

Tipos de demostración que realizan estudiantes de nuevo ingreso al curso de geometría euclidiana en las carreras de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad

Industrial de Santander

Álvaro Javier Riaño Blanco

Código: 2181240

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

**Dedicatoria**

A la memoria de mi hermano.

A María, que brille de azul celeste todos los días de su vida.

### **Agradecimientos**

A mis padres, Juan Ignacio y Yadira, por dedicar los mejores años de su vida a enseñarme los valores que cimientan lo que soy.

A mi director, el profesor Jorge Fiallo, por elevar el nivel de mis discusiones didácticas y enseñarme a ver con profundidad las ideas simples.

Al profesor Luis Ángel, por marcar un verdadero hito en mi vida mostrándome la matemática en su forma más bella y luego enseñándome a perseverar frente a las dificultades de la vida.

A todos mis profesores, por infundirme una visión humanista de la vida.

A mis amigos, porque con ellos soy y con ellos he aprendido a ser.

**Tabla de contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	12
1. Justificación .....	16
2. Objetivos .....	19
2.1 Objetivo general.....	19
2.2 Objetivos específicos .....	19
3.Marco referencial .....	19
3.1 Antecedentes.....	19
3.1.1 Antecedentes teóricos .....	20
3.1.2 Antecedentes prácticos.....	26
3.2 Marco Teórico.....	31
3.2.1 Concepción de la demostración .....	31
3.2.2 Tipos de razonamiento.....	33
3.2.3 El pensamiento geométrico y la demostración en el currículo escolar .....	36
3.2.4 Estructura analítica de los tipos de demostración .....	44
4. Metodología .....	48
4.1 Fases de investigación.....	48
4.2 Desarrollo de la experimentación y análisis de datos .....	50
4.2.1 Descripción de la muestra.....	51
4.2.3 Descripción de las categorías de análisis .....	52
4.3 Aplicación de la prueba diagnóstica .....	53
4.3.1 Análisis del primer problema.....	54

4.3.2 Análisis del segundo problema .....	65
4.3.3 Análisis del tercer problema .....	73
4.3.4 Análisis del cuarto problema .....	81
4.3.5 Conclusiones de la prueba diagnóstica .....	85
4.4 Aplicación de la segunda prueba .....	87
4.4.1 Análisis del primer problema de la segunda prueba .....	89
4.4.2 Análisis del segundo problema de la segunda prueba .....	98
4.4.3 Análisis del tercer problema de la segunda prueba.....	107
4.4.4 Análisis del cuarto problema de la segunda prueba.....	112
5. Conclusiones .....	118
Referencias.....	124
Apéndices.....	129

## Listado de Figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1.</b> <i>Respuesta de L10 al primer problema de la prueba diagnóstica.....</i>	56
<b>Figura 2.</b> <i>Ejemplo de experimento crucial basado en el ejemplo del primer problema .....</i>	59
<b>Figura 3.</b> <i>Ejemplo de experimento crucial constructivo del primer problema .....</i>	60
<b>Figura 4.</b> <i>Respuesta formal estructural al primer problema .....</i>	62
<b>Figura 5.</b> <i>Balance de los tipos de demostración presentes en el primer problema .....</i>	64
<b>Figura 6.</b> <i>Respuesta de L08 al segundo problema .....</i>	66
<b>Figura 7.</b> <i>Respuesta de L10 al segundo problema .....</i>	68
<b>Figura 8.</b> <i>Dibujo de M11 con el que acompaña su demostración .....</i>	69
<b>Figura 9.</b> <i>Demostración de M01 al segundo problema .....</i>	70
<b>Figura 10.</b> <i>Balance de los tipos de demostración encontrados en el segundo problema .....</i>	71
<b>Figura 11.</b> <i>Respuesta de L14 al tercer problema.....</i>	75
<b>Figura 12.</b> <i>Dibujo que acompaña la demostración de L02.....</i>	77
<b>Figura 13.</b> <i>Demostración de L06 al tercer problema .....</i>	78
<b>Figura 14.</b> <i>Demostración formal de L04 al tercer problema.....</i>	78
<b>Figura 15.</b> <i>Balance de los tipos de demostración presentes en el tercer problema .....</i>	80
<b>Figura 16.</b> <i>Balance de los tipos de demostración presentes en el cuarto problema.....</i>	82
<b>Figura 17.</b> <i>Respuesta de L14 al cuarto problema .....</i>	83
<b>Figura 18.</b> <i>Tipos de demostración del primer problema, segunda prueba .....</i>	91
<b>Figura 19.</b> <i>Respuesta de L14 al prime problema de la segunda prueba .....</i>	94
<b>Figura 20.</b> <i>Balance de los tipos de demostración del segundo problema de la segunda prueba .....</i>	101

<b>Figura 21.</b> <i>Respuesta de L02 al segundo problema de la segunda prueba</i> .....	101
<b>Figura 22.</b> <i>Respuesta de L13 al segundo problema de la segunda prueba</i> .....	104
<b>Figura 23.</b> <i>Caso genérico y caso límite del ejemplo</i> .....	108
<b>Figura 24.</b> <i>Balance de los tipos de demostración del tercer problema para la segunda prueba</i> .....	109
<b>Figura 25.</b> <i>Respuesta de L13 al tercer problema de la segunda prueba</i> .....	111
<b>Figura 26.</b> <i>Balance de los tipos de demostración del cuarto problema para la segunda prueba</i> .....	114
<b>Figura 27.</b> <i>Respuesta de L13 al cuarto problema de la segunda prueba</i> .....	115
<b>Figura 28.</b> <i>Respuesta de L11 al cuarto problema de la segunda prueba</i> .....	116
<b>Figura 29.</b> <i>Dibujo que acompaña la respuesta de M12 al cuarto problema de la segunda prueba</i> .....	117

**Listado de Tablas**

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1.</b> <i>Resumen esquemático del Empirismo Ingenuo del primer problema .....</i>	58
<b>Tabla 2.</b> <i>Resumen esquemático de los experimentos cruciales del primer problema.....</i>	61
<b>Tabla 3.</b> <i>Resumen esquemático de los ejemplos genéricos del primer problema .....</i>	62
<b>Tabla 4.</b> <i>Resumen esquemático del empirismo ingenuo del segundo problema .....</i>	67
<b>Tabla 5.</b> <i>Resumen esquemático de las respuestas fallidas en el segundo problema .....</i>	72
<b>Tabla 6.</b> <i>Resumen esquemático del empirismo ingenuo en el tercer problema .....</i>	76
<b>Tabla 7.</b> <i>Resumen esquemático de las respuestas fallidas del tercer problema .....</i>	79
<b>Tabla 8.</b> <i>Resumen de las respuestas fallidas del cuarto problema .....</i>	84
<b>Tabla 9.</b> <i>Tabla resumen con algunas respuestas de experimento crucial .....</i>	95

**Listado de Apéndices**

	<b>Pág.</b>
<b>Apéndice A.</b> Prueba diagnóstica demostración.....	129
<b>Apéndice B.</b> Segunda prueba demostración.....	130

### Resumen

**Título:** Tipos de demostración que realizan estudiantes de nuevo ingreso al curso de geometría euclidiana en las carreras de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander\*

**Autor:** Álvaro Javier Riaño Blanco\*\*

**Palabras Clave:** Argumentación, demostración, geometría, razonamiento abductivo.

#### Descripción:

La demostración es uno de los campos más difíciles de la educación matemática y de los que más acumula investigaciones en todos los niveles de formación. Lograr que los estudiantes construyan demostraciones formales es un objetivo que no se cumple al término de la educación media (Marrades y Gutiérrez, 2000) y que tampoco logran muchos profesores (Dogan y Pierce, 2021; Simsek, 2020). Frente a esta problemática encontramos que los estudiantes que recién ingresan a la Universidad Industrial de Santander en las carreras de matemáticas tienen importantes dificultades desde el primer semestre, cuando toman el curso de geometría euclidiana. Lejos de desconocer estas dificultades, la materia se postula como el escenario propicio para que los estudiantes realicen demostraciones rigurosas bajo el enfoque de resolución de problemas. Por tanto, existe la necesidad de propuestas didácticas efectivas que apunten a favorecer los procesos demostrativos en el aula. La presente investigación da un primer paso en esa vía planteándose como objetivo la identificación de los tipos de demostración que realizan los estudiantes antes y después de tener la instrucción de la clase. Es así como, implementando una metodología mixta, damos cuenta de las tendencias generales en las demostraciones y de sus particularidades, gracias al estudio de los casos representativos. Encontramos que el tipo de problema que se propone condiciona el tipo de demostración que hacen los estudiantes y sus razonamientos, siendo principalmente respuestas empíricas. Los estudiantes elaboran estrategias *ad hoc* para ajustar sus argumentos abductivos para que parezcan estéticamente deductivos en un intento por lograr lo que se le exige en clase.

---

\*Trabajo de grado

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal.

### Abstract

**Title:** Types of demonstration carried out by new students entering the course of Euclidean geometry in the careers of mathematics and bachelor's in mathematics of the Industrial University of Santander\*

**Author:** Álvaro Javier Riaño Blanco\*\*

**Key Words:** Argumentation, demonstration, geometry, abductive reasoning.

#### Description:

Demonstration is one of the most difficult fields of mathematical education and one of the most accumulating fields of research at all levels of training. Getting students to build formal demonstrations is a goal that is not met at the end of secondary education (Marrades and Gutiérrez, 2000) and that is not achieved by many teachers (Dogan and Pierce, 2021; Simsek, 2020). Faced with this problem we find that students who just entered the Industrial University of Santander in mathematics have significant difficulties since the first semester, when they take the course of Euclidean geometry. Far from ignoring these difficulties, the subject is postulated as the favorable scenario for students to make rigorous demonstrations under the approach of problem solving. Therefore, there is a need for effective didactic proposals that aim to promote demonstration processes in the classroom. The present research takes a first step in this way by considering as an objective the identification of the types of demonstration that students make before and after having the instruction of the class. Thus, by implementing a mixed methodology, we consider the general trends in the demonstrations and their particularities, thanks to the study of representative cases. We find that the type of problem that is proposed conditions the type of demonstration that students make and their reasoning, being mainly empirical answers. Students develop *ad hoc* strategies to adjust their abductive arguments to appear aesthetically deductive to achieve what is required of them in class.

---

\* Bachelor thesis

\*\* Science Faculty. Mathematics school. Director: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

### **Introducción**

Lograr que los estudiantes realicen demostraciones formales en clase de Matemáticas es un objetivo que se han planteado un amplio número de investigadores alrededor del mundo y que en la práctica dista de lograrse ya que tradicionalmente se suele omitir la demostración de la enseñanza o se dicta en los últimos niveles de la educación preuniversitaria como una temática aparte, resumida en un conjunto de reglas tautológicas y tablas de verdad. Este enfoque formalista conduce a que los estudiantes vean la demostración como un mero requerimiento del profesor y no comprendan su necesidad para la validación de los argumentos ni su poder explicativo de las ideas matemáticas.

Sumado a esto, la literatura especializada da cuenta de una variedad de factores de distinta naturaleza que son decisivos en el aprendizaje de la demostración, como las concepciones de los estudiantes (Harel y Sowder, 1998), las particularidades del discurso matemático frente al discurso ordinario (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016), la sensibilidad a la generalización (Marrades y Gutiérrez, 2000), etc. Todos estos configuran cambios necesarios para el avance en el proceso hacia las demostraciones formales. A nivel práctico, los recientes estudios de Fiallo (2006), Larios (2018), Ribera y Gutiérrez (2018), Komatsu y Jones (2020), entre otros, aportan evidencia de que tales cambios no son triviales y pocas veces se alcanzan al término de la educación básica y media.

Otras investigaciones indican que el escenario es similar en el contexto de la educación superior. Por ejemplo, Simsek (2020) realiza un estudio sobre la capacidad de profesores de pre-servicio para construir, evaluar y refinar demostraciones matemáticas. Entre los resultados expone que aún en estos niveles los profesores involucran aspectos puramente empíricos en sus demostraciones. Dogan y Pierce (2021), en su lugar, trabajan con maestros que cursan posgrado. Concretamente encuentran que los maestros conciben como idóneas y más completas las

demostraciones que tienen un lenguaje simbólico y algebraico, revelando cierta tendencia a asociar las demostraciones con el formalismo y la rigurosidad matemática. Así es que, las concepciones sobre la demostración que se cultivan durante la formación matemática condicionan la práctica docente y esto reproduce a su vez parte de los obstáculos que se han mencionado.

Aún con todo esto, el consenso en la comunidad de especialistas en educación matemática es que no se puede sustraer la demostración de la clase, como lo hacen muchos profesores, y en cambio se debe abordar en todos los niveles de formación (Marrades y Gutiérrez, 2000, como lo dice Fiallo, 2006). En los documentos oficiales la demostración es uno de los componentes esenciales de la actividad matemática. De acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) “El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad” (p. 59). Esto pone de manifiesto la tarea de permitir que los estudiantes se acerquen continuamente a la actividad demostrativa desde los primeros años.

En el contexto colombiano la educación responde a necesidades globales y nacionales, entre las cuales se encuentran “la educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos” (MEN, 2006, p. 46) Respecto a esta última necesidad, se postula el pensamiento lógico como una de las principales herramientas que permiten el desarrollo del pensamiento crítico que es esencial para garantizar los valores democráticos de la ciudadanía. En apoyo a este pensamiento las matemáticas se erigen como un pilar clave, en tanto que favorecen las habilidades argumentativas y demostrativas del sujeto en formación.

Por esta razón, en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) se concibe el uso de la argumentación, la prueba y la refutación como uno de los procesos generales de lo que

implica ser *matemáticamente competente* y que debe ser promovido de tal manera que en los niveles de educación media el estudiante pueda “trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones” (p. 54). Sin embargo, en el panorama nacional se ha desconocido a nivel práctico el papel otorgado a la demostración. Como lo dicen Camargo et al. (2005), las actividades relacionadas con la demostración en casi todos los grados “se ha reducido de manera considerable y, en algunos casos, ha desaparecido del currículo” (p. 54).

Es así como los estudiantes que recién ingresan a universidad se encuentran con una matemática que dista de lo conocido: la matemática de las demostraciones rigurosas. Consecuentemente, la actividad matemática en clase se vuelve notablemente distinta a la del colegio. Para Balacheff (1988), el nuevo requerimiento de justificar y demostrar el porqué de las proposiciones matemáticas utilizando propiedades generales, axiomas, teoremas y articulando todo deductivamente constituye una ruptura didáctica a la que los estudiantes difícilmente se adaptan. Esto tiene como consecuencia altas tasas de deserción y repitencia que se suelen concentrar en los primeros semestres de la carrera.

Localmente, en la Universidad Industrial de Santander, aquellos estudiantes que inician las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas tienen un primer contacto con los sistemas axiomáticos en las materias de Fundamentos de Matemáticas y Geometría Euclidiana. En estos dos cursos se realiza un trabajo paralelo en relación con la demostración. Por un lado, en Fundamentos de Matemáticas hay un acercamiento a los aspectos formales de la demostración: las reglas de inferencia, el manejo de la lógica proposicional, los métodos demostrativos, etc. (Escuela de Matemáticas, 2017). Por otra parte, en Geometría, en tanto que se imparte con el enfoque de

resolución de problemas, se tiene continuamente un contacto directo con el ejercicio de demostrar.

Esta asignatura se justifica en que:

El curso de geometría euclidiana establece una excelente oportunidad para introducir al estudiante en el mundo de los axiomas, teoremas, corolarios, definiciones y, principalmente, de las demostraciones formales rigurosas. Por otra parte, la enseñanza de la geometría en cierta forma está un poco descuidada a nivel de la escuela secundaria, por lo que es importante para un estudiante de Matemáticas, adquirir en este curso los conocimientos básicos y que logre, en consecuencia, un buen dominio de esta materia. (Escuela de Matemáticas, 2017, p. 275)

La familiarización con la construcción de demostraciones formales rigurosas es en sí misma una tarea difícil de desarrollar durante toda la educación preuniversitaria y, sin embargo, lejos de desconocer la situación, este se circunscribe como el propósito principal del curso. Es así como reconoce la existencia de ciertas dificultades que permanentemente se encuentran en el transcurso de la materia. Dichas complicaciones están asociadas a la falta de presaberes, conceptos e ideas de geometría que tienen los educandos; lo que repercute negativamente en su acercamiento a la demostración. En ese sentido, se considera de vital importancia apoyar este proceso demostrativo, aprovechando el espacio que abre el curso para iniciarse en la práctica de elaborar argumentos y demostraciones en el contexto de la resolución de problemas. Así pues, se delimita como problema de investigación las dificultades que tienen los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander en su proceso de demostración en el curso de Geometría Euclidiana.

Ahora bien, la vía en la que se encamina esta investigación responde a lo que observan Stylinanides y Stylinanides (2017), quien muestra que, si bien la investigación sobre la

demostración es amplia son pocos los estudios prácticos, las propuestas didácticas y los diseños de unidades que están dirigidos a facilitar el proceso. En el contexto local se observa que el diseño y la planificación de estas propuestas es posible solo si se tiene un análisis sobre el estado inicial con que ingresan los estudiantes. Este análisis debe fundamentarse en los aspectos claves de la demostración, ser congruente con las elaboraciones teóricas de los especialistas en el tema y aportar elementos que permitan evaluar los avances o retrocesos que se logren. Lo anterior conduce al objetivo planteado en el estudio, concerniente en *identificar y analizar los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.*

### **1. Justificación**

De acuerdo con G. Stylianides y A. Stylianides (2017) el tema de la demostración ha sido ampliamente investigado en la educación matemática. Se han realizado grandes avances teóricos respecto a cómo los estudiantes comprenden la demostración, qué lugar tiene la demostración en el currículo y qué aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la demostración son fundamentales en distintos niveles educativos. Sin embargo, en comparación con los estudios teóricos, la cantidad de investigaciones que dan cuenta de sus implicaciones prácticas es pequeña.

Así es como, en consonancia con lo expuesto en el apartado anterior, se identifica que los estudiantes de nuevo ingreso a los programas de Matemáticas de la universidad tienen serias dificultades para aprender a elaborar demostraciones formales ajustadas al sistema axiomático de la Geometría Euclidiana, siendo esto último uno de los propósitos de la materia. Para lograr que estos objetivos se cumplan satisfactoriamente, es necesario un abordaje amplio del problema, que

lleve a la consecución de propuestas didácticas que promuevan las habilidades demostrativas de los alumnos.

Ahora bien, para que dichas propuestas resulten efectivas es pertinente hacer un buen diagnóstico de la situación actual de los estudiantes y prestar atención a las características de sus producciones escritas, una vez que han sido permeadas por las particularidades en las que se dictan los cursos. Conocer aspectos relacionados con: qué argumentos utilizan para justificar un teorema o una conjetura, qué condiciones le son suficientes para considerar su validez, qué elementos de convicción utilizan en sus demostraciones; son cuestiones fundamentales para un diagnóstico que nos permita saber concretamente qué tipos de demostración son los que realizan. Desde la perspectiva de Marrades y Gutiérrez (2000), dar respuesta a estos interrogantes es crucial para generar estrategias de enseñanza que lleven a los estudiantes hacia una concepción de la demostración afín con la concepción actualmente aceptada por los matemáticos.

Así pues, nuestro propósito será identificar y analizar los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Con esto esperamos aportar información estructurada que sirva como base para el trabajo didáctico en este contexto específico, así como algunas observaciones que propicien la reflexión sobre la forma en que se evalúa el proceso prueba. Los constructos teóricos que presentamos aquí también contribuyen a esta reflexión en tanto que son una herramienta que facilita el análisis por parte de los docentes del área.

Constatamos la pertinencia y viabilidad de esta investigación, gracias a que se cuenta con la disponibilidad de los recursos que se necesitan en lo referente a la disposición de los estudiantes matriculados, la disposición de los profesores a cargo de estos grupos, el espacio en las salas de cómputo para aplicación de los instrumentos de recolección de datos y el lugar horario para llevar

a cabo tales aplicaciones. De esta manera, los objetivos propuestos se vuelven accesibles y pertinentes.

Expresamos, además, que los resultados obtenidos en este trabajo servirán como punto de partida para la investigación que adelantaremos a futuro y que apunta hacia la consecución del diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica para tratar precisamente los problemas de demostración.

## **2. Objetivos**

Con base en la problemática descrita y las ideas anteriormente expuestas se definen los objetivos de esta investigación de la siguiente manera:

### **2.1 Objetivo general**

- Identificar y analizar los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Diseñar e implementar una prueba diagnóstica que permita identificar los tipos de demostración que realizan los estudiantes al inicio el curso de Geometría Euclidiana.
- Diseñar e implementar una prueba que permita identificar los tipos de demostración que realizan los estudiantes en un momento del curso en el que se han familiarizado con las condiciones de enseñanza y aprendizaje de este.
- Analizar los resultados obtenidos de la muestra en estudio.

## **3.Marco referencial**

### **3.1 Antecedentes**

En este apartado atendemos a los objetivos de la investigación mediante una revisión de la literatura que nos permita situar el estudio en un marco conceptual y en relación con las investigaciones que se han hecho en los contextos local, nacional e internacional. Por esta razón, presentamos por separado los trabajos que van en la vía de las construcciones teóricas de los que

aportan los resultados empíricos al ensayar con muestras concretas. Todo esto sin desconocer que los primeros en su mayoría se encuentran en intersección con los segundos.

### ***3.1.1 Antecedentes teóricos***

El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración ha sido un tema ampliamente investigado en el seno de la comunidad académica. A ese respecto, se ha conformado una pluralidad de enfoques teóricos que abordan el tema partiendo de concepciones distintas de lo que es la demostración y con terminologías muy diversas. Pero más allá de las cuestiones de enfoque, hay un problema didáctico que ha servido de estímulo para el desarrollo de este campo: la discrepancia entre argumentación y demostración.

Salvando las particularidades de cada autor, se entiende que la argumentación incluye todos los intentos de justificación de los estudiantes, esto abarca sus razonamientos plausibles y los elementos de tipo visual, abstracto, de autoridad, etc. que utilizan para *convencer*. Por ello su organización discursiva está hermanada con el habla cotidiano. La demostración, en cambio, es un término más específico para denotar a una forma particular de organización deductiva basada en tautologías, que tiene como fin *validar* ese mismo hecho en el contexto de una teoría matemática. Los estudiantes inexpertos construyen naturalmente argumentos cuando se les pide demostrar, porque es lo que ellos entienden por ese término. Ahora bien, la implicación didáctica está en reconocer esos procesos argumentativos como la base y la vía para desarrollar los procesos demostrativos o considerarlos como un obstáculo.

Nuestra intención aquí no es aportar argumentos para apoyar o rechazar ninguna de las posibilidades, más bien, queremos mostrar aquellas investigaciones originales que sustentan y dan forma a nuestros referentes teóricos y que se enmarcan en algún lado de esta disyuntiva.

Duval (2016) habla en términos del argumento y la prueba matemática, ya que el término demostración lo reserva a aquellas deducciones axiomáticas que aceptan los matemáticos, la prueba es un concepto más amplio que abarca los razonamientos deductivos de los estudiantes. En el argumento las proposiciones están organizadas según su valor semántico (prevalece el significado de las cosas, pues lo que importa es comprender el contenido de la idea) y su orden pragmático (economía del lenguaje, no redundancia, etc.); que son los factores que aparecerían en la comunicación ordinaria. En cambio, la prueba responde al problema de la validez, pero la forma en que se muestra dicha validez acude a una organización del lenguaje tal que, lo importante de las proposiciones no es su valor semántico, sino su estatus teórico (definición, axioma, teorema, conjetura, etc.) y su lugar en el encadenamiento lógico como premisa, hipótesis o conclusión (estatus operativo).

De aquí llega a la conclusión de que los estudiantes deben superar una ruptura cognitiva y epistémica para transitar de las meras argumentaciones hacia las pruebas matemáticas. Que ya no sea una explicación clara y comprensible lo que valga para asegurar los hechos matemáticos, sino esa coherencia tautológica lograda por una aritmética de las proposiciones en las que solo importa su valor de verdad. En ese sentido, la prueba matemática exige, ya no que el estudiante esté convencido o vea probable que un resultado pueda ocurrir, sino que llegue, mediante el acto de razonar, a un sentido de la *necesidad* de que sea verdadero. Desde este punto de vista, la argumentación es un obstáculo para aprender a demostrar.

Otros autores no ven una brecha insalvable entre la argumentación y la demostración, como Duval, y entienden que hay un paso de continuidad entre estos. Desde el punto de vista de la enseñanza de la demostración en el aula, Harel y Sowder (1988) ponen la lupa en la incongruencia entre el significado que el estudiante entiende por “demostración”, más cercano a la

argumentación, y lo que el profesor y los matemáticos profesionales tienen. Para abordar esta situación, hablan de los “esquemas de demostración” de los estudiantes, con la intención de inferirlos a partir de sus producciones escritas.

Es así como organizan tres tipos de esquemas que los estudiantes aplican en sus argumentos y que les dan el carácter de demostración (para ellos), estos son: 1) Esquema de convicción externa, basada en la autoridad de un maestro, o en la forma superficial del argumento; 2) Esquema de demostración empírica, basado en ejemplos específicos, razonamiento inductivo o en mediciones directas en el caso de pruebas geométricas; y 3) Esquema de prueba deductiva, donde la verdad de una conjetura está determinada por la deducción lógica (Hanna y Knipping, 2020). Más tarde De Villiers (1991) amplía las posibilidades en lo que denomina las “fuentes de convicción externa” y que incluyen la *convicción ritual*, por ejemplo, el formato de prueba a dos columnas en geometría; y la *convicción simbólica*, esto es, la necesidad de agregar expresiones algebraicas o simbólicas (contador existencial, universal, etc.) en la demostración.

En sintonía con Duval, Balacheff (1988) experimenta con 28 estudiantes de secundaria cuando se enfrentan a la tarea de probar un hecho matemático. Este autor utiliza como marco de referencia la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), por lo que su interés está en los aspectos tangibles de las concepciones de los alumnos. En dicho trabajo plantea toda una tipología de las pruebas producidas, la cual estructura a partir de dos categorías: *pruebas pragmáticas* y *pruebas intelectuales*. Pero antes de definir los tipos de demostración que se adscriben a estas categorías, hace una precisión sobre los conceptos *explicación*, *argumentación*, *prueba* y *demostración*.

Por *explicación* alude a una idea que refina más tarde, y que toma de Duval (1992), quien la define como un conjunto de razones que buscan hacer comprensible un dato, fenómeno,

resultado, comportamiento, etc. La explicación cumple la función de hacer explícito y organizar algo dentro de un sistema de conocimientos personales.

La *argumentación* tiene por objetivo hacer que un auditorio adhiera a unas ideas recurriendo a una amplia variedad de estrategias Balacheff (2000). Su función principal es persuadir y no convencer, que como lo explica Fiallo (2011), “El objetivo de convencer es modificar las opiniones y confianzas apelando a la racionalidad, mientras que el objetivo de persuadir es obtener consentimiento sin necesidad de apelar a la racionalidad” (p.75) Por esto, dice Balacheff (2000), “no consideramos que la argumentación se identifique con la prueba”. (p. 199)

La *prueba*, por su parte,

Cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene designarla por un término que permita marcar su desvinculación del sujeto. El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra. De lo anterior tenemos un ejemplo reciente en matemáticas con el “teorema de los cuatro colores”, cuya prueba, por Appel y Haken, no es una demostración en el sentido clásico, y es aun así es aceptada por ciertos matemáticos como Swart (1980). Otros, como Tymoczko la rechazan. (Balacheff, 2000, p. 12).

La prueba se distingue entonces de la argumentación porque apunta a establecer la veracidad de una afirmación en comunidad. Los criterios de validez se discuten y contrastan en conjunto, y su propósito no es convencer para lograr la aceptación, sino establecer su validez por

medio de razones. Por tal motivo, el autor se interesa por el paso de la explicación a la prueba, pues esta última está en la vía de la demostración matemática.

Por último, la *demonstración* se entiende como la prueba dominante en matemáticas en el actual momento histórico. Conciérne a “una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas” (Balacheff, 2000, p. 13). Como consecuencia de esto, la demostración también depende de la validación y la aceptación social, pero tiene unas reglas concretas que se conciertan en la comunidad matemática profesional. La prueba, en cambio, es más general que la demostración, en tanto que siempre ha existido en la historia de las matemáticas, pero ha cambiado sus formas, siendo la actual la que introdujo Euclides con el método axiomático.

Ahora bien, partiendo de dicha conceptualización el autor organiza los tipos de prueba: *empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico, experimento mental, y calculo mental*. Los dos primeros tipos los caracterizan como pruebas pragmáticas y los dos últimos como pruebas intelectuales, el ejemplo genérico pertenece a ambas categorías. En las pruebas pragmáticas se aporta evidencia práctica de una afirmación, por tanto, están ligadas a la experiencia y a la acción, al respecto Balacheff (2000) menciona que, “No permiten establecer la verdad de una aserción, su condición de prueba es reconocida únicamente por aquellos que las consideran como tales” (p. 26). En cuanto a las pruebas intelectuales, el problema de la evidencia es un problema teórico, se articulan las razones en cadenas de argumentos y razonamientos en función de establecer el carácter necesario de validez de una proposición. Para el autor estas categorías se pueden entender en términos de la eficacia y el rigor, respectivamente.

El *ejemplo genérico* se encuentra entre lo pragmático y lo intelectual. Este tipo de prueba se da cuando se enuncian las razones que sustentan la afirmación basándose en transformaciones u operaciones de ejemplo que resulta ser el representante de una clase de ejemplos con las mismas

características. Así, en el ejemplo genérico tiene lugar la experimentación mental, la cual se aparta de lo particular. El paso de una frontera a otra se da en la medida en que el estudiante toma consciencia del carácter genérico del ejemplo escogido y, en esa dirección, se “marca verdaderamente la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales, en la medida en que las acciones pasan de ser efectivas a acciones interiorizadas” (Balacheff, 2000, p. 28).

En relación con las interpretaciones de su estudio, Balacheff (2019) expresa que algunas investigaciones han considerado incorrectamente que la tipología de pruebas constituye una secuencia de estadios por los cuales el estudiante debe transitar linealmente. Por el contrario, los tipos de prueba tienen que ver más con sus concepciones y percepciones de la situación. Menciona que el factor social afecta la argumentación en clase, pues puede promover el discurso persuasivo antes que el discurso racional al que apela la demostración. En ese sentido, se pregunta por aquellas situaciones que permiten problematizar la demostración en el aula de manera que se establezca la necesidad del manejo de una teoría, sosteniendo que, para que el estudiante llegue al aprendizaje de la demostración, debe superar algunas condiciones de la argumentación a la que está acostumbrado para que se produzca la ruptura epistemológica que le lleve a dicho problema teórico.

Articulando los aportes de todos estos trabajos y agregando el estudio de Bell (1976), quien estudió los distintos grados de completitud de las demostraciones empíricas en estudiantes de escuela bachiller; Marrades y Gutiérrez (2000), presentan una categorización más completa de los diferentes tipos de demostración que aparecen en la clase. Lo que se quiere es llegar a una comprensión más amplia de las respuestas de los estudiantes, por lo que se presta atención no solo a sus producciones, sino a lo que sucede en la etapa de exploración de ideas que antecede a la escritura de la demostración. Esta tipología permite obtener información sobre cómo los

estudiantes seleccionan sus ejemplos con qué generalidad enuncian los argumentos en torno a dichos ejemplos.

Finalmente, es Fiallo (2011) quien retoma y actualiza este modelo de análisis al reinterpretar las categorías de experimento crucial y ejemplo genérico. En su trabajo, articula el constructo teórico de *unidad cognitiva* de Pedemonte (2002), el modelo de Toulmin y el modelo cKç de Balacheff (2005) con el fin de estudiar la continuidad (o discontinuidad) entre la fase de argumentación y de producción de la demostración. El autor encuentra que ciertos procesos de razonamiento, emparentados con los sistemas de referencia (geométrico, analítico, algebraico, etc.) pueden propiciar las demostraciones deductivas, mientras que otros las imposibilitan, impidiendo que haya continuidad. Así pues, será esta tipología de demostraciones la que adoptaremos para organizar, más adelante, nuestras categorías de análisis.

### ***3.1.2 Antecedentes prácticos***

Respecto a los estudios que analizan las demostraciones que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a la tarea de conjeturar y demostrar se encuentran principalmente reportes de investigación que dan cuenta de implementaciones realizadas en el contexto escolar. En general, estas investigaciones evidencian el carácter empírico de las demostraciones de los estudiantes; encuentran que para ellos es suficiente con convencerse de la verdad de un hecho matemático. En ese sentido, resulta interesante advertir lo que sucede en el contexto de la educación superior, incluso en personas con una profesión consolidada. Este apartado da cuenta de estos resultados y muestra la pertinencia de nuestra investigación en el ámbito local.

Como se mencionó, en el ámbito de la educación escolar se han adelantado diversos estudios que muestran interesantes resultados. Por ejemplo, Larios (2018) analiza las

demostraciones que realizan los estudiantes a partir de una muestra de 373 estudiantes, por medio de un examen diagnóstico en el que había preguntas de opción múltiple y preguntas abiertas. Para el análisis tuvo en cuenta los tipos de argumentos que escogen los alumnos para validar las proposiciones matemáticas basándose en las propuestas de Harel y Sowder (2007) y en una actualización de dicha categorización elaborada por el autor. Encuentra que el uso de esquemas de argumentación avanzados no implica que las soluciones sean correctas, por lo que sigue habiendo importantes dificultades en el bachillerato. También evidenciaron un alto porcentaje de estudiantes que utilizan esquemas autoritarios (referencia a una autoridad para convencer) y simbólicos (simbología matemática en la solución del problema) para dar validez a su resultado, lo que indica una concepción de las matemáticas que no favorece a su aprendizaje, pues los estudiantes se quedan en la forma y no en el fondo de los conceptos e ideas matemáticas.

En otra investigación realizada con estudiantes con talento matemático de 1° y 2° de la ESO, Ribera y Gutiérrez (2018) implementan un taller extraescolar en el que dan cuenta de las demostraciones (como proceso y como producto) que realizan. Utilizando la estructura analítica de las demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000); determinan que todos los estudiantes realizaban demostraciones empíricas, precisando, en un orden ascendente respecto al grado de sofisticación los siguientes tipos: 1) experimento ingenuo o experimento mental, 2) experimento crucial o ejemplo genérico, 3) ejemplo genérico y experimento mental. Lo anterior da cuenta de la pertinencia de las investigaciones que apuntan al diseño de situaciones didácticas que les permitan a los estudiantes ver la necesidad de formalizar sus argumentos, esto es, la necesidad de una demostración.

Por su parte, Komatsu y Jones (2020) estudian el uso combinado de las herramientas digitales y herramientas físicas (papel y lápiz) en la resolución de problemas de conjetura y

demostración. Muestran que, en ocasiones, las demostraciones geométricas que se soportan en diagramas pueden limitarse a ser ejemplos genéricos, dado que el diagrama impone unas restricciones sobre las condiciones del teorema que impiden abarcar la totalidad de los casos. En respuesta a esto, el medio digital ofrece la posibilidad de abarcar continuamente una gran variedad de configuraciones a partir de las cuales se puede estructurar un argumento general que conduzca a la demostración. Sin embargo, en problemas que revisten de mayor dificultad, la exploración y visualización con el SGD de las distintas configuraciones no basta para establecer la demostración. Es ahí donde el uso del lápiz y el papel entra en juego facilitando la deducción de propiedades a partir de construcciones hechas sobre el diagrama y la designación de valores o expresiones simbólicas a los elementos que allí intervienen. Según los autores, se debe prestar atención a la interacción entre los dos tipos de herramientas, puesto que con su uso se producen sinérgicamente estrategias que propician todo el proceso demostrativo.

En esa misma línea, investigaciones como las de Erdoğan et al. (2020) muestran el cuidado que se debe tener en el diseño de tareas que involucran geometría dinámica para facilitar procesos de exploración, conjetura y demostración. Observando el desarrollo de una actividad diseñada con la Teoría de las Situaciones Didácticas, encontraron que los estudiantes utilizaban únicamente la herramienta de medición y no veían la necesidad de un argumento matemático, cuestión que reviste una dificultad para la dirección de la clase por parte del profesor.

Desde otra perspectiva, Simsek (2020) dirige la atención en la capacidad de 58 profesores de pre-servicio (próximos a ejercer el cargo) para construir, evaluar y refinar conjeturas y demostraciones matemáticas. Entre las preguntas que se formulan está: ¿Qué tipos de argumentos o contraejemplos construyen los profesores de pre-servicio? Es así como, teniendo en cuenta las características de una demostración planteadas por Stylianides (2007), elaboran una clasificación

de las respuestas de los profesores. Concluyen que las actividades de construcción-evaluación-refinación de conjeturas y demostraciones mejora la comprensión las ideas matemáticas subyacentes en las demostraciones de los teoremas. También encuentran que, si bien la mayoría de los profesores de pre-servicio construyeron argumentos deductivos válidos que justifican la verdad de una afirmación, se presentaron argumentos que no fueron aceptados como demostraciones matemáticas dado que referían a aspectos empíricos, a pesar de esto los maestros que hicieron ese tipo de argumentos no estaban convencidos de que fueran demostraciones. Por otra parte, resaltan la importancia de promover la actividad de conjeturar, dado que es un elemento clave a la hora de hacer matemáticas y promover la discusión y argumentación en clase. Aclaran que no todas las actividades que se llevaron a cabo fueron efectivas para motivar a los maestros a realizar conjeturas, a menos que se les pidiera explícitamente hacerlo, por lo que es necesario tener una postura crítica y reflexiva cuando se diseñan tales situaciones problema.

Dogan y Pierce (2021) realizan un estudio con maestros matriculados en un curso de posgrado con el fin de explorar cómo los maestros interpretan, entienden y usan ejemplos genéricos en sus demostraciones, entendiendo el término según como lo expone Stylianides (2007). Adoptan su propia visión de lo que es un ejemplo genérico como un razonamiento que se hace sobre un ejemplo particular y que puede aplicarse a toda una clase de ejemplos (por la generalidad del argumento). En ese sentido, un ejemplo genérico puede no ser aceptado como demostración en otras comunidades (como la comunidad profesional de matemáticos). Sus resultados condujeron a establecer categorías de análisis particulares como: argumentos empíricos enriquecidos por el uso adicional de ejemplos genéricos, ejemplo genérico incompleto y ejemplo genérico completo. Concluyen, entre otras cosas, que los maestros prefieren pruebas visuales por su carácter explicativo. Sin embargo, consideran aquellas demostraciones que contienen un

lenguaje simbólico y algebraico como las más probables y completas, lo que tiene un impacto en la actividad demostrativa de sus estudiantes. Mencionan finalmente la posibilidad de que el área de las matemáticas en que se realicen las demostraciones pueda hacer que se de mayor importancia a un tipo sobre los otros, pero deja el espacio para posteriores investigaciones.

En el contexto nacional, Fiallo (2006) diseña e implementa una secuencia didáctica para el aprendizaje de las razones trigonométricas enfocado en los procesos de demostración en estudiantes de noveno grado. En dicho estudio realiza una prueba diagnóstica sobre los tipos de demostración que realizaban los estudiantes antes de la implementación de la secuencia y encontró que sus demostraciones eran principalmente *empirismo ingenuo* (categoría planteada en la tipología). La propuesta didáctica obtuvo resultados alentadores pues promovió la exploración y la conjetura usando herramientas de geometría dinámica, así como la demostración. En particular se movilizaron los tipos de demostración de los estudiantes, de los pragmáticos hacia los deductivos.

Arevalo (2016) investiga los esquemas argumentativos que surgen cuando estudiantes de noveno grado se enfrentan a tareas de demostración de acuerdo con la teoría propuesta por Toulmin (2003). Se concentra en valorar no solo el producto del estudiante sino el proceso de argumentación que llevó a cabo. Así mismo, siguiendo las ideas de (Balacheff, 1998; Harel y Sowder, 1998; Gutiérrez, 2001), tiene en cuenta los tipos de argumentación que proponen dichos autores y reconoce la presencia de argumentos empíricos como el *ejemplo genérico*, mostrando por otra parte evidencia de la evolución de dichos esquemas hacia estructuras argumentales deductivas, como el *experimento mental*.

Finalmente, en el contexto universitario, Gempeler y Cardozo (2021) proponen una serie de actividades con miras a que los estudiantes usen el razonamiento deductivo para predecir

propiedades geométricas que se mantienen con la función del arrastre. Concluyen que se pueden desarrollar actividades usando SGD, de manera que los estudiantes articulen espontáneamente hechos geométricos conocidos y necesarios para que se garanticen propiedades consecuentes en su justificación de las predicciones, lo que enriquece su actividad demostrativa y conduce al estudiante a sumergirse en el trabajo de garantizar consecuentes a partir de los antecedentes, que lo lleva a tipos de demostración (en un sentido amplio del término) más estructurados.

Estas investigaciones muestran la prevalencia de esquemas de demostración empíricos en diversos niveles educativos y confirma la problemática de estudio. De tal manera, reconocer a nivel local los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso será útil para el trabajo en propuestas didácticas efectivas que se realicen en investigaciones posteriores.

## **3.2 Marco Teórico**

### ***3.2.1 Concepción de la demostración***

El concepto principal en este estudio es el de demostración. En las diferentes investigaciones hechas sobre el tema se evidencia una pluralidad de concepciones y formas en las que se emplea dicho término. Por esa razón es necesario hacer explícito lo que entendemos por demostración, teniendo en cuenta los aportes de que han hecho otros autores y nuestros objetivos de estudio.

En primer lugar, es necesario referirnos a la concepción más ampliamente difundida en la comunidad matemática profesional y entre los estudiantes sobre la demostración, esto es: una demostración es una cadena de deducciones lógicas, abstractas que conectan antecedentes con consecuentes. Esta concepción, si bien refleja la forma en que se establece la veracidad de las

proposiciones matemáticas en la actualidad, no es apropiada para usarse en el contexto del aula por distintas razones.

Por un lado, en el aula de clase se dan una serie de condiciones propias de la situación que naturalmente modifican las formas aceptadas de la demostración. Según como lo señala Balacheff (2000) refiriéndose a la transposición didáctica: “En el campo de las matemáticas, o en cualquier otra rama del conocimiento, es fundamental tener en cuenta que la demostración no puede ser enseñada del mismo modo en un aula de clase que en un ambiente puramente científico” (p. 2) De ahí que las demostraciones elaboradas en el aula no correspondan estrictamente al mismo tipo de demostración que presentan los matemáticos profesionales en sus investigaciones.

Por otra parte, se ha constatado que la demostración matemática formal fracasa cuando se intenta insertar repentinamente en la enseñanza, entre otras cosas porque los estudiantes presentan una variedad de esquemas personales de demostración que no siempre corresponden con tales demostraciones (Recio, 2002). Siguiendo esta idea, Healy y Hoyles (2000) mencionan que, como consecuencia de hacer esto, los estudiantes tienen que comprobar empíricamente un teorema porque su demostración no los convence.

Además de esto, se considera que:

En el contexto didáctico, el papel explicativo de la demostración y su comprensión parecen más importantes que la aceptación de la validez de un teorema; en consecuencia, una demostración debe fomentar la comprensión y tener en cuenta el contexto de la clase y lo vivido por los estudiantes. (Pedemonte, 2002, p. 12)

Es por esto por lo que en esta investigación comprendemos la demostración en un sentido más amplio, con miras a conseguir una mejor comprensión del proceso que desarrollan los estudiantes para llegar a la construcción de las demostraciones deductivas formales. De esta

manera asumimos la definición propuesta por Fiallo (2011), que considera la demostración como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (p. 85).

### ***3.2.2 Tipos de razonamiento***

Este apartado surge en respuesta a los datos analizados en la segunda fase de aplicación de los instrumentos de recolección de datos, puesto que se presentaron algunas particularidades que dieron lugar al análisis sobre los tipos de razonamiento que emplean los alumnos y que son visibles en sus producciones escritas en aquel momento de aplicación, cuando los estudiantes ya tienen aprendizajes consolidados acerca de la demostración matemática.

Para aclarar a lo que nos referimos por los tipos de razonamiento, de los que se pueden encontrar indicios en una demostración, hace falta distinguir entre el proceso de argumentación previo a la demostración y la demostración misma. Si bien, nosotros incluimos una concepción de la demostración bastante amplia, debemos hacer una precisión entre lo que sucede mientras el estudiante trabaja en la elaboración y justificación personal de la conjetura, utilizando dibujos, construcciones en el computador, explorando ideas plausibles, encontrando relaciones visuales o geométricas, evocando teoremas conocidos que le pueden servir o simplemente observando invariantes en la pantalla; de la demostración escrita, que se entiende como producto y que contiene aspectos de la fase de conjetura pero que está ajustada y depurada por las reglas que debe tener una demostración formal.

Pues bien, durante esta fase de conjetura se despliegan una serie de razonamientos que difieren, en su estructura, de las demostraciones, en tanto que estas son siempre deductivas.

Nosotros hemos visto que aún en sus producciones escritas se puede reconocer que, en muchas ocasiones, el razonamiento va en otra vía distinta de lo deductivo. Por esta razón, tenemos la necesidad de precisar aquellos tipos de razonamiento que pueden aparecer en el escrito y que nos aportan datos de la fase previa a la demostración. Nos referimos entonces, a los tres tipos de razonamiento de los que habla Pedemonte (2002) y que retoma Fiallo (2011) en su investigación.

Para la autora, las múltiples formas en las que operan los estudiantes cuando están reuniendo sus ideas para la demostración, aunque parecen caóticas, en realidad son la composición (quizá un poco intrincada) de tres formas argumentales que tienen su estructura lógica propia, estas son: la argumentación deductiva, la argumentación inductiva y la argumentación abductiva. Pasamos a describir puntualmente cada una, pero nuestra atención se centrará en la última, dado que fue la que más quedó en evidencia en los datos analizados.

La argumentación deductiva es lo que Charles Peirce llama un tipo de inferencia explicativa, en el sentido de que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas y por lo tanto es información contenida en estas, de modo que la conclusión no es información nueva, sino una extracción de una información que ya se tenía. En la deducción se infiere un resultado de un caso particular, a partir de una regla general conocida. El siguiente es un ejemplo del autor que presenta Pedemonte (2002) para explicarla:

Regla: Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

Caso: Estos frijoles son de esta bolsa.

∴ Resultado: Estos frijoles son blancos.

La argumentación inductiva, en cambio, se basa en inferencias ampliativas, es decir, que obtenemos información nueva que no está contenida en las premisas. En la inducción se conocen algunos casos y a partir de ellos se propone una regla general que se cumpliría en un conjunto más

grande, pues va de lo específico a lo general. En muchas ocasiones, se da un paso inductivo por mera analogía, proponiendo algunos ejemplos y postulando que lo mismo es válido para el total de los casos. Sin embargo, se pueden separar tres criterios distintos por los cuales se da esta continuidad de lo particular a lo general: por generalización, por analogía y por particularización. No es de nuestro interés ahondar en cada uno de ellos, así que nos limitamos a exponer el ejemplo del argumento inductivo por generalización, según como lo presenta Pedemonte (2002):

Caso: Estos frijoles son de esta bolsa.

Resultado: Estos frijoles son blancos.

∴ Regla: Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

Por último, tenemos la argumentación abductiva, que es la que más nos interesa. Aquí lo que se infiere no es el resultado, ni la regla general, sino el caso concreto que se deduce de los dos primeros. Este es propiamente el tipo de inferencia que se ejecuta en todos los procesos de descubrimiento. La búsqueda de una solución a un problema muchas veces se construye a partir de la conclusión, es decir, de lo que se quiere encontrar. Observamos hechos (resultados) y mediante un proceso ascendente volvemos al caso de una regla que puede explicar los hechos. Un ejemplo y su estructura son los siguientes (Pedemonte, 2002):

*Ejemplo:*

Regla: Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

Resultado: Estos frijoles son blancos.

∴ Caso: Estos frijoles son de esta bolsa.

*Estructura:*

$A \Rightarrow B$  (regla conocida)

$B$  (hecho observado)

---

$A$  (caso probable)

La abducción es donde encontramos alguna circunstancia muy curiosa, que sería explicada por la suposición de que se trata de un caso de cierta regla general, y en consecuencia adoptamos esa suposición (Peirce, como se cita en Pedemonte, 2002). Esto es típicamente lo que se denomina abducción clásica, nótese que aquello que se infiere es el caso plausible por el cual tendría sentido que ocurriera el resultado que se está observando. Pero la abducción puede operar con mucha menos información, en lo que llamamos abducción creativa. Esta deviene de inferir el caso y la regla, a partir del resultado. Su estructura es:

$B$  (hecho observado)

---

$A \Rightarrow B$  (una supuesta regla)

$A$  (caso que se vuelve más probable)

### ***3.2.3 El pensamiento geométrico y la demostración en el currículo escolar***

Tener un panorama general de los saberes en geometría que tienen los estudiantes colombianos una vez que finalizan su etapa escolar, así como de sus adelantos en el proceso de demostración será de suma importancia para el diseño de una prueba diagnóstica que permita recoger la información pertinente para identificar las demostraciones que realizan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. Es necesario entonces presentarles situaciones adaptadas a sus condiciones de aprendizaje, de manera que puedan explorar fácilmente el problema, establecer conjeturas y hacer las demostraciones. Así pues, el objetivo de esta sección será dar cuenta de la forma en que se promueve el pensamiento geométrico y la actividad demostrativa en la etapa

escolar, de acuerdo con los documentos oficiales que organizan el currículo colombiano de matemáticas.

La educación matemática en el país responde, como se menciona en los EBC, a necesidades globales y nacionales, entre las cuales se encuentran “la educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos” (MEN, 2006, p. 46). Respecto a esta última necesidad, se postula el pensamiento lógico como la principal herramienta que se debe desarrollar en la escuela para garantizar la consolidación de los valores democráticos en la formación de ciudadanos con pensamiento crítico, capaces de establecer justificaciones razonables y de tomar decisiones informadas. Si bien, el pensamiento lógico involucra todas las áreas de la educación, es en las matemáticas donde encuentra un lugar propicio para su desarrollo debido a las habilidades argumentativas y demostrativas que allí se fomentan.

Para ubicar la demostración matemática en la escuela, debemos situarnos en los componentes a partir de los cuales se estructura el currículo de matemáticas. De esta manera, encontramos entre los cinco procesos generales en los que se descompone la actividad matemática escolar, que la demostración (en su sentido amplio) está asociada fundamentalmente al razonamiento, dicho proceso comprende las siguientes competencias (MEN, 1998, Sección 2.4.3.2, párrafo 6):

- Dar cuenta del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Así, el razonamiento se articula al currículo desde los primeros niveles, donde los estudiantes comienzan a explorar las propiedades y las relaciones de los objetos físicos que le rodean y, con base en esto, realizan predicciones y conjeturas, justificándose en las propiedades percibidas. Más adelante, en grados superiores, el razonamiento va tomando su independencia de lo físico para pasar a “trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos” (MEN, 2006, p. 54). Esto nos indica que para llegar a las demostraciones deductivas se debe transitar por un proceso largo, que va avanzando gradualmente en la medida en que se le brinda al estudiante el espacio para argumentar a partir de lo que sabe y desde sus concepciones, de modo que encuentre, en la discusión en clase, las herramientas que le permitan madurar sus esquemas personales sobre la demostración. Además, el énfasis en la demostración no es precisamente que todos los estudiantes sean capaces de construir demostraciones deductivas formales al finalizar su etapa escolar. Más bien, lo que se busca es que cada estudiante entienda la estructura lógica subyacente a las proposiciones y teoremas matemáticos y pueda usar esto para estructurar sus argumentos, así como para evaluar argumentos de sus pares y de otros en diferentes contextos.

Ahora bien, cuando se habla del razonamiento y la demostración, se erige la geometría euclidiana como la rama de las matemáticas que favorece el desarrollo de dichos procesos por excelencia. De acuerdo con lo que se menciona en los EBC, la geometría euclidiana constituye un punto de encuentro entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto; y entre los objetivos de su estudio debe figurar la comprensión, justificación y deducción de algunas demostraciones

(como el teorema de Pitágoras, teorema de Thales, etc.). La componente perceptiva de los objetos geométricos permite que se lleven a cabo procesos de visualización que se van complejizando hasta articularse con el sistema teórico de la geometría.

Los temas de geometría se incluyen en la escuela a la luz del pensamiento geométrico, que en los documentos oficiales está sustentado en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos y, más adelante, en el pensamiento métrico y los sistemas de medidas. A modo de ejemplo encontramos que en los primeros niveles educativos se espera que los estudiantes tengan un acercamiento cualitativo a los objetos de su entorno, que observen características como la curvatura, los bordes, los vértices, los lados; que distingan entre cuerpos sólidos y cuerpos huecos, cuerpos limitados e ilimitados, etc. Más adelante, con el avance del pensamiento métrico, estudiaran nuevas propiedades y relaciones, como el perímetro, el área y el volumen de figuras planas. Podría decirse que el pensamiento geométrico se complejiza en la medida en que el pensamiento espacial y el pensamiento métrico se coordinan para dar lugar al estudio cuantitativo del espacio, de las propiedades de los objetos geométricos y de las relaciones entre ellos.

Pasamos ahora a describir la forma en que se distribuyen los contenidos relacionados con el pensamiento geométrico y la demostración en el currículo colombiano, dicho panorama es presentado de acuerdo con lo indicado en los EBC y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN [DBA], 2016).

### **Grados 1°, 2° y 3°**

En los grados de primero a tercero el pensamiento geométrico está vinculado a la relación espacial que tiene el niño con los objetos físicos que le rodean. Se comienza trabajando con los primeros niveles de visualización, esto es, la clasificación de los objetos concretos a partir de características geométricas básicas (curvo, recto, plano, número de lados, número de caras, etc.).

También se introducen las nociones de verticalidad, horizontalidad, perpendicularidad y paralelismo, de tal suerte que las pueda usar para describir trayectorias y posiciones y para dar indicaciones espaciales a un interlocutor. Se exploran las relaciones entre el perímetro y el área de figuras planas y se proponen situaciones problema en donde debe explicar, por ejemplo, cómo dos figuras de distinta área pueden tener el mismo perímetro. Por último, se fomenta el reconocimiento de la congruencia y la semejanza entre figuras con la idea de reducir o ampliar la figura. La argumentación y formulación de conjeturas están más enfocadas a la discusión de la pertinencia de algunas operaciones aritméticas en situaciones problema y a la predicción de los números que continúan una secuencia numérica dada.

#### **Grados 4° y 5°**

En los grados cuarto y quinto se incorpora el plano cartesiano como una herramienta para dar ubicaciones precisas y para localizar puntos a partir de sus coordenadas cartesianas (par ordenado), igualmente se incluyen las transformaciones geométricas en el plano (rotación, traslación, reflexión) y se introducen los conceptos de ángulo, vértice, etc. En los EBC se estipula el estándar “Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano” (MEN, 2006, p. 82). Donde se promocionan los procesos de visualización más avanzados y la formulación de conjeturas y la exploración geométrica como aspectos importantes para desarrollar el pensamiento geométrico.

Es importante mencionar que en estos niveles se pone el acento en los números racionales (fraccionarios) de manera que al finalizar estos grados los estudiantes sean capaces de compararlos y ordenarlos, transitar hacia sus representaciones decimales y comprender sus distintos significados. Del tratamiento con números racionales adquiere un lugar especial el pensamiento métrico. Se hace mayor énfasis en los procesos de medición de atributos (masa, área, volumen,

peso, densidad, etc.) de objetos físicos. Se centra la atención en las relaciones métricas de las propiedades ya conocidas de los objetos geométricos de dos y tres dimensiones. Por tanto, se complejiza el razonamiento al involucrar los aspectos cuantitativos de las figuras geométricas.

El trabajo con la proporcionalidad directa e inversa también tiene lugar en estos grados y se utiliza en la resolución de problemas en diferentes contextos, entre ellos los geométricos. Respecto a estos últimos se establece el estándar: “Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza de figuras” (MEN, 2006, p. 82).

### **Grados 6° y 7°**

Para los grados sexto y séptimo se sigue el estudio de los números racionales con la exploración de algoritmos propios para hacer operaciones y su empleo en la resolución de problemas. En cuanto al pensamiento geométrico, se comprende la visualización con objetos tridimensionales. Se espera que, al terminar este periodo, los estudiantes puedan descomponer objetos tridimensionales desde diferentes vistas, incluso que reconozcan un objeto en tres dimensiones al que se le han aplicado rotaciones, traslaciones y reflexiones. Estas transformaciones también son usadas para establecer y justificar la semejanza de dos figuras planas. Asimismo, se incorpora la clasificación de polígonos atendiendo a sus propiedades principales y la construcción de figuras planas con unas medidas determinadas. En dichas construcciones se deben emplear herramientas como la regla, el compás o el software, de acuerdo como lo proponen los DBA.

### **Grados 8° y 9°**

Si bien en los niveles anteriores encontramos un espacio para el desarrollo del razonamiento y las habilidades demostrativas enfocado principalmente hacia las demostraciones empíricas, en los grados octavo y noveno tendremos un acercamiento al sistema teórico de la

geometría, al integrar teoremas para establecer los hechos geométricos: el Teorema de Pitágoras, el Teorema de Thales y los criterios de congruencia y semejanza. En estos grados se amplía la base numérica con el estudio de los números reales y se espera que los estudiantes apelen a argumentos geométricos para construir algunos números irracionales y ubicarlos en la recta. Asimismo, el desarrollo del álgebra tiene un papel central en las matemáticas de esta etapa y, en consecuencia, se incluye el lenguaje algebraico para describir las características de las figuras geométricas como el perímetro, el área y el volumen; así como para formular y probar conjeturas en diversas situaciones o contextos. Al finalizar el noveno grado, los estudiantes están en condición de elaborar y redactar argumentos basándose en teoremas y propiedades conocidas para justificar sus estrategias en la resolución de problemas. Esto muestra una articulación de los aspectos formales de la geometría en su actividad matemática y requiere de un pensamiento geométrico más avanzado.

### **Grados 10° y 11°**

La matemática que se ve en los grados décimo y undécimo está encaminada al estudio de los conceptos básicos del cálculo y en los núcleos conceptuales de la variación y el cambio. Por tal razón, la modelación adquiere un lugar central en currículo y la geometría se reconoce como una herramienta de especial utilidad en la construcción de modelos. Al respecto se presenta el estándar: “Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias” (MEN, 2006, p. 88).

De la misma manera, respecto a los contenidos de geometría, se introducen las razones trigonométricas, los teoremas del seno y del coseno y, más adelante, las funciones trigonométricas. Se agregan nuevos objetos como las secciones cónicas, definidas a partir de su expresión algebraica; del estudio de otras funciones se añaden nuevas curvas (polinomiales, racionales, etc.),

entendidas como el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen unas condiciones determinadas (por ejemplo, una ecuación algebraica).

Por otro lado, se advierte un menor énfasis en los procesos de argumentación en geometría con respecto al nivel anterior y en cambio se presta más atención a la exploración y argumentación en procesos involucrados con el límite y la derivada; procesos de aproximación sucesiva y el pensamiento variacional en general.

Como vemos, la geometría se desarrolla en el currículo escolar desde los primeros niveles y atiende a algunas temáticas principales; por ejemplo, se encuentra que los estudiantes al terminar la etapa escolar deben estar familiarizados con conceptos básicos relacionados con figuras, como el perímetro, el área, también están en condiciones de identificar algunas líneas notables de los triángulos, como las alturas, las medianas, etc. También distinguen las relaciones entre rectas (perpendicularidad y paralelismo) y entre figuras (congruencia, semejanza), aspectos que han trabajado en distintos niveles de particularidad. Por otra parte, las herramientas con las que hacen geometría no se limitan a las de la geometría euclidiana (regla y compás) sino que se articulan con otras, como el álgebra y el plano cartesiano, el cual se trabaja ya en los grados 4° y 5°. En el plano cartesiano, además estudian las transformaciones de figuras, como la rotación, traslación y reflexión, y las usan en la modelación de fenómenos.

Respecto a la demostración, al terminar undécimo grado el estudiante ha desarrollado habilidades y estrategias de exploración geométrica (realizar construcciones auxiliares, suponer el problema resuelto, etc.) de modo que puede establecer conjeturas y elaborar argumentos estructurados en los cuales involucren propiedades conocidas y de esta manera deduce nuevos hechos geométricos articulándolos a sus conocimientos. Por último, se resalta una madurez en la

comunicación, el estudiante puede expresar sus ideas matemáticas de forma clara ya sea de forma verbal o escrita.

### ***3.2.4 Estructura analítica de los tipos de demostración***

Para analizar las demostraciones que realizan los estudiantes consideramos la estructura analítica propuesta por Marrades y Gutiérrez (2000), la cual es retomada y actualizada por Fiallo (2011). Dicha estructura permite organizar y analizar las respuestas de los estudiantes a problemas que involucran la formulación de conjeturas o la producción de una demostración de acuerdo con el uso de elementos de convicción y la generalidad de los argumentos.

Se distinguen dos categorías iniciales: demostraciones empíricas y demostraciones deductivas. Por una parte, las demostraciones empíricas se caracterizan por el uso de ejemplos como principal (no único) elemento de convicción y el argumento se basa en la comprobación para dichos ejemplos (Fiallo y Gutiérrez, 2009). El estudiante toma uno o varios ejemplos y comprueba que se cumple la conjetura o el teorema a demostrar. En las demostraciones deductivas, en cambio, el estudiante construye el argumento basándose en los aspectos genéricos del problema, en operaciones mentales sobre los objetos matemáticos y en la obtención de enunciados mediante deducciones lógicas, apelando a axiomas, teoremas, definiciones o propiedades conocidas (validadas). El ejemplo puede aparecer en las demostraciones deductivas, pero sólo cumple la función de ayudar a organizar el argumento, no a establecer su validez.

De acuerdo con Balacheff (como se citó en Fiallo, 2011), pasar de las demostraciones empíricas a las demostraciones deductivas requiere de un cambio fundamental en la forma en que se asume el papel de establecer la validez de una afirmación. Ya no será suficiente verificar la veracidad de un teorema para para algunos casos, es necesario encontrar argumentos aplicables a

todos los casos posibles. Este es un proceso complejo y difícil en donde el estudiante cambia sus esquemas personales de demostración.

La selección de ejemplos en las demostraciones empíricas se puede realizar de tres formas distintas, cada una de las cuales configura una clase de demostraciones a las que se inscriben diferentes tipos de demostración:

1. *Empirismo Ingenuo*: Cuando la demostración se basa en la comprobación para unos ejemplos tomados al azar. El empirismo ingenuo puede ser de tipo:

1.1. *Perceptivo*; en cuyo caso se realiza una comprobación visual o táctil; o

1.2. *Inductivo*, si la conjetura o la prueba se obtiene verificando matemáticamente para uno o varios casos.

2. *Experimento crucial*: Cuando se escoge cuidadosamente un ejemplo específico con la intención de generalizar las conclusiones (aunque no sea representativo de su clase), y la justificación se basa en que la comprobación sobre dicho ejemplo. En ese sentido, se trata de escoger un ejemplo no muy particular, se verifica y se extrapolan los resultados para los demás casos. En el experimento crucial se identifican algunos tipos de demostraciones que Fiallo (2011) sintetiza en:

2.1. *Experimento crucial basado en el ejemplo*: el argumento se basa únicamente en los datos del ejemplo seleccionado.

2.2. *Experimento crucial constructivo*: el argumento se basa en construcciones auxiliares hechas sobre el ejemplo o en el proceso que lleva a la construcción del ejemplo.

Según Marrades y Gutiérrez (2000), uno de los aspectos que diferencian fundamentalmente el experimento crucial del empirismo ingenuo está en el cuidado para seleccionar el ejemplo. En el experimento crucial no se escoge un ejemplo cualquiera, más bien se trata de tomar uno genérico que no parezca muy específico, de esta manera cuando se compruebe la conjetura o teorema, se

podrá suponer válida para los otros casos. Sin embargo, todo el argumento se basa en los datos del ejemplo seleccionado, por lo que sigue siendo una comprobación. En el experimento crucial el estudiante toma una postura más sensible a la hora de generalizar los resultados de su ejemplo al total de los casos.

3. *Ejemplo genérico*: Cuando se toma un ejemplo específico que tiene las características representativas de su clase y el argumento incluye razonamientos abstractos y propiedades generales, válidas para la clase, pero sigue ligado al ejemplo concreto. Se diferencian dos tipos:

3.1. *Ejemplo genérico analítico*: Si el argumento se basa en propiedades observadas en el ejemplo.

3.2. *Ejemplo genérico intelectual*: Si en el argumento se utilizan propiedades ya conocidas (y por lo tanto validadas).

En los dos tipos de ejemplo genérico se hace referencia a propiedades o relaciones que se obtienen de distinta forma. En el primer caso, son observadas *in situ* por el estudiante, luego tienen un estatus de conjetura; en el segundo caso, son propiedades matemáticas recordadas, que se tienen como válidas, por lo que su estatus es teórico. Vemos una forma de proceder similar al trabajo involucrado en el desarrollo de un sistema axiomático.

En el ejemplo genérico, a diferencia del experimento crucial, el ejemplo seleccionado sí es un representante de la clase de ejemplos que pueden existir dadas las condiciones del problema y los argumentos utilizados no se restringen a la comprobación en el ejemplo, sino que involucran propiedades generales y elementos abstractos de la clase. Por tanto, el producto es una demostración mucho más próxima a las demostraciones deductivas.

Para Balacheff (2019) el paso del empirismo ingenuo al ejemplo genérico constituye un cambio importante y necesario en la evolución hacia las pruebas deductivas, dado que muestra el paso de las evidencias pragmáticas a las intelectuales. El problema de la demostración supera su

condición pragmática para verse como un problema teórico, evidenciando la movilización de los conocimientos en el estudiante. Ya no se busca mostrar como verdadera la conjetura (o teorema), sino en establecer su carácter necesario de validez. Esto se hace referenciando propiedades conocidas, teoremas, etc. que se van encadenando en una secuencia que toma la forma de una demostración deductiva.

Respecto a las demostraciones deductivas, estas son caracterizadas por la generalidad del argumento, el cual no depende de un ejemplo específico y se construyen mediante operaciones mentales y deducciones lógicas (Fiallo y Gutiérrez, 2009). Se articulan dos clases de demostraciones dependiendo de cómo se usan ejemplos para organizar los argumentos o no:

1. *Experimento mental*: Cuando la demostración se organiza mediante un ejemplo, pero los argumentos se basan en aspectos genéricos del problema, deducciones lógicas y operaciones mentales. Se definen dos tipos según sea el estilo de deducción realizado para organizar la justificación:

1.1. *Experimento mental transformativo*: Cuando en la demostración se transforma el problema inicial en otro equivalente mediante operaciones mentales. En este caso, los ejemplos ayudarán a ver los efectos de las transformaciones para determinar las que son convenientes.

1.2. *Experimento mental estructural*: Cuando la demostración se basa en deducciones lógicas a partir de los datos del problema, haciendo uso de axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados (o conocidos).

2. *Deducción formal*: Cuando la demostración es deductiva, se basa en los aspectos genéricos del problema y en operaciones mentales sin ayuda de ejemplos.

2.1. *Deducción formal transformativa*: Cuando la demostración es deductiva, el argumento refiere a propiedades matemáticas generales y se transforma el problema en uno equivalente.

2.2. *Deducción formal estructural*: Cuando la demostración consiste en una cadena de deducciones lógicas apoyadas en los datos del problema, los axiomas, teoremas y definiciones.

Como vemos, la deducción formal constituye el tipo de demostración que se realiza actualmente en la comunidad matemática especializada. Tal forma de demostrar no es fácil de lograr por parte de los estudiantes, como se ha evidenciado en la literatura al respecto. Se requiere inicialmente de un cambio en la postura como se asumen los enunciados matemáticos y en las formas de validarlo, además de cierta madurez cognitiva.

Por último, se considera una última categoría de *demostraciones fallidas*, en donde tienen lugar aquellos intentos de demostración que no resultaron exitosos.

Si bien, esta estructura analítica se organiza teniendo en cuenta que cada demostración se puede clasificar en alguno de los tipos, es importante aclarar, como lo hacen Marrades y Gutiérrez (2000), que en un mismo proceso de demostración se pueden manejar distintos tipos. La clasificación en uno u otro tipo se hará de acuerdo con los elementos en los que el estudiante ponga mayor énfasis a fin de convencerse de la veracidad de la proposición o convencer a un interlocutor.

## 4. Metodología

En este apartado se describe la metodología de investigación definida para el abordaje de la problemática de estudio y para dar respuesta a los objetivos propuestos. En ese sentido, se describen y justifican las fases de investigación planteadas para la organización metodológica del trabajo y su contribución a la consecución de los objetivos mencionados.

### 4.1 Fases de investigación

A continuación, se describen y justifican las fases de investigación propuestas:

**Fase 1:** Revisión de la literatura acerca de los tipos de respuesta que presentan los estudiantes a problemas de conjetura y demostración, de las investigaciones sobre el desarrollo del proceso de demostración en el aula y los avances de recientes en el ámbito universitario a nivel global y nacional. Esto con el propósito de responder al objetivo principal concerniente en identificar y analizar los tipos de demostración que se dan en un primer curso de Geometría Euclidiana. De la misma manera, en esta fase se contempla el análisis de los documentos oficiales que organizan el currículo escolar colombiano del área de matemáticas con el fin de determinar los saberes básicos y competencias matemáticas que se espera encontrar en los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad y, con base en esto, diseñar una prueba diagnóstica adaptada a las condiciones de aprendizaje de los estudiantes.

**Fase 2:** Diseño de la prueba diagnóstica para identificar los tipos de demostración que realizan los estudiantes de primer semestre de la Universidad Industrial de Santander al comenzar el curso de Geometría Euclidiana. En esta prueba se observa el estado inicial de los estudiantes antes de adentrarse en el curso y recibir la orientación matemática correspondiente. En ese sentido, el diseño que se elabora en esta fase responde al primer objetivo específico estipulado.

**Fase 3:** Diseño de una prueba para el análisis de las demostraciones que elaboran los estudiantes en un segundo momento del curso, cuando se han familiarizado con la forma de trabajo en clase (uso del software de geometría dinámica Dgpad, el enfoque de resolución de problemas estructurado a partir de la Teoría de las Situaciones Didácticas, etc.) y han experimentado la necesidad de validar con base en una teoría los hechos geométricos y las construcciones. Con esta prueba se busca obtener información de la evolución de los estudiantes en el proceso de demostración. Esta fase refiere directamente al segundo objetivo específico del proyecto.

**Fase 4:** Aplicación de la prueba diagnóstica y análisis de los resultados. Esta fase tiene por finalidad aplicar la prueba diagnóstica diseñada en la fase 2 a un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas para identificar las demostraciones que hacen antes de tomar el curso. Asimismo, involucra la recolección de los datos obtenidos por los diferentes instrumentos de recolección (que se estipulan en el siguiente apartado), la organización de las categorías de análisis y su respectivo análisis. En esta fase se espera responder tanto al objetivo principal como al tercer objetivo específico de la investigación, dando cuenta de los avances de los estudiantes en este primer momento.

**Fase 5:** Aplicación de la segunda prueba y análisis de los resultados. Con miras a establecer el desarrollo de los procesos de prueba en los estudiantes una vez que han tenido una inmersión en el curso y en su modalidad de trabajo, se implementa la prueba elaborada en la tercera fase. Esta fase comprende también la recolección y análisis de los resultados de la demostración, así como la comparación con los resultados del diagnóstico. En ese sentido, se aborda el tercer objetivo específico de esta investigación y el objetivo general, en la medida en que se analizan los tipos de demostración que realizan los estudiantes durante todo el proceso.

**Fase 6:** Análisis de los resultados y obtención de las conclusiones. Se retoman los análisis de las fases 4 y 5 de acuerdo con las categorías de análisis establecidas, se da cuenta de los resultados y de la consecución del objetivo general y los objetivos específicos de la investigación.

#### **4.2 Desarrollo de la experimentación y análisis de datos**

En la presente sección se exponen los criterios de selección de la muestra efectiva, se describe la implementación de cada una de las pruebas que se diseñaron para la recolección de datos y se presenta el análisis de la información de acuerdo con las categorías definidas. Para este

efecto, se tomó cada prueba y se analizaron los cuatro problemas por separado, delimitando en cada caso los criterios con los cuales se clasificaron las respuestas de los estudiantes según los tipos de demostración de Marrades y Gutiérrez (2000). Con esto, se hizo una valoración de toda la prueba observando la distribución de los tipos de demostración en general y en su relación con el problema. Las distribuciones obtenidas en las dos intervenciones se compararon para identificar los aspectos comunes o avances en los dos momentos de aplicación.

#### ***4.2.1 Descripción de la muestra***

La prueba diagnóstica y la segunda prueba se aplicaron en dos cursos. El primer curso estuvo conformado por 24 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y el segundo por 34 estudiantes de Matemáticas; ambos con un rango de edades entre los 17 y 20 años. Cada grupo lo dirigió un profesor distinto y su escogencia se concertó con base en la disponibilidad de los profesores y la facilidad técnica de coordinar los cuatro espacios de experimentación (salas de cómputo), ya que se tomaron las franjas horarias programadas para la clase de Geometría Euclidiana.

Si bien el número de estudiantes que participaron de Licenciatura y Matemáticas es de 22 y 29 respectivamente, fue necesario descartar algunos de los participantes que tenían experiencia previa en la demostración ya que eran repitentes o habían cursado la asignatura en otras instituciones de educación superior. También se retiraron aquellos que asistieron solo a una de las pruebas. Todo esto se determinó para responder coherentemente a los propósitos de estudio y tener una misma muestra en las dos pruebas. Así es que, el análisis que se presenta a continuación toma los datos de 16 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, codificados con el literal L; y 20 estudiantes de Matemáticas codificados con el literal M.

Finalmente, en el momento en que los participantes desarrollaban la prueba se constató que no tenían mayor experiencia con el uso de software de geometría dinámica ni con la metodología de resolución de problemas, aspectos que entrarían en juego en la materia, como lo indica el plan de estudios de la asignatura (Escuela de Matemáticas, 2017).

#### ***4.2.3 Descripción de las categorías de análisis***

Para el análisis de los datos que se recopilaron en los dos grupos por medio de las hojas de respuesta, se utilizaron las categorías, subcategorías y tipos de demostración planteados por Marrades y Gutiérrez (2000) en su estructura analítica. Tal jerarquía permite identificar ampliamente los tipos de demostración que realizan los estudiantes de nuevo ingreso. A continuación, se describen las categorías, sus nomenclaturas y su aporte a los objetivos de esta investigación:

*Demostraciones empíricas y deductivas.* Estas dos clases aportan un panorama general sobre los elementos de convicción a partir de los cuales los estudiantes elaboran sus demostraciones. Tales elementos están estrechamente relacionados con lo que Harel y Sowder (1998) llaman *esquemas personales sobre la demostración*, pudiendo ser de tipo empírico (ejemplos) o deductivo (inferencias lógicas). Así pues, clasificar los datos según cada clase permite reconocer a grandes rasgos el estado inicial con que los estudiantes ingresan al curso. En estas dos categorías entran las demostraciones fallidas, pudiendo ser Demostración Empírica Fallida (EF), Demostración Deductiva Fallida (DF) o simplemente Demostración Fallida (F). Se han considerado EF aquellas demostraciones fallidas donde se apela a un ejemplo como referencia para el intento de demostración, en cambio sí se intenta organizar una deducción con base en

propiedades o relaciones geométricas será DF. Si no se encuentra una coherencia básica, será demostración fallida (F).

*Subclases de las demostraciones empíricas y deductivas.* Conformada por todas las subcategorías que se inscriben en las dos primeras: empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico, experimento mental y deducción formal. Distinguir entre las formas de empirismo o deducción de los estudiantes otorga una mayor comprensión del proceso de demostración que adelantan. Cada subclase de demostración empírica permite observar la sensibilidad del estudiante a la generalización. De igual manera, las distintas formas deductivas revelan una mayor o menor aproximación al trabajo formal de las matemáticas.

*Tipos de demostración.* Apéndice a las subcategorías mencionadas están los tipos de demostración que será con lo que identifiquemos cada uno de los datos obtenidos. Para eso se asignó la siguiente nomenclatura: Empirismo ingenuo inductivo (EII), Empirismo ingenuo perceptivo (EIP), Experimento crucial basado en el ejemplo (ECB), Experimento crucial constructivo (ECC), Ejemplo genérico analítico (EGA), Ejemplo genérico intelectual (EGI), Experimento mental transformativo (EMT), Experimento mental estructural (EME), Deducción formal transformativa (DFT) y Deducción formal estructural (DFE).

### **4.3 Aplicación de la prueba diagnóstica**

La prueba diagnóstica se aplicó en un total de 2 horas a los dos grupos en la segunda semana del período académico 2022-1. El lunes participaron los estudiantes de Licenciatura (22) y el viernes lo hicieron los estudiantes de Matemáticas (29). Antes de iniciar la actividad se asignaron los computadores para cada persona, estos contaban con acceso a GeoGebra y Dgpad que son los programas utilizados en el curso. Se dieron las indicaciones generales (uso permitido del software,

trabajo individual, no dejar ideas sin plasmar, etc.) y una vez entregadas las pruebas junto con su hoja de respuesta, se recalcó que debían elegir tres de los cuatro problemas diseñados.

Por su parte, los estudiantes hicieron algunas preguntas enfocadas a verificar si su respuesta estaba bien, fue necesario aclarar estas dudas ya que algunos solo planteaban un hecho geométrico sin justificación. También surgieron preguntas sobre qué era una conjetura, todas las inquietudes fueron atendidas pertinentemente.

En lo que sigue se abordará el análisis de los datos obtenidos en los cuatro problemas de la prueba por separado. Todo esto enmarcado en un análisis cualitativo y cuantitativo centrado en los referentes teóricos expuestos en apartados anteriores y ejemplificado en las respuestas representativas.

#### ***4.3.1 Análisis del primer problema***

La proporción en que se seleccionó este problema es de 34/36 y su enunciado fue:

*Problema 1: Si se duplican los lados de un triángulo, ¿qué ocurre con su área? Plantee una conjetura y demuéstrela.*

En este problema se dan pocas instrucciones y su exploración es bastante sencilla, lo que se vio reflejado en los resultados. La respuesta correcta es que el área se cuadruplica. Se esperaba que ellos mismos formularan la conjetura, puesto que solo plantearían una demostración genuina si estaban convencidos de ese hecho, como lo dicen Mariotti y Pedemonte (2019). Es cuando la conjetura es propia que se revelan los elementos que al estudiante le parecen más convincentes y esto permite alinearlos con el tipo de demostración que le corresponde.

De igual forma, se reconoce, como lo hacen Marrades y Gutiérrez (2000), que en una misma respuesta se pueden encontrar procesos deductivos y empíricos, y en consecuencia puede

existir una afinidad con varios tipos de demostración. Sin embargo, nuestro trabajo es identificar aquel que tiene mayor presencia en la respuesta. Para ello, es necesario hacer explícitos los criterios con los cuales se clasifican las producciones de los estudiantes teniendo en cuenta las particularidades del problema y del instrumento de recolección de datos (hoja de respuestas).

1. Si la carga de la prueba recae en la medida numérica del área de uno o varios triángulos (tomados sin ningún criterio aparente o triángulos de un mismo tipo) luego de duplicar la longitud de sus lados, sea que el cálculo se haya obtenido directamente del software o utilizando la fórmula del área, se identifica como empirismo ingenuo inductivo (EII). Si se limita a escribir expresiones del tipo “se ve que”, “es casi como” o a hacer ajustes visuales para comprobar que el triángulo original cabe cuatro veces en el duplicado, será un empirismo ingenuo perceptivo (EIP).
2. Si se toman triángulos con medidas concretas, pero existe un cuidado por no tomar triángulos particulares (isósceles, equiláteros, rectángulos, etc.) sino triángulos escalenos o en su justificación explica (sin referencia a resultados generales) que también vale para otros casos, entonces estará en la subcategoría de experimento crucial. La mera experimentación con las medidas de los triángulos configura un experimento crucial basado en el ejemplo (ECB), si refiere a construcciones mediadas por traslaciones, reflexiones, rotaciones u homotecias para encajar el triángulo inicial en el duplicado será un experimento crucial constructivo (ECC).
3. En caso de que tome un triángulo genérico o no, y sobre este realice deducciones generalizadas que sirvan para el total de su clase, la respuesta estará en la subcategoría de ejemplo genérico. Si en tales deducciones hace uso de una fórmula especial, evoca un teorema o deja claro que la justificación de B se obtiene por la premisa A, siendo “A entonces B” un teorema, se tomará como ejemplo genérico intelectual (EGI). En caso de no quedar claro el uso de propiedades conocidas,

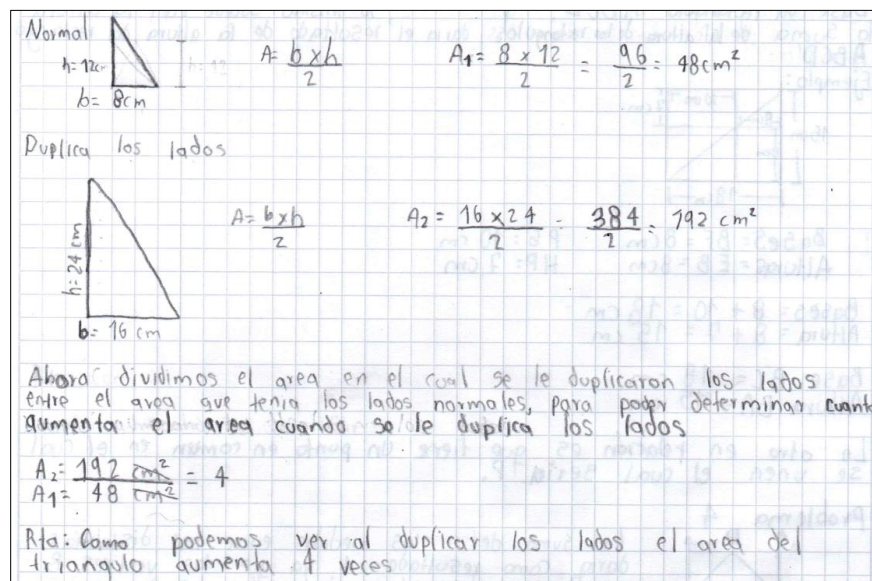
sino mayormente observadas durante el experimento, se corresponderá con un ejemplo genérico analítico (EGA).

Una vez que se delimitaron estos criterios fue posible la asignación de un tipo de demostración con cada una de las 34 respuestas obtenidas. En particular, la simplicidad del enunciado y la sencillez conceptual que involucra se vio reflejada en los datos. Los estudiantes entendieron con bastante claridad qué debían hacer y en su mayoría conjeturaron lo que se esperaba.

Es así como se encontró un total de 13 demostraciones que se corresponden con el primer nivel de demostración empírica: empirismo ingenuo inductivo (EII). Un ejemplo es la respuesta de L10:

**Figura 1.**

*Respuesta de L10 al primer problema de la prueba diagnóstica.*



L10 organiza su demostración seleccionando un triángulo rectángulo al que le asigna las medidas de sus catetos. Luego realiza el cálculo del área utilizando la fórmula. Cuando duplica los lados, solamente se centra en los catetos y repite el procedimiento. Al dividir las áreas del triángulo inicial y el triángulo duplicado obtiene el resultado. La conjetura se hace explícita como el último paso del procedimiento.

En este ejemplo se pueden identificar algunos elementos característicos de las demás respuestas, como la elección del triángulo. En general, hubo una marcada tendencia a tomar únicamente triángulos rectángulos a los que fácilmente se calcula el área utilizando la fórmula. Algunos estudiantes realizaron procedimientos que están tradicionalmente asociados al triángulo rectángulo, como el cálculo de la hipotenusa mediante el Teorema de Pitágoras, etc.

Es importante notar que en ningún caso se tomaron los datos del área directamente del computador, lo que puede indicar que los estudiantes dan un mayor estatus a las demostraciones en donde los datos se han obtenido utilizando fórmulas (Balacheff, 2005). Para los estudiantes el uso de fórmulas conocidas legitima la validez no solo del valor obtenido, sino de la conjetura (en su generalidad), al darle un carácter más matemático a la justificación. Así es que, las demostraciones que se observan en este tipo se aproximan más al cálculo procedimental con valores numéricos, organizadas con el fin de facilitar la lectura del proceso y no en un orden deductivo.

La utilización de fórmulas sirvió como elemento de convicción, de manera que los estudiantes que realizaron estos desarrollos usualmente necesitaron de un único ejemplo. Otros estudiantes tomaron más de un caso o duplicaron dos veces los lados de un mismo triángulo para constatar su conjetura. Fueron pocas las demostraciones que se limitaron a mostrar los valores del área sin ningún procedimiento explícito. Cabe resaltar que en este problema no se determinó

ningún empirismo ingenuo perceptivo (EIP) puesto que se encontraron con facilidad los presaberes para sostener las apreciaciones perceptivas.

**Tabla 1.**

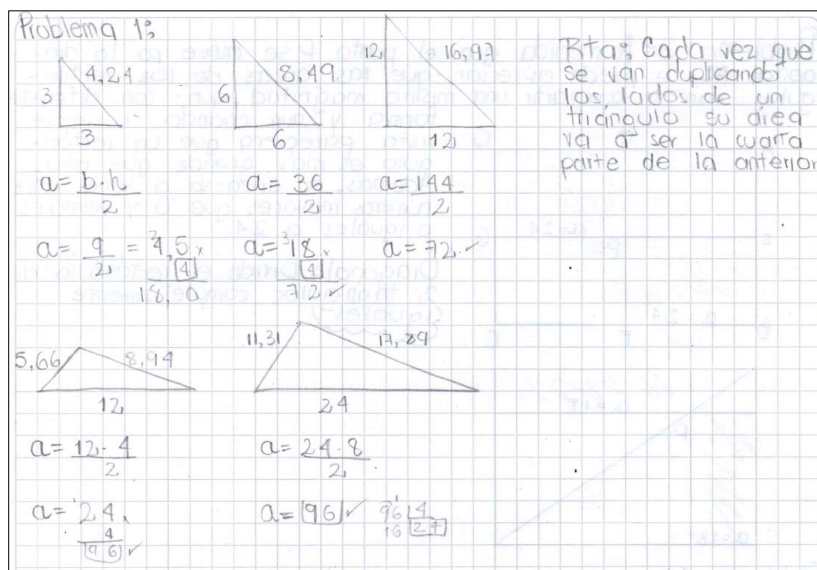
*Resumen esquemático del Empirismo Ingenuo del primer problema*

Respuestas al primer problema	Tipo
L07: al duplicarse los valores de los lados de un triángulo su área aumenta.	EII
L11: Su área se cuadruplica.	EII
L12: Si se duplican los lados del triángulo su área aumenta cuatro veces, ya que al hacerlo con dos ejemplos diferentes su área aumentó cuatro veces.	EII
L13: Si se duplica la medida de los lados, el área de dicho triángulo se cuadruplica.	EII
L15: Si se multiplica los lados por 2 la base, el área se multiplica por 4.	EII
M01: Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo isósceles de 5cm de base y 5cm de altura... Ahora dupliquemos los lados... Aplicamos la fórmula para hallar el área y nos da $A_1 = 12.5$ y $A_2 = 50$ .	EII
M03: $A_1 = 6$ y $A_2 = 24$ , podemos comprobar que al duplicar los lados del triángulo su área se cuadruplica.	EII
M09: Si se duplican los lados del triángulo su área será cuatro veces más grande que la de en un principio. Ejemplo: Área $ABC = 0.5$ , duplicado da 2. Así podemos seguir duplicando y siempre se cumple.	EII
M14: Su área se cuadruplica, en el primer paso sería hallar el área de un triángulo 1, que sería 3 cm y del triángulo 2, que sería 12 cm. Entonces se podría decir que el área del triángulo 1 multiplicada por 4 es igual al triángulo 2.	EII
M16: $A = 3cm^2$ y $B = 12cm^2$ . El área del triángulo se cuadruplica.	EII
M17: Se cuadruplica su área ya que estamos duplicando sus catetos. Ejemplo: $A = 48cm^2$ , $B = 192cm^2$ Y así $48cm^2 \times 4 = 192cm^2$ .	EII
M18: ... Cuando la medida de la base y la altura del triángulo aumenta el doble, su área se cuadruplica como lo muestra el ejemplo.	EII
M20: Su área se cuadruplica ya que el área depende de la medida de la altura y de la base, y a su vez $b$ es un lado y $h$ es formado por sus otros dos lados.	EII

Por otra parte, en la subcategoría de experimento crucial se seleccionaron 5 respuestas. De acuerdo con los criterios definidos se ubicaron 4 en el experimento crucial basado en el ejemplo (ECB) y sólo 1 en el experimento crucial constructivo (ECC). En esta subcategoría se evidencia una selección más cuidadosa del ejemplo, entendiendo que la conjetura se debe cumplir para la totalidad de los triángulos como lo hace L02:

**Figura 2.**

*Ejemplo de experimento crucial basado en el ejemplo del primer problema.*



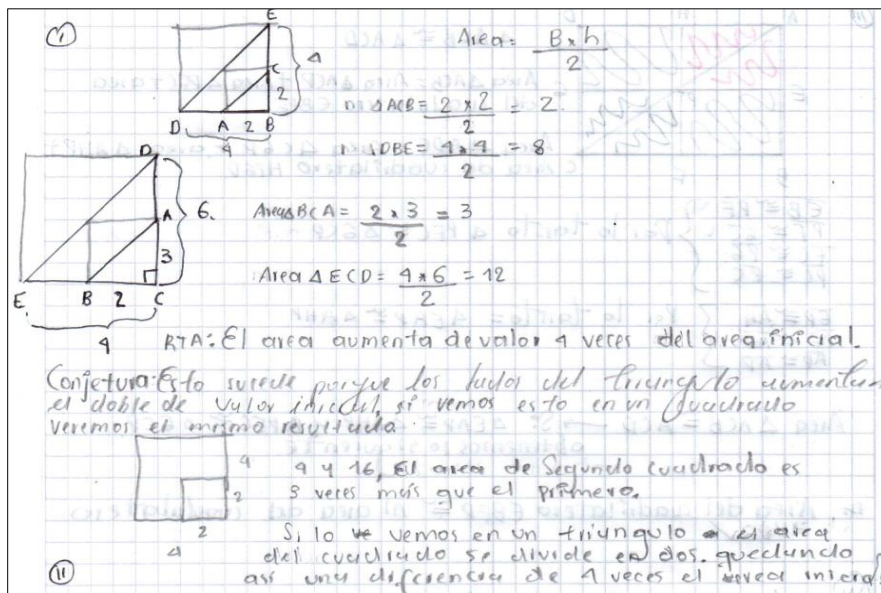
En un inicio L02 propone como ejemplo un triángulo rectángulo isósceles, le aplica la transformación dos veces y constata que el área aumenta el cuádruple. Sin embargo, considera que para los triángulos de dicha clase se agregan condiciones adicionales que no están en otros casos. Así es que, toma un triángulo escaleno con el que presume que probará su observación para los triángulos no rectángulos y constata que se cumple. Para L02 estos ejemplos son representantes de la totalidad de los triángulos, por lo que su conjetura debe ser un invariante.

Es importante notar que L02 observa el hecho geométrico en triángulos rectángulos por aparte y deja ver que la comprobación en un triángulo escaleno no aplica para estos. Esta distinción puede responder a un caso límite, como indica Pedemonte (2002), pues al deformar un triángulo escaleno en un triángulo rectángulo coinciden dos alturas con los lados del triángulo. En ese sentido la comprobación en triángulos escalenos se haría para garantizar la generalización de la propiedad que se observa en el caso límite (triángulo rectángulo).

En contraste con la respuesta de L02, otros estudiantes no hicieron una distinción para triángulos escalenos y solo tomaron triángulos rectángulos. Estas demostraciones se dejaron en el mismo tipo puesto que se evidencia una presuposición de que la conjetura vale para otros casos, como ocurre con L04:

### Figura 3.

*Ejemplo de experimento crucial constructivo del primer problema.*



Aquí se realiza el experimento con triángulos rectángulos, pero dentro de esta clase se distinguen los isósceles y los escalenos por aparte. Luego de hacer el cálculo del área en los dos ejemplos que toma, L04 desarrolla la idea de completar el cuadrado (o rectángulo) asociado al triángulo y se da cuenta de que la observación numérica del área tiene una explicación visual más sencilla si se transforma el problema a los cuadrados. Ahora, escribe su justificación aludiendo a lo que ocurre con los cuadrados, lo que muestra que le da una mayor importancia al registro visual, que puede resultar más claro para mostrar el mecanismo por el cual los triángulos cuadruplican su área. Esta respuesta se aproxima también al ejemplo genérico, pero dado que no referencia a

propiedades o conceptos matemáticos y su generalización recae solamente en elementos empíricos, se dejó como ECB.

Lo anterior ejemplifica un común denominador que se empieza a observar en las producciones de esta subcategoría de experimento crucial y es que los estudiantes buscan que sus demostraciones sean más explicativas. En ese sentido, pretenden mostrar un mecanismo o procedimiento que deje en evidencia por qué se cumple la conjetura, esto será lo que lleve en mayor parte la carga de la prueba. Dichas evidencias no involucran cadenas deductivas ni requieren de referencias a conceptos o fórmulas matemáticas. Según De Villiers (1993), entre las funciones que cumple una demostración está su capacidad explicativa y es precisamente esta la que resulta más significativa para los estudiantes en la medida en que se acercan al proceso demostrativo y van madurando sus concepciones respecto de la prueba.

## Tabla 2.

### *Resumen esquemático de los experimentos cruciales del primer problema.*

Respuestas al primer problema		Tipo
L03: ... Si los lados aumentan, por obvias razones nuestra base y altura también lo hacen... si solo nos dan el valore de los lados ya hay que realizar otro procedimiento... gracias a la fórmula $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ tenderemos el valore del área.		ECB
L04: Esto sucede porque los lados del triángulo aumentan el doble del valor inicial, si vemos esto en un cuadrado veremos el mismo resultado... si lo vemos en un triángulo, el área del cuadrado se divide en dos, quedando así una diferencia de 4 veces el área inicial.		ECB
L09: ...Dado que el área es $\frac{b \times a}{2}$ , entonces cada vez que los lados se duplican, el área aumenta por 4.		ECB
M10: ...Según lo que observamos en la figura de abajo el área se cuadruplica.		ECC

Al igual que en el experimento crucial, en el segmento de ejemplo genérico se encontraron 5 respuestas, 3 son del tipo ejemplo genérico analítico (EGA) y 2 del ejemplo genérico intelectual (EGI). Se observó que quienes quedaron en esta subcategoría fueron los que lograron utilizar la fórmula del área con valores cualesquiera  $h$  y  $b$  y notaron que al reemplazarlos por  $2h$  y  $2b$  se

obtenía un área cuatro veces mayor a la inicial. Aunque en general las demostraciones fueron parecidas a los experimentos cruciales, ya que en 4 ocasiones se tomó la clase de triángulos rectángulos y se tomaron algunos ejemplos particulares, el principal elemento de convicción fue el desarrollo algebraico obtenido para valores genéricos  $2h$  y  $2b$ . Es decir, hay un tránsito de elementos de convicción empíricos hacia otros más formales.

**Tabla 3.**

*Resumen esquemático de los ejemplos genéricos del primer problema.*

Respuestas al primer problema		Tipo
L06: $A = \frac{b \times h}{2}$ ... duplicando los lados $A = 2b \cdot h$ .		EGA
L16: Teniendo un triángulo $A = \frac{xh}{2}$ ... al duplicar queda $A = 2xh$ . Al duplicar los lados de un triángulo su área se multiplica por 4...		EGA
M05: ...concluyo que el área de un triángulo, al duplicar sus lados va a depender del valor de la base y de su altura, que siempre, al duplicar sus lados, va a ser el doble para cualquier triángulo...		EGI
M07: ...ya que duplicamos las longitudes de sus lados solo lograremos en la ecuación una multiplicación por 2 a el valor de las longitudes, en este caso $b$ y $h$ ...		EGI
M12: ...dado un triángulo ABC con área $x$ , sea cual sea su tipo o clase, al duplicarse los lados $2(ABC)$ el área se cuadruplica $A=4x$ ya que esta siempre aumentará el doble de lo que se aumenten sus lados... $A_1 = \frac{1}{2}b \cdot a$ y $A_2 = 2b \cdot a$ .		EGA

Sólo la demostración de L01 clasificó en la categoría deductiva:

**Figura 4.**

*Respuesta formal estructural al primer problema.*

Problema 1. se duplican los lados

$$A_1 = \frac{b \times h}{2} \rightarrow \frac{2b \times 2h}{2} = \frac{4bh}{2} = 2bh$$

$$\frac{2bh}{\frac{bh}{2}} = \frac{2bh}{\frac{bh}{2}} = \frac{4bh}{bh} = 4 \rightarrow \text{Cuando se duplican los lados de un triángulo se cuadruplica su área}$$

Esta producción se dejó como deducción formal estructural (DFE) teniendo en cuenta que no hace referencia a ningún ejemplo, ni siquiera para ordenar la demostración. Se reconoce de todas formas que la demostración está descontextualizada en el sentido en que no deja claro si se pensó para triángulos rectángulos o se saltó el paso deductivo que garantizaría la duplicación de la altura en el triángulo transformado. En tales casos no sería completamente válida, pero se valora que el elemento de convicción recaiga únicamente en aspectos genéricos y se haga uso de conceptos generales ya conocidos.

Nótese que esta demostración también se aproxima a un procedimiento algebraico y, a pesar de su simplicidad, busca ser explicativa. Aunque es la demostración del tipo más avanzado, no hay un manejo proposicional explícito, ni referencias a teoremas; de ahí que se pueda inferir que los estudiantes en este punto han tenido pocos acercamientos al proceso de prueba, lo que constata lo que dice Camargo et al. (2005).

Por último, es importante mencionar el amplio número de producciones fallidas donde 6 fueron intentos empíricos de justificar la conjetura (EF) y 3 fueron conjeturas falsas (F). La principal causa de que las demostraciones fallaran estuvo en el proceso de conjetura. Los estudiantes realizaron conjeturas triviales, imprecisas o que no tenían que ver con el área:

*M06: ... Cada vez que duplicamos los lados de un triángulo cualquiera se cambia notablemente el valor de su área ...*

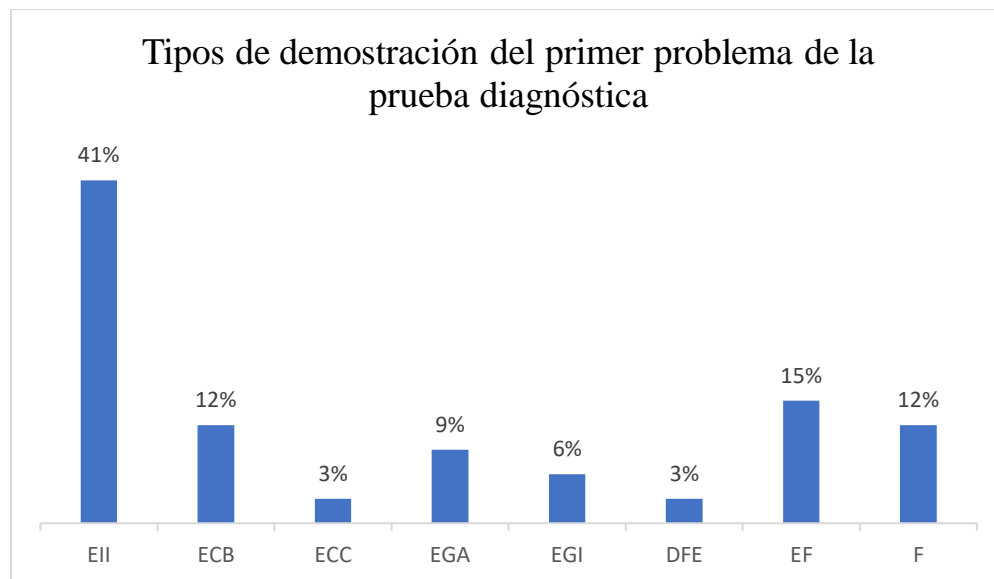
*M08: ... Si duplicamos esos puntos y se formase el mismo triángulo encontraríamos que guarda las mismas longitudes ...*

*L08: Al duplicarse los lados del triángulo su masa también se duplica, sin embargo, sus ángulos siguen siendo exactamente iguales.*

En resumen, los tipos de demostración encontrados en este primer problema son casi todos empíricos. La Figura 5 muestra la cantidad porcentual de respuestas según las categorías de análisis. Como se puede ver, el empirismo ingenuo tuvo una presencia del 41% con el mayor número de apariciones, seguido del experimento crucial con un 15%. Estas dos subcategorías que son los dos niveles más básicos de demostración ya engloban alrededor del 56% de las demostraciones, por lo que los participantes mostraron un desarrollo relativamente escaso de las habilidades demostrativas. El ejemplo genérico tuvo una presencia del 15% y la demostración formal el 3%, siendo la de menor presencia. Por su parte, los intentos fallidos que integran demostraciones empíricas fallidas (EF) y solo fallidas (F) conformaron el 27%.

### Figura 5.

*Balance de los tipos de demostración presentes en el primer problema.*



Es de notar que la subcategoría EI se formó completamente por empirismo ingenuo inductivo (EII), puesto que ninguna demostración se enmarcó en el tipo de empirismo ingenuo

perceptivo (EIP). Esto puede ser consecuencia de que los participantes hayan activado con facilidad sus presaberes (fórmula del área de un triángulo, etc.) y dieran prioridad a estos sobre el registro visual. De hecho, quienes intentaron hacer conjeturas visuales fallaron al conjeturar.

#### ***4.3.2 Análisis del segundo problema***

En total fueron 29/36 estudiantes los que seleccionaron este segundo problema para resolverlo, su enunciado fue el siguiente:

*Problema 2: Dada una recta y un punto  $P$  que no está en ella se realiza el siguiente procedimiento: se toma un punto en la recta y se construye el punto medio del segmento que va de  $P$  a dicho punto. Si se realiza este procedimiento para todos los puntos de la recta ¿qué sucede? Plantee una conjetura y demuéstrelo.*

En el problema se describe la construcción de un punto a partir de dos objetos dados y se deja libre la formulación de la conjetura, se esperaba que vieran que los puntos estaban en una recta paralela a la primera. A diferencia del primer problema, este enunciado requiere de una mayor atención porque tiene más instrucciones para llegar al experimento. También restringe las posibilidades de plantear ejemplos variados, por lo que es necesario dejar en claro los criterios que se usaron para organizar cada una de las demostraciones con las categorías de análisis. A continuación, se presentan los aspectos que se tuvieron en cuenta:

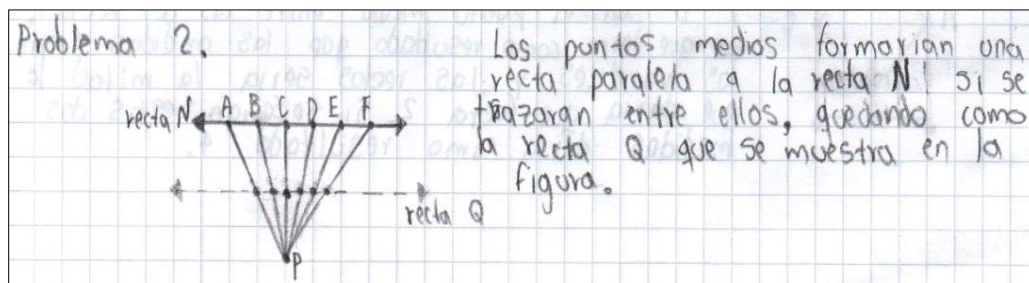
1. Si su justificación consiste en ubicar varios puntos siguiendo la construcción y mostrar que visualmente están alineados paralelamente a la primera recta, se considera ejemplo ingenuo perceptivo (EIP). Si mide algunas distancias (como la de cada punto construido a la recta) y la justificación recae en dichas medidas, se toma como empirismo ingenuo inductivo (EII).

2. Si no presenta una organización deductiva correcta, pero observa nuevos elementos que se relacionan con su conclusión y le asigna la relación causal, se interpreta como experimento crucial basado en el ejemplo (ECB). Si el énfasis está en construcciones auxiliares, será experimento crucial constructivo (ECC).
3. Si realiza una construcción formal del punto, aunque la razón por la que concluye lo esperado sigue siendo visual, será ejemplo genérico analítico (EGA). Si concluye deductivamente alguno de los dos aspectos que involucra la demostración: colinealidad y paralelismo; y hace referencia a teoremas o propiedades conocidas se toma como ejemplo genérico intelectual (EGI).
4. Si hay un argumento general sobre porqué cualquier punto medio estará a la misma distancia de la recta o concluye deductivamente el paralelismo y la colinealidad haciendo referencia a la semejanza de triángulos, o a teoremas conocidos, la demostración estará en la categoría deductiva (DD). Según los criterios generales establecidos se determina el tipo.

Ahora bien, luego implementar los criterios para categorizar los datos, se encontró que el tipo de demostración al que más se subscriben las respuestas es el empirismo ingenuo perceptivo (EIP), con 16 apariciones. Los estudiantes utilizaron en mayor medida elementos visuales y nociones espaciales (arriba, abajo, la mitad, etc.) en sus demostraciones.

### Figura 6.

*Respuesta de L08 al segundo problema.*



Un ejemplo es la producción de L08, quien toma algunos puntos separados a una misma distancia entre sí y ve que parecen estar alineados. De ahí traza con línea punteada la recta sobre la que estarían los demás puntos. La imagen juega un papel central en la demostración, tanto que la justificación escrita es un resumen de la imagen.

**Tabla 4.**

*Resumen esquemático del empirismo ingenuo del segundo problema.*

Respuestas al segundo problema		Tipo
L02:	Si a cada segmento que va desde un punto de la recta a $P$ se le construye su punto medio, nos podemos dar cuenta que a medida que repetimos este proceso se va formando una recta paralela a la inicial.	EIP
L08:	El punto medio de cada uno de los segmentos que van de la recta $A$ al punto $P$ forman una segunda recta.	EIP
L09:	...los puntos medios crean una nueva recta paralela con referencia a la recta $s$ ...	EIP
L10:	...Los puntos medios formarían una recta paralela a la recta $N$ si se trazaran entre ellos, quedando como la recta $Q$ que se muestra en la figura...	EIP
L11:	Se crea una paralela.	EIP
L13:	...Al tomar el punto medio de cada segmento que sale de la recta, se forma una paralela a dicha recta.	EIP
L15:	...Al encontrar el punto medio de los puntos de la recta con $P$ , crea una línea de puntos los cuales son paralelos a la recta.	EIP
L16:	...En caso de realizaron con cada punto de la recta, los puntos medios generarían una recta paralela a la inicial.	EIP
M02:	...lo que sucedería es que al ir trazando tantos puntos medios como podamos... podremos concluir que formara una recta paralela...	EIP
M08:	Si repetimos el proceso con ayuda de los puntos medios formados formaríamos una recta paralela a la recta dada inicialmente.	EIP
M09:	...sucede que los puntos medios que hay entre $P$ y la recta forman una paralela a esta. Esto sucede porque al ser $P$ un punto fijo, todos los segmentos se comportan de igual manera.	EIP
M12:	...mientras se va alejando aumenta el tamaño del segmento, por GeoGebra se ve que el punto medio permanece a la misma distancia de la recta...	EIP
M13:	...Si se arman varios segmentos de la misma forma y se marcaron sus puntos medios, al unirlos estaría formando una recta que sería paralela a la primera que armamos, porque es la mitad independiente de su valor.	EIP
M14:	...sucede que todos los puntos en la recta, al llegar al punto $P$ , va a tener alineado su punto en el centro y se podrá formar una recta paralela.	EIP
M15:	...Se forma una recta paralela a la inicial.	EIP
M19:	...si se repite el proceso... se van a crear infinitos puntos, los cuales al unirlos se forma una recta paralela a la original...	EIP

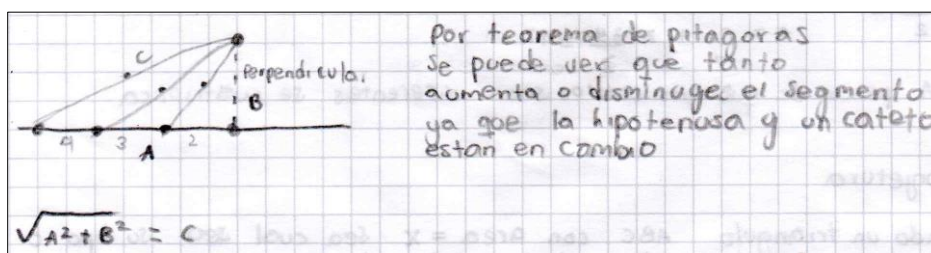
Es importante advertir la uniformidad que hubo entre las respuestas de EIP, casi todas coinciden con lo que escribe L08. En su mayoría los estudiantes se limitaron a dibujar varios puntos y trazar la recta formada, lo que señala una fuerte convicción en la imagen. El hecho

geométrico tiene una evidencia visual tan contundente que a los estudiantes se les dificulta demostrarlo. Una explicación a esto es lo que dice Mariotti (2000), quien expone que, cuando las propiedades son tan evidentes, es más difícil que el estudiante vea la necesidad de establecer su validez agregando razones que pueden ser menos explicativas que la imagen. Por esto último, las producciones suelen ser más sencillas y contener menos explicaciones, como sucedió.

Las conjeturas de los estudiantes solo mencionan que los puntos forman una recta paralela, pero no profundizan su análisis proponiendo objetos de referencia para determinar cuál recta es. Por ejemplo, el trazo del punto medio entre P y la recta dada o el segmento asociado a este funcionarían como referencias para evocar elementos teóricos como la semejanza de triángulos, etc. Los estudiantes no enriquecen el dibujo y en sus intentos por hacer que sus argumentos involucren fórmulas y cálculos, realizan pasos que no aportan nada a la demostración. Como M12 que, luego de hacer algo similar a L08 intenta hacer trazos auxiliares para aplicar el Teorema de Pitágoras:

### Figura 7.

*Respuesta de L10 al segundo problema.*



Esto también muestra poco desarrollo en el razonamiento visual, que de acuerdo con Samper et al. (2001), involucra la deducción de aspectos matemáticos del dibujo, y en esto se diferencia de la sola visualización. Aquí se encuentra algo crucial que los estudiantes deben

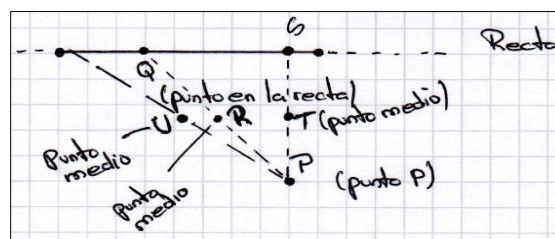
fortalecer para acceder a demostraciones más avanzadas, pues como se examinó, las demostraciones de empirismo ingenuo perceptivo están asociadas a bajos niveles de razonamiento. Por consiguiente, una propuesta que busque acercar a los estudiantes a la demostración deberá promover este tipo de razonamiento.

Respecto a otros tipos de demostración se encuentran 2 demostraciones de tipo experimento crucial basado en el ejemplo (ECB) y 2 de ejemplo analítico. En el ECB los estudiantes hallaron relaciones emergentes las cuales dieron por hecho que se cumplían y aprovecharon para deducir de ahí el paralelismo de las rectas, como:

*M11: Todos los puntos medios de la recta con el punto P van a ser paralelos a la recta inicial, es decir, los puntos medios formarían otra recta paralela a la recta inicial y al punto P. Recta paralela porque no tiene ningún punto en común, son equidistantes entre sí, mantienen la misma distancia, tienen la misma inclinación recta 1 = recta 2.*

### Figura 8.

*Dibujo de M11 con el que acompaña su demostración.*



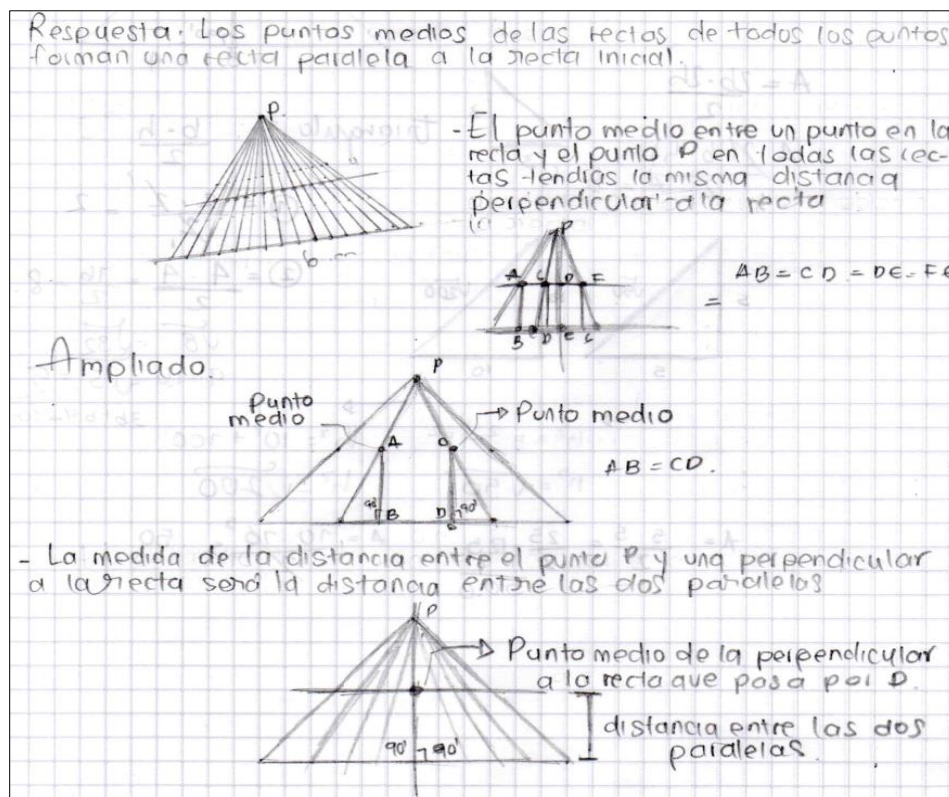
En sus argumentos da por hecho que los puntos yacen en una recta, pero identifica que esto no implica el paralelismo. Necesita un permiso que le garantice concluirlo. Para ello trata de inducir a la conclusión agregando que las rectas no tienen ningún punto en común, que los puntos mantienen la misma distancia (entre P y la recta, pero esto no es correcto) y que las rectas tienen

igual inclinación. Todas estas razones oscilan entre lo que ya está dado (la equidistancia de cada punto medio con los extremos del segmento) y lo que se quiere concluir (las rectas no se cortan). Es más bien un cúmulo de observaciones que relacionadas explican algo de lo que el estudiante ya está convencido.

Quienes quedaron en el ejemplo genérico sí hicieron explícito un criterio mediante el cual se puede concluir la colinealidad y el paralelismo. Se puede ver en la Figura 9 que M01 plantea que los puntos dibujados están a una distancia fija de la recta. Este criterio sería un paso intermedio al que se llegaría en una demostración formal, en cuyo caso habría que conectarlo formalmente con el enunciado y con la conclusión, empero M01 garantiza esta conexión por el registro visual.

**Figura 9.**

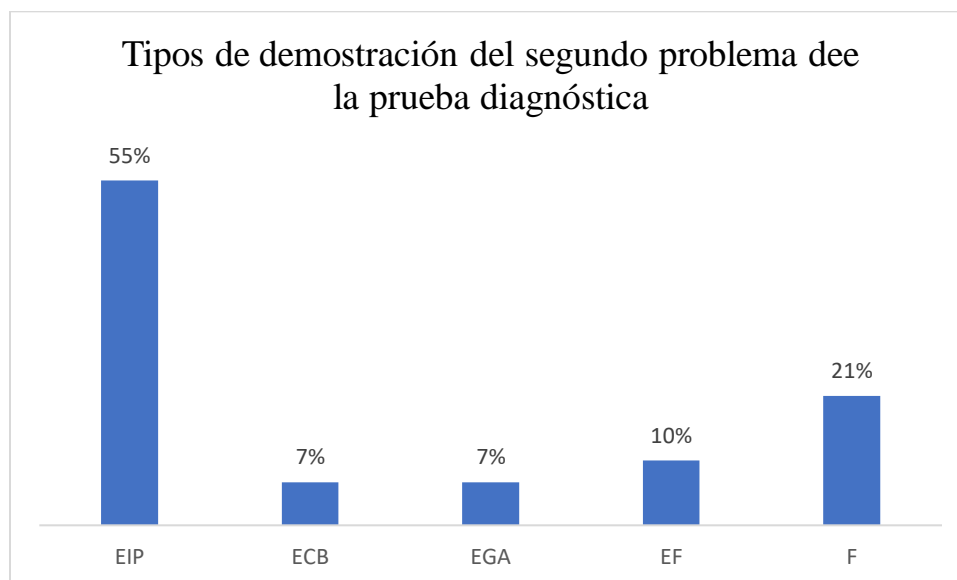
*Demostración de M01 al segundo problema.*



Así pues, este problema permitió observar algunas estrategias que los estudiantes adoptan cuando el problema exige la demostración de aspectos como la colinealidad o el paralelismo. Los estudiantes dieron mayor importancia a la evidencia visual siendo el dibujo el principal elemento de convicción en la mayoría de los casos. Algunos estudiantes que hicieron demostraciones perceptivas (EIP) agregaron condiciones al problema, como la orientación de la recta (vertical, horizontal u oblicua). Hay una marcada inclinación a considerar nociones relacionadas con la orientación (arriba, abajo, etc.). Por otro lado, quienes realizaron una mejor exploración trazando elementos auxiliares progresaron en la tipología y obtuvieron más elementos para relacionar con su conjetura. Es comprensible que no existan referencias a la semejanza de triángulos, ya que esta tradicionalmente podría estar asociada a triángulos de la misma forma, ángulos, etc. y no al paralelismo.

**Figura 10.**

*Balance de los tipos de demostración encontrados en el segundo problema.*



Como se observa en la Figura 10, hubo poca variación del tipo de demostración ya que la tendencia fue el empirismo ingenuo perceptivo (EIP) con el 55%. Esto es importante porque en el problema anterior la totalidad de empirismo ingenuo fue del tipo inductivo (EII), con lo cual hay una clara relación con el tipo de problema. En este caso, no se asociaron cálculos aritméticos a las pruebas. Solo un 14% de los estudiantes enriquecieron su análisis, quedando en los tipos ECB y EGA.

Es relevante el volumen de demostraciones empíricas fallidas (EF) que fue del 21% y solo fallidas (F) con el 10% en las que hubo interpretaciones erróneas de los elementos dados y procesos de conjetura fallidos. Acciones como arrastrar la recta y el punto P, centrar la atención en los triángulos que aparentemente se forman cuando se han dibujado varios segmentos o proponer conjeturas triviales, llevaron a producciones fallidas.

### Tabla 5.

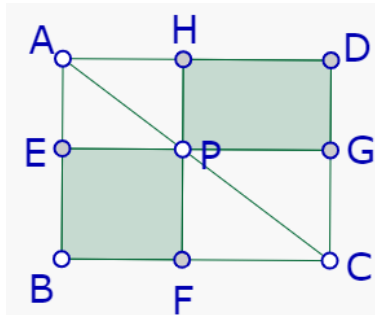
*Resumen esquemático de las respuestas fallidas en el segundo problema.*

Respuestas al segundo problema		Tipo
L03: ...si el punto P se mueve, cualquier segmento entre un punto cualquiera de la recta y este punto P también lo hace...		EF
L04: ...si tomamos la recta AB y el segmento PO con cualquier otro segmento diferente y este, se obtiene un triángulo rectángulo...		EF
L05: ...se forma una figura triangular...		F
L07: ...No se podría tomar todos los puntos de la recta ya que la misma no tiene inicio o fin... se irá formando un triángulo isósceles o escaleno...		F
M05: ...demostrar que todos los puntos medios se ubican sobre una paralela...		F
M07: ...se tendrá una sucesión de puntos muy cercana para construir una recta, pero como no están alineados, no se puede lograr...		EF
M16: ...el punto medio de P a la recta va a ser diferente para cada segmento...		F
M17: ...si un segmento no es perpendicular tiene diferente distancia, pero tienen sus mismos ángulos...		F
M20: Todos los puntos al conectar en el punto P estarán cortados en cierto punto el cual serían la mitad del segmento...		F

### 4.3.3 Análisis del tercer problema

Un total de 24/36 estudiantes abordaron el tercer problema de la prueba diagnóstica cuyo enunciado es:

*Problema 3: Sea  $ABCD$  un rectángulo cualquiera, se toma un punto  $P$  en la diagonal  $AC$  y se realiza la construcción que se muestra en la imagen:*



*¿Qué relación encuentra entre las áreas de los rectángulos  $EBFP$  y  $GDHP$ ? Plantee una conjetura y demuéstreala.*

En este problema los estudiantes debían ser más analíticos para formular una conjetura correcta, ya que no es inmediato notar que las dos áreas sombreadas son iguales. Este fue el único problema en el que se anexó una imagen para simplificar las instrucciones, aun así, los estudiantes realizaron su propio dibujo o hicieron una simulación en GeoGebra. Los puntos que se concretaron para la clasificación fueron los siguientes:

1. Si la demostración se sustenta en la comparación de las medidas del área para una o más ubicaciones del punto  $P$  sin ningún criterio evidente, se tomará como empirismo ingenuo inductivo (EII). Si pone el punto  $P$  en un lugar de la diagonal donde se vea que un área es claramente mayor que la otra o son iguales, será de tipo perceptivo (EIP).
2. Se asignará al experimento crucial basado en el ejemplo (ECB) si muestra que la igualdad también vale en algunos casos límite, como cuando  $P$  se acerca a los extremos de la diagonal. Si hace construcciones auxiliares para apoyar su conjetura será constructiva (ECC).

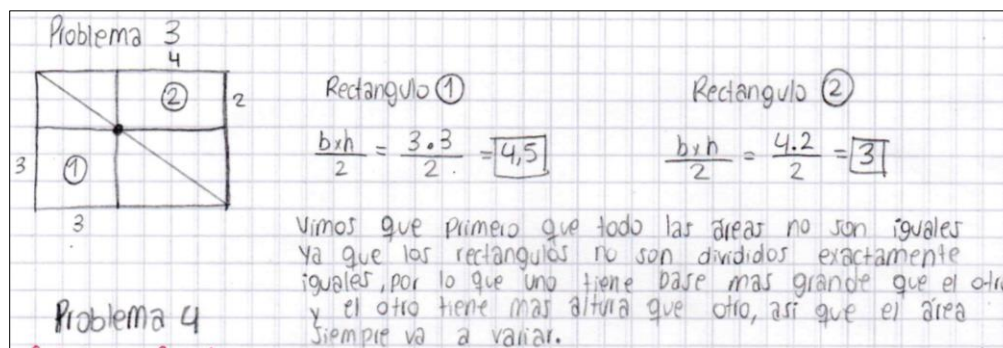
3. Si observa que algo se cumple de lo cual puede deducir la igualdad, pero esta observación es meramente subjetiva o nota que las áreas son iguales porque descompone la figura en triángulos que tienen la misma área, será un experimento genérico analítico (EGA). Intelectual (EGI) si en la justificación de este hecho hace alusión a algunos elementos teóricos.

Con todo esto, los resultados muestran que la amplia mayoría de las demostraciones son fallidas. De un total de 24 respuestas, solo 5 fueron de empirismo ingenuo inductivo (EII), 2 fueron experimentos cruciales basados en el ejemplo (ECB), 1 de ejemplo genérico analítico (EGA) y 1 de experimento mental estructural (EME). De los 15 restantes, 9 son empíricas fallidas (EF), 4 fallidas (F) y solo 1 intento deductivo fallido (DF).

Como se mencionó inicialmente, la relación de igualdad entre las áreas no resulta trivial. Por la disposición de la imagen, podría pensarse que el rectángulo con vértice en B es de mayor área. En general las estrategias se basaron en asumir visualmente que un área es mayor que la otra o en asignar medidas a los lados y calcular las áreas. Quienes usaron la primera estrategia directamente se equivocaron. Entre los que optaron por la segunda, algunos simplemente utilizaron la herramienta *área* que brinda GeoGebra y zanjaron cualquier duda, los demás incluyeron el procedimiento para la obtención del área. De aquí se obtuvo un total de 5 demostraciones de tipo EII. Por otra parte, una porción mayor encontró que el valor numérico de las áreas no coincidía. La razón es que sus dibujos son imposibles, por ejemplo, para L14:

**Figura 11.**

*Respuesta de L14 al tercer problema.*



Realiza su propio dibujo y le asigna medidas según los cuadrados de la hoja, así pretende que sus medidas sean precisas. Calcula las áreas y encuentra que son distintas. En el proceso comete varios errores, pero, en cualquier caso, seguiría dando distinto. Con este resultado, acomoda su explicación aludiendo a la discrepancia de la base y la altura de los rectángulos lo que haría poco plausible que dieran lo mismo. Sin embargo, no advierte que su dibujo no conserva las proporciones internas de la construcción.

Es interesante observar que L14, y en general quienes produjeron demostraciones empíricas similares, no dudan del resultado ni del dibujo. La contundencia de los valores que arroja el cálculo los convence de que es así, sin detenerse en mirar otras posibilidades, como las condiciones del experimento geométrico. El problema que se infiere aquí es que los estudiantes no distinguen entre una figura geométrica y su dibujo, y por lo tanto no se preocupan por las propiedades que acompañan los objetos geométricos, ni de su construcción. Este es un aspecto de la visualización al que se deberá prestar especial atención ya que es una falencia ampliamente compartida y que “es una de las fuentes de inhibición del pensamiento geométrico” (Castiblanco et al, 2004).

Otros estudiantes asumen que el rectángulo con vértice en B es cuadrado y que por lo tanto no puede tener la misma área que el otro, que es un rectángulo. Esto es incluso más problemático pues evidencia que su concepción de estas figuras no se basa en las propiedades. Para L07 la clase de rectángulos no incluye la clase de los cuadrados:

*L07: No se encuentra ninguna relación respecto a sus áreas, ya que son dos figuras geométricas distintas, y el valor de sus áreas también es distinto.*

En general, los resultados de tipo empírico (EII y ECB) y las respuestas fallidas incluyen expresiones perceptivas como “son iguales de grandes”, “tienen diferente forma”, “se compensan”, etc. las cuales permiten ver bajos niveles de visualización y obstáculos que debieron superarse en la etapa escolar, al menos como lo plantean los documentos oficiales.

### Tabla 6.

*Resumen esquemático del empirismo ingenuo en el tercer problema.*

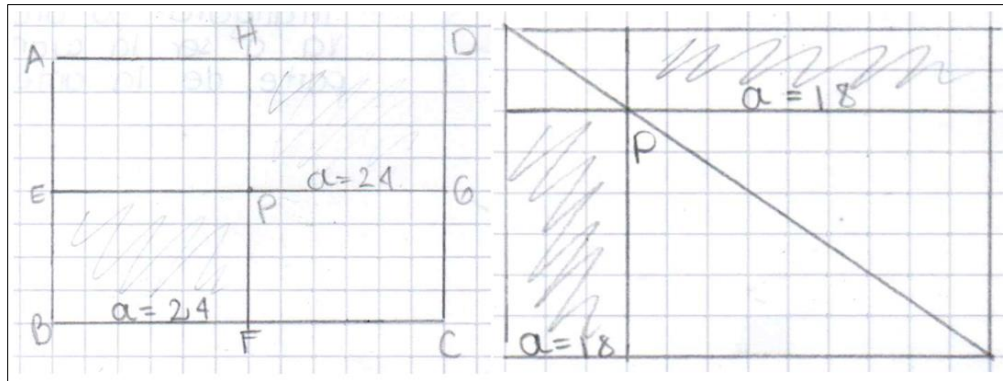
Respuestas al tercer problema		Tipo
L08: ...los rectángulos EBFP y GDHP tienen áreas iguales...		EII
L11: ... <i>Areas</i> = 15, las áreas de los rectángulos son iguales...		EII
L12: ...La relación que encuentro es que su área es la misma, ya que al sacar el área de ambos rectángulos medio el mismo resultado.		EII
L13: El área de los rectángulos es la misma ya que está regida por los triángulos trazados por la diagonal P, ya que dichas medidas lo complementan.		EII
M08: De acuerdo con la imagen dada, el área de los rectángulos EBFP y GDHP es la misma, ya que en una simulación donde los lados EP miden 3 cm y PF 3,5 cm y del otro rectángulo PG mide 7 cm y HP, al sacar sus áreas son congruentes 10,5cm.		EII

Por otra parte, los que realizaron ECB lograron mejorar en su demostración al apoyarse en GeoGebra, donde arrastraron el punto P por la diagonal y notaron algunos casos límite (cuando está en el punto medio o cuando P se aproxima a los extremos de la diagonal). A partir de ahí aportaron observaciones un poco más acertadas:

L02: A medida que el punto  $P$  se mueve por la diagonal  $AC$ , se puede apreciar que las áreas de los rectángulos van a compartir una misma magnitud ...

**Figura 12.**

Dibujo que acompaña la demostración de L02.

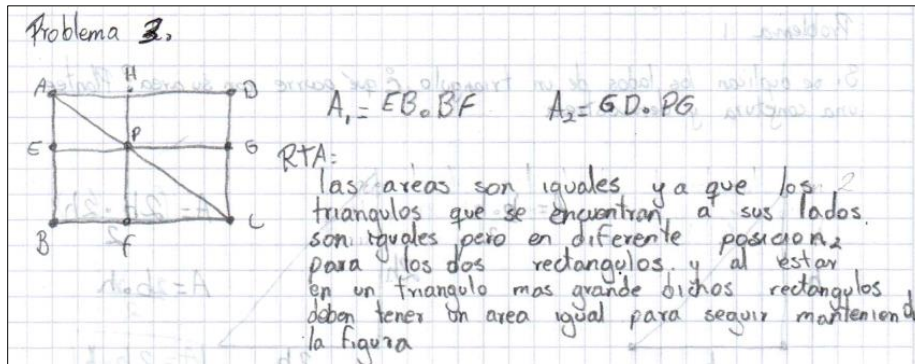


L03: ... si el punto  $P$  lo movemos hacia el punto  $C$ , el segmento  $DG$  del rectángulo  $GDHP$  aumenta y el segmento  $EB$  disminuye, esto también sucede en forma contraria, esto para mantener el equilibrio y hacer que el área de estos rectángulos sea la misma.

Solo dos participantes presentaron respuestas más avanzadas y esto fue porque lograron ver la complementariedad de las figuras, la cual sí implica la igualdad de áreas. L06 queda en EGA puesto que sus razones se basan en lo que ve ahí mismo, sin referencia a propiedades conocidas:

**Figura 13.**

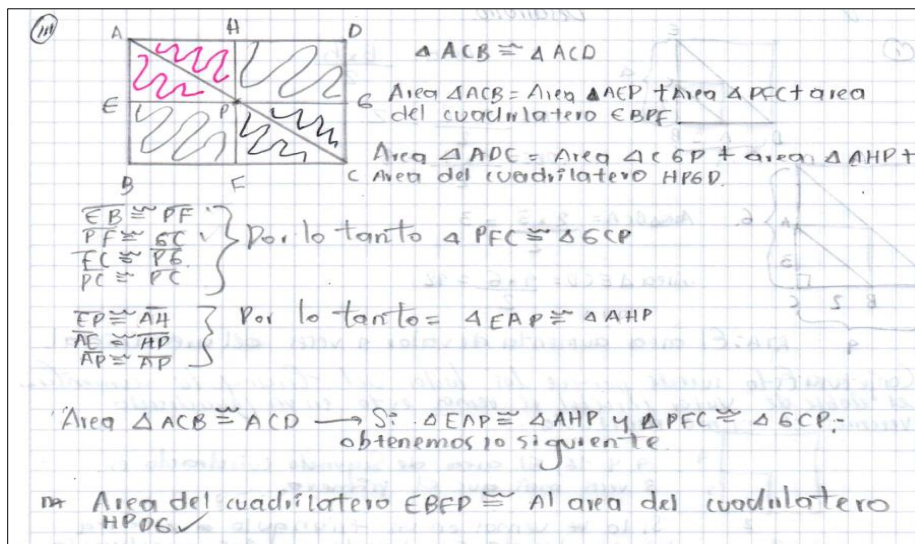
*Demostración de L06 al tercer problema.*



L04 presenta la misma idea, pero utiliza criterios de congruencia (dando por hecho la igualdad de lados) para demostrar la congruencia entre los triángulos correspondientes y por consiguiente obtiene la igualdad de áreas:

**Figura 14.**

*Demostración formal de L04 al tercer problema.*



Esta demostración se catalogó como experimento mental estructural (EME), ya que utiliza el dibujo como soporte para la demostración y trabaja en el mismo problema, es decir, no lo transforma en otro equivalente.

**Tabla 7.**

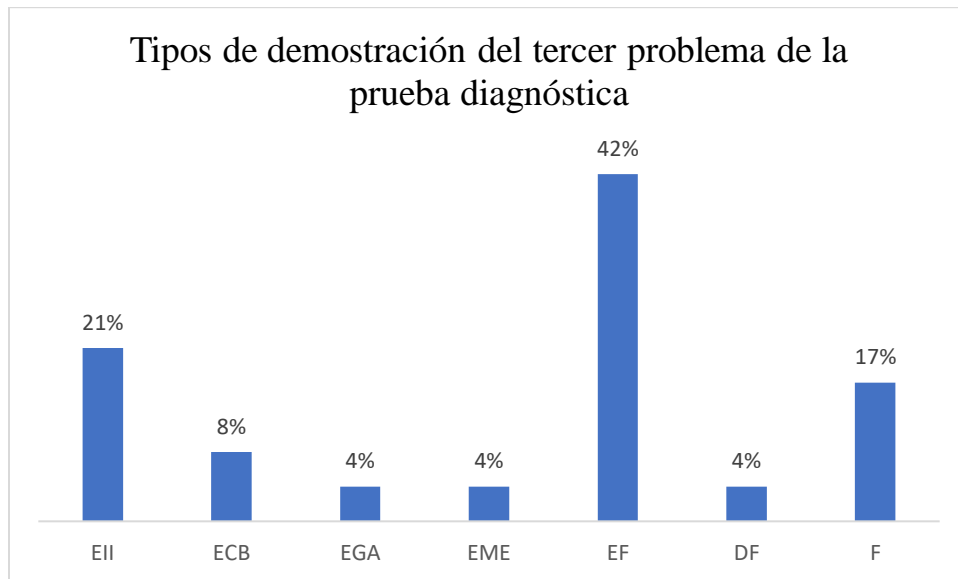
*Resumen esquemático de las respuestas fallidas del tercer problema.*

Respuestas al tercer problema		Tipo
L05: ...Si sumamos las áreas de los rectángulos EBFO y GDHP, son iguales que la suma de AEPH y PFCG. Sin embargo, individualmente no tienen relación directa.		F
L07: ...No se encuentra ninguna relación respecto a sus áreas, ya que son dos figuras geométricas distintas, y el valor de sus áreas también es distinto.		F
L09: ...la relación es que la suma de la base del rectángulo EBFP y EDHP es igual a la base del rectángulo ABCD...		EF
L10: ...la base del rectángulo EBFP y la suma de la base del rectángulo EDHP... da como resultado la base del rectángulo ABCD...		EF
L14: ...las áreas no son iguales ya que los rectángulos no son divididos exactamente iguales, por lo que uno tiene una base más grande que el otro y el otro tiene más altura...		EF
L15: ...La base del rectángulo EBFP más la base del rectángulo GDHP da como resultado la base del triángulo ABCD...		F
M03: ... $BF \cdot EB = A_1$ y $PG \cdot HP = A_2$ ...		DF
M05: El total de ambas áreas es la suma de los triángulos rectángulos formados en cada uno de sus cuadrantes con respecto al punto P...		F
M10: ...Que si trazamos solo una diagonal nos damos cuenta de que se forman triángulos escalenos...		EF
M13: ...Se puede analizar que el área de cada figura es distinta, por lo tanto, no tienen relación...		EF
M15: ...A simple vista nos podemos fijar que no hay relación alguna entre sus áreas.		EF
M16: Las áreas son inversamente proporcionales...		EF
M17: ...La relación entre EBFP y GDHP es que son inversamente proporcionales...		EF
M18: ...No se puede encontrar una relación como tal de sus áreas...		EF
M19: Existe una relación inversamente proporcional...		EF

Finalmente, presentamos la gráfica que resume la proporción en la que apareció cada tipo de demostración, como se indicó al principio del análisis:

**Figura 15.**

*Balance de los tipos de demostración presentes en el tercer problema.*



Nótese que, a comparación con los puntos anteriores, en este problema hubo una alta presencia de demostraciones fallidas, con un 63% de apariciones. Los estudiantes no hicieron una observación más cuidadosa para identificar las relaciones matemáticas y sus consecuencias, en cambio, dieron prioridad al registro visual y quedaron convencidos de que un área era mayor que la otra. Realizaron los dibujos y la asignación de medidas sin ningún cuidado, lo que indica que no han problematizado las construcciones geométricas. Así es que, nuevamente los bajos niveles de visualización restringen las posibilidades de demostraciones, ya no más desarrolladas, si no correctas.

Por otra parte, quienes no se quedaron en los indicios visuales, lograron descomponer la figura o ayudarse de GeoGebra para sustentar la igualdad de las áreas, esto les condujo a conjeturas acertadas y demostraciones de tipo experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental.

#### 4.3.4 Análisis del cuarto problema

El último problema de la prueba diagnóstica decía lo siguiente:

*Problema 4: Un cuadrado ABCD está comprendido entre dos rectas paralelas, la primera pasa por el vértice A y la segunda pasa por el vértice C. La distancia entre las dos rectas es 4. Si se mide la distancia entre el vértice B y la segunda recta, y después se mide la distancia entre el vértice D y la segunda recta. ¿Cuál será la suma de estas medidas?*

Este problema requería un poco más análisis que los anteriores para conseguir una demostración completa. Sin embargo, la conjetura se puede formular al considerar algunos ejemplos particulares en donde es sencillo calcular las distancias que se piden y ver que al sumarlas da 4, que es la distancia entre las rectas. En general, para una distancia cualquiera  $x$ , la suma da este mismo valor  $x$ . A continuación, se muestran los criterios orientadores para clasificar las respuestas:

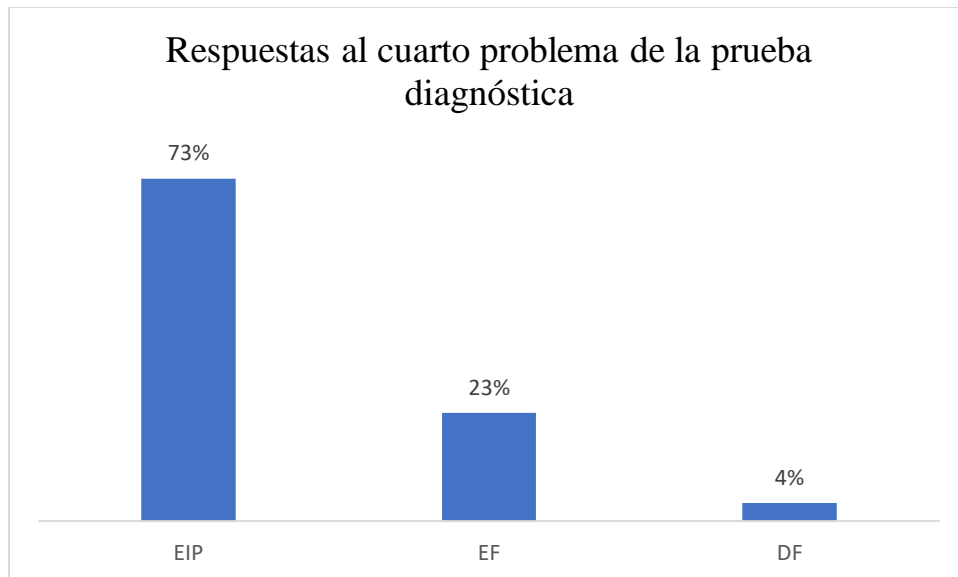
1. Será empirismo ingenuo inductivo (EII) cuando en la demostración agregue medidas auxiliares en el cálculo de las distancias. Si utiliza un ejemplo que le permite medir visualmente, será de tipo perceptivo (EIP).
2. Si en el ejemplo que elige las rectas no están sobre los lados, ni son paralelas a la diagonal del cuadrado, será ECB. Si realiza construcciones auxiliares será constructivo (ECC).
3. Si el argumento es válido para cualquier distancia entre las rectas  $x$ , será un ejemplo genérico.

Aquí no fue necesario detallar cómo se haría la distinción para demostraciones con argumentos más generales o demostraciones mixtas (en las que se evidencian varios tipos) debido a que se observó que la elección del ejemplo limitaba las posibilidades a los tipos más básicos de acuerdo con la estructura analítica. Este problema lo intentaron 26/36 estudiantes del total.

Así es que, solo se encontraron respuestas de tipo empirismo ingenuo y demostraciones fallidas, como lo muestra el gráfico:

**Figura 16.**

*Balance de los tipos de demostración presentes en el cuarto problema.*



En este problema no se observaron intentos por abordar la situación geométrica en su generalidad. Más bien, se encontró un obstáculo asociado a la elección del ejemplo, todos los estudiantes hicieron uno de dos ejemplos prototípicos: cuando las rectas paralelas contienen los lados del cuadrado y cuando son paralelas a la diagonal. De acuerdo con esto, el cálculo de las distancias se hace perceptivamente, pues por la simplicidad o la simetría de la figura, es inmediato.

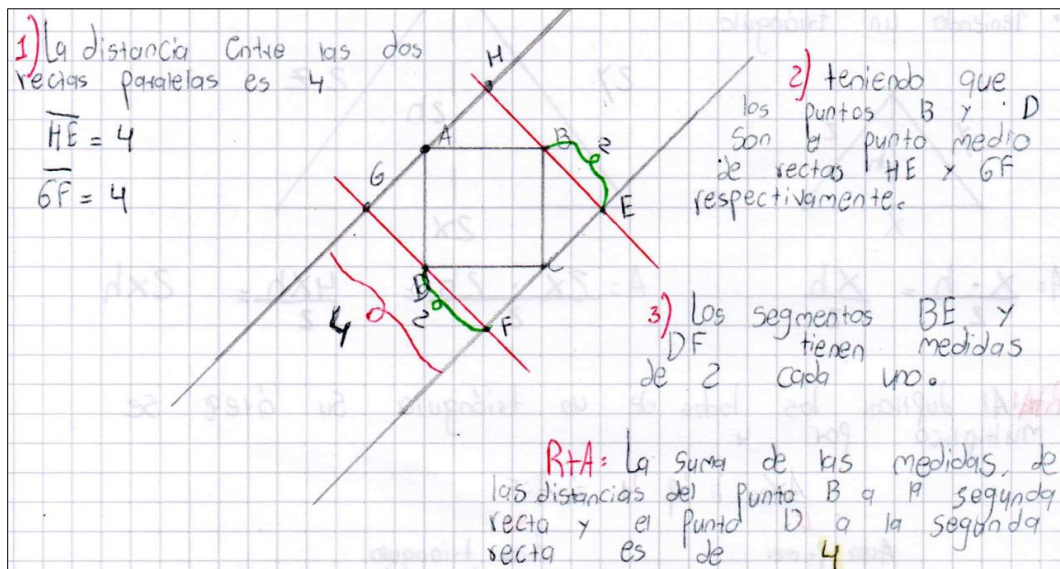
También se reconoce que dichas imágenes pudieron ser evocadas por la relación “estar comprendido entre” que se dice en el enunciado; pero no se observó que los estudiantes se cuestionaran por la existencia de otras disposiciones de los objetos, lo que no debería ocurrir con tanta frecuencia si, por ejemplo, hubiese una familiarización con la búsqueda de contraejemplos,

como se estipula en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. En efecto, cuando el estudiante ha tenido espacios para encontrar contraejemplos en clase de Matemáticas es más propenso a que considere otras posibilidades válidas que ponen en tensión su observación inicial.

Así pues, en este punto se presentó la menor variabilidad en cuanto a los tipos de respuesta que se hallaron, quedándose en las dos categorías mencionadas. La selección del ejemplo impidió que afloraran algunos obstáculos esperados, como la medición de la distancia entre un punto y una recta o la opción de articular ideas variacionales al procedimiento. Con todo esto, es importante mostrar la respuesta de L14, la cual hace ver que el orden deductivo puede aparecer incluso en el empirismo ingenuo. Nótese la demostración de L14:

**Figura 17.**

*Respuesta de L14 al cuarto problema.*



Es de reconocer que L14 haya propuesto el trazo de los segmentos  $HE$  y  $GF$  para reinterpretar los vértices del cuadrado como puntos medios y llegar a su conclusión por un paso

deductivo, aunque al hacerlo ya está asumiendo lo que se quiere demostrar. Sin embargo, la respuesta se queda en el empirismo ingenuo porque la selección del ejemplo no da lugar a más posibilidades. Si se mira detalladamente para este caso, el orden lógico no es en sí mismo una muestra de sensibilidad a la generalización, y es así porque nada de lo que se propone sirve para un caso distinto. Más bien cumple el papel de darle solidez al argumento, es decir, que así se asegura de que el procedimiento es correcto más no que es válido en otros casos.

Llama la atención que esta producción exponga un comportamiento distinto a los demás y que, sobre todo, logre sortear con relativo éxito las dificultades que surgen cuando se trata de demostrar una propiedad muy básica, teniendo en cuenta que para los estudiantes solo hay que demostrar aquello que no es obvio.

Un ejemplo de demostración fallida, lo encontramos en la solución de L03, quien intenta asignarles medidas a los lados y, utilizando el teorema de Pitágoras calcula la suma de las distancias, pero comete varios errores en el despeje algebraico de las cantidades, de modo que su respuesta final es 2.88. Por último, se aclara que las demostraciones fallidas surgieron por un error en la lectura del enunciado. No entendieron que las distancias eran referentes a una misma recta (la segunda recta) y lo hicieron para cada una.

### Tabla 8.

*Resumen de las respuestas fallidas del cuarto problema.*

Respuestas al cuarto problema		Tipo
L05: ...la suma de la distancia entre B y la recta, y D y la recta es de 2.88...		EF
L12: ...la suma de sus medidas es $4 + 4 = 8$ .		EF
L13: ...La suma de la distancia entre B y D, hacia las rectas es igual a la distancia entre recta y recta.		EF
M03: ...Usando el teorema de Pitágoras... obtenemos que la suma de las distancias es $4\sqrt{2}$ .		EF
M09: ...Si hablamos de la suma de los lados del cuadrado, podemos decir que es igual a $4 + 4$ , ya que los lados son iguales...		EF
M17: ...La suma de sus lados sería 16 cm.		EF

#### 4.3.5 Conclusiones de la prueba diagnóstica

Los problemas planteados en esta prueba dejaron caracterizar satisfactoriamente los intentos que hacen los participantes por justificar sus conjeturas. En primer lugar, encontramos que existen elementos de convicción puntuales que son comunes en las respuestas y que vienen a revelar, además, sus concepciones sobre la demostración. Notamos que los estudiantes consideran ‘mejores’ o más completas las demostraciones que implican el uso de fórmulas o el cálculo aritmético, aspectos más asociados al despeje algebraico. Esto último hace parte de un criterio más general, que son los procedimientos. En efecto, el uso de procedimientos hechos en la escuela le otorga el carácter de *matemático* a sus argumentos, ya que el estudiante interpreta que su respuesta será mejor en la medida en que parezca un procedimiento típico de la clase de matemáticas, aunque este no necesariamente sirva para apoyar lo que se quiere. Igualmente, adjuntar procedimientos clásicos, como la obtención de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras cada vez que hay un triángulo rectángulo, le da más contenido a su prueba y entonces parece un procedimiento más largo.

Otro aspecto que tiene impacto en el tipo de demostración es la selección del ejemplo. Hubo una tendencia a escoger los mismos ejemplos en las demostraciones. Se decantan por figuras conocidas las cuales tienen propiedades particulares como simetría, paralelismo, perpendicularidad, etc. Esto deja ver una distancia entre lo que los estudiantes consideran que es un representante de clase y lo que matemáticamente se entiende por ello. Para ellos el triángulo *más triángulo* es un equilátero o un rectángulo o isósceles y esto condiciona la demostración. Esto se pudo ver el en primer y cuarto problema en mayor medida. Este resulta ser nuevamente un obstáculo heredado de la instrucción matemática escolar, pues en la lectura de los libros de texto y de los ejemplos que se ponen en clase pareciera que estas son las figuras representativas de su

clase. Allí el criterio de representatividad responde a necesidades estéticas o de simplicidad que van en una vía distinta a la del ejemplo genérico entendido en las matemáticas.

Los estudiantes utilizan elementos de convicción distintos cuando demuestran y según el tipo de problema discriminan unos por otros. Esto se puede ver claramente al estudiar el empirismo ingenuo perceptivo e inductivo que tuvo mayor presencia en cada problema. Aquellos problemas en donde hizo mayor presencia el empirismo ingenuo perceptivo (P2 y P4) por sobre el empirismo ingenuo inductivo (P1 y P3) se explican por un criterio operativo y de economía del lenguaje. Nosotros vemos que los primeros tienen que ver más con garantizar una forma, y hay varios elementos de simetría que facilitan la modelación mental, entonces sus explicaciones van más sobre esas imágenes mentales que tratan de poner en el dibujo. Sin embargo, los otros movilizaron el EII porque refieren a un procedimiento de cálculo, que es la fórmula del área, entonces como la conjetura exige la comparación numérica del área, se justifica su necesidad. De modo que, en la disputa entre dibujos y números como elementos de convicción advertimos que la confirmación numérica entra como respuesta cuando el registro visual no es tan contundente. Pero el criterio pasa primero por lo visual.

Por otra parte, hay una clara relación entre el problema y el tipo de demostración que hacen los estudiantes, aunque se preserve la subcategoría. Es decir, que dependiendo de los elementos que involucre el problema, los presaberes de los estudiantes, la facilidad con la que se puedan incluir procedimientos de la escuela, la facilidad con la que se pueda modelar mediante una ecuación algebraica, etc., puede variar el tipo de demostración sin que ocurra lo mismo para la subcategoría. De modo que el tipo de problema desencadena una serie de tareas en el estudiante relacionadas con la demostración y estas tareas condicionan el tipo de prueba.

Así pues, la función que los estudiantes le otorgan a la demostración no es ordenar en una cadena deductiva la demostración sino organizarla para facilitar la lectura y que las ideas se entiendan con más facilidad, esto es, *su carácter explicativo*. El vocabulario que utilizan es el mismo que emerge en una conversación cotidiana con expresiones como “hacia arriba”, “al otro lado”, “son iguales de grandes”, etc. que vienen a emparentarse más con una explicación de las que da el profesor en clase. Entonces una demostración será mejor en la medida en que sea más entendible y clara, es la misma forma en que se juzga una clase del docente y a esto subyace otra concepción de la demostración.

Finalmente, los estudiantes aún no están familiarizados con el trabajo deductivo. Esto se muestra desde el mismo proceso de conjetura, ya que ni siquiera esta se plantea en la forma si-entonces, en la mayoría de las veces solamente ponen la conclusión y a dan los argumentos. Lo que hacen para conectar los datos iniciales con la conclusión, es relacionar lo primero con otros aspectos que también se cumplen y tratan de establecer la relación causal. Sin embargo, esta relación causal pocas veces es verdadera e incluso se llega a tomar al revés, pues los estudiantes no discriminan entre cuáles propiedades son emergentes y cuáles son consecuencia de otras, sino que todas conviven en un mismo plano, a modo de objetos dados.

#### **4.4 Aplicación de la segunda prueba**

La segunda prueba se aplicó a los dos cursos en la sexta semana del semestre (2022-1), esto es, hacia el término de la primera mitad del período académico. Por esta razón, los estudiantes ya habían tenido acercamientos a los axiomas de la teoría euclídea, las reglas de inferencia básicas, las formas de organización de una demostración, la exploración del enunciado de un teorema con software de geometría dinámica así como la construcción de figuras con regla y compás (un curso

con GeoGebra y el otro con Dgpad); y habían visto temáticas relacionadas con la perpendicularidad y el paralelismo, las propiedades de la mediatriz, el teorema del triángulo isósceles y los criterios de congruencia de triángulos, entre otros. Si bien algunas convenciones de formalidad, notación y apoyo con el software cambiaban en los dos cursos, hubo similitud en los contenidos temáticos y metodológicos (resolución de problemas).

Ahora bien, lo anterior nos permite ver que, para este momento los estudiantes ya han enriquecido su forma de trabajo y entonces hay una diferenciación más clara entre el proceso de conjetura y el de construcción de la demostración. De acuerdo con Pedemonte (2002) como se cita en Fiallo (2011), antes de construir la demostración los estudiantes ya han reunido elementos y han explorado ideas que le hacen creer que su conjetura es cierta. Pero esta organización de ideas no viene necesariamente en forma deductiva, ni los elementos de convicción son estrictamente teóricos. Luego entra una segunda labor, que consiste en darle forma y elegir los teoremas que van a servir para enlazar sus ideas en una cadena deductiva, esta es la fase de demostración. En ese sentido, la argumentación está ligada a la conjetura, mientras que la demostración está ligada al teorema del que habla la conjetura.

Reconocemos que nuestros instrumentos de recolección de datos nos permiten el acceso exclusivamente a los registros escritos de los estudiantes. Pero una revisión previa de los resultados nos ha llevado a considerar que ciertos elementos de la fase de argumentación sí se pueden rastrear allí, sobre todo en aquellas demostraciones que no son completamente deductivas, como se verá en lo que sigue. Por tanto, para efectos de este análisis, vamos a recurrir a la diferenciación que da la autora y que nos permite entender que los procesos argumentativos anteceden a la demostración. También vamos a recurrir a los modelos de razonamiento enunciados en nuestros referentes teóricos.

#### ***4.4.1 Análisis del primer problema de la segunda prueba***

El problema que se dispuso como primer punto en la segunda prueba fue el siguiente:

*Problema 1: Dada una circunferencia y un punto  $P$  en esta, se construye un cuadrado con vértices en el centro de la circunferencia y el punto  $P$  de modo que uno de los vértices del cuadrado queda por fuera de la circunferencia. Si se realiza la misma construcción para todos los puntos  $P$  sobre la circunferencia, ¿cuál es el lugar geométrico de los vértices por fuera de esta? Plantee una conjetura y demuéstrela.*

El hecho geométrico que se deduce de esta construcción es inmediato puesto que tiene un alto grado de evidencia visual. Gracias a la simplicidad del cuadrado y la circunferencia, se puede hacer la conjetura correcta solo imaginando la construcción: el lugar geométrico es otra circunferencia concéntrica con la primera y cuyo radio es la diagonal de uno de los cuadrados. Por la misma razón, escribir la demostración requiere analizar específicamente qué propiedades de cada figura (simetría, igualdad de lados, equidistancia, perpendicularidad, etc.) son suficientes para llegar a lo que se quiere, e identificar en qué orden unos son consecuencia de otros. Este ejercicio no es sencillo pues mentalmente a los objetos cuadrado y circunferencia ya se le asignan características aprehendidas empíricamente que están dadas, pero que en la teoría geométrica sí están organizadas deductivamente.

Cabe aclarar que, hasta el momento, los problemas de lugar geométrico no son comunes en el curso, así que los estudiantes deben idear la manera de demostrar ese hecho visual que aparece inmediato en la pantalla o en el dibujo. Nos interesa saber qué características tienen las respuestas, para identificar qué elementos o formas de razonamiento logra movilizar esta situación.

Pues bien, para nuestra tipología es necesario establecer el grado de generalidad que tuvo cada estudiante con el fin de acotar la subcategoría a la que pertenece, en nuestro caso, una revisión

inicial de ver que ninguno agregó medidas concretas al dibujo. No consideramos este signo como una evidencia fuerte de una mayor generalidad, ya que pueden existir otras razones para que esto sea así, como la simplicidad operativa del problema. En efecto, es más fácil imaginarse una simulación del cuadrado rotando por la circunferencia a la manera de un experimento con objetos físicos, en cuyo caso no tendría sentido de agregar números ya que crearía la necesidad del despeje algebraico. Otra razón, que quizá sea la más frecuente, es que los estudiantes hayan visto en el curso que en la mayoría de los casos (si no es que en todos) no es conveniente tomar medidas. Por tanto, la ausencia de números en el dibujo no le va a quitar el estatus de ejemplo particular a la demostración, para esto vamos a prestar atención a los argumentos que le acompañan.

Por lo que sigue, expresamos los criterios de categorización así:

1. Si la única razón que soporta la conjetura es que las medidas numéricas muestran que son iguales, la demostración es del tipo EII. Cuando en la demostración aparece el dibujo y viene acompañada (o no) de un argumento que solo hace referencia a elementos visuales, será EIP.
2. Si no toma medidas numéricas e incluye una propiedad distinta de lo que ya está dado, pero de ahí no se sigue estrictamente la circunferencia como lugar geométrico, entonces se considera un experimento crucial basado en el ejemplo (ECB). También si se disponen de varios cuadrados en posiciones genéricas. Asumimos que a un intento infructuoso de explicar lo que sucede, subyace la presunción de que en cualquier caso dará lo mismo, pero esto en sí mismo no tiene el estatus de ejemplo genérico. Si dichas explicaciones se centran en construcciones auxiliares, será experimento crucial constructivo (ECC).
3. Si justifica la equidistancia de los puntos al centro de la circunferencia para un radio genérico y sus argumentos incluyen deducciones correctas, será ejemplo genérico analítico (EGA). Si además sus afirmaciones se sustentan en elementos teóricos (congruencia de triángulos, propiedad

de la mediatriz, Teorema de Pitágoras, etc.), la respuesta entrará entre los ejemplos genéricos intelectuales (EGI).

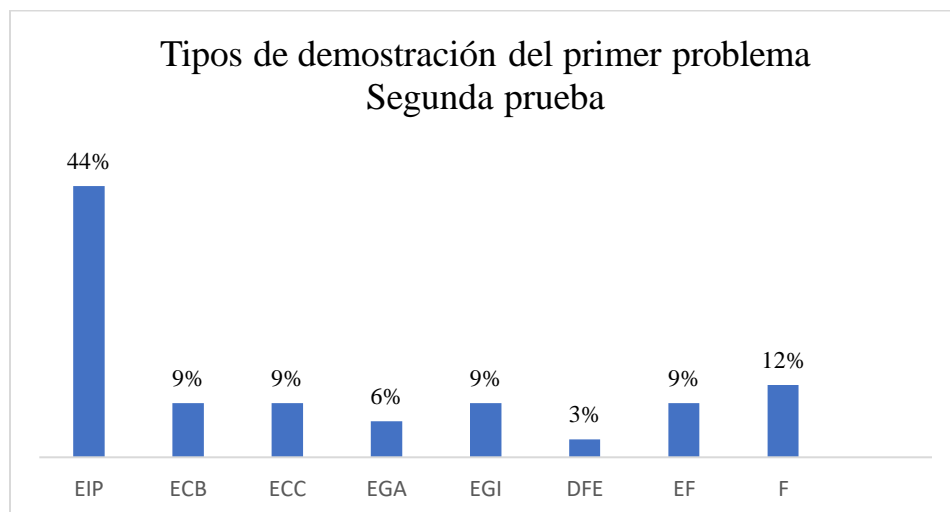
4. Si en la demostración hay un mayor cuidado en hacer explícitas las condiciones del problema enunciándolas, y por lo tanto dando un estatus distinto; y a partir de allí la organiza deductivamente, detallando en su mayor parte los elementos teóricos que sustentan los pasos deductivos, será deducción formal estructural (DFE). Si, en cambio, una parte de su respuesta incluye claras alusiones a transformaciones mentales del experimento, será de tipo experimento mental estructural (EME).

5. Respecto a las demostraciones fallidas, precisamos que, aquellas donde la justificación en realidad no tiene relación con lo que quiere concluir, será un intento empírico fallido (EF).

La aplicación de estos criterios nos permitió examinar cómo se distribuyen los tipos de demostración detectados en este problema, teniendo en cuenta que fueron 34 estudiantes quienes lo intentaron resolver:

### Figura 18.

*Tipos de demostración del primer problema, segunda prueba*



Como se ve en la gráfica, las primeras tres subcategorías de empirismo ya abarcan el 77% de las respuestas y solo el 3% hicieron deducciones exitosas, así es que la presencia del empirismo sigue siendo altamente significativa. Vemos que las tres subcategorías que componen el primer porcentaje presentan acumulados diferentes, ya que un 44% refiere al empirismo ingenuo, un 18% está en el experimento crucial y el 15% restante está con el ejemplo genérico (porcentajes respecto del total). Cabe mencionar que hay más diversidad respecto al cuarto problema de la primera prueba (también de lugar geométrico), donde solo hubo presencia de 3 tipos.

En cuanto al empirismo ingenuo solo se reconocieron los de tipo perceptivo (EIP), ya que ningún estudiante utilizó medidas numéricas. Nuevamente ocurre una particularidad que se viene detectando desde la primera prueba y es que siempre que hay empirismo ingenuo, solo tiene presencia uno de los dos tipos. En aquellos problemas relativos a formas geométricas, donde no se ve implicada alguna fórmula o procedimiento estándar, los estudiantes que hacen empirismo ingenuo no encuentran más elementos que la evidencia visual. Este es un problema generado durante la conjetura, es decir, que es relativo a la argumentación que precede a la demostración (pensada como producto).

Ahora que los estudiantes han avanzado en el curso, tienen el imperativo de organizar su demostración en forma deductiva, respecto a esto, encontramos una tendencia a saltarse pasos en las demostraciones, dichos saltos se cometen porque el estudiante está convencido de que lo que hace es permisible. Por ejemplo, luego de proponer la conjetura “si A, entonces C”, un estudiante que demuestre deductivamente podría organizar su respuesta, en la forma más simple, así:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C$$

Donde B es una afirmación que observó en la fase de argumentación previa a la demostración. Pero los enlaces entre las afirmaciones, aunque escritos en forma deductiva, en

realidad están influenciados por otros elementos que aparecen para darle un apoyo a cada paso. De esa manera, la justificación del paso  $A \Rightarrow B$  puede ser meramente perceptiva, mientras que el paso  $B \Rightarrow C$  puede estar sustentado en algún teorema recordado en la exploración. Lo que decimos es que las deducciones están apoyadas en otros elementos que no siempre aparecen explícitos en la demostración. Por esta razón, cada paso puede ser la concatenación de varios que se tendrían que dar si la demostración fuera más rigurosa, esto es:

$$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow C$$

El salto de una sentencia a otra se sostiene en distintos registros que convencen al estudiante, pues bien, un obstáculo que se afrontó con este problema fue que la conjetura formulada se demuestra en lo que para ellos sería un solo paso, la implicación  $A \Rightarrow C$  es inmediata por sustento visual. Esto significó un trabajo de justificación que va en otro sentido distinto al de la deducción.

Así pues, llegamos a que todos los estudiantes dieron con la conjetura correcta, pero esta apareció repentinamente luego de la construcción en el computador o de visualizar el experimento, y en la mayoría de los casos, los participantes dieron con la conjetura sin tener argumentos que la apoyaran. Entonces la argumentación surge después de la conjetura, como un intento de justificar algo que ya se asume verdadero, lo que conduce a volver atrás en la exploración para ver qué ideas aparecen en el camino que ayuden a la demostración. Esto es propiamente lo que Pedemonte (2002) llama una *argumentación estructurante*.

Para quienes la búsqueda de los argumentos estructurantes fue infructuosa, se quedaron en el empirismo ingenuo, pero quienes avanzaron hacia el experimento crucial y el ejemplo genérico, dejaron ver una particularidad, ya no en el proceso heurístico para presentar sus ideas, sino en el

razonamiento abductivo que usaron. Una primera idea se ejemplifica en la respuesta de L03, que figuró en ECB:

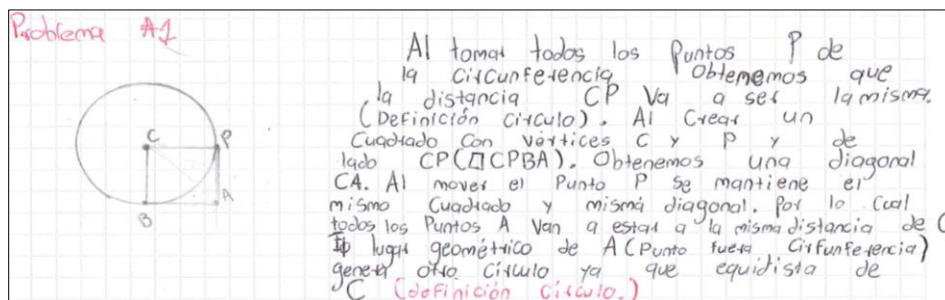
L03: *Se forma otra circunferencia dado que, si partimos el cuadrado en dos triángulos rectángulos, la hipotenusa tiene la medida de su radio con centro en la primera circunferencia.*

Su demostración deja ver una forma de razonamiento similar al de sus compañeros, en tanto que no es una deducción propiamente. L03 primero conoce el efecto de haber aplicado las condiciones del problema: se forma una circunferencia; así que busca razones por las que esto no parezca sorprendente. Para apoyar el resultado, señala por explícito cuál es el radio asociado a esa circunferencia, y este elemento funciona como un indicio fuerte de su conclusión. Pero si observamos sus ideas en un orden deductivo, es claro que está usando lo que quiere demostrar. Es decir, que al hablar de un radio está asumiendo sin prueba que se trata de una circunferencia, lo que deja en evidencia que su razonamiento es una abducción, según Pedemonte (2002), pues consiste en buscar un elemento por el cual lo que se está observando parezca normal.

Otra de las respuestas representativas de la subcategoría de experimento crucial alude a un argumento variacional que está influenciado por lo que se ven en la pantalla del computador. Quienes hicieron su construcción usando el SGD, plantearon algo similar a L14:

### Figura 19.

*Respuesta de L14 al prime problema de la segunda prueba.*



En este caso, se plantea que la invarianza bajo rotaciones de  $m(CP)$  implica la invarianza de  $m(CA)$ . Nótese que la conjetura va sobre cantidades numéricas y la justificación es que “se mantiene el mismo cuadrado”. Es importante ver que el escrito se trata de ordenar en forma deductiva y su contenido hace referencia a transformaciones dinámicas, influenciadas por la exploración con el software. Así es que, pensamos que la formulación de una conjetura referida a invariantes hace que el estudiante centre la atención en cantidades numéricas que cambian, y esto resulta activando ciertas heurísticas y ciertos saberes que devienen en procedimientos analíticos. Un ejemplo de esto es lo que hace M19 al plantear que:

*M19: Los nuevos puntos formarán un círculo ya que todos los cuadrados dejan un vértice por fuera, y la distancia de estos vértices al centro de la circunferencia será la diagonal del cuadrado que se puede calcular como  $R_2 = \sqrt{R_1^2 + R_1^2}$ .*

La relación algebraica que plantea M19 (usando GeoGebra) es una herramienta teórica que sirve para formalizar las ideas variacionales que presentaba L14. Por el teorema de Pitágoras, que claramente es un teorema evocado, se obtiene una fórmula que garantiza las invarianzas de las que habla L14, pero esto tiene un carácter teórico más avanzado, en consecuencia, se ubicó en el ejemplo genérico intelectual.

## Tabla 9.

*Tabla resumen con algunas respuestas de experimento crucial.*

Respuestas al primer problema de la segunda prueba		Tipo
L01:	...el lugar geométrico de vértices que se encuentran fuera de una circunferencia cuando construimos un cuadrado de lado igual al radio de la circunferencia será otra circunferencia con radio igual a la diagonal del cuadrado formado.	ECB
L03:	Se formará otra circunferencia dado que, si partimos el cuadrado en dos triángulos rectángulos, la hipotenusa tiene la medida de su radio con centro en la primera circunferencia.	ECB
L07:	...crean una nueva circunferencia, dado que, si trazo un segmento del centro de la primera circunferencia a un vértice del cuadrado por fuera de esta, y lo tomo como radio de una nueva circunferencia, todo nuevo punto-vértice está en esta nueva circunferencia...	ECB

Respuestas al primer problema de la segunda prueba		Tipo
L09:	El lugar geométrico de estos vértices es una circunferencia, ya que todos los lados del cuadrado miden lo mismo que el radio del primer círculo.	ECB
L10:	...forman otra circunferencia... y entre el punto medio del círculo y el punto que queda por fuera forman el radio de un círculo.	ECB
M06:	...procedemos a hacer otro cuadrado, pero con otro radio... Ahora trazamos una circunferencia con centro en A y radio al vértice fuera de la circunferencia. Vemos que esta contiene a ambos vértices de los cuadrados...	ECB
M14:	...Esta circunferencia o lugar geométrico tendría radio la diagonal del cuadrado que se forma con el centro del círculo y el vértice exterior.	ECB
M15:	Hay una circunferencia que pasa por los vértices que están por fuera de la circunferencia dada, el radio de dicha circunferencia formada es la diagonal de cada cuadrado...	ECB

Por último, solo encontramos dos casos en el tipo de deducción formal estructural, los cuales son muy similares entre sí y fueron las únicas respuestas en las que se dispuso del formato a dos columnas. Aquí los participantes usaron elementos teóricos para demostrar la congruencia de dos cuadrados cualesquiera, construidos con radios de la circunferencia, y luego de esto, demostraron la congruencia de sus respectivas diagonales.

Es importante señalar que los estudiantes intentan disponer su argumento en forma deductiva a la vez que mantienen elementos de convicción visuales. Esto fue lo que pasó con L02:

*L02: El vértice que queda por fuera de la circunferencia siempre va a tener la misma distancia con el centro de la circunferencia. Al tener siempre la misma distancia, se evidencia que el vértice está en una circunferencia...*

Al revisar detenidamente qué ha tratado de hacer L02, encontramos un intento por escribir algo deductivo, pero el primer paso se sostiene solo con elementos visuales. Como vemos, algunos estudiantes consideran que su demostración es aceptable si contiene deducciones rigurosas, sobre todo en el último paso. L02 acepta, sin demostración, que el vértice exterior siempre aparece a una distancia fija del centro. Esto último sí le permite dar un paso deductivo y válido hacia la conclusión, entonces el carácter de su demostración parece formal.

Esta forma de operar con las proposiciones para encadenarlas deductivamente aparece en varios datos analizados. La idea es que, si se llega a la conclusión por una deducción válida, entonces su demostración es correcta, pero para esto no es necesario que todos los pasos sean rigurosos, sino solamente el último. El efecto que causa es que la fuerza del argumento se focalice en este último paso. Podríamos resumir esquemáticamente así: para demostrar la conjetura " $A \Rightarrow C$ ", se busca una afirmación  $B$ , tal que  $B \Rightarrow C$  sea válido teóricamente; se acomoda un paso plausible entre  $A$  y  $B$ , y se escribe algo de la forma  $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ . Donde  $A$  son los datos del problema y  $B$  es la propiedad observada que implicaría directamente a  $C$ . La conexión entre  $A$  y  $B$  puede requerir de más pasos, y en ese caso quedaría algo así  $A \Rightarrow (B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n) \Rightarrow B \Rightarrow C$ .

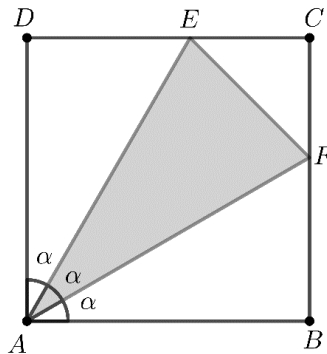
Con todo esto, encontramos un panorama mucho más amplio en donde las características y las formas de trabajo se han diversificado ahora que los estudiantes adoptan, por convención de la clase, el objetivo de hacer una demostración formal. A pesar de sus intentos por conseguir el objetivo, los elementos de convicción personales siguen soportando, en mayor medida, la carga de la prueba. Observamos que, cuando el trabajo de argumentación es estructurante, se despliegan razonamientos de tipo abductivo que son evidentes en la demostración. Entonces hay una injerencia del razonamiento abductivo frente a la exigencia de lo deductivo.

Cuando la exploración de la conjetura es pobre, surgen otro tipo de estrategias con el fin de acomodar las proposiciones a una deducción, pero solo en el aspecto de la forma, sin cuidar que dichas deducciones sean teóricamente válidas. Por lo tanto, consideramos que la mera instrucción en aspectos de forma de lo que son las demostraciones geométricas no promueve el carácter deductivo ni explicativo de la prueba, tampoco así con el razonamiento deductivo.

#### 4.4.2 Análisis del segundo problema de la segunda prueba

El segundo problema fue:

*Problema 2: En la siguiente figura ABCD es un cuadrado. Encuentre los ángulos del triángulo  $\triangle AFE$  y demuestre la validez de su respuesta.*



Aquí la demostración va ligada completamente a un cálculo numérico ya que la tarea es encontrar el valor de los tres ángulos, por tanto, no hay margen para la elección del ejemplo. Los estudiantes pueden modificar algunos aspectos, agregar medidas, ayudarse de elementos visuales y de las simetrías percibidas, etc. pero esencialmente el ejemplo está fijo en el enunciado del problema. Así es que, debemos establecer qué otros elementos se pueden reconocer en las pruebas escritas que permitan detectar un mayor o menor grado de sensibilidad a la generalización para ajustar las respuestas con la tipología.

En este problema la tarea no se centra tanto en proponer un valor para los ángulos y a continuación ofrecer explicaciones visuales o mentales que lo soporten, sino en dar con el procedimiento algebraico que permite su despeje. De ahí que nuestra atención se centre en los pasos que dieron los estudiantes en sus demostraciones, más que en la conjetura o la exploración de ejemplos (que no se dio), considerando que toda demostración satisfactoria debe responder los siguientes puntos: 1)  $\alpha = 30^\circ$ , 2)  $\triangle AFE$  es isósceles y 3)  $\angle E = \angle F = 75^\circ$ .

Observando el volumen de datos, encontramos que los estudiantes utilizaron distintas formas de garantizar cada punto. Por ejemplo, la conclusión de que  $\alpha = 30^\circ$  la obtuvieron por simples reglas algebraicas, al igual que la relación  $\angle E = \angle F = 75^\circ$ . Sin embargo, fue en el hecho de que  $\triangle AFE$  es isósceles donde hubo una divergencia de criterios, algunos asumiéndolo perceptivamente, otros considerando que ya estaba dado, otros atribuyéndole intuitivamente la razón a la trisección del ángulo A o haciendo la deducción juiciosa de que  $\triangle ADE = \triangle ABF$ . Es decir, suponiendo que el estudiante está en una interlocución con un par, será en el punto 2) donde aparezca con más urgencia la necesidad de convencer al otro, y es aquí donde afloran más visiblemente aquellos elementos que necesitamos para organizar los datos según las categorías.

Así es que, establecemos los siguientes criterios orientadores:

1. Si el estudiante asigna medidas arbitrarias a un ángulo o a un lado del cuadrado para ayudarse y obtener los ángulos, será un EII. Si la mayor parte de sus deducciones, incluyendo que  $\triangle AFE$  es isósceles, son perceptivas, será EIP.
2. Si en el paso de que  $\alpha = 30^\circ$  a que  $\triangle AFE$  es isósceles utiliza solo elementos perceptivos, pero en los pasos que le anteceden y que le siguen a este segmento utiliza otros elementos (teóricos, propiedades observadas, recordadas, etc.) será un ECB. Si realiza construcciones auxiliares, será ECC.
3. Si el paso de que  $\alpha = 30^\circ$  a que  $\triangle AFE$  es isósceles se da porque hace referencia a propiedades intermedias, pero que no son suficientes para la conclusión, y aun así la concluye, será un EGI. En caso de que sus referencias solo sean a propiedades de las que se dio cuenta que se cumplían (pero no dedujo) entonces será un EGA.
4. Si hay una organización deductiva, paso a paso, haciendo siempre referencia a elementos teóricos, será DFE.

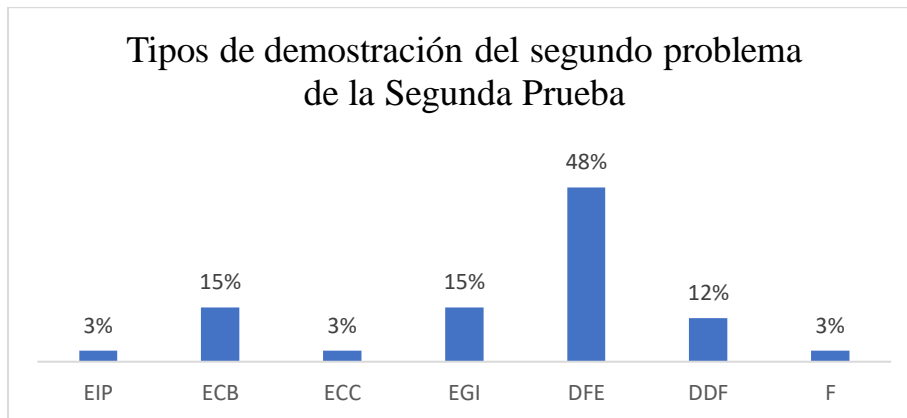
El primer detalle que se encontró al observar las 33 respuestas de los estudiantes es que todos, a excepción de un par, organizaron la demostración en el formato de prueba a tres columnas (o dos columnas, de acuerdo con la literatura). Esta es una forma clásicamente utilizada en las demostraciones geométricas, que viene ilustrada en el libro texto del curso. El formato consiste en hacer una tabla con tres columnas (condición/regla teórica/conclusión) y las filas que sean necesarias para demostrar el resultado, cada fila se corresponde con un paso de la demostración. Es interesante ver que en el punto anterior solo se vio en dos ocasiones, en cambio, al proponer un problema que típicamente podría aparecer en clase, todos asumieron la tarea de la misma manera.

Estamos de acuerdo en que el formato de prueba a tres columnas obliga a enlazar deductivamente las propiedades emergentes, estableciendo que unas son consecuencia inmediata de las otras. Por tanto, el panorama que cabría esperar es que solo existan deducciones formales estructurales o intentos fallidos de estas, pero se encontró que aún bajo esta exigencia de organización, los estudiantes siguen pensando con esquemas empíricos que aparecen como obstáculos a la hora de escribir su respuesta.

Así es que, la siguiente gráfica muestra la presencia de siete tipos distintos de demostración:

**Figura 20.**

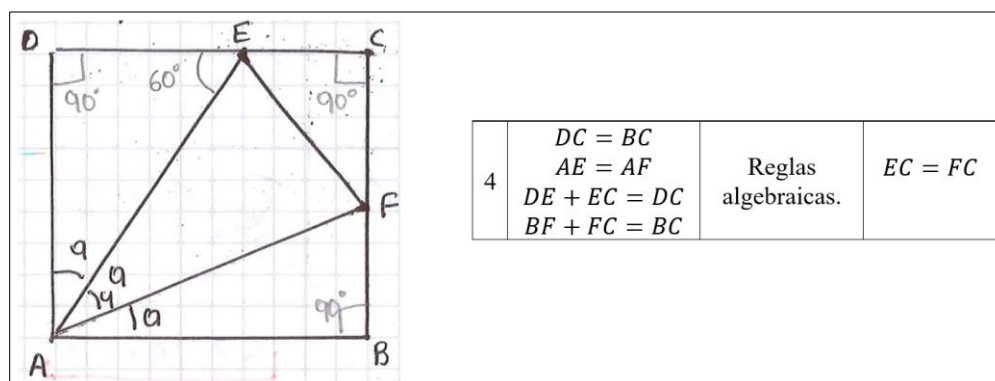
*Balance de los tipos de demostración del segundo problema de la segunda prueba.*



Ahora sí hay una tendencia marcada en un solo tipo de demostración, que es la deducción formal estructural, con el 48% de las apariciones. Era de esperarse que la prueba a tres columnas fijara en este tipo a todos los intentos de deducción exitosos. Sin embargo, se pudieron reconocer algunos obstáculos asociados al uso de este formato, entre ellos está que los estudiantes ven la columna de la regla teórica como un requisito más que como algo sustancial de la demostración, mostrando que siguen una convención, como L02, quien escribe en el paso 4 de su demostración:

**Figura 21.**

*Respuesta de L02 al segundo problema de la segunda prueba.*



Con las condiciones dadas es imposible deducir que  $EC = FC$ , pero para él es válido con el permiso que otorga la referencia a las reglas algebraicas, sin más explicación. Al cumplir con el requisito de llegar la segunda casilla, no ve el problema de sacar la conclusión que intuitivamente da por hecho. Otro ejemplo es el de L15, quien atribuye a las reglas algebraicas la consecuencia de que, si dos ángulos suman  $150^\circ$ , entonces, cada uno de ellos deberá ser de  $75^\circ$ . Incluso M03 propone que  $AE = AF$  por construcción y M08 dice que es por hipótesis.

También se observó que los estudiantes en cada paso extraen el mayor número de conclusiones posibles, sin detenerse a pensar cuáles son las que realmente necesitan. Incluso concluyen algunas propiedades que no se siguen de las condiciones dadas. De todas formas, su intención es poner en la columna de conclusiones todo lo que se sospecha que puede servir, sin atender al mínimo suficiente, que es lo que en realidad se necesita para que no queden deducciones sobrando y se tenga una economía de la demostración. Una muestra de esto es que casi todas las respuestas comienzan con un primer punto de la forma:

1	$ABCD$ es cuadrado (dado)	Definición de cuadrado	$AD \parallel BC, DC \parallel AB, AB = BC = CD = DA, \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
---	---------------------------	------------------------	---

El estudiante entiende que para usar algo debe tomarlo de las conclusiones de algún paso anterior. Esto conduce a que utilicen pasos vacíos solo para poner en las conclusiones algo que ya está dado, para tener la seguridad de usarlo después.

Igualmente, en varias ocasiones se puede ver que no hay una interiorización del funcionamiento interno de los pasos deductivos dentro de la demostración y tampoco una coherencia de estos pasos en un nivel global. Esta idea se recoge en la respuesta de L11, que ya en el segundo paso escribe:

2	$\angle DAB = 90^\circ$	Reglas algebraicas	$\angle DAE = 30^\circ, \angle FAB = 30^\circ$ y $\angle EAF = 30^\circ$
---	-------------------------	--------------------	--

Las condiciones son insuficientes para obtener ese resultado, pero el valor que encuentra de los ángulos es correcto. Lo que ocurre es que en la hoja no está el panorama completo que está viendo el estudiante. A ellos les cuesta trabajo seleccionar aquellas condiciones que apoyan lo que quieren y que se presentan por distintas vías, ya sea en la pantalla del computador, en el dibujo o en las propiedades emergentes que encontró mientras exploraba.

Esta situación, en conjunto con los dos ejemplos anteriores, son problemas asociados con el primer nivel de organización discursiva, porque se localizan al interior de un paso de la demostración. Sin embargo, también es común encontrar desconexiones en la organización discursiva global, que son discontinuidades en la transición de un paso a otro:

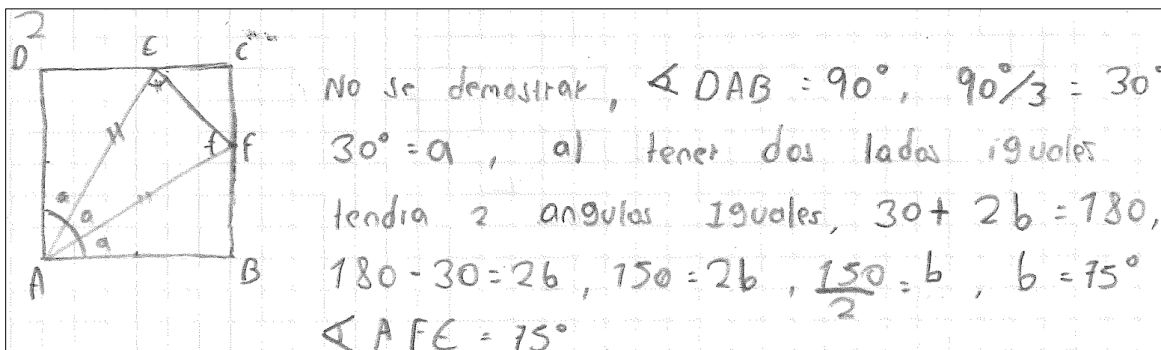
4	$\angle EDA = \angle FBA$ (E) $DA = BA$ (E) $\angle DAE = \angle FAB$ (P2)	Postulado ALA	$\triangle EDA = \triangle FBA$
5	$EA = FA$ (P4)	Teorema triángulo isósceles	$\angle AEF = \angle AFE$

Note que, el cuarto paso es de la forma  $A \Rightarrow B$  y el quinto es  $C \Rightarrow D$ , pero se omite la implicación  $B \Rightarrow C$  que conectaría estos dos pasos, probablemente porque se sobre entiende.

Ahora bien, alrededor del 36% de las demostraciones están en categorías empíricas y esto se debe a que los alumnos introducen a su respuesta algunos hechos geométricos a los que llegan visualmente. Mostramos para este efecto, la respuesta de L13 quien fue uno de los pocos que no usó el formato de dos columnas.

**Figura 22.**

Respuesta de L13 al segundo problema de la segunda prueba.



La idea que utiliza en el argumento es correcta. Todo lo que propone, son cosas que se cumplen, pero que no se han obtenido únicamente por deducción rigurosa. Los valores de los ángulos se siguen por despeje algebraico, en cambio, la igualdad de los lados  $AE$  y  $AF$  viene de la imagen, por lo que tenemos un experimento crucial. El teorema del triángulo isósceles se introduce para justificar la congruencia de los ángulos, que es un paso necesario para la solución, nuevamente sin validar por deducción que el antecedente es verdadero.

Esto lo analiza Duval (2016), quien considera que el estudiante entiende que la regla teórica cumple únicamente la función de etiquetar un argumento y no ve la operación de “usar un enunciado partido en dos para verificar las premisas requeridas y afirmar la conclusión (Bourreau-Billerait, Dewitte y Lion, 1998, p. 13, 25)” (p. 100). Si bien, los ejemplos anteriores dejaban ver dificultades para garantizar el carácter *suficiente* de un paso, ahora encontramos dificultades en cuanto al carácter *necesario*, y es que se aplican los teoremas sin antes haber llegado a sus condiciones por medio de la necesidad lógica.

Por lo que se refiere a las formas de razonar inmersas en la demostración, encontramos una serie de procesos abductivos movilizados por la búsqueda de la regla teórica que completa las

casillas de un renglón en el formato de las columnas. El razonamiento abductivo no es necesariamente un obstáculo para escribir demostraciones deductivas, pues este hace parte de muchos procesos heurísticos y de justificación que se activan cuando se está explorando y reuniendo la información que aparecerá después en el escrito. Es justamente en estas tensiones donde a veces habrá un paso hacia lo deductivo, pero otras veces no; un ejemplo son los pasos 2 y 5 que hace L03:

2	$\angle DAE = \angle EAF = \angle FAB (D)$	Reglas teóricas	$\angle DAE = 30^\circ$ $\angle EAF = 30^\circ$ $\angle FAB = 30^\circ$ <hr/> $\angle DAB = 90^\circ$ $\angle AFE = 75^\circ$ $\angle AEF = 75^\circ$ † $\angle EAF = 30^\circ$ <hr/> $180^\circ$
5	$\angle AFE = \angle AEF (P4)$	Definición de triángulos isósceles	

Es muy interesante notar que lo que aparece escrito allí por L03 muestra el esfuerzo que está haciendo por darle un orden deductivo a los datos de los que dispone. Él conoce la igualdad de los tres ángulos y sabe que deben sumar  $90^\circ$ . Claramente cuando cada uno vale  $30^\circ$ , la suma se cumple, pero es esto último lo que parece llevar la fuerza de su argumento, tanto así que sus conclusiones son más una comprobación que un resultado deducido. El arreglo de la tercera columna parece la comprobación de una idea plausible y por tanto no cumple con lo que se está pidiendo. También hay un error en la regla teórica, quizá el propósito era poner *reglas algebraicas* en ese lugar.

Algo similar ocurre en el quinto paso, donde la conclusión se reduce a comprobar que los valores finales satisfacen el teorema de los ángulos internos. Sin embargo, la regla que se cita es la definición de triángulo isósceles y la única condición que aparece es la igualdad de los ángulos. Otra vez hay un razonamiento abductivo en el que se explican las medidas de los ángulos gracias a que satisfacen el teorema de los ángulos internos, entonces la regla teórica que usa en su

razonamiento no es la que aparece allí en la tabla, hay una distancia entre lo que piensa y lo que escribe, así como una incompreensión del papel de la segunda columna.

Es muy importante señalar que la gestión que hacen los estudiantes de las reglas teóricas, ahora que el formato por columnas los obliga a ponerlas por escrito, exhibe una incompreensión sobre cómo operan estas para garantizar la verdad de su conclusión. El estatus teórico se entiende más como una etiqueta prototípica que debe ponerse para conseguir que su respuesta sea más seria y formal, y no hay ninguna atención sobre su valor epistémico, al respecto, M08 llega a proponer que  $\triangle AFE$  es isósceles *por hipótesis*.

Con todo esto, hemos conseguido una caracterización útil de las particularidades que emergieron en este problema. Sorpresivamente, los participantes respondieron con el formato de las columnas y esto permitió detectar algunas dificultades y estrategias que se generan mientras escriben su prueba. Tales dificultades son visibles principalmente en aquellas partes de la demostración donde se deben coordinar varios datos e ideas concebidas en la exploración y que toca hilar en pequeños pasos que se podrían ver como unidades deductivas. Para estructurar esos pasos primero hay que saber qué se sigue de inmediato para unas condiciones dadas, en esta tarea dejamos en evidencia que hay tensiones, sobre todo si el razonamiento del estudiante no es deductivo. Cuando pasa esto, los estudiantes tratan de condensar varios segmentos en uno solo y revelan aspectos de su razonamiento abductivo.

En comparación con el primer punto, aquí hubo mayor influencia del tipo de deducción formal, sin que esto signifique que no haya uso de elementos empíricos. De hecho, quienes se ubican en los primeros niveles de la tipología, aún incluyen elementos percibidos del dibujo en las partes cruciales de su demostración a la vez que otros pasos sí se dan correctamente. Los que lograron dar con un producto formal, fueron los que establecieron teóricamente que  $\triangle AED =$

$\triangle AFB$ . Quienes fallaron, lo hicieron por diferentes motivos, como asumir que  $ED = EF$ , lo cual es falso; postular la congruencia correcta, pero no determinar el valor numérico de los ángulos, etc. Además, se ha visto que poner alguna de las etiquetas *elementos dados, son evidentes o por construcción*, muchas veces funciona para ocultar que el verdadero apoyo a las conclusiones es perceptivo. Es decir, ya tienen fijo el resultado al que quieren llegar, y entonces acomodan unas condiciones y unas reglas teóricas ad hoc.

#### **4.4.3 Análisis del tercer problema de la segunda prueba**

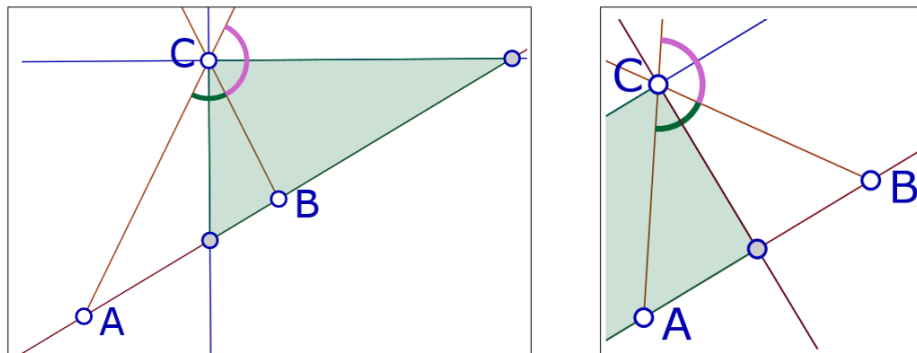
El tercer problema de esta segunda prueba fue elegido por 17 de los 36 estudiantes. El enunciado propone lo siguiente:

*Problema 3: Las prolongaciones de dos lados de un triángulo forman dos ángulos, uno interior y otro exterior. Para cada uno de estos se puede trazar una bisectriz (interior y exterior). Considere un triángulo ABC y las dos bisectrices en C. ¿Qué tipo de triángulo forman dichas bisectrices con la recta AB? Plantee una conjetura y demuéstrela.*

Como vemos, en este problema se pide realizar una conjetura sobre el tipo de triángulo formado, pero para demostrarlo solo hace falta ver que el ángulo que forman las dos bisectrices en el vértice C es recto. Sin embargo, hay un caso que es la excepción a la regla y ocurre cuando el triángulo es isósceles en C. En esa situación, la bisectriz exterior es paralela a la recta AC y entonces no se forma ningún triángulo entre las rectas, ver Figura 22. Este es un caso al que se puede llegar arrastrando continuamente el punto C, si la construcción se realiza en el software. No encontramos registros de que algún estudiante haya encontrado esta restricción usando la función de arrastre, porque quienes se dieron cuenta directamente habían propuesto como ejemplo un triángulo simétrico, en particular equilátero.

**Figura 23.**

*Caso genérico y caso límite del ejemplo*



Nota. A la izquierda el caso genérico y a la derecha el caso límite, donde se pierde el corte de la bisectriz externa con el lado AB.

Los criterios establecidos para discriminar el tipo de demostración en cada dato fueron:

1. Si llega a la conclusión de que las bisectrices forman un ángulo de  $90^\circ$ , pero para esto utiliza medidas particulares, ya sea de los lados del triángulo o de los ángulos interior y exterior que se forman en C o simplemente pone ese número en el ángulo, será un EII. Si toma algún tipo de triángulo especial o simplemente nota que las rectas parecen estar siempre formando una “esquina” y que, por tanto, el ángulo entre ellas es recto o no ofrece medidas numéricas para ello, entonces será EIP.
2. Será considerado un experimento crucial basado en el ejemplo, en el momento en que los ejemplos planteados se organicen para dar la idea de generalidad. Por ejemplo, si toma varias disposiciones moviendo el vértice C en un arco alrededor del lado AB, de modo que, por algún criterio de continuidad se vea que el resultado será el mismo siempre, sin importar la posición de C. Será de tipo constructivo si la idea de la demostración se basa principalmente en objetos agregados.

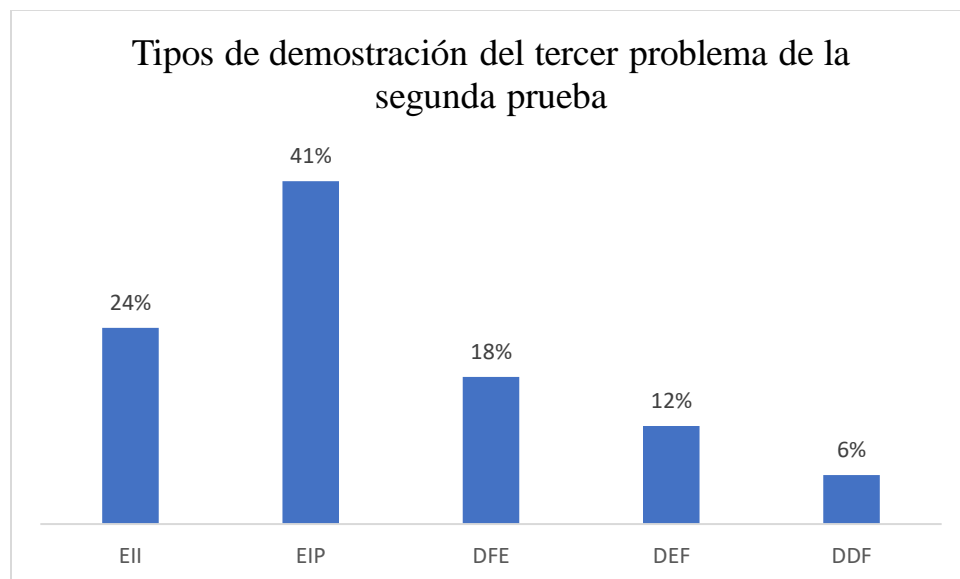
3. Si se hace uso de teoremas, bajo la elección de un ejemplo genérico, la respuesta se considera EGI y el teorema sí apoya la perpendicularidad de las bisectrices. En cambio, si observa algún invariante desconocido, pero este sí apoya la perpendicularidad, entonces se interpreta como un EGA.

4. No fue necesario especificar criterios para las demostraciones deductivas, dado que solo se presentaron de tipo DFE.

En este contexto, la aplicación de los criterios nos permitió obtener el siguiente gráfico:

**Figura 24.**

*Balance de los tipos de demostración del tercer problema para la segunda prueba.*



Como se observa, aquí se tiene una mayor presencia del empirismo ingenuo a diferencia del punto anterior y en similitud con el primer punto, siendo la de tipo perceptivo la que tiene el 41% de las veces y 24% las de tipo inductivo; así que en general, esta subcategoría reúne el 65%. Seguidamente está la demostración formal estructural con un 18%, que corresponde a un total de

tres respuestas. Finalmente, las categorías DEF y DDF son de tipo fallido, para los intentos empíricos y deductivos y acumulan el 18%.

Es importante observar que esta es la primera vez que el empirismo ingenuo no aparece en una única forma, ya que tenemos los dos tipos. La razón está en los criterios de selección. Hemos propuesto que, si los estudiantes muestran indicios de haber medido el ángulo entre las bisectrices entonces será de tipo inductivo y esto incluye el mero hecho de poner en el dibujo el valor  $90^\circ$ . Si no aparece este valor numérico entonces asumimos el otro tipo. Pues bien, en los datos de esta subcategoría encontramos algunos elementos comunes que están relacionados con lo expresado en el primer problema.

En efecto, las formas en las que los alumnos escriben su demostración dejan ver el uso de algunas estrategias para que el argumento tenga la estética de una demostración formal, pero a la vez admiten una serie de elementos que no van con lo estructural, sino que son accesorios. Esto se puede entender al considerar que aprender a demostrar supone acercarse a una práctica social, en este caso, propia de la comunidad de matemáticos y que tiene como la función de establecer la verdad de un hecho matemático. Pues bien, en el proceso de aprender esta práctica los estudiantes reconocen algunos convencionalismos que no son estrictamente lo que importa en una demostración, pero que si ayudan a darle su apariencia. Entonces trabajan para que su demostración cumpla con estos. Un ejemplo de esto es la aparente necesidad que encuentran algunos estudiantes de realizar despejes algebraicos. Pero quizá otro aspecto más sutil, que nos muestran los datos, es el arreglo sintáctico. Por ejemplo:

*L07: Se forma un triángulo rectángulo ya que las bisectrices son perpendiculares, ya que se forma un ángulo de  $90^\circ$ .*

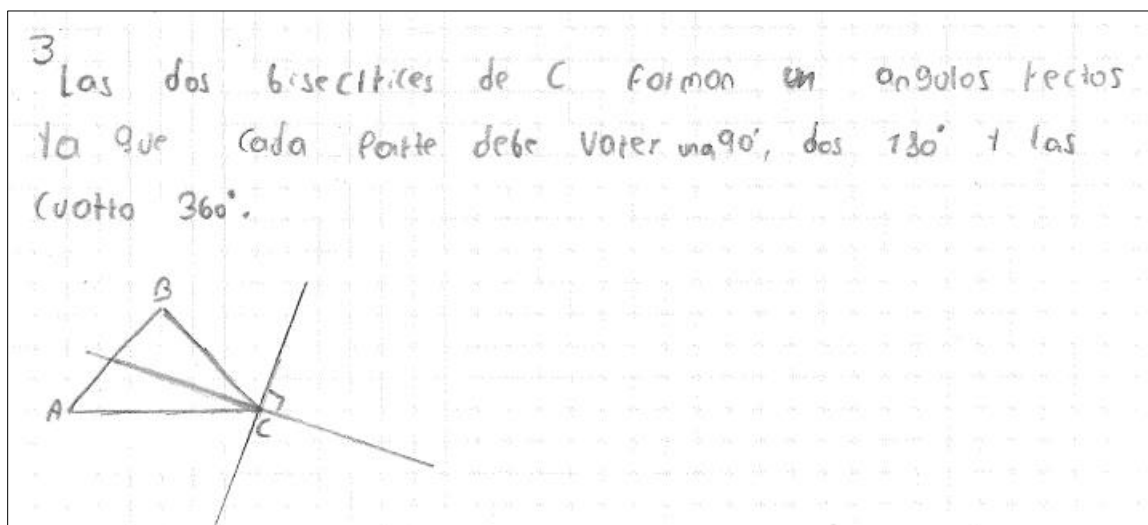
Nótese que la prueba de L07 tiene una aparente forma deductiva escrita hacia atrás. Al reinterpretar su respuesta en el orden contrario, se tiene la percepción de que sí se están realizando deducciones encadenadas una tras otra, pero no es más que el reacomodo secuencial de un solo dato: la medida entre las bisectrices dio  $90^\circ$ . En esto reconocemos una diferencia entre el empirismo ingenuo de la prueba diagnóstica y los de la segunda prueba, ya que estos últimos aparecen permeados por ideas personales sobre lo que es una demostración formal. L04 hace lo mismo, pero en un segmento mucho más corto:

L04: *las bisectrices externa e interna son perpendiculares entonces el triángulo es rectángulo.*

Otras justificaciones, en cambio, se limitan a explicar las relaciones que encuentran visualmente y las utilizan como argumento:

### Figura 25.

*Respuesta de L13 al tercer problema de la segunda prueba.*



L13 da cuenta de un razonamiento abductivo en el que utiliza lo que se quiere demostrar. Explica que el valor del ángulo debe ser  $90^\circ$ , ya que dos ángulos suman  $180^\circ$  y los cuatro suman  $360^\circ$ . Es decir, algo que encaja en esas sumas es el valor que propone. Claramente está utilizando fuertemente el registro visual, ya que no es suficiente el valor de las sumas para concluir la perpendicularidad. Así que, si bien su argumento se basa en el encaje de los ángulos, es el elemento perceptivo el que juega como elemento de convicción.

En general, el empirismo ingenuo que se vio se debió principalmente a que los estudiantes no encontraron elementos para conectar las condiciones del problema con sus consecuencias encontradas. Una dificultad en este aspecto es que no utilizaron la definición de bisectriz para establecer que el ángulo en cuestión se dividía en dos de igual medida. Por otra parte, hay una mayor diversificación del ejemplo escogido, aunque algunos utilizaron triángulos rectángulos o triángulos isósceles, otros presentaron su exploración y su dibujo a partir de triángulos escalenos.

Es interesante constatar que las tres demostraciones que quedaron en la categoría deductiva se hicieron con el formato de prueba a dos columnas. Los estudiantes coincidieron en el despeje algebraico por el cual se llega a que la suma de las dos mitades que conforman el ángulo entre las bisectrices necesariamente es  $90^\circ$ , sin tener en cuenta el valor específico de estos ángulos. Hicieron la referencia correcta a las reglas teóricas y tuvieron éxito.

En cambio, las demostraciones fallidas fueron las que conjeturaron el tipo de triángulo en función de sus lados, sin advertir sus ángulos, entonces postularon que el triángulo en cuestión era escaleno sin más justificación.

#### ***4.4.4 Análisis del cuarto problema de la segunda prueba***

El último problema que propuesto en la segunda prueba es el siguiente:

*Problema 4: Considere tres puntos fijos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el plano. ¿Qué condiciones debe cumplir un punto  $D$  para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero  $ABCD$  se corten en un mismo punto? Plantee una conjetura y demuéstrelo.*

En total fueron 10 estudiantes los que eligieron este problema, siendo el menos seleccionado. En la situación geométrica que aquí se describe es importante reconocer que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son dados y están fijos, así que su disposición puede ser cualquiera, pero, al igual que en el tercer inciso de la prueba, hay un caso donde las condiciones imposibilitan que las mediatrices se corten: cuando los puntos son colineales. Los estudiantes tampoco se dieron cuenta de esto y formularon sus argumentos para los otros casos.

Definimos los criterios de identificación de las respuestas teniendo en cuenta la forma en que los estudiantes disponen de los elementos dados y del uso de medidas o simetrías visuales en los que basaron su exploración. Reconocemos que la exploración se facilita en buena medida si se hace con ayuda del software, ya que se pueden hacer arrastres condicionados del punto  $D$  para que las mediatrices se corten y ver qué lugar geométrico describe su movimiento en la pantalla. En términos generales se pudo ver que los estudiantes apelaron a estas herramientas.

No expresamos con tanto detalle los criterios de selección para este problema en tanto que hubo muy poca variabilidad de los tipos de demostración, solo se obtuvo empirismo ingenuo y experimento crucial:

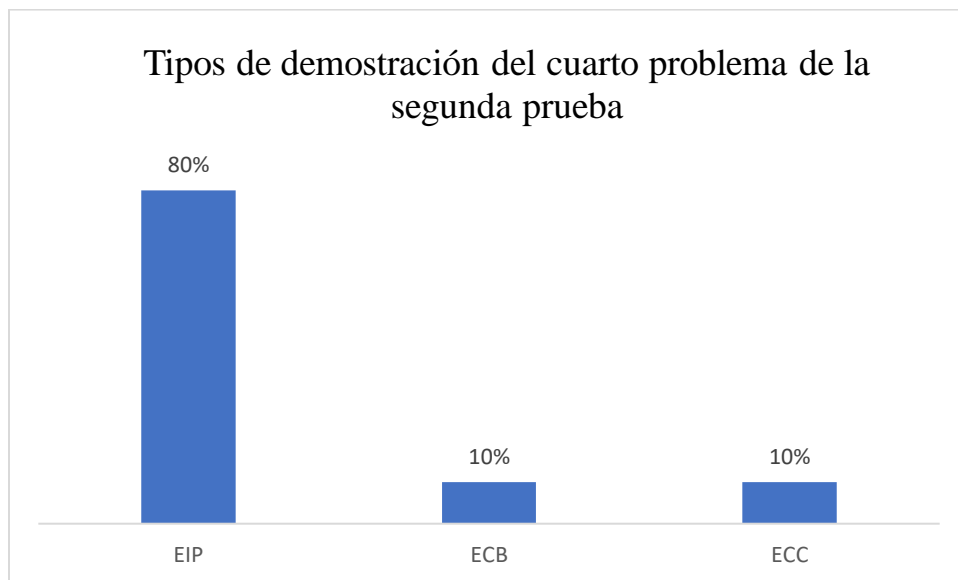
1. Si la conjetura se sustenta solo en aspectos visuales, o se presenta sola, será un EIP.
2. Si la conjetura es parcialmente correcta, esto es, que en los casos propuestos sí se cumple la concurrencia de las mediatrices, pero no es el total de los casos posibles, entonces será un ECB. También si aplica alguna demostración articulando elementos teóricos, pero que solo refiere a una

clase de ejemplos limitada. Por otra parte, si se incluyen razones que aluden a otros elementos puestos adicionalmente, será de tipo ECC.

Los resultados se resumen en la siguiente figura:

**Figura 26.**

*Balace de los tipos de demostración del cuarto problema para la segunda prueba.*



Nuevamente es el empirismo ingenuo el que prevalece como el tipo de demostración con más presencia en los 10 datos que se obtuvieron de este problema. Solo se encontró un experimento crucial basado en el ejemplo y otro de tipo constructivo. Aclaremos que la cantidad de respuestas registradas es muy pequeña en comparación con los puntos anteriores y eso tuvo efecto en la variabilidad del tipo de demostración. El mayor tiempo en el desarrollo de la prueba se empleó en la resolución del primer y segundo punto.

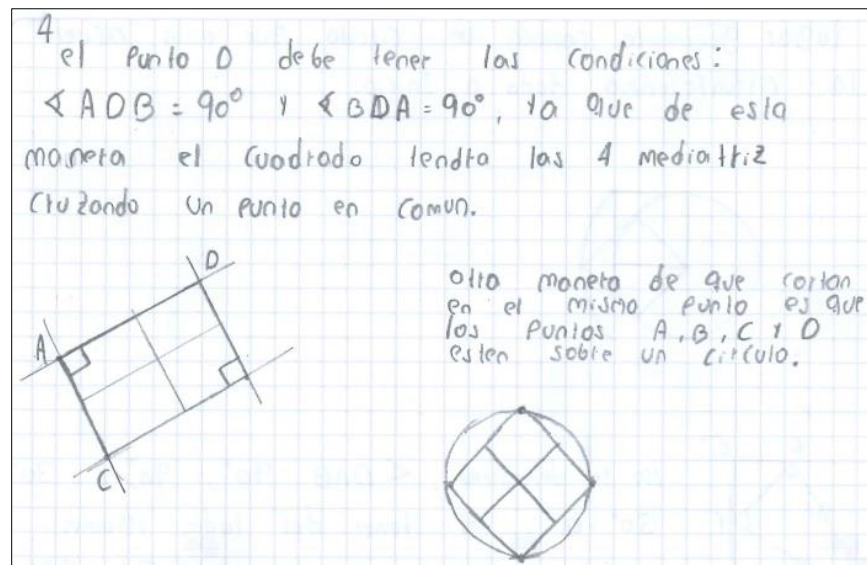
Con este problema se buscaba ver la forma en la que opera el razonamiento de los estudiantes cuando la tarea es determinar las condiciones suficientes y necesarias para garantizar

la verdad de una afirmación. Esto plantearía la cuestión de cómo ordenar lógicamente su justificación, considerando que hay un doble camino que se debe seguir: demostrar que, bajo las condiciones propuestas se cumple la concurrencia de las mediatrices y que, en otro caso ya no se tiene el resultado. Pero los estudiantes no llegaron a plantear una demostración al hecho, solo se limitaron a la conjetura.

Se identificaron dos conjeturas modelo, la primera propone que los puntos A, B, C y D deben formar un cuadrado y la segunda, que tales puntos deben estar en una misma circunferencia. Esta última es la más completa. Pero aquellos que llegaron a la segunda conjetura, lo hicieron por vía de la primera, nótese el siguiente ejemplo:

### Figura 27.

*Respuesta de L13 al cuarto problema de la segunda prueba.*



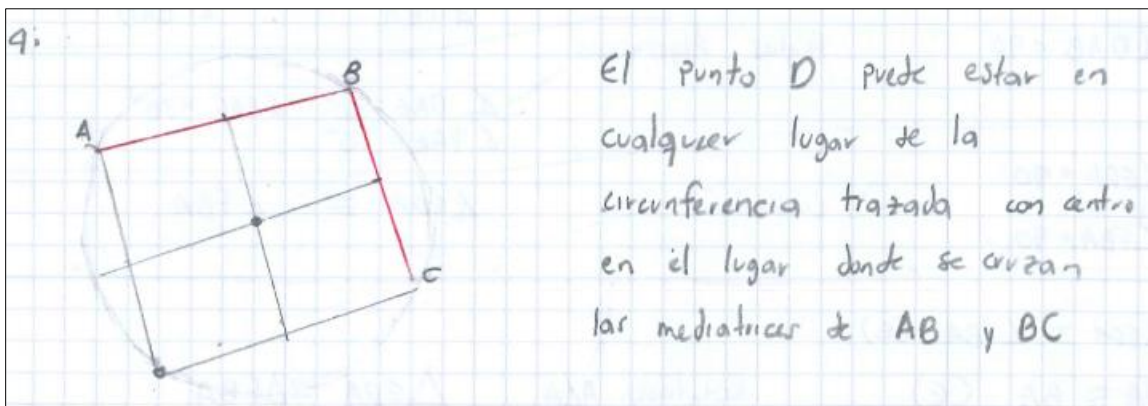
El segundo párrafo pone textualmente la conjetura correcta, pero estas palabras se deben interpretar en conjunto con los dibujos. Lo primero que hace es plantear la situación en la que los

cuatro puntos forman un rectángulo. Aquí ya se imponen cambios en las condiciones iniciales del problema, pues los tres puntos dados no están en una disposición genérica. De la obtención de un caso que cumple (el rectángulo) plantea, ya sea por una razón de simetría o por imaginarse una rotación que, si los cuatro son concíclicos la concurrencia se mantiene. Pero en el dibujo se observa que dicha circunferencia parece surgir de la rotación del rectángulo (que ahora parece un cuadrado) y no porque se hayan encontrado razones genéricas sobre las mediatrices.

Solo en una ocasión, el dibujo que acompaña parece ilustrar un cuadrilátero genérico, como lo hizo L11, esto se reafirma en la justificación, en la que hace énfasis que los puntos pueden estar en *cualquier lugar* de la circunferencia.

### Figura 28.

*Respuesta de L11 al cuarto problema de la segunda prueba.*



El primer experimento crucial se asignó a M01. Su conjetura indica que las mediatrices tendrán un punto en común si los puntos son vértices de un cuadrado, al igual que los ejemplos anteriores, pero se preocupa por demostrar rigurosamente este hecho. Vemos que sí hay una presuposición de generalización, que es precisamente el carácter formal de su prueba.

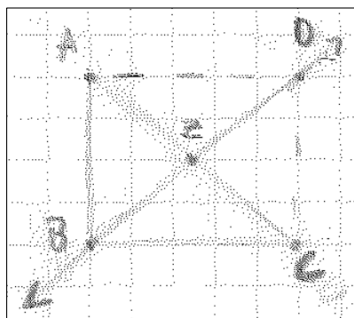
Consideramos que, si bien, vale solo para un conjunto de casos, este aspecto funge como elemento crucial para dar confianza a toda una clase de casos.

Por otro lado, llama la atención la respuesta de M12, quien propone una especie de construcción paso a paso con los puntos dados, ver figura 28:

M12: 1. *Dados los puntos A, B y C construir un triángulo.* 2. *Después ubicar un punto D el cual me forme un cuadrilátero que sea un cuadrado...*

### Figura 29.

*Dibujo que acompaña la respuesta de M12 al cuarto problema de la segunda prueba.*



Si se sigue la secuencia que plantea, se obtiene un ejemplo donde se cumple la intersección pedida. En este ejemplo el cambio de las condiciones iniciales es explícito en el primer paso y esto nos permite inferir que, la manipulación de los puntos A, B y C no se lleva a cabo como estrategia para la obtención de un caso, sino que es producto de que no comprenden el estatus de elemento dado. Imponer condiciones sobre lo dado no es un ejercicio heurístico.

Por último, no se encontraron respuestas fallidas gracias a que todas las conjeturas fueron correctas y se sustentaron al menos en el dibujo como elemento de convicción. En este último inciso no se observaron demostraciones deductivas ni intentos estéticos como el formato a dos columnas. No desconocemos que las razones de esto sean muy variadas, desde la falta de

habilidades heurísticas y de razonamiento, procesos de visualización poco desarrollados, inexperiencia en este tipo de problemas, etc. pero es necesario dejar claro que los elementos de convicción se movilizan en un salto discreto desde lo más empírico a lo puramente deductivo revelando por una parte que ya hay avances en la demostración, aunque también siguen aflorando los empirismos ingenuos con mucha frecuencia.

### **5. Conclusiones**

El presente estudio caracterizó las demostraciones de los estudiantes antes de instruirse en la matemática universitaria y en un momento posterior en el que ya han recibido instrucciones en esa vía. La implementación de la tipología de demostraciones actualizada de Fiallo (2011), se erigió como herramienta idónea para que nuestro análisis apuntara satisfactoriamente a la consecución de los objetivos trazados. Dicha herramienta teórica nos permitió obtener información útil acerca del estado en el que ingresan los estudiantes con respecto a sus prácticas de prueba, su comprensión de la demostración, los elementos que más los convencen de un hecho geométrico, la sensibilidad a la generalización que presentan e incluso algunas formas de razonamiento visibles en su producción escrita; datos que constituyen un gran aporte en el contexto local y que preparan el terreno para la génesis de intervenciones prácticas efectivas. Así también, el desarrollo de la investigación bajo una metodología mixta resultó pertinente para dar una caracterización de las proporciones en las que aparecieron los diferentes tipos de prueba e identificar las tendencias generales, a la vez que se tuvo una descripción detallada de los casos representativos.

Por lo que se refiere a los instrumentos de recolección de datos, convenimos en que los problemas propuestos, por una parte, estimularon a los estudiantes a proponer ideas propias y variadas que los llevaron a ahondar en el contenido de sus argumentos puesto que eran resolubles

con los presaberes. Por otro lado, algunos de estos evocaron conjeturas aparentemente muy sencillas u obvias, entonces algunos participantes no reunieron suficientes elementos como para dar un sustento más fuerte a sus conclusiones. En la segunda prueba los dos primeros puntos se llevaron la mayor parte del tiempo programado de aplicación y en los dos últimos se consolidaron pocas participaciones. El cuarto problema específicamente solo registra 10 respuestas, por lo que pierde representatividad. Otro aspecto relevante tiene que ver con el tipo de información recolectada, al enfocarnos únicamente en las hojas de respuesta estamos de acuerdo en que se prescinde de información útil sobre las ideas de los estudiantes, incluso el uso del software de geometría dinámica; pero precisamente nuestra atención eran las producciones escritas, ya que queríamos ver los elementos que aparecen en el producto final y no tanto los que se consideraron por fuera de este. En ese sentido, fue necesario dejar en claro los criterios que usamos para la clasificación, ya que la tipología que usamos exige discriminar entre el empirismo ingenuo intelectual y analítico, de modo que pudiéramos reconocer las propiedades conocidas por el estudiante de las simplemente vistas en el momento.

En relación con los resultados puntuales, encontramos que ahora que los estudiantes están más adentrados en el curso, hacen esfuerzos por ordenar deductivamente su demostración, aunque sea solo en un plano sintáctico, es decir, que exista una forma deductiva sin que las deducciones sean válidas necesariamente. Esto nos llama la atención especialmente ya que es un indicativo que su razonamiento puede ir en otra vía, que no es la deductiva. La promoción de ideas sobre la demostración que han recibido en el momento de la segunda prueba crea una necesidad que no se tenía antes, que es buscar que su argumento cumpla con las condiciones debidas. Con este fin, los alumnos elaboran estrategias *ad hoc* para que su escrito se parezca a aquello que le piden. Así que, en esta tarea suelen preocuparse más por lo estético que por lo estructural.

Algunos avances observados tienen que ver con la selección del ejemplo, las figuras elegidas son más genéricas y por esta razón solo se plantea una única. Según el caso también lograron construir demostraciones puramente deductivas y formales, en donde abundó la referencia a reglas teóricas (los despejes algebraicos se omiten y dejan de funcionar como elementos de convicción), la declaración del estatus de los elementos (dados, construidos, etc.) y demás aspectos que apuntan al ideal de la prueba. Todos estos aparecieron como elementos de convicción, junto con el formato de las columnas y un lenguaje más afín con el campo semántico especializado de las matemáticas, pero también prevalecen los mismos elementos de convicción empíricos vistos en la primera evaluación. En aquellas situaciones en las que no se encuentran ideas para justificar se vuelve a la función explicativa de la prueba como elemento principal. Podemos decir que, más allá de evidenciar un tránsito de los elementos empíricos a los completamente deductivos, hay una diversificación en la que convive lo formal con lo empírico que revela un tránsito más continuo de lo primero a lo segundo.

Con respecto a esto, es interesante ver el cambio en la distribución de los tipos de demostración de la primera prueba con respecto a la segunda. En esta última hubo menor diversidad, aunque se esperaba que afloraran en mayor medida demostraciones intermedias en lo que sería el ejemplo genérico, en cambio se concentraron en los dos extremos, es decir, entre el empirismo ingenuo y el experimento crucial y las demostraciones formales. La razón es que aquellos estudiantes que lograron encontrar elementos para relacionar antecedentes con consecuentes saltaron a las demostraciones deductivas, de modo que un problema aquí es la falta de razonamiento visual. En la primera prueba la selección del ejemplo fue un condicionante, mientras que en la segunda fue decisivo el razonamiento visual.

Cuando la demostración no se hace formal, se busca que la cumpla con su función explicativa. Producto de los nuevos valores que los estudiantes adquieren de la prueba se ocultan ciertos tipos de demostración asociados a experimentos mentales. Quizá la presentación de la demostración resaltando valores como el formalismo y la deducción hacen que los estudiantes se inhiban de agregar condiciones adicionales o hacer construcciones auxiliares que conduzcan sus ideas por caminos más creativos. Porque ahora hay una preocupación que ellos entienden de forma, aunque es de estructura. Y una de las características que tienen las formas deductivas es que no producen información nueva, ya que todo lo que se obtiene en realidad está contenido en las premisas. Por lo tanto, subscriben a la idea de concluir todo a partir de lo dado sin hacer una exploración heurística enriqueciendo el dibujo.

Como se evidenció, los estudiantes los estudiantes van seleccionando las cosas que no hay que mostrar en función del grado de obviedad que les parece. Omiten lo *obvio*, pero esto es muy amplio, esto se vio en las dos pruebas, aunque en la segunda prueba fue más refinado en tanto que ajustaron sus pasos para darle una apariencia deductiva.

Un aspecto problemático que es importante resaltar fue la falta de reflexión sobre la posibilidad de contraejemplos. La imposibilidad de plantear contraejemplos conlleva a casarse con un único ejemplo. El problema epistemológico que subyace es que se resume el corpus de configuraciones a una sola que no es representante de dicha clase. Se quiere extraer una verdad sobre el conjunto a partir de un caso que no lo representa, un caso que agrega condiciones adicionales.

Acercas de las demostraciones deductivas, tenemos que una de las principales atenuantes tiene que ver con los presaberes de los estudiantes, la visualización y el desarrollo del razonamiento heurístico. Porque lograron adaptar su argumento en una demostración deductiva formal en el

segundo problema y no en los demás. También se observa que aquellas demostraciones formales estructurales siempre se correspondieron con el formato a dos columnas, lo que indica que los estudiantes asocian las Demostraciones formales a esta forma organizacional y no a la estructura del razonamiento.

Así es que, el tipo de problema como condicionante del tipo de demostración. Por ejemplo, dependiendo del tipo de situación geométrica es más conveniente tomar medidas numéricas o hacer dibujos. Y es que hay ocasiones (como en el problema 2 de la prueba diagnóstica) en las que incluir medidas numéricas no tiene sentido, ya sea porque solo es confirmación de algo que se ve claramente, porque se vuelve innecesariamente más complejo el problema, porque el registro visual es muy fuerte, etc. entonces esto condiciona el tipo de empirismo ingenuo.

No solo el tipo de demostración se ve influenciado por el tipo de problema sino también los razonamientos que emergen de este, durante la fase de argumentación y en la demostración misma. Sobre todo, en los problemas de fácil conjetura, los estudiantes llegan a esta sin un proceso previo de exploración y razonamiento, así que, para al momento de escribir la demostración se activan razonamientos abductivos en los que se busca plausiblemente las razones teóricas que mejor apoyan en resultado a probar.

Con todo esto, nuestra investigación aporta elementos prácticos para la evaluación de los avances y retrocesos de los estudiantes en el proceso de aprender a demostrar. Como dejamos ver, fuera del papel acontecen otros procesos de justificación que se deben tener en cuenta al momento de evaluar a los estudiantes y estimar adelantos. Consideramos muy importante acompañar las evaluaciones con espacios en donde el estudiante pueda explicar tanto el trabajo en el SGD como en el escrito, para tener una valoración más adecuada de lo que proponen.

Finalmente, dejamos el camino abierto para que investigaciones futuras articulen más detenidamente en un estudio de casos, aquellos procesos de conjetura y de razonamiento previo a la demostración y su relación con el producto final. También la articulación del SGD como mediador de la experiencia demostrativa, para analizar el impacto de las tecnologías en los intentos de prueba. Por ejemplo, en el SGD se estimula la construcción geométrica, por lo que la fase de argumentación está influenciada por ideas que pueden estar afines con experimentos cruciales constructivos o con transformaciones mentales (demostraciones deductivas constructivas). Otros estudios podrían indagar en aquellas demostraciones fallidas, en las razones sobre porqué fallan y cómo funcionan los elementos de convicción allí.

### Referencias

- Acosta-Gempeler, M. E., & Cardozo-Fajardo, S. (2021). Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando software de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (49), 255-276.
- Arevalo Vanegas, C. (2016) La actividad argumentativa que emerge en estudiantes de grado noveno en torno a la demostración en geometría.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (p. 200). una empresa docente.
- Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica. *Revista Ema*, 9(3), 181-204.
- Balacheff, N. (2019, June). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. In *XXVIe Colloque CORFEM*.
- Balacheff, N., Margolinas, C. (2005).  $\kappa$  Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.
- Bell, A. W. (1976). The learning of general mathematical strategies. (*No Title*).
- Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿ puede tener un papel protagónico?. *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. *Bogotá (Colombia): Ministerio de Educación Nacional*.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (26), 15-30.

- De Villiers, M. D. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *PME XV proceeding, 1991*.
- Dogan, M. F., & Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics, 106*(1), 133-150.
- Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x, 31*, 37-61.
- Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba.
- Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 1-264). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Erdoğan, E. Ö., Erdoğan, A., Dur, Z., & Denizli, Z. A. (2020). Exploring, Conjecturing and Proving with Dynamic Geometry Software: a case study. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 14*(1), 661-690.
- Escuela de Matemáticas (2017). Proyecto educativo que soporta la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas (PEP). Bucaramanga: UIS.
- Fiallo J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Valencia (España). Universidad de Valencia.
- Fiallo, J. & Gutiérrez, Á. (2009). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. *Net, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Disponible en: [www.uv.es/AngelGutierrez/apregeom/archivos2/FialloGutierrez06.pdf](http://www.uv.es/AngelGutierrez/apregeom/archivos2/FialloGutierrez06.pdf). Acceso en, 20.

- Fiallo, J. (2006). Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. *Memoria de investigación, Universidad de Valencia, Valencia, España.*
- Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Integración: Temas de matemáticas*, 31(2), 181-205.
- Hanna, G., & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III* (Vol. 7, pp. 234 - 283). Providence, EEUU: American Mathematical Society.
- Komatsu, K., & Jones, K. (2020). Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(2), 123-143.
- Larios Osorio, V. (2018). Un estudio exploratorio de los esquemas que emplean los alumnos de bachillerato para validar resultados matemáticos. *Transformación*, 14(2), 190-201.
- Mariotti, M. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill Sense.
- Mariotti, M. A., & Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM*, 51(5), 759-777.
- Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25 - 53.

- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 87-125
- MEN (1998) *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá.
- MEN (2006) *Estándares básicos de competencias*. Bogotá.
- MEN (2016) *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). Principles and standards for school mathematics. (Manuel Fernandez Reyerez, traducción). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Obra original publicada en el 2000).
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans le apprentissage des mathématiques*. (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.
- Recio, A. (2002). La demostración en matemática: Una aproximación epistemológica y didáctica. In *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almeria, 18-21 septiembre 2001*. (pp. 27-44). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Ribera, J. M., Jaime, A., Ramírez, R., & Gutiérrez, Á. (2018). Aprendizaje de la demostración por estudiantes con diferentes grados de talento matemático.
- Samper, C., Leguizamón, C., & Camago, L. (2001). Razonamiento en geometría. *Revista EMA*, 6(2), 141-158.
- Selden, A., & Selden, J. (2011). Mathematical and non-mathematical university students' proving difficulties. In *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American chapter*

*of the international group for the psychology of mathematics education. Reno, NV (pp. 675-683).*

Simsek, Z. (2020). Constructing-evaluating-refining mathematical conjectures and proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 21(2), 197-215.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge university press.

## Apéndices

### Apéndice A. Prueba diagnóstica demostración

Nombre: \_\_\_\_\_

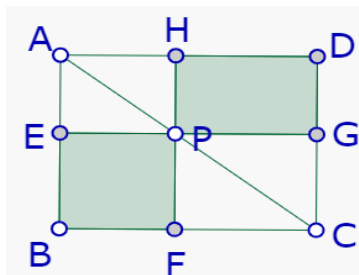
Fecha: \_\_\_\_\_

**Nota:** Escoja tres de los cuatro problemas que se presenta a continuación y resuélvalos argumentando las ideas que usó en la hoja de respuestas. Puede utilizar Dgpad o GeoGebra para explorar y comprobar conjeturas que le faciliten el proceso.

*Problema 1:* Si se duplican los lados de un triángulo, ¿qué ocurre con su área? Plantee una conjetura y demuéstrelo.

*Problema 2:* Dada una recta y un punto P que no está en ella se realiza el siguiente procedimiento: se toma un punto en la recta y se construye el punto medio del segmento que va de P a dicho punto. Si se realiza este procedimiento para todos los puntos de la recta ¿qué sucede? Plantee una conjetura y demuéstrelo.

*Problema 3:* Sea ABCD un rectángulo cualquiera, se toma un punto P en la diagonal AC y se realiza la construcción que se muestra en la imagen:



¿Qué relación encuentra entre las áreas de los rectángulos EBF P y GDHP? Plantee una conjetura y demuéstrelo.

*Problema 4:* Un cuadrado ABCD está comprendido entre dos rectas paralelas, la primera pasa por el vértice A y la segunda pasa por el vértice C. La distancia entre las dos rectas es 4. Si

se mide la distancia entre el vértice B y la segunda recta y después se mide la distancia entre el vértice D y la segunda recta. ¿Cuál será la suma de estas medidas?

### Apéndice B. Segunda prueba demostración

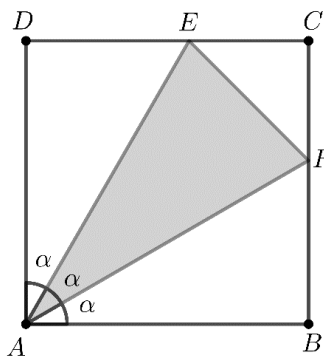
Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

**Nota:** Resuelva los problemas que se presentan a continuación exponiendo con claridad las ideas que usó en la hoja de respuestas. Puede utilizar Dgpad o GeoGebra para explorar y comprobar conjeturas que le faciliten el proceso.

*Problema 1:* Dada una circunferencia y un punto P en esta, se construye un cuadrado con vértices en el centro de la circunferencia y el punto P de modo que uno de los vértices del cuadrado queda por fuera de la circunferencia. Si se realiza la misma construcción para todos los puntos P sobre la circunferencia, ¿cuál es el lugar geométrico de los vértices por fuera de esta? Plantee una conjetura y demuéstreala.

*Problema 2:* En la siguiente figura ABCD es un cuadrado. Encuentre los ángulos del triángulo  $\triangle AFE$  y demuestre la validez de su respuesta.



*Problema 3:* Las prolongaciones de dos lados de un triángulo forman dos ángulos, uno interior y otro exterior. Para cada uno de estos se puede trazar una bisectriz (interior y exterior).

Considere un triángulo  $ABC$  y las dos bisectrices en  $C$ . ¿Qué tipo de triángulo forman dichas bisectrices con la recta  $AB$ ? Plantee una conjetura y demuéstrela.

*Problema 4:* Considere tres puntos fijos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el plano. ¿Qué condiciones debe cumplir un punto  $D$  para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero  $ABCD$  se corten en un mismo punto? Plantee una conjetura y demuéstrela.