

**VERIFICACIÓN DE CONJUNTOS ESTABILIZANTES  
PARA EL MÉTODO DE DISEÑO DE CONTROLADORES PI  
DE ZIEGLER & NICHOLS**

EMERSON REY ARDILA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA  
2018**

VERIFICACIÓN DE CONJUNTOS ESTABILIZANTES  
PARA EL MÉTODO DE DISEÑO DE CONTROLADORES PI  
DE ZIEGLER & NICHOLS

EMERSON REY ARDILA

*Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar  
por el título de Ingeniero Electrónico*

Director:  
RICARDO ALZATE CASTAÑO  
Ph.D. en Automatización

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA  
2018

## ***DEDICATORIA***

*A mi padre Benjamin Rey Mendoza y a mi madre Luz Marina Ardila, quienes con su esfuerzo, confianza y apoyo hicieron que esta meta fuera posible.*

***Emerson Rey Ardila***

## ***AGRADECIMIENTOS***

*A DIOS, por su amor, por su protección y por llenar mi vida de tantas bendiciones.*

*A mi director Ricardo Alzate, por brindarme sus conocimientos, por su gran ayuda,  
paciencia y dedicación.*

*A los miembros de la familia Ramírez Pérez, quienes depositaron su confianza en mí y  
fueron un gran apoyo durante todo este proceso.*

*A mis hermanos José y Fanny, por apoyarme en cada uno de los proyectos que  
emprendo.*

*A cada una de las personas con las que compartí durante mi estadía en la universidad.*

*Por último, a esos amigos que desde la distancia siempre creyeron en mí y brindaron  
su apoyo.*

***Emerson Rey Ardila***

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>13</b>
<b>1 CONJUNTO ESTABILIZANTE PARA SISTEMAS LTI</b>	<b>16</b>
1.1 ESTABILIDAD PARA UN SISTEMA LTI . . . . .	16
1.2 CONJUNTO ESTABILIZANTE . . . . .	19
1.2.1 Incidencia de $\mathcal{S}$ en la estabilidad de un lazo de control . . . . .	20
1.2.2 Escenarios dinámicos viables en $\mathcal{S}$ para el sistema compensado . . . . .	22
1.3 DISEÑO GRÁFICO DE CONTROLADORES A PARTIR DEL CÁLCULO DE $\mathcal{S}$ . . . . .	24
1.3.1 Descripción general de requerimientos . . . . .	26
1.3.1.1 Nivel superior de detalle . . . . .	26
1.3.1.2 Partición de primer nivel . . . . .	26
1.3.1.3 Particiones de segundo nivel . . . . .	27
1.3.2 Selección de herramienta para implementación . . . . .	29
1.3.3 Descripción de interfaz diseñada . . . . .	30
<b>2 CONTROLADORES PI Y SU CONJUNTO ESTABILIZANTE</b>	<b>31</b>
2.1 CONTROLADORES PID . . . . .	31
2.1.1 Reglas de sintonización . . . . .	32
2.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA UN CONTROLADOR PI . . . . .	33
2.2.1 Sintonización PI por <i>Ziegler &amp; Nichols</i> . . . . .	34
2.2.2 Conjunto estabilizante para sistema ante control PI . . . . .	36
2.3 FRAGILIDAD DE CONTROLADORES PI . . . . .	37
2.3.1 Geometría para márgenes de estabilidad en un controlador PI . . . . .	38
2.3.2 Definición de métrica para calcular distancia a inestabilidad . . . . .	40
<b>3 CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
3.1 RECOMENDACIONES . . . . .	48

3.2 TRABAJO FUTURO . . . . .	48
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>49</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sistema de control con realimentación unitaria . . . . .	16
Figura 2	Respuesta escalón de sistema compensado manifestando inestabilidad . . . . .	21
Figura 3	Conjunto estabilizante en el plano $(\alpha, \beta)$ para $k = 34,93$ . . . . .	23
Figura 4	Conjunto estabilizante en el plano $(M_p, t_s)$ para $k = 34,93$ . . . . .	24
Figura 5	Respuesta dinámica y controlador al interior de $\mathcal{S}$ en el plano $(M_p, t_s)$ . . . . .	25
Figura 6	Nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz . . . . .	26
Figura 7	Primer nivel de detalle para desarrollo de interfaz . . . . .	27
Figura 8	Subproceso de <i>Cálculo de <math>\mathcal{S}</math></i> . . . . .	28
Figura 9	Subproceso de <i>Cálculo respuesta escalón a partir de <math>(\alpha, \beta)</math></i> . . . . .	28
Figura 10	Subproceso de <i>Elección de punto admisible en <math>(M_p, t_s)</math></i> . . . . .	29
Figura 11	Subproceso de <i>Conversión <math>(M_p^*, t_s^*)</math> a <math>(\alpha, \beta)</math></i> . . . . .	29
Figura 12	Presentación final para interfaz desarrollada . . . . .	30
Figura 13	Controlador PID en forma de realización paralela . . . . .	32
Figura 14	Respuesta escalón en forma de $s$ del método en lazo abierto . . . . .	35
Figura 15	Respuesta escalón del sistema compensado . . . . .	36
Figura 16	Conjunto estabilizante en el plano $(k_P, k_I)$ . . . . .	37
Figura 17	Intersección en el plano $(k_P, k_I)$ para línea recta y elipse . . . . .	41
Figura 18	Representación geométrica en $(k_P, k_I)$ para márgenes de estabilidad . . . . .	45
Figura 19	Distancia a la inestabilidad . . . . .	46

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Equivalencias cálculo controlador PI para métodos de <i>Ziegler &amp; Nichols</i> . . . . .	35
---------	---	----

# RESUMEN

**Título:** Verificación de conjuntos estabilizantes para el método de diseño de controladores PI de Ziegler & Nichols <sup>1</sup>

**Autor:** Emerson Rey Ardila<sup>2</sup>

**Palabras Clave:** Conjunto estabilizante, Controladores PI, Diseño gráfico de compensadores, Método de Ziegler & Nichols.

## DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto de grado presenta el cálculo de conjuntos estabilizantes para sistemas SISO LTI controlados por compensadores de estructura simple. En particular, se estudia la fragilidad de controladores PI calculados empleando el método clásico de *Ziegler & Nichols*. A partir de la definición de una métrica basada en la interpretación geométrica para los márgenes de estabilidad del sistema controlado, se verifica que el controlador diseñado con el método en cuestión no necesariamente tolera variaciones significativas en sus valores de parámetro. Lo anterior es importante tomando en cuenta que generalmente los métodos de diseño se someten a un ajuste fino. Adicional a lo anterior, se desarrolló un algoritmo que permitió verificar las condiciones de estabilidad para controladores PI diseñados mediante dicho método; se implementó una interfaz en MATLAB que permite calcular gráficamente los parámetros del controlador a partir de un conjunto admisible de especificaciones en el dominio del tiempo (i.e. Sobreimpulso y tiempo de establecimiento) a partir de su conjunto estabilizante en el dominio de parámetros del controlador. Trabajo complementario incluye la utilización de técnicas computacionales para el cálculo de conjuntos estabilizantes sobre plantas arbitrarias empleando el método de la signatura desarrollado por Keel y Bhattacharyya. Asimismo es importante explorar otras topologías de compensador y controladores PID, en sus versiones de tiempo continuo y discreto.

---

<sup>1</sup> Trabajo de Grado

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

# ABSTRACT

**Title:** Verificación de conjuntos estabilizantes para el método de diseño de controladores PI de Ziegler & Nichols <sup>1</sup>

**Author:** Emerson Rey Ardila<sup>2</sup>

**Keywords:** Graphical design of compensators, PI controllers, Stabilizing set, Ziegler & Nichols classical method.

## DESCRIPTION:

In this work the calculation for stabilizing sets of SISO LTI plants controlled by single structure compensators is presented. In particular, the fragility of PI controllers calculated by employing the classical method of Ziegler & Nichols is tested by defining a measure based on geometrical interpretation of margins of stability for the controlled loop. This measure shows that the controller calculated is not tolerant to changes in the parameter values, a situation typical in practice by the so-called fine tuning procedures. Also, an algorithm was developed to verify the stability conditions for PI controllers designed by said method; a software interface was implemented in MATLAB that allows to graphically calculate the parameters of the controller from a permissible set of specifications in the time domain (i.e. overshoot and settling time) from its stabilizing set in the parameter domain of the controller. Ongoing work includes the automatic calculation for stabilizing sets in arbitrary plants by using computational tools already developed for that goal, using the signature method developed by Keel and Bhattacharyya. It is also important to explore other compensator and PID controller topologies, in their continuous and discrete time versions.

---

<sup>1</sup> Bachelor Thesis

<sup>2</sup> Faculty of Physics-Mechanics Engineering. School of Electric, Electronic and Telecommunications Engineering. Advisor: Ricardo Alzate Castaño.

# *INTRODUCCIÓN*

Diseñar un controlador puede considerarse como el arte de determinar la estructura y los parámetros de un sistema para modificar a conveniencia el comportamiento de otro. En este proceso, llevar a la práctica dicha idea formulada en modo simple, implica satisfacer requerimientos con recursos limitados en general.

La teoría del control, tanto de tipo clásico como moderno, ha intentado resolver este problema de diseño atendiendo diferentes criterios de desempeño que incluyen consideraciones de error, criterios de optimalidad, robustez, incertidumbre y adaptabilidad.

A pesar de los diferentes criterios y puntos de vista que atienden la tarea del diseño de un controlador, siempre será necesario cumplir con una premisa básica: la estabilidad del sistema controlado.

Bhattacharyya y Keel mostraron en [16] que aún las estrategias más refinadas de diseño de controladores pueden presentar problemas, al no garantizar estabilidad.

Estudios complementarios al anterior, incluyen minuciosos trabajos de alta componente teórica orientados a formular técnicas refinadas para el cálculo de controladores de bajo orden, que garanticen no solamente las premisas requeridas de desempeño dinámico para el sistema controlado, sino también el elemento más importante: “*su estabilidad*”.

El conjunto estabilizante, se define por tanto como todos los posibles valores de parámetro para un controlador, que garantizan las condiciones de estabilidad absoluta para el sistema [2]. Estas condiciones de estabilidad absoluta son fácilmente verificables en sistemas de bajo orden a través de procedimientos simples como el criterio de *Routh-Hurwitz* [20]. Sin embargo, cuando el orden del sistema, o la cantidad de parámetros

del controlador aumenta, dichas inecuaciones constituyen sistemas no lineales de difícil solución analítica. Algunos autores han propuesto soluciones más generalizadas para resolver este tipo de problemas, basadas en el teorema de *Hermite-Bielher* [11, 13].

En particular, se han obtenido resultados aplicados sobre plantas típicas ante controladores PID, como se referencia en [9, 21, 24], complementado por análisis de lazos de control bajo la acción de retardos en [10, 11, 21]. Algunas aplicaciones para el caso de diseño de controladores sobre convertidores de potencia pueden encontrarse en [4, 6, 17].

Tomando en cuenta lo anterior, se evidencia la importancia del análisis de conjuntos estabilizantes en el diseño de un sistema de control para garantizar su operación ante distintos escenarios que pueden experimentarse en situaciones prácticas. Por tanto, se analizará un caso de estudio ampliamente empleado como lo es el método de *Ziegler & Nichols*, buscando mostrar la relación que tiene su formulación básica (expresiones matemáticas y métodos de cálculo) con los conjuntos estabilizantes de sus parámetros solución.

A partir de la ejecución del presente trabajo de grado, se buscan respuestas ante interrogantes como los siguientes: ¿Cómo se relacionan los parámetros de un controlador PI calculado por el método de *Ziegler & Nichols* con su conjunto estabilizante? ¿Qué tan propensa al estado de inestabilidad es una planta controlada a partir del análisis anterior? ¿Demuestra el método de *Ziegler & Nichols* sensibilidad ante cambios de parámetro del sistema? ¿Es fácil llevar a la inestabilidad un sistema controlado mediante un controlador PI diseñado empleando el método de *Ziegler & Nichols*? En otras palabras ¿Qué tan frágil es el método para cálculo de controladores PI de *Ziegler & Nichols*?

## OBJETIVOS

### Objetivo general

- ❖ Analizar las condiciones de estabilidad del conjunto de parámetros PI calculados empleando el método de diseño de controladores de Ziegler & Nichols.

## Objetivos específicos

- ❖ Interpretar las tablas de diseño de parámetros PI de Ziegler & Nichols en términos de conjuntos estabilizantes;
- ❖ Desarrollar un algoritmo que permita verificar las condiciones de estabilidad para controladores PI diseñados mediante dicho método;
- ❖ Implementar una interfaz para cálculo de controladores PI a partir de selección de parámetros en el dominio del tiempo, admisibles respecto al conjunto estabilizante correspondiente.

# *Capítulo 1*

## **CONJUNTO ESTABILIZANTE PARA SISTEMAS LTI**

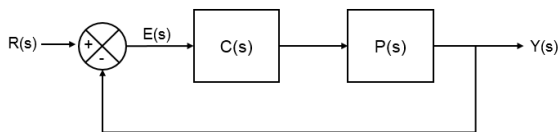
En el presente capítulo se formula el conjunto de ecuaciones que delimitan la región de estabilidad (*conjunto estabilizante*) para una planta de segundo orden, compensada con un controlador de tres parámetros ( $k, \alpha, \beta$ ). Este estudio se realiza haciendo uso del *Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz*. La región de estabilidad del sistema se formula asumiendo  $k$  de valor conocido en el plano  $(\alpha, \beta)$  de parámetros del controlador, mediante deducciones analíticas y simulaciones numéricas en MATLAB.

### 1.1. ESTABILIDAD PARA UN SISTEMA LTI

Considere el sistema de control con realimentación unitaria ilustrado en la Fig. 1. Para este sistema  $R(s)$  representa la señal de entrada,  $E(s)$  la señal de error,  $Y(s)$  la señal de salida,  $P(s)$  la función de transferencia de la planta y  $C(s)$  la función de transferencia para un controlador de estructura fija y 3 parámetros, dado por:

$$C(s) = \frac{k(s + \alpha)}{(s + \beta)}. \quad (1.1)$$

Figura 1. Sistema de control con realimentación unitaria



Para efectos de ilustración, se asumirá una planta genérica de segundo orden con un polo en el origen, a partir de:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1.2)$$

definiendo a su vez el siguiente polinomio característico:

$$\begin{aligned} \delta(s) &= N(s)[k(s+\alpha)] + D(s)(s+\beta) \\ &= k(s+\alpha) + s(s+2)(s+\beta) \\ &= s^3 + (2+\beta)s^2 + (2\beta+k)s + k\alpha, \end{aligned} \quad (1.3)$$

cuyas raíces establecen la estabilidad del sistema.

Como es bien sabido, el *Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz* [20] permite determinar las condiciones para la estabilidad absoluta de un sistema dinámico, mediante un método tabulado que define la posición de las raíces en el plano, para un polinomio que representa el denominador de la función de transferencia del sistema.

Así entonces, se aplica dicho criterio a partir de los siguientes pasos:

1. *Se escribe el polinomio característico en la forma  $\delta(s) = 0$  y se verifican las condiciones para que todos sus coeficientes sean diferentes de cero y del mismo signo.* De esta manera, asumiendo una convención positiva, los coeficientes de (1.3) serán mayores a cero si se cumplen las siguientes condiciones:

$$(2+\beta) > 0; \quad (2\beta+k) > 0; \quad k\alpha > 0,$$

a partir de lo cual, asumiendo que  $k > 0$  es un parámetro constante conocido, las condiciones para estabilidad recaen sobre los parámetros restantes  $\{\alpha, \beta\}$ , siendo:

$$\beta > -2; \quad \beta > -\frac{k}{2}; \quad \alpha > 0.$$

2. *Se construye el arreglo de Routh y se analizan los elementos en la primera columna. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de (1.3) se encuentren en el semiplano izquierdo del plano "s", es que no existan cambios de signo en la primera columna del arreglo* [20]. A partir de ello se tiene:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & (2\beta + k) \\ s^2 & (2 + \beta) & k\alpha \\ s^1 & M & 0 \\ s^0 & k\alpha & \end{array}$$

siendo

$$M = \frac{(2\beta + k)(2 + \beta) - k\alpha}{(2 + \beta)},$$

de lo cual,  $M > 0$  implica

$$(2\beta + k)(2 + \beta) - k\alpha > 0,$$

puesto que  $(2 + \beta) > 0$  y así entonces:

$$2\beta^2 + (4 + k)\beta + 2k - k\alpha > 0.$$

Despejando  $\alpha$  en la expresión anterior se obtiene:

$$\alpha < \frac{2}{k} \left( \left( \beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right), \quad (1.4)$$

tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{2\beta^2 + (4 + k)\beta + 2k}{k} &= \frac{2}{k} \left( \beta^2 + \frac{(k+4)}{2}\beta + k \right) \\ &= \frac{2}{k} \left( \beta^2 + \frac{(k+4)}{2}\beta + \frac{(k+4)^2}{16} - \frac{(k+4)^2}{16} + k \right) \\ &= \frac{2}{k} \left( \left( \beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 + \frac{16k - (k^2 + 8k + 16)}{16} \right) \\ &= \frac{2}{k} \left( \left( \beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k^2 - 8k + 16)}{16} \right) \\ &= \frac{2}{k} \left( \left( \beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right). \end{aligned}$$

3. *A partir de las restricciones obtenidas sobre los términos de la primera columna del arreglo de Routh, se determina el rango de valores que asegura para cada parámetro la estabilidad absoluta del sistema. Por tanto, para  $k > 4$  la condición*

que prevalece sobre el parámetro  $\beta$  será:

$$\beta > -2. \quad (1.5)$$

Asimismo se tiene:

$$0 < \alpha < \frac{2}{k} \left( \left( \beta + \frac{(k+4)}{4} \right)^2 - \frac{(k-4)^2}{16} \right). \quad (1.6)$$

## 1.2. CONJUNTO ESTABILIZANTE

Dada una estructura de controlador fija  $C(s)$  para una planta  $P(s)$ , el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  se define como todos los posibles controladores  $C(s)$  que brindan una solución estable para el sistema realimentado mostrado en la Fig. 1.

En este punto es importante resaltar que en la mayoría de métodos clásicos para el diseño de controladores, el cálculo de los parámetros del controlador se realiza sin incluir restricciones explícitas de estabilidad. En general, un diseño viene acompañado por pruebas de verificación no sólo para las condiciones de operación del sistema controlado sino también para su estabilidad, constituyendo procedimientos iterativos muchas veces del tipo ensayo y error.

En otras palabras, los métodos de diseño se formulan para cumplir con condiciones de desempeño sobre un sistema controlado estable, pero no toman en cuenta que aún cuando matemáticamente el controlador pueda satisfacer el problema, existe un conjunto restringido de parámetros de control que aseguran la estabilidad del sistema.

El conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  es fácil de definir. Por ejemplo, para la combinación de planta y controlador dada por las ecuaciones (1.1)-(1.2) en la Sección 1.1, dicho conjunto puede escribirse como:

$$\mathcal{S} = \{(k, \alpha, \beta) : (1.5) \text{ y } (1.6) \text{ se satisfagan simultáneamente}\}. \quad (1.7)$$

El conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  es difícil de calcular. Para sistemas de bajo orden, el *criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz* puede ser empleado según ilustrado en la Sección 1.1.

Sin embargo, para un orden elevado la cantidad de expresiones no lineales que se requiere combinar para determinar los rangos de parámetros estables justifican la utilización de métodos computacionales refinados. El *método de la signatura* propuesto por Keel y Bhattacharyya en [15] es una opción viable para estos casos.

**1.2.1 Incidencia de  $\mathcal{S}$  en la estabilidad de un lazo de control** Para verificar la importancia del conjunto estabilizante, considere el problema de diseño de un compensador  $C(s)$  de la forma (1.1) para el sistema  $P(s)$  definido en (1.2), de manera tal que el sistema compensado y realimentado como en la Fig. 1 exhiba una respuesta escalón con las siguientes características dinámicas:

$$M_p \approx 0\%; \quad t_s|_{2\%} \approx 0,5 [s]. \quad (1.8)$$

Inicialmente, se deben traducir las especificaciones de respuesta temporal dadas en (1.8) al dominio de la frecuencia. A partir de ello, los polos deseados para el sistema compensado corresponden con:

$$s = -8,231 \pm 0j. \quad (1.9)$$

Ahora bien, evaluando este valor para “ $s$ ” en  $P(s)$ , se verifica una deficiencia angular de:

$$\angle C(s) = 180^\circ, \quad (1.10)$$

que a su vez corresponde con la contribución de fase que debe aportar el compensador en el polo deseado. A partir de ello, la localización para el polo y el cero del compensador se realiza empleando el siguiente análisis:

- Para obtener  $180^\circ$  de fase en el compensador, el cociente resultante debe ser un número real negativo teniendo en cuenta el carácter real del polo deseado;
- Posteriormente se selecciona una distribución en el eje real negativo para la localización del polo deseado y el polo y el cero del compensador, que conserve una simetría dada por un factor:

$$\gamma = \frac{s}{5} \approx \frac{5}{3},$$

en modo tal que:

$$\alpha = \gamma s \approx 13,21, \quad \beta = \frac{s}{\gamma} \approx 4,84; \quad (1.11)$$

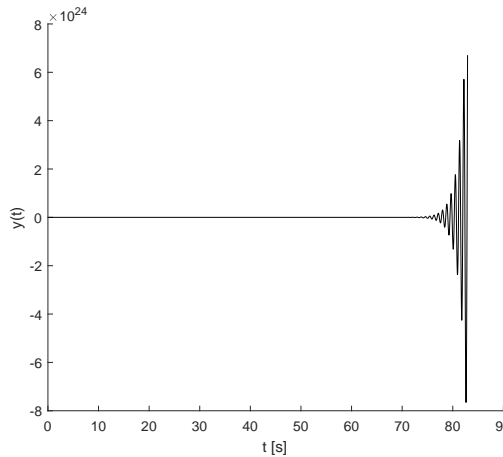
- Por último se determina la ganancia  $k$  del compensador, como aquel valor que satisface la condición de magnitud para el lugar geométrico de las raíces:

$$\left| \frac{k(s + 13,21)}{s(s + 2)(s + 4,84)} \right|_{s=-8,231 \pm 0j} = 1, \quad (1.12)$$

a partir de lo cual  $k \approx 34,93$ .

Una vez diseñado el compensador, se procede a verificar el desempeño del sistema controlado empleando herramientas de simulación. Es así como la Fig. 2 muestra la respuesta temporal ante un estímulo de tipo escalón unitario, calculada empleando el *Control System Toolbox* de MATLAB® en el sistema compensado y realimentado, siendo sin embargo de naturaleza inestable. A partir de lo anterior, surge la pregunta: ¿Por qué un diseño que se realiza empleando apropiadamente las herramientas matemáticas, conduce a un sistema inestable?

Figura 2. Respuesta escalón de sistema compensado manifestando inestabilidad



La respuesta para este interrogante implica considerar las potencialidades y limitaciones de cada tipo de controlador y se explica fácilmente a partir de (1.7), justificando que los requerimientos dados en (1.8) no son viables para la estructura del compensador seleccionada, según se detalla a continuación.

**1.2.2 Escenarios dinámicos viables en  $\mathcal{S}$  para el sistema compensado** El conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  definido en (1.7) depende de las inecuaciones (1.5) y (1.6), establecidas a su vez para  $k > 0$ .

De los resultados presentados para el cálculo del compensador se observa que  $k = 34,93$  satisface la última premisa. Por tanto, el controlador será estable si tanto  $\alpha$  como  $\beta$  satisfacen para este valor de  $k$ , las desigualdades que relacionan los elementos en la primera columna del arreglo de Routh.

Así entonces, reemplazando (1.11) para  $k = 34,93$  en (1.5) y (1.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta &= 4,84 \\ &> -2; \\ \alpha &= 13,21 \\ &> 0 \\ &\not\leq \frac{2}{34,93} \left( \left( 4,84 + \frac{(34,93 + 4)}{4} \right)^2 - \frac{(34,93 - 4)^2}{16} \right) \\ &\not\leq 8,73, \end{aligned}$$

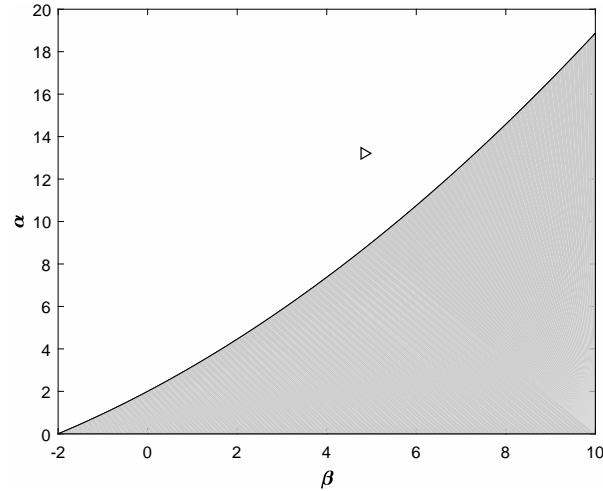
de donde la última desigualdad muestra la razón por la cual el controlador calculado representa un sistema realimentado inestable.

De hecho, es posible graficar el plano de parámetros  $(\alpha, \beta)$  que representa los controladores con estructura (1.1) que para  $k = 34,93$  garantizan la estabilidad del sistema controlado y realimentado. Dicha gráfica se presenta en la Fig. 3, siendo el interior de la región gris el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$ , mientras el triángulo indica el controlador calculado en la Sección 1.2.1 evidenciando su condición de realización inestable para el sistema.

Más interesante aún es transformar dicho conjunto estabilizante en términos de parámetros del controlador hacia un espacio de especificaciones de desempeño. Por ejemplo, observe en la Fig. 4 el plano  $(M_p, t_s)$  equivalente para el conjunto estabilizante mostrado en la Fig. 3.

De este diagrama se observa la manera en la cual los parámetros de desempeño reque-

Figura 3. Conjunto estabilizante en el plano  $(\alpha, \beta)$  para  $k = 34,93$



ridos para el diseño presentado en la Sección 1.2.1, no forman parte de los escenarios dinámicos viables en el conjunto estabilizante para el sistema compensado. Visualmente se observa una discontinuidad del conjunto  $\mathcal{S}$  al ser mapeado desde el plano  $(\alpha, \beta)$  hacia el plano  $(M_p, t_s)$ . Un análisis detallado del efecto anterior involucra *topología matemática*, superando los alcances del presente trabajo de grado.

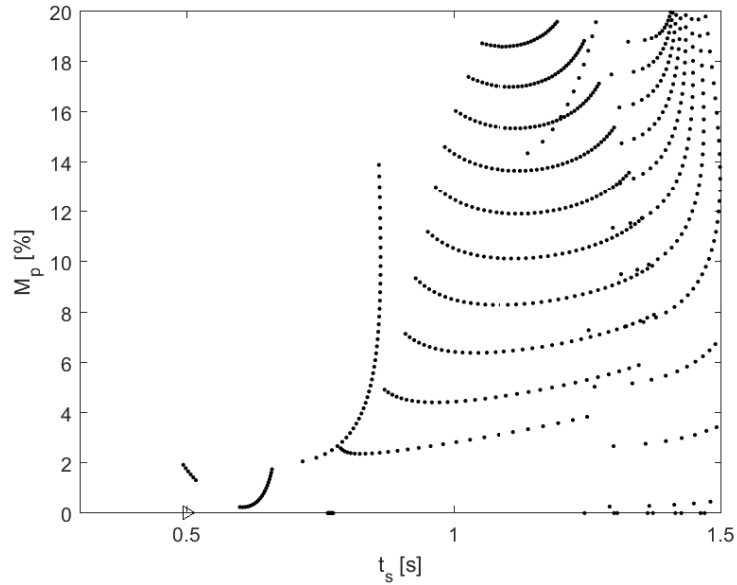
Por tanto, dada la dificultad matemática que implica un mapeo analítico entre el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  y los parámetros de una respuesta escalón, el plano presentado en la Fig. 4 fue generado empleando simulación de fuerza bruta (es decir, punto a punto) a partir de las funciones del *Control Systems Toolbox* de MATLAB®.

De esta manera es posible realizar una selección visual para los parámetros del controlador (*método gráfico de diseño*) a partir de una elección de las especificaciones de desempeño requeridas en la respuesta escalón, al interior del conjunto admisible dado en la Fig. 4

La Fig. 5 ilustra la selección para varios escenarios dinámicos al interior de la región de estabilidad, con su correspondiente mapeo al plano de parámetros del controlador.

A partir de lo anterior, pueden emplearse herramientas computacionales para realizar, de manera gráfica, el cálculo de un compensador de estructura predeterminada para una planta conocida y con base en el conjunto de especificaciones de desempeño admisible

Figura 4. Conjunto estabilizante en el plano  $(M_p, t_s)$  para  $k = 34,93$



proporcionadas por el conjunto estabilizante, según se detalla en la siguiente sección.

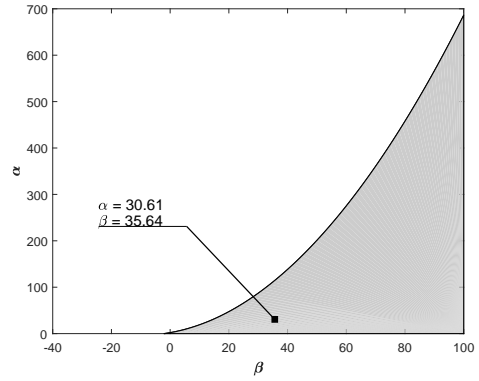
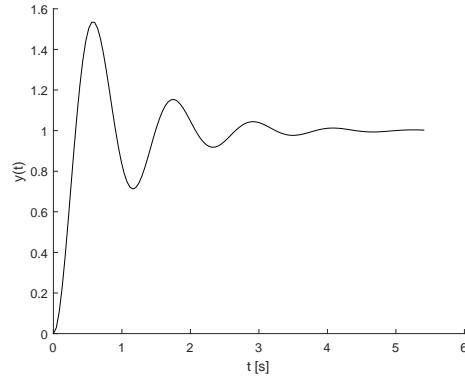
### 1.3. DISEÑO GRÁFICO DE CONTROLADORES A PARTIR DEL CÁLCULO DE $S$

Tomando en cuenta la alta capacidad de cálculo y portabilidad de las herramientas computacionales actuales, resulta simple aceptar que las dificultades analíticas en la determinación de parámetros de control puedan ser reducidas ostensiblemente a partir de paquetes como MATLAB, que integra funciones optimizadas para aproximar con muy alta precisión los valores de variables importantes en un sistema de control realimentado, ante simulación para diversos escenarios de operación.

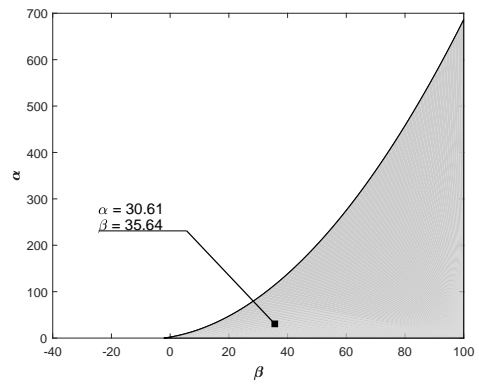
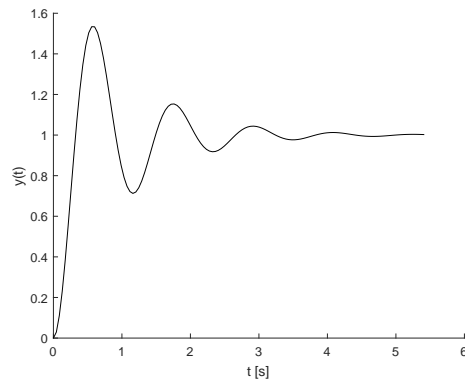
Tomando en cuenta lo anterior, se construyó una interfaz para realizar el diseño de controladores simples (i.e. compensadores en adelante o en atraso), a partir de un enfoque gráfico basado en el cálculo del conjunto estabilizante para sistemas *SISO LTI*. El diseño de la interfaz se presenta a continuación empleando como base la descripción propuesta por Roa y Ayala en [22] para este tipo de desarrollos.

Figura 5. Respuesta dinámica y controlador correspondiente para diferentes especificaciones al interior de  $\mathcal{S}$  en el plano  $(M_p, t_s)$

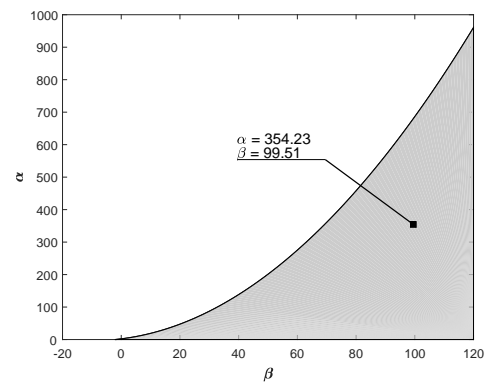
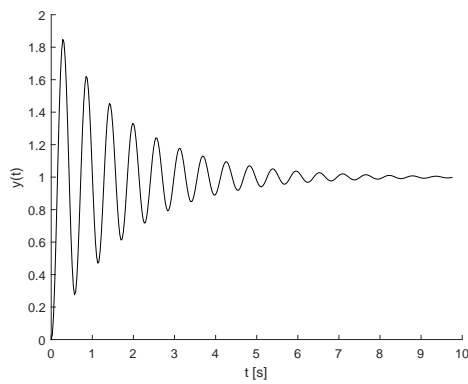
(a)  $M_p = 53,38; t_s = 3,60$



(b)  $M_p = 53,38; t_s = 3,60$



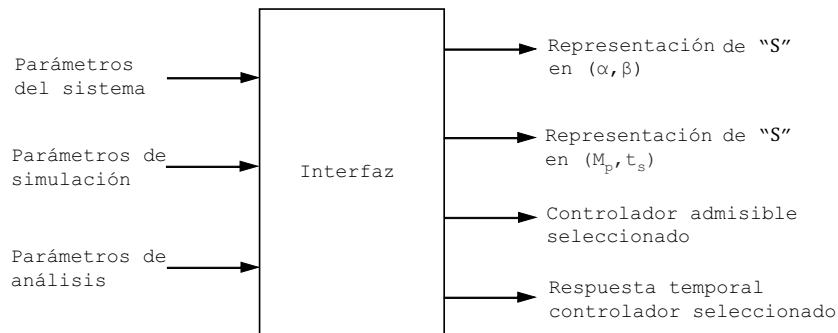
(c)  $M_p = 84,76; t_s = 6,85$



**1.3.1 Descripción general de requerimientos** Se requiere construir una interfaz de software que permita diseñar un controlador de estructura simple pre-establecida, a partir de información del conjunto admisible de parámetros de respuesta dinámica, calculados con base en el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  para un sistema realimentado de manera negativa y unitaria. La interfaz deberá permitir modificar la ganancia  $k$  de baja frecuencia del controlador, así como los rangos de variación del parámetro  $\beta$  y la resolución de puntos para el conjunto estabilizante calculado, permitiendo visualizar dicho conjunto en el plano  $(\alpha, \beta)$ , su mapeo correspondiente hacia el plano de parámetros de respuesta  $(M_p, t_s)$  y la respuesta escalón del sistema realimentado para un punto arbitrario dentro de  $\mathcal{S}$ .

**1.3.1.1 Nivel superior de detalle** Posterior a la descripción (en palabras) de los requerimientos del sistema (interfaz), se procede a crear un diagrama general de entradas y salidas a manera de nivel superior de detalle. Dicha representación se muestra en la Fig. 6.

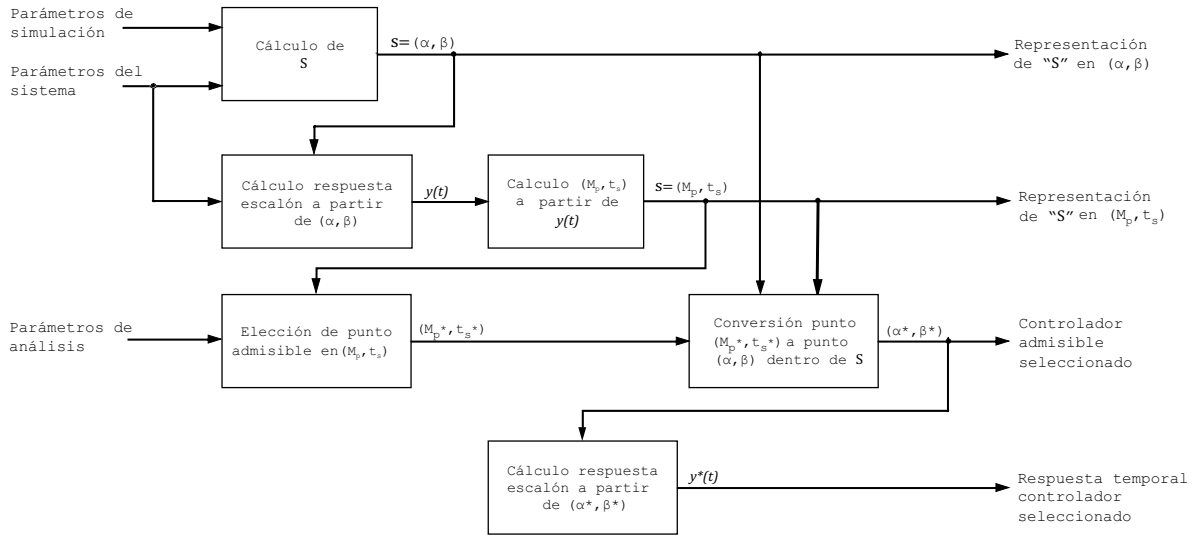
Figura 6. Representación de nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz



**1.3.1.2 Partición de primer nivel** Una primera partición se logra con la incorporación del bloque que realiza el cálculo del conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$ , mediante evaluación de las expresiones (1.5), (1.6) y (1.7).

Asimismo, los resultados en esta etapa son la información de entrada a un nuevo bloque encargado de construir la representación gráfica del conjunto estabilizante en el espacio de parámetros  $(M_p, t_s)$ . Lo anterior se realiza en una secuencia de dos pasos: 1) se calculan las respuestas escalón  $y(t)$  para el sistema realimentado con cada uno de los

Figura 7. Representación de primer nivel de partición para desarrollo de interfaz



parámetros de controlador dados por  $\mathcal{S}$  y 2) se determina el valor correspondiente en el plano  $(M_p, t_s)$  para cada caso.

Con esta información, el usuario puede proceder a seleccionar un punto admisible  $(M_p^*, t_s^*)$ , que posteriormente es representado en su versión equivalente de parámetros del controlador deseado  $(\alpha^*, \beta^*)$ . Finalmente, se calcula para este punto la respuesta escalón  $y^*(t)$  para el sistema realimentado.

De esta manera, el primer nivel de partición se configura con la unión de los anteriores subprocesos, tal y como se ilustra en la Fig. 7.

**1.3.1.3 Particiones de segundo nivel** A su vez, cada uno de los subprocesos descritos en el ítem anterior, se descompone en etapas constitutivas fundamentales según se describe a continuación:

- *Cálculo de  $\mathcal{S}$* : para determinar el conjunto estabilizante se debe establecer para un  $k$  dado y un intervalo de variación conocido para  $\beta$ , el rango de  $M$  valores para la variable  $\alpha$  que satisface las restricciones impuestas por las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7). El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 8;
- *Cálculo respuesta escalón a partir de  $(\alpha, \beta)$* : una vez calculado  $\mathcal{S}$ , es posible evaluar cada punto  $(\alpha, \beta)$  en la estructura de control realimentado mostrada en la Fig.

1. De esta manera puede calcularse, a través de comandos del *Control System Toolbox* de MATLAB, la respuesta escalón para el sistema. El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 9;

- *Elección de punto admisible en  $(M_p, t_s)$* : a través de selección gráfica el usuario seleccionará un punto de interés  $(\bar{M}_p, \bar{t}_s)$ . Posteriormente, se deberá verificar si dicho punto pertenece al conjunto de parámetros admisibles  $(M_p, t_s)$ . En caso afirmativo, el punto se denominará  $(M_p^*, t_s^*)$ . El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 10;
- *Conversión punto  $(M_p^*, t_s^*)$  a punto  $(\alpha, \beta)$  dentro de  $\mathcal{S}$* : tomando en cuenta que los planos  $(M_p, t_s)$  y  $(\alpha, \beta)$  poseen las mismas dimensiones y son una relación uno a uno, la posición del punto  $(M_p^*, t_s^*)$  equivale al conjunto de parámetros  $(\alpha^*, \beta^*)$  del controlador que lo produce. El esquema para estas subrutinas se muestra en la Fig. 11.

Figura 8. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Cálculo de  $\mathcal{S}$*

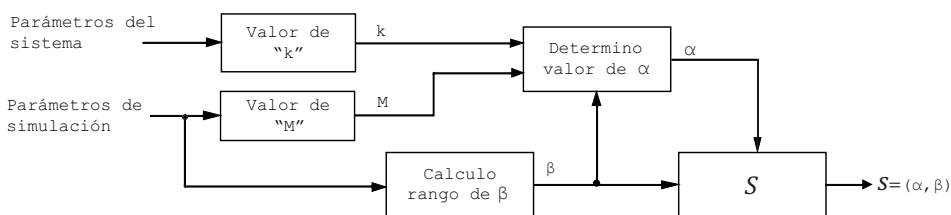
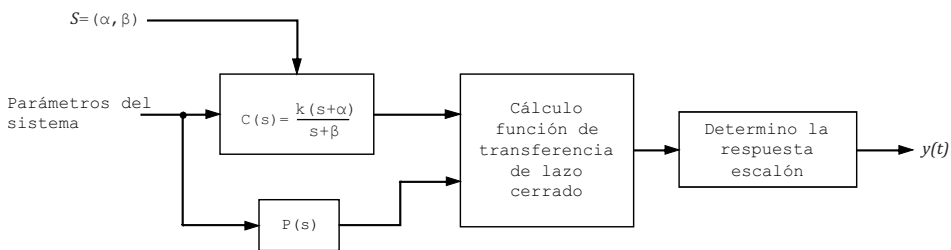


Figura 9. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Cálculo respuesta escalón a partir de  $(\alpha, \beta)$*



El esquema definitivo para las etapas que constituyen la interfaz, implica la combinación de los esquemas presentados en las Figs. 7 y 8-11.

Figura 10. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Elección de punto admisible en  $(M_p, t_s)$*

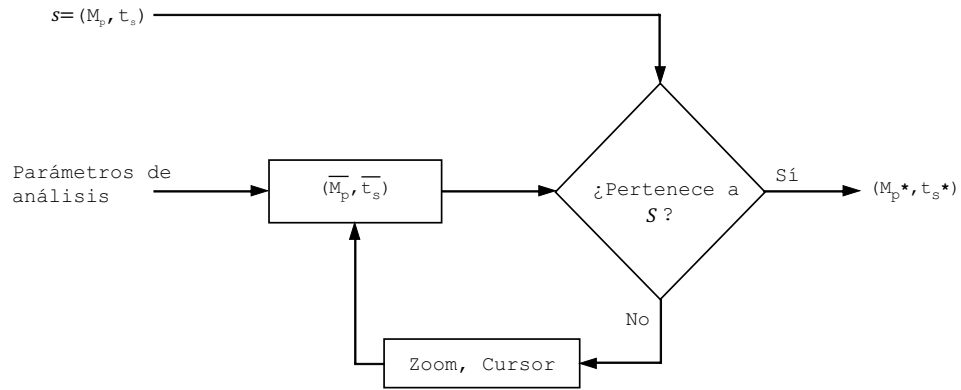
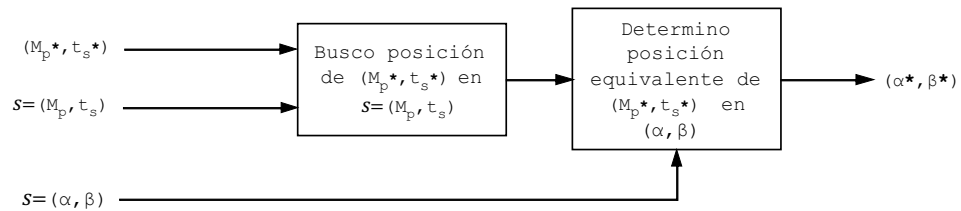


Figura 11. Representación de segundo nivel de partición para subproceso de *Conversión punto  $(M_p^*, t_s^*)$  a punto  $(\alpha, \beta)$  dentro de  $\mathcal{S}$*

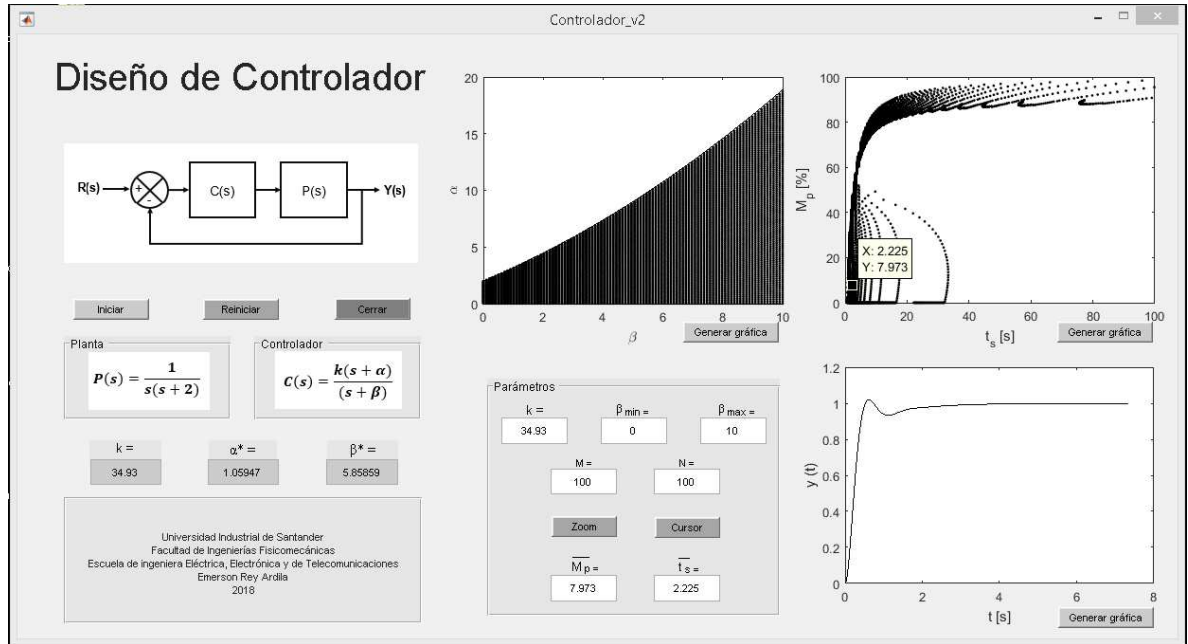


**1.3.2 Selección de herramienta para implementación** A partir del diagrama obtenido en la Fig. 7, es claro que el corazón de la interfaz a ser diseñada es la rutina que calcula los parámetros de respuesta escalón en el sistema compensado para cada punto de prueba. Como ya mencionado, estas tareas facilitan su ejecución empleando los comando del *Control System Toolbox* de MATLAB. Por tanto, se considera a dicha herramienta como la primera opción para desarrollar la interfaz de software requerida.

Mas aún, MATLAB posee además de la consola de comandos y el entorno de programación gráfico SIMULINK, un entorno para el desarrollo de interfaces de usuario denominado GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

Tomando en cuenta lo anterior, se selecciona MATLAB *vR2017a* para construir la interfaz de usuario que satisface los requerimientos de diseño ilustrados en los diagramas de nivel de partición previamente presentados.

Figura 12. Presentación final para interfaz desarrollada



**1.3.3 Descripción de interfaz diseñada** Procediendo con el diseño, se realiza codificación en MATLAB para la combinación de los diagramas de bloques de las Figs. 7-11, asumiendo las siguientes *variables de entrada*:

- ❖ Parámetros de simulación:  $[\beta_{min}, \beta_{max}, M, N]$ ;
- ❖ Parámetros del sistema:  $[k, P(s), \text{estructura para } C(s)]$ ;
- ❖ Parámetros de análisis:  $[\bar{M}_p, \bar{t}_s]$ ,

y *de salida*:

- ❖ Representación de  $\mathcal{S}$  en  $(\alpha, \beta)$ :  $[\mathcal{S} = (\alpha, \beta)]$ ;
- ❖ Representación de  $\mathcal{S}$  en  $(M_p, t_s)$ :  $[\mathcal{S} = (M_p, t_s)]$ ;
- ❖ Controlador admisible seleccionado:  $[(\alpha^*, \beta^*)]$ ;
- ❖ Respuesta temporal controlador seleccionado:  $[y^*(t)]$ .

Todo lo anterior fue adecuado como se presenta en la Fig. 12, ilustrando la presentación final de la interfaz desarrollada.

## *Capítulo 2*

# ***CONTROLADORES PI Y SU CONJUNTO ESTABILIZANTE***

Como complemento a los desarrollos presentados en el capítulo anterior, se analiza a continuación la incidencia de conjuntos estabilizantes en controladores clásicos del tipo proporcional/integral (más conocidos como PI), sintonizados empleando las reglas de *Ziegler & Nichols*. La manera de abordar el problema involucra una revisión general de conceptos, el cálculo de  $\mathcal{S}$  para un caso de estudio y la definición de una métrica para valorar la *fragilidad* del controlador diseñado.

### **2.1. CONTROLADORES PID**

La acción de control proporcional/integral/derivativo (o simplemente PID), constituye la estrategia de control más empleada en automatización de procesos industriales [3].

Entre las razones por las cuales se prefiere el uso de controladores PID, se incluye la simplicidad de su estructura que con tan sólo 3 términos permite asegurar rechazo ante perturbaciones, velocidades de respuesta apropiadas y la eliminación de errores en estado estacionario. Lo anterior, facilita el cálculo de parámetros de control al igual que su operación y mantenimiento [7, 8, 18].

Fundamentalmente, la estructura de una acción PID está constituida de una parte *proporcional al error*:

$$u_P = k_P e(t),$$

siendo  $e(t)$  el error de medida y  $k_P$  la ganancia proporcional; una parte *proporcional a*

la historia del error (a partir del operador de memoria integral en el tiempo):

$$u_I = k_I \int_0^t e(t) dt,$$

con ganancia integral  $k_I$  y finalmente, una parte *proporcional al cambio reciente del error* (a partir del operador anticipativo derivada temporal):

$$u_D = k_D \frac{d}{dt} e(t),$$

con ganancia derivativa  $k_D$ . La superposición de las tres acciones anteriores permite constituir la siguiente expresión para el esfuerzo de control:

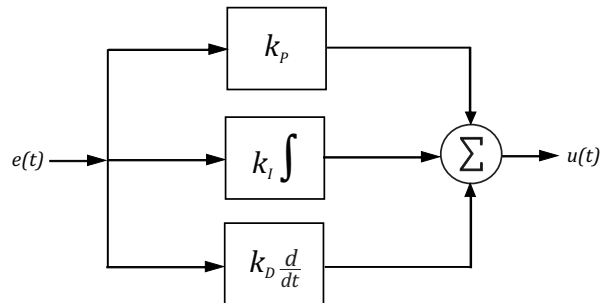
$$u_{PID}(t) = u_P + u_I + u_D \quad (2.1)$$

$$= k_P e(t) + k_I \int_0^t e(t) dt + k_D \frac{d}{dt} e(t) \quad (2.2)$$

$$= k_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right), \quad (2.3)$$

siendo  $T_I$  el tiempo integral y  $T_D$  el tiempo derivativo. El esquema general para la realización de un controlador PID en forma paralela, se presenta en la Fig. 13.

Figura 13. Controlador PID en forma de realización paralela



**2.1.1 Reglas de sintonización** La determinación de los parámetros del controlador ( $k_P$ ,  $T_I$  y  $T_D$ ), que satisfagan condiciones deseadas de desempeño para el sistema controlado, se denomina *procedimiento de sintonización*.

Existen fundamentalmente dos grandes tipos de métodos de diseño o sintonización de controladores PID: 1) los *métodos analíticos* basados en el modelo y 2) los *métodos*

*empíricos* o experimentales basados en datos reales del proceso.

Dentro del primer grupo, se encuentran los métodos clásicos en el dominio de la frecuencia como el lugar de las raíces o la respuesta en frecuencia mediante diagramas de *Bode* y de *Nyquist*. Sin embargo, estos métodos requieren el conocimiento de un modelo matemático suficientemente apropiado para la dinámica de la planta.

En ocasiones sin embargo este modelo de la planta no se encuentra disponible o simplemente su determinación es inviable, por ejemplo por falta de información de la constitución interna del sistema. Ante esta situación los métodos de control basados en datos (*data-driven control* [23]) adquieren particular relevancia.

A nivel de técnicas de sintonización de controladores PID basadas en datos se destaca el trabajo clásico desarrollado por *Ziegler & Nichols* en 1942 [26], el cuál ha sido la base hasta nuestros días de métodos de sintonización para controladores que operan en aplicaciones industriales de diferente naturaleza.

Métodos adicionales de sintonización para controladores PID incluyen: el de *sintonización de relé* [7]; el *Cohen-Coon* [1] y otros más modernos involucrando optimización de márgenes de estabilidad a partir de herramientas computacionales [2, 8, 12, 14, 25].

Para una revisión detallada de métodos de sintonización para controladores PID, se recomienda al lector interesado consultar [5].

## 2.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA UN CONTROLADOR PI

A pesar que un controlador PID concentra en una misma estructura las acciones de control necesarias para asegurar una forma de onda adecuada en la respuesta del sistema controlado, la acción derivativa se considera nociva en términos de amplificación de ruidos.

Por esta razón, el controlador proporcional/integral o simplemente PI es una estructura todavía más simple, que concentra los mayores beneficios de simpleza y utilidad práctica

en aplicaciones. La función de transferencia para un controlador PI (o PID con acción derivativa nula) viene dada por:

$$\begin{aligned} C(s) &= k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \\ &= \frac{k_P s + k_I}{s}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**2.2.1 Sintonización PI por Ziegler & Nichols** Considere el sistema dado por:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}, \quad (2.5)$$

y proceda a calcular los parámetros de un controlador PI para el mismo empleando las reglas de *Ziegler & Nichols*.

Inicialmente, se recuerda que existen dos posibles métodos [20]:

- *Lazo cerrado*: donde para una acción proporcional pura en el sistema realimentado, se aplican cambios de tipo escalón en la referencia buscando identificar el valor de  $k_P$  para el cual el sistema oscila con amplitud sostenida. Este valor de ganancia se denomina ganancia crítica  $k_{cr}$  y al periodo de oscilación correspondiente periodo crítico  $P_{cr}$ ;
- *Lazo abierto*: cuando no existe un valor  $k_{cr}$  que produzca oscilaciones sostenidas, se recurre a aplicar un estímulo de tipo escalón al sistema en lazo abierto buscando obtener una respuesta en forma de  $s$  tal y como la ilustrada en la Fig. 14, siendo  $T$  y  $L$  las cantidades a ser tomadas en cuenta.

Una vez obtenidos los valores importantes para cada caso, los parámetros del controlador PI (i.e. ganancia proporcional  $k_P$  y tiempo integral  $T_I$ ) se determinan con base en las equivalencias presentadas en la Tabla 1.

En el caso particular de una configuración realimentada como la presentada en la Fig. 1 para la combinación de planta y controlador dada respectivamente por las expresiones (2.5) y (2.4), es posible mostrar que el lugar geométrico de las raíces para el sistema realimentado cruza el eje imaginario cuando  $k_P = k_{cr} = 30$ , con oscilaciones sostenidas

Figura 14. Respuesta escalón en forma de  $s$  del método en lazo abierto

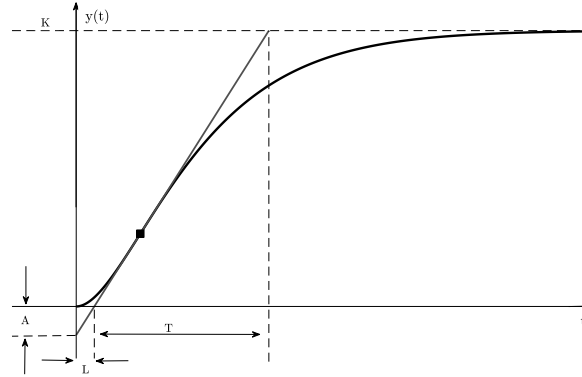


Tabla 1. Equivalencias cálculo controlador PI para métodos de *Ziegler & Nichols*

Método	$k_P$	$T_I$
Lazo cerrado	$0,45k_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$
Lazo abierto	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$

de periodo  $P_{cr} = 2,81$  [s].

De esta manera, el controlador diseñado corresponde con  $k_P = 13,50$ ;  $T_I = 2,34$ ; es decir:

$$\begin{aligned}
 C(s) &= 13,50 \left( 1 + \frac{1}{2,34s} \right) \\
 &= \frac{13,50s + 5,76}{s}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Los parámetros de respuesta para el sistema compensado empleando dicho controlador, corresponden con:

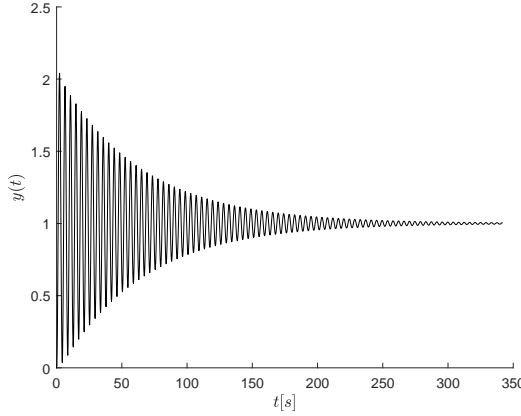
$$M_p = 104,05 [\%]; \quad t_s = 249,54 [s],$$

según ilustrado en la respuesta escalón de la Fig. 15.

Esta respuesta dinámica a pesar de ser estable, no representa un resultado satisfactorio en términos de velocidad de convergencia hacia el valor de estado estacionario, dadas las evidentes oscilaciones del régimen transitorio y el prolongado tiempo de establecimiento. Dicha condición es susceptible de mejora a través de un *ajuste fino*. Nótese sin

embargo, que la acción de control es simple (PI) y la planta es de un orden significativo (tercero).

Figura 15. Respuesta escalón del sistema compensado



**2.2.2 Conjunto estabilizante para sistema ante control PI** Empleando un tratamiento similar al utilizado para el análisis del conjunto estabilizante de la *Sección* 1.1, es posible deducir que la combinación de planta + controlador definida en (2.5) y (2.4), permite delimitar una región de estabilidad en el plano  $(k_P, k_I)$  dada por:

$$0 < k_P < 30; \quad (2.7)$$

$$0 < k_I < \frac{-k_P^2 + 30k_P}{36}, \quad (2.8)$$

definiendo a su vez el siguiente conjunto estabilizante:

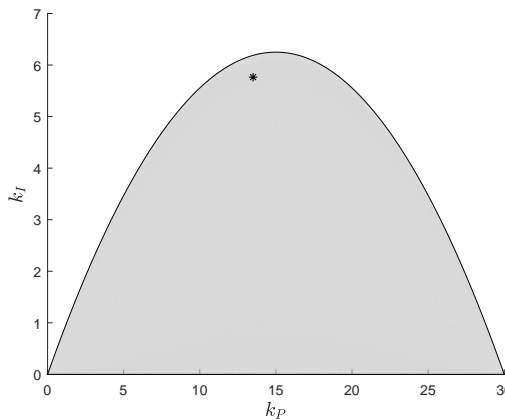
$$\mathcal{S} = \{(k_P, k_I) : (2.7) \text{ y } (2.8) \text{ se satisfagan simultáneamente}\}. \quad (2.9)$$

La Fig. 16 ilustra el conjunto estabilizante (2.9), resaltando en su interior mediante un asterisco el punto correspondiente al controlador diseñado y definido en (2.6).

Como se observa, el controlador analizado en la Fig.15 se encuentra cerca de los límites de estabilidad, justificando la alta oscilación de su respuesta dinámica.

La siguiente *Sección* realizará un análisis alrededor de la *fragilidad* del controlador PI.

Figura 16. Conjunto estabilizante en el plano  $(k_P, k_I)$



### 2.3. FRAGILIDAD DE CONTROLADORES PI

Los métodos de *Ziegler & Nichols* para la sintonización de controladores PI y PID han sido la referencia empleada por ingenieros en diversos campos de aplicación desde su aparición en 1942. Sin embargo, como se observó en el ejemplo presentado en la *Sección* anterior, no siempre se logra una respuesta dinámica adecuada a las exigencias de una respuesta deseada, aunque la misma sea estable.

La forma tradicional de corregir esta situación, es considerar que los parámetros del controlador PI o PID obtenidos por el método de *Ziegler & Nichols* son el valor inicial de un proceso iterativo denominado *ajuste fino*, que permitirá eventualmente obtener una respuesta mejorada en términos de *nuevos valores sintonizados*.

El objetivo de la presente *Sección* no es discutir el proceso de sintonía fina de parámetros en los métodos de *Ziegler & Nichols*, sino evaluar la *fragilidad del controlador* diseñado con dicho método, en términos de su conjunto estabilizante.

En [16] Bhattacharyya define la *fragilidad de un controlador* como aquel fenómeno que implica para el mismo márgenes de estabilidad extremadamente pequeños. Otra manera de entender el concepto es a través de la más pequeña perturbación admisible en los parámetros de un controlador tal que el sistema realimentado pierda su estabilidad. La fragilidad es un concepto muy cercano a la robustez, y por tanto conviene enfatizar en que la primera estudia la manera en que alteraciones leves en los valores de parámetro

de un controlador afectan la estabilidad del sistema realimentado, mientras que la segunda realiza el estudio independientemente de donde hayan ocurrido las variaciones paramétricas.

### 2.3.1 Geometría para márgenes de estabilidad en un controlador PI

En [2], se propone una interpretación geométrica del margen de fase para un sistema realimentado ante un control PI. El desarrollo presentado en el presente numeral se basa en el trabajo referenciado y sugiere la manera de aplicar el mismo resultado en términos del margen de ganancia del sistema.

Para ello, asuma  $P(j\omega)$  y  $C(j\omega)$  como la respuesta frecuencial de la planta y el controlador PI definidos en (2.5) y (2.4), respectivamente. En el sistema realimentado estable que se obtiene a partir de esta combinación *planta + controlador*, los márgenes de ganancia  $A_m$  y fase  $\theta_m$  se pueden determinar analíticamente a partir de las condiciones de magnitud y fase:

$$|P(j\omega_g)||C(j\omega_g)| = 1, \quad (2.10)$$

$$\angle P(j\omega_\theta) + \angle C(j\omega_\theta) = \pi n; \quad n = \pm 1, 3, 5... \quad (2.11)$$

de manera que:

$$A_m = \frac{1}{|P(j\omega_\theta)||C(j\omega_\theta)|}, \quad (2.12)$$

$$\theta_m = \angle P(j\omega_g) + \angle C(j\omega_g) - \pi, \quad (2.13)$$

siendo  $w_g$  y  $w_\theta$  las frecuencias de cruce de ganancia y fase, respectivamente.

Alternativamente, estos márgenes de estabilidad pueden obtenerse a partir de una relación geométrica en el plano de parámetros  $(k_P, k_I)$  de un controlador PI, con respecto al conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  de la planta bajo esta acción de control.

Así entonces, tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} C(j\omega) &= k_P + \frac{k_I}{j\omega} \\ &= k_P - \frac{k_I}{\omega}j, \end{aligned} \quad (2.14)$$

la fase del controlador PI puede expresarse como:

$$\angle C(j\omega) = \arctan\left(\frac{-k_I}{\omega k_P}\right), \quad (2.15)$$

o equivalentemente:

$$-\omega k_P \tan(\angle C(j\omega)) = k_I. \quad (2.16)$$

Si en la expresión anterior se asume  $\omega = \omega_g$ , la fase del controlador  $\angle C(j\omega_g)$  debe satisfacer un margen de fase  $\theta_m$  ante una respuesta frecuencial  $P(j\omega)$  conocida para la planta, según definido en (2.13). Por tanto, ante esta situación la expresión (2.16) define una línea recta en el plano  $(k_P, k_I)$  con pendiente  $-\omega \tan(\angle C(j\omega))$ , cuyos puntos satisfacen dichas restricciones.

Asimismo, a partir de la condición de magnitud del controlador se tiene:

$$|C(j\omega)|^2 = k_P^2 + \frac{k_I^2}{\omega^2}, \quad (2.17)$$

o equivalentemente:

$$\frac{k_P^2}{|C(j\omega)|^2} + \frac{k_I^2}{|C(j\omega)|^2 \omega^2} = 1. \quad (2.18)$$

Bajo la misma suposición de  $\omega = \omega_g$ , la expresión anterior representará una elipse en el plano  $(k_P, k_I)$ , que intersecta a la recta (2.16) según ilustrado en el diagrama de la Fig. 17.

El punto de intersección, dará la coordenada  $(k_P, k_I)$  del controlador PI que satisface  $\theta_m$  y  $\omega_g$ , representando un método gráfico para el diseño de controladores.

Al respecto del método se resaltan los siguientes detalles adicionales:

- La intersección entre la elipse y la línea recta se da para dos puntos del plano. Sin embargo, puede observarse de la Fig. 17 que sólo uno de ellos tiene sentido práctico por encontrarse al interior del conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$ ;
- La magnitud para  $C(j\omega_g)$  se deja como un parámetro libre de diseño y de este

depende la amplitud (i.e. radio mayor y radio menor) de la elipse en el plano;

- El margen de ganancia no se involucra explícitamente en el método sugerido, aunque se entiende que la elección arbitraria para  $|C(j\omega_g)|$  influencia dicho valor. La Sección siguiente abordará con mayor detalle este aspecto;
- El procedimiento sugerido puede abordarse explícitamente desde el margen de ganancia, seleccionando  $\omega = \omega_\theta$  y forzando de (2.12) a la magnitud del controlador  $|C(j\omega_\theta)|$  a satisfacer un margen de ganancia  $A_m$  ante una respuesta frecuencial  $P(j\omega)$  conocida para la planta. Ante esta situación, el punto de intersección en el plano  $(k_P, k_I)$  para la elipse y la línea recta representará la coordenada  $(k_P, k_I)$  del controlador PI que satisface  $A_m$  y  $\omega_\theta$ , dejando como parámetro libre a la pendiente de la recta y a través de ella, al margen de fase para el sistema controlado.

**2.3.2 Definición de métrica para calcular distancia a inestabilidad** Como ya definido al principio de la presente *Sección*, un buen diseño para un controlador debe ir más allá de la simple respuesta dinámica del sistema controlado y por tanto, debe además garantizar la estabilidad para el lazo de control aún ante leves variaciones en sus parámetros.

Complementando las ideas de *Bhattacharyya y Keel* en [16], se empleará la visión geométrica propuesta por *Morarescu et al* en [18, 19] adaptada en el presente documento para el caso de lazos PI sin retardo.

Para ello, se define la distancia euclídea:

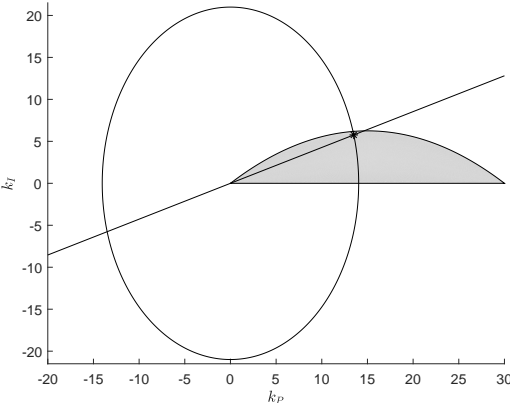
$$d = \sqrt{(k_P^* - k_P)^2 + (k_I^* - k_I)^2}, \quad (2.19)$$

siendo  $(k_P^*, k_I^*)$  las coordenadas para un controlador en el límite del conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  y ortogonal a  $(k_P, k_I)$ , que define el radio para una circunferencia de puntos que representan un rango o margen de estabilidad.

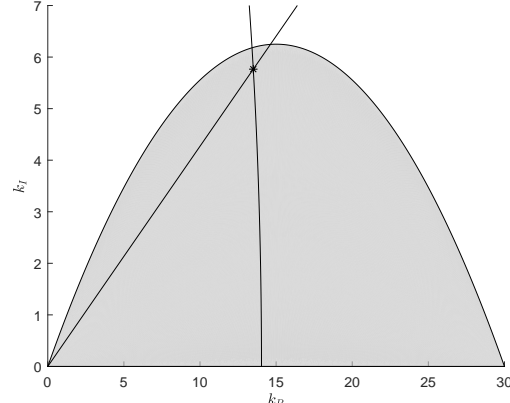
A partir de lo anterior, dado un controlador PI al interior de  $\mathcal{S}$  es posible cuantificar su *fragilidad* a través de esta métrica, al menos en un modo relativo; es decir, dados dos controladores estables será más *frágil* aquel para el cual se obtenga el menor  $d$ .

Figura 17. Intersección en el plano  $(k_P, k_I)$  para línea recta y elipse, dados  $\omega = \omega_g$  y  $\theta_m$ , ilustrando: (a) panorámica general de la intersección y (b) detalle del punto de intersección

(a)



(b)



Sin embargo, no es claro el significado de *fragilidad* para un valor  $d$  en un contexto absoluto.

En cualquier caso, el cálculo para  $d$  en (2.19) implica conocer las coordenadas del punto  $(k_P^*, k_I^*)$ . Dichas coordenadas representan un valor en la frontera de  $\mathcal{S}$ , que conecta con el punto de análisis  $(k_P, k_I)$  a través de una línea recta y por tanto, en teoría habrá una solución para  $(k_P^*, k_I^*)$  en cada dirección posible de proyección para el vector  $(k_P^* - k_P, k_I^* - k_I)$  en el plano. En [18, 19] por ejemplo, los resultados presentados se realizan a partir de una proyección sobre la vertical. Una solución más general implica el mínimo valor para  $d$  en un barrido de  $360^\circ$  lo cual no es trivial, al menos analíticamente, si se piensa en que la descripción para la frontera de  $\mathcal{S}$  corresponde con funciones definidas por tramos (es decir, con transiciones condicionadas).

Como alternativa, se presenta en el presente apartado una forma de calcular dicho punto límite a partir del enfoque geométrico discutido en la *Sección 2.3.1*. Para ello, considere el problema de cuantificar la fragilidad del controlador PI calculado en (2.6).

Dicho controlador representa un punto en el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  en (2.9) y a su vez, la intersección entre una línea recta y una elipse dadas respectivamente por (2.16) y (2.18), con los siguientes parámetros:  $\omega_g = 1,49 \text{ rad/s}$  y  $\theta_m = 1,18^\circ$  (el cálculo para dichos parámetros fue realizado empleando la función *allmargins(.)* de MATLAB).

En términos prácticos, la regla de diseño indica que un buen margen de fase es alrededor de  $60^\circ$  [14]. Como se observa el margen de fase  $\theta_m$  obtenido por *Ziegler & Nichols* es muy cercano a la inestabilidad y por tanto sugiere *fragilidad*.

Para determinar los valores límite  $(k_P^*, k_I^*)$ , se mantiene constante la pendiente de la recta (2.16) a la misma frecuencia  $\omega = \omega_g = 1,49 \text{ rad/s}$  y se incrementa la amplitud de la elipse (2.18) a partir del parámetro  $|C(j\omega_g)|$  (ver Fig.18a).

Ante estas condiciones, el margen de ganancia  $A_m$  del sistema puede determinarse mediante el cociente entre las distancias euclídeas correspondientes a los puntos  $(k_P, k_I)$

y  $(k_P^*, k_I^*)$ ; es decir [8]:

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{\sqrt{(k_P^*)^2 + (k_I^*)^2}}{\sqrt{(k_P)^2 + (k_I)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{(k_P^*)^2 + (-\omega k_P^* \tan(\angle C(j\omega)))^2}}{\sqrt{(k_P)^2 + (-\omega k_P \tan(\angle C(j\omega)))^2}} \\
&= \frac{k_P^* \sqrt{1 + (-\omega \tan(\angle C(j\omega)))^2}}{k_P \sqrt{1 + (-\omega \tan(\angle C(j\omega)))^2}} \\
&= \frac{k_P^*}{k_P} \\
&= \frac{k_I^*}{k_I}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

De este resultado se observa que si  $(k_P, k_I)$  se encuentra en la frontera de  $\mathcal{S}$  entonces  $A_m = 1$ ; si  $(k_P, k_I)$  se encuentra fuera de  $\mathcal{S}$  entonces  $A_m < 1$  y si  $(k_P, k_I)$  se encuentra dentro de  $\mathcal{S}$  entonces  $A_m > 1$ , lo cual coincide con el comportamiento esperado según la teoría para dicho margen en términos de la estabilidad del sistema.

De esta manera, igualando (2.16) para  $k_I$  con la condición de frontera dada por (2.8), se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) &= \frac{-(k_P^*)^2 + 30k_P^*}{36} \\
(k_P^*)^2 - 30k_P^* - 36\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) &= 0 \\
(k_P^*)^2 - 30k_P^* - 53,64k_P^* \tan(-0,2789) &= 0 \\
(k_P^*)^2 - 30k_P^* + 15,36k_P^* &= 0 \\
k_P^* (k_P^* - 14,64) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

tras reemplazar los valores conocidos para  $\omega_g$ ,  $k_P$  y  $k_I$ . A partir de ello,  $k_P^* = 14,64$  corresponde con la solución válida en el conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$  mostrado previamente en la Fig.16. Dicho valor evaluado en:

$$\begin{aligned}
k_I^* &= -\omega_g k_P^* \tan(\angle C(j\omega_g)) \\
&= 6,24,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

permite obtener como coordenada de frontera:  $(k_P^*, k_I^*) = (14,64, 6,24)$  y por ende, un margen de ganancia:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{14,64}{13,50} \\ &= \frac{6,24}{5,76} \\ &= 1,08, \end{aligned}$$

para el controlador (2.6), que a su vez representa una distancia (ver Fig.19):

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(14,64 - 13,50)^2 + (6,24 - 5,76)^2} \\ &= 1,2369. \end{aligned}$$

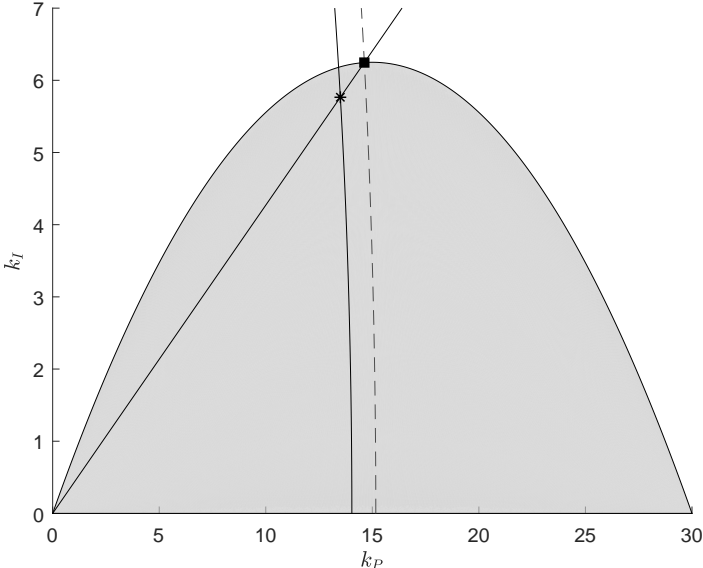
Como se observa, el valor de  $d$  por sí solo no es tan diciente como los márgenes de estabilidad  $A_m$  y  $\theta_m$  obtenidos, ambos de valor muy pequeño.

Una formulación similar podría haberse realizado calculando a partir de (2.6) el valor de  $A_m$  y  $\omega_\theta$ , y con base en ello determinar los valores límite  $(k_P^*, k_I^*)$  tras mantener constante la amplitud de la elipse modificando la pendiente de la recta hasta alcanzar la frontera del conjunto estabilizante  $\mathcal{S}$ , y a través de ello el margen de fase  $\theta_m$  para el sistema (ver Fig.18b).

Finalmente, se debe mencionar que la interfaz desarrollada en la *Sección* 1.3 fue complementada incorporando el cálculo gráfico para controladores PI, junto con una determinación para sus márgenes de estabilidad y para la distancia  $d$ , como medida de su *fragilidad*.

Figura 18. Representación geométrica en el plano  $(k_P, k_I)$  para márgenes de estabilidad: (a)  $A_m$  manteniendo fija la recta y variando la elipse; (b)  $\theta_m$  manteniendo fija la elipse y variando la recta

(a)



(b)

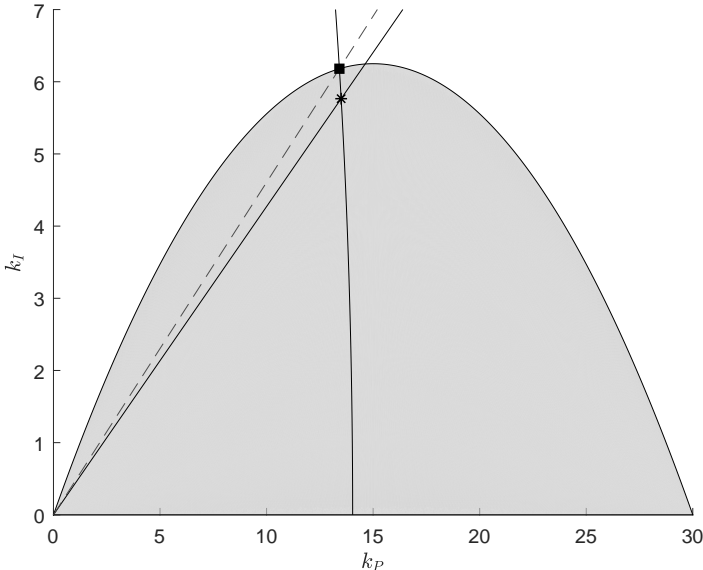
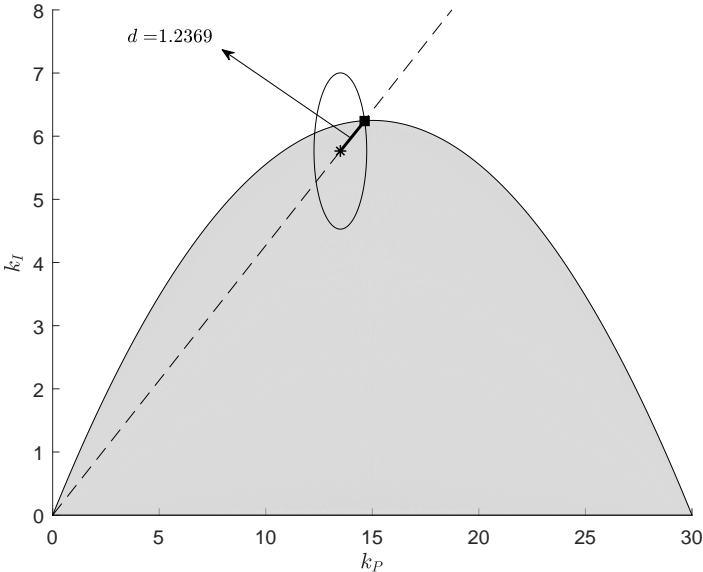
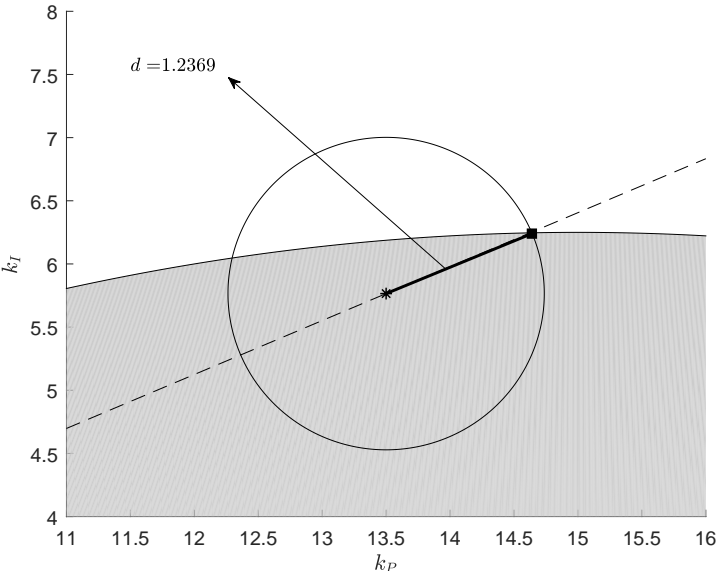


Figura 19. Distancia a la inestabilidad ilustrando: (a) panorámica general de la métrica y (b) detalle de la métrica

(a)



(b)



## *Capítulo 3*

# *CONCLUSIONES*

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

- ❖ Se analizaron las condiciones de estabilidad del conjunto de parámetros PI calculados empleando el método de diseño de controladores de *Ziegler & Nichols*. Fue posible definir una métrica para la inestabilidad del sistema controlado en el plano de parámetros  $(k_P, k_I)$ , a partir de una interpretación geométrica de los márgenes de estabilidad del sistema. A partir de lo anterior fue posible valorar la *fragilidad* del controlador PI diseñado.

De manera más puntual:

- ❖ Se interpretaron las tablas de diseño de parámetros PI de *Ziegler & Nichols* en términos de conjuntos estabilizantes. Tal y como fue abordado en la *Sección 2.2*, se ilustró el diseño de un compensador PI para una planta y posteriormente se analizó la posición de dicho punto en el plano  $(k_P, k_I)$  de controladores factibles con base en su conjunto estabilizante. A partir de ello, es claro que el método de *Ziegler & Nichols* siempre dará como resultado un controlador estable, tomando en cuenta su carácter empírico. Sin embargo, a partir de la definición de una métrica en la *Sección 2.3.2*, fue posible mostrar a través de una cuantificación para su *fragilidad* que no necesariamente el controlador calculado es estable ante ligeras variaciones en sus valores de parámetro. De otro lado, la definición de conjunto estabilizante fue ampliamente abordada en la *Sección 1.2* y posteriormente aplicada al caso PI en la *Sección 2.2*.
- ❖ Se desarrolló un algoritmo que permitió verificar las condiciones de estabilidad

para controladores PI diseñados mediante el método de *Ziegler & Nichols*. Inicialmente, se realizó una discusión general de conjuntos estabilizantes en la *Sección 1.2*, posteriormente complementada en la *Sección 2.2.2* con medidas de inestabilidad a través de una métrica basada en la interpretación geométrica para márgenes de estabilidad en un lazo de control sometido a control PI. El método (o algoritmo) consistió fundamentalmente en calcular el conjunto estabilizante en el plano de parámetros del controlador, para posteriormente transformar las especificaciones de controladores viables a cantidades igualmente viables en el dominio del tiempo. Posteriormente un usuario podría seleccionar el controlador deseado a partir de un punto en el conjunto de parámetros admisible, para el cual se provee además indicación de sus márgenes de estabilidad como medida de *fragilidad*. El procedimiento anterior se desarrolló para los casos de un compensador de 3 parámetros (uno de ellos conocido) y un controlador PI.

- ❖ Se implementó una interfaz para cálculo de controladores PI a partir de selección de parámetros en el dominio del tiempo, admisibles respecto al conjunto estabilizante correspondiente. El algoritmo descrito en el ítem anterior fue codificado en una interfaz en MATLAB según se describe en la *Sección 1.3*, empleando una metodología de diseño del tipo *top-down*.

### 3.1. RECOMENDACIONES

Al momento de ejecutar la interfaz desarrollada es importante que el usuario tenga una noción respecto al rango de valores que desea visualizar, pues esto hace más fino el detalle de los puntos sobre los cuales se calcula el conjunto estabilizante y por ende, la exploración de los valores admisibles para el control en la práctica.

### 3.2. TRABAJO FUTURO

Actividades complementarias a los desarrollos presentados, incluyen el cálculo automático para conjuntos estabilizantes en plantas arbitrarias empleando el *método de la signatura* desarrollado por Keel y Bhattacharyya en [15].

Asimismo es importante explorar otras topologías de compensador y controladores PID, en sus versiones de tiempo continuo y discreto.

## ***BIBLIOGRAFÍA***

- [1] V. M. Alfaro, *Métodos de sintonización de controladores PID que operan como reguladores*, Ingeniería **12** (2002), no. 1,2, 21–36.
- [2] R. Alzate and V. A. Oliveira, *Multiobjective design of PI controllers with applications*, Control Applications (CCA), IEEE Conference on (2016), 203–214.
- [3] K. Astrom and T. Hagglund, *PID controllers: Theory, design, and tuning*, ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995.
- [4] S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, *Robust control: The parametric approach*, IFAC Proceedings Volumes **27** (1994), 49–52.
- [5] R. Correa, R Villamizar, and J. Quiroz, *De la sintonización de controladores*, División de Publicaciones UIS, 2008.
- [6] A. Data and S. P Bhattacharyya, *Structure and synthesis of PID controllers*, Springer, 2000.
- [7] I. Díaz, *Modern design of classical controllers*, Ph.D. thesis, Texas A&M University, USA, 2017.
- [8] I. D. Diaz and S. P. Bhattacharyya, *PI controller design in the achievable gain-phase margin plane*, Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on, 2016, pp. 4919–4924.
- [9] C. Elizondo, M. López, and C. Posadas, *Conjunto de controladores PID para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica*, Congreso Nacional de Control Automático AMCA, 2013 México, 2013, pp. 797–801.

- [10] R. Farkh, K. Laabidi, and M Ksouri, *Stabilizing sets of PI/PID controllers for unstable second order delay system*, International Journal of Automation and Computing **11** (2014), no. 9, 210–222.
- [11] A Fernandes da Silva, *Obtenção de conjuntos estabilizantes de controladores PID para sistemas com atraso utilizando o teorema de Hermite-Biehler*, Tesis de maestría (magister en ingeniería eléctrica), Universidad de São Paulo, Brasil, 2008.
- [12] H. W. Fung, Q. G. Wang, and T. H. Lee, *PI tuning in terms of gain and phase margin*, Automática **34** (1998), no. 9, 1145–1149.
- [13] M. Ho, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, *Generalizations of the Hermite-Biehler theorem*, Linear Algebra and its Applications **302-303** (1999), 135–153.
- [14] W. Ho, C. Hang, and L. Cao, *Tuning of PI controller based on gain and phase margin specifications*, Automatica **31** (1995), no. 3, 497–502.
- [15] L. Keel and S. Bhattacharyya, *Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control **53** (2008), no. 6, 1353–136.
- [16] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, *Robust, fragile or optimal?*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (1997), no. 8, 1098–1105.
- [17] R. Loera, R. Melchor, and D. Morales, *Análisis de estabilidad de controladores PI para un regulador conmutado boost*, Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA, 2014 México, 2014, pp. 1465–1470.
- [18] C. Méndez, S. Niculescu, C. Morarescu, and K. Gu, *On the fragility of PI controllers for time-delay SISO systems*, Mediterranean Conference on control and automation, 2008, pp. 529–534.
- [19] I. C. Morarescu, S. I. Niculescu, and K. Gu, *The geometry of stability crossing curves of PI controllers for SISO systems I/O delays*, Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics **55** (2010), no. 4, 297–313.
- [20] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Pearson Education, 2010.

- [21] V. Oliveira., M. Teixeira., and L. Cossi, *Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem*, Linear Algebra and its Applications **369** (2003), 203–216.
- [22] Andruv Saim Roa Cano, Gustavo y Ayala Ortíz, *Control en espacio de estados para un dron tipo cuadrotor*, Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia, 2016.
- [23] M. G. Safonov and Tung-Ching Tsao, *The unfalsified control concept and learning*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (1997), no. 6, 843–847.
- [24] G. Silva, A. Datta, and S. P Bhattacharyya, *New results on the synthesis of PID controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control **47** (2002), no. 2, 241–252.
- [25] R. Toscano, *A simple robust PI/PID controller design via numerical optimization approach*, Journal of process control **15** (2005), 81–88.
- [26] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, *Optimum settings for automatic controllers*, Transactions of the ASME **64** (1942), 759–768.