

PRODUCCIÓN DE PARTÍCULAS EN EL MODELO  
INFLACIONARIO VECTORIAL DE GAUGE NO ABELIANO  
CON TÉRMINO MASIVO

CARLOS MAURICIO NIETO GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2014

PRODUCCIÓN DE PARTÍCULAS EN EL MODELO  
INFLACIONARIO VECTORIAL DE GAUGE NO ABELIANO  
CON TÉRMINO MASIVO

CARLOS MAURICIO NIETO GUERRERO<sup>1</sup>

TESIS DE MAESTRÍA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
MAGÍSTER EN FÍSICA

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA<sup>1,2</sup>, PH.D.

<sup>1</sup>GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

<sup>2</sup>GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA

2014

**Para mi madre Elizabeth Guerrero**

# Contenido

Introducción	13
1. Paradigma inflacionario	18
2. Teoría de perturbaciones cosmológicas	21
3. Formalismo $\delta N$	26
4. Producción de partículas	34
5. Gauge-flation	38
6. Gauge-flation con masa	44
6.1. Escogencia de la forma de los campos . . . . .	45
6.2. Ecuaciones de Einstein y evolución . . . . .	46
6.3. Inflación del tipo rodadura lenta . . . . .	50
6.4. Solución numérica de las ecuaciones de evolución . . . . .	53
7. Producción de partículas en Gauge-flation con masa	62

7.1. Perturbaciones en los campos . . . . .	63
7.2. Descomposición en modos de Fourier . . . . .	67
7.3. Proceso de cuantización . . . . .	74
7.4. Obtención de espectros . . . . .	83
<b>8. Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

1.1. Este esquema muestra el comportamiento temporal del radio de Hubble comóvil: al principio de inflación, éste contenía a las escalas del Universo observable y luego de un suficiente período de evolución, se tendrá el comportamiento estándar (creciente) hasta el día de hoy. . . . .	20
4.1. Proceso de producción de partículas en presencia de un horizonte cosmológico ( $H^{-1}$ ). La líneas curvas representan el proceso de aniquilación de pares partícula-antipartícula. . . . .	37
5.1. Evolución encontrada para la razón entre las dos densidades definidas en el modelo, $\rho_{YM}$ y $\rho_\kappa$ , en función del tiempo usando las condiciones iniciales $\psi_i = 0,035$ , $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ . Se observa que $\rho_\kappa$ domina al principio de la evolución del Universo y luego empieza a decaer para dar de manera adecuada un final a inflación. . . . .	42
5.2. Evolución encontrada para el número de e-folds de expansión en función del tiempo usando las condiciones iniciales $\psi_i = 0,035$ , $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$ y los parámetros $g = 2,5 \times 10^{-3}$ y $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ . Es claro que cuando el término $\rho_\kappa$ ha decaído, ya se ha alcanzado el valor mínimo de e-folds necesarios para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar. . . . .	43

- 5.3. Índice espectral  $n_s$  y razón tensor-escalar  $r$  obtenidos para el modelo Gauge-flation sin masa para dos valores diferentes de  $N_e$  en función del valor inicial del parámetro  $\gamma$ . Las líneas punteadas horizontales indican los intervalos permitidos por los últimos resultados reportados por Planck ( $0,9457 < n_s < 0,9749$  y  $r < 0,11$ ). Es claro que no hay valores para  $\gamma_i$  que permitan tener de manera simultánea resultados para  $n_s$  y  $r$  que estén dentro de los intervalos señalados en las gráficas. . . . . 43
- 6.1. Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\varepsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,035$ ;  $\dot{\psi} = -3,27 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ ;  $m = 1 \times 10^{-8}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 6,59$ ,  $\varepsilon_i = 9,3 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i = 1 \times 10^{-4}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ . . . . . 57
- 6.2. Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\varepsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,025$ ;  $\dot{\psi} = 9,07 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,3 \times 10^{15}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ ;  $m = 1,5 \times 10^{-4}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,6 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 2,96$ ,  $\varepsilon_i = 7,8 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i = -8 \times 10^{-4}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ . . . . . 58
- 6.3. Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\varepsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,08$ ;  $\dot{\psi} = -9 \times 10^{-5}$ ;  $\kappa = 4,7 \times 10^{13}$ ;  $g = 4 \times 10^{-4}$ ;  $m = 1,5 \times 10^{-6}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 6,2 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma_i = 2,6 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_i = 6,4 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i \sim 2$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ . . . . . 59
- 6.4. Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\varepsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,035$ ;  $\dot{\psi} = -3,27 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 6,6$ ,  $\varepsilon_i = 1,9 \times 10^{-2}$  y  $\delta_i = 2,7 \times 10^{-3}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ . . . . . 60

6.5.	En estas gráficas se muestra el cambio en el número de e-folds $N_e$ , dado por la ecuación 6.3.19, en función del parámetro $\omega_i$ para los dos primeros conjuntos de condiciones iniciales ((a) y (b) respectivamente). En ambos casos se aprecia que $N$ es una función decreciente respecto al valor inicial de $\omega$ , mostrando así el impacto del término de masa en la generación de la propiedades requeridas durante inflación . . . . .	61
7.1.	Representación del horizonte de partículas $H^{-1}$ (línea naranja) y de la evolución de las escalas cosmológicas durante inflación. Zona blanca: escalas de subhorizonte, zona azul: escalas de superhorizonte. Se debe notar que $\frac{k}{aH} = \frac{H^{-1}}{L_p}$ . . . . .	74
7.2.	En esta gráfica se puede apreciar la evolución temporal del modo $\delta L$ en escalas de superhorizonte para un $k$ dado con constantes $C_{1k} = 2, 5$ y $C_{2k} = 16, 8$ . Es notable ver que su valor tiende a adquirir un valor constante después de cierto tiempo de evolución. . . . .	78
7.3.	En esta gráfica se observa la evolución temporal de la variable $A$ en escalas de superhorizonte para un $k$ dado encontrada con $\beta = 4$ y constantes de integración $D_{1k} = 4, 6$ y $D_{2k} = 7, 3$ . Se aprecia cómo $A$ tiene un comportamiento oscilatorio inicial pero cae rápidamente a cero, conduciendo al hecho de que $\delta R = \delta T$ . . . . .	79
7.4.	En esta gráfica se muestra la evolución temporal de $B$ en escalas de superhorizonte para un $k$ dado con constantes $E_{1k} = 4$ y $E_{2k} = 18$ . Aquí se observa cómo la variable $B$ adquiere un valor constante en el régimen de superhorizonte. . . . .	80
7.5.	Contornos para intervalos de confianza 68 % y 95 % de $r$ y $n_s$ usando Planck+WP+BAO. . . . .	86

# Resumen

**TÍTULO:** PRODUCCIÓN DE PARTÍCULAS EN EL MODELO INFLACIONARIO VECTORIAL DE GAUGE NO ABELIANO CON TÉRMINO MASIVO<sup>i</sup>.

**AUTOR:** NIETO GUERRERO, Carlos Mauricio<sup>ii</sup>.

**PALABRAS CLAVES:** Radiación cósmica de fondo (RCF), Paradigma inflacionario, Campos vectoriales, Teorías de Gauge no Abelianas, Teoría de perturbaciones cosmológicas, Formalismo Delta N, Producción de partículas, Teoría cuántica de campos.

**DESCRIPCIÓN:** Los resultados de la misión espacial Planck sobre la existencia de anomalías en la RCF y una posible dirección privilegiada en el Universo motivan el estudio de modelos inflacionarios vectoriales. Un modelo sobresaliente es Gauge-flation debido a su relación con las teorías de física de partículas y a que resuelve adecuadamente los problemas de la cosmología estándar mediante una dinámica interesante entre los términos que componen la acción: un término de Yang-Mills y un término  $(\tilde{F}F)^2$ . Sin embargo, en el marco de teoría de perturbaciones no se encuentra un rango de valores para los parámetros del modelo que conlleve a una razón tensor-escalar  $r$  e índice espectral  $n_s$  acordes con las observaciones. Así, se propone una modificación al modelo Gauge-flation a través de un término masivo con el cual se podría, en principio, corregir las predicciones para  $r$  y  $n_s$ . Tomando el caso de expansión isótropa y usando un ansatz en los campos, se analizará el efecto del término de masa en la dinámica inflacionaria y se chequeará si esta modificación permite resolver apropiadamente los problemas clásicos de la cosmología estándar. Se investigará el proceso de producción de partículas o generación de perturbaciones clásicas en los campos vectoriales involucrados a través de un estudio perturbativo del modelo. Se seguirá la metodología estándar de descomposición en modos con algunas variaciones requeridas debido a la forma de la acción y al número de campos involucrados, encontrándose nuevos resultados que son consistentes con la invariancia de la acción ante transformaciones de paridad. Se encontrarán los espectros asociados a las perturbaciones en los campos con los cuales se espera determinar, en un futuro estudio, la perturbación primordial en la curvatura y la evolución de las perturbaciones tensoriales de la métrica, y así determinar finalmente si es posible tener un  $r$  y  $n_s$  observacionalmente consistentes.

---

<sup>i</sup>Proyecto de Grado.

<sup>ii</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García.

# Abstract

**TITLE:** PARTICLE PRODUCTION IN THE NON ABELIAN GAUGE INFLATIONARY VECTOR MODEL WITH A MASSIVE TERM<sup>iii</sup>.

**AUTHOR:** NIETO GUERRERO, Carlos Mauricio<sup>iv</sup>.

**KEYWORDS:** Cosmic microwave background, Inflationary paradigm, Vector fields, Non Abelian Gauge theories, Cosmological perturbation theory, Delta N formalism, Particle production, Quantum field theory.

**DESCRIPTION:** The recent results published by the spatial mission Planck about the existence of anomalies in the CMB and a possible preferred direction in the Universe support the study of vector inflationary models. An outstanding model is the called Gauge-flation due to its connexion to particle physics and the way it solves the classical problems of standard cosmology combining the dynamics of the terms composing the action: a Yang-Mills term and a  $(\tilde{F}F)^2$  term. Nevertheless, in the framework of perturbation theory there does not exist an interval of parameters characterizing the model that lead to accurate values for the tensor-to-scalar ratio  $r$  and spectral index  $n_s$  according to observations. Thus, we propose a modification of Gauge-flation through a mass term in the action which could, in principle, change the predictions of  $r$  and  $n_s$ . Taking the case of isotropic expansion and using an ansatz for the gauge fields, we analyze the effect of the mass term in the inflationary dynamics and we check if the proposed modification allows us to solve adequately the classical problems of standard cosmology. Additionally, we investigate the process of particle production, i.e., the generation of classical perturbations of vector fields via a perturbative study of the model. We follow the usual methodology of decomposition into Fourier modes with some required variations according to the form of the action and the number of fields involved, finding new results which are consistent with the parity symmetry of the the action. We look for the spectra of field perturbation with which we desire to obtain, in a near future, the spectrum of primordial curvature perturbation and the evolution of tensor perturbations in the metric in order to determine values for  $r$  and  $n_s$  consistent with Planck results.

---

<sup>iii</sup> Degree project.

<sup>iv</sup>Faculty of science. School of physics. Director: Yeinzon Rodríguez García.

# Introducción

Los resultados del primer año de la sonda espacial Planck <sup>v</sup> trajeron consigo preguntas sobre los fundamentos de la cosmología moderna. Un aspecto importante de los análisis es la presencia de anomalías en los mapas de la radiación cósmica de fondo (RCF) a bajos multipolos [Ade \*et al.\* \(2013b,d,c\)](#). Dichas anomalías habían sido detectadas desde los resultados de COBE<sup>vi</sup> [Bennett \*et al.\* \(1996\)](#) al igual que por WMAP<sup>vii</sup> [Bennett \*et al.\* \(2013, 2011\)](#), por lo cual, el hecho de observar los mismos efectos con Planck descarta que su origen sea sistemático. Se observa que los modelos inflacionarios con campos escalares se ajustan muy bien a los datos a altos multipolos pero a bajos multipolos la diferencia entre teoría y experimento es considerable. Por lo tanto, los modelos inflacionarios con campos escalares no constituye el mecanismo más adecuado para la dinámica del Universo primordial al no proporcionar una explicación a las anomalías en la RCF ni a la posible dirección privilegiada en el Universo [Ade \*et al.\* \(2013d\)](#); [Groeneboom & Eriksen \(2009\)](#); [Groeneboom \*et al.\* \(2010\)](#); [Akrami \*et al.\* \(2014\)](#); [Flender & Hotchkiss \(2013\)](#). Por esto surge la necesidad de hacer un cambio radical de paradigma o considerar una variación al paradigma ya establecido. Tomando la segunda opción, se motiva el uso de campos vectoriales como agentes generadores de inflación como una manera de conciliar teoría y experimento. De esta manera, se aprecia que el modelo concebido con el cual se pretendía explicar el comportamiento del Universo primordial (modelo inflacionario con campos escalares) debe modificarse a partir de observaciones más detalladas del cosmos. Este hecho ya había ocurrido en la historia cuando el primer impacto producido por las observaciones de la radiación cósmica de fondo [Penzias & Wilson \(1965\)](#); [Dicke \*et al.\* \(1965\)](#) repercutió en el modelo

---

<sup>v</sup><http://rssd.esa.int/planck>.

<sup>vi</sup><http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe>.

<sup>vii</sup><http://map.gsfc.nasa.gov>.

del Big Bang caliente y dio origen a lo que se ha llamado líneas atrás el mecanismo inflacionario.

El alto grado de isotropía observado en los mapas de temperatura de la RCF contrastó con el resultado del modelo del Big Bang caliente el cual establecía que sólo podrían existir correlaciones en los valores de la temperatura de la radiación cósmica de fondo para regiones que subtiendían ángulos en el cielo de alrededor de  $1,72^\circ$  Weinberg (2008). Este hecho, junto con el problema de planitud y reliquias no deseadas constituye lo que se conoce generalmente como problemas clásicos de la cosmología estándar Weinberg (2008). Si bien los problemas clásicos de la cosmología estándar pueden omitirse tomando condiciones muy especiales para el Universo temprano (planitud geométrica, homogeneidad espacial), éstos son llamados problemas debido a que su solución, en el marco de la cosmología clásica, requeriría ajustes finos. Por lo tanto, para hacer una descripción heurística y con mayor soporte físico, se evitan los ajustes finos y se propone un mecanismo dinámico que resuelva todos los problemas de manera simultánea; éste corresponde al paradigma inflacionario, el cual consiste en asumir la existencia de una era de expansión acelerada anterior a la era dominada por la radiación Guth (1981); Linde (1982). Sin embargo, es importante tener en cuenta que el mecanismo inflacionario no sólo da solución a los problemas clásicos de la cosmología estándar sino que es un agente crucial en otras cuestiones fundamentales del estudio del cosmos: la generación de estructuras a gran escala en el Universo Weinberg (2008); Mukhanov (2005); Hobson *et al.* (2006); Dodelson (2003); Lyth & Liddle (2009)

Si bien el principio cosmológico establece que a grandes escalas el universo luce homogéneo e isótropo en regiones de volumen superior a  $10^6 Mpc^3$ , es claro que en pequeñas escalas existen regiones de mayor concentración de materia y regiones de espacio vacío Weinberg (2008); Mukhanov (2005); Hobson *et al.* (2006); Dodelson (2003); Lyth & Liddle (2009); Wu *et al.* (1999); Yadav *et al.* (2005). Por esto, no es posible que el Universo haya empezado en un estado de alta homogeneidad e isotropía y haya seguido su evolución estándar hasta nuestro tiempo ya que de esta manera no se tendría la distribución de galaxias que se observa hoy en día. No obstante, teniendo en cuenta que en el Universo primitivo existió una era de expansión acelerada y comportamiento cuántico de la naturaleza, se puede llegar a una explicación a la formación de estructuras galácticas vistas hoy en día Weinberg (2008); Lyth & Liddle (2009). La base de la explicación de la existencia de estructuras a gran escala recae en la teoría cuántica de campos y las fluctuaciones cuánticas del estado de vacío. Se espera que durante inflación, estas fluctuaciones cuánticas se clasicalicen y generen un Universo con distribución asimétrica de materia. Weinberg (2008); Lyth & Liddle (2009) Así, resulta interesante estudiar el comportamiento cuántico del Universo durante inflación

y determinar su relación con las características del Universo actual. Aunque no se tenga manera de saber qué sucedió durante inflación puesto que tuvo lugar mucho tiempo atrás, se puede extraer información acerca del comportamiento inicial del Universo a través de la ya mencionada radiación cósmica de fondo Lyth & Liddle (2009); Peebles *et al.* (2009).

Una de las cantidades más importantes en cosmología y que presenta información acerca del comportamiento del Universo primitivo es la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  ya que es una cantidad conservada en escalas de superhorizonte si la presión del fluido que compone el Universo se puede escribir como una función única de la densidad de energía Lyth & Liddle (2009). Además, se puede establecer una relación entre la perturbación primordial en la curvatura y la perturbación en la densidad de energía  $\delta\rho$  definida sobre un *slicing* plano. Existen dos métodos usados para hacer el estudio de las perturbaciones primordiales, estos son: la teoría de perturbaciones cosmológicas (TPC) Weinberg (2008); Mukhanov (2005); Lyth & Liddle (2009); Mukhanov *et al.* (1992); Malik & Wands (2009) y el formalismo  $\delta N$  Lyth & Liddle (2009). El primero de ellos consiste en hacer un estudio perturbativo al orden deseado de las ecuaciones de campo de Einstein para un modelo inflacionario específico y, a través del proceso de cuantización, encontrar las propiedades estadísticas de las perturbaciones primordiales. Pese a que la metodología de la TPC luce bastante simple, el manejo de las ecuaciones diferenciales y el número de grados de libertad para un modelo inflacionario específico hace que sea más tedioso encontrar las soluciones requeridas. Sin embargo, con la segunda metodología (formalismo  $\delta N$ ) Lyth & Liddle (2009); Starobinsky (1985); Sasaki & Stewart (1996); Lyth *et al.* (2005); Lee *et al.* (2005); Wands *et al.* (2000); Dimopoulos *et al.* (2009); Lyth & Rodriguez (2005), el estudio de la perturbación primordial en la curvatura se hace más sencillo y su interpretación resulta más clara. La base de dicho formalismo radica en la suposición de universos separados Lyth & Liddle (2009); el primer paso para hablar de universos separados consiste en suavizar la métrica y el tensor momentum-energía en una escala comóvil  $R$  de superhorizonte; segundo, asumiendo que la escala de suavizado es la escala relevante más grande, no existen gradientes espaciales de tal manera que no hay flujo de partículas hacia afuera o hacia adentro de dicha región antes de que ocurra la entrada del horizonte. Por ende el Universo en cada posición  $\mathbf{x}$  se comporta como un universo homogéneo separado. En el caso de un Universo con expansión isótropa, en cada posición  $\mathbf{x}$  se puede hacer una descripción local mediante la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Lyth & Liddle (2009); Lyth & Rodriguez (2005).

Como se ha dicho, las perturbaciones primordiales se originaron a partir del comportamiento cuántico del Universo durante inflación, por esto es importante edificar

un modelo que describa adecuadamente la era inflacionaria. El modelo más sencillo que describe el mecanismo de inflación está compuesto por un campo escalar en un fondo FRW debido a que genera homogeneidad, isotropía y permite obtener resultados sencillos sobre las perturbaciones primordiales, y por ende una fácil comparación con los resultados obtenidos del análisis de la radiación cósmica de fondo [Weinberg \(2008\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#). Sin embargo, como se comentó al inicio, los resultados de WMAP y el primer año de resultados de Planck muestran la existencia de anomalías en la RCF a bajos multipolos [Ade et al. \(2013b\)](#); [Bennett et al. \(2013, 2011\)](#) y una posible dirección privilegiada en el Universo [Ade et al. \(2013d\)](#); [Groeneboom & Eriksen \(2009\)](#); [Groeneboom et al. \(2010\)](#); [Akrami et al. \(2014\)](#); [Flender & Hotchkiss \(2013\)](#) por lo que un campo escalar no es un adecuado generador de inflación. Si bien se esperaba que la fuente de las anomalías fueran de naturaleza sistemática, los resultados de Planck confirman que su existencia es de naturaleza astrofísica o cosmológica. De esta manera, se motiva el estudio de inflación a través de la introducción de campos vectoriales debido a que ellos introducen de manera natural la noción de dirección espacial y se espera por lo tanto que se ajusten mejor a los datos experimentales, proveyendo resultados interesantes acerca de la anisotropía estadística y la no Gaussianidad [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Huterer et al. \(2010\)](#); [Dimastrogiovanni et al. \(2010\)](#); [Beltran Almeida et al. \(2014\)](#) de la distribución de temperaturas de la RCF.

Uno de los modelos más exitosos encontrado en la literatura corresponde al llamado Gauge-flation [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2013, 2011\)](#); [Maleknejad et al. \(2013\)](#). Este modelo presenta un soporte desde las teorías de física de partículas debido a que está construido en el marco de una teoría invariante de Gauge  $SU(2)$  [Ryder \(1985\)](#); [Kane \(1993\)](#); [Weinberg \(1996\)](#) y además resuelve los problemas de ajuste fino, e inestabilidades encontrados en diferentes modelos inflacionarios vectoriales como el descrito en [Golovnev et al. \(2008\)](#). La dinámica inflacionaria dentro de este modelo está regida por los tres campos vectoriales de Gauge de la teoría y se logran obtener las propiedades características de inflación a través de un ansatz en la forma de los campos y una modificación al lagrangiano de Yang-Mills de la teoría  $SU(2)$  [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#). El soporte dado al ansatz mencionado, vía un estudio de sistemas dinámicos [Maleknejad et al. \(2012\)](#), y la interesante dinámica entre el término de Yang-Mills y el término llamado  $\kappa$  en el lagrangiano, hacen de Gauge-flation un adecuado descriptor del comportamiento del Universo primordial. En el marco de teoría de perturbaciones, se encuentra que el modelo genera resultados sobre el espectro de la perturbación primordial en la curvatura, razón tensor-escalar e índice espectral que están en acuerdo con los resultados observacionales del séptimo año de WMAP [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#); [Komatsu et al. \(2011\)](#). Sin embargo, estudios

posteriores [Namba \*et al.\* \(2013\)](#) muestran algunas diferencias respecto al estudio original [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#). Allí se evidencia la existencia de una zona inestable, caracterizada por el parámetro  $\gamma$  (el cual relaciona los campos vectoriales en el fondo con el parámetro de Hubble  $H$  y la constante de acople de la teoría  $SU(2)$ ); mientras que en la zona estable no es posible encontrar de manera simultánea valores para  $\gamma$  que conduzcan a resultados para  $r$  y  $n_s$  coherentes con los datos de Planck [Ade \*et al.\* \(2013c\)](#).

Por lo anterior, dentro del grupo de investigación se propuso modificar el modelo de Gauge-flation a través de la inclusión de un término de masa en el lagrangiano con el fin de estudiar si existe un cambio en la predicción de  $r$  y  $n_s$  que permitan ajustar el modelo a las observaciones. La razón de hacer la modificación se basa en el hecho de que es una de las inclusiones más sencillas y además, porque es natural esperar que los campos no Abelianos tengan un valor de masa como ocurre en física de partículas. Por otra parte, el término de masa implica la existencia de un espectro longitudinal que no está presente en el modelo original, y será clave para determinar resultados diferentes de  $r$  y  $n_s$ . En este trabajo se muestra un estudio de producción de partículas para el modelo inflacionario vectorial de Gauge no Abeliano con masa en un fondo homogéneo e isótropo descrito por la métrica de FRW. Primero, se hace un estudio de la dinámica inflacionaria y un análisis acerca del impacto producido por el término de masa en el modelo original. Una vez obtenidas las propiedades del modelo, se procede a estudiar la evolución de las perturbaciones primordiales en los campos vectoriales mediante el proceso llamado producción de partículas. Mediante la cuantización de las perturbaciones en los campos de la manera usual dentro del proceso de producción de partículas, se desea encontrar el correlador de dos puntos para dichas perturbaciones con el fin de encontrar las expresiones para los espectros longitudinales y transversales de las perturbaciones de los campos. De esta manera se tendrán cantidades importantes que permitirán, en un estudio posterior, obtener la perturbación primordial en la curvatura. Lo anterior permitirá, cuando se haga un análisis referente a la perturbación tensorial de la métrica, obtener una relación entre  $r$  y  $n_s$  que se comparará con los resultados de la sonda Planck. Así, se establecerá si nuestra idea de rescatar el modelo original de Gauge-flation mediante la introducción de masa es correcta.

# 1

## Paradigma inflacionario

El paradigma inflacionario fue propuesto como solución dinámica al problema de ajustes finos presentado en el modelo del Big Bang caliente Guth (1981); Linde (1982). En el marco del Big Bang no hay explicación para el alto grado de isotropía observado en la radiación cósmica de fondo Penzias & Wilson (1965); Dicke *et al.* (1965); los  $10^5$  horizontes de partículas causalmente desconectados que están contenidos en la región física correspondiente a la máxima distancia coordenada del Universo actual, en el momento de la última dispersión, indican que sólo se deberían observar correlaciones en los valores de temperatura para regiones que subtienden un ángulo en el cielo inferior a  $1,72^\circ$  (problema de horizonte). Tampoco se comprende por qué el parámetro de densidad para la curvatura del espacio hoy en día es tan pequeño,  $|\Omega_K| < 10^{-2}$  si se espera que su evolución crezca lineal o cuadráticamente con el factor de escala  $a$  Weinberg (2008) para un fluido de materia o radiación respectivamente (problema de planitud).

A través de las expresiones para el horizonte de partículas y la densidad  $\Omega_K$  Weinberg (2008), se encuentra que el problema radica en el comportamiento creciente del radio de Hubble comóvil  $(aH)^{-1}$  en tiempo tempranos;  $a$  corresponde al factor de escala para un Universo de FRW y  $H = \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble. Por lo tanto, se motiva la existencia de una era temprana anterior a la era dominada por la radiación en la que el radio de Hubble comóvil tiene un comportamiento decreciente Baumann (2009); Baumann *et al.* (2009); Baumann & Peiris (2009). A esta solución dinámica se le conoce como mecanismo inflacionario y representa una manera adecuada de resolver los llamados problemas clásicos de la cosmología estándar Weinberg (2008); Mukhanov

(2005). Se encuentra fácilmente de la condición

$$\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0, \quad (1.0.1)$$

que la era inflacionaria está caracterizada por una expansión acelerada y un dominio de la energía de vacío, i.e.

$$\ddot{a} > 0, \quad \rho + 3p < 0, \quad (1.0.2)$$

en donde  $\rho$  representa la densidad de energía del fluido cósmico y  $p$  la presión isotrópica. Un caso sencillo de inflación es aquél en el que el parámetro de Hubble permanece constante mientras que el factor de escala evoluciona exponencialmente; un universo de este tipo es llamado *de Sitter* y es en general el tipo de inflación más estudiado. Claramente, la condición (1.0.1) resuelve el problema de planitud ya que hace que el parámetro de densidad  $\Omega_K = K(aH)^{-2}$  caiga rápidamente a un valor muy pequeño hacia final de inflación de tal manera que hoy en día tenga un valor menor a  $|\Omega_K| < 10^{-2}$ . En cuanto al problema de horizonte, la condición (1.0.1) se encarga de conectar causalmente las regiones que estarán desconectadas causalmente en el momento de la última dispersión. Estrictamente hablando, el comportamiento decreciente de  $(aH)^{-1}$  indica que grandes escalas entrando en el Universo actual estaban dentro del horizonte antes de inflación. Durante este proceso hay una salida y una re-entrada al horizonte de las escalas cosmológicas como se aprecia en la Fig. (1.1), el cual será un aspecto clave en el proceso de producción de partículas que se comentará en el capítulo 4.

Si bien el paradigma inflacionario parece resolver los problemas de la cosmología estándar, se requiere un tiempo prolongado de expansión acelerada para resolverlos adecuadamente Weinberg (2008); Kim & Murphy (1985). La solución adecuada de los problemas de la cosmología estándar se mide en función del monto de expansión  $N$ . Esta cantidad se define entre dos tiempos  $t_1$  (inicio de inflación) y  $t_2$  (final de inflación) de la siguiente manera

$$N_e = \int_{t_1}^{t_2} H dt, \quad (1.0.3)$$

cuyo valor está determinado por el agente generador de inflación y debe estar por encima de la cota inferior  $N_e \gtrsim 62$  Weinberg (2008); Kim & Murphy (1985). Los mecanismos inflacionarios propuestos por los cosmólogos se basan generalmente en campos escalares Weinberg (2008); Mukhanov (2005); Lyth & Liddle (2009); Lyth & Riotto (1999), vectoriales Maleknejad & Sheikh-Jabbari (2011); Maleknejad *et al.* (2013); Golovnev *et al.* (2008); Bento *et al.* (1993); Esposito-Farese *et al.* (2010); Watanabe *et al.* (2009) o en modificaciones a la gravedad de Einstein Starobinsky (1980). Cabe señalar que el paradigma inflacionario, además de resolver los problemas de la cosmología estándar,

es un aspecto clave en el estudio de la generación de estructuras a gran escala en el Universo como se verá en las siguientes secciones.

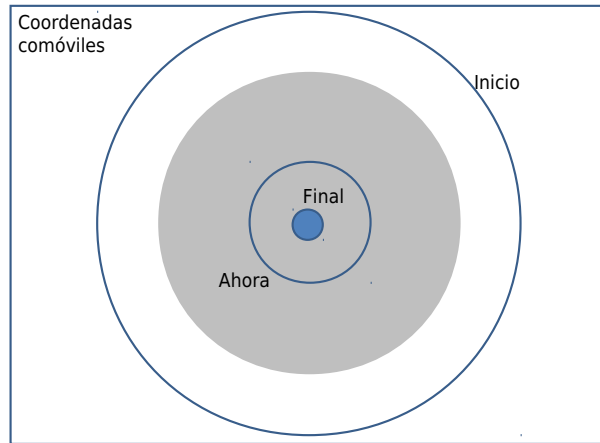


Figura 1.1: Este esquema muestra el comportamiento temporal del radio de Hubble comóvil: al principio de inflación, éste contenía a las escalas del Universo observable y luego de un suficiente período de evolución, se tendrá el comportamiento estándar (creciente) hasta el día de hoy.

## 2

# Teoría de perturbaciones cosmológicas

Pensar en el Universo homogéneo e isótropo no es más que una aproximación basada en las observaciones y resumida en el principio cosmológico [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Hobson \*et al.\* \(2006\)](#); [Dodelson \(2003\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Wu \*et al.\* \(1999\)](#); [Yadav \*et al.\* \(2005\)](#). En realidad, el Universo posee muchas estructuras interesantes en escalas menores a los  $10Mpc$  que proveen información acerca de la distribución espacial de la densidad energía en tiempos tempranos en el Universo [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Peebles \*et al.\* \(2009\)](#). Un primer acercamiento al modelamiento del Universo inhomogéneo y anisótropo se hace a través de la teoría de perturbaciones como en cualquier otra rama de la física. Como caso más sencillo se usa la teoría de perturbaciones cosmológicas a primer orden para estudiar variaciones en las propiedades del Universo primordial en relación con el fondo homogéneo e isótropo descrito por la métrica de FRW con curvatura  $K = 0$  [Weinberg \(2008\)](#).

Asumiendo que las variaciones del fondo son pequeñas, el primer paso en el estudio perturbativo consiste en escribir la métrica total como la suma de la métrica del fondo  $\bar{g}_{\mu\nu}$  más una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu}$  dependiente de las coordenadas espaciotemporales

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.0.1)$$

Por notación, las cantidades con una barra indican los valores evaluados en el fondo homogéneo e isótropo. Debido a la perturbación en la métrica, los símbolos de Cristoffel  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  y el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  se verán igualmente modificados

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} + \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}, \quad (2.0.2)$$

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}. \quad (2.0.3)$$

Ahora, tomando las ecuaciones de campo de Einstein en la forma

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} \quad (2.0.4)$$

en donde

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}, \quad (2.0.5)$$

y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momentum-energía, se encuentran las perturbaciones para el tensor  $S_{\mu\nu}$

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T^\lambda_\lambda - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\delta\bar{T}^\lambda_\lambda. \quad (2.0.6)$$

Debido a que el fondo se está asumiendo translacional y rotacionalmente invariante, el tensor momentum-energía no perturbado toma la forma

$$\bar{T}^{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \bar{p}\bar{g}^{\mu\nu}, \quad (2.0.7)$$

en donde  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}^\mu$  son la densidad de energía, presión y vector velocidad en el fondo. De (2.0.7) se extrapola claramente la forma del tensor momentum-energía total

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}. \quad (2.0.8)$$

En la ecuación anterior, el tensor  $\Pi^{\mu\nu}$  corresponde a los esfuerzos anisótopos del fluido que compone el Universo. Una vez realizados todos los pasos mencionados, se obtienen las ecuaciones de campo para las perturbaciones correspondientes a la métrica y al contenido energético del Universo. Sin embargo, la forma de las ecuaciones es bastante compleja y contiene mezclas entre perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales. Afortunadamente, existe una manera de separar las ecuaciones en perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales vía el teorema de Helmholtz [Weinberg \(2008\)](#). Usando este teorema, las perturbaciones a la métrica se escriben como

$$\begin{aligned} h_{00} &= -E, \\ h_{0i} &= a \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i \right), \\ h_{ij} &= a^2 \left( A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij} \right), \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

en donde  $a$  es el factor de escala y  $A, B, E, F, C_i, G_i, G_{ij}$  son funciones dependientes de  $\mathbf{x}$  y  $t$ ; además, se tienen las siguientes propiedades para  $C_i, G_i, G_{ij}$

$$\frac{\partial C_i}{\partial x^i} = \frac{\partial G_i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad D_{ii} = 0, \quad D_{ij} = D_{ji}. \quad (2.0.10)$$

De manera similar se pueden descomponer las perturbaciones del tensor momentum energía

$$\begin{aligned}
\delta T_{00} &= -\bar{\rho}h_{00} + \delta\rho, \\
\delta T_{0i} &= \bar{p}h_{0i} - (\bar{\rho} + \bar{p}) \left( \frac{\partial\delta u}{\partial x^i} + \delta u_i^V \right), \\
\delta T_{ij} &= \bar{p}h_{ij} + a^2 \left( \delta_{ij}\delta p + \frac{\partial^2\pi^S}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\pi_i^V}{\partial x^j} + \frac{\partial\pi_j^V}{\partial x^i} + \pi_{ij}^T \right), \tag{2.0.11}
\end{aligned}$$

en donde  $\delta\rho$  es la perturbación asociada a la densidad de energía;  $\delta p$  es la perturbación asociada a la presión del fluido,  $\delta u$  y  $\delta u_i^V$  son las perturbaciones escalar y vectorial asociadas al vector velocidad del fluido; y las cantidades  $\pi^S$ ,  $\pi_i^V$ ,  $\pi_{ij}^T$  son las perturbaciones escalar, vectorial y tensorial asociadas al tensor de esfuerzos anisotrópo las cuales satisfacen las condiciones

$$\frac{\partial\pi_i^V}{\partial x^i} = \frac{\partial\delta u_i^V}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial\pi_{ij}^T}{\partial x^i} = 0, \quad \pi_{ii}^T = 0, \quad \pi_{ij}^T = \pi_{ji}^T. \tag{2.0.12}$$

Con la descomposición (2.0.9) y (2.0.11), las ecuaciones de campo de Einstein se separan en tres grupos:

#### Perturbaciones escalares

$$\begin{aligned}
-4\pi G a^2 (\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S) &= \frac{1}{2}a\dot{a}\dot{E} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})E + \frac{1}{2}\nabla^2 A - \frac{1}{2}\ddot{A} \\
&\quad - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}a\dot{a}\nabla^2\dot{B} + \dot{a}\nabla^2 F, \tag{2.0.13}
\end{aligned}$$

$$\partial_j\partial_k \left( 16\pi G a^2\pi^S + E + A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B} + 2a\dot{F} + 4\dot{a}F \right) = 0, \tag{2.0.14}$$

$$8\pi G a(\bar{\rho} + \bar{p})\partial_j\delta u = -\dot{a}\partial_j E + a\partial_j\dot{A}, \tag{2.0.15}$$

$$\begin{aligned}
-4\pi G (\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S) &= -\frac{1}{2a^2}\nabla^2 E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} - \frac{1}{a}\nabla^2\dot{F} - \frac{\dot{a}}{a^2}\nabla^2 F \\
&\quad \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2\dot{B}. \tag{2.0.16}
\end{aligned}$$

#### Perturbaciones vectoriales

$$\partial_k \left( 16\pi G a^2\pi_j^V - a^2\ddot{C}_j - 3a\dot{a}\dot{C}_j + a\dot{G}_j + 2\dot{a}G_j \right) = 0, \tag{2.0.17}$$

$$8\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})a\delta u_j^V = \frac{1}{2}\nabla^2 G_j - \frac{a}{2}\nabla^2\dot{C}_j, \tag{2.0.18}$$

## Perturbaciones tensoriales

$$-16\pi G a^2 \pi_{ij}^T = \nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3\dot{a}a \dot{D}_{ij} \quad (2.0.19)$$

Se observa que si bien hubo un desacople en las ecuaciones para las perturbaciones, las expresiones encontradas para cada tipo de perturbación presentan un forma bastante compleja. Además, es notable que el sistema de ecuaciones no constituye un conjunto completo de ecuaciones ya que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Sin embargo, existe una manera de eliminar el número elevado de incógnitas haciendo una adecuada escogencia del sistema de coordenadas. La idea consiste en buscar cantidades que sean invariantes ante transformaciones de Gauge [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#) pues de esta manera se asegura que la forma de las ecuaciones no cambiará haciendo un cambio en el sistema coordenado, ecogiéndose éste convenientemente.

Dentro de las perturbaciones estudiadas en esta sección, se encuentra que solamente las cantidades  $\pi^S, \pi_i^V, \pi_{ij}^T, \pi^V, \delta u_i^V$  son invariantes de Gauge mientras que las demás presentan cambios diferentes de cero [Weinberg \(2008\)](#). No obstante, se puede dar solución a las ecuaciones de Einstein mediante dos suposiciones importantes: primero, el análisis se hace en escalas de superhorizonte, i.e., la escala de observación  $R$  es mucho mayor que el radio comóvil de Hubble  $(aH)^{-1}$ ; segundo, se supone la existencia de un único reloj o único parámetro del cual dependen todas las cantidades perturbadas y no perturbadas. Una de las cantidades resultantes más importantes es el invariante

$$\zeta = -\frac{A}{2} + H \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} = \psi + H \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \quad (2.0.20)$$

ya que relaciona la perturbación escalar  $A$  perteneciente a la métrica y la perturbación en la densidad de energía. A la cantidad  $\zeta$  se le llama perturbación en la curvatura y tiene la propiedad de que en escalas de superhorizonte y bajo la suposición de la existencia de un único reloj, su evolución no decae con el tiempo sino que permanece constante (a diferencia de las perturbaciones vectoriales las cuales decaen rápidamente) [Weinberg \(2008\)](#).

Las perturbaciones tratadas hasta el momento son atribuidas al comportamiento cuántico del Universo durante inflación. Por esto, es necesario definir un modelo inflacionario que permita hacer un estudio de las fluctuaciones de los campos que lo componen y relacionarlas con el tensor momentum energía  $T_{\mu\nu}$ . Una vez hecha la escogencia del modelo inflacionario, se procede a efectuar un proceso de cuantización ya que, como se ha dicho, la naturaleza de los campos generadores de inflación es de tipo cuántico. Dicho proceso consiste en llevar los campos a estatus de operador, definir

las reglas de conmutación adecuadas y definir el estado de vacío [Mukhanov & Winitzki \(2007\)](#). Intrínseco en el proceso se encuentra una transformación que lleva las ecuaciones del espacio coordinado al espacio de momentum ya que, de esta manera, el tratamiento algebraico es más sencillo y se obtiene una mejor interpretación. Debido al carácter probabilístico de la mecánica cuántica, lo físicamente medible son valores esperados de las cantidades físicas teniendo en cuenta un ensamble de sistemas con las mismas condiciones. En este caso, el ensamble de sistemas está constituido por muchos universos igualmente preparados y el valor esperado de una cantidad será el promedio hecho sobre todos los universos que componen el conjunto. Se define entonces el correlador de dos puntos como el promedio del producto

$$\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta^*(\mathbf{y}, t) \rangle, \quad (2.0.21)$$

sobre todo el ensamble de universos, donde  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son dos posiciones espaciales diferentes. A partir del correlador [\(2.0.21\)](#) se obtiene el espectro  $P_\zeta$  de la perturbación  $\zeta$  el cual es usado para hacer una comparación entre teoría y experimento.

# 3

## Formalismo $\delta N$

El formalismo  $\delta N$  Lyth & Liddle (2009); Starobinsky (1985); Sasaki & Stewart (1996); Lyth *et al.* (2005); Lee *et al.* (2005); Wands *et al.* (2000); Dimopoulos *et al.* (2009); Lyth & Rodriguez (2005) constituye una metodología alternativa a la TPC que reduce la complejidad de los cálculos, permite tener una interpretación más clara de los resultados y conduce a una expresión sencilla para el correlador de dos puntos de  $\zeta$ . El formalismo a nombrar se basa en la famosa hipótesis de universos separados pero antes de enunciarla se deben hacer algunas aclaraciones. Como se ha comentado en esta sección, el Universo no es perfectamente homogéneo ni isótropo puesto que existen estructuras en medio de regiones de espacio “vacío”, por lo que en cada posición  $\mathbf{x}$  del espacio el Universo no lucirá de la misma manera. Sin embargo, el grado de inhomogeneidad y anisotropía puede ser reducido mediante el proceso de suavizado Lyth & Liddle (2009); este proceso consiste en tomar una esfera con un radio comóvil  $R$  correspondiente a cualquier escala cosmológica de interés y en el centro de la esfera (con posición  $\mathbf{x}$  y tiempo  $t$ ) se reemplaza el valor de la densidad de energía  $\rho(\mathbf{x}, t)$  por un promedio de la densidad dentro de la esfera, i.e.,  $\rho(R, \mathbf{x}, t)$ . Efectuando el mismo proceso en cada posición  $\mathbf{x}$  del espacio, se obtiene una distribución de energía más uniforme en el Universo. Así, la perturbación de la densidad de energía a partir del promedio se puede escribir por medio de la perturbación suavizada  $\delta\rho(R, \mathbf{x}, t)$

$$\rho(R, \mathbf{x}, t) = \rho(t) + \delta\rho(R, \mathbf{x}, t) \quad (3.0.1)$$

en donde  $\rho(t)$  es el promedio espacial de  $\rho(\mathbf{x}, t)$  o de  $\rho(R, \mathbf{x}, t)$  siempre y cuando se cumpla la condición  $|\delta\rho(R, \mathbf{x}, t)/\rho(t)| \ll 1$ . La escala escogida para el suavizado debe ser tal que no haya flujo de partículas hacia adentro o hacia afuera de la esfera por lo que cada una de esas esferas se podría entender como un *universo separado*.

Una pregunta interesante es si el valor *rms* de  $\rho(R, \mathbf{x})$  en un momento cercano a la entrada del horizonte depende de la escala de suavizado, y la respuesta es que es “casi” independiente de la escala ya que las observaciones así lo indican [Ade \*et al.\* \(2013c\)](#); [Bennett \*et al.\* \(2013\)](#); [Hinshaw \*et al.\* \(2013\)](#).

Con lo anteriormente expuesto, se presenta la base del formalismo  $\delta N$ : suposición de universos separados, la cual tiene que ver con el comportamiento del Universo después de haber suavizado a una escala de superhorizonte ( $R \gg (aH)^{-1}$ ) [Lyth & Liddle \(2009\)](#). La suposición se basa en un hecho importante: los gradientes espaciales en cada región de suavizado son despreciables por lo que no hay flujo de partículas entrantes ni salientes. Así, el Universo suavizado se comporta localmente homogéneo y por ende puede ser visto como una colección de universos separados. El tipo de universo homogéneo en una posición  $\mathbf{x}$  depende del tipo de inflación, pudiendo ser por lo tanto isótropo o anisótropo [Dimopoulos \*et al.\* \(2009\)](#). Tomando un threading comóvil, un *slicing* de densidad de energía uniforme y teniendo en cuenta la suposición de universos separados, la métrica espacial en cada punto del espacio se puede definir, para un Universo de Friedmann-Robertson-Walker, como

$$g_{ij} = a^2(\mathbf{x}, t)\gamma_{ij} \quad (3.0.2)$$

en donde  $a(\mathbf{x}, t)$  es el parámetro de expansión local en cada posición  $\mathbf{x}$  y tiempo  $t$ , y  $\gamma_{ij}(\mathbf{x})$  un cantidad que caracteriza el sistema coordenado escogido. Para poder dar una interpretación a  $a(\mathbf{x}, t)$  como factor de expansión local se hace que  $\det(\gamma_{ij}) = 1$  ya que de esta manera se tiene que el volumen físico está dado por

$$V_{Físico} = a^3(\mathbf{x}, t)\sqrt{\det\gamma_{ij}}V_{comóvil} = a^3(\mathbf{x}, t)V_{comóvil}. \quad (3.0.3)$$

Además,  $\gamma_{ij}(\mathbf{x})$  debe ser independiente del tiempo puesto que siempre es posible escoger un sistema coordenado en el cual  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ , en el caso de un fondo isótropo.

Del álgebra de matrices se sabe que una matriz cuadrada puede ser expresada a través del exponente de una matriz auxiliar, por lo tanto, para la matriz  $\gamma_{ij}$  existirá una matriz  $h_{ij}$  tal que

$$\gamma_{ij} = e^{h_{ij}}. \quad (3.0.4)$$

De acuerdo con la propiedad de  $\gamma_{ij}$  (determinante igual a uno) es claro que la traza de  $h_{ij}$  es nula. Ahora, el factor de escala local  $a(\mathbf{x}, t)$  puede parametrizarse por una función que sólo dependa del tiempo y otra que dependa de la posición y el tiempo como sigue

$$a(\mathbf{x}, t) = b(t)e^{\zeta(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.0.5)$$

La anterior definición es crucial porque permite relacionar el factor de expansión local con el factor de expansión global; reescribiendo la métrica espacial a través de  $h_{ij}$  y  $b(t)$  se tiene

$$g_{ij} = b^2(t) e^{2\zeta(\mathbf{x}, t)} e^{h_{ij}(\mathbf{x})}. \quad (3.0.6)$$

Recordando la definición de exponencial de una matriz, se llega a

$$g_{ij} = b^2(t) (\delta_{ij} + 2\zeta(\mathbf{x}, t) + h_{ij}(\mathbf{x}) + \dots), \quad (3.0.7)$$

de donde se observa que los términos dentro del paréntesis tienen la forma de una expansión de  $g_{ij}$  alrededor de un valor fijo  $b^2(t)$ . Por otra parte, si hay homogeneidad e isotropía en todo el Universo, la métrica que describe su geometría es

$$g_{ij} = a^2(t), \quad (3.0.8)$$

la cual es equivalente a (3.0.7) en el caso  $\zeta(\mathbf{x}, t) = 0$  y  $h_{ij} = 0$ . Así, se determina que  $b(t)$  es el factor de expansión global y las funciones  $\zeta, h_{ij}$  determinan la perturbación o las variaciones de la métrica de FRW en cada punto del espacio. Si bien,  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  y  $h_{ij}$  definen la perturbación en la geometría del Universo, es al término  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  al que se le da el nombre de perturbación primordial en la curvatura.

Una de las características más importantes de la llamada perturbación primordial en la curvatura radica en el hecho de que es una cantidad conservada bajo una hipótesis sobre la presión  $p$  del fluido. La primera ley de la termodinámica establece que el cambio de la energía interna de un sistema es igual al calor absorbido  $dQ$  por el sistema menos el trabajo  $dW$  que éste ejerce sobre el entorno:

$$dU = dQ - dW. \quad (3.0.9)$$

En virtud de la suposición de universos separados, en cada región se tiene un ecuación del tipo (3.0.9) pero con la particularidad de que en cada uno de los universos separados  $dQ = 0$ , por lo que se obtiene  $dU = -dW$ . Teniendo en cuenta que  $dW = PdV$  y la energía se puede escribir como  $U = \rho V$ , a partir de (3.0.9) se encuentra la ecuación de continuidad para cada universo separado

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + 3H(\mathbf{x}, t) [\rho(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t)] = 0. \quad (3.0.10)$$

en donde  $H(\mathbf{x}, t) = \dot{a}(\mathbf{x}, t)/a(\mathbf{x}, t)$ . Si se trabaja en un *slicing* de densidad de energía uniforme, se llega a

$$\dot{\rho}(t) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) \right] (\rho(t) + p(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (3.0.11)$$

Ahora, si se supone que la presión es una función única de la densidad de energía,  $p = p(\rho) = p(t)$ , se encuentra que  $\zeta$  es una cantidad conservada

$$\dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.0.12)$$

La ecuación  $p(\mathbf{x}) = p(\rho(\mathbf{x}))$  es llamada la condición adiabática para la presión y cuando es satisfecha se dice que la presión es adiabática [Lyth \*et al.\* \(2005\)](#); [Wands \*et al.\* \(2000\)](#). En la historia del Universo se encuentran casos en los que la condición se cumple. Por ejemplo, la presión es adiabática cuando hay dominio de radiación ( $p = \rho/3$ ) o cuando hay dominio de materia ( $p = 0$ ) sin importar la naturaleza de los componentes del fluido cósmico.

### Fórmula $\delta N$

La perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  se puede definir a partir del monto de expansión local entre dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$ : en un *slicing* general, la métrica espacial puede ser expresada de la misma manera que en [\(3.0.2\)](#)

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{a}^2(\mathbf{x}, t)\tilde{\gamma}_{ij}, \quad (3.0.13)$$

con

$$\tilde{a}(\mathbf{x}, t) \equiv a(t)e^{\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t)}, \quad \tilde{\gamma}_{ij}(\mathbf{x}) \equiv e^{\tilde{h}_{ij}}, \quad (3.0.14)$$

de tal manera que el monto de expansión [Lyth & Liddle \(2009\)](#) local entre dos *slicing* generales es

$$N(\mathbf{x}, t_1, t_2) = \ln\left(\frac{a(t_1)}{a(t_2)}\right) + \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2) - \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_1). \quad (3.0.15)$$

Si ahora se toma  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2)$  en un *slicing* de densidad de energía uniforme y  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_1)$  en un *slicing* plano, se obtiene la expresión

$$\zeta(\mathbf{x}, t_2) = N(\mathbf{x}, t_2, t_1) - N_0(t_2, t_1), \quad (3.0.16)$$

en donde  $N_0(t_2, t_1) = \ln(a(t_2)/a(t_1))$  indica el monto de expansión en el fondo homogéneo e isótropo no perturbado. Es de notar que el valor de  $\zeta$  en el tiempo  $t_2$  no depende del tiempo inicial o época anterior, por lo que se puede escribir la ecuación para  $\zeta$  como sigue

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \delta N(\mathbf{x}, t). \quad (3.0.17)$$

Entonces, la perturbación en la curvatura  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  se obtiene a partir de la perturbación en el monto de expansión local partiendo de un *slicing* plano y terminando en un *slicing* con densidad de energía uniforme.

Debido a que la existencia de las perturbaciones en la geometría espacial tuvieron su origen durante inflación, se atribuye la perturbación  $\delta N$  en el monto de expansión a la presencia de un campo escalar primordial  $\phi$  (en el caso más simple). Por lo tanto, el término  $\delta N(\mathbf{x}, t)$  es determinado por el valor inicial de las perturbación del campo escalar  $\phi(\mathbf{x}) = \phi + \delta\phi(\mathbf{x})$  y sus derivadas (aunque éstas son omitidas ya que en rodadura lenta se tiene una relación entre los campos y sus derivadas) con lo cual se puede escribir [Lyth \*et al.\* \(2005\)](#); [Lyth & Rodriguez \(2005\)](#)

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \delta N(\phi(\mathbf{x}), t) = N_\phi \delta\phi + \frac{1}{2} N_{\phi\phi} (\delta\phi)^2 + \dots, \quad (3.0.18)$$

en donde  $N_\phi \equiv \partial N(\phi(t))/\partial\phi$ ,  $N_{\phi\phi} \equiv \partial^2 N(\phi(t))/\partial\phi^2$ , la perturbación está definida en el *slicing* plano y el valor del campo  $\phi$  no perturbado está definido como el promedio espacial sobre una región dentro de la cual se definieron las perturbaciones [Lyth & Rodriguez \(2005\)](#). Para un caso más general, en donde  $N$  depende de muchos campos escalares, la fórmula para  $\zeta$  se convierte en

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_I N_I \delta\phi_I + \sum_{IJ} \frac{1}{2} N_{IJ} \delta\phi_I \delta\phi_J + \dots, \quad (3.0.19)$$

en donde el subíndice  $I$  denota cada campo escalar. Ahora, para el caso de un campo escalar  $\phi$  y campo vectorial  $A_i$ , la expresión para la perturbación primordial en la curvatura hasta segundo orden se expresa como [Dimopoulos \*et al.\* \(2009\)](#); [Valenzuela-Toledo \*et al.\* \(2011\)](#)

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N_\phi \delta\phi + N^i_A \delta A_i + \frac{1}{2} N_{\phi\phi} (\delta\phi)^2 + N^i_{\phi A} \delta\phi \delta A_i + \frac{1}{2} N^{ij}_{AA} \delta A_i \delta A_j, \quad (3.0.20)$$

en donde

$$N_\phi \equiv \frac{\partial N}{\partial\phi}, \quad N^i_A \equiv \frac{\partial N}{\partial A_i}, \quad N_{\phi\phi} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial\phi^2}, \quad N^i_{\phi A} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial\phi \partial A_i}, \quad N^{ij}_{AA} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial A_i \partial A_j}. \quad (3.0.21)$$

Hasta el momento se ha mostrado cómo obtener la perturbación en la curvatura a partir de las perturbaciones de los campos escalares y/o vectoriales del modelo inflacionario usado. El resultado obtenido implica trabajar en un *slicing* de densidad de energía uniforme, lo cual impide definir la perturbación en la densidad de energía (necesaria para comprender la formación de estructuras a gran escala en el Universo). Sin embargo, el problema es resuelto si se analiza el cambio en  $N(\mathbf{x}, t)$  partiendo de un *slicing* de densidad de energía uniforme y yendo a otro genérico. De esta manera, en virtud de la expresión [\(3.0.15\)](#) se obtiene que

$$\delta N(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) - \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (3.0.22)$$

Ahora, considerando perturbaciones a primer orden, teniendo en cuenta que  $N(\mathbf{x}, t) = \int H(\mathbf{x}, t) dt$  y que la perturbación en la densidad de energía está dada por  $\delta\rho(\mathbf{x}, t) = -\dot{\rho}(t)\delta t(\mathbf{x}, t)$  (siendo  $\delta t$  el cambio en la coordenada  $t$  cuando se va de un *slicing* de densidad de energía uniforme a un *slicing* genérico) Lyth & Liddle (2009) se encuentra una expresión que relaciona la perturbación en la curvatura y la perturbación en la densidad de energía

$$\zeta = -\psi - H(t) \frac{\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\dot{\rho}(t)}. \quad (3.0.23)$$

Para el caso particular en el que el *slicing* genérico se toma corresponde a un *slicing* plano, la ecuación anterior se convierte en

$$\zeta = -H(t) \frac{\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\dot{\rho}(t)}. \quad (3.0.24)$$

mostrando una relación directa entre  $\zeta$  y  $\delta\rho$ .

## Descriptores estadísticos

Las propiedades del Universo como lo vemos hoy en día se estudian a través de las propiedades estadísticas de la perturbación en la curvatura. Como se ha observado líneas atrás,  $\zeta$  es generada a partir de las perturbaciones de los campos generadores de inflación por lo que también tendrá naturaleza cuántica. No es posible obtener un valor preciso de  $\zeta$  sino que, en cambio, se obtienen valores esperados y promedios de las perturbaciones en un ensamble de universos igualmente preparados Weinberg (2008); Lyth & Liddle (2009). Una de las cantidades más estudiadas es el correlador de dos puntos

$$\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta^*(\mathbf{y}, t) \rangle, \quad (3.0.25)$$

el cual determina un promedio (en todo el ensamble de universos) del producto entre  $\zeta$  en dos puntos diferentes del espacio  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ . Debido a las expresiones (3.0.18), (3.0.19) y (3.0.20), el correlador de dos puntos (3.0.25) (considerando términos lineales en  $\zeta$ ) será una función  $f$  de los correladores de dos puntos de las perturbaciones en los campos escalares y vectoriales

$$\langle \zeta(\mathbf{x}) \zeta^*(\mathbf{y}) \rangle = f(\langle \delta\phi(\mathbf{x}) \delta\phi^*(\mathbf{y}) \rangle, \langle \delta\phi(\mathbf{x}) \delta A_i^*(\mathbf{y}) \rangle, \langle \delta A_i(\mathbf{x}) \delta A_j^*(\mathbf{y}) \rangle). \quad (3.0.26)$$

Generalmente, el estudio de los correladores se hace en el espacio de momentum porque en este espacio los cálculos y la interpretación física son más sencillos. En el caso en el que alguno de los correladores (por ejemplo  $\langle \delta\phi(\mathbf{x}), \delta\phi(\mathbf{x}) \rangle$ ) sea invariante ante translaciones espaciales, se encuentra que el correlador en el espacio de momentum es proporcional a la función delta de Dirac

$$\langle \delta\phi(\mathbf{k}_1) \delta\phi^*(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_{\delta\phi}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (3.0.27)$$

en donde la cantidad  $P_{\delta\phi}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  es denominada el espectro asociado a la perturbación  $\delta\phi$ . Ahora, si se asume que el correlador de dos puntos de  $\delta\phi$  es invariante ante rotaciones espaciales, se encuentra que el espectro  $P_{\delta\phi}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  sólo debe depender de la magnitud de  $\mathbf{k}$  y no de su dirección, por lo cual el correlador queda escrito como

$$\langle \delta\phi(\mathbf{k}_1)\delta\phi^*(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_{\delta\phi}(k). \quad (3.0.28)$$

Dentro de este marco, se define la homogeneidad estadística como la invariancia de los correladores de  $n$  puntos ante translaciones espaciales; y la isotropía estadística como la invariancia de los correladores de  $n$  puntos ante rotaciones espaciales [Valenzuela-Toledo et al. \(2011\)](#).

En el caso de perturbaciones vectoriales, la invariancia ante rotaciones espaciales es, en principio, rota. Si se supone que durante inflación la invariancia rotacional se viola por la existencia de un campo vectorial que induce una dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  preferida en el Universo (siendo  $\hat{\mathbf{n}}$  un vector unitario), la expresión para el espectro de la perturbación en la curvatura  $\zeta$  se puede parametrizar de la siguiente manera [Ackerman et al. \(2007\)](#)

$$P_\zeta(\mathbf{k}) = P_\zeta^{Iso}(k)(1 + g_\zeta(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2), \quad (3.0.29)$$

en donde  $P_\zeta^{Iso}$  es el espectro promedio sobre todas las direcciones,  $\hat{\mathbf{k}}$  es el vector de onda unitario y  $g_\zeta$  representa el nivel de anisotropía estadística. Se encuentra que para el modelo inflacionario compuesto por un campo escalar  $\phi$  y un campo vectorial  $A_i$  en un fondo con expansión isótropa, el nivel de anisotropía estadística se escribe como [Dimopoulos et al. \(2009\)](#)

$$g_\zeta = (r_{long} - 1) \frac{N_A^2 P_+(k)}{N_\phi^2 P_{\delta\phi}(k) + N_A^2 P_+(k)}, \quad (3.0.30)$$

en donde  $N_A \equiv \sqrt{N_a^i N_a^i}$ ;  $P_+(k)$  es el espectro asociado a la perturbación de  $A_i$  que conserva paridad, el cual está definido a través de los espectros asociados a las componentes transversales del campo vectorial  $P_R$  y  $P_L$ , de la forma  $P_+ = \frac{1}{2}(P_R + P_L)$ ;  $r_{long} \equiv P_{long}/P_+$  y  $P_{long}$  es el espectro asociado a la componente longitudinal del campo vectorial.

En la literatura se conoce también una expresión para el nivel de anisotropía estadística asociado a un modelo inflacionario con expansión isótropa compuesto por  $I$  campos escalares y  $a$  campos vectoriales [Gómez \(2012\)](#); [Gomez & Rodriguez \(2013\)](#). La ecuación obtenida presenta la misma forma de (3.0.30) pero en este caso se tiene un número de niveles de anisotropía estadística igual al número de campos vectoriales

presentes en el modelo:

$$g_{\zeta}^a = (r_{long}^a - 1) \frac{(N_i^a)^2 P_+^a(k)}{(N_{\phi}^I)^2 P_{\delta\phi}^I(k) + (N_i^a)^2 P_+^a(k)}. \quad (3.0.31)$$

# 4

## Producción de partículas

En los capítulos anteriores, se mostró que es necesario conocer los espectros asociados a las perturbaciones en los campos constituyentes del modelo inflacionario de estudio con el fin de obtener información acerca del espectro asociado a la perturbación primordial en la curvatura. Como es sabido, la naturaleza de las perturbaciones en los campos (escalares y/o vectoriales) primordiales provienen de las fluctuaciones cuánticas del estado de vacío [Weinberg \(2008\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Mukhanov & Winitzki \(2007\)](#). Por lo tanto, el correlador de dos puntos asociado a las perturbaciones en los campos debe calcularse en el marco de la teoría cuántica de campos. El proceso de cuantización de las perturbaciones se hace de la siguiente manera: primero, se perturban los campos (escalares  $\phi^I$  y/o vectoriales  $A^a_\mu$ ) alrededor de su valor homogéneo

$$\phi^I(\mathbf{x}, t) = \phi^I(t) + \delta\phi^I(\mathbf{x}, t), \quad (4.0.1)$$

$$A^a_\mu(\mathbf{x}, t) = A_\mu(t) + A_\mu(\mathbf{x}, t). \quad (4.0.2)$$

Segundo, se va del espacio de coordenadas al espacio de momentum a través de expansión en series de Fourier.

$$\delta\phi^I(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi^I(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.0.3)$$

$$\delta A_\mu(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta A_\mu(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.0.4)$$

Tercero, a partir de las ecuaciones de evolución para los campos, se obtienen las ecuaciones asociadas a las perturbaciones en el espacio de momentum. Para las perturbaciones vectoriales se hace un desacople entre la componente espacial de los

campos  $\delta\mathbf{A}^{\parallel}$  paralela a  $\mathbf{k}$  y la componente espacial de los campos  $\delta\mathbf{A}^{\perp}$  transversal al vector  $\mathbf{k}$  de la siguiente manera

$$\delta A_i(\mathbf{k}, t) \equiv \sum_{\lambda} e^{\lambda}_i(\hat{\mathbf{k}})\delta A_{\lambda}(\mathbf{k}, t), \quad (4.0.5)$$

en donde  $\lambda = \parallel, L, R$  representa los grados de libertad del campo: uno paralelo y dos perpendiculares; y  $e^{\lambda}_i$  representan los respectivos vectores de polarización. Así, se tendrán ecuaciones independientes que describen la evolución de la componente paralela y las transversales con polarización izquierda y derecha.

Luego de este proceso, se llevan las perturbaciones a estatus de operador y se escriben a través de los operadores creación  $\hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k})$  y aniquilación  $\hat{a}(\mathbf{k})$  [Weinberg \(2008\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#). Para un sólo campo escalar, se tiene

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\nu(\mathbf{k}, t)\hat{a}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \nu^*(\mathbf{k}, t)\hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (4.0.6)$$

con  $\nu$  una función compleja que depende de  $\mathbf{k}$  y  $t$ . Por otra parte, para las componentes espaciales de un sólo campo vectorial:

$$\delta\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} [\mathbf{e}_{\lambda}(\hat{\mathbf{k}})\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k})w_{\lambda}(k, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{e}_{\lambda}^*(\hat{\mathbf{k}})\hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})w_{\lambda}^*(k, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (4.0.7)$$

en donde  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  y  $\mathbf{e}_{\lambda}(\hat{\mathbf{k}})$  son los vectores de polarización cuyo subíndice  $\lambda$  denota denota el tipo de polarización, ya sea derecha, izquierda o paralela. Adicionalmente, se exigen reglas de conmutación para los operadores creación y aniquilación para el caso escalar y vectorial respectivamente

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.0.8)$$

$$[\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.0.9)$$

El último proceso consiste en definir el estado de vacío para poder tener una interpretación de partículas, la cual es una de las características más relevantes de la teoría cuántica de campos [Mukhanov & Winitzki \(2007\)](#). Con esto, se calculan los correladores de dos puntos para las perturbaciones en los campos respecto al estado de vacío . Asumiendo homogeneidad e isotropía estadística, el correlador de dos puntos para la perturbación escalar se escribe como

$$\langle\delta\hat{\phi}(\mathbf{k})\delta\hat{\phi}^{\dagger}(\mathbf{k}')\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')P_{\delta\phi}(k). \quad (4.0.10)$$

Mientras que para la perturbación vectorial se tiene

$$\langle \delta \hat{A}_i(\mathbf{k}) \delta \hat{A}_j^\dagger(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ T_{ij}^{even}(\hat{\mathbf{k}}) P_+(k) + T_{ij}^{odd}(\hat{\mathbf{k}}) P_-(k) + T_{ij}^{long}(\hat{\mathbf{k}}) P_{long}(k) \right], \quad (4.0.11)$$

en donde se ha asumido que no existe correlación entre las diferentes polarizaciones  $\lambda$

$$\langle \delta \hat{A}_\lambda(\mathbf{k}) \delta \hat{A}_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'} P_\lambda(k). \quad (4.0.12)$$

Las cantidades  $T_{ij}^{even}$ ,  $T_{ij}^{odd}$ ,  $T_{ij}^{long}$  se definen como

$$T_{ij}^{even}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad T_{ij}^{odd}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \epsilon_{ijk} \hat{k}_k, \quad T_{ij}^{long}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad (4.0.13)$$

las cuales indican la contribución paralela y perpendicular respecto a  $\mathbf{k}$  para el correlador de dos puntos de la perturbación vectorial. En términos de los vectores de polarización, las cantidades  $T_{ij}^{even}$ ,  $T_{ij}^{odd}$ ,  $T_{ij}^{long}$  se escriben como

$$T_{ij}^{long}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv e_i^\parallel e_j^{*\parallel}, \quad T_{ij}^{even}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv (e_i^R e_j^{*R} + e_i^L e_j^{*L}), \quad T_{ij}^{odd}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv (e_i^R e_j^{*R} - e_i^L e_j^{*L}), \quad (4.0.14)$$

mientras que los  $P_\pm$  se definen como

$$P_\pm = \frac{1}{2}(P_R \pm P_L), \quad (4.0.15)$$

siendo los espectros que conservan y violan paridad respectivamente. Así, si una teoría es invariante ante transformaciones de paridad, se tiene que  $P_- = 0$ .

La definición de vacío y la interpretación de partículas es el hecho que da nombre al proceso de cálculo del espectro asociado a las perturbaciones en los campos (i.e., producción de partículas). La idea se basa en la existencia de un horizonte cosmológico (análogo al horizonte de eventos en un agujero negro [Hawking \(1975\)](#); [Penrose \(2004\)](#)) y la naturaleza de las perturbaciones, las cuales se entienden como el efecto de las fluctuaciones generadas por la continua creación y aniquilación continua de partículas virtuales. Debido a la expansión acelerada del Universo durante inflación, el horizonte actúa como un agujero negro invertido que expulsa materia hacia afuera de la zona en contacto causal. Por lo tanto, puede tenerse el caso en el que un par de partículas virtuales expulsada jamás vuelva a encontrarse y se generen partículas reales fuera del horizonte (ver Fig. 4.1). Así, se observa cómo durante inflación se tiene una *Producción de Partículas* reales [Dimopoulos \(2009\)](#); [Gibbons & Hawking \(1977\)](#). Igualmente, se puede entender la producción de partículas como la amplificación de las fluctuaciones cuánticas debida a la expansión acelerada del Universo. Esta amplificación lleva las fluctuaciones cuánticas a fluctuaciones clásicas, las cuales llevan a variaciones (perturbaciones) clásicas del campo en escalas de superhorizonte; y son

estas perturbaciones las que conducen a variaciones en la densidad de energía ( $\delta\rho$ ). Finalmente, es el  $\delta\rho$  la fuente de la formación de estructuras en el Universo. Este proceso de generación de estructuras puede ser representado mediante el siguiente esquema (para el caso de un campo escalar)

$$[\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar] + Inflation \rightarrow \frac{\delta\phi}{\phi} \rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} \rightarrow Galaxies, \quad (4.0.16)$$

en donde se observa la conexión entre el comportamiento cuántico del Universo primordial y las estructuras observadas hoy en día. De acuerdo con esto, el correlador de dos puntos de las perturbaciones en los campos 4.0.11 se debe calcular con los campos en escalas de superhorizonte y se debe evaluar respecto al estado de vacío ( $|0\rangle$ ), el cual se define en escalas de subhorizonte.

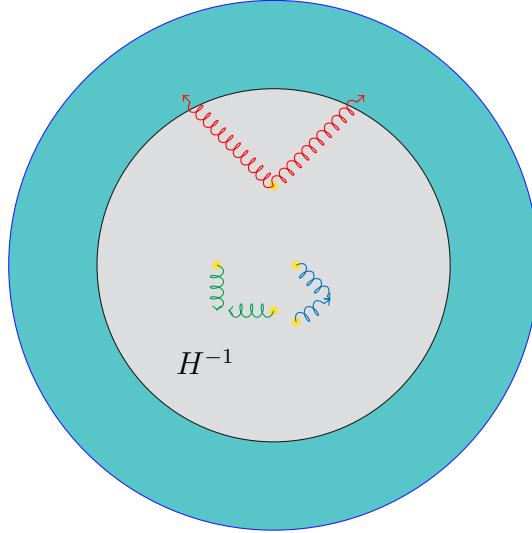


Figura 4.1: Proceso de producción de partículas en presencia de un horizonte cosmológico ( $H^{-1}$ ). Las líneas curvas representan el proceso de aniquilación de pares partícula-antipartícula.

# 5

## Gauge-flation

Uno de los modelos inflacionarios más sobresalientes encontrados en la literatura científica es el conocido como Gauge-flation [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2013, 2011\)](#); [Maleknejad \*et al.\* \(2013\)](#); [Nieto & Rodríguez \(2014\)](#). El elemento de mayor relevancia dentro del modelo consiste en que está edificado dentro de una teoría invariante ante transformaciones de Gauge  $SU(2)$ , es decir, existe una simetría interna al igual que en las teorías de física de partículas. Este hecho introduce de manera natural tres campos vectoriales  $A^a_\mu$  [Ryder \(1985\)](#); [Kane \(1993\)](#); [Weinberg \(1996\)](#) los cuales son los generadores de la dinámica inflacionaria. Aquí  $a = 1, 2, 3$  representa los índices del álgebra de Gauge y  $\mu = 0, 1, 2, 3$  representan los índices espaciotemporales. Suponiendo como primera aproximación de un modelo más general [Maleknejad \*et al.\* \(2012\)](#) que la expansión es isótropa, la métrica que describe el espaciotiempo es la métrica de Friedmann, Robertson y Walker [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (5.0.1)$$

en donde  $a(t)$  es el parámetro de expansión global y  $i, j$  son los índices a lo largo de una hipersuperficie tridimensional tipo espacio cuyo tensor métrico es escrito como  $h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$  en coordenadas cartesianas. En general, las componentes de cada campo son todas diferentes. Sin embargo, debido a las condiciones requeridas en el modelo, se toman algunas consideraciones importantes. Primero, debido a la simetría del modelo, el gauge temporal

$$A^a_0 = 0, \quad (5.0.2)$$

se manifiesta como una adecuada escogencia ya que permite hacer una conexión entre los índices del álgebra de Gauge y las componentes espaciales de los campos. Para

determinar las componentes espaciales se utiliza la tetrada ortonormal

$$\hat{e}^{(0)}_{\mu} = (1, 0, 0, 0), \quad \hat{e}^{(1)}_{\mu} = (0, a(t), 0, 0), \quad (5.0.3)$$

$$\hat{e}^{(2)}_{\mu} = (0, 0, a(t), 0), \quad \hat{e}^{(3)}_{\mu} = (0, 0, 0, a(t)), \quad (5.0.4)$$

a partir de la cual los vectores se escriben de la forma

$$A^a_i = \hat{e}^{(j)}_i A^a_{(j)}, \quad (5.0.5)$$

en donde  $A^a_{(j)}$  son las componentes de cada vector  $A^a_i$  a lo largo de los vectores ortonormales  $\hat{e}^{(j)}$ . En este punto, se escoge un ansatz de tal manera que los vectores  $A^a_{(j)}$  estén dirigidos a lo largo de cada vector espacial de la tetrada, es decir,

$$A^a_{(j)} = \psi(t)\delta^a_{(j)}, \quad (5.0.6)$$

con lo cual se obtiene

$$A^a_i = \psi(t)\hat{e}^a_i = a(t)\psi(t)\delta^a_i. \quad (5.0.7)$$

De esta manera, se observa que los tres vectores son espaciales, ortogonales y de igual norma; debido a la manera en que se definieron los vectores, se identifican los índices espaciales con los índices del álgebra de gauge, y teniendo en cuenta que el grupo  $O(3)$  es una imagen homomórfica del grupo  $SU(2)$  [Ryder \(1985\)](#), una rotación de los ejes del espacio interno se puede ver como una rotación tridimensional. Así, la simetría de Gauge del modelo es vista como una simetría de rotación en el espacio real, y consecuentemente el fondo permanece isótropo. Aunque la anterior escogencia parezca un ajuste fino, se ha mostrado que la expresión  $A^a_i = \phi(t)\delta^a_i$  es la solución atractor de este modelo inflacionario en un fondo anisótropo descrito por la métrica de Bianchi tipo I [Maleknejad et al. \(2012\)](#). Dicho de otra manera, pocos e-folds de expansión después del inicio de inflación, la configuración espacial de los campos evoluciona hasta la forma dada en la Ec. (5.0.7). Por ende, la forma propuesta para los campos vectoriales no hace parte de una escogencia fina sino que presenta un soporte físico sólido.

Otro aspecto interesante del modelo Gauge-flation es el lagrangiano utilizado para generar inflación. En este caso,  $\mathcal{L}$  no contiene solamente el término de Yang-Mills [Ryder \(1985\)](#); [Kane \(1993\)](#); [Weinberg \(1996\)](#) sino que se anade un término de orden cuatro en  $F^a_{\mu\nu}$  indispensable para satisfacer la condición necesaria y suficiente para tener inflación ( $\rho + 3p < 0$ )

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{\kappa}{384}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\lambda\sigma})^2, \quad (5.0.8)$$

en donde  $F^a_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^a_{\nu} - \partial_{\nu}A^a_{\mu} - g\epsilon^a_{bc}A^b_{\mu}A^c_{\nu}$  (siendo  $g$  el factor de acople entre materia y campos vectoriales y  $\epsilon^a_{bc}$  el símbolo de Levi-Civita de tres índices),  $\kappa$  un parámetro

constante y  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  el tensor contravariante definido a través de la densidad tensorial contravariante  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  (símbolo de Levi-civita) y el determinante del tensor métrico así:  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} / \sqrt{-g}$ . Definiendo  $\phi(t) = a(t)\psi(t)$ , las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de evolución para los campos toman respectivamente la forma

$$H^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \dot{\phi}^2 \phi^4}{a^6} \right), \quad (5.0.9)$$

$$\dot{H} = - \left( \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right). \quad (5.0.10)$$

$$\left( 1 + \kappa \frac{g^4 \phi^4}{a^4} \right) \ddot{\phi} + \left( 1 + \kappa \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \right) \frac{2g^2 \phi^3}{a^2} + \left( 1 - 3\kappa \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right) \dot{\phi} H = 0. \quad (5.0.11)$$

En la referencia [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) se muestra que es útil descomponer la densidad de energía en dos partes para poder entender la manera en que el modelo funciona. Una de las componentes surge del término de Yang-Mills

$$\rho_{YM} = \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right), \quad (5.0.12)$$

y la otra surge del nuevo término,  $(\tilde{F}F)^4$ , llamado  $\rho_\kappa$

$$\rho_\kappa = \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6}, \quad (5.0.13)$$

De esta manera se encuentra una dinámica interesante, ya que usando las ecuaciones (5.0.9) y (5.0.10) se obtiene que la condición  $\rho + 3p < 0$  se satisface sólo si  $\rho_\kappa > \rho_{YM}$  y la condición para inflación del tipo rodadura lenta [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#) se presenta si se tiene  $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$  [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2013, 2011\)](#); [Nieto & Rodríguez \(2014\)](#); [Nieto \(2012\)](#). A través de la solución numérica de las ecuaciones (5.0.9), (5.0.10) y (5.0.11) los autores encuentran que efectivamente al inicio de inflación el término  $\rho_\kappa$  es mucho mayor que  $\rho_{YM}$  (Fig. 5.1), produciendo (como se deseaba) variación lenta del campo  $\psi$  y un valor mucho menor que uno para el parámetro de rodadura lenta  $\varepsilon$ . Sin embargo, luego de un tiempo de evolución, el término  $\rho_\kappa$  decae respecto a  $\rho_{YM}$  haciendo que este último domine y se dé final a inflación. La evolución de los dos términos del lagrangiano es tal que al final de inflación el monto de expansión alcanzado ( $N_e$ ) es suficiente (Fig. 5.2) para resolver los tres problemas clásicos de la cosmología estándar [Weinberg \(2008\)](#); [Kim & Murphy \(1985\)](#).

Adicionalmente a los resultados mencionados hasta el momento, en la Ref. [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) se encuentra un estudio del modelo vía la teoría

de perturbaciones cosmológicas. En el estudio se encuentran las expresiones para el número de e-folds, la potencia espectral para la perturbación en la curvatura ( $P_R$ ), el índice espectral ( $n_S$ ) y la razón tensor-escalar ( $r = P_T/P_R$ ) en términos de los parámetros  $\gamma = g^2\psi^2/H^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $g$  y  $H$ . Al comparar estas cantidades con los resultados del séptimo año de WMAP, se encuentran los intervalos permitidos para los parámetros  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $g$  y  $H$ , los cuales se usaron para hacer el estudio numérico de las ecuaciones 5.0.9, 5.0.10 y 5.0.11. Además, a través de un gráfico de  $r$  vs.  $n_S$  encuentran que las predicciones del modelo caen dentro de los resultados de WMAP (séptimo año) para determinados valores de  $\gamma$  Komatsu *et al.* (2011). Sin embargo, en estudios posteriores se encuentran resultados diferentes. En la referencia Namba *et al.* (2013), se encuentra que el modelo Gauge-flation presenta inestabilidad taquiónica para una región del parámetro  $\gamma$ , específicamente  $\gamma < 2$ , la cual es evitada en la referencia Maleknejad & Sheikh-Jabbari (2011) a través de una suposición no fundamentada. Por otra parte, para la región  $\gamma > 2$ , se encuentran resultados diferentes a los originales de la referencia Maleknejad & Sheikh-Jabbari (2011). La razón de estas diferencias radican en algunas suposiciones y procesos matemáticos débilmente soportados. En Namba *et al.* (2013) (ver Fig. 5.3) se obtiene una gráfica para  $r$  y  $n_S$  en términos del parámetro  $\gamma$  y se encuentra que no hay valores para este parámetro que produzcan simultáneamente resultados para  $r$  y  $n_S$  compatibles con las observaciones de Planck Ade *et al.* (2013c). Por lo tanto, a diferencia de lo mostrado en Maleknejad & Sheikh-Jabbari (2011), el nuevo estudio revela que el modelo es descartado por las observaciones.

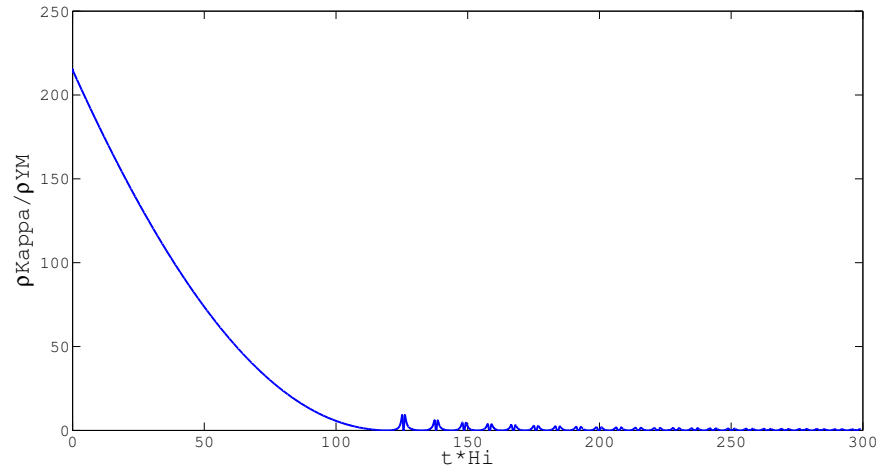


Figura 5.1: Evolución encontrada para la razón entre las dos densidades definidas en el modelo,  $\rho_{YM}$  y  $\rho_{\kappa}$ , en función del tiempo usando las condiciones iniciales  $\psi_i = 0,035$ ,  $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$  y los parámetros  $g = 2,5 \times 10^{-3}$  y  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ . Se observa que  $\rho_{\kappa}$  domina al principio de la evolución del Universo y luego empieza a decaer para dar de manera adecuada un final a inflación.

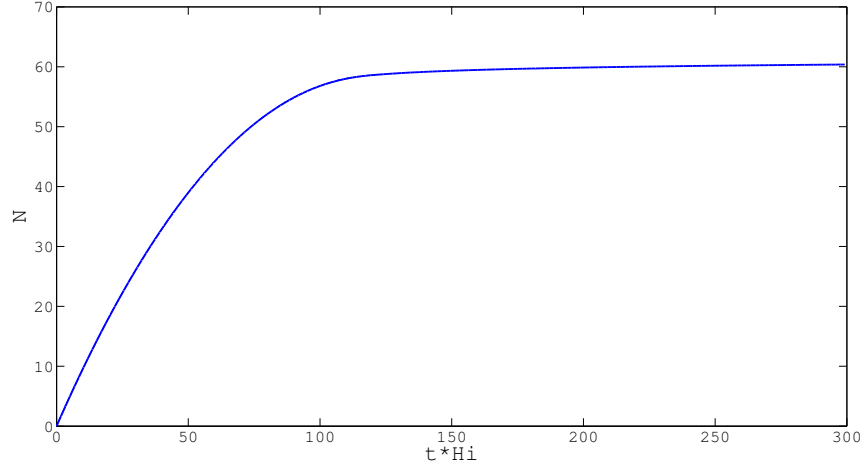


Figura 5.2: Evolución encontrada para el número de e-folds de expansión en función del tiempo usando las condiciones iniciales  $\psi_i = 0,035$ ,  $\dot{\psi}_i = -1 \times 10^{-10}$  y los parámetros  $g = 2,5 \times 10^{-3}$  y  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ . Es claro que cuando el término  $\rho_\kappa$  ha decaído, ya se ha alcanzado el valor mínimo de e-folds necesarios para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar.

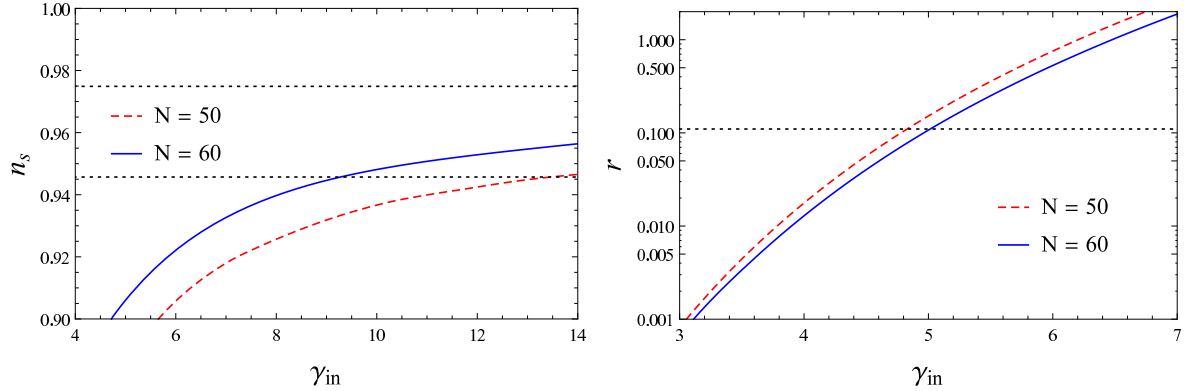


Figura 5.3: Índice espectral  $n_s$  y razón tensor-escalar  $r$  obtenidos para el modelo Gaugeflation sin masa para dos valores diferentes de  $N_e$  en función del valor inicial del parámetro  $\gamma$ . Las líneas punteadas horizontales indican los intervalos permitidos por los últimos resultados reportados por Planck ( $0,9457 < n_s < 0,9749$  y  $r < 0,11$ ). Es claro que no hay valores para  $\gamma_i$  que permitan tener de manera simultánea resultados para  $n_s$  y  $r$  que estén dentro de los intervalos señalados en las gráficas.

## 6

# Gauge-flation con masa

El modelo *Gauge-flation* descrito en el capítulo anterior es un ejemplo de modelos inflacionarios vectoriales, y es tal vez uno de los más exitosos hasta el momento en su evolución a orden cero; sin embargo, existe una tensión entre los resultados de las referencias [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) y [Namba \*et al.\* \(2013\)](#) a nivel perturbativo. Asumiendo que el modelo es descartado por las observaciones ([Ade \*et al.\* \(2013c\)](#); [Namba \*et al.\* \(2013\)](#)), se motiva una modificación del mismo con el fin de preservar un modelo inflacionario vectorial con simetría interna y con una dinámica tan interesante como se observó en el capítulo anterior. En este proyecto se propone hacer un cambio al llamado *Gauge-flation* que permita preservarlo como un posible descriptor del Universo primordial. La idea principal es incluir un término de masa en el Lagrangiano para chequear el cambio que se obtendría respecto a los resultados finales de las referencias [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) y [Namba \*et al.\* \(2013\)](#). Se hace un estudio del modelo a orden cero, es decir, en el fondo observando el impacto de la inclusión del nuevo término; adicionalmente, se hace el estudio de producción de partículas con el fin de observar el efecto que tienen las fluctuaciones cuánticas de los campos en la generación de las inhomogeneidades observadas en los mapas de la RCF y que dieron lugar a la creación de estructuras a gran escala. El modelo presenta características interesantes que no han sido observadas en estudios anteriores y ocasiona que se practiquen procedimientos alternativos a los utilizados usualmente en este tipo de estudios debido a la complejidad del mismo.

Debido a que la teoría en la cual el modelo está descrito es invariante de Gauge  $SU(2)$ , se espera (al igual que en el modelo estándar de partículas elementales [Ryder \(1985\)](#); [Kane \(1993\)](#); [Weinberg \(1996\)](#); [Pokorski \(2000\)](#); [Altarelli \*et al.\* \(2008\)](#)) que los

campos  $A^a{}_\mu$  tengan alguna relación con un bosón tipo Higgs. Por lo tanto, es natural que se tenga un término de masa en el lagrangiano del modelo, es decir, que exista un rompimiento de la simetría interna. Si bien el rompimiento de la simetría se puede modelar mediante un acoplamiento entre  $A^a{}_\mu$  y un campo escalar, se asumirá que ya ha ocurrido tal rompimiento en la simetría interna y por lo tanto, los campos han adquirido un valor de masa  $m_a$  en el vacío (que en este caso será igual para todos). De esta manera, el lagrangiano que describe el comportamiento del Universo primordial queda expresado como sigue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{384}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\sigma}^a)^2 - \frac{1}{2}m^2 A^a{}_\mu A_a{}^\mu. \quad (6.0.1)$$

Una vez definido el lagrangiano y teniendo en cuenta el hecho de que la simetría está rota, se hace interesante y necesario estudiar de nuevo la dinámica inflacionaria en este modelo. Como primera aproximación se hará un estudio de inflación isótropa en un fondo homogéneo e isótropo descrito por la métrica de FRW plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (6.0.2)$$

## 6.1. Escogencia de la forma de los campos

La escogencia de la forma de los campos vectoriales debe ser tal que se pueda obtener expansión isótropa (es decir, que soporte el hecho de trabajar en FRW), y se logren tener las condiciones geométricas deseadas, i.e., homogeneidad e isotropía respecto a todos los puntos. Al igual que en el caso original, se usará la tetraeda ortonormal

$$\hat{e}^{(0)}{}_\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \hat{e}^{(1)}{}_\mu = (0, a(t), 0, 0), \quad (6.1.1)$$

$$\hat{e}^{(2)}{}_\mu = (0, 0, a(t), 0), \quad \hat{e}^{(3)}{}_\mu = (0, 0, 0, a(t)), \quad (6.1.2)$$

la cual permite escribir la componente espacial de los campos de la forma

$$A^a{}_i = \hat{e}^{(j)}{}_i A^a{}_{(j)}, \quad (6.1.3)$$

en donde  $A^a{}_{(j)}$  son las componentes de cada vector  $A^a{}_i$  a lo largo de los vectores ortonormales  $\hat{e}^{(j)}$ . Análogamente a lo hecho en [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#), se toma el ansatz 5.0.6 ya que de esta manera se obtienen tres vectores ortogonales y de igual norma que producirán una expansión isótropa como era requerido. El ansatz 5.0.6 de la propuesta original está además soportado por el hecho de que esta configuración es la solución atractor de un modelo inflacionario en un fondo anisótropo descrito por

la métrica de Bianchi I [Maleknejad \*et al.\* \(2012\)](#). Se espera igualmente que sea así en este nuevo modelo ya que la variación hecha no es demasiado grande para cambiar el resultado de [Maleknejad \*et al.\* \(2012\)](#). No obstante, el gauge de la ec. 5.0.2 no se puede tomar en este caso debido a que la ruptura de la simetría evidenciada en 6.0.1 no permite hacer este tipo de escogencia. Por lo tanto, además de la variable  $\phi$  o  $\psi$ , se debe tener en cuenta la componente temporal de los campos  $A^a_0$ . Sin embargo, a partir del hecho de tener una configuración espacial isótropa, se obtiene de las ecuaciones de evolución que  $A^a_0 = 0$ , como se observará en la próxima sección. En síntesis, se recupera de manera completa la configuración de los campos dada en [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#).

## 6.2. Ecuaciones de Einstein y evolución

En esta sección se obtendrán las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de evolución para los campos vectoriales con el objetivo de analizar la dinámica del sistema y los cambios encontrados respecto a los resultados de estudios anteriores [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#); [Namba \*et al.\* \(2013\)](#). En el modelo original de Gauge-flation [Nieto \(2012\)](#), se encontró que las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir a través de la derivada covariante  $D_\mu$  para una teoría de Gauge  $SU(2)$

$$D_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial F^a_{\mu\nu}} = 0, \quad (6.2.1)$$

cuando el lagrangiano depende de  $A^a_\mu$  sólo a través de los términos  $F^a_{\mu\nu}$ . Sin embargo, en este caso, al tener un término de masa, la expresión no es válida por lo cual es necesario hacer una modificación partiendo de las ecuaciones originales de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \right] = 0, \quad (6.2.2)$$

Usando el lagrangiano dado en 6.0.1, se llega a la expresión

$$D_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial F^a_{\mu\nu}} + m^2 \sqrt{-g} A^a_\nu g^{\mu\nu} = 0. \quad (6.2.3)$$

la cual no difiere mucho de la ecuación original pues el único cambio viene dado por el nuevo término de masa, el cual no está escrito en términos del tensor  $F^a_{\mu\nu}$ .

Para obtener la componente cero de las ecuaciones se usa la definición de la derivada covariante  $D_\nu$  y el hecho de que  $F^a_{\mu\nu}$  es una cantidad antisimétrica. De esta manera, la

ecuación para  $\mu = 0$  es

$$\begin{aligned} \partial_i \left[ F_a^{0i} - \frac{\kappa}{48} \varepsilon^{0i\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}^a (\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa} F_{\rho\omega}^b F_{\gamma\kappa}^b) \right] - m^2 A_0^a \\ - g \varepsilon^a_{dc} A^d_i \left[ F_c^{0i} - \frac{\kappa}{48} \varepsilon^{0i\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}^c (\varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa} F_{\rho\omega}^b F_{\gamma\kappa}^b) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Aquí, se debe tener en cuenta la propiedad de homogeneidad, por lo cual los campos cumplen  $\partial_i A^a_\mu = 0$ . Así, la ecuación para  $\mu = 0$  se reduce a

$$A_0^a \left( m^2 + \frac{2g^2\phi^2}{a^2} \right) = 0 \quad (6.2.5)$$

después de haber usado propiedades del símbolo de Levi-Civita. Ahora, debido a que  $m^2$  y  $2g^2\phi^2/a^2$  son cantidades definidas positivas, su suma nunca será igual a cero, por lo cual se concluye que

$$A_0^a = 0. \quad (6.2.6)$$

Es decir, no existe componente temporal para los campos, evidenciándose de esta manera que el gauge escogido en [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) es recuperado en este modelo haciendo uso de la homogeneidad en los campos vectoriales. En resumen, la configuración que será usada en este modelo es

$$A_0^a = 0, \quad A^a_i = \phi(t)\delta^a_i. \quad (6.2.7)$$

En consecuencia, la componente  $\mu = i$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange se escribe como

$$\left( 1 + \kappa \frac{g^4\phi^4}{a^4} \right) \frac{\ddot{\phi}}{a} + \left( 1 + \kappa \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \right) \frac{2g^2\phi^3}{a^3} + \left( 1 - 3\kappa \frac{g^2\phi^4}{a^4} \right) \frac{H\dot{\phi}}{a} + m^2 \frac{\phi}{a} = 0. \quad (6.2.8)$$

Por otra parte, el tensor momentum energía

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (6.2.9)$$

para el presente modelo es

$$T_{\mu\nu} = F^a_{\mu\beta} F^a_{\nu\alpha} g^{\beta\alpha} - \frac{\kappa}{192} \frac{g_{\mu\nu}}{(\sqrt{-g})^2} (\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} F^a_{\alpha\beta} F^a_{\lambda\sigma})^2 + m^2 A^a_\mu A^a_\nu + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (6.2.10)$$

en donde  $g$  es el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}$  es el símbolo de Levi-Civita y  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano reducido del modelo, el cual se obtiene al reemplazar los campos dados en 6.2.7 en el lagrangiano 6.0.1

$$\mathcal{L}_{red} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - \frac{g^2\phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2\phi^4\dot{\phi}^2}{a^6} - \frac{m^2\phi^2}{a^2} \right]. \quad (6.2.11)$$

De esta expresión se determinan todas las componentes del tensor momentum-energía

$$T_{00} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6} + \frac{m^2 \phi^2}{a^2} \right], \quad (6.2.12)$$

$$T_{0i} = 0, \quad (6.2.13)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \dot{\phi}^2 + \frac{g^2 \phi^4}{a^2} - 3\kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^4} - m^2 \phi^2 \right] \delta_{ij}, \quad (6.2.14)$$

de donde se concluye que el contenido del Universo se puede representar como un fluido perfecto. De este modo, el tensor momentum-energía se puede reescribir como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (6.2.15)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  es la presión isotrópica y  $U_\mu$  el vector velocidad del fluido. Haciendo uso de 6.2.12 y 6.2.14, se obtienen la expresión para la densidad de energía y la presión isotrópica en el presente caso

$$\rho = \frac{3}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6} + \frac{m^2 \phi^2}{a^2} \right], \quad (6.2.16)$$

$$P = \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} - 3\kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6} - \frac{m^2 \phi^2}{a^2} \right]. \quad (6.2.17)$$

Finalmente, con estas expresiones se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein (ecuaciones de Friedmann) para el modelo

$$H^2 = \frac{\rho}{3}, \quad H^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6} + \frac{m^2 \phi^2}{a^2} \right], \quad (6.2.18)$$

$$\dot{H} = -\frac{\rho + P}{2}, \quad \dot{H} = \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \frac{1}{2} \frac{m^2 \phi^2}{a^2} \right]. \quad (6.2.19)$$

Con las ecuaciones 6.2.8, 6.2.18 y 6.2.19 se puede conocer la evolución de  $\phi$  en el tiempo y determinar si se obtienen las propiedades deseadas de inflación del tipo rodadura lenta con una producción de 62 e-folds de expansión aproximadamente con el fin de resolver los problemas de la cosmología estándar. Sin embargo, antes de encontrar la solución numérica para estas ecuaciones, se pueden hacer predicciones y análisis interesantes acerca del comportamiento dinámico del modelo. Al igual que en el caso de Gauge-flation original, se espera que haya una dinámica conjunta entre cada una

de las componentes del lagrangiano de tal manera que se obtengan las características inflacionarias apropiadas. Para observar esto, se separa la densidad de energía en tres partes: la primera que proviene del término de Yang-Mills, la segunda que proviene del llamado término  $\kappa$  y la tercera que viene del término de masa

$$\rho = \rho_{YM} + \rho_{\kappa} + \rho_{mass}, \quad (6.2.20)$$

en donde cada componente viene dada por las siguientes relaciones

$$\rho_{YM} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} \right], \quad (6.2.21)$$

$$\rho_{\kappa} = \frac{3}{2} \kappa \frac{g^2 \phi^4 \dot{\phi}^2}{a^6}, \quad (6.2.22)$$

$$\rho_{mass} = \frac{3}{2} \frac{m^2 \phi^2}{a^2}. \quad (6.2.23)$$

Con estas definiciones, la expresión para la presión isótropa toma la forma

$$P = \frac{1}{3} \rho_{YM} - \rho_{\kappa} - \frac{1}{3} \rho_{mass}. \quad (6.2.24)$$

Ahora, se sabe que la condición necesaria y suficiente para obtener una era de expansión acelerada está dada por la desigualdad

$$\rho + 3P < 0 \quad (6.2.25)$$

lo cual, a la luz de las expresiones 6.2.20 y 6.2.24 se convierte en

$$\rho_{\kappa} > \rho_{YM} \quad (6.2.26)$$

De manera inesperada, surge la misma condición para el modelo Gauge-flation usual, la cual establece que la densidad de energía asociada al término  $\kappa$  debe dominar sobre la componente  $\rho_{YM}$  al inicio de la evolución para poder tener expansión acelerada; debido a que no se quiere que la expansión sea eterna, es de esperar que la desigualdad cambie de dirección y se acabe la era inflacionaria produciendo el número de e-folds adecuados para resolver los problemas de la cosmología estándar. El hecho de que no aparezca  $\rho_{mass}$  en la condición 6.2.26 indica que la presencia del nuevo término de masa no afecta la existencia de expansión acelerada. Se podría pensar entonces que  $\rho_{mass}$  puede ser tan grande o pequeña comparada con  $\rho_{\kappa}$  y aún así no afectará la dinámica inflacionaria. Sin embargo, la ec. 6.2.26 sólo provee la condición para que se produzca inflación pero no indica de qué manera ocurre ni cuánto tiempo perdura. Como se verá en la siguiente sección,  $\rho_{mass}$  se manifiesta en la condición requerida para que la expansión sea tal que se tenga el número de e-folds adecuado al final de inflación. Por lo tanto, la inclusión del término de masa en el modelo sí tendrá un impacto en la dinámica inflacionaria del modelo original.

### 6.3. Inflación del tipo rodadura lenta

En esta sección se trata un tema de relevancia en el proyecto: inflación del tipo rodadura-lenta. Este tipo de inflación es importante por dos razones: primero, permite obtener un tiempo apreciable de expansión acelerada de tal manera que se puedan resolver los problemas de la cosmología estándar [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#) y segundo, estaría de acuerdo con las observaciones sobre la invariancia de escala en la perturbación primordial en la curvatura [Ade et al. \(2013c\)](#). Para iniciar, se escriben los parámetros que caracterizan la inflación de rodadura lenta

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta \equiv -\frac{\ddot{H}}{2\dot{H}H}, \quad \delta \equiv -\frac{\dot{\psi}}{\psi H}, \quad (6.3.1)$$

los cuales dan información acerca de la variación del parámetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$  y el campo escalar  $\psi = \phi/a$ . De estas definiciones se puede encontrar además la siguiente relación

$$\eta = \varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{2H\varepsilon}. \quad (6.3.2)$$

Antes de encontrar las expresiones para  $\varepsilon$ ,  $\eta$  y  $\delta$  para el presente modelo y sus implicaciones en el monto de inflación, se encontrarán las condiciones que deben cumplir las densidades de energía para tener inflación de tipo rodadura lenta. Inflación del tipo rodadura lenta es obtenida cuando los parámetros  $\varepsilon, \eta, \delta \ll 1$  [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#). Así, usando la definición de  $\varepsilon$  dada en 6.3.1 y usando las ecuaciones de Friedmann 6.2.18 y 6.2.19 se llega a

$$\varepsilon = \frac{2\rho_{YM} + \rho_{mass}}{\rho_\kappa + \rho_{YM} + \rho_\kappa} \ll 1, \quad (6.3.3)$$

de donde se concluye que  $\rho_\kappa$  debe dominar sobre las otras componentes de la densidad de energía para poder tener la dinámica deseada, en términos matemáticos se debe tener  $\rho_\kappa \gg \rho_{YM} + \rho_{mass}$  o  $\rho_\kappa \gg \rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa \gg \rho_{mass}$ . Es decir, además de requerirse que  $\rho_\kappa > \rho_{YM}$  para que exista expansión acelerada, se debe cumplir que el valor de  $\rho_\kappa$  sea dominante respecto a  $\rho_{YM}$ , pero también respecto a  $\rho_{mass}$ ; y es aquí en donde se manifiesta el término de masa. Si bien  $\rho_{mass}$  no es relevante en la generación de inflación (ec. 6.2.26), es de vital importancia en el momento de evaluar las características de inflación requeridas para resolver adecuadamente los problemas que la justifican. Como se verá en la solución numérica, valores de  $m$  que lleven a  $\rho_{mass} \gg \rho_\kappa$  no permitirán obtener un tiempo apreciable de expansión y por lo tanto, el monto de inflación  $N_e$  estará por debajo de la cota deseada. Ahora, sabiendo cuáles son las condiciones dinámicas para que  $\varepsilon \ll 1$ , se debe encontrar las condiciones para las cuales

$\eta, \delta \ll 1$ . A través de la ecuación 6.3.2, se puede ver que  $\eta \sim \varepsilon$ , lo cual implica que  $\eta$  es también mucho menor que uno siempre y cuando  $\dot{\varepsilon} \sim H\varepsilon^2$ . En cuanto al parámetro  $\delta$ , se deben primero obtener algunas relaciones importantes entre todos los parámetros. Introduciendo las ecuaciones 6.2.18 y 6.2.19 en la definición del parámetro  $\varepsilon$  se llega a la ecuación

$$\varepsilon = \frac{(2/3\rho_{YM} + 1/3\rho_{mass})}{H^2 m_p^2} = \frac{1}{H^2 m_p^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + \frac{g^2 \phi^4}{a^4} + \frac{m^2 \phi^2}{2a^2} \right], \quad (6.3.4)$$

la cual se convierte en

$$\varepsilon = \frac{\psi^2}{m_p^2} \left( (1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2 \right), \quad (6.3.5)$$

sabiendo que  $\frac{\dot{\phi}}{a} = \psi H(1 - \delta)$  y definiendo los parámetros

$$\gamma \equiv \frac{g^2 \psi^2}{H^2}, \quad \omega \equiv \frac{m^2}{H^2}. \quad (6.3.6)$$

La ecuación 6.3.5 es útil pues permite despejar  $m_p^2$  en términos de los parámetros del modelo y  $\varepsilon$

$$m_p^2 = \frac{\psi^2}{\varepsilon} \left( (1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2 \right). \quad (6.3.7)$$

Paralelamente, se puede encontrar la expresión

$$\varepsilon = 2 - \frac{\kappa g^2 \psi^6 (1 - \delta)^2}{m_p^2} - \frac{m^2 \psi^2}{2H^2 m_p^2}, \quad (6.3.8)$$

con la cual se puede encontrar  $\eta$  haciendo uso de 6.3.2 y 6.3.7

$$\eta = \varepsilon - \left[ \frac{3\delta}{\varepsilon} + \frac{\dot{\delta}}{(1 - \delta)H\varepsilon} \right] \left[ 2 - \varepsilon - \frac{\varepsilon\omega/2}{((1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2)} \right] + \frac{(\varepsilon - \delta)\omega/2}{((1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2)}. \quad (6.3.9)$$

Así, sabiendo que  $\eta \sim \varepsilon$  y que  $\frac{\omega/2}{((1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2)} < 1$ , se encuentra a partir de la ec. 6.3.9 que para tener una inflación del tipo rodadura lenta adecuada  $\delta \sim \varepsilon^2$ ; y de aquí se obtiene además que  $\dot{\delta}/H\delta \sim \varepsilon$ .

Sabiendo cuáles son las condiciones dinámicas para tener inflación del tipo rodadura lenta, se determinarán las expresiones explícitas para cada parámetro en función de las variables del modelo en el regimen de rodadura lenta. Primero, de la ec. 6.3.5 se tiene

$$\varepsilon \simeq \frac{\psi^2}{m_p^2} (1 + \gamma + \omega). \quad (6.3.10)$$

Usando este resultado y la ec. 6.3.2 se encuentra después de un poco de álgebra que

$$\eta \simeq \frac{\psi^2}{m_p^2}. \quad (6.3.11)$$

Por último se encuentra la expresión para  $\delta$ ; teniendo en cuenta que  $\frac{\omega/2}{((1-\delta)^2 + \gamma + \omega/2)} < 1$ , la ecuación 6.3.9 se escribe como

$$\eta \simeq \varepsilon - 2 \left[ \frac{3\delta}{\varepsilon} + \frac{\dot{\delta}}{H\varepsilon} \right] + \frac{\omega/2}{(1 + \gamma + \omega/2)} \varepsilon, \quad (6.3.12)$$

de donde se obtiene  $\delta$  usando los resultados encontrados para  $\varepsilon$  y  $\eta$

$$\delta \simeq \frac{(\gamma + \omega)}{6(1 + \gamma + \omega/2)} \varepsilon^2. \quad (6.3.13)$$

Una de las motivaciones para el uso de las condiciones de rodadura lenta es la cantidad de e-folds producida al final de inflación, ya que este período de rodadura lenta prolonga el tiempo de expansión de tal manera que se obtenga un  $N_e$  adecuado. Por lo tanto, se deducirá la expresión para el número de e-folds que produce el modelo en términos de cantidades importantes como  $\varepsilon, \gamma$  y  $\omega$ , la cual será corroborada por la solución numérica de las ecuaciones. Para calcular  $N_e$ , se debe tener en cuenta que  $\delta \equiv -\dot{\psi}/H\psi$  y  $\delta \sim \varepsilon^2$ , lo cual permite establecer que  $\gamma H^2$  y  $\omega H^2$  permanecen prácticamente constantes en el régimen de rodadura lenta, y de esta manera se obtiene que

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \simeq \frac{\gamma + 1}{\gamma_i + 1}, \quad (6.3.14)$$

en donde el subíndice  $i$  indica el inicio de inflación. Teniendo en cuenta que  $\varepsilon = 1$  al final de inflación, se tiene la siguiente importante relación

$$\gamma + \omega/2 = \frac{\gamma_i + \omega_i/2}{\varepsilon_i}, \quad (6.3.15)$$

la cual será útil para encontrar el resultado final de  $N_e$ . Ahora, se recuerda la definición del número de e-folds producido entre un tiempo  $t_i$  y  $t_f$

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (6.3.16)$$

la cual puede ser escrita como una integral en  $H$  en lugar del tiempo usando el cambio de variable  $dt = dH/\dot{H}$  y la definición del parámetro  $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$

$$N_e = - \int_{H_i}^{H_f} \frac{dH}{H\varepsilon}. \quad (6.3.17)$$

Para poder resolver la integral, se expresa la integral como función de una nueva variable  $\theta = g^2\psi^2/H^2 + m^2/2H^2$ , de donde se obtiene el cambio de variable  $dH = -\frac{H}{2(\gamma+\omega/2)}d\theta = -\frac{H}{2\theta}d\theta$  llevando la integral anterior a la forma

$$N_e \simeq -\frac{1}{2\psi^2} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{-1/\theta^2}{(1+\theta)/\theta} d\theta. \quad (6.3.18)$$

Finalmente, se efectúa otro cambio de variable ( $U = 1 + 1/\theta$ ) para poder resolver la integral, y se utilizan los resultados de 6.3.10 y 6.3.14 para llegar a la expresión

$$N_e \simeq \frac{1 + \gamma_i + \omega_i/2}{2\varepsilon_i} \text{Ln} \left[ \frac{1 + \gamma_i + \omega_i/2}{\gamma_i + \omega_i/2} \right]. \quad (6.3.19)$$

Esta expresión permite obtener el número de e-folds al final de inflación del tipo rodadura lenta, ya que durante este período se obtiene la mayor contribución para  $N_e$ . Su valor, como se ve en 6.3.19, no depende explícitamente de la evolución de  $\varepsilon, \gamma$  u  $\omega$  sino de sus valores al inicio de inflación; por lo tanto, sabiendo las condiciones iniciales que dan solución a las ecuaciones 6.2.18, 6.2.19 y 6.2.8, se puede conocer si el número que se produce está por encima de la cota establecida ( $N_e \gtrsim 62$ ). Es decir, la escogencia de las condiciones iniciales sobre  $\psi, \dot{\psi}$  y  $H$  está sujeta al resultado que se pueda encontrar a través del resultado 6.3.19, además de otras restricciones que surgen del estudio perturbativo del modelo. La validez de la ecuación 6.3.19 se verificará con la siguiente solución numérica y se analizará el papel del término de masa en la generación de un adecuado número de e-folds.

## 6.4. Solución numérica de las ecuaciones de evolución

En esta sección se dará solución numérica a las ecuaciones que determinan la evolución temporal del modelo, a saber, ecuaciones 6.2.18, 6.2.19 y 6.2.8. La idea de esta sección es revisar si la introducción del término de masa permite obtener inflación, es decir, si se satisface la condición 6.2.26 y si existe un régimen de rodadura lenta; además, se quiere verificar la veracidad de los resultados obtenidos en el régimen de rodadura lenta, en especial, se verificará la validez del resultado referente al número de e-folds 6.3.19. El modelo presenta tres parámetros libres ( $g, \kappa$  y  $m$ ) y dos grados de libertad dinámicos ( $\phi(t)$  y  $a(t)$ ), por lo tanto se requiere conocer las condiciones iniciales de  $\phi(t), a(t)$  y sus primeras derivadas. Debido a que el campo físico es  $\psi$  y no  $\phi$ , y sabiendo que la cantidad física medible es  $H$  en lugar de  $a$ , resultaría conveniente

escribir las ecuaciones 6.2.18, 6.2.19 y 6.2.8 en términos de  $\psi$  y  $H$ . Sin embargo, la forma resultante luce más compleja y difícil de manejar. Por lo tanto, para encontrar al final el comportamiento de las cantidades  $\psi$ ,  $\epsilon$ ,  $\rho$  y  $N$  se usarán las ecuaciones 6.2.18, 6.2.19 y 6.2.8 y luego se utilizarán las respectivas relaciones entre  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $a$  y  $H$  para llegar a los resultados deseados.

Analizando la forma de las ecuaciones de evolución, se encuentra que pueden lucir más manejables definiendo las cantidades  $x = \frac{\phi}{a}$  y  $y = \frac{\dot{\phi}}{a}$  debido a que se reduce el orden de las ecuaciones diferenciales y se encuentra de manera inmediata una expresión para  $H$  y  $\dot{H}$  en términos de  $x$  y  $y$  como se observa en las siguientes ecuaciones

$$\dot{H} = -y^2 - g^2x^4 - \frac{m^2x^2}{2}, \quad H^2 = \frac{1}{2}(y^2 + g^2x^4 + \kappa g^2y^2x^4 + m^2x^2), \quad (6.4.1)$$

$$\dot{x} = y - xH, \quad (6.4.2)$$

$$\dot{y} = -\frac{(1 + \kappa y^2)2g^2x^3 + 2(1 - \kappa g^2x^4)yH + m^2x}{(1 + \kappa g^2x^4)}. \quad (6.4.3)$$

Por lo tanto, el sistema que se debe resolver está compuesto por el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = y - x\sqrt{(y^2 + g^2x^4 + \kappa g^2y^2x^4 + m^2x^2)/2}, \quad (6.4.4)$$

$$\dot{y} = -\frac{(1 + \kappa y^2)2g^2x^3 + 2(1 - \kappa g^2x^4)y\sqrt{(y^2 + g^2x^4 + \kappa g^2y^2x^4 + m^2x^2)/2} + m^2x}{(1 + \kappa g^2x^4)}. \quad (6.4.5)$$

Este sistema será resuelto gracias al programa *Mathematica*; las condiciones iniciales para  $x$  y  $y$ , al igual que los parámetros, serán escogidos de tal manera que se pueda mostrar el éxito del modelo para generar las propiedades deseadas comentadas en las secciones anteriores, guardando semejanzas con estudios previos sobre Gauge-flation [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#); [Namba \*et al.\* \(2013\)](#); [Nieto & Rodríguez \(2014\)](#). Para el primer conjunto de parámetros (ver Fig. 6.1) se dibuja la evolución del campo  $\psi$  respecto al tiempo; en dicha gráfica se puede observar que el campo varía lentamente durante un tiempo inicial y después de un momento muestra un comportamiento oscilatorio. La variación de  $\psi$  es consecuente con el hecho de que  $\delta \ll 1$  y por lo tanto se dice que el campo experimenta un período de *rodadura lenta*; así se demuestra la existencia de una era inflacionaria del tipo rodadura lenta. Esta conclusión es soportada por el comportamiento del parámetro  $\epsilon$  ya que se observa que durante el tiempo en que  $\psi$  varía lentamente,  $\epsilon$  tiene un valor muy pequeño y además presenta un crecimiento lento; adicionalmente, se observa que la condición para tener inflación 6.2.26 se satisface ya que la gráfica  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$  muestra que  $\rho_\kappa > \rho_{YM}$  durante el tiempo en el que el campo

varía lentamente y se obtiene  $\rho_k < \rho_{YM}$  justo cuando el campo empieza a oscilar y ha terminado la expansión acelerada. A partir de estos resultados, es de esperar que el número de e-folds encontrados al final de inflación se encuentren dentro del rango requerido; en la figura de  $N$  en función de  $t$  se observa que  $N$  alcanza un valor alrededor de 60 y es claro que la mayor contribución se obtiene durante el régimen de rodadura lenta. Por lo tanto, se debe llegar al mismo resultado haciendo uso de la ecuación 6.3.19, la cual permite obtener el valor de  $N$  producido durante el régimen de rodadura lenta ( $\varepsilon \simeq 1$ ); así, con las condiciones iniciales y parámetros usados en este primer análisis se puede encontrar  $H_i, \gamma_i, \varepsilon_i$  y  $\omega_i$  para llegar finalmente a  $N_e \sim 58$  lo cual es coherente con el gráfico de  $N$  vs  $t$ . Para este primer conjunto de condiciones iniciales se usó un valor de  $m$  muy pequeño comparado con  $H_i$ , lo cual indica un  $\omega_i \ll 1$ , y por esto el comportamiento de  $\psi$  y  $H$  no se ve afectado drásticamente. Sin embargo, es posible tomar valores de  $m$  incluso mayores que  $H_i$  y seguir obteniendo las características interesantes del modelo original como se verá en el siguiente conjunto de condiciones iniciales.

Para el segundo conjunto de condiciones iniciales y parámetros libres, aún con un valor de  $m$  superior a  $H_i$  se obtiene un comportamiento similar al observado en el caso anterior (ver Fig. 6.2). Es decir, hay una región en la que el campo  $\psi$  varía lentamente y en la que se genera por ende un número de e-folds por encima de la cota requerida. La forma que se presenta en todas las figura es prácticamente la misma encontrada en la 6.1, por lo que se concluye que este conjunto de condiciones iniciales y parámetros es igualmente adecuado para representar la era inflacionaria. Al igual que en el caso anterior, se puede verificar la validez de la ecuación 6.3.19; usando las condiciones iniciales y parámetros se puede encontrar  $H_i, \gamma_i, \varepsilon_i$  y  $\omega_i$  para obtener finalmente un valor de 67 para el número de e-folds, lo cual es consecuente con la gráfica de  $N$  versus  $t$ . Una vez más se comprueba que el resultado dado en 6.3.19 es correcto y además útil.

El tercer conjunto de condiciones iniciales y parámetros libres corresponde a un caso particular en el que el valor de  $\delta$  es mayor que uno al inicio de la evolución,  $\delta \sim 2$  (ver Fig. 6.3). Es claro que no se inicia en el régimen de rodadura lenta, sin embargo, como se puede ver en la gráfica de  $\psi$  versus  $t$ , el campo cae abruptamente hasta un punto en el que empieza su comportamiento usual de pequeña variación encontrada en las gráficas anteriores. Es decir, a pesar de que las condiciones hagan partir al campo desde una configuración lejana a rodadura lenta, las ecuaciones de evolución hacen que el campo entre en este régimen después de pocos e-folds de expansión. Después de la caída observada del campo  $\psi$ , éste y las demás cantidades presentan un comportamiento similar al encontrado en las dos gráficas anteriores (Fig. 6.1 y 6.2). De esta manera, se comprueba que después de pocos e-folds de expansión se recupera  $\dot{\delta}/H\delta \ll 1$ , llegando

al resultado predicho en el estudio analítico del modelo durante el régimen de rodadura lenta. De acuerdo con esto, se concluye que  $\psi$  permanece prácticamente constante durante inflación y existe un régimen de rodadura lenta. Respecto al número de e-folds, es importante notar que el valor es bastante grande, aún iniciando con  $\delta_i \sim 2$ , de donde se infiere que  $N$  es prácticamente independiente del valor inicial de  $\delta$ . Por otra parte, el comportamiento típico post-inflacionario está siempre presente en la solución por lo que se concluye que el modelo es capaz de representar el comportamiento primordial del universo para diferentes conjuntos de condiciones iniciales.

Para terminar, se analizará más detenidamente el papel que tiene el término de masa en la dinámica inflacionaria del modelo. En el primer conjunto de condiciones iniciales se ajustó  $m \ll H_i$  y se obtuvieron las características deseadas con el número de e-folds adecuado; en el segundo conjunto de condiciones iniciales, se ajustó  $m > H_i$  e igualmente se obtuvo lo deseado con la aclaración de que  $\kappa$  en ese caso fue mayor. La idea es mirar qué pasa si se toma el primer conjunto de datos con un valor de  $m > H_i$ ; según el estudio analítico de la sección anterior, un aumento en  $\rho_{mass}$  no afecta la generación de una dinámica inflacionaria pero sí determina la duración del régimen de rodadura lenta. Este hecho se verifica en la Fig. 6.4 ya que, si bien el número de e-folds alcanzado está por debajo de la cota establecida, el comportamiento de  $\psi$  en rodadura lenta y subsecuente oscilación se sigue manteniendo al igual que el comportamiento de las demás cantidades esquematizadas. La manera en que el valor de  $m$  afecta la generación de un monto de expansión adecuado se observa en la Fig. 6.5; allí se ha graficado  $N_e$  de la ecuación 6.3.19 como función de  $\omega_i = \frac{m^2}{H_i^2}$  para los dos primeros conjuntos de condiciones iniciales y parámetros libres. En ambos casos se evidencia una disminución considerable de  $N_e$  sobre todo para la región  $m > H_i$ ; como se esperaba,  $\rho_{mass}$  es determinante en el tipo de inflación que se produce y por lo tanto afecta directamente uno de los productos más importantes del presente estudio: el número de e-folds de expansión.

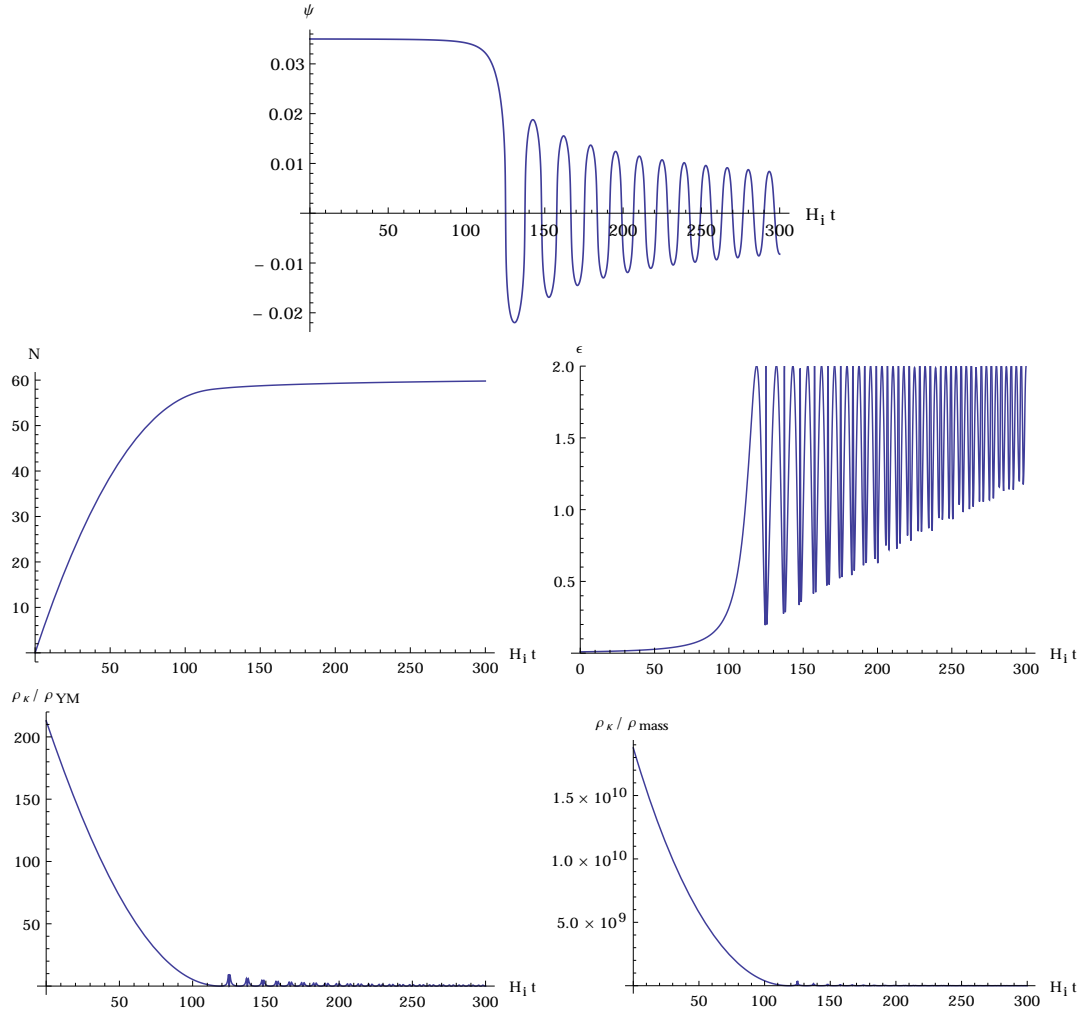


Figura 6.1: Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\varepsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,035$ ;  $\dot{\psi} = -3,27 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ ;  $m = 1 \times 10^{-8}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 6,59$ ,  $\varepsilon_i = 9,3 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i = 1 \times 10^{-4}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ .

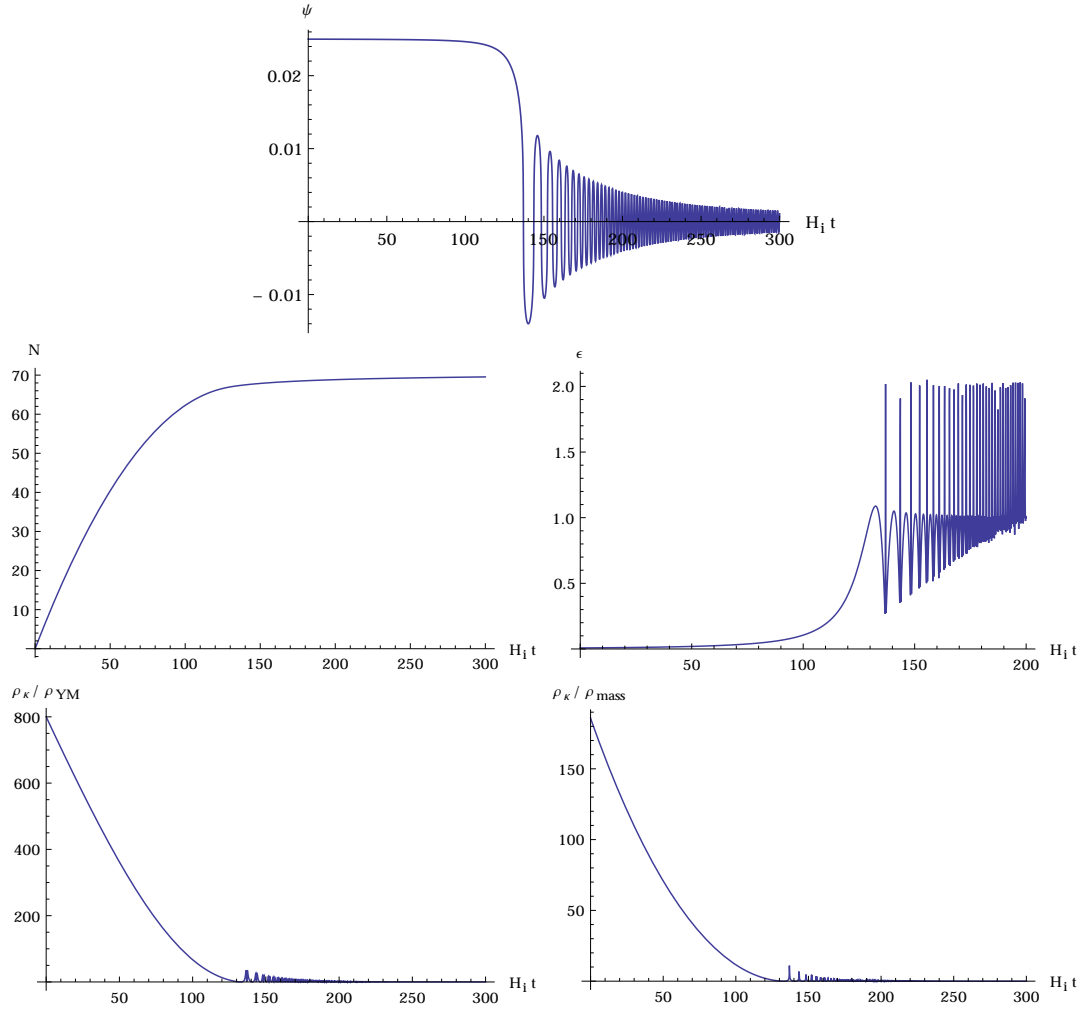


Figura 6.2: Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\epsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,025$ ;  $\dot{\psi} = 9,07 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,3 \times 10^{15}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ ;  $m = 1,5 \times 10^{-4}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,6 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 2,96$ ,  $\epsilon_i = 7,8 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i = -8 \times 10^{-4}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ .

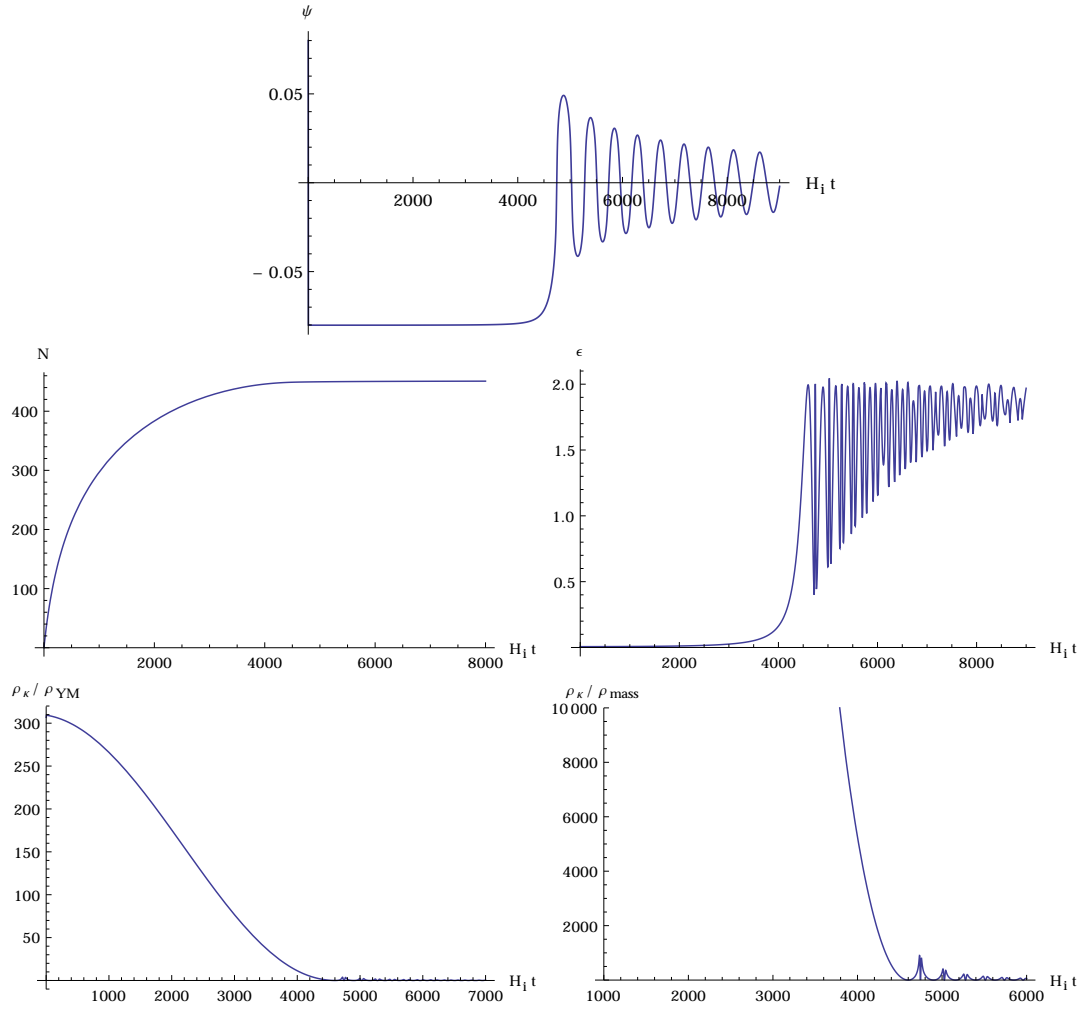


Figura 6.3: Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\epsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,08$ ;  $\dot{\psi} = -9 \times 10^{-5}$ ;  $\kappa = 4,7 \times 10^{13}$ ;  $g = 4 \times 10^{-4}$ ;  $m = 1,5 \times 10^{-6}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 6,2 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma_i = 2,6 \times 10^{-3}$ ,  $\epsilon_i = 6,4 \times 10^{-3}$  y  $\delta_i \sim 2$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ .

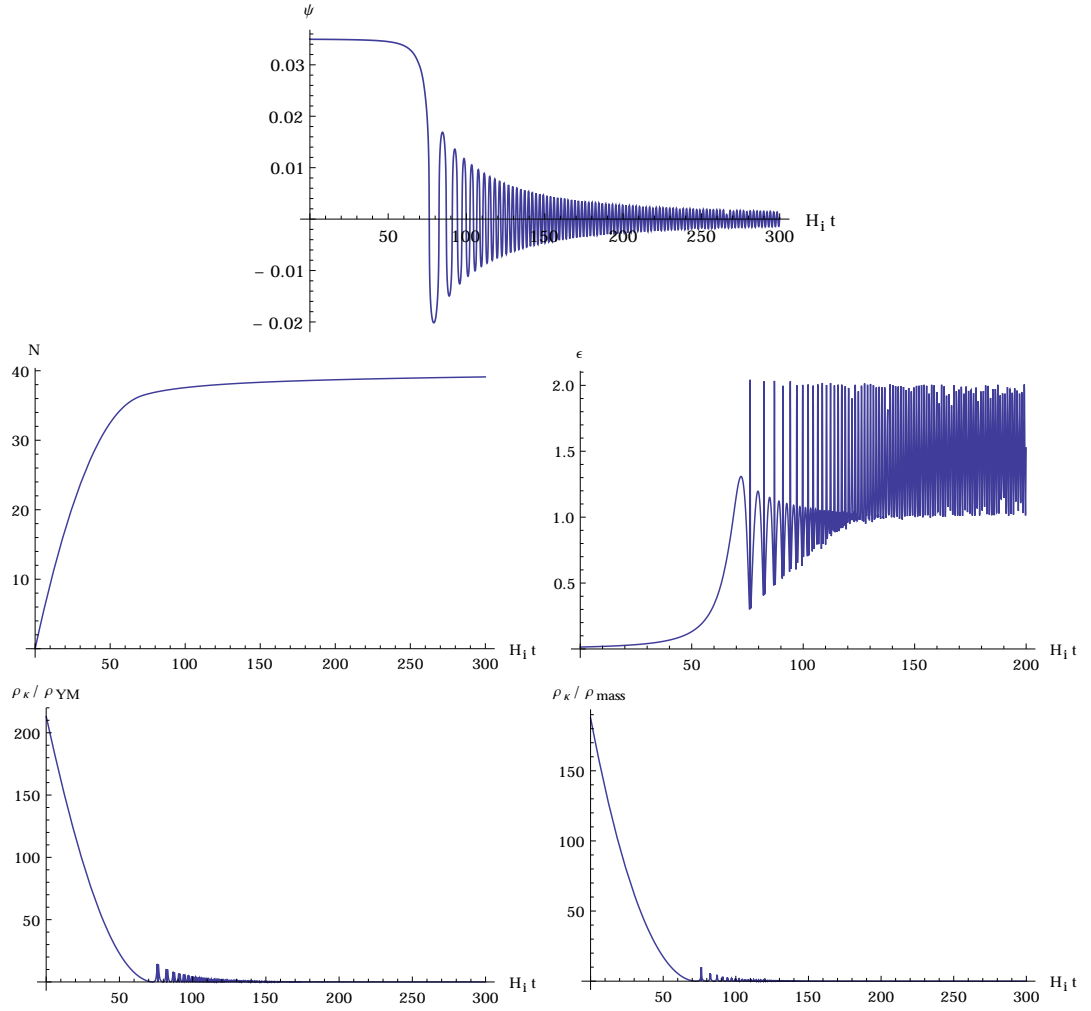


Figura 6.4: Evolución temporal de las variables  $\psi$ ,  $N$ ,  $\epsilon$ , y las razones  $\rho_\kappa/\rho_{YM}$ ,  $\rho_\kappa/\rho_{mass}$ , encontradas con las condiciones  $\psi_i = 0,035$ ;  $\dot{\psi} = -3,27 \times 10^{-9}$ ;  $\kappa = 1,733 \times 10^{14}$ ;  $g = 2,5 \times 10^{-3}$ . La trayectoria de rodadura lenta para  $\psi$  está caracterizada por  $H_i = 3,4 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 6,6$ ,  $\epsilon_i = 1,9 \times 10^{-2}$  y  $\delta_i = 2,7 \times 10^{-3}$ . Se debe notar que  $\kappa$ ,  $m$ ,  $H$  y  $\psi$  están dadas en unidades de  $M_{pl}$ .

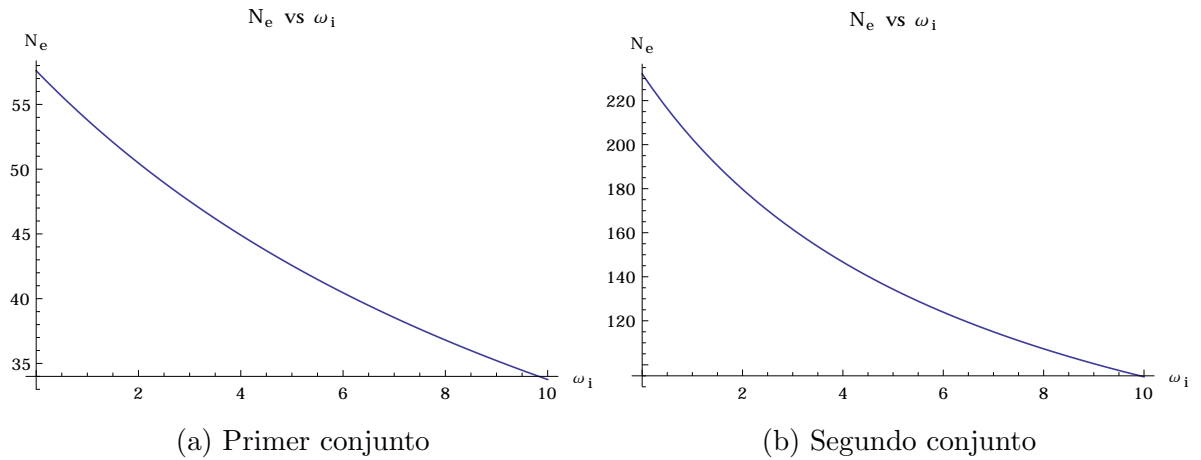


Figura 6.5: En estas gráficas se muestra el cambio en el número de e-folds  $N_e$ , dado por la ecuación 6.3.19, en función del parámetro  $\omega_i$  para los dos primeros conjuntos de condiciones iniciales ((a) y (b) respectivamente). En ambos casos se aprecia que  $N$  es una función decreciente respecto al valor inicial de  $\omega$ , mostrando así el impacto del término de masa en la generación de las propiedades requeridas durante inflación

Con los resultados mostrados en este capítulo se verifica que el modelo Gauge-flation masivo puede aún representar adecuadamente la evolución primordial del universo para diferentes valores de condiciones iniciales. El hecho de haber agregado un término de masa no impidió llegar a los resultados deseados, por el contrario, introdujo una dinámica más interesante y permitió extender los resultados del modelo original. Los resultados numéricos soportaron el estudio analítico durante el régimen de rodadura lenta y le dieron validez, lo cual es útil debido a que pueden ser usados para tener una idea de lo que ocurre durante la evolución de las variables involucradas. Igualmente, se pudo verificar la condición 6.2.26 necesaria y suficiente para tener inflación; y como resultado final, se evidenció que la ecuación 6.3.19 es eficaz para determinar si un conjunto de condiciones iniciales produce o no el número de e-folds apropiado para resolver los problemas de la cosmología estándar.

# 7

## Producción de partículas en Gauge-flation con masa

En este capítulo se desea estudiar el mecanismo responsable de la generación de una distribución asimétrica de estructuras en el universo para un modelo inflacionario en particular: Gauge-flation con masa. La generación de estas estructuras se basa en el comportamiento cuántico de la naturaleza, pues las fluctuaciones de los campos vectoriales respecto a su valor de fondo más la expansión acelerada producen inhomogeneidades en el espacio que, con ayuda de la gravedad en la época post-inflacionaria, empiezan a formar de manera no uniforme estructuras en el espacio [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Mukhanov & Winitzki \(2007\)](#); [Dimopoulos \(2009\)](#) .

Se quiere saber cómo evolucionan las perturbaciones de los campos, en el fondo previsto, de tal manera que se pueda comprender el impacto que tienen en la perturbación primordial en la curvatura, la cual está conectada con la perturbación en la densidad de energía y es esta la que finalmente lleva a la generación de estructuras. Un aspecto clave de este proceso es que dichas inhomogeneidades dejan una marca en la radiación cósmica de fondo puesto que la luz presentará diferentes corrimientos al rojo de acuerdo con el contenido densidad de materia/energía que deba atravesar en su camino [Sachs & Wolfe \(1967\)](#); así, para distintos ángulos de observación en el cielo (hoy en día) habrá diferentes valores de frecuencia en la luz proveniente de la última dispersión [Weinberg \(2008\)](#); [Lyth & Liddle \(2009\)](#). Por lo tanto, la dinámica que tengan las perturbaciones de los campos presentes durante inflación está correlacionada con las observaciones actuales de la RCF.

## 7.1. Perturbaciones en los campos

Las fluctuaciones cuánticas de los campos serán caracterizadas por la cantidad  $\delta A^a_\mu(\mathbf{x}, t)$ , la cual representa una perturbación en los campos respecto al fondo  $A^a_\mu(t)$ . Como primera aproximación, no se tendrán en cuenta las perturbaciones asociadas a la métrica ya que, como se verá más adelante, su efecto estará de manera relevante en el índice espectral y razón tensor-escalar más no en la amplitud espectral de la perturbación primordial en la curvatura, siendo ésta una de los objetivos del presente trabajo [Lyth & Liddle \(2009\)](#). Para empezar el estudio de la evolución de estas perturbaciones, se parte de las ecuaciones generales de Euler-Lagrange para los campos  $A^a_\mu$  de Gauge  $SU(2)$  (ec. 6.2.2) y se usa el lagrangiano definido en 6.0.1 para encontrar las ecuaciones evolución

$$D_\nu \left[ \left( F^{\mu\nu}_a - \frac{\kappa}{48} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa} F^a_{\lambda\sigma} F^b_{\rho\omega} F^b_{\gamma\kappa} \right) \sqrt{-g} \right] + m^2 \sqrt{-g} A^a_\nu g^{\mu\nu} = 0. \quad (7.1.1)$$

De aquí se obtiene la ecuación para la componente temporal ( $\mu = 0$ ) haciendo uso de la definición de  $D_\mu$  y  $F^a_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \partial_i \left[ -\frac{1}{a^2} (\partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 - g^a_{bc} A^a_0 A^c_i) - \frac{\kappa}{12a^6} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} (\partial_j A^a_k - \partial_k A^a_j - g^a_{xy} A^x_j A^y_k) \right. \\ \left. (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g^b_{ef} A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g^b_{hs} \partial_0 A^b_l A^h_m A^s_n + g^b_{hs} \partial_l A^b_0 A^h_m A^s_n) \right] \\ + \frac{g^a_{dc} A^d_i}{a^2} \left[ (\partial_0 A^c_i - \partial_i A^c_0 - g^c_{fg} A^f_0 A^g_i) - \frac{\kappa}{12a^6} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} (\partial_j A^c_k - \partial_k A^c_j - g^c_{xy} A^x_j A^y_k) \right. \\ \left. (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g^b_{ef} A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g^b_{hs} \partial_0 A^b_l A^h_m A^s_n + g^b_{hs} \partial_l A^b_0 A^h_m A^s_n) \right] \\ - m^2 A^a_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Debido al gran número de términos involucrados, resulta conveniente efectuar la perturbación del campo  $A^a_\mu(\mathbf{x}, t)$  respecto al fondo  $A^a_\mu(t)$  antes de continuar con el proceso de cálculo; de acuerdo con la configuración dada en 6.2.7, las componentes del campo  $A^a_\mu(\mathbf{x}, t)$  se escriben como

$$A^a_0(\mathbf{x}, t) = \delta A^a_0(\mathbf{x}, t), \quad A^a_i(\mathbf{x}, t) = \phi(t) \delta^a_i + \delta A^a_i(\mathbf{x}, t). \quad (7.1.3)$$

en donde  $\delta A^a_0$  representa la componente temporal de las perturbaciones en los campos, mientras que  $\delta A^a_i$  representa las componentes espaciales de dichas perturbaciones. De esta manera, manteniendo los términos a primer orden (puesto que se espera que

$\delta A^a_{\mu} < A^a_{\mu}$ ) y aprovechando las propiedades del símbolo de Levi-Civita se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
& \partial_i \delta \dot{A}^a_i - \nabla^2 \delta A^a_0 - 2g\phi\epsilon^a_{bi}\partial_i\delta A^b_0 - g\phi\epsilon^a_{ic}\delta\dot{A}^c_i + g\dot{\phi}\epsilon^a_{ic}\delta A^c_i \\
& + 2g^2\phi^2\delta A^a_0 + m^2a^2\delta A^a_0 - \frac{\kappa}{3a^4}g\phi^2\dot{\phi}\epsilon^{lmn}\partial_a\partial_m\delta A^l_n \\
& - \frac{\kappa}{3a^4}g^2\phi^4\partial_a\partial_b\delta A^b_0 + \frac{2\kappa}{3a^4}g^2\phi^3\dot{\phi}\partial_a\delta A^b_b + \frac{\kappa}{3a^4}g^2\phi^4\partial_a\delta\dot{A}^b_b = 0. \tag{7.1.4}
\end{aligned}$$

la cual fue contrastada con cálculos simbólicos hechos con el programa *Cadabra*, como se hizo con los resultados que se mostrarán de aquí en adelante. De manera similar se procede para encontrar la componente  $\mu = i$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo mostradas en 7.1.1; con un poco de álgebra se tiene la forma

$$\begin{aligned}
& m^2A^a_i - \frac{\kappa}{12a^4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn}(3H - \partial_0) [(\partial_j A^a_k - \partial_k A^a_j - g\epsilon^a_{dc}A^d_j A^c_k) \\
& (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g\epsilon^b_{ef}A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g\epsilon^b_{ps}\partial_0 A^b_l A^p_m A^s_n + g\epsilon^b_{ps}\partial_l A^b_0 A^p_m A^s_n)] \\
& + \partial_j \left[ \frac{1}{a^2}(\partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i - g\epsilon^a_{bc}A^b_i A^c_j) - \frac{\kappa}{6a^4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn}(\partial_0 A^a_k - \partial_k A^a_0 - g\epsilon^a_{dc}A^d_0 A^c_k) \right. \\
& (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g\epsilon^b_{ef}A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g\epsilon^b_{ps}\partial_0 A^b_l A^p_m A^s_n + g\epsilon^b_{ps}\partial_l A^b_0 A^p_m A^s_n) \\
& \left. - g\epsilon^a_{dc}A^d_0 \left[ (\partial_0 A^c_i - \partial_i A^c_0 - g\epsilon^c_{ef}A^e_0 A^f_i) + \frac{\kappa}{12a^4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn}(\partial_j A^c_k - \partial_k A^c_j - g\epsilon^c_{uv}A^u_j A^v_k) \right] \right. \\
& (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g\epsilon^b_{ef}A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g\epsilon^b_{ps}\partial_0 A^b_l A^p_m A^s_n + g\epsilon^b_{ps}\partial_l A^b_0 A^p_m A^s_n) \\
& \left. - g\epsilon^a_{dc}A^d_j \left[ \frac{1}{a^2}(\partial_i A^c_i - \partial_j A^c_i - g\epsilon^c_{ef}A^e_i A^f_j) - \frac{\kappa}{6a^4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn}(\partial_0 A^c_k - \partial_k A^c_0 - g\epsilon^c_{uv}A^u_0 A^v_k) \right] \right. \\
& (2\partial_0 A^b_l \partial_m A^b_n - 2\partial_l A^b_0 \partial_m A^b_n - 2g\epsilon^b_{ef}A^e_0 A^f_l \partial_m A^b_n - g\epsilon^b_{ps}\partial_0 A^b_l A^p_m A^s_n + g\epsilon^b_{ps}\partial_l A^b_0 A^p_m A^s_n) \\
& \left. H(\partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 - g\epsilon^a_{bc}A^b_0 A^c_i) + \partial_0(\partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 - g\epsilon^a_{bc}A^b_0 A^c_i) = 0. \tag{7.1.5} \right.
\end{aligned}$$

Como se hizo en el caso de  $\mu = 0$ , se usa la descomposición dada en 7.1.3 y se mantienen los términos de primer orden en  $\delta A^a_\mu$  para llegar a

$$\begin{aligned}
& (H\delta\dot{A}^a_i - H\partial_i\delta A^a_0 + \delta\ddot{A}^a_i - \partial_i\delta\dot{A}^a_0 + m^2 A^a_i) - (Hg\phi + 2g\dot{\phi})\epsilon^a_{bi}\delta A^b_0 \\
& \frac{1}{a^2}(\partial_{ij}\delta A^a_j - \nabla^2\delta A^a_i - 2g\phi\epsilon^a_{bj}\partial_j\delta A^b_i + g\phi\epsilon^a_{bi}\partial_j\delta A^b_j + g\phi\epsilon^a_{bj}\partial_i\delta A^b_j + g^2\phi^2\delta A^a_i) \\
& - g\phi\epsilon^a_{bi}\delta\dot{A}^b_0 + \frac{g^2\phi^2}{a^2}\left[2 - \frac{\kappa}{3a^2}(15H\dot{\phi}\phi - 8\dot{\phi}^2 - 5\phi\ddot{\phi})\right]\delta A^b_b\delta_{ai} \\
& + \frac{\kappa}{a^4}g\phi(3H\phi\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi})\epsilon^{ijk}\partial_j\delta A^a_k - \frac{g^2\phi^2}{a^2}\left[1 - \frac{\kappa}{a^2}(3H\phi\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi})\right]A^i_a \\
& + \frac{\kappa g\phi^2}{a^4}(H\dot{\phi} - \ddot{\phi}/3)\delta_{ai}\epsilon^{lmn}\partial_m\delta A^l_n + \frac{\kappa g^2\phi^3}{a^4}(H\phi - 2\dot{\phi}/3)\partial_b\delta A^b_b\delta_{ai} \\
& - \frac{\kappa}{a^4}g^2\phi^3(H\phi - 4\dot{\phi}/3)\delta\dot{A}^b_b\delta_{ai} - \frac{\kappa}{3a^4}g\phi^2\dot{\phi}\epsilon^{lmn}\partial_m\delta\dot{A}^l_n\delta_{ai} \\
& - \frac{\kappa}{3a^4}g^2\phi^4\partial_b\delta\dot{A}^b_0\delta_{ai} + \frac{\kappa}{3a^4}g^2\phi^4\delta\ddot{A}^b_b\delta_{ai} \\
& - \frac{\kappa}{3a^4}\dot{\phi}\epsilon^{ija}(\dot{\phi}\epsilon^{lmn}\partial_{jm}\delta A^l_n + g\phi^2\partial_{jb}\delta A^b_0 - 2g\phi\dot{\phi}\partial_j\delta A^b_b - g\phi^2\partial_j\delta\dot{A}^b_b) = 0. \quad (7.1.6)
\end{aligned}$$

En la ecuación para la componente cero de 7.1.1 no existe derivada temporal de  $\delta A^a_0$  lo que indica que es una perturbación no dinámica, es decir, no representa un grado de libertad independiente (esto se debe al hecho de que  $F^a_{00} = 0$  y por lo tanto no habrá derivadas temporales de  $A^a_0(\mathbf{x}, t)$  en el lagrangiano del modelo). Así, la expresión asociada a  $\mu = 0$  será una ecuación de ligadura que será usada en la ecuación 7.1.6 para eliminar la presencia de  $A^a_0$ . Sin embargo, se observa la presencia de  $\delta\dot{A}^a_0$  en la ecuación 7.1.6; este hecho se debe a que no se ha hecho la escogencia del gauge proveniente de la simetría del modelo. Si bien hay rompimiento de la invariancia de gauge a través del término de masa, siempre es posible obtener una ecuación auxiliar semejante a la escogencia de gauge. Por ejemplo, para una teoría  $U(1)$  con término masivo en un espaciotiempo de Minkowski se tiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (7.1.7)$$

Haciendo la contracción de la ecuación anterior con  $\partial_\nu$  se obtiene por simetría del tensor  $F^{\mu\nu}$  la ecuación

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \quad (7.1.8)$$

la cual es exactamente igual al gauge de Lorenz; por lo tanto, es importante notar que se recupera el gauge de Lorenz aún cuando hay rompimiento de la simetría creada por el término de masa. La extensión de este resultado al caso de estudio es directo aunque con algunas variaciones debido a que se trabaja en un espaciotiempo de FLRW y en una teoría  $SU(2)$ . De acuerdo con la estructura de la ecuación general de evolución 7.1.1,

es claro que se obtiene un resultado parecido al ejemplo de  $U(1)$  en espacio tiempo de Minkowski cambiando la derivada usual  $\partial_\mu$  por la derivada convariante  $D_\mu$  de una teoría  $SU(2)$ . Por lo tanto, se puede obtener una ecuación auxiliar haciendo la contracción de 7.1.1 con  $D_\mu$  como se muestra a continuación:

$$D_\mu \left[ D_\nu \left[ \left( F_a^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{48} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon^{\rho\omega\gamma\kappa} F_{\lambda\sigma}^a F_{\rho\omega}^b F_{\gamma\kappa}^b \right) \sqrt{-g} \right] \right] + m^2 D_\mu \left[ \sqrt{-g} A_\nu^a g^{\mu\nu} \right] = 0. \quad (7.1.9)$$

Usando las propiedades de simetría de  $F_a^{\mu\nu}$  y  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\gamma}$ , se obtiene una ecuación auxiliar sencilla pero útil

$$D_\mu \left[ \sqrt{-g} A_\nu^a g^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (7.1.10)$$

la cual se reduce a

$$\dot{A}_0^a = -3HA_0^a + \frac{1}{a^2} \partial_i A_i^a + g \epsilon_{bc}^a A_0^b A_0^c - \frac{g}{a^a} \epsilon_{bc}^a A_i^b A_i^c. \quad (7.1.11)$$

Ahora, expandiendo el campo  $A_\mu^a$  respecto al fondo, siguiendo la descomposición mostrada en 7.1.3, se encuentra

$$\delta \dot{A}_0^a = \frac{1}{a^2} \partial_j \delta A_j^a - 3H \delta A_0^a. \quad (7.1.12)$$

Esta ecuación auxiliar se introduce en 7.1.6 y se llega a

$$\begin{aligned} & (H \delta \dot{A}_i^a + 2H \partial_i \delta A_0^a + \delta \ddot{A}_i^a + m^2 A_i^a) + 2g(H\phi - \dot{\phi}) \epsilon_{bi}^a \delta A_0^b \\ & \frac{1}{a^2} (g^2 \phi^2 \delta A_i^a - \nabla^2 \delta A_i^a - 2g\phi \epsilon_{bj}^a \partial_j \delta A_i^b + g\phi \epsilon_{bj}^a \partial_i \delta A_j^b) \\ & + \frac{g^2 \phi^2}{a^2} \left[ 2 - \frac{\kappa}{3a^2} (15H\dot{\phi}\phi - 8\dot{\phi}^2 - 5\phi\ddot{\phi}) \right] \delta A_b^b \delta_{ai} + \frac{\kappa}{a^4} g\phi (3H\phi\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi}) \epsilon^{ijk} \partial_j \delta A_k^a \\ & - \frac{g^2 \phi^2}{a^2} \left[ 1 - \frac{\kappa}{a^2} (3H\phi\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi}) \right] A_i^a + \frac{\kappa g \phi^2}{a^4} (H\dot{\phi} - \ddot{\phi}/3) \delta_{ai} \epsilon^{lmn} \partial_m \delta A_n^l \\ & + 2 \frac{\kappa g^2 \phi^3}{a^4} (H\phi - \dot{\phi}/3) \partial_b \delta A_b^b \delta_{ai} - \frac{\kappa}{a^4} g^2 \phi^3 (H\phi - 4\dot{\phi}/3) \delta \dot{A}_b^b \delta_{ai} \\ & - \frac{\kappa}{3a^4} g \phi^2 \dot{\phi} \epsilon^{lmn} \partial_m \delta A_n^l \delta_{ai} - \frac{\kappa}{3a^6} g^2 \phi^4 \partial_b \partial_j \delta A_j^b \delta_{ai} + \frac{\kappa}{3a^4} g^2 \phi^4 \delta \ddot{A}_b^b \delta_{ai} \\ & - \frac{\kappa}{3a^4} \dot{\phi} \epsilon^{ija} (\dot{\phi} \epsilon^{lmn} \partial_{jm} \delta A_n^l + g \phi^2 \partial_{jb} \delta A_0^b - 2g\phi\dot{\phi} \partial_j \delta A_b^b - g\phi^2 \partial_j \delta \dot{A}_b^b) = 0. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Debido a que se conoce la evolución de  $\psi$  en el tiempo, se utilizan los campos físicos  $\psi$  y  $\delta B_i^a$  definidos en la tetraeda ortogonal definida en el capítulo 6; dichos campos están relacionados con  $\phi$  y  $\delta A_i^a$  de la siguiente manera:  $\phi = a\psi$  y  $\delta A_i^a = a\delta B_i^a$ . Con esto, se obtienen las siguientes relaciones útiles

$$\frac{\dot{\phi}}{a} = H\psi + \dot{\psi}, \quad \frac{\delta \dot{A}_i^a}{a} = H\delta B_i^a + \delta \dot{B}_i^a, \quad (7.1.14)$$

$$\frac{\ddot{\phi}}{a} = (\dot{H} + H^2)\psi + 2H\dot{\psi} + \ddot{\psi}, \quad \frac{\delta\ddot{A}^a_i}{a} = (\dot{H} + H^2)\delta B^a_i + 2H\delta\dot{B}^a_i + \delta\ddot{B}^a_i. \quad (7.1.15)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de evolución en términos de las variables  $\psi$  y  $\delta B^a_i$ , se usan los parámetros de rodadura lenta definidos en 6.3.1 cuya evolución es conocida en el fondo. Con esto, se obtienen las siguientes ecuaciones para  $\mu = 0$  y  $\mu = i$  respectivamente

$$\begin{aligned} & \left[ m^2 + 2g^2\psi^2 - \frac{\nabla^2}{a^2} \right] \delta B^a_0 - \frac{2g\psi}{a} \epsilon^a_{bi} \partial_i \delta B^b_0 + \frac{H}{a} \partial_i \delta B^a_i + \frac{1}{a} \partial_i \delta B^a_i \\ & + g\psi \epsilon^a_{ci} \delta \dot{B}^c_i + gH\psi \delta \epsilon^a_{ci} \delta B^c_i - \frac{\kappa}{3a^2} g\psi^3 H(1-\delta) \epsilon^{lmn} \partial_a \partial_m \delta B^l_n \\ & - \frac{\kappa}{3a^2} g^2 \psi^4 \partial_a \partial_b \delta B^b_0 + \frac{\kappa}{a} g^2 \psi^4 H(1-2\delta/3) \partial_a \delta B^b_b + \frac{\kappa}{3a} g^2 \psi^4 \partial_a \delta \dot{B}^b_b = 0, \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

$$\begin{aligned} & \left[ m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2-\varepsilon) - \frac{\nabla^2}{a^2} \right] \delta B^a_i + 3H\delta\dot{B}^a_i + \delta\ddot{B}^a_i + \frac{2H}{a} \partial_i \delta B^a_0 \\ & + 2gH\psi \delta \epsilon^a_{bi} \delta B^b_0 - \frac{2g\psi}{a} \epsilon^a_{bj} \partial_j \delta B^b_i + \frac{g\psi}{a} \epsilon^a_{bj} \partial_i \delta B^b_j - \frac{\kappa}{3a^2} g^2 \psi^4 \partial_j \partial_b \delta B^b_j \delta_{ai} \\ & + \frac{\kappa}{3a} gH^2 \psi^3 (1-\varepsilon-\delta^2-\varepsilon\delta+\dot{\delta}/H) \epsilon^{lmn} \partial_m \delta B^l_n \delta_{ai} - \frac{\kappa}{3a} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{lmn} \partial_m \delta \dot{B}^l_n \delta_{ai} \\ & + g^2 \psi^2 [2 + \kappa \psi^2 H^2 (-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\varepsilon + 5\delta\varepsilon/3 - 5\dot{\delta}/3H)] \delta B^b_b \delta_{ai} + \kappa g^2 H \psi^4 (1-4\delta/3) \delta \dot{B}^b_b \delta_{ai} \\ & - \frac{\kappa}{a} g\psi^3 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \varepsilon + \delta\varepsilon - \dot{\delta}/H) \epsilon^{ijk} \partial_j \delta B^a_k + \frac{\kappa}{3} g^2 \psi^4 \delta \ddot{B}^b_b \delta_{ai} \\ & - g^2 \psi^2 [1 + \kappa \psi^2 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \varepsilon + \delta\varepsilon - \dot{\delta}/H)] \delta B^i_a + \frac{2\kappa}{3a} g^2 H \psi^4 (2+\delta) \partial_b \delta B^b_0 \delta_{ai} \\ & - \frac{\kappa}{3a^2} H^2 \psi^2 (1-\delta)^2 \epsilon^{aij} \epsilon^{lmn} \partial_j \partial_m \delta B^l_n - \frac{\kappa}{3a^2} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{aij} \partial_j \partial_b \delta B^b_0 \\ & + \frac{\kappa}{a} gH^2 \psi^3 (1-5\delta/3 + 2\delta^2/3) \epsilon^{aij} \partial_j \delta B^b_b + \frac{\kappa}{3a} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{aij} \partial_j \delta \dot{B}^b_b = 0, \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

en donde no se ha hecho ningún tipo de aproximación ni estimación sobre los parámetros de rodadura lenta.

## 7.2. Descomposición en modos de Fourier

Como es estándar en este tipo de estudios [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#), se expande el campo  $\delta B^a_\mu$  en modos de Fourier

$$\delta B^a_\mu(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta B^a_\mu(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (7.2.1)$$

ya que de esta manera las ecuaciones se pueden trabajar más fácilmente lo cual permite hacer análisis más detallados de la dinámica de las perturbaciones. En el espacio de Fourier, las dos ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}
& \left[ m^2 + 2g^2\psi^2 + \frac{k^2}{a^2} \right] \delta B^a_0 - \frac{2g\psi}{a} i\epsilon^a_{bi} k_i \delta B^b_0 + \frac{H}{a} i k_i \delta B^a_i + \frac{1}{a} i k_i \delta B^a_i \\
& + g\psi \epsilon^a_{ci} \delta \dot{B}^c_i + gH\psi \delta \epsilon^a_{ci} \delta B^c_i + \frac{\kappa}{3a^2} g\psi^3 H(1-\delta) \epsilon^{lmn} k_a k_m \delta B^l_n \\
& + \frac{\kappa}{3a^2} g^2 \psi^4 k_a k_b \delta B^b_0 + \frac{\kappa}{a} g^2 \psi^4 H(1-2\delta/3) i k_a \delta B^b_b + \frac{\kappa}{3a} g^2 \psi^4 i k_a \delta \dot{B}^b_b = 0, \quad (7.2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2-\varepsilon) + \frac{k^2}{a^2} \right] \delta B^a_i + 3H\delta \dot{B}^a_i + \delta \ddot{B}^a_i + \frac{2H}{a} i k_i \delta B^a_0 \\
& + 2gH\psi \delta \epsilon^a_{bi} \delta B^b_0 - \frac{2g\psi}{a} \epsilon^a_{bj} i k_j \delta B^b_i + \frac{g\psi}{a} \epsilon^a_{bj} i k_i \delta B^b_j + \frac{\kappa}{3a^2} g^2 \psi^4 k_j k_b \delta B^b_j \delta_{ai} \\
& + \frac{\kappa}{3a} gH^2 \psi^3 (1-\varepsilon-\delta^2-\varepsilon\delta+\dot{\delta}/H) \epsilon^{lmn} i k_m \delta B^l_n \delta_{ai} - \frac{\kappa}{3a} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{lmn} i k_m \delta \dot{B}^l_n \delta_{ai} \\
& + g^2\psi^2 [2 + \kappa\psi^2 H^2 (-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\varepsilon + 5\delta\varepsilon/3 - 5\dot{\delta}/3H)] \delta B^b_b \delta_{ai} + \kappa g^2 H\psi^4 (1-4\delta/3) \delta \dot{B}^b_b \delta_{ai} \\
& - \frac{\kappa}{a} g\psi^3 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \varepsilon + \delta\varepsilon - \dot{\delta}/H) \epsilon^{ijk} i k_j \delta B^a_k + \frac{\kappa}{3} g^2 \psi^4 \delta \ddot{B}^b_b \delta_{ai} \\
& - g^2\psi^2 [1 + \kappa\psi^2 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \varepsilon + \delta\varepsilon - \dot{\delta}/H)] \delta B^i_a + \frac{2\kappa}{3a} g^2 H\psi^4 (2+\delta) i k_b \delta B^b_0 \delta_{ai} \\
& + \frac{\kappa}{3a^2} H^2 \psi^2 (1-\delta)^2 \epsilon^{aij} \epsilon^{lmn} k_j k_m \delta B^l_n + \frac{\kappa}{3a^2} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{aij} k_j k_b \delta B^b_0 \\
& + \frac{\kappa}{a} gH^2 \psi^3 (1-5\delta/3 + 2\delta^2/3) \epsilon^{aij} i k_j \delta B^b_b + \frac{\kappa}{3a} gH\psi^3 (1-\delta) \epsilon^{aij} i k_j \delta \dot{B}^b_b = 0. \quad (7.2.3)
\end{aligned}$$

En este punto, generalmente se descompone la perturbación  $\delta B^a_i$  en su parte paralela y perpendicular a  $\mathbf{k}$  debido a que es claro que surgen términos que son proporcionales a dicho vector [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#). Se sigue que  $\delta B^a_i$  se separa de la siguiente manera

$$\delta B^a_i = \delta R^a_i + \delta T^a_i, \quad (7.2.4)$$

en donde  $\delta T^a_i k_i = 0$ . Esto conllevaría en principio a dos ecuaciones independientes, una para la componente paralela y otra para componente perpendicular, y aunque el proceso parezca sencillo, en este caso se encuentran varias dificultades cuando se quiere hacer dicha separación. Si bien es posible usar la descomposición [7.2.4](#) en las ecuaciones obtenidas para el modelo, existen términos que no son únicamente paralelos o perpendiculares a  $\mathbf{k}$  como es el caso de aquéllos que son proporcionales a  $\delta_{ai}$ . Por lo tanto, no es posible descomponer la ecuación espacial en dos ecuaciones diferentes, y se hace necesario obtener las 9 ecuaciones diferenciales diferentes (3 por

cada índice  $a$ ) y obtener la solución de cada modo. Para hacer el proceso menos complejo, se puede dar una dirección a  $\mathbf{k}$  como se hace en la mayoría de estos estudios [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#). Por simplicidad, se toma  $\mathbf{k}$  en dirección  $z$  y por lo tanto la perturbación de cada campo se descompone en parte paralela y perpendicular a este eje. Debido a la simetría de los campos vectoriales en el fondo ( $B_i^a(t) = \psi \delta_i^a$  en donde cada uno de ellos está orientado en una dirección de los ejes coordenados), las 9 ecuaciones se separan en 5 grupos diferentes. Se obtienen 2 ecuaciones simétricas para las componentes de las perturbaciones que son paralelas a  $\mathbf{k}$  y perpendiculares a los vectores de fondo  $B_i^1, B_i^2$ ; 2 ecuaciones simétricas para las componentes de las perturbaciones que son perpendiculares a  $\mathbf{k}$  y perpendiculares al vector del fondo  $B_i^3$ ; 2 ecuaciones simétricas para las componentes de las perturbaciones que son perpendiculares a  $\mathbf{k}$  y perpendiculares a los vectores de fondo  $B_i^1, B_i^2$ ; 2 ecuaciones simétricas para las componentes de las perturbaciones que son perpendiculares a  $\mathbf{k}$  pero que son paralelas a los vectores de fondo  $B_i^1, B_i^2$ ; y una ecuación para la componente de la perturbación paralela a  $\mathbf{k}$  y paralela al vector de fondo  $B_i^3$ . Para entenderlo claramente, sin necesidad de escribir todas las ecuaciones, se escribe la descomposición [7.2.4](#) en forma matricial

$$\delta B_i^a = \begin{pmatrix} \delta R_1^1 & \delta R_2^1 & \delta R_3^1 \\ \delta R_1^2 & \delta R_2^2 & \delta R_3^2 \\ \delta R_1^3 & \delta R_2^3 & \delta R_3^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta T_1^1 & \delta T_2^1 & \delta T_3^1 \\ \delta T_1^2 & \delta T_2^2 & \delta T_3^2 \\ \delta T_1^3 & \delta T_2^3 & \delta T_3^3 \end{pmatrix}, \quad (7.2.5)$$

en donde las filas corresponden a los diferentes campos  $a$  y las columnas a sus respectivas componentes espaciales. Con esto, las simetrías encontradas y descritas anteriormente usando el vector  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$  se escriben como

$$\delta B_i^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta R_3^1 \\ 0 & 0 & \delta R_3^2 \\ 0 & 0 & \delta R_3^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta T_1^1 & \delta T_2^1 & 0 \\ \delta T_1^2 & \delta T_2^2 & 0 \\ \delta T_1^3 & \delta T_2^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.2.6)$$

en donde se usó el mismo color para resaltar las relaciones comentadas. Como se puede ver, la descomposición usada obliga a hablar de componentes paralelas y perpendiculares respecto a los vectores de fondo  $B_i^a(t)$  y respecto al vector  $\mathbf{k}$ . Esto es claro en el caso de un sólo campo vectorial ya que generalmente se escoge  $B_i(t)$  igualmente en la dirección  $z$ . En tal caso, la descomposición [7.2.4](#) se puede entender como la contribución de las fluctuaciones que van en dirección del campo original  $B_i(t)$  y las fluctuaciones perpendiculares a dicho campo. No obstante, en el presente modelo, existen tres campos vectoriales y por lo tanto, la escogencia de  $\mathbf{k}$  en dirección  $z$  imposibilita hacer este análisis porque se mezclan los conceptos de paralelo y perpendicular respecto a  $\mathbf{k}$ , y respecto al campo vectorial del fondo  $B_i^a(t)$ . Para la

perturbación  $\delta B_i^3(\mathbf{k}, t)$  no existe esta ambigüedad pues  $\mathbf{k}$  y  $B_i^3(t)$  están en la misma dirección, pero para los otros campos sí se presentan problemas de interpretación.

Un aspecto importante de la descomposición usada es la presencia de 5 grados de libertad independientes, lo cual está en desacuerdo con lo esperado en este modelo simétrico. Dado que las perturbaciones  $\delta B_\mu^a(\mathbf{k}, t)$  surgen de campos  $B_\mu^a = \psi \delta_\mu^a$  con las mismas características, en un fondo descrito por la métrica de FLRW y con una misma acción, se espera que haya una relación entre las componentes de  $\delta B_\mu^a$ . Por ejemplo, se espera que las componentes temporales de las perturbaciones presenten las mismas ecuaciones de evolución porque surgen de  $B_0^a = 0$ , y para un mismo conjunto de condiciones iniciales se debería obtener un resultado idéntico para cada componente temporal. De manera similar, se espera tener tres grados de libertad independientes para las componentes espaciales; la estadística de las fluctuaciones para cada campo vectorial es la misma por la estructura del modelo, así que para un mismo conjunto de condiciones iniciales se debe tener un comportamiento idéntico para las perturbaciones  $\delta B_i^a$  que caracterizan estas fluctuaciones. Los tres grados de libertad independientes deben corresponder a un modo paralelo y dos perpendiculares. Con esto no se indica que las perturbaciones para cada campo sean idénticos, sólo se dice que hay una relación entre ellos que reduce el sistema a tres variables independientes. El hecho de haber usado  $\mathbf{k} = k\hat{z}$ , dio preferencia a uno de los campos vectoriales del fondo y por esto no se logró vislumbrar la simetría esperada, generando ambigüedades en la identificación de los modos, o dicho de otra manera, rompiendo la isotropía del modelo.

El anterior problema se puede solucionar yendo más allá del tratamiento estándar de las perturbaciones en campos vectoriales; es decir, escogiendo un  $\mathbf{k}$  que se ajuste de manera adecuada a la simetría del modelo y no dé preferencia a algún campo  $B_i^a(t)$  en especial. Es claro notar que el vector que permitiría observar las simetrías señaladas es

$$\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad (7.2.7)$$

ya que este vector se encuentra a la misma distancia de cada uno de los vectores del fondo  $B_i^a$ . Con esta nueva configuración, se encuentra un gran número de simetrías en las ecuaciones que nos conducen a sólo tres grados de libertad independientes. Nuevamente, para evitar escribir todas las expresiones, se representará la descomposición 7.2.4 en forma matricial como se hizo en 7.2.5. Con esto, el sistema se reduce a

$$\delta B_i^a = \begin{pmatrix} \delta R & \delta R & \delta R \\ \delta R & \delta R & \delta R \\ \delta R & \delta R & \delta R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta T_1 & \delta T_2 & \delta T_3 \\ \delta T_3 & \delta T_1 & \delta T_2 \\ \delta T_2 & \delta T_3 & \delta T_1 \end{pmatrix}, \quad (7.2.8)$$

siendo  $\delta R$  la única componente espacial independiente de las perturbaciones paralelas a  $\mathbf{k}$ , y las cantidades  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  y  $\delta T_3$  las componentes perpendiculares de las perturbaciones perpendiculares a  $\mathbf{k}$ , las cuales cumplen la relación  $\delta T_1 + \delta T_2 + \delta T_3 = 0$ ; por ende el sistema total se reduce a tres grados de libertad independientes: uno paralelo y dos perpendiculares. Si bien las cantidades  $\delta R$  y  $\delta T_i$  se encuentran en todos los campos, esto no implica que los vectores sean exactamente iguales, la ecuación 7.2.8 muestra que la orientación de cada uno de ellos es diferente. El siguiente paso consistiría en despejar  $\delta B_0^a$  (encontrándose en este caso la misma ecuación para cada  $a$ ) y reemplazarla en cada una de las expresiones para  $\delta R$  y  $\delta T_i$ , y una vez hecho esto empezar el proceso de cuantización. Sin embargo, debido a la dificultad encontrada en la escogencia de  $\mathbf{k}$ , se buscó la manera de obtener resultados de forma general sin tener en cuenta la dirección de dicho vector. Uno de los problemas encontrados en las dos formas de abordar el problema es la mezcla entre los diferentes campos vectoriales: no es posible obtener ecuaciones separadas para cada campo  $a$  y por esto fue necesario encontrar las ecuaciones de evolución para cada  $a$  y sus respectivas componentes, en total 9. Este proceso de obtener las ecuaciones para cada índice  $a, i$  no es el más elegante y muestra que es necesario hacer un análisis más profundo del problema planteado y encontrar una metodología que haga más fácil el proceso de obtención de las ecuaciones de evolución para los diferentes modos.

En los estudios sobre producción de partículas en modelos inflacionarios vectoriales, es usual separar la perturbación vectorial en términos de vectores polarización, uno paralelo y dos perpendiculares con respecto a  $\mathbf{k}$  [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#). Cuando querer aplicar esta metodología en el presente caso se llega al mismo problema comentado anteriormente: existen, entre otros, términos que son proporcionales a  $\delta_{ai}$ . Además, no es claro cómo debe ser escogidos dichos vectores de polarización. Sin embargo, con un análisis detallado se llega a la conclusión de que  $\delta_{ai}$  se puede descomponer en una parte paralela y perpendicular a  $\mathbf{k}$  así

$$\delta_{ai}^R = \hat{k}_a \hat{k}_i, \quad \delta_{ai}^T = (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i), \quad (7.2.9)$$

en donde  $\delta_{ai}^R$  y  $\delta_{ai}^T$  corresponden a la parte paralela y perpendicular respectivamente. Igualmente, se observan términos que son proporcionales a  $\epsilon^{aij} \hat{k}_j$ , los cuales son claramente perpendiculares a  $\mathbf{k}$  y a los vectores  $\delta_{ai}^R, \delta_{ai}^T$ . Es decir, se encuentran términos paralelos a  $\mathbf{k}$  de la forma  $\hat{k}_a \hat{k}_i$  y términos perpendiculares a  $\mathbf{k}$  de la forma  $\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i$  y  $\epsilon^{aij} \hat{k}_j$ , entre otros. Este hecho nos conduce a pensar que la simetría de la teoría  $SU(2)$  y la configuración de los campos  $B_i^a = \psi \delta_i^a$  muestran de manera natural cuál debe ser la descomposición a hacer. Si bien hay términos que no son proporcionales a los vectores mencionados guardan una cercana relación. Así, queda claro que, en lugar

de expandir las ecuaciones para los respectivos  $a$  e  $i$ , se debe hacer una descomposición en modos de las perturbaciones  $\delta B_i^a$  de tal manera que el resultado no dependa de la escogencia de  $\mathbf{k}$ ; de acuerdo con el análisis hecho, se encuentra que la descomposición favorecida por las simetrías es la siguiente

$$\delta B_i^a = \delta R \hat{k}_a \hat{k}_i + \delta T (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) + i \epsilon^{aij} \hat{k}_j \delta L, \quad (7.2.10)$$

en donde  $\delta R$  representa el grado de libertad asociado a la componente paralela de las perturbaciones, y  $\delta T, \delta L$  representan dos grados de libertad asociados a las componentes perpendiculares de las perturbaciones. Al igual que en el análisis anterior, el sistema de 9 incógnitas se reduce a tres, y de manera sorprendente se encuentra, que en este caso, la ecuación 7.2.3 sí se puede dividir en tres ecuaciones diferentes

$$\begin{aligned} & \left[ m^2 + g^2 \psi^2 + H^2 (2 - \epsilon) + \frac{k^2}{a^2} \right] \delta R \hat{k}_a \hat{k}_i + 3H \delta \dot{R} \hat{k}_a \hat{k}_i + \delta \ddot{R} \hat{k}_a \hat{k}_i - \frac{2Hk}{a} \delta B_0 \hat{k}_a \hat{k}_i \\ & - \frac{2g\psi k}{a} \delta L \hat{k}_a \hat{k}_i + \frac{\kappa g^2 \psi^4 k^2}{3a^2} \delta R \hat{k}_a \hat{k}_i + \frac{2\kappa g \psi^3 H^2 k}{3a} (1 + \epsilon - \delta^2 - \delta \epsilon) \delta L \hat{k}_a \hat{k}_i \\ & - \frac{2\kappa g \psi^3 H k}{3a} (1 - \delta) \delta \dot{L} \hat{k}_a \hat{k}_i + \kappa g^2 \psi^4 H (1 - 4\delta/3) \left[ \delta \dot{R} + 2\delta \dot{T} \right] \hat{k}_a \hat{k}_i + \frac{\kappa}{3} g^2 \psi^4 \left[ \delta \ddot{R} + 2\delta \ddot{T} \right] \hat{k}_a \hat{k}_i \\ & + g^2 \psi^2 \left[ 2 + \kappa \psi^2 H^2 (-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\epsilon + 5\delta\epsilon/3) \right] [\delta R + 2\delta T] \hat{k}_a \hat{k}_i \\ & - g^2 \psi^2 \left[ 1 + \kappa \psi^2 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \epsilon + \delta\epsilon) \right] \delta R \hat{k}_a \hat{k}_i - \frac{2\kappa}{3a} g^2 \psi^4 H k (2 + \delta) \delta B_0 \hat{k}_a \hat{k}_i = 0, \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \left[ m^2 + g^2 \psi^2 + H^2 (2 - \epsilon) + \frac{k^2}{a^2} \right] \delta T (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) + 3H \delta \dot{R} (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) + \delta \ddot{R} (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & - \frac{2g\psi k}{a} \delta L (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) + \frac{\kappa g^2 \psi^4 k^2}{3a^2} \delta R (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & + \frac{\kappa g \psi^3 H^2 k}{3a} (2 + 5\epsilon - 11\delta^2 - 9\delta - 5\delta\epsilon) \delta L (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) - \frac{2\kappa g \psi^3 H k}{3a} (1 - \delta) \delta \dot{L} (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & + \kappa g^2 \psi^4 H (1 - 4\delta/3) \left[ \delta \dot{R} + 2\delta \dot{T} \right] (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) + \frac{\kappa}{3} g^2 \psi^4 \left[ \delta \ddot{R} + 2\delta \ddot{T} \right] (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & + g^2 \psi^2 \left[ 2 + \kappa \psi^2 H^2 (-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\epsilon + 5\delta\epsilon/3) \right] [\delta R + 2\delta T] (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & - g^2 \psi^2 \left[ 1 + \kappa \psi^2 H^2 (-3\delta + 3\delta^2 - \epsilon + \delta\epsilon) \right] \delta R (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) \\ & - \frac{2\kappa}{3a} g^2 \psi^4 H k (2 + \delta) \delta B_0 (\delta_{ai} - \hat{k}_a \hat{k}_i) = 0, \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon) + \frac{k^2}{a^2} \right] \delta Li\epsilon^{aij}k_j + 3H\delta\dot{L}i\epsilon^{aij}k_j + \delta\ddot{L}i\epsilon^{aij}k_j - 2g\psi\delta Hi\epsilon^{aij}k_j \\
& - \frac{2g\psi k}{a}\delta Ti\epsilon^{aij}k_j - \frac{\kappa g\psi^3 H^2 k}{a}(-3\delta - 3\delta^2 i\epsilon^{aij}k_j - \epsilon + \delta\epsilon)\delta Ti\epsilon^{aij}k_j \\
& + g^2\psi^2 \left[ 1 + \kappa\psi^2 H^2(-3\delta + 3\delta^2/3 - \epsilon + \delta\epsilon) \right] \delta Li\epsilon^{aij}k_j \\
& - \frac{2\kappa\psi^2 H^2 k^2}{3a^2}(1 - \delta)^2\delta Li\epsilon^{aij}k_j + \frac{\kappa}{a}g\psi^3 H^2(1 - 5\delta/3 + 2\delta^2/3)k [\delta R + 2\delta T] i\epsilon^{aij}k_j \\
& + \frac{\kappa}{3a}g\psi^3 H(1 - \delta)k \left[ \delta\dot{R} + 2\delta\dot{T} \right] i\epsilon^{aij}k_j + \frac{\kappa}{3a^2}g\psi^3 H(1 - \delta)k\delta B_0 i\epsilon^{aij}k_j = 0.
\end{aligned} \tag{7.2.13}$$

Adicionalmente, con la descomposición 7.2.10, se encuentra la siguiente expresión para la componente temporal de las perturbaciones:

$$\begin{aligned}
& \left[ m^2 + 2g^2\psi^2 + \frac{k^2}{a^2} + \frac{\kappa g^2\psi^4 k^2}{3a^2} \right] \delta B_0 i\hat{k}_a + \frac{Hk}{a}\delta Ri\hat{k}_a + \frac{k}{a}\delta\dot{R}i\hat{k}_a \\
& + 2g\psi\delta\dot{L}i\hat{k}_a + 2\delta g\psi H\delta Li\hat{k}_a - \frac{2\kappa g\psi^3 H}{3a^2}k^2(1 - \delta)\delta Li\hat{k}_a \\
& + \frac{\kappa g^2\psi^4 H}{a}k(1 - 2\delta/3) [\delta R + 2\delta T] i\hat{k}_a + \frac{\kappa g^2\psi^4}{3a}k \left[ \delta\dot{R} + 2\delta\dot{T} \right] i\hat{k}_a = 0.
\end{aligned} \tag{7.2.14}$$

Con esto, se completa el proceso de descomposición de las perturbaciones vectoriales en modos, y sólo resta eliminar de las ecuaciones 7.2.11, 7.2.12 y 7.2.13 la perturbación no dinámica  $\delta B_0$

El proceso de eliminación de  $\delta B_0$  parece trivial; sin embargo, debido a la complejidad de las ecuaciones es conveniente trabajar en dos regímenes asintóticos: superhorizonte y subhorizonte. Estos dos regímenes hacen referencia a escalas muy grandes y muy pequeñas comparadas con el horizonte de partículas durante inflación  $H^{-1}$  (ver Fig. 7.1). La región de superhorizonte está caracterizada por  $k/aH \ll 1$  y la de subhorizonte se caracteriza por  $k/aH \gg 1$ , siendo  $a$  el factor de expansión y  $H = \dot{a}/a$  el parámetro de Hubble; las escalas de subhorizonte son entendidas como las escalas en las que el espaciotiempo es prácticamente Minkoswkiano y las escalas de superhorizonte como aquéllas en las que los gradientes espaciales son despreciables.

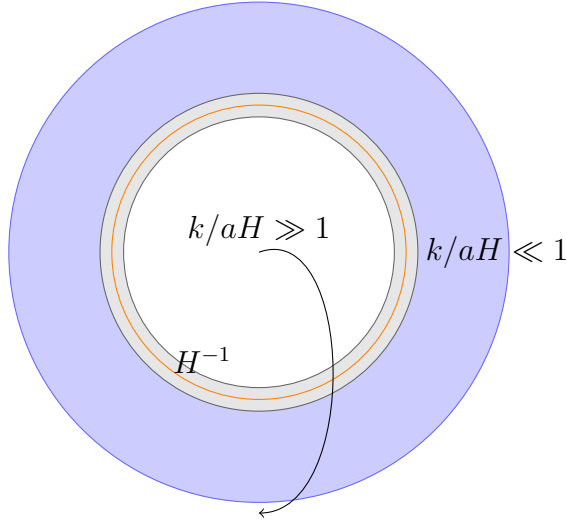


Figura 7.1: Representación del horizonte de partículas  $H^{-1}$  (línea naranja) y de la evolución de las escalas cosmológicas durante inflación. Zona blanca: escalas de subhorizonte, zona azul: escalas de superhorizonte. Se debe notar que  $\frac{k}{aH} = \frac{H^{-1}}{L_p}$ .

### 7.3. Proceso de cuantización

Una vez despejado el modo  $\delta B_0$ , se sigue con el proceso de cuantización. Como se comentó en el capítulo 4, se deben elevar los campos a estatus de operador, definir las respectivas reglas de conmutación para los operadores escalera y determinar el estado de vacío de la teoría. Debido a que el espectro de las perturbaciones en los campos (ec. 4.0.11) se calcula en escalas de superhorizonte, se hace necesario encontrar la evolución de las perturbaciones en dichas escalas y determinar cómo debe ser la descomposición en operadores creación y destrucción. Aplicando las condiciones dadas en el capítulo anterior, se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] \delta R + 3H\delta\dot{R} + \delta\ddot{R} + \kappa g^2\psi^4 H(1 - 4\delta/3) [\delta\dot{R} + 2\delta\dot{T}] \\
& + \frac{\kappa}{3} g^2\psi^4 [\delta\ddot{R} + 2\delta\ddot{T}] + 2g^2\psi^2 [2 + \kappa\psi^2 H^2(-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\epsilon + 5\delta\epsilon/3)] \delta T \\
& + g^2\psi^2 [1 + \kappa\psi^2 H^2(-2\delta + 4\delta^2/3 - \epsilon + 2\delta\epsilon/3)] \delta R = 0.
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] \delta T + 3H\delta\dot{T} + \delta\ddot{T} + \kappa g^2\psi^4 H(1 - 4\delta/3) [\delta\dot{R} + 2\delta\dot{T}] \\
& + \frac{\kappa}{3} g^2\psi^4 [\delta\ddot{R} + 2\delta\dot{T}] + g^2\psi^2 [2 + \kappa\psi^2 H^2(-5\delta + 13\delta^2/3 - 2\epsilon + 5\delta\epsilon/3)] \delta R \\
& + g^2\psi^2 [3 + \kappa\psi^2 H^2(-7\delta + 17\delta^2/3 - 3\epsilon + 7\delta\epsilon/3)] \delta R = 0.
\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] \delta L + 3H\delta\dot{L} + \delta\ddot{L} - 2\delta g\psi H\delta B_0 \\
& + g^2\psi^2 [1 + \kappa\psi^2 H^2(-3\delta + 3\delta^2/3 - \epsilon + \delta\epsilon)] \delta L = 0,
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

$$[m^2 + 2g^2\psi^2] \delta B_0 = -2g\psi\delta\dot{L} - 2g\delta\psi\delta LH. \tag{7.3.4}$$

Aquí se puede observar que los modos  $\delta R$  y  $\delta T$  están acoplados por lo que no se les puede asociar operadores creación y destrucción no correlacionados. En general, a cada modo se le asocian operadores escalera que cumplen las reglas de conmutación dadas en 4.0.9 pues las ecuaciones diferenciales para cada uno de los modos son independientes. En este caso, se observan ecuaciones acopladas por lo que se hace necesario un cambio de variable que permita llevar el sistema a tres ecuaciones independientes; de esta manera se asegura tener una descomposición de  $\delta B^a_i$  en términos de operadores cuyos conmutadores cumplan la relaciones usuales mostradas en el capítulo 4. Analizando la forma de las ecuaciones se llega a que la relación entre  $\delta R$  y  $\delta T$  que desacopla las ecuaciones es

$$A = \delta R - \delta T, B = \delta R + 2\delta T. \tag{7.3.5}$$

De esta manera, el conjunto de ecuaciones de evolución para las variables  $A$ ,  $B$  y  $\delta L$  son

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] A + 3H\dot{A} + \ddot{A} \\
& - g^2\psi^2 [1 - \kappa\psi^2 H^2(3\delta - 3\delta^2 + \epsilon - \delta\epsilon)] A = 0,
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] B + 3H\dot{B} + \ddot{B} + 3\kappa g^2\psi^4 H\dot{B} \\
& \kappa g^2\psi^4 \ddot{B} + g^2\psi^2 [5 - \kappa\psi^2 H^2(-12\delta + 10\delta^2 - 5\epsilon + 4\delta\epsilon)] B = 0,
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\begin{aligned}
& [m^2 + g^2\psi^2 + H^2(2 - \epsilon)] \delta L + 3H\delta\dot{L} + \delta\ddot{L} + \frac{4g^2\psi^2\delta H}{m^2 + g^2\psi^2} \delta\dot{L} + \frac{4g^2\psi^2\delta^2 H^2}{m^2 + g^2\psi^2} \delta L \\
& + g^2\psi^2 [1 + \kappa\psi^2 H^2(-3\delta + 3\delta^2/3 - \epsilon + \delta\epsilon)] \delta L = 0.
\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Por lo tanto, la perturbación  $\delta B_i^a(\mathbf{x}, t)$  escrita como operador es

$$\begin{aligned} \delta \hat{B}_i^a(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[ \left( A(k, t)(\hat{k}_a \hat{k}_i - \delta_{ai}/3) \hat{a}_A(\mathbf{k}) + \delta_{ai} \frac{B(k, t)}{3} \hat{a}_B(\mathbf{k}) + i\epsilon^{aij} \hat{k}_j \delta L(k, t) \hat{a}_{\delta L}(\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right. \\ & \left. + \left( A^*(k, t)(\hat{k}_a \hat{k}_i - \delta_{ai}/3) \hat{a}_A^\dagger(\mathbf{k}) + \delta_{ai} \frac{B^*(k, t)}{3} \hat{a}_B^\dagger(\mathbf{k}) - i\epsilon^{aij} \hat{k}_j \delta L^*(k, t) \hat{a}_{\delta L}^\dagger(\mathbf{k}) \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

en donde las cantidades  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  y  $\hat{a}_\lambda$  corresponden a los diferentes operadores creación y destrucción asociados a los modos  $\lambda = A, B, \delta L$ . Con esto, el correlador de dos puntos de  $\delta \hat{B}_i^a(\mathbf{k}, t)$  respecto al estado de mínima energía  $|\psi\rangle = |0\rangle$ , considerando homogeneidad e isotropía estadística, es

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{B}_i^a(\mathbf{k}, t) \delta \hat{B}_j^{a\dagger}(\mathbf{k}', t) \rangle = & (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ (\delta_{ij}/9 + \hat{k}_i \hat{k}_j/3) P_A(k) \right. \\ & \left. + \frac{\delta_{ij}}{9} P_B(k) + (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) P_{\delta L}(k) \right], \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

en donde se ha asumido que no existe correlación entre  $A$ ,  $B$ ,  $\delta L$  debido a que sus ecuaciones diferenciales son independientes. Aunque el espectro obtenido no tenga la forma usual encontrada en la literatura [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#) (e.g., ver capítulo 4), se le puede dar una forma parecida con un poco de álgebra para llegar a

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{B}_i^a(\mathbf{k}, t) \delta \hat{B}_j^{a\dagger}(\mathbf{k}', t) \rangle = & (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ \hat{k}_i \hat{k}_j \frac{1}{9} (4P_A(k) + P_B(k)) \right. \\ & \left. + (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \frac{1}{9} (P_A(k) + P_B(k)) + (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) P_{\delta L}(k) \right], \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

en donde se observa cómo las perturbaciones  $A$ ,  $B$  y  $\delta L$  contribuyen al espectro que se define longitudinal (proporcional a  $\hat{k}_i \hat{k}_j$ ) y al espectro transversal que conserva paridad (proporcional a  $[\delta_{ai} - \hat{k}_i \hat{k}_j]$ ). Un aspecto relevante por notar es que no surgen términos proporcionales a la cantidad  $\epsilon^{ijl} \hat{k}_l$ , i.e., perpendiculares que violan paridad. Este hecho es esperado debido a que se sabe que la acción es invariante ante transformaciones de paridad, por lo que no debe existir términos en el espectro que violen dicha simetría. Este hecho soporta la escogencia de la descomposición 7.2.10 y evidencia que contiene información acerca de las simetrías existentes en la acción. Ahora, para encontrar el espectro 7.3.11 de manera explícita se deben resolver las ecuaciones para  $A$ ,  $B$  y  $\delta L$ . Debido a que la solución encontrada para el fondo evidencia la existencia de un régimen de rodadura lenta, es válido hacer  $\epsilon, \eta, \delta \ll 1$ , lo cual va a reducir considerablemente el tamaño de las ecuaciones. Además de esto, se usa una expresión para  $\kappa$  en términos de los parámetros de rodadura lenta y las variables dinámicas del fondo clásico. A través de las ecuaciones 6.3.7 y 6.3.8 se encuentra la ecuación

$$\kappa = \frac{(2 - \epsilon)((1 - \delta)^2 + \gamma + \omega/2) - \omega\epsilon/2}{\gamma\psi^2 H^2 (1 - \delta)^2 \epsilon}, \quad (7.3.12)$$

la cual se reduce a

$$\kappa \simeq \frac{(2 + 2\gamma + \omega)}{\gamma\psi^2 H^2 \epsilon}, \quad (7.3.13)$$

en la aproximación de rodadura lenta. Así, la ecuación para  $\delta L$  en el régimen de superhorizonte es

$$\frac{\delta \ddot{L}}{H^2} + \frac{3}{H} \delta \dot{L} \simeq 0. \quad (7.3.14)$$

Esta ecuación puede ser convertida en

$$\delta L'' + 3\delta L' \simeq 0, \quad (7.3.15)$$

usando la nueva variable  $d\tau = Hdt$  cuya naturaleza es similar al número de e-folds. Con esto, se obtiene la siguiente solución para  $\delta L$

$$\delta L \simeq C_{1k} + C_{2k} e^{-3Ht}, \quad (7.3.16)$$

en donde  $C_{1k}$  y  $C_{2k}$  son dos constantes de integración dependientes de  $k$  que se determinarán a partir del comportamiento primordial de las perturbaciones, es decir, de su comportamiento en subhorizonte. La solución 7.3.16 se expresa mediante el factor de expansión así

$$\delta L \simeq C_{1k} + \frac{C_{2k}}{a^3}. \quad (7.3.17)$$

sabiendo que durante inflación  $a = e^{Ht}$ . De la ecuación 7.3.17 se determina que el modo  $\delta L$  tiene un comportamiento decreciente en grandes escalas, lo cual es entendible por el hecho de que las fluctuaciones son características en escalas de dominio cuántico. Sin embargo, el valor de  $\delta L$  adquiere un valor constante después de cierto tiempo, siendo consecuente con el hecho de que la acción rompe la invariancia conformal. En modelos conformalmente invariantes, las perturbaciones de los campos vectoriales decaen y son suprimidas en escalas de superhorizonte por lo que en tales casos se dice que las fluctuaciones son transparentes a la gravedad, es decir, no son amplificadas por la expansión acelerada. En la figura 7.2 se pueden observar las características comentadas sobre  $\delta L$ .

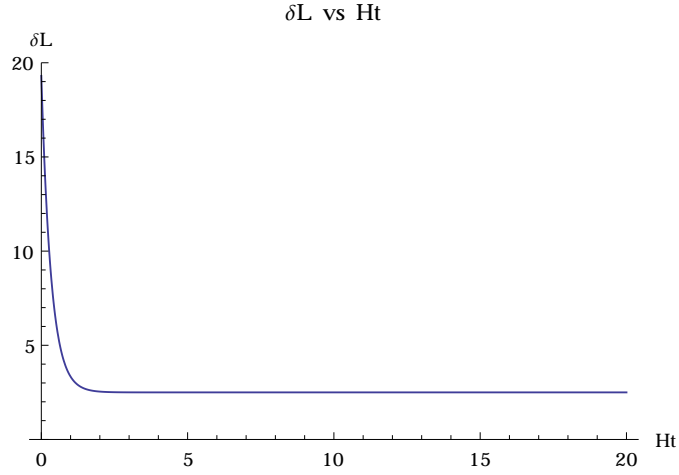


Figura 7.2: En esta gráfica se puede apreciar la evolución temporal del modo  $\delta L$  en escalas de superhorizonte para un  $k$  dado con constantes  $C_{1k} = 2, 5$  y  $C_{2k} = 16, 8$ . Es notable ver que su valor tiende a adquirir un valor constante después de cierto tiempo de evolución.

En cuanto a la perturbación  $A$ , se encuentra que su ecuación de evolución en superhorizonte y aproximación de rodadura lenta es

$$\frac{\ddot{A}}{H^2} + \frac{3}{H}\dot{A} + 2(2 + 2\gamma + \omega)A \simeq 0, \quad (7.3.18)$$

la cual se convierte en

$$A'' + 3A' + 2\beta A \simeq 0, \quad (7.3.19)$$

usando la variable  $d\tau = Hdt$  y definiendo  $\beta = 2 + \gamma + \omega$  cuyo valor es por su definición mayor que 2. Su solución está dada por la expresión

$$A \simeq D_{1k}e^{(-3+\sqrt{9-8\beta})Ht/2} + D_{2k}e^{(-3-\sqrt{9-8\beta})Ht/2}, \quad (7.3.20)$$

en donde  $D_{1k}$  y  $D_{2k}$  son constantes que se determinan conociendo el comportamiento de  $A$  en el régimen de subhorizonte. La evolución de  $A$  encontrada es esquematizada en la figura 7.3, en donde se aprecia un comportamiento oscilatorio inicial y después de cierto tiempo cae a cero.

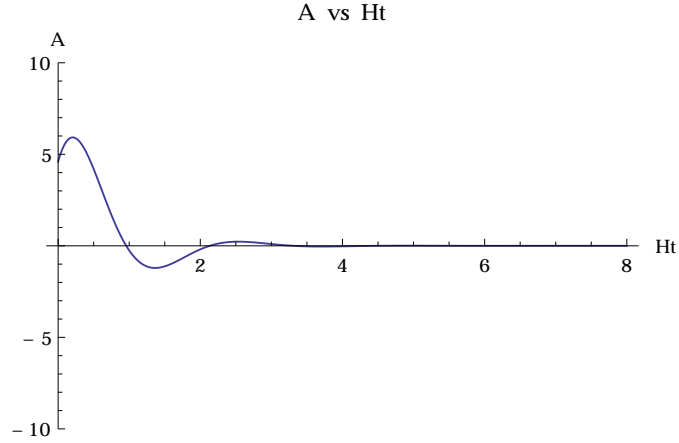


Figura 7.3: En esta gráfica se observa la evolución temporal de la variable  $A$  en escalas de superhorizonte para un  $k$  dado encontrada con  $\beta = 4$  y constantes de integración  $D_{1k} = 4, 6$  y  $D_{2k} = 7, 3$ . Se aprecia cómo  $A$  tiene un comportamiento oscilatorio inicial pero cae rápidamente a cero, conduciendo al hecho de que  $\delta R = \delta T$ .

En la figura 7.3 se muestra que, para un  $k$  dado, el valor de  $A$  va a cero, y por lo tanto, en superhorizonte  $\delta R \simeq \delta T$ , es decir, la evolución conjunta de estas dos componentes (una paralela y la otra perpendicular) es tal que en grandes escalas son prácticamente iguales. Se sigue entonces que  $B \simeq 3\delta R \simeq 3\delta T$ , y  $B$  a su vez presenta la ecuación de evolución

$$\frac{\ddot{B}}{H^2} + \frac{3}{H}\dot{B} - 4\frac{(2 + \gamma + \omega)}{(2 + 2\gamma + \omega)}\epsilon B \simeq 0. \quad (7.3.21)$$

Utilizando de nuevo la variable  $d\tau = Hdt$  y definiendo  $\sigma = \frac{2+\gamma+\omega}{2+2\gamma+\omega}\epsilon$  (cuyo valor es mucho menor que uno por su definición y por la aproximación de rodadura lenta) se llega a la ecuación

$$B'' + 3B' - 4\sigma B \simeq 0, \quad (7.3.22)$$

cuya solución viene dada por la expresión

$$B \simeq E_{2k}e^{(-3-\sqrt{9+16\sigma})Ht/2} + E_{1k}e^{(-3+\sqrt{9+16\sigma})Ht/2}, \quad (7.3.23)$$

en donde  $E_{1k}$  y  $E_{2k}$  son constantes de integración que se determinan conociendo el comportamiento de  $B$  en el régimen de subhorizonte. Teniendo en cuenta que  $\sigma \ll 1$  la solución para  $B$  se simplifica a

$$B \simeq E_{2k}e^{-3Ht} + E_{1k}, \quad (7.3.24)$$

o

$$B \simeq \frac{E_{2k}}{a^3} + E_{1k}. \quad (7.3.25)$$

De manera similar al caso de  $\delta L$  se tiene un comportamiento decreciente que termina en un valor fijo después de un tiempo (ver Fig. 7.4), siendo un resultado consistente con el hecho de que se obtiene una perturbación clásica no nula a partir de fluctuaciones cuánticas primordiales gracias al efecto de la gravedad, y esencialmente al horizonte de partículas.

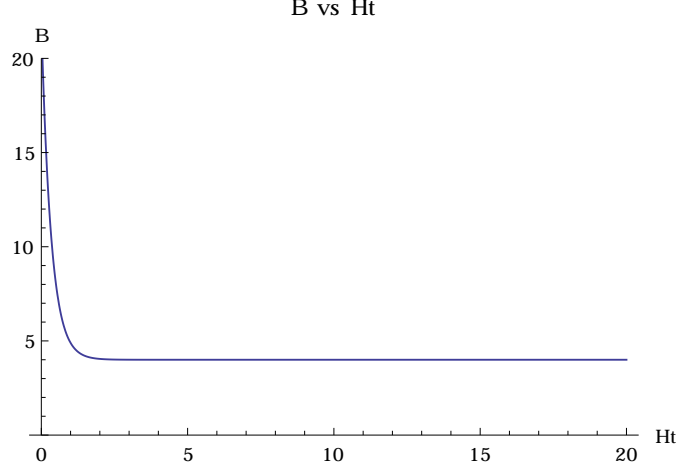


Figura 7.4: En esta gráfica se muestra la evolución temporal de  $B$  en escalas de superhorizonte para un  $k$  dado con constantes  $E_{1k} = 4$  y  $E_{2k} = 18$ . Aquí se observa cómo la variable  $B$  adquiere un valor constante en el régimen de superhorizonte.

Con estos interesantes resultados se llega a que el espectro toma la forma

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{B}_i^a(\mathbf{k}, t) \delta \hat{B}_j^{a\dagger}(\mathbf{k}', t) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ \hat{k}_i \hat{k}_j \frac{P_B(k)}{9} \right. \\ \left. + (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) (P_B(k)/9 + P_{\delta L}(k)) \right], \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

cuya forma explícita depende de las constantes  $C_{1k}$ ,  $C_{2k}$ ,  $E_{1k}$  y  $E_{2k}$ .

Para determinar la evolución de las componentes de la perturbación en el régimen de subhorizonte se hace un proceso análogo al del caso de superhorizonte: primero se reemplaza el modo temporal de la ec. 7.2.14 en las ecuaciones 7.2.11, 7.2.12 y 7.2.13, luego se efectúa la debida aproximación de subhorizonte, seguida de una aproximación de rodadura lenta en donde es indispensable usar la relación 7.3.13. Con esto, se encuentra que  $\delta T \simeq 0$ , indicando que en escalas de subhorizonte y régimen de rodadura lenta es despreciable respecto a las demás componentes. Por lo tanto, se espera que corresponda a fluctuaciones del campo subdominantes en tiempos tempranos pero que existen, y luego, debido a la evolución conjunta con  $\delta R$  se tiene un perturbación clásica diferente de cero en el régimen de super-horizonte.

Adicionalmente, se encuentra que las ecuaciones para  $\delta R$  y  $\delta L$  son

$$\delta\ddot{R} + 7H\delta\dot{R} + \frac{k^2}{a^2}\delta R \simeq 0, \quad (7.3.27)$$

$$\delta\ddot{L} + H\delta\dot{L} + \left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) \frac{k^2}{a^2}\delta L \simeq 0. \quad (7.3.28)$$

La solución de estas ecuaciones permite conocer el comportamiento de cada modo en escalas de subhorizonte, en donde se define el vacío respecto al cual se encontró el espectro 7.3.11. En el espaciotiempo de deSitter, los campos tienen preferencia por el estado de vacío llamado *Vacío de Bunch-Davies*, el cual se define básicamente como el vacío Minkowskiano en el límite de tiempo temprano ( $k/aH \rightarrow \infty$ ). Así, el vacío de Bunch-Davies es tal que en el límite mostrado cada modo  $\delta B^a_\lambda$  es casi inafectado por la presencia de la gravedad y por se tanto cumple

$$B^a_\lambda \rightarrow \frac{1}{a\sqrt{2k}}e^{ik/aH}, \quad k/aH \rightarrow \infty. \quad (7.3.29)$$

Por otra parte, para el modo longitudinal la condición de vacío está multiplicada por un boost de Lorentz, el cual nos lleva del marco en el que  $\mathbf{k} = 0$  a un marco de referencia en el cual  $\mathbf{k} \neq 0$  [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#), de la siguiente manera

$$B^a_\parallel \rightarrow \alpha \frac{1}{a\sqrt{2k}}e^{ik/aH}, \quad k/aH \rightarrow \infty, \quad (7.3.30)$$

en donde el boost es tal que  $\alpha = \frac{\sqrt{(k/a)^2 + m^2}}{m} = \sqrt{1 + \frac{k^2}{a^2 m^2}}$ . Ahora, considerando que dentro del horizonte  $k/am \gg 1$  se tiene la siguiente condición de vacío para el modo paralelo o longitudinal

$$\delta B^a_\parallel \rightarrow \frac{k}{a^2 m \sqrt{2k}}e^{ik/aH}. \quad (7.3.31)$$

Conociendo las condiciones que deben cumplir cada uno de los modos, se resuelven las ecuaciones 7.3.27 y 7.3.28, con las cuales sabremos el comportamiento de las perturbaciones en el régimen de subhorizonte. Para resolver la ecuación 7.3.27, se hace el cambio de variable  $\delta R = \delta\tilde{R}/a^3$  con lo que se obtiene la siguiente expresión

$$\delta\ddot{\tilde{R}} + H\delta\dot{\tilde{R}} - 12H^2\delta\tilde{R} + \frac{k^2}{a^2}\delta\tilde{R} \simeq 0. \quad (7.3.32)$$

Ahora, usando el tiempo conformal  $\eta$  el cual se relaciona con  $t$  de la forma  $d\eta = dt/a$ , y sabiendo que, en la aproximación de Universo deSitter  $a = 1/H|\eta|$ , se llega a la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} + \left[x^2 - \frac{49}{4}\right] \simeq 0, \quad (7.3.33)$$

en donde  $f(x) = \delta\tilde{R}/\sqrt{x}$  y la variable  $x$  se define como  $k/aH$ . La solución de esta ecuación es la conocida función de Bessel de orden 7/2, con lo que la solución final para  $\delta R$  es

$$\delta R = \frac{\sqrt{k/aH}}{a^3} [c_{1k} J_{7/2}(k/aH) + c_{2k} J_{-7/2}(k/aH)], \quad (7.3.34)$$

cuyas constantes de integración  $c_{1k}$  y  $c_{2k}$  se determinan aplicando la condición de vacío dada por la expresión 7.3.31. Para hacer el empalme entre 7.3.34 y 7.3.31 se toma el límite de tiempos tempranos para  $\delta R$  cuya forma es

$$\delta R = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^3} [(c_{1k} - c_{2k})\cos(k/aH) - (c_{1k} + c_{2k})\sen(k/aH)], \quad (7.3.35)$$

de donde se deduce que  $c_{1k} - c_{2k} = d_k$  y  $c_{1k} + c_{2k} = id_k$ , siendo  $d_k$  otra constante. Para que se satisfaga la condición de vacío de Bunch-Davies, el valor de la constante  $d_k$  es

$$d_k = \sqrt{\frac{k\pi}{2}} \frac{a}{m}, \quad (7.3.36)$$

y con este resultado se llega a la expresión para  $\delta R$  en el régimen de subhorizonte

$$\delta R = \frac{k}{2a^2m} \sqrt{\frac{\pi}{2aH}} [(J_{7/2}(k/aH) - J_{-7/2}(k/aH)) - i(J_{7/2}(k/aH) + J_{-7/2}(k/aH))]. \quad (7.3.37)$$

De manera similar se procede con la ecuación 7.3.28, es decir, se usa el tiempo conformal  $\eta$  y se emplea la variable  $x = k/aH$  para llegar a la forma

$$\frac{d^2\delta L}{dx^2} + z^2\delta L \simeq 0, \quad (7.3.38)$$

en donde  $z^2 = 1 - \frac{2}{\gamma}$ . La solución de esta ecuación está dada por

$$\delta L = f_{1k}e^{izk/aH} + f_{2k}e^{-izk/aH}, \quad (7.3.39)$$

cuyas constantes de integración  $f_{1k}$  y  $f_{2k}$  son determinadas exigiendo la condición de vacío 7.3.29. Sin embargo, la conexión con el vacío de Bunch-Davies no es tan directa en este caso. Como se puede apreciar, la solución para  $\delta L$  contiene un factor  $z$  que acompaña a  $k/aH$  en la función exponencial. Este hecho no genera ningún inconveniente en la definición de vacío ya que basta con cambiar  $k$  por  $zk$  en la ecuación 7.3.29 siempre que se cumpla que  $z > 0$ . No obstante, en este caso  $z$  puede tomar cualquier valor de acuerdo con la escogencia de  $\gamma$ , y por ende, hay una región de valores para  $\gamma$  que permite tener  $z < 0$ . Este hecho imposibilita definir el vacío de la manera usual, pues para  $\gamma < 2$  se llegaría al hecho de que en el estado de vacío los modos no tienen comportamiento oscilatorio (propio de la naturaleza fluctuante del campo) sino que tendría un comportamiento creciente con el tiempo generando una gran cantidad de partículas a partir del estado  $|0\rangle$ , lo que se conoce como condensación taquiónica [Aharonov et al. \(1969\)](#). Por lo tanto, se concluye que el modelo presenta inestabilidad taquiónica para valores de  $\gamma < 2$ . Este resultado es consistente con lo encontrado en trabajos anteriores sobre Gauge-flation sin masa [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#); [Namba et al. \(2013\)](#) en donde se encontró igualmente esta inestabilidad para la región  $\gamma < 2$ . De esta manera, la evolución del campo en el fondo  $B_i^a(t)$  no es válida para  $\gamma < 2$ , convirtiendo a Gauge-flation en un modelo

restrictivo. Ahora, asumiendo que  $\gamma > 2$ , se llega a la siguiente solución para  $\delta L$  aplicando la respectiva condición de vacío

$$\delta L = \frac{a^{-1}}{\sqrt{2zk}} e^{izk/aH}. \quad (7.3.40)$$

De esta manera, se encuentran las soluciones para  $\delta R$ ,  $\delta T$  y  $\delta L$  en la región interior y exterior respecto al horizonte de partículas. El siguiente paso consiste en calcular de manera explícita las potencias  $P_A$ ,  $P_B$  y  $P_{\delta L}$  y así calcular finalmente el espectro de las perturbaciones en los campos vectoriales 7.3.11.

## 7.4. Obtención de espectros

Para determinar el espectro de perturbaciones para  $\delta B_i^a(\mathbf{k}, t)$  se usan las soluciones para cada componente o modo de las perturbaciones en los dos regímenes (subhorizonte y superhorizonte) y se empalman en la salida del horizonte (cuando  $k/aH \sim 1$ ) de la forma sugerida en Mukhanov & Winitzki (2007). En las soluciones de superhorizonte para  $\delta R$  y  $\delta L$  se encontró que estos modos adquieren un valor constante en el tiempo que viene determinado por las constantes  $E_{1k}$  y  $C_{1k}$ . Cuando se hace el conexión de 7.3.17 y 7.3.25 con 7.3.40 y 7.3.37 se encuentra que

$$E_{1k} = \frac{\theta H^2}{2k^{3/2}m} \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}, \quad (7.4.1)$$

en donde  $\theta = J_{7/2}(1) - J_{-7/2}(1)$  y además

$$C_{1k} = \frac{H}{k^{3/2}\sqrt{2z}}. \quad (7.4.2)$$

Con el valor de estas dos constantes, se usa la definición de  $P_{\delta R}$  y  $P_{\delta L}$

$$P_{\delta R} = \frac{k^3}{2\pi^2} \Big|_{k/aH \rightarrow 0^+} \lim_{k/aH \rightarrow 0^+} |\delta R|^2, \quad P_{\delta L} = \frac{k^3}{2\pi^2} \Big|_{k/aH \rightarrow 0^+} \lim_{k/aH \rightarrow 0^+} |\delta L|^2, \quad (7.4.3)$$

para encontrar finalmente los espectros

$$P_{\delta R} = \frac{\theta^2}{2\pi} \left(\frac{H}{m}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (7.4.4)$$

y

$$P_{\delta L} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (7.4.5)$$

Como se había encontrado en la sección anterior  $\delta R \simeq \delta T$  en escalas de superhorizonte, por lo tanto, el espectro asociado a  $\delta T$  es el mismo de  $\delta R$ . Con esto, se llega a las siguientes expresiones para el espectro paralelo o longitudinal y el espectro perpendicular definidos en la ecuación 7.3.26:

$$P_{\parallel} = \frac{\theta^2}{2\pi} \left(\frac{H}{m}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (7.4.6)$$

$$P_+ = \frac{\theta^2}{2\pi} \left(\frac{H}{m}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (7.4.7)$$

Aquí se observa que los espectros finales no dependen de la escala de observación  $k$  (es decir, no se ven suprimidos a medida que  $k$  disminuye), por el contrario dependen de la escala de energía durante inflación,  $H$ , y de los parámetros del modelo  $m$  y  $\gamma$ . Cabe resaltar que las formas encontradas para  $P_{\delta R}$  y  $P_{\delta L}$  presentan una estructura similar a los espectros encontrados en estudios sobre producción de partículas en modelos inflacionarios vectoriales [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#); [Namba \*et al.\* \(2013\)](#); [Karciauskas \(2012\)](#); [Dimopoulos \*et al.\* \(2010\)](#); [Dimopoulos \(2006\)](#). A partir de su forma, se puede tener una idea general sobre cuál término es dominante y por lo tanto cuál sería el resultado en un caso límite. Del análisis numérico del capítulo anterior se encontró que  $\gamma$  es del orden de 10 y que se da preferencia a valores de masa  $m$  menores que  $H$ . Por lo tanto, el factor dentro de la raíz en 7.4.5 no llevará a una divergencia, y el espectro  $P_{\delta R}$  tendrá un valor grande comparado con  $P_{\delta L}$ . En este supuesto, se tendría que  $P_{\parallel} = P_+$  lo cual corresponde a lo que se llama producción de partículas isótropa porque el espectro llamado longitudinal y transversal es el mismo. Este resultado no es de sorprender debido al alto grado de simetría encontrado en el modelo.

Con los resultados encontrados para las perturbaciones en los campos, es posible obtener el espectro de la perturbación primordial en la curvatura  $P_{\zeta}$  como se indicó en el capítulo 3. Para esto, se debe encontrar las derivadas de  $N$  con respecto a los campos del fondo y usarlas en la ec. 3.0.20. Este proceso hace parte de un futuro estudio en el cual se incluye también un análisis acerca de la perturbación en la métrica, específicamente la evolución de las llamadas perturbaciones tensoriales ya que con éstas se determina la razón tensor-escalar

$$r = \frac{P_T}{P_{\zeta}}, \quad (7.4.8)$$

importante para contrastar el modelo con las observaciones. Igualmente, se desea determinar el índice espectral el cual se define, para una caso de  $\phi^a$  campos escalares, como sigue

$$n_s = \frac{d \ln P_{\zeta}}{d \ln k} = 3 + \frac{k^3}{2\pi^2 P_{\zeta}} \sum_{\alpha} \frac{\partial N}{\partial \phi^a} \frac{\partial N}{\partial \phi^b} \frac{D(\phi_k^{a\alpha} \phi_k^{b\alpha})}{\partial \ln k}, \quad (7.4.9)$$

en donde el operador  $D$  para una cantidad  $X^a$  se define como  $DX^a = dX^a + \Gamma_{bc}^a X^b d\phi^c$  y  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} h^{ad} (h_{db,c} + h_{dc,b} - h_{bc,d})$  [Sasaki & Stewart \(1996\)](#). Como se puede ver en la definición 7.4.9,  $n_s$  determina cómo es la dependencia del espectro de perturbaciones de  $\zeta$  con respecto a la escala de observación ( $k/aH$ ). Si bien en la mayoría de los casos se obtiene un espectro invariante de escala (e.g.  $P_{\delta\phi} = (H/2\pi)^2$  para el caso de un campo escalar), esto se debe a la aproximación de Sitter; en un escenario en donde el horizonte incrementa lentamente, el espectro se ve modificado por un factor que depende de la escala generalmente despreciable:  $P = (H/2\pi)^2 (k/aH)^{n_s-1}$  [Lyth & Liddle \(2009\)](#); [Weinberg \(2008\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#). La cantidad  $n_s$  también puede ser escrita de la siguiente manera en función de  $\bar{\eta}$ ,  $\varepsilon$  y  $r$  [Lyth & Liddle \(2009\)](#):

$$n_s - 1 = 2\bar{\eta} - 2\varepsilon - \frac{r}{4}, \quad (7.4.10)$$

en donde  $\bar{\eta}$  es un parámetro definido a través del parámetro de rodadura lenta  $\eta$  (por lo que está relacionado con el potencial del modelo, en este caso del término masivo en la acción),  $\varepsilon$  el parámetro de rodadura lenta definido en 6.3.1 y  $r$  la razón tensor-escalar 7.4.8. La motivación para determinar  $r$  y  $n_s$  está basada en el hecho de que el modelo original de Gauge-flation está descartado por las observaciones; en la referencia Namba *et al.* (2013) se observa que no hay valor para  $\gamma$  que permita tener de manera simultánea resultados para  $r$  y  $n_s$  acordes con las observaciones ( $0,9457 < n_s < 0,9749$  y  $r < 0,11$  Ade *et al.* (2013c); Namba *et al.* (2013)). Es decir, si se construyera en un gráfico de  $r$  vs  $n_s$  se encontraría que la predicción del modelo está por fuera de la ventana de parámetros permitida por las observaciones (ver Fig. 7.5). La idea de modificar el modelo se centra en la corrección de dicho gráfico ( $r$  vs  $n_s$ ), ya que, debido a que se tiene un parámetro adicional,  $m$ , existe la posibilidad de encontrar un conjunto de parámetros para el nuevo modelo que hagan que las predicciones de éste se encuentren en la ventana de parámetros permitida por las observaciones Ade *et al.* (2013c,a). Los resultados dados en 7.4.6 y 7.4.7 permiten encontrar  $P_\zeta$ , para el cual se espera que su amplitud espectral no sea vea afectada por las perturbaciones en la métrica; así, resta encontrar cómo es el espectro de las perturbaciones tensoriales de la métrica para encontrar  $r$  y por lo tanto  $n_s$ , permitiendo determinar si el modelo puede ajustarse a los resultados de la sonda Planck Ade *et al.* (2013c,a). Como se puede ver en la figura 5.3, la predicción de  $r$  vs  $n_s$  para el modelo Gauge-flation sin masa estaría corrido hacia la izquierda respecto a la región favorecida por las observaciones dada en la figura 7.5. Con la inclusión de un término masivo, se espera que haya un aumento en el parámetro  $\bar{\eta}$  que lleve a una contribución positiva en 7.4.10 tal manera que su efecto sea aumentar el valor de  $n_s$ , generando así que la nueva predicción de  $r$  y  $n_s$  se mueva hacia la derecha y entre en la ventana de parámetros permitida por las observaciones.

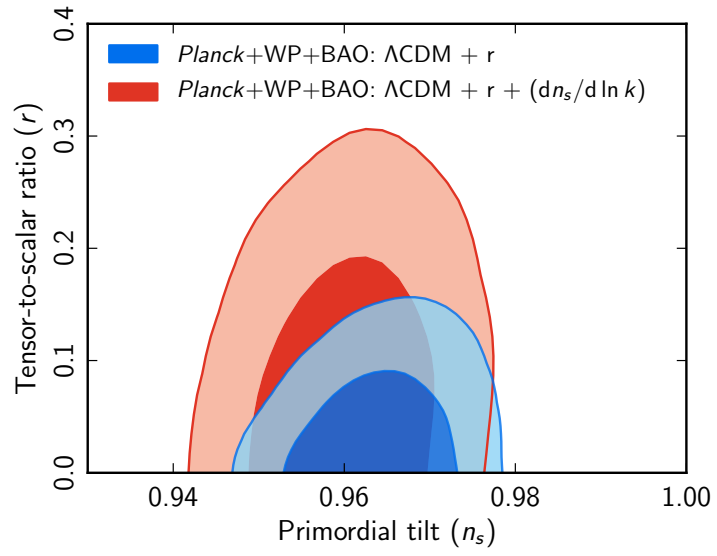


Figura 7.5: Contornos para intervalos de confianza 68% y 95% de  $r$  y  $n_s$  usando Planck+WP+BAO.

# 8

## Conclusiones

El modelo inflacionario llamado Gauge-flation [Maleknejad & Sheikh-Jabbari \(2011\)](#) presenta propiedades deseadas como la evolución lenta del campo seguida de un comportamiento oscilatorio, la existencia de un período de rodadura lenta caracterizado por el parámetro  $\varepsilon$  y una dinámica interesante entre las diferentes componentes del modelo que permiten obtener un valor para el monto de inflación dentro del intervalo establecido. Sin embargo, se presentan problemas a nivel perturbativo debido a que se encuentra inestabilidad taquiónica para la región  $\gamma < 2$ , más aún, para la región estable no se encuentra un valor de  $\gamma$  que genere resultados para  $r$  y  $n_s$  acordes con las observaciones [Ade et al. \(2013c\)](#); [Namba et al. \(2013\)](#). Por esto, se propuso una modificación que preservara las propiedades inflacionarias originales pero que condujera a resultados diferentes en el régimen perturbativo, abriendo la posibilidad de obtener valores de  $r$  y  $n_s$  adecuados según las observaciones.

El estudio del modelo a orden cero presentó resultados interesantes respecto a la nueva dinámica inflacionaria. Al igual que en el caso original, se obtuvo una dinámica entre las diferentes componentes del modelo provenientes de los términos de Yang-Mills,  $\kappa$  y masivo. A partir de estas componentes, se determinó la condición para obtener una era de expansión inflacionaria y las condiciones del régimen de rodadura lenta. De manera analítica se hallaron los parámetros de rodadura lenta y como resultado principal se obtuvo el monto de inflación como función de los parámetros del modelo al inicio de inflación (ec. 6.3.19). La validez de esta expresión y las condiciones sobre inflación del tipo rodadura lenta fueron verificadas en la solución numérica de las ecuaciones de evolución, en donde se encontró que el campo presenta una zona de variación lenta que permite prolongar el período inflacionario hasta el momento justo cuando se ha llegado al monto de inflación mínimo establecido. En cada uno de los casos ilustrados en la sección 6.4 se analizó la dinámica de las diferentes componentes de la densidad de energía,  $\rho_\kappa$ ,  $\rho_{YM}$  y  $\rho_{mass}$  encontrándose que es posible obtener las características deseadas de inflación para diferentes valores de condiciones iniciales.

En el capítulo 7 se estudió cómo las fluctuaciones cuánticas de los campos, más la expansión acelerada, permiten obtener perturbaciones clásicas en escalas de superhorizonte, las cuales se hacen responsables de la generación de estructuras a gran escala. En las gráficas 7.2 y 7.4, se aprecia cómo los modos asociados a las perturbaciones en los campos adquieren un valor constante en el tiempo diferente de cero, evidenciando la producción de perturbaciones clásicas a partir de fluctuaciones cuánticas. Para llegar a los resultados mencionados fue necesario pasar por diferentes etapas, en las cuales se determinó la manera en que se debe descomponer el campo en modos paralelos y perpendiculares al vector  $\mathbf{k}$ . Después de varios análisis se llegó a la conclusión de que no todos los modelos pueden ser estudiados de la misma forma; en ocasiones se requieren romper paradigmas establecidos acerca del tratamiento de problemas. En el presente modelo se vio que la descomposición usual de las perturbaciones y la ecogenia de  $\mathbf{k}$  realizada en estudios anteriores no funciona en este caso, lo cual llevó a una redefinición de los modos. Con la parametrización encontrada, se obtuvieron las soluciones para cada modo en el régimen de subhorizonte y superhorizonte respectivamente, las cuales se empalmaron a la salida del horizonte para determinar los espectros asociados a los respectivos modos. De manera similar al caso original, se encontró que existe una zona prohibida para  $\gamma$  en la que se llega a inestabilidad taquiónica; en la zona estable se llega a resultados para los espectros que dependen del parámetro  $\gamma$  y  $\omega$  los cuales pueden ser ajustados para que se obtengan valores de  $r$  y  $n_s$  acordes con las observaciones. Para obtener las expresiones de  $r$  y  $n_s$  se utilizan los resultados encontrados para  $P_{\parallel}$  y  $P_{+}$ , mediante los cuales se obtiene  $P_{\zeta}$ . Así, como se describió en la sección 7.4 del capítulo 7, sólo se requiere saber la dinámica de las perturbaciones tensoriales de la métrica para poder predecir qué forma tienen  $r$  y  $n_s$ . De esta manera, los resultados y análisis mostrados en el presente trabajo, dejan abierta la posibilidad de encajar el modelo en la ventana de parámetros favorecida por las observaciones, una vez se sigan los pasos expuestos en el capítulo 7 que harán parte de un estudio que se llevará a corto plazo al interior del grupo de investigación.

# Bibliografía

- ACKERMAN, L., CARROLL, S. M. & WISE, M. B. (2007). *Imprints of a Primordial Preferred Direction on the Microwave Background*. *Phys. Rev.* **D75**, 083502.
- ADE, P. A. R. *et al.* (2013a). Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation arXiv:1303.5082 [astro-ph.CO].
- ADE, P. A. R. *et al.* (2013b). *Planck Collaboration 2013 results. I. Overview of products and scientific results* arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO].
- ADE, P. A. R. *et al.* (2013c). *Planck Collaboration 2013 results. XVI. Cosmological parameters* arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- ADE, P. A. R. *et al.* (2013d). *Planck Collaboration 2013 results. XXIII. Isotropy and Statistics of the CMB* arXiv:1303.5083 [astro-ph.CO].
- AHARONOV, Y., KOMAR, A. & SUSSKIND, L. (1969). *Superluminal Behavior, Causality, and Instability*. *Phys. Rev.* **182**, 1400.
- AKRAMI, Y. *et al.* (2014). *Power asymmetry in WMAP and Planck temperature sky maps as measured by a local variance estimator*. *Astrophys. J.* **784**, L42.
- ALTARELLI, G. *et al.* (2008). *Theory and Experiments, Landolt-Börnstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms, Volume A* Berlin, Germany: Springer Pub. Co.
- BAUMANN, D. (2009). *TASI Lectures on inflation* arXiv:0907.5424 [hep-th].
- BAUMANN, D. & PEIRIS, H. V. (2009). *Cosmological inflation: theory and observations*. *Adv. Sci. Lett.* **2**, 105.
- BAUMANN, D. *et al.* (2009). *CMBPol Mission concept study: probing inflation with CMB polarization*. *AIP Conf. Proc.* **1141**, 10.

- BELTRAN ALMEIDA, J. P., RODRIGUEZ, Y. & VALENZUELA-TOLEDO, C. A. (2014). *Running non-Gaussianity in the presence of inflationary vector fields* arXiv.1405.7374 [astro-ph.CO].
- BENNETT, C. *et al.* (2013). *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results*. *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 20.
- BENNETT, C. L. *et al.* (1996). *Four year COBE DMR cosmic microwave background observations: Maps and basic results*. *Astrophys. J.* **464**, L1.
- BENNETT, C. L. *et al.* (2011). *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Are There Cosmic Microwave Background Anomalies?* *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 17.
- BENTO, M. C. *et al.* (1993). *On the cosmology of massive vector fields with  $SO(3)$  global symmetry*. *Class. Quant. Grav.* **10**, 285.
- DICKE, R. H., PEEBLES, P. J. E., ROLL, P. G. & WILKINSON, D. T. (1965). *Cosmic black-body radiation*. *Astrophys. J.* **142**, 414.
- DIMASTROGIOVANNI, E., BARTOLO, N., MATARRESE, S. & RIOTTO, A. (2010). *Non-Gaussianity and Statistical Anisotropy from Vector Field Populated Inflationary Models*. *Adv.Astron.* **2010**, 752670.
- DIMOPOULOS, K. (2006). *Can a vector field be responsible for the curvature perturbation in the Universe?* *Phys. Rev.* **D74**, 083502.
- DIMOPOULOS, K. (2009). *Where galaxies really come from*. *Contemp. Phys.* **50**, 633.
- DIMOPOULOS, K., KARCIAUSKAS, M., LYTH, D. H. & RODRIGUEZ, Y. (2009). *Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations*. *JCAP* **0905**, 013.
- DIMOPOULOS, K., KARCIAUSKAS, M. & WAGSTAFF, J. M. (2010). *Vector Curvaton with varying Kinetic Function*. *Phys. Rev.* **D81**, 023522.
- DODELSON, S. (2003). *Modern cosmology* Amsterdam, Netherlands: Academic Press.
- ESPOSITO-FARESE, G., PITROU, C. & UZAN, J.-P. (2010). *Vector theories in cosmology*. *Phys. Rev.* **D81**, 063519.
- FLENDER, S. & HOTCHKISS, S. (2013). *The small scale power asymmetry in the cosmic microwave background*. *JCAP* **1309**, 033.
- GIBBONS, G. W. & HAWKING, S. W. (1977). *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*. *Phys. Rev. D* **15**, 2738.

- GOLOVNEV, A., MUKHANOV, V. & VANCHURIN, V. (2008). *Vector inflation*. *JCAP* **0806**, 009.
- GÓMEZ, L. G. (2012). *Anisotropía estadística en modelos infacionarios con múltiples campos vectoriales y/o expansión Anisótropa prolongada*. Trabajo de Grado, Maestría en Física Universidad Industrial de Santander.
- GOMEZ, L. G. & RODRIGUEZ, Y. (2013). *Statistical Anisotropy in Inflationary Models with Many Vector Fields and/or Prolonged Anisotropic Expansion*. *AIP Conf. Proc.* **1548**, 270–276.
- GROENEBOOM, N. E., ACKERMAN, L., WEHUS, I. K. & ERIKSEN, H. K. (2010). *Bayesian analysis of an anisotropic universe model: systematics and polarization*. *Astrophys. J.* **722**, 452.
- GROENEBOOM, N. E. & ERIKSEN, H. K. (2009). *Bayesian analysis of sparse anisotropic universe models and application to the 5-year WMAP data*. *Astrophys. J.* **690**, 1807.
- GUTH, A. H. (1981). *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*. *Phys. Rev.* **D23**, 347.
- HAWKING, S. (1975). *Particle Creation by Black Holes*. *Commun. Math. Phys.* **43**, 199.
- HINSHAW, G. *et al.* (2013). *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*. *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19.
- HOBSON, M., EFSTATHIOU, G. & LASENBY, A. (2006). *General relativity: an introduction for physicists* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- HUTERER, D., SHANDERA, S. & KOMATSU, E. (2010). *Testing the Gaussianity and Statistical Isotropy of the Universe*. *Adv. Astron.* **2010**, 697147.
- KANE, G. L. (1993). *Modern elementary particle physics, the fundamental particles and forces* Boston, USA: Addison-Wesley Press.
- KARCIAUSKAS, M. (2012). *The Primordial Curvature Perturbation from Vector Fields of General non-Abelian Groups*. *JCAP* **1201**, 014.
- KIM, C. W. & MURPHY, P. (1985). *Minimum amount of inflation to solve the flatness and horizon problems*. *Phys. Rev.* **D32**, 3303.
- KOMATSU, E. *et al.* (2011). *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*. *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18.
- LEE, H. *et al.* (2005). *A New delta N formalism for multi-component inflation*. *JCAP* **0510**, 004.

- LINDE, A. D. (1982). *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. *Phys. Lett.* **B108**, 389.
- LYTH, D. H. & LIDDLE, A. R. (2009). *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- LYTH, D. H., MALIK, K. A. & SASAKI, M. (2005). *A General proof of the conservation of the curvature perturbation*. *JCAP* **0505**, 004.
- LYTH, D. H. & RIOTTO, A. (1999). *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*. *Phys. Rept.* **314**, 1.
- LYTH, D. H. & RODRIGUEZ, Y. (2005). *The Inflationary prediction for primordial non-Gaussianity*. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 121302.
- MALEKNEJAD, A. & SHEIKH-JABBARI, M. (2011). *Non-Abelian gauge field inflation*. *Phys. Rev.* **D84**, 043515. arXiv:1102.1932v5 [hep-ph].
- MALEKNEJAD, A. & SHEIKH-JABBARI, M. (2013). *Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields*. *Phys. Lett.* **B723**, 224–228.
- MALEKNEJAD, A., SHEIKH-JABBARI, M. & SODA, J. (2012). *Gauge-flation and Cosmic No-Hair Conjecture*. *JCAP* **1201**, 016.
- MALEKNEJAD, A., SHEIKH-JABBARI, M. & SODA, J. (2013). *Gauge Fields and Inflation*. *Phys. Rept.* **528**, 161–261.
- MALIK, K. A. & WANDS, D. (2009). *Cosmological perturbations*. *Phys. Rept.* **475**, 1.
- MUKHANOV, V. (2005). *Physical foundations of cosmology* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- MUKHANOV, V. & WINITZKI, S. (2007). *Introduction to quantum effects in gravity* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- MUKHANOV, V. F., FELDMAN, H. A. & BRANDENBERGER, R. H. (1992). *Theory of cosmological perturbations*. *Phys. Rep.* **215**, 203.
- NAMBA, R., DIMASTROGIOVANNI, E. & PELOSO, M. (2013). *Gauge-flation confronted with Planck*. *JCAP* **1311**, 045.
- NIETO, C. (2012). *Inflación vectorial a partir de campos de Gauge no Abelianos*. Trabajo de Grado, Pregrado en Física Universidad Industrial de Santander.
- NIETO, C. & RODRÍGUEZ, Y. (2014). *Inflación vectorial en el marco de las teorías de Gauge no Abelianas*. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **38**, 7.

- PEEBLES, J. E., PAGE, L. A. J. & PARTRIDGE, R. B. (2009). *Finding the Big Bang* New York, USA: Cambridge University Press.
- PENROSE, R. (2004). *The road to reality: a complete guide to the laws of the universe* London, UK: Vintage Books.
- PENZIAS, A. A. & WILSON, R. W. (1965). *A measurement of excess antenna temperature at 4080- Mc/s. Astrophys. J.* **142**, 419.
- POKORSKI, S. (2000). *Gauge fields theory* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- RYDER, L. H. (1985). *Quantum Field Theory* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- SACHS, R. K. & WOLFE, A. M. (1967). *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. Astrophys. J.* **147**, 73.
- SASAKI, M. & STEWART, E. D. (1996). *A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation. Prog. Theor. Phys.* **95**, 71.
- STAROBINSKY, A. A. (1980). *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. Phys. Lett.* **B91**, 99.
- STAROBINSKY, A. A. (1985). *Multicomponent de Sitter (Inflationary) Stages and the Generation of Perturbations. JETP Lett.* **42**, 152.
- VALENZUELA-TOLEDO, C. A., RODRIGUEZ, Y. & BELTRAN ALMEIDA, J. P. (2011). *Feynman-like Rules for Calculating n-Point Correlators of the Primordial Curvature Perturbation. JCAP* **1110**, 020.
- WANDS, D., MALIK, K. A., LYTH, D. H. & LIDDLE, A. R. (2000). *A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales. Phys. Rev.* **D62**, 043527.
- WATANABE, M.-A., KANNO, S. & SODA, J. (2009). *Inflationary Universe with Anisotropic Hair. Phys. Rev. Lett.* **102**, 191302.
- WEINBERG, S. (1996). *The quantum theory of fields, Volume 2: modern applications* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- WEINBERG, S. (2008). *Cosmology* Oxford, UK: Oxford University Press.
- WU, K. K. S., LAHAV, O. & REES, M. J. (1999). *The large-scale smoothness of the Universe. Nature* **397**, 225.
- YADAV, J., BHARADWAJ, S., PANDEY, B. & SESHADRI, T. R. (2005). *Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey data release one. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364**, 601.