CLASES DE FUNCIONES MONÓTONAS ENTRE CONTINUOS

ADRIANA MARÍA ALZATE PATIÑO

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2010

CLASES DE FUNCIONES MONÓTONAS ENTRE CONTINUOS

AUTOR:
ADRIANA MARÍA ALZATE PATIÑO

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

DIRECTOR:
DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2010

Agradecimientos

Doy gracias a mi madre pues soy el fruto de su amor, su pujanza y valentía.

De forma muy especial, agradezco a mis hermanos, Eliecer y Alexandra, y cada uno de los miembros de mi familia porque de una u otra forma me apoyan en la consecusión de cada un de mis sueños.

Cariñosamente doy gracias a Raúl Yesid, por mostrarme el camino correcto y acompañarme a crusarlo.

Agradezco al Dr. Javier Enrique Camargo García por su tiempo y dedicación que hicieron posible la realización de este trabajo de grado.

También quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander, a la Escuela de Matemática y a todos sus miembros entre maestros y alumnos en especial a Luzdari, Raúl y Dumar Said por aportarme tanto a nivel academico como personal.

Finalmente, agradezco a Duwang Alexis y Edinson por sus opiniones sobre mis escritos que dieron como resultado esta monografía.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

TÍTULO: CLASES DE FUNCIONES MONÓTONAS ENTRE CONTINUOS*

AUTOR: ADRIANA MARÍA ALZATE PATIÑO**

PALABRAS CLAVES:

Funciones monótonas, continuos, indescomponibilidad, irreducibilidad, unicoherencia.

DESCRIPCIÓN:

Las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, débilmente monótonas y seudomonótonas forman una clasificación de las funciones monótonas que ayudan a establecer propiedades topológicas entre los espacios. En el grupo de funciones que se estudia en el presente trabajo, también se encuentran las funciones confluentes, ya que por su utilidad en topología existe bibliografía que orienta a establecer las relaciones con las clases de funciones monótonas y a su vez, facilita conocer si se preserva cierta propiedad topológica.

Esta monografía es el estudio de las relaciones entre dichas funciones y de ciertas propiedades básicas de la topología que se cumplen bajo algunas de las clases de funciones monótonas.

Este trabajo está dividido en tres capítulos, así: el primero es un recuento de definiciones, teoremas, lemas, corolarios y algunos ejemplos de la teoría básica de la topología que son de gran utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos; en el segundo capítulo se encuentran las relaciones entre las funciones confluentes y las cinco clases de funciones monótonas que se dan por medio de proposiciones, corolarios o ejemplos según sea el caso; el capítulo final de esta monografía está conformado por el estudio de tres propiedades básicas de topología, la indescomponibilidad, la irreducibilidad y la unicoherencia. Al final del segundo y tercer capítulo se muestra una tabla que recopila todas las relaciones que se establecieron respectivamente.

---

* Monografía

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García.

TITLE: CLASSES OF MONOTONE MAPPINGS BETWEEN CONTINUA*

AUTHOR: ADRIANA MARIA ALZATE PATIÑO**

KEY WORDS:

Monotone mappings, continua, indescomposability, irreducibility, unicoherence.

DESCRIPTION:

The monotone, almost – monotone, quasi – monotone, wakly monotone and feebly monotone form a clasification of the monotone mappings, that help to establish the topological properties between spaces. In the group of mappings that are studied in the present work, also its found the confluent mappings, since their utility in topology there is bibliography that orient to establish the relationships with the clases of monotone mappings and in turn, facilitates know if preserved some topological property.

This monograph is the study of relations between these mappings and of some basic properties of the topology to be carry under some of the clases of monotone mappings.

This work is divided in three chapters, thus: the first is a recount of definitions, theorens, lemmas, corollaries and examples of the basic theory of topology are useful in the development of the following chapters; in the second chapter to be found relations between the confluent mappings and the clases five of monotone mappings given by propositions, corollaries or examples according to case; the last chapter this monograph is devoted to study of three basic properties of topology, indescomposability, irreducibility and unicoherence. At the end of the second and third chapter to be shown a table that compiles all the relationships that are established respectively.

---

* Monograph

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Javier Enrique Camargo García.

INTRODUCCIÓN

Las funciones monótonas es un tema de gran importancia en cursos de cálculo y análisis matemático. En topología, el concepto de función monótona fue generalizado y aplicado en teoremas que hoy en día son muy utilizados en el estudio de las matemáticas en general. Debido a que existe gran teoría alrededor de este concepto, se hace posible estudiar, analizar e investigar características que pueden tener estas funciones bajo ciertas condiciones. En topología las funciones monótonas han sido estudiadas con el fin de establecer, principalmente propiedades entre espacios.

Este trabajo esta basado en el artículo "*On feebly monotone and related classes of mappings*" del doctor Janusz J. Charatonik. En el desarrollo de dicho texto, encontramos algunas clases de funciones monótonas que al relacionarlas con la función seudomonótona le permitieron al autor, establecer propiedades importantes entre los continuos como descomponibilidad e irreducibilidad entre otras. En el desarrollo de éste trabajo estudiamos las relaciones, entre cinco clases de funciones monótonas que definiremos progresivamente en el desarrollo de este trabajo.

Así, este documento es un estudio de diversas clases de funciones monótonas, de las relaciones entre ellas y un estudio general de algunas propiedades topólogicas invariantes bajo ciertas clases de funciones monótonas; de mano de G.T. Whyburn [1] que trabajó con las funciones monótonas y cuasimonótonas, T. Maċkoviak [13] que relacionó las funciones cuasimonótonas, débilmente monótonas y confluentes, y por supuesto, de los valiosos aportes del Profesor Janusz J. Charatonik.

En el primer capítulo encontraremos un recuento de conceptos esenciales de la topología. Empezando con la definición de espacio métrico, logramos abarcar de forma general, temas vitales para el desarrollo del presente escrito como conexidad, compacidad, topología producto y continuos. Posteriormente mostramos algunos teoremas importantes de límites inversos.

El segundo capítulo está dedicado a establecer relaciones entre las funciones monótonas definidas, y en el capítulo final mostraremos cuando ciertas propiedades topólogicas de los continuos son preservadas bajo las clases de funciones monótonas tenidas en cuenta. Las relaciones establecidas entre las funciones monótonas serán esenciales para el desarrollo del tercer capítulo, ya que según las implicaciones entre las funciones, obtenemos la preservación de propiedades importantes para clases más grandes. Trabajaremos principalmente con la indescomponibilidad, irreducibilidad y unicoherencia.

Recopilamos tanto las relaciones entre las clases de funciones monótonas como las propiedades topólogicas que guardan dichas funciones, en una tabla que podemos encontrar al final de los capítulos correspondientes. En estas recopilaciones encontramos las referencias a los teoremas, proposiciones, corolarios y lemas, en el caso de existir la relación, y a los ejemplos apropiados cuando no hay relación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos la teoría básica de topología necesaria para el desarrollo del presente trabajo de grado. Iniciaremos con una sencilla notación para abarcar posteriormente conceptos básicos de espacios métricos, conexidad, compacidad, topología producto, continuos y finalmente límites inversos. Estos temas son la base para comprender adecuadamente los siguientes capítulos.

1.1. Notación

Para tener presente mostraremos los siguientes símbolos muy utilizados en matemáticas.

- $\mathbb{N}$: El conjunto de los número naturales.
- $\mathbb{Z}$: El conjunto de los número enteros.
- $\mathbb{R}$: El conjunto de los números reales.
- $A \subset B$: A es un subconjunto de B. Esto no excluye que $A = B$.
- $B \subsetneq A$: B es un subconjunto propio de A.
- $A \backslash B$: Diferencia entre dos subconjuntos de un mismo conjunto.

1.2. Espacios Métricos

Los espacios métricos son fundamentales en el estudio de la topología, por ello dedicaremos esta sección a analizar los conceptos de vecindad de un punto, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados y funciones continuas.

Definición 1.1. Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to [0, \infty)$ una función, diremos que d es una *métrica* si satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \geqslant 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

2. Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$,

3. Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Además X junto a una métrica d, lo llamaremos *espacio métrico* y lo denotaremos por (X, d). En el desarrollo del presente trabajo supondremos que $d(x, y) \leq 1$, para cualquier espacio métrico (X, d) y para cualesquiera x y y en X.

Por su importancia en las definiciones posteriores es necesario precisar conceptos como puntos exteriores, interiores y de frontera. Para ello definiremos en primera instancia, qué es una bola.

Definición 1.2. Sean un espacio métrico (X, d), un elemento $a \in X$ y un número real positivo r. El conjunto $\{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ denotado por $V_r^d(x)$, se denomina la *bola* con centro en a y radio r.

Definición 1.3. Sean X un espacio métrico, $Y \subset X$ y r un número real positivo. Entonces:

- x es *punto interior* de Y si existe una bola con centro en x y radio r cuyos puntos pertenecen todos a Y.

- x es *punto exterior* de Y si existe una bola con centro en x y radio r que no contiene puntos de Y.

- x es *punto frontera* de Y si toda bola con centro en x y radio r tiene puntos que pertenecen a Y y puntos que no pertenecen a Y.

El conjunto de los puntos interiores de Y, denotado por $Int_X(Y)$, es el *interior de* Y y el conjunto de los puntos de frontera de Y, denotado por $Fr(Y)$, es la *frontera de* Y. La unión de estos conjuntos, denotado por $Cl_X(Y)$, forman la *cerradura de* Y; es decir, $Cl_X(Y) = Int_X(Y) \cup Fr(Y)$. A continuación veremos un ejemplo sencillo para ilustrar lo anteriormente definido.

Ejemplo 1.4. *Tomemos a* $\mathbb{R}$ *como espacio métrico y sea* $d(x, y) = |x - y|$ *la métrica usual en* $\mathbb{R}$. *Podemos deducir que* $Int_{\mathbb{R}}(a, b] = (a, b)$, $Fr(a, b] = \{a, b\}$ *y* $Cl_{\mathbb{R}}(a, b] = [a, b]$.

Definición 1.5. X es un espacio métrico, $Y \subset X$ es un *conjunto abierto* si todos sus puntos son puntos interiores. Además diremos que la familia de todos los abiertos de X forman *una topología de* X.

Debido a la utilidad que tienen los conjuntos abiertos presentaremos algunas propiedades sobre ellos.

Teorema 1.6. *Sea* X *un espacio métrico,*

(1) La unión arbitraria de subconjuntos abiertos de X *es un abierto en* X

(2) La intersección finita de subcontinuos abiertos de X *es un abierto en* X.

Demostración. (1) Sea Y una familia de abiertos en X y supongamos que $S = \bigcup_{A \in Y} A$ para demostrar que S es abierto. Si $x \in S$ entonces $x \in A$ para algún $A \in Y$. Como A es abierto existe un número real $r > 0$ tal que $V_r^d(x) \subset A$. Ahora $A \subset S$, luego $V_r^d(x) \subset S$; es decir, que x es un punto interior a S. Por lo tanto S es abierto.

(2) Sean $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ un conjunto de abiertos y $T = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Supongamos que $T \neq \emptyset$ ya que si $T = \emptyset$ hemos concluido la demostración. Sea $x \in T$. Notemos que $x \in A_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como A_i es un abierto entonces existen números

reales positivos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que $V_{r_i}^d(x) \subset A_i$. Sea $r = min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Luego $r \leq r_i$. Así $V_r^d(x) \subset V_{r_i}^d(x)$. Con lo que $V_r^d(x) \subset A_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto $V_r^d(x) \subset T$ y así, x es un punto interior de T. Con lo que T es abierto. $\square$

De la definición de abierto tenemos directamente la definición de conjunto cerrado.

Definición 1.7. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$, Y es un *conjunto cerrado* si y sólo si $X \backslash Y$ es un conjunto abierto.

Ahora tenemos una analogía del Teorema 1.6 para los conjuntos cerrados, la cual se sigue de la Definición 1.7.

Teorema 1.8. *Sea X un espacio métrico,*

- *La intersección arbitraria de cerrados de X es un cerrado.*
- *La unión finita de cerrados de X es un cerrado.*

El siguiente teorema nos dice que $Cl_X(Y)$ es el cerrado mas pequeño que contiene a Y, una caracterización importante de la cerradura de un conjunto.

Teorema 1.9. *Si X es un espacio métrico y $Y \subset X$ entonces*

$$Cl_X(Y) = \bigcap\{F \subset X | Y \subset F \ \text{y} \ \ F \ \text{es cerrado en} \ \ X\}$$

Demostración. Sabemos que $Cl_X(Y)$ es cerrado, por el Teorema 1.8. Así, $\bigcap\{F \subset X | Y \subset F$ y F es cerrado en $X\} \subset Cl_X(Y)$. Luego, es suficiente probar que $Cl_X(Y) \subset \bigcap\{F \subset X | Y \subset F$ y F es cerrado en $X\}$.

Sea $x \notin \bigcap\{F \subset X | Y \subset F$ y F es cerrado en $X\}$ y probemos que $x \notin Cl_X(Y)$. Como $x \notin \bigcap\{F \subset X | Y \subset F$ y F es cerrado en $X\}$ entonces existe F cerrado en X, tal que $Y \subset F$ y $x \notin F$. Entonces $x \in X \backslash F$. Luego $X \backslash F$ es un abierto de X tal que $X \backslash F \cap Y = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin Int_X(Y)$ y $x \notin Fr(Y)$. Con lo que concluimos que $x \notin Cl_X(Y)$. $\square$

Es común en topología relacionar los espacios con funciones continuas y homeomorfismos, los cuales preservan propiedades topológicas importantes, algunas de ellas las mostraremos después de su definición.

Definición 1.10. Sea $f : (X, d) \to (Y, d_0)$ una función entre espacios métricos.

- Sea x un punto en X. Diremos que f es *continua* en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(V_\delta^d(x)) \subset V_\varepsilon^{d_0}(f(x))$. La función f es *continua* si es continua en cada uno de los puntos de X.

- Sea f una función biyectiva. Diremos que f es un *homeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son continuas.

En adelante no usaremos la notación (X, d) para espacio métrico sino simplemente escribiremos X un espacio métrico, ni tampoco haremos diferencia entre las métricas de diferentes espacios. Una prueba del siguiente teorema puede ser encontrada en [7, Teorema 18.1, pág. 118].

Teorema 1.11. *Si $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(1) f es contiua si y sólo si para todo abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

(2) f es continua si y sólo si para todo cerrado C de Y se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X.

1.3. Conexidad

Tomando la definición de conexidad y algunas propiedades mostraremos ejemplos y características importantes de los conjuntos conexos.

Definición 1.12. Un espacio métrico X es *disconexo* si existen cerrados disyuntos diferentes de vacío, A y B, tales que $X = A \cup B$. Si X no es disconexo entonces diremos que es *conexo*.

En los libros de topología es común encontrar la siguiente proposición como equivalente a la definición de conexidad, aquí veremos su demostración.

Teorema 1.13. *Los únicos subconjuntos tanto abiertos como cerrados de un conexo X son $\emptyset$ y X.*

Demostración. Sea X conexo y supongamos que A es un subconjunto propio no vacío de X, tal que A es abierto y cerrado. Si $B = X \backslash A$ entonces $X = A \cup B$ y, A y B son cerrados diferentes del vacío, por lo tanto X es disconexo.

Sean A y B cerrados disyuntos y diferentes de vacío tales que $X = A \cup B$. Como B es cerrado y $A = X \backslash B$, entonces A es abierto. Por lo tanto A es abierto y cerrado diferente de vacío y X. $\square$

Notemos que para subespacios tenemos la siguiente proposición equivalente a la Definicíon 1.12.

Proposición 1.14. *Si X es un espacio métrico y $Y \subset X$, diremos de Y es disconexo si existen dos subconjuntos diferentes del vacío E, F en X tales que $Cl_X(E) \cap F = \emptyset$, $E \cap Cl_X(F) = \emptyset$ y $Y = E \cup F$.*

Los subespacios conexos son aquellos espacios conexos contenidos en un espacio métrico. A continuación tenemos algunas propiedades de los subespacios conexos.

Lema 1.15. *Sea X un espacio métrico. Si Y es un subespacio conexo de X y A, B son conjuntos abiertos disyuntos tales que $A \cup B = X$ entonces $Y \subset A$ ó $Y \subset B$.*

Demostración. Como A y B son abiertos en X, los conjuntos $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disyuntos y su unión es Y. Si ambos son no vacíos, entonces tenemos una separación de Y. Así, alguno de ellos es vacío. Por tanto, Y está contenido totalmente en A ó en B. $\square$

Teorema 1.16. *Sean X un espacio métrico y A un subespacio conexo de X. Si $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset Cl_X(A)$ entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es la unión de dos conjuntos C y D disyuntos y no vacíos de X, tales que $B = C \cup D$ y $(Cl_X(C) \cap D) \cup (C \cap Cl_X(D)) = \emptyset$. Como A es subespacio conexo de X, $A \subset C$ ó $A \subset D$. Supongamos que $A \subset D$ entonces $Cl_X(A) \subset Cl_X(D)$ pero $Cl_X(D)$ y C son disyuntos, por Proposición 1.14. Luego B no puede intersecar a C. Por lo tanto C es vacío, lo que nos produce una contradicción. De la misma manera se procede cuando $A \subset C$. □

Veamos a continuación una herramienta muy útil para construir un conexo.

Teorema 1.17. *Sea X un espacio métrico. Si $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos conexos de X con por lo menos un punto en común entonces $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que existen A y B dos subconjuntos de X, tales que $A \cup B = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ y, A y B satisfacen las hipótesis de la Proposición 1.14. Por el Lema 1.15, $Y_\lambda \subset A$ ó $Y_\lambda \subset B$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Sea $p \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$. Si $p \in A$ entonces $Y_\lambda \subset A$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Luego $B = \emptyset$. Así $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ es conexo. □

También, como consecuencia del Teorema 1.17, podemos concluir que la unión numerable de conexos que se intersectan consecutivamente, es decir, el primero interseca al segundo, el segundo interseca al tercero y así sucecivamente, es conexo.

Además, con el siguiente resultado veremos que la conexidad es preservada bajo funciones continuas.

Teorema 1.18. *Sea $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva entre espacios métricos. Si X es conexo entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y es disconexo tenemos que existen A y B abiertos disyuntos no vacíos de Y tales que $Y = A \cup B$. De la Propiedad 1 del Teorema 1.11 y la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos de X. Además $X = f^{-1}(Y) =$

$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Como $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Luego X no es conexo. $\square$

Definición 1.19. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$ entonces A es una *componente* de X si y sólo si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene que $B = A$.

Es importante resaltar que por el Teorema 1.16, toda componente de un cerrado es cerrada.

1.3.1. Conexidad Local

Teniendo en cuenta ciertas características del espacio se establece que dicho espacio es conexo bajo otras condiciones más estrictas como veremos a continuación.

Definición 1.20. Un espacio X se dice que es *localmente conexo en x* si para cada abierto U que contiene a x, existe un abierto conexo V que contiene a x tal que $V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es *localmente conexo.*

Veamos el siguiente ejemplo sencillo para ilustrar la anterior definición.

Ejemplo 1.21. *El conjunto $[a, b) \cup (b, c] \in \mathbb{R}$ es localmente conexo y los números racionales $\mathbb{Q}$ no son localmente conexos.*

En general, las componentes de un conjunto abierto no son abiertas. El siguiente resultado nos muestra como está relacionada la conexidad local con las componentes de los abiertos del espacio.

Teorema 1.22. *Un espacio X es localmente conexo si y sólo si para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y sean U un abierto de X y C una componente de U. Si x es un punto de C, podemos elegir un abierto conexo V

de x tal que $V \subset U$. Como V es conexo, debe estar completamente contenido en la componente C de U. Así, C es abierto en X.

Ahora supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertos en X. Dado un punto x de X y un abierto U de x, sea C la componente de U que contiene a x. Como C es conexo y abierto en X, X es localmente conexo en x. $\square$

1.4. Compacidad

La compacidad es una de las propiedades más importantes en topología, en esta sección estudiaremos algunas propiedades de los compactos.

Definición 1.23. Sea X un espacio métrico y $Y \subset X$. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X es *una cubierta* de Y si $Y \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ también es una cubierta de Y entonces $\mathcal{U}'$ es una *subcubierta* de Y.

Si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de Y son abiertos de Y entonces $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* de Y.

Definición 1.24. Un subconjunto Y de un espacio métrico X es *compacto* si toda cubierta abierta de Y tiene una subcubierta finita.

Los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ son espacios compactos [10, Teorema 1.41, pág. 15]. Veamos de manera general en el siguiente teorema, como se comportan los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, una demostración puede ser consultada en [7, Teorema 27.3, pág. 197].

Teorema 1.25. *Sea Y un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces Y es compacto si y sólo si Y es cerrado y acotado.*

De manera similar como las funciones continuas preservan la conexidad también ocurre con la compacidad.

Teorema 1.26. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre espacios métricos. Si X es compacto entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de Y. De la Propiedad 1 del Teorema 1.11 tenemos que la familia $\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})$. De donde

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(V_{\lambda_k})) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}$$

Así, tenemos que $\{V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_n}\}$ es una subcubierta finita de Y. □

Ahora mostraremos algunas propiedades de los compactos sobre los conjuntos tanto abiertos como cerrados.

Teorema 1.27. *Si Y es un subespacio cerrado de un espacio métrico compacto X entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$. Tomemos el conjunto abierto $X \setminus Y$ para que $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{X\setminus Y\}$ sea una cubierta abierta de X. Como X es compacto entonces existe un subcubierta finita. Luego existen subconjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k \cup (X\setminus Y) = X$. Por tanto $Y \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$, y así $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ es una subcubierta finita de $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. □

Las siguientes son propiedades equivalentes muy conocidas e importantes de los espacios métricos. Aunque la primera de ellas define los espacios normales, aquí solo utilizaremos su significado bajo este teorema. Una prueba del segundo teorema puede ser consultada en [7, Lema 31.1(b), pág 224].

Teorema 1.28. *Sea X un espacio métrico. Si A y B son dos subconjuntos disyuntos y compactos de X, entonces existen abiertos disyuntos U y V de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Teorema 1.29. *Sea X un espacio métrico. Si A es un subconjunto compacto de X y U es un abierto de X tal que $A \subset U$ entonces existe un abierto V de X tal que $A \subset V \subset Cl_X(V) \subset U$*

Teorema 1.30. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una secuencia de espacios métricos compactos no vacíos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots$ y $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un subconjunto abierto de X_i tal que $X \subset U$, entonces existe N tal que $X_i \subset U$ para cada $i \geq N$ (Además X es compacto).*

Demostración. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in X_i \backslash U$. Como $X_i \backslash U$ es compacto entonces podemos decir que la secuencia $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p \in X_i \backslash U$. Para cada $k, x_i \in X_k$ con $i \geq k$, tenemos que $p \in X_k$. De esta forma, $p \notin U$, contradiciendo que $X \subset U$. Entonces existe N tal que $X_i \subset U$ para cada $i \geq N$. Notemos que $X \neq \emptyset$ pues cada $X_i \neq \emptyset$, ya que si $X = \emptyset$ podemos tomar $U = \emptyset$ y tendriamos que $X_i = \emptyset$ $\square$

A continuación tenemos el *Teorema del Cable Cortado* que nos será de gran utilidad en la demostración de algunos resultados posteriores. La demostración de este teorema puede ser consultada en [11, Teorema 5.2, pág. 72].

Teorema 1.31. *[Cable Cortado]. Sean X un espacio métrico y compacto, A y B dos subconjuntos cerrados de X. Si no existe ningún subconjunto conexo de X que intersecte tanto a A como a B entonces existen X_1 y X_2, tales que $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son dos cerrados disyuntos de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

1.5. Topología Producto

En esta sección veremos una nueva manera de generar espacios métricos compactos y conexos.

Definición 1.32. Sea (X_i, d_i) una sucesión de espacios métricos con métrica d_i. Definimos el *espacio producto*:

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} : x_i \in X_i,\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

con la métrica

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

Ahora mostraremos dos teoremas importantes para productos numerables conocido en topología. Su demostración la encontramos en [8, Teorema 11, pág. 137] y [9, Teorema 1.1.11, pág. 6], respectivamente.

Teorema 1.33. *El producto numerable de espacios conexos es conexo.*

Teorema 1.34. *El producto numerable de espacios compactos es compacto.*

1.6. Continuos

Definiremos en primera instancia un contiuo y basados en esto veremos algunos ejemplos conocidos de continuos. Finalmente mostraremos que a través de las intersecciones anidadas podemos construir continuos muy interesantes.

Definición 1.35. *Un continuo* es un espacio métrico, no vacío, conexo y compacto. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

Los intervalos cerrados y acotados son los ejemplos mas sencillos de continuos. Otro ejemplo sencillo de un continuo es una circunferencia que también llamaremos curva cerrada simple y se denota por S^1 que es exactamente:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

A continuación veremos otros continuos.

Ejemplo 1.36. *Si* $x \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$, *la bola cerrada* $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *es un continuo.*

Ejemplo 1.37. *Sea* $Y = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1\}$. *Veamos que* $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(Y) = Y \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq y \leq 1\}$ *es el continuo ilustrado por la Figura 1.1 conocido en topología como la* Curva Senoidal del Topólogo.

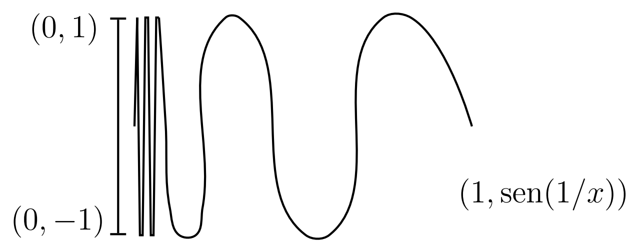


Figura 1.1 Curva Senoidal del Topólogo

Ejemplo 1.38. *Si consideramos un arco* Z *del punto* $(0, -1)$ *al punto* $(1, sen(1))$ *del continuo* X *del ejemplo anterior, de tal manera que* $X \cap Z = \{(0, -1), (1, sen(1))\}$. *Entonces* $\mathcal{V} = X \cup Z$ *es un continuo llamado el* Círculo de Varsovia. *(Ver Figura 1.2).*

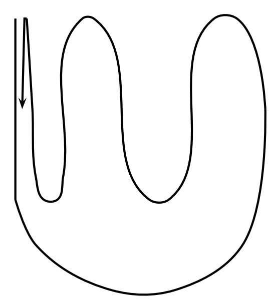


Figura 1.2 Círculo de Varsovia

Algunos otros ejemplos de continuos son:

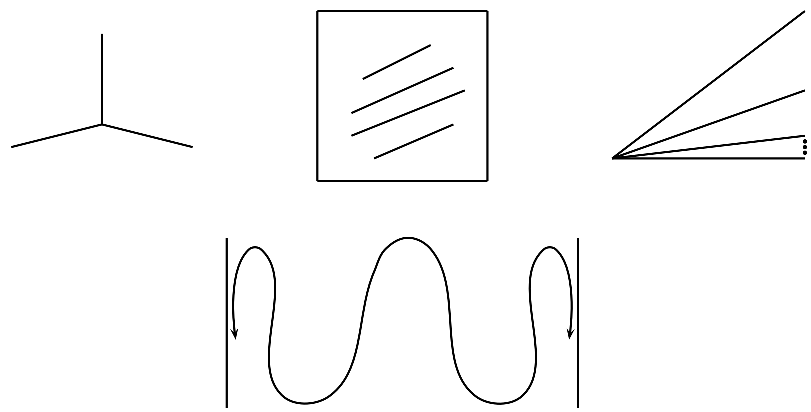


Figura 1.3 Ejemplos de continuos

Por la intersección anidada podemos formar continuos, con el fin de dar ejemplos, direccionar una demostración y, de ser necesario, construir una función continua.

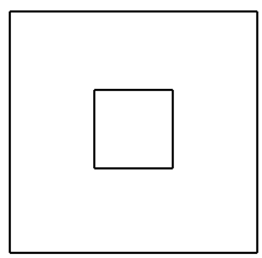
Teorema 1.39. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subcontinuos tal que* $X_{i+1} \subset X_i$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Si* $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ *entonces* X *es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.30 X es un espacio compacto y no vacío. Ahora supongamos que existen $A \cup B = X$ donde A y B son conjuntos cerrados disyuntos no vacíos. Sean V y W dos abiertos disyuntos tales que $A \subset V$ y $B \subset W$ (ver Teorema 1.28). Si $U = V \cup W$, entonces $X_i \subset U$ con $i \geq k$ y así $X_i = (X_i \cap V) \cup (X_i \cap W)$. Si $X_i \supset X = A \cup B$ entonces $X_i \cap V \neq \emptyset$ y $X_i \cap W \neq \emptyset$ pero como X_i es conexo y por el Lema 1.15 hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto X es conexo. $\square$

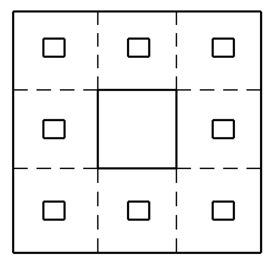
Ahora veamos dos continuos muy conocidos que están definidos mediante la intersección anidada de subcontinuos.

Ejemplo 1.40. *Dividamos el cuadrado* $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ *en nueve cuadrados congruentes y tomemos* $S_1 = S_0 \backslash ((1/3, 2/3) \times (1/3, 2/3))$. S_1 *podemos verlo en la Figura*

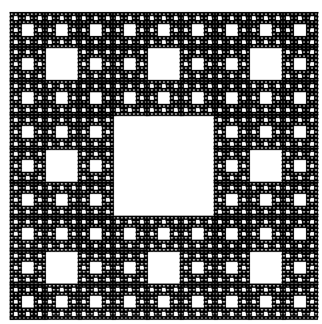
1.4 (a). Ahora dividamos cada uno de los ocho cuadrados restantes en nueve cuadrados congruentes y llamemos S_2 al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. En la Figura 1.4 (b) vemos a S_2. Análogamente definimos S_3, S_4, etc. Los primeros pasos de esta construcción podemos verlos en la Figura 1.4 (c). Si $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, entonces $\mathcal{S}$ es un continuo por ser una sucesión de una intersección anidada de subconjuntos. Este ejemplo es conocido como la Curva Universal de Sierpiński



(a)



(b)



(c)

Figura 1.4 Curva Universal de Sierpiński

Ejemplo 1.41. *Tomemos el cubo $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada una de sus caras en nueve cuadrados congruentes y perforemos a través del interior de cada cuadrado central. Llamemos a esto el continuo M_1. Dividamos cada unos de los cuarenta y ocho cuadrados restantes en nueve cuadrados congruentes y hagamos de nuevo un agujero a través del interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo M_2. Repetimos este proceso para obtener continuos M_n. La*

Curva Universal de Menger es, por definición $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. *Por el Teorema 1.39* $\mathcal{M}$ *es un continuo.*

Ejemplo 1.42. *El Cubo de Hilbert definido por* $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$ *donde cada* $I_i = [0,1]$, *y dotado de la métrica definida en la Defnción 1.32 es un continuo muy usado en topología debido a que todo continuo puede ser inmersado en este espacio [12, Teorema 23.1(c), pág. 166].*

Algunas propiedades importantes de los continuos serán desarrolladas en el transcurso de este trabajo.

1.7. Límites Inversos de Continuos

Dedicaremos la parte final de este capítulo a mostrar la definición y algunas propiedades básicas de los límites inversos que nos conduzcan a obtener ejemplos que ilustren propiedades topológicas que se preservan bajo las clases de funciones monótonas.

Definiremos los límites inversos para los espacios métricos y así estudiar posteriormente la extensión de este concepto en los continuos.

Definición 1.43. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. La sucesión $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ de espacios y funciones la llamaremos *sucesión inversa.* Además, si $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa, definimos el *límite inverso de* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$, que denotaremos $\varprojlim\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ o simplemente X_∞ por:

$$X_\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \varphi_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Escribiremos φ_n para referirnos a $\pi_n|_{X_\infty} : X_\infty \to X_n$, donde π_n es la proyección natural del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ en X_n.

$$X_1 \xleftarrow{\varphi_1^2} X_2 \xleftarrow{\varphi_2^3} X_3 \leftarrow \cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\varphi_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{\varphi_n^{n+1}} X_{n+1} \leftarrow \cdots$$

Ahora mostraremos dos propiedades importantes de las sucesiones inversas de espacios métricos.

Proposición 1.44. *Sea* $\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, definimos* $Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : \varphi_n^{n+1}(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \leq n\}$*, entonces:*

- $Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}) \supset Q_{n+1}(X_i, \varphi_n^{n+1})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*
- $Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$ *es homeomorfo a* $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*,*
- $\varprojlim\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$.

Demostración. Por la definición de $Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$ tenemos que para toda $i \leq n$, $\varphi_n^{n+1}(x_{i+1}) = x_i$ luego $Q_{n+1}(X_i, \varphi_n^{n+1}) \subset Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$. Ahora definamos:

$$h : Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}) \to \prod_{n=1+1}^{\infty} X_i$$

por:

$$h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty} \text{ para cada } (x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}).$$

No es dificil probar que h es un homeomorfismo entre estos dos espacios métricos.

Finalmente veamos que cada elemento $(x_i)_{i=n+1}^{\infty}$ en $\varprojlim\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty}$ esta en $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$, además $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}) \subset \varprojlim\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty}$. Por lo tanto,

$$\varprojlim\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1}).$$

□

Notemos que si $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa de continuos, entonces cada $Q_n(X_i, \varphi_n^{n+1})$ es un continuo, pues, es homeomorfo al producto numerable de compactos y conexos. Así, con la tercera parte de la proposición anterior, podemos asegurar que X_∞ es la intersección anidada de continuos. Con esto, es inmediata la prueba del siguiente teorema.

Teorema 1.45. *Sea* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ *una sucesión inversa de espacios métricos. Si* X_n *es un continuo para cada* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $\varprojlim\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ *es un continuo.*

Recordando los continuos que hemos presentado hasta este momento, notemos que los podemos escribir como la unión de dos de sus subcontinuos propios. Esta propiedad topológica la formalizaremos en la siguiente definición y no está presente en todos los continuos, en particular, usaremos los límites inversos para construir coninuos que no satisfagan esta propiedad.

Definición 1.46. Un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B tales que $A \cup B = X$. Un continuo X es *indescomponible* si no es decomponible.

Con el siguiente resultado estableceremos que las sucesiones inversas que cumplan con ciertas condiciones son continuos indescomponibles.

Teorema 1.47. *Sea* $\{X_i, \varphi_n^{n+1}\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa tal que para cada* $i \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera dos subcontinuos* A_{i+1} *y* B_{i+1} *de* X_{i+1} *donde* $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$*, tenemos que* $\varphi_n^{n+1}(A_{i+1}) = X_i$ *o* $\varphi_n^{n+1}(B_{i+1}) = X_i$*. Si* X_∞ *es el límite inverso entonces* X_∞ *es un continuo indescomponible.*

Dos ejemplos muy estudiados en la teoría de continuos y de límites inversos son presentados a continuación:

Ejemplo 1.48. *Sean* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *una función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si\ x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tomando $X_n = [0, 1]$ *y a* $\varphi_n^{n+1} = f$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ *es una sucesión inversa que satisface las condiciones del Teorema 1.47. Así,* X_∞ *es un continuo indescomponible. El espacio* X_∞ *es conocido como el* Arcoiris de Knaster. *Una idea de la representación de* X_∞ *se muestra en la Figura 1.5.*

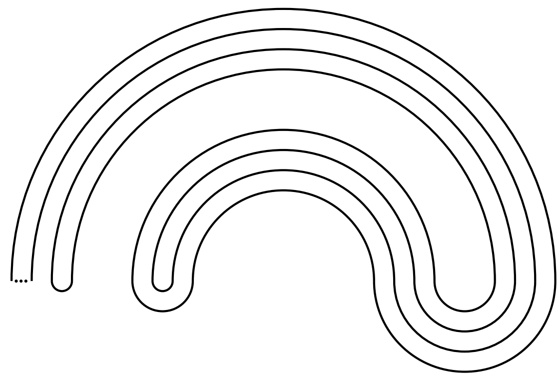


Figura 1.5 Arcoiris de Knaster

Ejemplo 1.49. *Si* $f : S^1 \to S^1$ *y* $\varphi_n^{n+1} = z^2$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\{S^1, \varphi_n^{n+1}\}$ *es una sucsión inversa de continuos, tal que* X_∞ *es un continuo indescomponible, por el Teorema 1.47. Este continuo es usual denotarlo por* Σ_2 *y es conocido en topología como el* Solenoide Diádico*.*

Los continuos indescomponibles, junto a otras propiedades topológicas, serán estudiados con más detalle en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Funciones Continuas entre Continuos

En este capítulo definiremos algunas clases de funciones entre continuos y relaciones generales entre ellas con el fin de estudiar posteriormente ciertos conceptos topólogicos.

Las definiciones que enunciaremos a continuación se pueden dar entre espacios topológicos arbitrarios, sin embargo, este trabajo lo desarrollaremos con funciones definidas entre continuos.

Definición 2.1. Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, entonces:

1. f es un *homeomorfismo*, si f es inyectiva.
2. f es *monótona* si para cualquier subcontinuo Q en Y, $f^{-1}(Q)$ es conexo.
3. f es *confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y, y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$ entonces $f(D) = Q$.

Como las funciones continuas preservan conexidad (Teorema 1.18), tenemos que todo homeomorfismo es una función monótona. Ahora veamos otras relaciones entre las funciones definidas en 2.1.

Proposición 2.2. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona entonces f es confluente.*

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Y y D una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es monótona, $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, $D = f^{-1}(Q)$. Por lo tanto $f(D) = f(f^{-1}(Q)) = Q$. Con lo que f es una función confluente. $\square$

Con el siguiente ejemplo, mostraremos que el recíproco de la Proposición 2.2 no es cierto.

Ejemplo 2.3. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como lo podemos verificar fácilmente usando la Figura 2.1, f es una función confluente pero no monótona ya que $f^{-1}([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ que no es conexo.

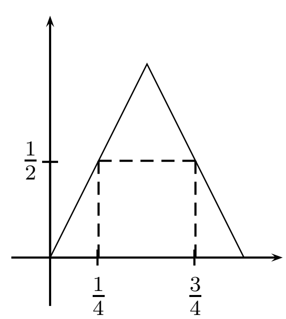


Figura 2.1 Ilustración del Ejemplo 2.3

Debido a que nuestro estudio topológico de las funciones entre continuos apenas empieza, veremos a continuación la clasificación de las funciones monótonas, como parte fundamental de los objetivos de este trabajo.

2.1. Funciones Monótonas entre Continuos

Las clases de funciones monótonas han sido estudiadas por diferentes topólogos. Particularmente, algunas propiedades topológicas son preservadas bajo estas funciones. Trabajaremos principalmente, con el siguiente grupo de funciones monótonas:

Definición 2.4. Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, diremos que:

1. f es *casimonótona* si para cualquier subcontinuo Q en Y, $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, $f^{-1}(Q)$ es conexo.

2. f es *cuasimonótona* si para cualquier subcontinuo Q en Y, $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y tomando D una componente de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(D) = Q$.

3. f es *débilmente monótona* si para cualquier subcontinuo Q de Y, $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, y con D una componente de $f^{-1}(Q)$ entonces $f(D) = Q$.

4. f es *seudomonótona* si para cualesquiera dos subcontinuos propios A y B de Y tales que $A \cup B = Y$ entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.

Definidas las clases de funciones que son nuestro objeto de estudio, procederemos a relacionarlas.

Proposición 2.5. *Si $f : X \to Y$ es una función casimonótona entonces f es cuasimonótona.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Y con interor no vacío. Como f es una función casimonótona, $f^{-1}(Q)$ tiene una única componente D. Luego $f^{-1}(Q) = D$ y tiene un número finito de componentes. De esta forma, $f(D) = f(f^{-1}(Q)) = Q$. Por lo tanto, f es cuasimonótona. $\square$

Es fácil pensar en relacionar las funciones cuasimonótonas con las débilmente monótonas. Por la Definición 2.4 sabemos que las cuasimonótonas están definidas bajo dos condiciones, una de ella es precisamente la que define a las funciones débilmente monótonas. Por tal razón es evidente la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Si $f : X \to Y$ es una función cuasimonótona entonces f es débilmente monótona.*

Por las Proposiciones 2.5 y 2.6 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.7. *Si $f : X \to Y$ es una función casimonótona entonces f es débilmente monótona.*

Por definición tenemos que bajo una función casimonótona las imagenes inversas de los subcontinuos con interior no vacío son conexos. Luego si tomamos dos subcontinuos tales que su unión constituya el conjunto de llegada, cada uno tendrá interior no vacío y su preimagen también será conexa. De esta forma podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Si $f : X \to Y$ es una función casimonótona entonces f es seudomonótona.*

Ahora veamos un ejemplo para descartar algunas implicaciones en sentido contrario.

Ejemplo 2.9. *Si $f : S^1 \to [-1, 1]$ es una función definida por $f((x, y)) = x$, entonces es fácil ver que f es una función cuasimonótona y seudomónotona pero no casimonótona.*

Con el ejemplo anterior prodriamos pensar que todas las seudomonótonas son cuasimonótonas y viceversa, sin embargo, esto no es cierto ya que en el Ejemplo 2.3 tenemos también una función cuasimonótona pero no seudomonótona. Además, con el siguiente ejemplo veremos que la implicación en sentido contrario tampoco es cierta.

Ejemplo 2.10. *Consideremos el conjunto* $H = \{1\} \times \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *y* $v = (0,0) \in \mathbb{R}^2$*. El abanico armónico es la unión de todos los segmentos rectilíneos que van de* v *a cada uno de los puntos de* H *(Ver Figura 2.2). Si tomamos la proyección natural de la función* $f : H \cup v \to [0,1]$ *definida por* $f((x,y)) = (x,0)$ *obtenemos una función débilmente monótona, seudomonótona y confluente pero no cuasimonótona.*

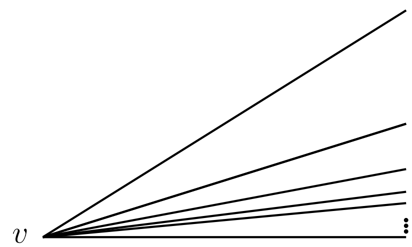


Figura 2.2 El abanico armónico

Justificaremos con el siguiente ejemplo otras relaciones no existentes entre las funciones débilmente monótonas y el resto de las clases de funciones monótonas.

Ejemplo 2.11. *Si* $f(x) = |x|$ *para* $f : [-1,1] \to [0,1]$ *es una función débilmente monótona pero no es ni monótona, ni casimonótona ni tampoco seudomonótona.*

Notemos que los Ejemplos 2.10 y 2.11 muestran relaciones de las funciones definidas en 2.1 con las clases de funciones monótonas. Además en el Ejemplo 2.3 tenemos una función confluente que no es seudomonótona.

2.2. Relaciones Generales

Las clases de funciones monótonas definidas en la sección anterior estan relacionadas con las funciones planteadas en la Definición 2.1. Mostraremos estas relaciones en el desarrollo de la presente sección.

Si en una función confluente intervienen cualquier subcontinuo de Y del conjunto de llegada, en particular estaran considerados los subcontinuos con interior no vacío.

Por tanto es inmediato de la definición que las funciones confluentes también son débilmente monótonas.

Proposición 2.12. *Si $f : X \to Y$ es una función confluente entonces f es débilmente monótona.*

Por la proposición anterior en el Ejemplo 2.11 tenemos una función confluente que no es ni casimonótona ni seudomonótona. Veamos a continuación como se relacionan las funciones monótonas con las clases de funciones monótonas.

Proposición 2.13. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona entonces f es casimonótona*

Demostración. Es fácil ver que si para todos los subcontinuos Q de Y, $f^{-1}(Q)$ es conexo en particular si Q es un subcontinuo con interior no vacío entonces $f^{-1}(Q)$ es conexo. $\square$

Retomando las Proposiciones 2.5, 2.8 y 2.13 y el Corolario 2.7 tenemos los siguientes resultados:

Corolario 2.14. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona entonces f es cuasimonótona*

Corolario 2.15. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona entonces f es débilmente monótona*

Corolario 2.16. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona entonces f es seudomonótona*

En dirección contraria ninguna de las implicación son ciertas pues el Ejemplo 2.3 nos proporcina una función cuasimonótona que no es monótona. Igualmente el Ejemplo 2.11 nos muestra una función débilmente monótona que no es monótona.

Para terminar este capítulo mostraremos dos ejemplos que descartan las relaciones que no hemos hecho referencia.

Ejemplo 2.17. *Tomemos $f : X \to Y$ una función cociente, donde X es la curva senoidal del topólogo (ver Ejemplo 1.37) y Y resulta de identificar los dos puntos extremos de la barra límite del continuo X, como se muestra en la Figura 2.3.*

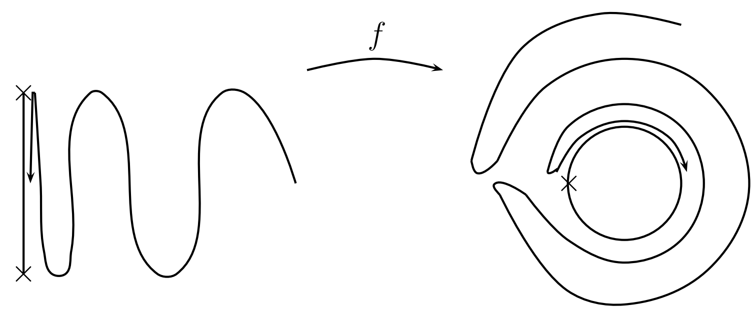


Figura 2.3 Ilustración de la primera parte del Ejemplo 2.17

La función f es una función casimonótona ya que la preimagen de todo subcontinuo con interior diferente de vacío es conexo. Esto es fácil de ver, pues los subcontinuos de Y con interior diferente de vacío se pueden dividir en dos: los subcontinuos sobre el rayo y los subcontinuos que contienen a la circunferencia. En estos dos casos se puede ver que su imagen inversa es conexa.

También, f es seudomonótona pues si tomamos dos subcontinuos propios de Y de tal forma que uno de ellos contiene todos los puntos de la circunferencia límite de Y, entonces al otro pertenecen solo puntos sobre la curva. De esta forma la preimagen de estos dos subcontinuos es conexa y por tanto, f es seudomonótona. Observemos que como f es casimonótona, f es cuasimonótona, y por tanto débilmente monótona, por la Proposición 2.5.

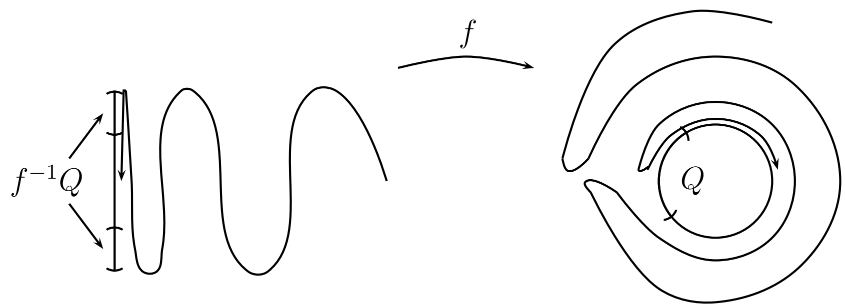


Figura 2.4 Ilustración de la segunda parte del Ejemplo 2.17

Ahora si Q es el subcontinuo en Y donde se unieron los dos puntos extremos de la barra límite, $f^{-1}(Q)$ no es conexo y por tanto f no es monótona. Además con D una componente de $f^{-1}(Q)$, la imagen de D no es todo Q. Luego f tampoco es confluente.

Ejemplo 2.18. *Sea g la función que vemos en la Figura 2.5 donde identificamos la imagen de los puntos p y q y con ellos el resto del arco, la imagen del resto del continuo es él mismo. Notemos que en esta figura tenemos el Arcoiris de Knaster (ver Ejemplo 1.48) junto con un arco. Como el Arcoiris de Knaster es indescomponible debemos tomarlo completamente o junto a un pedazo del arco para así formar dos subcontinuos propios cuya unión es todo el continuo. Evidentemente las preimagenes de estos dos subcontinuos propios son conexas por lo tanto g es una función seudomonótona.*

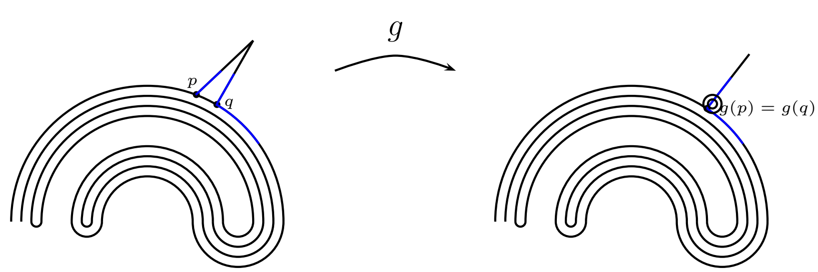


Figura 2.5 Ilustración del Ejemplo 2.18

Ahora tomemos el subcontinuo de la Figura 2.5 que está en azul; la imagen de una de las componentes de la preimagen de dicho subcontinuo no es igual a todo el continuo en el conjunto de llegada. Luego g es una función seudomonótona que no es confluente.

Si tenemos información adicional de los continuos entre las clases de funciones monótonas podemos establecer que algunas clases son equivalentes. Por ejemplo si los continuos son localmente conexos tenemos que las funciones cuasimonótonas, débilmente monótonas y confluentes son una sola [2, Teorema 2.6, pág. 2040]. Aunque estas particularidades no forman parte del objetivo del presente trabajo dan un presedente para nuevos estudios.

Mostraremos el siguiente diagrama para hacer más visibles las relaciones establecidas a lo largo de este capítulo.

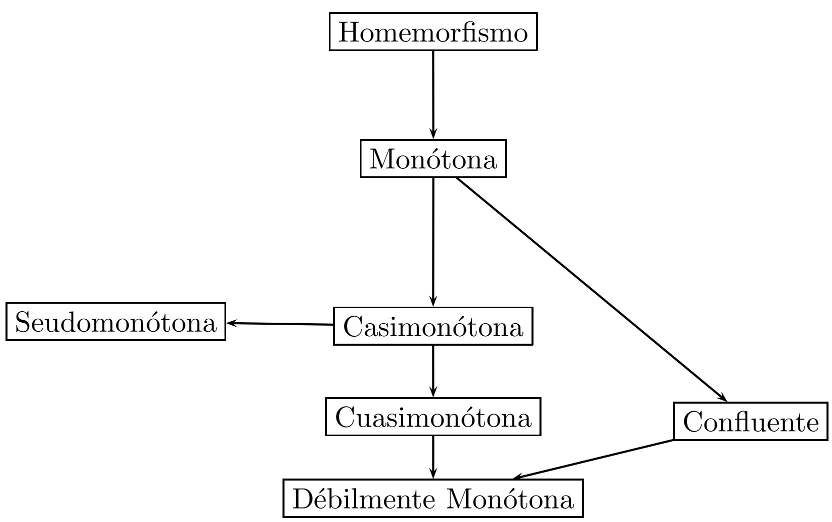


Diagrama I

Aunque en el Diagrama I se relacionaron todas las funciones de las Definiciones 2.1 y 2.4, en la siguiente tabla excluiremos los homeomorfismos con el fin de establecer relaciones referenciadas entre las clases de funciones monótonas. La primera columna (de izquierda a derecha) señala la hipótesis de la implicación que buscamos. Según donde nos situemos sobre la fila de la hipótesis obtenemos la tesis de la implicación. La veracidad de la relación entre la funciones monótonas esta dada por un $\checkmark$ o $\times$, junto con la referencia a la proposición, el corolario o el ejemplo correspondiente.

Clases de Funciones	*Monótona*	*Casimonótona*	*Cuasimonótona*	*Débilmente Monótona*	*Seudomonótona*	*Confluente*
Monótona	✓	✓ 2.13	✓ 2.14	✓ 2.15	✓ 2.16	✓ 2.2
Casimonótona	× 2.17	✓	✓ 2.5	✓ 2.7	✓ 2.8	× 2.17
Cuasimonótona	× 2.3	× 2.9	✓	✓ 2.6	× 2.3	✓ 2.17
Débilmente Monótona	× 2.11	× 2.11	× 2.10	✓	× 2.11	× 2.17
Seudomonótona	× 2.17	× 2.9	× 2.10	× 2.17	✓	× 2.18
Confluente	× 2.3	× 2.11	× 2.10	✓ 2.12	× 2.11	✓

Tabla 2.1 Relaciones generales entre las clases de funciones monótonas

Capítulo 3

Propiedades sobre Continuos Especiales

Las funciones monótonas pueden preservar propiedades importantes para los continuos que intervienen en ellas como descomponibilidad, irreducibilidad y unicoherencia. Definiremos y trabajaremos con estas propiedades durante el desarrollo del presente capítulo. Trataremos en primera instancia con las relaciones de indescomponibilidad e irreducibilidad, para posteriormente ver la relación de unicoherencia.

3.1. Relaciones de Indescomponibilidad

Dedicaremos esta sección a encontrar las condiciones necesarias para que los continuos entre las clases de funciones monótonas preserven descomponibilidad o indescomponibilidad. Definiremos esta relación y mostraremos algunas propiedades importantes que nos ayuden a, posteriormente, establecer como las clases de funciones monótonas preservan la indescomponibilidad.

Recordemos que un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B tales que $A \cup B = X$. Un continuo X es *indescomponible* si no es decomponible (ver Definición 1.46).

Exceptuando el punto, la mayoria de los continuos que conocemos son descomponibles. Pensariamos pues, que existen "más" continuos descomponibles. Aunque esto ocurra se ha demostrado que existen más continuos indescomponibles [11, Ejercicio 1.17, pág.11]. Aunque en el Capítulo 1 mostramos dos ejemplos de continuos indescomponibles (Ejemplos 1.48 y 1.49), ayudados de la definición de cadena simple, costruiremos un nuevo continuo indescomponible.

Definición 3.1. Sean a y b elementos de un conjunto X. Los subconjuntos A_1, A_2,..., A_k en X forman una *cadena simple* que une a a y b si $a \in A_1$, $b \in A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $|i - j| > 1$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, ..., k - 1$.

Mediante la Figura 3.1 ilustramos la Definición 3.1.

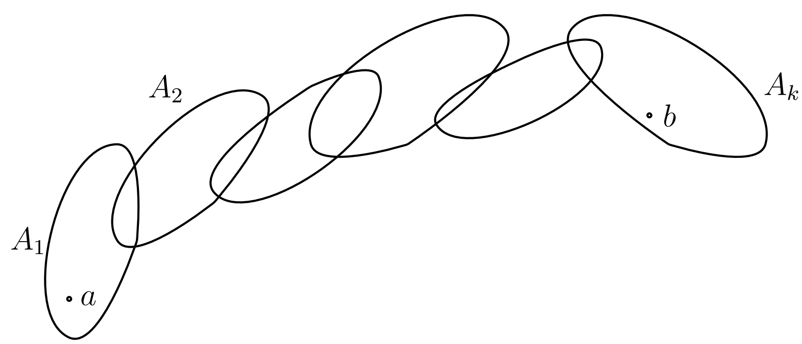


Figura 3.1 Cadena simple

Ahora mostraremos una manera de construir un continuo indescomponible mediante cadenas simples que enlacen tres puntos. Esta construcción será llevada a cabo en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Existe un continuo indescomponible en* $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sean a, b y c tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^2$. Contruyamos a continuación una cadena simple $\mathcal{C}_1$ constituida por discos abiertos con diámetro menor que uno, que empieza en a y llega a c a través de b; es decir; b está en algún elemento de la cadena diferente al primero o el último y diremos que sigue la secuencia $(a - b - c)$.

Construyamos dentro de $\mathcal{C}_1$ una cadena simple $\mathcal{C}_2$ de discos abierto de diámetro menor que un medio, que empieza en b pasa por a y llega a c, tal que $Cl_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_1$. Así la cadena simple $\mathcal{C}_2$ sigue el ciclo $(b-a-c)$. Ahora contruyamos una tercera cadena simple $\mathcal{C}_3$ dentro de $\mathcal{C}_2$ de discos abiertos de diámetro menor que un tercio, con $Cl_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{C}_2$, empezando en b y atravezando c llega finalmente a a, $(b-c-a)$. Ver Figura 3.2 para la contrucción de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$.

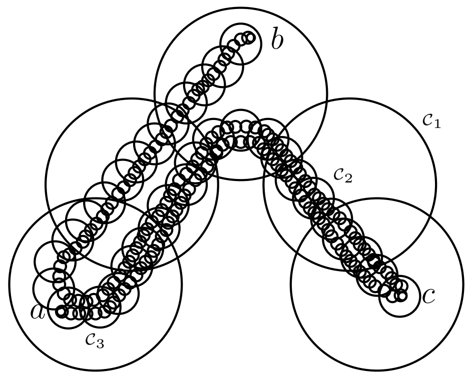


Figura 3.2 Un continuo indescomponible en $\mathbb{R}^2$

El procedimiento se reinicia con una cadena simple $\mathcal{C}_4$ contenida en $\mathcal{C}_3$ que sigue la serie $a-b-c$. En general, con cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ podemos contruir cadenas simples: $\mathcal{C}_{3k+1}$ la cual sigue la secuencia $a-b-c$; $\mathcal{C}_{3k+2}$ con el ciclo $b-c-a$; y $\mathcal{C}_{3k+3}$ que tiene la serie $c-a-b$. Además de esto, el diámetro de cada eslabon de $\mathcal{C}_k$ es menor que $1/k$ con $k \in \mathbb{N}$. Sí, $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} Cl_{\mathbb{R}^2}(\cup \mathcal{C}_k)$ entonces X es un continuo por el Teorema 1.39.

Tomemos un subcontinuo propio Y de X que contiene dos de los tres puntos, digamos por ejemplo $\{a, b\}$. Además, sea k suficientemente grande como para que algún elemento de $\mathcal{C}_{3k+1}$ quede por fuera de Y, entonces podemos reescribir a Y como la unión de los elementos encadenados antes y después del elemento por fuera de $\mathcal{C}_{3k+1}$, contradiciendo así, la conexidad de Y. De la misma forma ocurre con cualquier subcontinuo propio de X que contenga dos de los tres puntos. Así X es indescomponible. $\square$

De los ejemplos más conocidos de continuos indescomponiles tenemos el continuo Arco Iris de Knaster y el Solenoide Diádico. Cualquier otro continuo de los mencionados en el Capítulo 1. es descomponible como ya lo habiamos mencionado. Una de las propiedades más interesantes de un continuo descomponible es la caracterización dada mediante la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *Un continuo X es descomponible si y sólo si contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Como X es un continuo descomponible tenemos dos subcontinuos propios A y B tales que $A \cup B = X$. Pero $X \backslash B$ es un abierto no vacío en A, luego $Int_X(A) \neq \emptyset$. De esta forma A es un subcontinuo propio de X con interior no vacío.

Supongamos ahora que X tiene un subcontinuo propio A con interior no vacío. Si $X \backslash A$ es conexo, entonces $Cl_X(X \backslash A)$ es un subcontinuo propio de X, por lo tanto $X = A \cup Cl_X(X \backslash A)$ y X es descomponible. Luego supongamos que $X \backslash A$ no es conexo. Tenemos que $X \backslash A = U \cup V$, donde U y V son abiertos disyuntos de X. Así $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X [8, Teorema 4, pág.133].

Además, notemos que como $V \neq \emptyset$, $U \cup A$ es un subcontinuo propio de X. De la misma forma $V \cup A$ es un subcontinuo propio de X. Así, X es descomponible y nuestra prueba queda completa. □

Análogamente para los continuos indescomponibles tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tienen interior vacío.*

Ahora deseamos saber si las clases de funciones monótonas preservan la descomponibilidad o indescomponibilidad. La siguiente proposición, que será de gran utilidad en resolver esta duda, nos brinda una propiedad importante sobre las funciones débilmente monótonas y seudomonótonas.

Proposición 3.5. *Para cada continuo descomponible Y existe un continuo X y una función sobreyectiva $f : X \to Y$ que no es ni débilmente monótona ni seudomonótona.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios de Y tal que $A \cup B = Y$, $p \in A \backslash B$ y consideremos el producto cartesiano $Y \times [0,1]$. Si $X = (Y \times \{0\}) \cup (\{p\} \times [0,1]) \cup (A \times \{1\})$ y definimos la proyección natural $f((x,t)) = x$ en $f : X \to Y$ para cada punto $(x,t) \in X$. Entonces $f^{-1}(B)$ es la unión de dos cerrados disyuntos no vacíos, a saber: $B \times \{0\}$ y $f^{-1}(B) \cap (A \times \{1\})$, luego no es conexo. Descartando que la función sea seudomónotona. Observemos que $f(f^{-1}(B) \cap (A \times \{1\})) \neq B$. De esta manera, f no es débilmente monótona. □

Existe una función sobreyectiva de un continuo en un continuo descomponible que tampoco es monótona, pues como lo vimos en el capítulo anterior una función monótona es seudomonótona y débilmente monótona. Además podemos decir lo siguiente:

Corolario 3.6. *Para cada continuo descomponible Y existe un continuo X y una función sobreyectiva $f : X \to Y$ que no es monótona, casimonótona, cuasimonótona ni confluente.*

A continuación daremos una caracterización de los continuos indescomponibles usando las funciones monótonas.

Teorema 3.7. *Para cualquier continuo Y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Y es indescomponible*

(2) *cada función de un continuo en Y es casimonótona*

(3) *cada función de un continuo en Y es cuasimonótona*

(4) *cada función de un continuo en Y es débilmente monótona*

(5) *cada función de un continuo en Y es seudomonótona*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función entre continuos. Supongamos primero que Y es indescomponible. Probemos que f es casimonótona. Sea Q un subcontinuo de Y tal que $Int_Y(Q) \neq \emptyset$. Como Y es indescomponible, ningún subontinuo propio tiene interior no vacío (Corolario 3.4). Así $f^{-1}(Q) = f^{-1}(Y) = X$. Con lo que concluimos que $f^{-1}(Q)$ es conexo. De esta forma f es casimonótona y (1) implica (2).

Ahora recordemos que toda función casimonótona es cuasimonótona y seudomonótona. De ello obtenemos que (2) implica (3) y (2) implica (5). Además toda función cuasimonótona es débilmente monótona, es decir, (3) implica (4)(ver Proposiciones 2.5, 2.6 y 2.8).

Finalmente de la Proposición 3.5, si f es seudomonótona o débilmente monótona entonces Y es indescomponible y nuestra prueba queda completa. $\square$

Con el siguiente resultado veremos que la indescomponibilidad es una propiedad invariante bajo las clases de funciones monótonas.

Teorema 3.8. *Sean X y Y continuos. Si X es indescomponible y $f : X \to Y$ es una función seudomonótona entonces Y es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que Y es descomponible. Sean A y B dos subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como f es una función continua y seudomonótona entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X. Además, $f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$.

Con lo que concluimos que X es descomponible. $\square$

Del Teorema 3.8 y las relaciones establecidas entre las clases de funciones monótonas en el capítulo anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Sean X y Y continuos. Si X es indescomponible y $f : X \to Y$ es una función monótona o casimonótona entonces Y es indescomponible.*

Además de las clases de funciones monótonas ya mencionadas, tenemos que la indescomponibilidad se preserva bajo funciones donde la imagen inversa de un subcontinuo tiene una cantidad finita de componentes.

Teorema 3.10. *Sea X es un continuo indescomponible. Si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva tal que para cada subcontinuo Q en Y con interior no vacío, la imagen* *inversa $f^{-1}(Q)$ tiene una cantidad finita de componentes entonces Y es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que Y es descomponible. Entonces Y contiene un subcontinuo propio Q con interior no vacío, por la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(Int_Y(Q)) \subset Int_X f^{-1}(Q)$, así $Int f^{-1}(Q) \neq \emptyset$. Ahora $f^{-1}(Q)$ tiene una cantidad finita de componentes y por el teorema de Baire existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ con $Int_X(C) \neq \emptyset$. Luego C es un subcontinuo propio de X con interior no vacío, contrario al Corolario 3.4. Por lo tanto, Y es indescomponible. □

Con este resultado podemos establecer que las funciones cuasimonótonas preservan la indescomponibilidad, como lo enunciamos en el siguiente resultado.

Corolario 3.11. *Sean X y Y continuos. Si X es indescomponible y $f : X \to Y$ una función cuasimonótona entonces Y es indescomponible.*

Debido a que la Proposición 3.10 hace esencial que las imagenes inversas del subcontinuo Q en Y tengan un número finito de componentes, no podemos establecer que las funciones débilmente monótonas y confluentes guarden la indescomponibilidad de los continuos entre ellas. Por ello definiremos las funciones abiertas pues por ser más estudiadas en topología, nos orientarán para resolver nuestra inquietud.

Definición 3.12. Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Diremos que f es una *función abierta* si para cada conjunto abierto $A \subset X$, $f(A)$ es un conjunto abierto en Y.

Definamos f como $f(x) = |x|$ una función en $[-1, 1]$. Notemos que f es una función abierta pero no monótona. Además, si

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces tenemos una función monótona pero no abierta. Así, diremos que no existe ninguna relación entre las abiertas y las funciones monótonas. No nos ocuparemos de ello pues sólo nos interesa saber si existe alguna conexión de las funciones abiertas con las confluentes.

Proposición 3.13. *Si $f : X \to Y$ es una función abierta entonces f es confluente.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo y C una componente de $f^{-1}(Q)$. Supongamos que f no es una función confluente entonces existe $y \in Q$ tal que $y \notin f(C)$. Luego tenemos que $f^{-1}(y)$ y C son cerrados disyuntos, no vacíos en $f^{-1}(Q)$ y no existe en $f^{-1}(Q)$ un conexo que intersecte simultaneamente a ambos cerrados. Por el Teorema del Cable Cortado 1.31, existen X_1 y X_2 cerrados en $f^{-1}(Q)$ tales que $f^{-1}(Q) = X_1 \cup X_2$ donde $C \subset X_1$ y $f^{-1}(y) \subset X_2$.

Si U y V son dos abiertos disyuntos en X tal que $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset V$ entonces $Cl_X(U) \cap X_2 = \emptyset$ y $X \backslash U \cap X_1 = \emptyset$. De lo anterior, $Fr(U) \cap f^{-1}(Q) = \emptyset$. Como f es abierta, $f(U)$ es abierta en Y. Así $f(C) \subset f(U)$ y como $f^{-1}(y) \subset X_2$ entonces $y \notin f(U)$. Luego $Q \cap f(U) \neq \emptyset$ es un abierto propio de Q.

Supongamos que $Fr(f(U)) \cap Q \neq \emptyset$ entonces existe $y \in Fr(f(U)) \cap Q$ y $x \in f^{-1}(Q) = X_1 \cup X_2$ tal que $f(x) = y$. Si $x \in X_1$ entonces $x \in U$. Luego $y \in f(U)$ lo que nos lleva a una contradicción pues $f(U)$ es abierto y $y \in Y \backslash f(U)$. Ahora si $x \in X_2$ entonces $x \in X \backslash Cl_X(U)$, así $x \notin Fr(U)$ entonces existe W abierto tal que $x \in W$ y $W \cap Cl_X(U) = \emptyset$ pues el complemente $Cl_X(U)$ en X es abierto. Luego $y \in f(W)$ que es un abierto y $f(W) \cap f(U) = \emptyset$ pero $y \in Fr(f(U))$. Por lo tanto $Fr(f(U)) \cap Q = \emptyset$. $\square$

Gracias a los estudios realizados con esta y otras funciones en [13] podemos establecer mediante el siguiente ejemplo que las funciones abiertas no preservan la indescomponibilidad:

Ejemplo 3.14. *La proyección natural de X el solenoide diádico sobre la circunferencia unitaria S^1, es una función abierta. Como lo mostramos en el primer capítulo del presente trabajo, el solenoide diádico es un continuo indescomponible (ver Ejemplo 1.49). Además S^1 es un continuo descomponible, por tanto las funciones abiertas no preservan la indescomponibilidad.*

Según la Proposición 3.13 toda función abierta es confluente, luego existe una función confluente y por tanto débilmente monótona $f : X \to Y$ tal que X es un continuo indescomponible y Y es descomponible.

3.2. Relaciones de Irreducibilidad

Los resultados recogidos y obtenidos por Maćkowiak en [13], muestran la invariabilidad de propiedades topológicas importantes tales como la irreducibilidad para funciones monótonas y débilmente monótonas. Aquí estudiaremos una extención de esta propiedad para todas las clases de funciones monótonas.

Definición 3.15. Un continuo X es *irreducible* entre dos puntos a y b de X si no existe un subcontinuo propio de X que contenga a ambos puntos. Además diremos que $S \subset X$ es un *conjunto de irreducibilidad* de X si existe un punto p en X tal que X es irreducible en el conjunto $S \cup \{p\}$

Consideramos importante aclarar que un continuo X es irreducible con respecto a un conjunto $A \subset X$ si no existe un subcontinuo propio de X que contenga a A.

Un ejemplo sencillo de un conjunto irreducible es un intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, que es irreducible entre a y b pues el único subcontinuo que contiene a ambos puntos es todo el intervalo. También la curva senoidal del topólogo es irreducible entre $(1, sen(1))$ y cualquiera de sus puntos de la barra límite. De forma opuesta, S^1 es un conjunto no irreducible entre ningún par de puntos.

Como consecuencia inmediata de la Definición 3.15 veremos de manera sencilla el siguiente resultado:

Teorema 3.16. *Si X es irreducible entre a y b y $f : X \to Y$ es una función monótona entonces Y es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Demostración. Supongamos que A es un subcontinuo de Y tal que $\{f(a), f(b)\} \subset A$. Como f es monótona, $f^{-1}(A)$ es un subcontinuo propio de X. Además $\{a, b\} \subset f^{-1}(A)$.

Luego X no es irreducible entre a y b. $\square$

Además por la Proposición 2.13 y el resultado anterior tenemos que las funciones casimonótonas también guardan la irreducibilidad de los continuos entre ellas.

A continuación presentamos dos resultados importantes para el desarrollo de esta sección. El primero de ellos es el *Teorema de Kuratowski* para los conjuntos de irreducibilidad y el segundo se refiere a la preservación de los conjuntos de irreducibilidad bajo las funciones cuasimonótonas. Demostraremos solo una de las implicaciones del teorema de Kuratowski, puesto que la prueba completa de los dos resultados escapa a los objetivos fundamentales de este trabajo. La demostración completa de ambos teoremas podemos encontrarla en [11, Teorema 11.21, pág 206] y [14, Teorema 4, pág 337], respectivamente.

Teorema 3.17. *Un conjunto A es un conjunto de irreducibilidad en un continuo X si y sólo si no existen dos subcontinuo propios K y L de X tales que $X = K \cup L$ y $A \subset K \cap L$.*

Demostración. Supongamos que existen K y L subcontinuos propios de X tales que $X = K \cup L$ y $A \subset K \cap L$. Como A es un conjunto de irreducibilidad en X, existe $x \in X$ tal que X es irreducible con respecto a $A \cup \{x\}$.

Notemos que $x \in K \cup L$. Así, $x \in K$ o $x \in L$. Si $x \in K$ entonces $A \cup \{x\} \subset K$ pues $A \subset K \cap L$. Pero este argumento contradice el hecho que X sea irreducible con respecto a $A \cup \{x\}$, porque $K \subsetneq X$. De manera analoga, $x \notin L$. Así queda demostrada la primera implicación. $\square$

Teorema 3.18. *Sea S un conjunto de irreducibilidad de un continuo X. Si $f : X \to Y$ es una función cuasimonótona entonces $f(S)$ es un conjunto de irreducibilidad de Y.*

Ahora veamos que las funciones seudomonótonas preservan los conjuntos de irreducibilidad.

Teorema 3.19. *Sea S un conjunto de irreducibilidad en un continuo X. Si $f : X \to Y$ es una función seudomonótona entonces $f(S)$ es un conjunto de irreducibilidad de Y.*

Demostración. Supongamos que $f(S)$ no es un conjunto de irreducibilidad de Y. Por la Proposición 3.17 tenemos dos subcontinuo propios A y B en Y con $A \cup B = Y$ y $f(S) \subset A \cap B$. Como f es seudomonótona, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X tales que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Entonces $S \subset f^{-1}(f(S)) \subset f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Luego, S no es un conjunto de irreducibilidad de X y completamos nuestra demostración. □

Notemos que la curva senoidal del topólogo es irreducible con respecto a dos puntos, un punto cualquiera en $\{0\} \times [-1, 1]$ y $(1, \sin(1))$, podemos verificar está afirmación en 1.37. Si f es una función de dicho continuo en el intervalo cerrado $[0, 1]$, que también es irreducible con respecto a dos puntos, entonces diremos que la función preserva la irreducibilidad con respecto a dos puntos. Extenderemos esta propiedad para k un número entero de puntos como consecuencia de los Teoremas 3.18 y 3.19.

Corolario 3.20. *Sea k un entero positivo. Si X es un continuo irreducible con respecto a k puntos y $f : X \to Y$ es una función cuasimonótona o seudomonótona entonces Y es irreducible con respecto a k puntos.*

Basados en el hecho de que todo continuo indescomponible es irreducible [11, Corolario 11.15.1, pág. 203], concluiremos esta sección afirmando que las funciones confluentes (débilmente monótonas) no preservan irreducibilidad (Ver Ejemplo 3.14).

3.3. Relaciones de Unicoherencia

La unicoherencia es una propiedad muy estudiada en la teoría de los continuos. En este capítulo mostraremos cuales de las clases de funciones monótonas preservan no solo la unicoherencia sino la unicoherencia hereditaria y la unicoherencia en un subcontinuo, propiedades ligadas directamente a la definición de unicoherencia.

Definición 3.21. Sea X un continuo. Diremos que:

1. X es *unicoherente* si para cualquiera A y B dos subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, tenemos que $A \cap B$ es conexo.

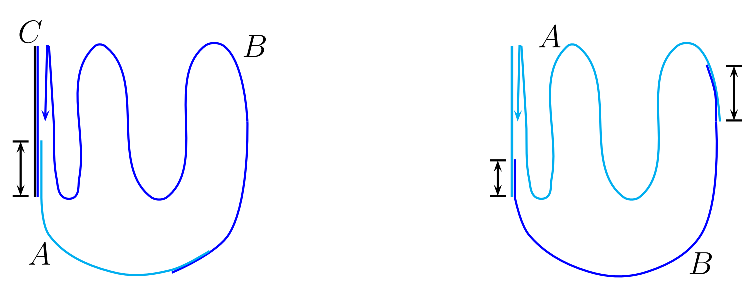
2. X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de X es unicoherente.

3. X es *unicoherente en un subcontinuo* $C \subset X$ si para cada par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \cap B \cap C$ es conexo.

Como consecuencia directa de la Definición 3.21 tenemos que todo continuo hereditariamente unicoherente es unicoherente ([13, 2.1, pág. 6]). Sin embargo $[0,1]^2$, conocido en topología como una *2-celda* es un continuo unicoherente pero no hereditariamente unicoherente.

A continuación veremos que la unicoherencia en todo subcontinuo propio no garantiza la unicoherencia en todo el continuo.

Ejemplo 3.22. *El círculo de Varsovia definido en el Ejemplo 1.34. es un continuo unicoherente en un subcontinuo pero no es unicoherente. Tomemos C la barra límite de la función $\operatorname{sen}(1/x)$ como un subcontinuo y A, B los otros dos subcontinuo cuya unión sea todo el continuo, ver Figura 3.3 (a), entonces $A \cap B \cap C$ es conexo. Este continuo no es unicoherente pues si tomamos A de tal forma que recubra en ambos extremos una parte de B tendremos que la conexidad de la intersección de los subcontinuos se daña como se muestra en la Figura 3.3(b).*



(a) **(b)**

Figura 3.3 Ilustración del Ejemplo 3.22

Además S^1 no es un continuo unicoherente ni unicoherente en un subcontinuo. Notemos que el único subcontinuo donde todo continuo unicoherente es unicoherente en un subcontinuo es cuando el subcontinuo es todo el continuo.

Regresando a nuestro tema de interés, las funciones monótonas entre continuos, y ayudados de la recopilacion hecha por Maćkowiak en [13], estableceremos que las imagenes de continuos unicoherentes en algunas funciones monótonas son continuos unicoherentes.

El Ejemplo 3.14 nos brinda una función donde de un continuo hereditariamente unicoherente, el solenoide diádico, llegamos a la circunferencia unitaria que no es unicoherente. Así las funciones confluentes y débilmente monótonas no guardan la unicoherencia ni unicoherencia hereditaria.

Ahora veamos que en las funciones cuasimonótonas las imagenes de continuos unicoherentes son unicoherentes.

Teorema 3.23. *Si X es un continuo unicoherente y $f : X \to Y$ es una función cuasimonótona entonces Y es unicoherente.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$. Como $Int_Y(A)$ y $Int_Y(B)$ son diferentes de vacío y f es casimonótona entonces tenemos que $f^{-1}(A) = N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_n$ y $f^{-1}(B) = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_m$. Además $f(N_i) = A$ y $f(M_j) = B$.

Sin pérdida de generalidad tomemos a $D = (\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} M_j)$ siendo $E = N_1$ el subcontinuo adecuado que deja a D como un conjunto conexo [11, Ejercicio 1.18, pág. 11]. Notemos que tanto D como E son subcontinuos de X tales que $D \cup E = X$. Así $D \cap E$ es conexo por la unicoherencia de X.

Veamos finalmente que $f(D \cap E) = A \cap B$.

Sea $y \in f(D \cap E)$, luego existe $x \in D \cap E$ tal que $f(x) = y$. Entonces $x \in D$ y $x \in E$. Como $E = N_1$ entonces $x \in N_1$. Así $x \in N_1$ y $y \in A$. Notemos que $N_i \cap N_l = \emptyset$ si $i \neq l$ y $x \in N_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{n} N_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} M_j)$. Luego existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in M_k$. Por lo tanto $y \in B$ y así $y \in A \cap B$.

Ahora supongamos que $y \in A \cap B$. Como $f(N_1) = A$ y $y \in A$ entonces existe $x \in N_1 = E$ donde $f(x) = y$. Además $y \in B$, $x \in f^{-1}(B) = \bigcup_{j=1}^{m} M_j$. Luego existe $k \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $x \in M_k$. Por lo tanto $x \in D$ y $x \in E$, es decir, $x \in D \cap E$ y $y \in f(D \cap E)$.

Así $A \cap B$ es conexo y Y es unicoherente. $\square$

Además, las funciones seudomonótonas cumplen con la siguiente propiedad:

Teorema 3.24. *Sea X un continuo unicoherente en un subcontinuo C. Si $f : X \to Y$ es una función seudomonótona entonces Y es unicoherente en $f(C)$.*

Demostración. Sean E y D subcontinuos de Y tales que $Y = E \cup D$. Como f es seudomonótona entonces $f^{-1}(E)$ y $f^{-1}(D)$ son subcontinuos de X. Además, $X = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(E \cup D)$. Como X es unicoherente en C entonces $f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) \cap C$ es conexo.

Debemos probar que $E \cap D \cap f(C)$ es conexo. Tenemos que $f(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) \cap C) \subset f(f^{-1}(E)) \cap f(f^{-1}(D)) \cap f(C) = E \cap D \cap f(C)$. Pero si $y \in E \cap D \cap f(C)$, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = y$. Notemos que $x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D)$. Luego $x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) \cap C$; es decir, $y \in f(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) \cap C)$. Por lo tanto $f(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) \cap C) = E \cap D \cap f(C)$ y $E \cap D \cap f(C)$ es conexo. $\square$

Supongamos que el subcontinuo es todo el continuo, así tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.25. *Si X es un continuo unicoherente y $f : X \to Y$ es una función seudomonótona entonces Y es unicoherente.*

Por las relaciones entre las clases de funciones monótonas establecidas en el Capítulo 2 y las propiedades anteriores tenemos que:

Corolario 3.26. *Las funciones monótonas y casimonótonas preservan la unicoherencia.*

Corolario 3.27. *Las funciones monótonas y casimonótonas preservan la unicoherencia en un subcontinuo.*

Aunque las funciones casimonótonas y seudomonótonas resultaron preservar tanto unicoherencia como unicoherencia en un subcontinuo, el siguiente ejemplo nos muestra que no guarda la unicoherencia hereditaria.

Ejemplo 3.28. *El Ejemplo 2.17 nos muestra un continuo Y que no es hereditariamente unicoherente a pesar de ser imagen de un continuo hereditariamente unicoherente en una función casimonótona (cuasimonótona) y seudomonótona.*

Como consecuencia directa del ejemplo anterior pensariamos que las funciones monótonas tampoco preservan la unicoherencia hereditaria. En contraposición tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.29. *Las funciones monótonas preservan la unicoherencia hereditaria.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de Y tal que $A = K \cup L$, donde K y L son subcontinuos de A. Como f es monótona entonces $f^{-1}(A)$ es un subcontinuo de X y $f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L) = f^{-1}(A)$. Además X es hereditariamente unicoherente, luego $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)$ es conexo. Ahora $f(f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)) = f(f^{-1}(K)) \cap f(f^{-1}(L)) = K \cap L$. Así $K \cap L$ es conexo. □

Finalmente veamos un ejemplo de una función cuasimonótona que no preserva unicoherencia en un subcontinuo.

Ejemplo 3.30. *Sea X el continuo que mostramos en la siguiente figura:*

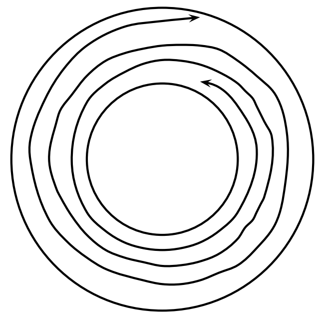


Figura 3.4 Ilustración del Ejemplo 3.30

Notemos que X *es un continuo unicoherente en un subcontinuo cuando alguna de las dos circunferencias es el subcontinuo.*

Ahora si tomamos f *la proyección radial a la circunferencia interior, llamemosla* S^1*, tenemos una función cuasimonótona. Como lo habiamos mencionado* S^1 *no es unicoherente en un subcontinuo luego* f *no preserva unicoherencia en un subcontinuo.*

A continuación encontramos la tabla que nos muestra el recuento de las propiedades que preservan cada una de las clases de funciones monótonas. La primera columna (de izquierda a derecha) señala la función que buscamos. Según donde nos situemos sobre la fila de la función obtenemos la preservación o no de la propiedad topológica. La veracidad de la relación esta dada por un ✓ o $\times$, junto con la referencia al teorema, corolario o el ejemplo correspondiente.

Clases de Funciones	*Indescomp.*	*Conjunto de Irred.*	*Unicoherencia*	*Unic. Hereditaria*	*Unic. en un subcontinuo*
Monótona	✓ 3.9	✓ 3.16	✓ 3.26	✓ 3.29	✓ 3.27
Casimonótona	✓ 3.9	✓ 3.16	✓ 3.26	× 3.28	✓ 3.27
Cuasimonótona	✓ 3.11	✓ 3.18	✓ 3.24	× 3.28	× 3.30
Débilmente Monótona	× 3.14	× 3.14	× 3.14	× 3.14	× 3.14
Seudomonótona	✓ 3.8	✓ 3.19	✓ 3.23	× 3.28	✓ 3.25
Confluente	× 3.14	× 3.14	× 3.14	× 3.14	× 3.14

Tabla 3.1 Propiedades topólogicas vs. clases de funciones monótonas

Bibliografía

[1] G.T. Whyburn, Analitic Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28. New York. 1942.

[2] J. Camargo, Some relationships between induced mapping, Topology and Its Applications 157 (2010) 2038-2047.

[3] J.J. Charatonik, Absolutely Terminal Continua and Confluent Mappings, Comment. Math. Univ. Carolin. 32 (1991) 377-382.

[4] J.J. Charatonik, Monotone Mappings and Unicoherence at Subcontinua, Topology and Its Applications 33 (1989) 209-215.

[5] J.J. Charatonik, On Feebly Monotone and Related Classes of Mappings, Topology and Its Applications 105 (2000) 15-29.

[6] J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, A. Illanes, Remarks on Unicoherence at Subcontinua, Tsukuba J. Math. 22 (1998) 629-636.

[7] J. R. Munkres, Topología, Pearson Prentice Hall, 2da Edición.

[8] K. Kuratowski, Topology, Vol. 2. Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[9] S. Macías, Topics on Continua, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275. Chapman y Hall / CRC, Taylor y Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[10] S. Macías, Una Introducción a la Teoría de los Continuos. Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Sociedad Matemática Mexicana (2006) 1-35.

[11] S. Nadler, Jr. Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[12] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968.

[13] T. Maćkowiak, Continuous Mappings on Continua. Dissertations Math., Warzawa 158 (1979), pp. 1-91.

[14] T. Maćkowiak, Sets of irreducibility and mappings, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 24 (1976) 335 - 339.