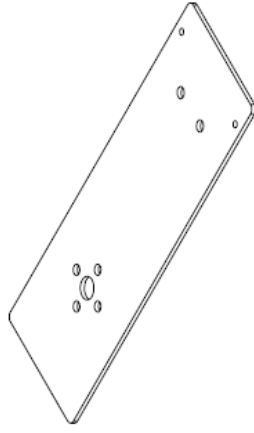


TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS		ACABADO		NOMBRE PIEZA: P01 - ACOUPLE MOTOR BRAZO		FECHA ACTUAL: 26/02/2023		DIBUJO: MELISSA TORRES		CANT. PIEZAS: 01	
MECANIZADO		0.2		MATERIAL: BARRA REDONDA ALUMINIO CALIBRE 1-1/4 PUL		CONTROL DE CAMBIO		PROCESO: MECANIZADO		HOJA No. 3 DE 8	
METALURGIA		+11		VERSION: MODIFICACION		RESPONSABLE DE CAMBIO		DIBUJO: MECANIZADO		FECHA: 3 DE 8	
DIMENSIONES NO ESPECIFICADAS EN MILIMETROS		+11		DE CAMBIO		FECHA:					

Producto SOLIDWORKS Educational. Solo para uso en la enseñanza.



**PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**

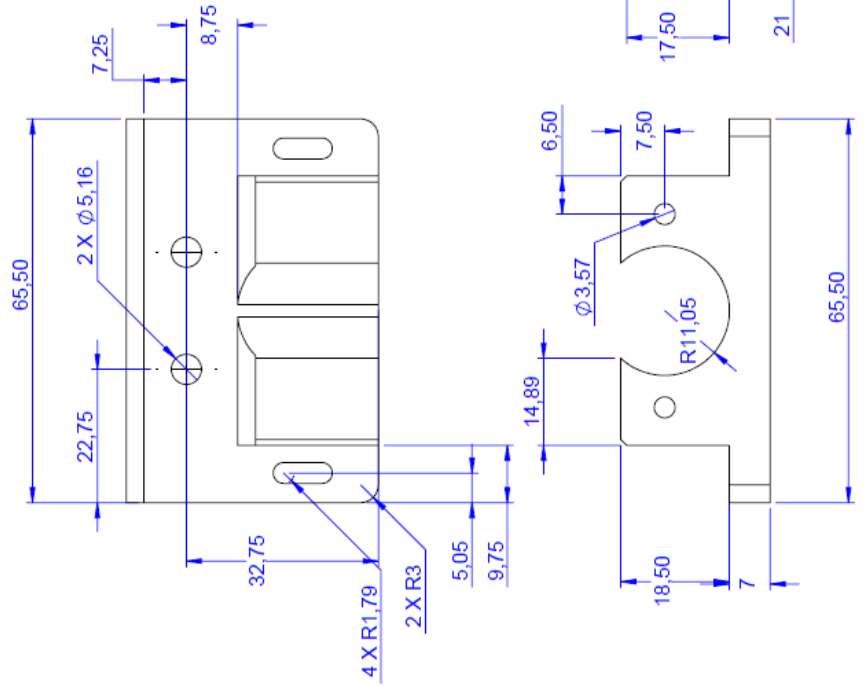
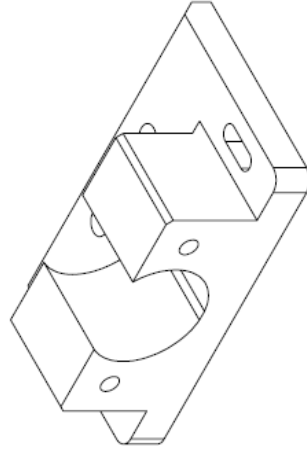


TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS: LINEAL: ±0.1 ANGULO: ±0.2 MECANIZADO: ±0.05 METALMECANICO: ±0.1 DIMENSIONES NO ESPECIFICADAS EN MILIMETROS		NOMBRE PIEZA: P02 - BARRA PENDULO MATERIAL: LAMINA CALIBRE 12 INOX 304 SATINADA PROCESO: CORTE LASER CONTROL DE CAMBIO: MODIFICACION		FECHA ACTUAL: 28/02/2023 DIBUJO: MELISSA TORRES PROCESO: CORTE LASER		CANT. PIEZAS: 01 HOJA No: 4 DE 8	
RESPONSABLE DE CAMBIO: DIBUJO: FECHA:							

Producto SOLIDWORKS Educational. Solo para uso en la enseñanza.



**PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**

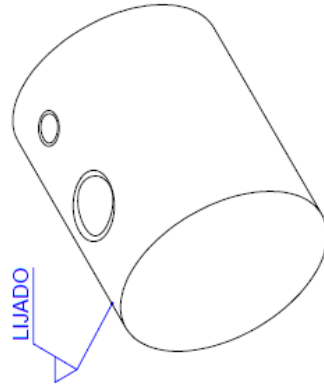


TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS		0	±	ACABADO	P03 - ACOPLE BRAZO ENCODER		FECHA ACTUAL: 26/02/2023	DIBUJO: MELISSA TORRES	CANT. PIEZAS
MECANIZADO		-0,2	+0,1	+0,2	PLASTICO PLA 1,75MM		PROCESO		01
METALISTERIA		-0,1	+0,1	+0,1	IMPRESION 3D		IMPRESION 3D		HOJA NO.
DIMENSIONES NO. ESPECIFICADAS, EN MILIMETROS.		-1	+1	+1	CONTROL DE CAMBIO		RESPONSABLE DE CAMBIO		5
					MODIFICACION		DIBUJO:		DE 8
					VERSION		FECHA:		
					DE CAMBIO				

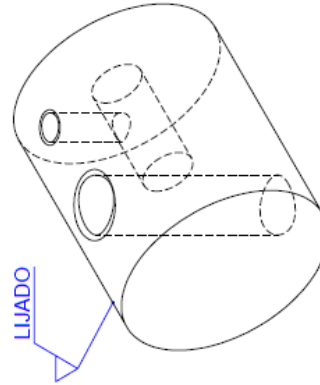
Producto SOLIDWORKS Educativo. Solo para uso en la enseñanza.



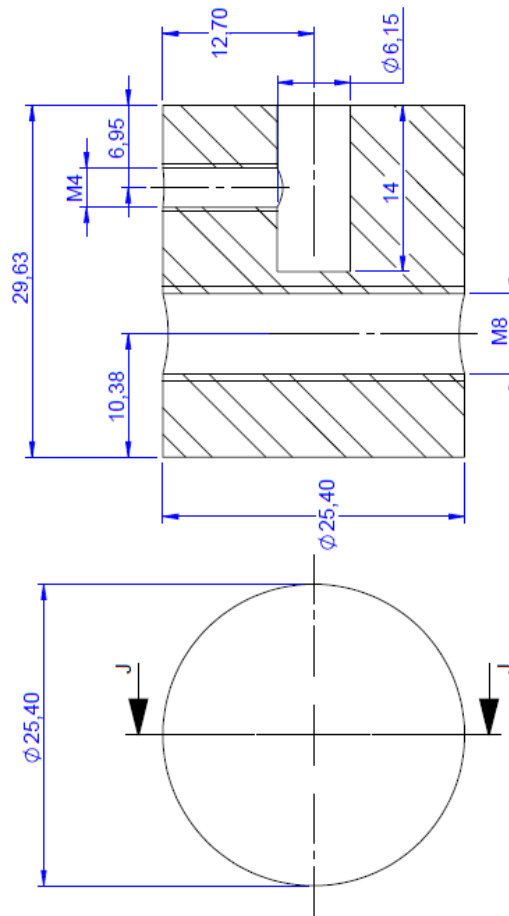
**PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**



ESCALA 3:2




ESCALA 3:2

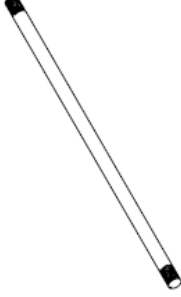


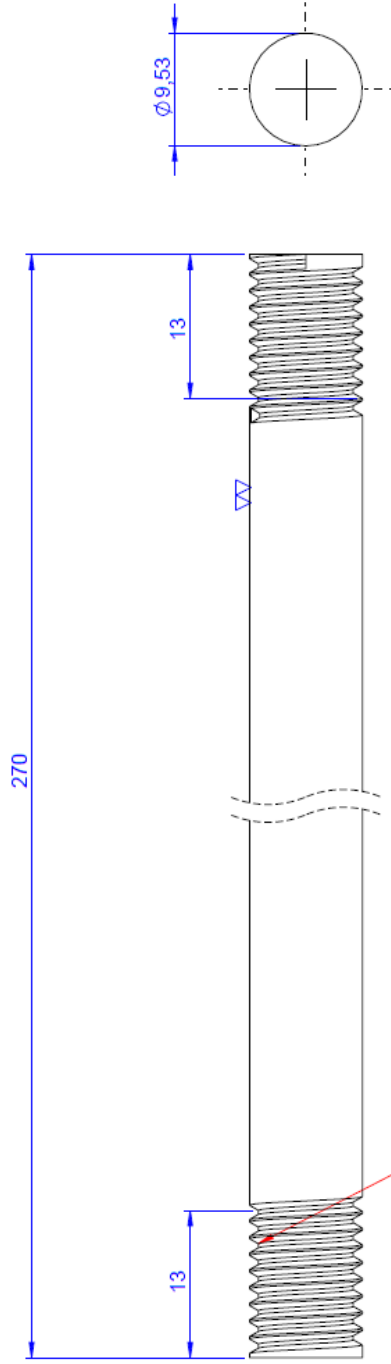
SECCIÓN J-J

TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS LINEAL: ±0.1 ANGULO: ±0.5 MECANIZADO: ±0.1 METALISTERIA: ±0.1		ACABADO Ra: 0.4 Rz: 1.6 Rz: 3.2 Rz: 6.3		DIMENSIONES NO ESPECIFICADAS EN MILÍMETROS	
NOMBRE PIEZA: P04 - ACOPLE ENCODER BARRA		MATERIAL: BARRA REDONDA ALUMINIO CALIBRE 1 PUL		FECHA ACTUAL: 28/02/2023   DIBUJO: MELISSA TORRES	
CONTROL: MECANIZADO		VERSION: MODIFICACION		DANT. PIEZAS: 01	
DE CAMBIO		RESPONSABLE DE CAMBIO: DIBUJO:		HOJA No.: 6 DE 8	
PROCESO: MECANIZADO		MODIFICACION:		PROCESO: MECANIZADO	
RESPONSABLE DE CAMBIO:		FECHA:		HOJA No.: 6 DE 8	

PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL



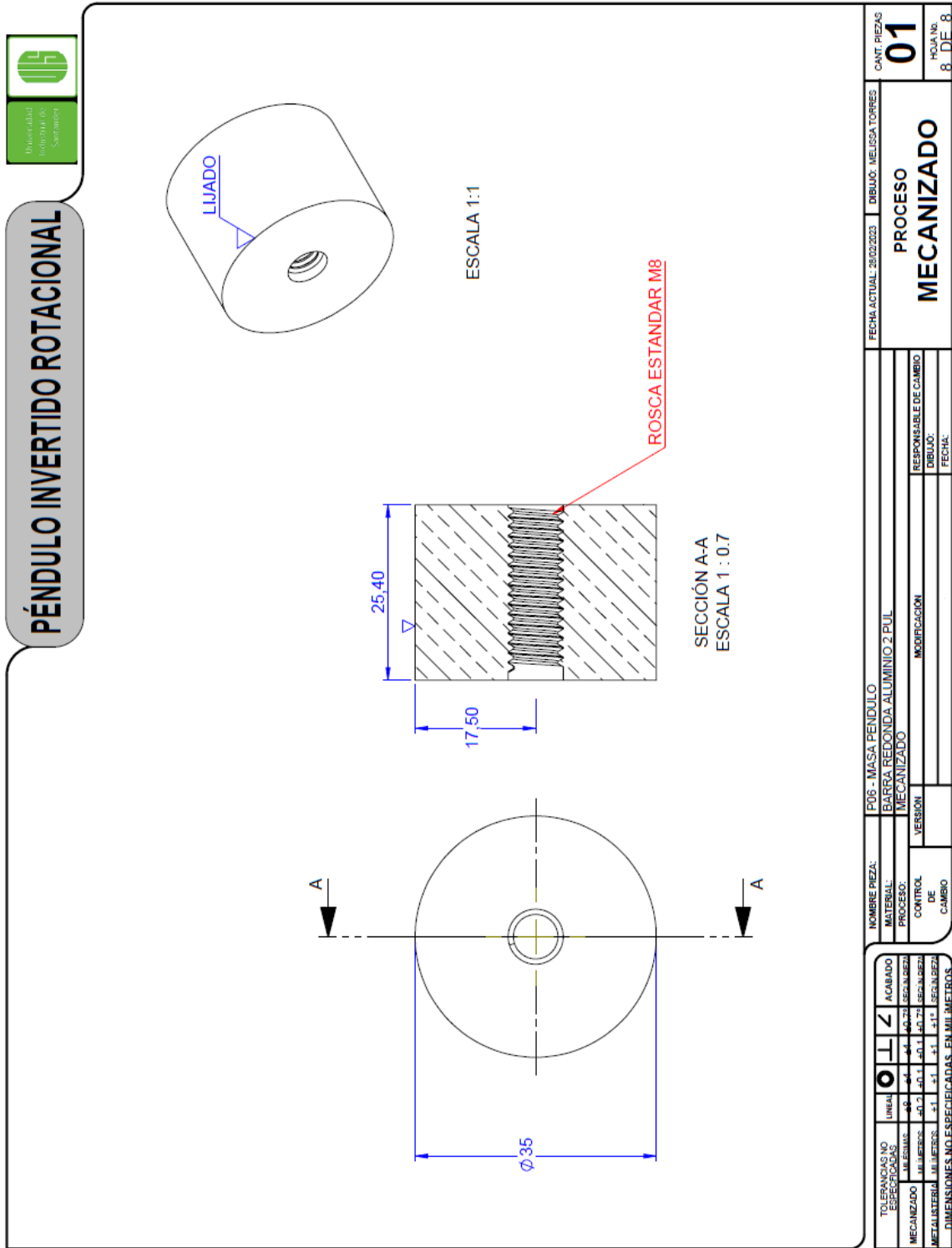




NOMBRE PIEZA: P05 - BARRA PENDULO		FECHA ACTUAL: 28/02/2023		DIBUJÓ: MELISSA TORRES		CANT. PIEZAS: 01	
MATERIAL: TUBO REDONDO 3/8 PUL ALUMINIO		PROCESO: MECANIZADO		RESPONSABLE DE CAMBIO:		HOJA No. 7 DE 8	
CONTROL DE CAMBIO:		MODIFICACIÓN:		DIBUJÓ:		FECHÓ:	
VERSION:		MODIFICACIÓN:		DIBUJÓ:		FECHÓ:	
VERSION:		MODIFICACIÓN:		DIBUJÓ:		FECHÓ:	
VERSION:		MODIFICACIÓN:		DIBUJÓ:		FECHÓ:	

ACABADO	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD	UNIDAD
MECANIZADO	0	0	0	0	0	0	0	0	0
METALISTERIA	0	0	0	0	0	0	0	0	0

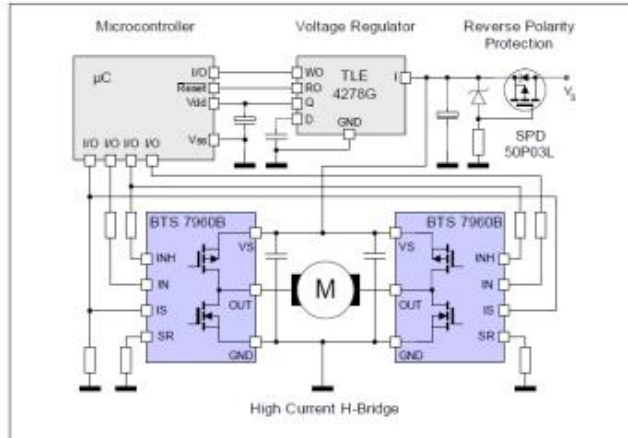
DIMENSIONES NO ESPECIFICADAS EN MILÍMETROS



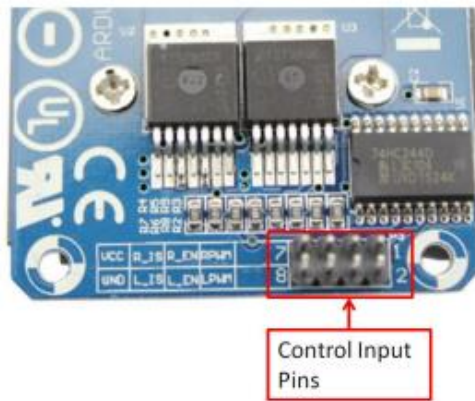
Producto SOLIDWORKS Educational. Solo para uso en la enseñanza.

Apéndice B Datasheet elementos electrónicos

**Schematic Diagram:**

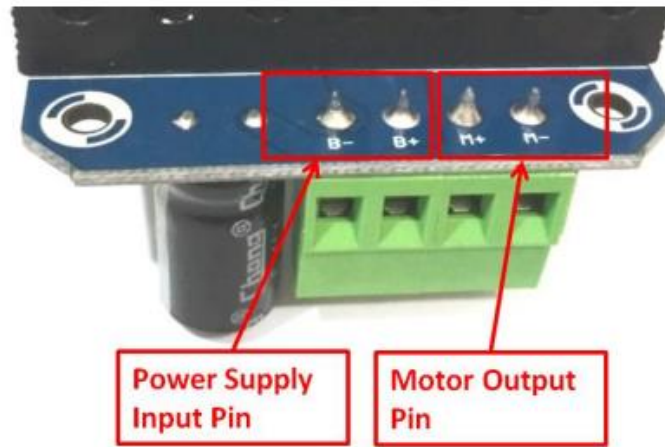


**Control Input Pin Function:**



Pin No	Function	Description
1	RPWM	Forward Level or PWM signal, Active High
2	LPWM	Reverse Level or PWM signal, Active High
3	R_EN	Forward Drive Enable Input, Active High/ Low Disable
4	L_EN	Reverse Drive Enable Input, Active High/Low Disable
5	R_IS	Forward Drive, Side current alarm output
6	L_IS	Reverse Drive, Side current alarm output
7	Vcc	+5V Power Supply microcontroller
8	Gnd	Ground Power Supply microcontroller

**Motor Power Supply & Output Pin Assignment:**



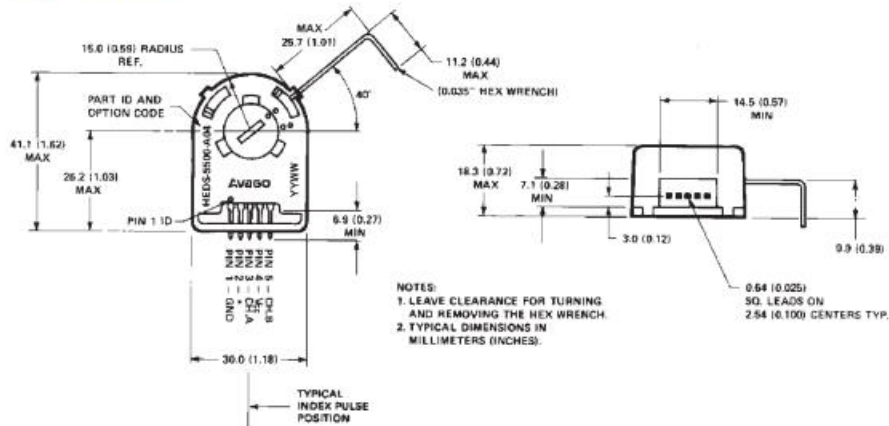
Pin No	Function	Description
1	B+	Positive Motor Power Supply. 6 ~ 27VDC
2	B-	Negative Motor Power Supply. Ground
3	M+	Motor Output +
4	M-	Motor Output -

**Controlling DC Motor with BTS7960 Using Arduino:**

Below is the circuit connection using BTS7960 high power driver to control one DC motor with Arduino board. The potentiometer allows the control of motor speed and rotation direction of the motor.

**Package Dimensions**

HEDS-5500/5540, HEDM-5500/5540



\*Notes:  
 For the HEDS-5500 and HEDM-5500, Pin #2 is a No Connect.  
 For the HEDS-5540 and HEDM-5540, Pin #2 is CH. I, the index output.

### 36215-MI Angle Sensor Analog Output

Compact, analog output angle sensor using Hall effect, non-contact technology.

Features: high resolution, smooth rotation and low dynamic noise, hard aluminum body and 304 Stainless steel shaft. IP40 rated for industrial environments such as water, oil, vibration & shock.

Mechanical Angle: Full 360° rotation with no stops.

Power: 5VDC @ <16mA

Resolution: 360/4096 = 0.088°

Accuracy: 0.3%

Update speed: ~0.6ms

Output signal : Analog 0-5V (ratio) (12-bit DAC)

Start end deviation: <1%·VCC

Load resistance: >10KOhms

ESD: Contact discharge ± 8KV, Air discharge ± 15KV.

Operating Temperature: -30°C ~ +80°C

Storage Temperature: -30°C~+80°C

Rotational moment: <5mN·m

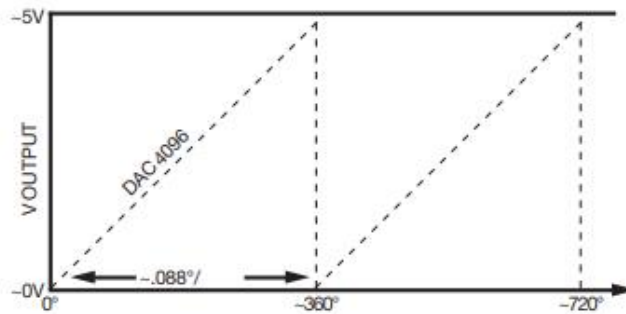
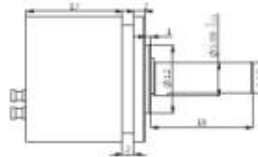
Mechanical life: >50 million revolutions

Includes Mounting Bracket

Terminals: Solder Turret

Shaft: 6mm Dia. x 18mm

**DIA: 22mm L: 22mm (Body) WT: .06**



Information including Drawings, Schematics, Links and Code (Software) Supplied or Referenced in this Document is supplied by MPJA inc. as a service to our customers and accuracy or usefulness is not guaranteed nor is it an Endorsement of any particular part, supplier or manufacturer. Use of information and suitability for any application is at users own discretion and user assumes all risk.

Information Subject to Change Without Notice  
All rights are retained by the respective Owners/Author(s)



**MARLIN P. JONES & ASSOC., INC.**

**P.O. Box 530400 Lake Park, FL 33403**

**800-652-6733 FAX 561-844-8764**

**WWW.MPJA.COM**