

IMPLEMENTACIÓN DE TALLERES BASADOS EN CADENAS DE MARKOV DE
TIEMPO DISCRETO CON PROBABILIDADES ESTACIONARIAS, PARA LA
ASIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

JOSÉ HUMBERTO ARAQUE MEZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
INGENIERÍA INDUSTRIAL
BUCARAMANGA
2012

IMPLEMENTACIÓN DE TALLERES BASADOS EN CADENAS DE MARKOV DE
TIEMPO DISCRETO CON PROBABILIDADES ESTACIONARIAS, PARA LA
ASIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

JOSÉ HUMBERTO ARAQUE MEZA

Práctica en docencia
Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero Industrial

Director:
Carlos Eduardo Díaz Bohórquez
Magíster en Ingeniería Industrial

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
INGENIERÍA INDUSTRIAL
BUCARAMANGA
2012

Dedicatoria

*Muy especialmente a mi nona Rosa quien siempre
esperó la llegada de este momento, pero partió
antes de que lograra alcanzarlo.*

Agradecimientos

A Dios por su infinito amor y la maravillosa oportunidad que me dio para alcanzar esta meta y poder compartir la con mi familia.

A mis padres en especial a mi mamá quien a pesar de las dificultades siempre ha estado a mi lado apoyándome.

A mi maravillosa hija, quien es la luz de mi vida y siempre ha estado a mi lado motivándome y animándome.

A mi director de proyecto por todo su apoyo, sus conocimientos y su dirección a lo largo de todo el trabajo realizado

A los estudiantes de Investigación de Operaciones II por su participación y colaboración en esta experiencia.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	18
CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS	19
1. GENERALIDADES	20
1.1 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA	20
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	20
1.3 ALCANCE	21
1.4 OBJETIVOS	21
1.4.1 General.	21
1.4.2 Específicos.	21
2. MARCO TEÓRICO	23
2.1 TEORÍA DE GRAFOS	23
2.2 CADENAS DE MARKOV	31
2.2.1 Procesos estocásticos y procesos de Markov.	32
2.2.2 Cadenas de Markov.	33
2.2.3 Probabilidades de transición (de un paso).	34
2.2.4 Probabilidades de transición de n pasos.	35
2.2.5 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.	36
2.2.6 Diagrama de transición.	37
2.2.7 Matriz de transición.	37
2.2.8 Orden de las cadenas de Markov.	38
2.2.9 Probabilidades absolutas o incondicionales.	40
2.2.10 Clasificación de estados.	40
2.2.11 Clases comunicantes.	42
2.2.12 Clasificación de las cadenas de Markov.	43
2.2.13 Probabilidades de estado estable.	49

2.2.14 Tiempos de interés.	52
2.2.15 Cadenas absorbentes.	53
2.2.16 Cadenas de Markov con remuneración	55
2.2.17 Procesos de decisión markovianos.	56
2.3 CADENAS DE MARKOV EN EL MUNDO REAL	57
3. APLICACIONES DE SOFTWARE EXISTENTE	60
3.1 WINQSB	60
3.2 SOFTWARE EDUCATIVO, CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO	61
3.3 MARKOV EXCEL	62
4. ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS	64
4.1 EL APRENDIZAJE	64
4.2 LA CLASE EXPOSITIVA	67
4.2.1 Uso apropiado.	67
4.2.2 Partes.	68
4.2.3 Problemas.	68
4.3 EL APRENDIZAJE COLABORATIVO	70
4.3.1 Objetivos.	70
4.3.2 Principios rectores.	71
4.3.3 Ventajas.	73
4.3.4 Desventajas.	74
4.3.5 Roles.	75
4.3.6 Estrategias.	76
4.3.7 Formas.	77
4.3.8 Evaluación.	77
4.4 LA CLASE EXPOSITIVA COLABORATIVA	79
4.5 EL TALLER	81
5. DISEÑO DE LA HERRAMIENTA	84
5.1 FUNCIONES BOOLEANAS	87
5.2 FUNCIONES MATRICIALES	90

5.3 FUNCIONES NO MATRICIALES	96
6. DISEÑO DEL MATERIAL DE CLASE	97
6.1 DISEÑO DE LAS PRESENTACIONES	99
6.2 DISEÑO DE LOS TALLERES	105
6.3 DISEÑO DEL MATERIAL TEÓRICO	107
6.4 DISEÑO DE LOS QUICES - PREGUNTAS	107
6.5 DISEÑO DEL TRABAJO FINAL	108
7. ELABORACIÓN DE LA DOCUMENTACIÓN	109
7.1 DOCUMENTACIÓN DE LOS TALLERES	109
7.2 DOCUMENTACIÓN DE LA HERRAMIENTA	109
8. VALIDACIÓN DE LOS TALLERES Y DE LA HERRAMIENTA	110
8.1 PRUEBA PILOTO	110
8.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS	114
8.2.1 Metodología y evaluación.	114
8.2.2 Material elaborado.	116
8.2.3 Tiempo dedicado.	119
8.2.4 Herramientas de cálculo.	120
8.2.5 Temas claros y por profundizar.	123
8.2.6 Comentarios.	125
9. CONCLUSIONES	128
10. RECOMENDACIONES	130
11. HERRAMIENTAS USADAS	131
BIBLIOGRAFÍA	132
ANEXOS	134

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Requisitos obligatorios para diferentes tipos de trayectorias.	27
Tabla 2. Matriz de adyacencia.	28
Tabla 3. Matriz de incidencia.	30
Tabla 4. Matriz de conectividad.	31
Tabla 5. Clasificación según el número de clases recurrentes	44
Tabla 6. Clasificación según el número de clases recurrentes	47
Tabla 7. Porcentaje de retención de la información según la forma como se adquiere	65
Tabla 8. Ventajas del aprendizaje colaborativo	74
Tabla 9. Comparativa entre Microsoft Office y LibreOffice.	85
Tabla 10. Iconos de navegación de las diapositivas.	104
Tabla 11. Modelo de evaluación	111
Tabla 12. Modelo de evaluación	330
Tabla 13. Íconos de navegación de las diapositivas.	334

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Formas de representar un grafo	23
Figura 2. Grafo dirigido o digrafo.	24
Figura 3. Ejemplo de grafo dirigido.	24
Figura 4. Clasificación de estados	40
Figura 5. Clases de estados	43
Figura 6. Cadena de Markov ergódica	45
Figura 7. Cadena de Markov semi-ergódica	45
Figura 8. Cadena de Markov no ergódica.	46
Figura 9. Cadenas según la periodicidad de las clases recurrentes	48
Figura 10. Cadena absorbente.	54
Figura 11. Las memorias en la percepción y el aprendizaje.	66
Figura 12. Concepto de taller.	82
Figura 13. Patrón para contenido teórico.	100
Figura 14. Patrón para ejemplos.	101
Figura 15. Patrón para realizar actividad del taller.	101
Figura 16. Patrón para realizar actividad.	102
Figura 17. Patrón para ejemplo de uso del computador.	102
Figura 18. Menú principal de las diapositivas.	103
Figura 19: Características del conjunto de estados.	281
Figura 20: Propiedad markoviana.	282
Figura 21: Transición	282
Figura 22: Qué define un estado.	283

Figura 23: Propiedades de	284
Figura 24: Clasificación según la dependencia de t .	284
Figura 25: Componentes diagrama de transición.	285
Figura 26: Ejemplo diagrama de transición.	285
Figura 27: Componentes de la matriz de transición.	286
Figura 28: Ejemplo matriz de transición.	286
Figura 29: n transiciones.	287
Figura 30: Probabilidades de transición de n pasos	287
Figura 31: Propiedades de	288
Figura 32: l_r de a en transiciones.	289
Figura 33: Multiplicación de matrices en hoja de cálculo.	290
Figura 34: Cadena de Markov de orden superior.	291
Figura 35: Transformación de una cadena de orden superior.	291
Figura 36: Estructura de la matriz de primer orden de una cadena de orden 2.	292
Figura 37: Clasificación de estados	293
Figura 38: Clasificación de estados según su accesibilidad.	293
Figura 39: Ejemplo 1, estados accesibles y no accesibles.	294
Figura 40: Ejemplo 2, estados accesibles y no accesibles.	294
Figura 41: Ejemplo 1, estados comunicantes.	294
Figura 42: Ejemplo 2 estados comunicantes.	295
Figura 43: Ejemplo clasificación de estados según su accesibilidad.	295
Figura 44: Clasificación de estados según su recurrencia.	296
Figura 45: Ejemplo estados periódicos y aperiódicos.	297
Figura 46: Ejemplo 1, estados transitorios y absorbentes.	297
Figura 47: Ejemplo 2, estados transitorios y absorbentes.	298

Figura 48: Ejemplo, clasificación de estados según su recurrencia.	298
Figura 49: Clase irreducible.	299
Figura 50: Clase reducible.	299
Figura 51: Clases comunicantes.	300
Figura 52: Clases comunicantes.	300
Figura 53: Cadena de Markov ergódica.	301
Figura 54: Cadena de Markov ergódica.	302
Figura 55: Evolución de cadenas ergódicas	302
Figura 56: Tiempo de primera pasada.	304
Figura 57: Tiempo de recurrencia.	305
Figura 58: Cadena absorbente.	306
Figura 59: Costos asociados a cada transición	307
Figura 60: Proceso de decisión markoviano	309
Figura 61. Patrón para contenido teórico.	331
Figura 62. Patrón para ejemplos.	332
Figura 63. Patrón para realizar actividad del taller.	333
Figura 64. Patrón para realizar actividad.	333
Figura 65. Patrón para ejemplo de uso del computador.	334
Figura 66. Menú principal de las diapositivas.	335

LISTA DE ANEXOS

	pág.
ANEXO A. PROGRAMA DE LA ASIGNATURA.....	135
ANEXO B. MAPA MENTAL DE CADENAS DE MARKOV.....	139
ANEXO C. CADENAS DE MARKOV EN EL MUNDO REAL.....	141
ANEXO D. LA ENSEÑANZA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.....	154
ANEXO E. CÓDIGO BASIC DE LAS MACROS.....	167
ANEXO F. TALLERES ELABORADOS.....	187
ANEXO G. DIAPOSITIVAS ELABORADAS.....	201
ANEXO H. MATERIAL TEÓRICO ELABORADO.....	278
ANEXO I. BANCO DE PREGUNTAS ELABORADO.....	312
ANEXO J. FORMATO DE QUIZ ELABORADO.....	322
ANEXO K. FORMATO DE TRABAJO FINAL.....	324
ANEXO L. GUÍA DEL DOCENTE PARA LA IMPLEMENTACIÓN.....	326
ANEXO M. SOLUCIÓN DE LOS TALLERES.....	337
ANEXO N. GUÍA DE USUARIO DE LAS MACROS.....	352
ANEXO O. EJEMPLO DE USO DE LAS MACROS.....	362
ANEXO P. LISTADO DE ESTUDIANTES QUE PARTICIPARON.....	364
ANEXO Q. GUÍA PARA DETERMINAR LOS ESTADOS Y ELABORAR LA MATRIZ DE TRANSICIÓN.....	367
ANEXO R. GUÍA PARA CONSTRUIR Y RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE MEDIANTE UNA HOJA DE CÁLCULO.	370
ANEXO S. GUÍA PARA CONSTRUIR Y RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA CALCULAR LOS TIEMPOS DE PRIMERA PASADA MEDIANTE UNA HOJA DE CÁLCULO.....	373

ANEXO T. EJEMPLO ILUSTRATIVO DE CADENAS DE ORDEN SUPERIOR...	375
ANEXO U. FORMATO DE ENCUESTA FINAL A ESTUDIANTES.....	380

RESUMEN

TÍTULO: IMPLEMENTACIÓN DE TALLERES BASADOS EN CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO CON PROBABILIDADES ESTACIONARIAS, PARA LA ASIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II*.

AUTOR: JOSÉ HUMBERTO ARAQUE MEZA**.

PALABRAS CLAVE:

Investigación de operaciones, cadenas de Markov de tiempo discreto, talleres, enseñanza, aprendizaje, software libre, macros.

CONTENIDO:

Para facilitar el aprendizaje de las cadenas de Markov de tiempo discreto, tema perteneciente a la asignatura investigación de operaciones II, se propone el uso del aprendizaje colaborativo, planteando como estrategia el uso de las clases expositivas colaborativas, en las que mediante la realización de talleres asistidos por el docente, los estudiantes organizados en pequeños grupos logren aprender el tema y al mismo tiempo desarrollar habilidades sociales y colaborativas.

Dada la relación que existe entre las cadenas de Markov y la teoría de grafos, se inicia con una revisión bibliográfica sobre este segundo tema, que servirá de base para los algoritmos desarrollados, continuando luego con el primero.

Se presentan algunas alternativas de software que facilitan los cálculos para el análisis de las cadenas de Markov, y se desarrolla y propone una nueva alternativa de software libre mediante el uso de funciones elaboradas mediante macros para la hoja de cálculo LibreOffice Calc, con su respectiva guía de uso.

El material desarrollado está compuesto por talleres, a los que adicionalmente para complementarlos y poder ofrecer una mejor experiencia en el aprendizaje de las cadenas de Markov de tiempo discreto, se incluyeron presentaciones de diapositivas con alto contenido gráfico, material teórico que sirva como texto de consulta, donde se compilaron y sintetizaron los conceptos del tema, un banco de preguntas para evaluar el aprendizaje, y algunas guías en las que se explican paso a paso algunos procedimientos.

* Proyecto de grado.

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Director: Carlos Eduardo Díaz Bohórquez.

ABSTRACT

TITLE: IMPLEMENTATION OF WORKSHOPS BASED ON MARKOV CHAINS IN DISCRETE TIME WITH PROBABILITIES STATIONARY, FOR THE COURSE OPERATIONS RESEARCH II*.

AUTHOR: JOSÉ HUMBERTO ARAQUE MEZA**.

KEY WORDS:

Operations Research, Markov chains in discrete time, workshops, teaching, learning, free software, macros.

DESCRIPTION:

To facilitate learning of Markov chains in discrete time, the subject matter pertaining to operations research II, we propose the use of collaborative learning, as a strategy to raise the use of collaborative lectures, in which by conducting workshops assisted by the teacher, students organized in small groups to learn the subject and achieve while developing social and collaborative skills.

Given the relationship between Markov chains and graph theory, begins with a literature review on this second issue, which is the basis for the algorithms developed, continuing with the first.

Present some software that facilitate the calculations for analysis of Markov chains, and develops and proposes a new open source alternative functions using macros developed by the LibreOffice Calc spreadsheet with the respective guide use.

The material developed is composed of workshops, which additionally to complement and offer a better learning experience Markov chains in discrete time, included slide shows with high graphic content, theoretical material to serve as query text, which were compiled and synthesized the concepts of the topic, a bank of questions to assess learning, and some guides that explain some procedures step by step.

* Degree work.

** Faculty of Physics-Mechanics Engineering, School of Industrial and Business Studies, Director: Carlos Eduardo Diaz Bohorquez.

INTRODUCCIÓN

De los diferentes sistemas y procesos que podemos encontrar en el día a día (valor de una acción en el mercado, condición climática, ocupación de una sala de espera), pueden hacerse mediciones de alguna de sus características con cierto intervalo de tiempo para conocer su comportamiento.

A fin de poder pronosticar el estado futuro de estos sistemas basado en estados anteriores, y poder tomar decisiones acertadas, para minimizar impactos negativos o aprovechar mejor oportunidades, es necesario contar y conocer de herramientas confiables que apoyen el proceso de toma de decisiones como lo son las cadenas de Markov.

Los futuros ingenieros industriales deben desarrollar competencias en el manejo de herramientas para la toma de decisiones, con las cuales su desempeño profesional será muy superior, contribuyendo al cumplimiento de los objetivos empresariales.

CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

Objetivo	Cumplimiento
<ul style="list-style-type: none">• Revisar y profundizar en la bibliografía de cadenas de Markov.	Capítulo 2
<ul style="list-style-type: none">• Revisar las aplicaciones existentes para el estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto.	Capítulo 3
<ul style="list-style-type: none">• Diseñar una serie de talleres prácticos que faciliten formar a los estudiantes en la aplicación de las cadenas de Markov.	Capítulo 4 Capítulo 6
<ul style="list-style-type: none">• Diseñar e implementar una herramienta para facilitar el análisis de cadenas de Markov.	Capítulo 5
<ul style="list-style-type: none">• Documentar los talleres y la herramienta desarrollados.	Capítulo 7
<ul style="list-style-type: none">• Realizar una prueba piloto con los estudiantes en cuanto a la metodología, talleres, manual y herramienta elaborados.	Capítulo 8

1. GENERALIDADES

1.1 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA

La Investigación de Operaciones es una rama de las matemáticas que mediante el uso de modelos matemáticos, algoritmos, y estadística, para apoyar el proceso de toma de decisiones. El objetivo es que las soluciones sean mas eficientes que aquellas tomadas sin ayuda de estas herramientas.

Los modelos de Investigación de Operaciones son frecuentemente usados para abordar una gran variedad de problemas de naturaleza real en ingeniería y ciencias sociales, lo que ha permitido a empresas y organizaciones importantes beneficios y ahorros asociados a su utilización.¹

En el ANEXO A. se encuentra el programa de la asignatura Investigación de Operaciones II, correspondiente a la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales de la Universidad Industrial de Santander.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aprendizaje del tema cadenas de Markov de primer orden, históricamente presenta dificultad a los estudiantes, haciéndose más complejo cuando las cadenas de Markov son de orden superior, unido a esto, no se cuenta con una herramienta capaz de realizar fácilmente los cálculos para su análisis. Se hace necesario facilitar a los estudiantes el proceso de aprendizaje y comprensión de este tema.

Es necesario hacer una profunda revisión bibliográfica, buscando aplicaciones

¹[InvOper] Citado en 2011-12-28

reales de las cadenas de Markov, para con ellas realizar el diseño de los talleres; adicionalmente diseñar la aplicación, desde el algoritmo, hasta la interfase con el usuario, para que sea lo suficientemente didáctica, robusta y fácil de utilizar para los estudiantes.

1.3 ALCANCE

Al finalizar el trabajo de grado se contará con:

- Talleres prácticos para el estudio de las cadenas de Markov .
- Herramienta software para facilitar el análisis de las cadenas de Markov.
- Manual de la herramienta software desarrollada.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 General.

Diseñar, documentar, implementar y evaluar talleres para facilitar el estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto con probabilidades estacionarias.

1.4.2 Específicos.

- Revisar y profundizar en la bibliografía de cadenas de Markov.
- Revisar las aplicaciones existentes para el estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto.
- Diseñar una serie de talleres prácticos que faciliten formar a los estudiantes en la aplicación de las cadenas de Markov
- Diseñar e implementar una herramienta para facilitar el análisis de cadenas de Markov
- Documentar los talleres y la herramienta desarrollados

- Realizar una prueba piloto con los estudiantes en cuanto a la metodología, talleres, manual y herramienta elaborados.

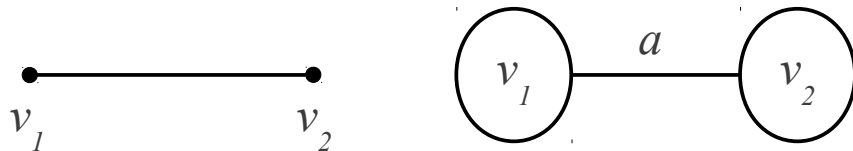
2. MARCO TEÓRICO

Considerando que las cadenas de Markov pueden ser representadas mediante un grafo dirigido (o digrafo) como se verá más adelante, y a fin de profundizar en el tema del presente trabajo, se inicia la revisión bibliográfica con una introducción a la teoría de grafos.

2.1 TEORÍA DE GRAFOS

Se denomina grafo a un conjunto V de n puntos (llamados también vértices o nodos), y un conjunto A de m relaciones entre pares ordenados de puntos llamadas aristas. Otra definición que puede encontrarse de grafo “es un diagrama que propiamente interpretado contiene información”¹. En la Figura 1 puede apreciarse las formas más comunes de representar un grafo.

Figura 1. Formas de representar un grafo



Fuente: Autor.

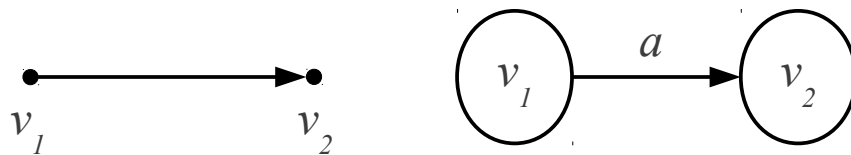
A cada vértice se le puede agregar una etiqueta para representar lugares, personas, productos, etc, e igualmente a cada arista es posible adicionarle una etiqueta para representar un costo, una distancia, un peso, etc.

A las aristas se les puede asignar un sentido en los casos en los que es necesario

¹ [Florez1993] p. 35.

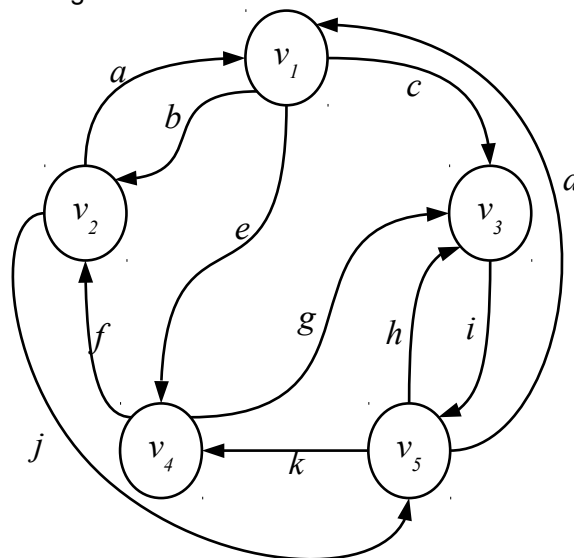
representar una relación unidireccional entre dos vértices (origen y destino), en cuyo caso podemos llamar a esta representación grafo orientado, dirigido o digrafo (en la Figura 2 vemos un ejemplo de su representación). Si la arista no indica ninguna dirección, se le considera bidireccional y al grafo resultante se le denomina grafo no orientado o simplemente grafo. En la Figura 3 se puede apreciar otro ejemplo de un grafo dirigido.

Figura 2. Grafo dirigido o digrafo.



Fuente: Autor.

Figura 3. Ejemplo de grafo dirigido.



Fuente: Autor.

Dos vértices son adyacentes si existe por lo menos una arista que los una, mientras que dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común. El grado

de un vértice esta determinado por el número de aristas que inciden* en él, y si el vértice tiene un bucle** su grado es dos. En un digrafo, el grado está dado por la suma de las aristas que entran y las que salen del nodo.

“Un camino es una sucesión de vértices tal que de cada uno de sus vértices existe una arista hacia el vértice sucesor”¹, en un camino o trayectoria los vértices y las aristas se pueden repetir y la longitud está determinada por el número de aristas recorridas. Cuando en un camino todas las aristas que lo conforman son diferentes se le denomina sendero o cadena. Si todos los vértices de un camino son diferentes se dice que es un camino simple o elemental, y para el caso particular en el que el primero y el último vértice son iguales se dice que corresponde a un camino cerrado.

Una trayectoria que inicia y termina en el mismo vértice, sin repetir ningún otro vértice se le llama ciclo, puede decirse que es un caso especial de camino cerrado donde no se repiten vértices.

Si no existen ciclos en el grafo, se dice que es un grafo acíclico, y si todas sus aristas tienen un sentido, es un grafo acíclico dirigido

Se tiene un grafo conexo cuando para un par de vértices cualquiera (v_1, v_2) existe por lo menos una trayectoria de v_1 a v_2 ; en el caso en que también exista por lo

* Una arista incide en un vértice cuando lo esta uniendo a otro.

** Un bucle o lazo es una arista cuyos extremos inciden en el mismo nodo.

¹ [WikiGloGraf] Citado en 2012-03-09

menos una trayectoria de v_2 a v_1 , al grafo se le llama grafo fuertemente conexo.

Si no existe por lo menos una trayectoria para por o menos dos vértices cualquiera, se tiene un grafo no conexo.

Un camino en el cual se recorren todas y cada una de las aristas del grafo una y solo una vez se le denomina camino euleriano, a este grafo se le llama grafo euleriano, de forma similar si existe un ciclo en el grafo en el que se recorren todas y cada una de las aristas una y solo una vez, se le llama ciclo euleriano.

Un camino en el que se recorren todos y cada uno de los vértices del grafo una y solo una vez se le denomina camino hamiltoniano, a este grafo se le denomina grafo hamiltoniano, de forma similar si existe un ciclo en el grafo en el que se recorren todos y cada uno de los vértices una y solo una vez, se le llama ciclo hamiltoniano.

Tabla 1. Requisitos obligatorios para diferentes tipos de trayectorias.

	Vértices			Aristas	
	$v_{inicial} = v_{final}$	No se repiten	Todos incluidos	No se repiten	Todas incluidas
Camino					
Camino simple		XX			
Camino cerrado	X				
Camino euleriano				X	X
Camino hamiltoniano		X	X		
Sendero				X	
Ciclo	X	X			
Ciclo euleriano	X			X	X
Ciclo hamiltoniano	X	X	X		

Fuente: Autor.

Es posible hacer una representación matricial de un grafo (según la teoría de grafos, toda matriz cuadrada tiene un grafo asociado a ella), a continuación se describen algunas de las matrices que se pueden elaborar.

Matriz de adyacencia. Es una matriz $H(n, n)$ en la que tanto filas como columnas representan los vértices, en cada elemento $H(i, j)$ se registra el número de aristas adyacentes que hay entre los vértices i y j . Ésta es una matriz simétrica

respecto a la diagonal principal excepto en el caso de los digrafos, mientras no existan aristas paralelas* esta será una matriz binaria.

En la Tabla 2 se encuentra la matriz de adyacencia correspondiente al grafo de la Figura 3.

Tabla 2. Matriz de adyacencia.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	1	0
v_2	1	0	0	0	1
v_3	0	0	0	0	1
v_4	0	1	1	0	0
v_5	1	0	1	1	0

Fuente: Autor.

La k -ésima potencia de la matriz de adyacencia está definida como:

$$H^k = H \odot H \dots H_k$$

Donde el operador \odot representa el producto booleano, el cual se calcula de

* Dos aristas son paralelas cuando comparten sus vértices inicial y final.

forma similar al producto cruz pero utilizando en vez de la adición el operador OR y en lugar de el producto el operador AND.

En la matriz H^k obtenida, se encontrará un 1 donde exista un camino de longitud k desde el vértice i al vértice j , y un 0 en caso de no existir ninguno.

Matriz de incidencia. En esta matriz $H(n, m)$ las filas representan los vértices y las columnas representan las aristas; es una matriz binaria, si un vértice i y una arista j son incidentes se registra un 1 en la respectiva posición $H(i, j)$ de lo contrario se registra 0.

Tabla 3. Matriz de incidencia.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
v_1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
v_3	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
v_5	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1

Fuente: Autor.

Matriz de conectividad. En esta matriz puede apreciarse si existe un camino (sin importar su longitud) entre cada uno de los vértices del grafo, es decir, si están o no conectados entre si.

$$H^\infty = H \vee H^2 \vee H^3 \vee \dots \vee H^n$$

puede calcularse H^k de dos formas diferentes, la primera como producto booleano de matrices donde se puede apreciar la conectividad y la longitud de las trayectorias, y la segunda forma, como producto aritmético de matrices donde adicionalmente nos indica el número de caminos que existen de un vértice i a un vértice j .

En la Tabla 4 se encuentra la matriz de conectividad correspondiente al grafo de la

Figura 3, en esta matriz se puede apreciar que todos sus elementos son 1 indicando esto que existe una trayectoria para cualquier par de vértices, es decir, se tiene un grafo fuertemente conexo.

Tabla 4. Matriz de conectividad.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	1	1	1
v_3	1	1	1	1	1
v_4	1	1	1	1	1
v_5	1	1	1	1	1

Fuente: Autor.

2.2 CADENAS DE MARKOV

Se elaboró un mapa mental con el contenido de cadenas de Markov de tiempo discreto a tratar, a fin de tener organizada de una forma visual la información y facilitar la revisión bibliográfica de los temas. Este mapa fue elaborado con Freeplane se encuentra disponible en formato .mm y .pdf y puede verse en el ANEXO B.

Los siguientes temas no se incluyen en la revisión bibliográfica, dado que se

encuentran fuera del alcance del presente trabajo:

- Cadenas de Markov de tiempo continuo.
- Cadenas de Markov reversibles.
- Modelos ocultos de Markov.

2.2.1 Procesos estocásticos y procesos de Markov.

La Real Academia Española define el término estocástico de dos formas, “Perteneiente o relativo al azar. Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado.”¹, conociendo esto, puede definirse proceso estocástico como “un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.”² en otras palabras, es la representación matemática de la evolución del estado de un sistema.

Debe definirse cual es la variable de interés en el sistema observado, a esta variable se denota como X_t , la cual representa el estado en el que se encuentra el sistema en el instante de tiempo t , este estado pertenece al conjunto de m estados colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes (denominado espacio de estados), conjunto que puede ser finito o infinito³, al igual que t .

¹ [Estocástico], citado en 2012-06-30

² [WikiPrEstoc] citado en 2011-12-29.

³ [Taha2004] p. 693.

Un proceso de Markov es un caso especial de proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov,

$$P(X_{t+1}=j|X_0=k_0, X_1=k_1, \dots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t=i) = P(X_{t+1}=j|X_t=i)$$

para $t=0,1,\dots$ y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$, es decir, que la probabilidad P de que el sistema se encuentre en el estado j en el instante $t+1$ depende únicamente del estado en el que se encontraba el sistema en el instante t , siendo totalmente independiente de los valores que haya tomado antes, en otras palabras, el estado futuro de un sistema depende únicamente del estado presente y no de su pasado.

El paso del instante t al instante $t+1$ se le denomina (una) transición.

2.2.2 Cadenas de Markov.

Una cadena de Markov es un caso especial de los procesos de Markov¹, ésta cuenta con un espacio de estados discreto y puede ser estudiada en tiempo discreto o continuo. En adelante siempre que se haga referencia a cadenas de Markov, se referirá a las de tiempo discreto mientras no se exprese lo contrario.

Como se mencionó en la sección anterior, es importante determinar claramente la variable de estudio, así como también es igualmente importante definir el tiempo de observación de dicha variable, dado que dependiendo del momento en el que se realice la observación podría tomar un valor u otro diferente.

¹ [Taha2004] p. 694.

Las aplicaciones de las cadenas de Markov pueden encontrarse en diferentes y variadas áreas como:

- Economía y finanzas
- Meteorología.
- Informática.
- Simulación.
- Modelos epidemiológicos.
- Juegos de azar.
- Física.
- Música.
- Comunicaciones.

2.2.3 Probabilidades de transición (de un paso).

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+1}=j|X_t=i)$, se denominan probabilidades de transición de un paso (para ir del estado i en el instante t al estado j en $t+1$) o simplemente probabilidades de transición, denotándose como p_{ij} , de tal forma que puede escribirse $P(X_{t+1}=j|X_t=i)=p_{ij}$.

Las probabilidades de transición deben cumplir con dos propiedades, la primera es

que $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para toda i, j , y la segunda $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, para toda i .

Cuando para cualquier par de estados i y j , y para toda t , la probabilidad condicional $P(X_{t+1}=j|X_t=i)$ sea independiente de t , a la cadena de Markov se le denomina homogénea. En adelante siempre que se mencionen cadenas de Markov se hará referencia a cadenas de Markov homogéneas.

2.2.4 Probabilidades de transición de n pasos.

De la misma forma que el paso del instante t al instante $t+1$ se le denomina (una) transición, el paso del instante t al instante $t+n$ se le denomina n transiciones.

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+n}=j|X_t=i)$, denominadas probabilidades de transición de n pasos, $p_{ij}^{(n)}$, son las probabilidades de que el sistema al cabo de n transiciones se encuentre en el estado j , dado que inició en el tiempo t en el estado i .

Al igual que las probabilidades de transición de un paso, las probabilidades de transición de n pasos tienen las mismas propiedades es decir que $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para

toda i, j , y $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, para toda i .

2.2.5 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Para calcular las probabilidades de transición de n pasos, se utilizan las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}, \quad 0 < r < n, \quad \forall i, j$$

Para ir del estado i , al estado j en n transiciones, el sistema llegará al estado k al cabo de r pasos ($p_{ik}^{(r)}$), y luego de $n-r$ pasos adicionales terminará en el estado j ($p_{kj}^{(n-r)}$).

Como puede verse en Hillier¹, los casos especiales cuando $r=1$ y $r=n-1$, obtenemos las expresiones:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \quad \text{y} \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, \quad \forall i, j$$

y para cuando $n=2$ se tiene

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^m p_{ik} p_{kj}, \quad \forall i, j$$

a partir de las probabilidades de transición de un paso, pueden obtenerse de manera recursiva las probabilidades de transición de n pasos.

¹ [Hillier2001], p. 808.

2.2.6 Diagrama de transición.

Una forma práctica de representar y entender mejor una cadena de Markov, es mediante la utilización de grafos dirigidos, donde cada uno de los m estados de la cadena será representado por un nodo y donde exista una probabilidad no nula de ir de un estado i a otro estado j se representará mediante una arista uniendo dichos estados (es decir si la probabilidad es 0 no existirá una arista), el peso de esta arista será el valor de la probabilidad condicional, en éste caso, al grafo se le denomina diagrama de transición.

2.2.7 Matriz de transición.

Debe recordarse que un grafo se puede representar matricialmente, y una de estas formas en las que se puede hacer es mediante la matriz de adyacencia, y dado que una cadena de Markov puede representarse mediante un grafo, también se puede hacer por medio de la matriz de adyacencia, solo que ésta va a tener una variante, en lugar de representar con un 1 la arista, se colocará el peso de la misma, es decir la probabilidad de transición p_{ij} correspondiente, a esta matriz de adyacencia modificada se le denomina matriz de transición T .

La matriz de transición es una matriz estocástica, donde cada una de sus filas son vectores de probabilidad (sus elementos toman valores entre 0 y 1, y la suma de todos sus elementos es 1). La estructura de la matriz es la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j, \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

De forma similar, puede elaborarse la matriz de transición de n pasos, es decir la matriz que contiene las probabilidades de transición de que el sistema pase de un estado i a un estado j al cabo de n transiciones:

$$T^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2m}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1}^{(n)} & p_{m2}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq p_{ij}^{(n)} \leq 1 \quad \forall i, j, \quad \sum_{j=1}^m p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

Los elementos de la matriz $T^{(2)}$ son los mismos $p_{ij}^{(2)}$ mencionados al final de... la sección 2.2.5 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov... los cuales se pueden obtener mediante $T^{(2)} = T \times T = T^2$, y generalizando tenemos que para calcular la matriz de transición de n pasos $T^{(n)}$, se realiza calculando la n -ésima potencia de T , así $T^{(n)} = T^n = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_{n-1} \times T_n$. El producto de dos matrices estocásticas es una matriz estocástica.

2.2.8 Orden de las cadenas de Markov.

2.2.8.1 Cadenas de Markov de primer orden.

Lo visto hasta el momento corresponde a cadenas de Markov de primer orden, es decir aquellas en las que el estado del sistema en el tiempo t , depende

únicamente del estado en el que se encontraba el sistema en el tiempo $t-1$.

2.2.8.2 Cadenas de Markov de orden superior.

Las cadenas de Markov de orden k ($k > 1$), son aquellas en las que el estado del sistema en el tiempo t , depende de los estados en los que se encontraba el sistema en los instantes $t-1$, $t-2$, ..., $t-k$.

El estudio de las cadenas de Markov de orden superior, puede hacerse mediante las cadenas de primer orden, “transformándolas adecuadamente”¹.

A partir de una cadena de Markov de orden k , con un número finito de estados m , se calcula la cantidad de estados de la cadena de primer orden equivalente mediante $m' = m^k$, estos estados así calculados, serán combinaciones ordenadas de las últimas k transiciones en las que estuvo el sistema. Por ejemplo, para una cadena de Markov de orden 2 con 2 estados A B , el número de estados de la cadena equivalente de primer orden es $m' = 2^2 = 4$, y los nuevos estados serán AA , AB , BA , BB .

Una vez se halla definido la matriz de primer orden equivalente, su estudio se

¹ [Fonollosa2005], p. 53.

realizará como cualquier otra matriz de primer orden.

2.2.9 Probabilidades absolutas o incondicionales.

Las probabilidades incondicionales son las probabilidades de que el sistema se encuentre en un determinado estado i , al cabo de n transiciones, dadas unas condiciones iniciales $P(0)$, este vector se denota como $P(n)$.

Para calcular las probabilidades absolutas debe realizarse $P(n) = P(0) \times T^n$.

2.2.10 Clasificación de estados.

Los estados de una cadena de Markov, pueden ser clasificados según su recurrencia o su accesibilidad. En la Figura 4 se resume la clasificación de los estados, los cuales serán definidos más adelante.

Figura 4. Clasificación de estados



Fuente: Autor

2.2.10.1 Clasificación según su accesibilidad.

Según su accesibilidad, los estados de las cadenas de Markov pueden clasificarse en tal y como se muestra en la siguiente figura.

Si el sistema inicia en un estado i , y al cabo de n transiciones, se llega a un

estado j , es decir, existe una trayectoria de i a j , se dice que j es accesible desde el estado i . Si no existe una trayectoria de i a j , simplemente se dice que j no es accesible desde i .

Si adicionalmente, también existe una trayectoria que conduzca de j a i , es decir, i es accesible desde j , entonces se dice que los estados se comunican o son comunicantes.

En la figura siguiente se puede apreciar un ejemplo de la clasificación de estados según su accesibilidad

2.2.10.2 Clasificación según su recurrencia.

Si el sistema una vez llega a un estado j , es posible que no se pueda regresar a él en futuras transiciones, se dice que el estado es transitorio. “Si un estado no es transitorio, se llama estado recurrente”¹.

Un estado recurrente (llamado también recurrente positivo), es aquel que una vez alcanzado por el sistema, es posible regresar a él posteriormente (en el largo plazo).

A un estado recurrente, al que se puede retornar sólo en los periodos múltiplos de

¹ [Winston2005], p. 933.

un determinado valor $k > 1$, se le denomina estado periódico donde k es el periodo. Para los estados para los cuales $k = 1$ se les llama aperiódicos. Si se inicia en un estado i , k será el mínimo número de transiciones que necesita el sistema para regresar al estado i donde se inició.

Los estados aperiódicos los podemos dividir en dos, aquellos para los cuales $p_{ii} = 1$ llamados estados absorbentes, ya que una vez que el sistema llega a ellos nunca los abandonan, y los otros estados no absorbentes para los cuales se cumple que $0 < p_{ii} < 1$.

2.2.11 Clases comunicantes.

Los estados según su accesibilidad pueden ser agrupados en clases, para hacer esto, debe tenerse en cuenta que dos estados que se comuniquen, pertenecen a la misma clase, equivalentemente, dos estados que no se comunican pertenecen a clases distintas. En el caso de los estados absorbentes, estos constituyen una clase de un único estado.

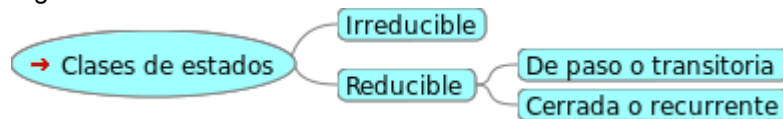
Cuando todos los estados de la cadena se comunican entre sí, solo existe una clase, a la cual se le denomina clase irreducible.

Una clase que no es irreducible, es reducible y contiene dos tipos de clases, transitorias (o de paso) y recurrentes (o cerradas). De forma similar a los estados transitorios y recurrentes, una clase es transitoria cuando una vez el sistema la

abandone, no es posible regresar a ella, y una clase recurrente es aquella que una vez el sistema se encuentre en ella, no es abandonada. Todo sistema debe tener por lo menos una clase recurrente.

Al igual que los estados, las clases también tienen un periodo, definido éste como el máximo común divisor de las longitudes de los ciclos que están presentes al interior de la clase, de esta forma, a las clases cuyo periodo $k > 1$ se les denomina clases periódicas y a aquellas en las que $k = 1$ son llamadas clases aperiódicas.

Figura 5. Clases de estados



Fuente: Autor

Todos los estados de una misma clase son transitorios o recurrentes y poseen el mismo periodo. Esto quiere decir que la recurrencia y la periodicidad son propiedades de clase.

2.2.12 Clasificación de las cadenas de Markov.

Como se mencionó al final de la sección 2.2.2, según las probabilidades de transición dependan o no del tiempo, las cadenas de Markov se clasifican en no homogéneas y homogéneas respectivamente. Adicionalmente pueden ser clasificadas como se verá en esta sección.

2.2.12.1 Clasificación según sus estados.

Las cadenas de Markov se pueden clasificar como:

- Cadenas absorbentes: son aquellas que poseen por lo menos un estado absorbente.
- Cadenas irreducibles: éstas poseen una única clase de estados.

Adicionalmente, se pueden clasificar según el número y la periodicidad de sus clases recurrente, como se verá a continuación.

2.2.12.2 Clasificación según el número de clases recurrentes.

En la Tabla 5 puede apreciarse ésta clasificación de las cadenas de Markov.

Tabla 5. Clasificación según el número de clases recurrentes

		Clases Recurrentes	
		Una	Varias
Clases Transitorias	Ninguna	Ergódica	(No aplica)
	Una o varias	Semiergódica	No ergódica

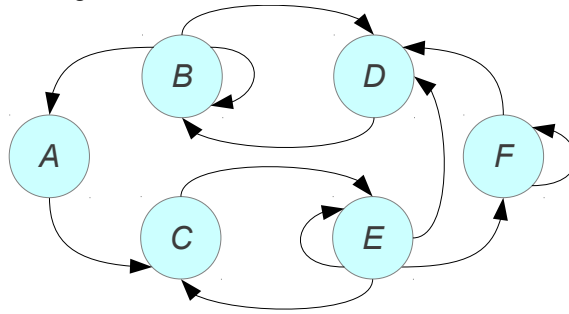
Fuente: Autor

2.2.12.2.1 Cadena de Markov ergódica.

"En una cadena ergódica, todos los estados se pueden dar en el largo plazo, todos ellos tienen una probabilidad no nula de aparecer. El comportamiento cualitativo de la cadena no varía a lo largo del tiempo. "1

¹ [Toro2005], p. 26.

Figura 6. Cadena de Markov ergódica

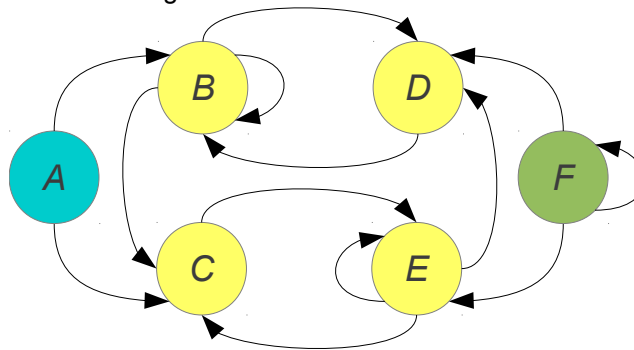


Fuente: Autor.

2.2.12.2 Cadena de Markov semi-ergódica.

“En las cadenas semi-ergódicas, el comportamiento a largo y a corto plazo es cualitativamente distinto. Los estados transitorios, a largo plazo, desaparecerán y por tanto sólo pueden aparecer mientras el sistema no haya alcanzado su régimen permanente.”¹

Figura 7. Cadena de Markov semi-ergódica



Fuente: Autor.

2.2.12.3 Cadena de Markov no ergódica.

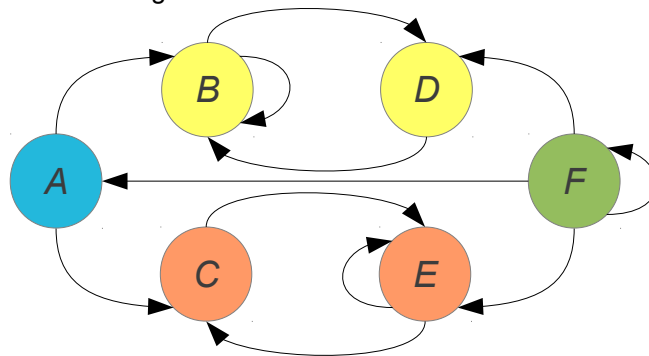
“En las cadenas no ergódicas el comportamiento a largo plazo depende de la situación inicial. No está definido cualitativamente, sino que será distinto según la

¹ [Toro2005], p. 27.

clase final a la que vaya a parar el sistema. ”

Lo anterior significa que la probabilidad estacionaria de cada estado depende de la situación inicial, que a su vez puede llegar a determinar que ciertos estados no se pueden alcanzar jamás si se parte de un cierto conjunto de estados. ”¹

Figura 8. Cadena de Markov no ergódica.



Fuente: Autor.

2.2.12.3 Clasificación según la periodicidad de las clases recurrentes.

De acuerdo a la periodicidad de las clases recurrentes, pueden ser clasificadas como se aprecia en la Tabla 6.

¹ [Toro2005], p. 28-29.

Tabla 6. Clasificación según el número de clases recurrentes

	Clases Recurrentes		
	Una	Varias	
Aperiódicas	Regular	Semirregular	Mixta
Periódicas	Cíclica	Policíclica	

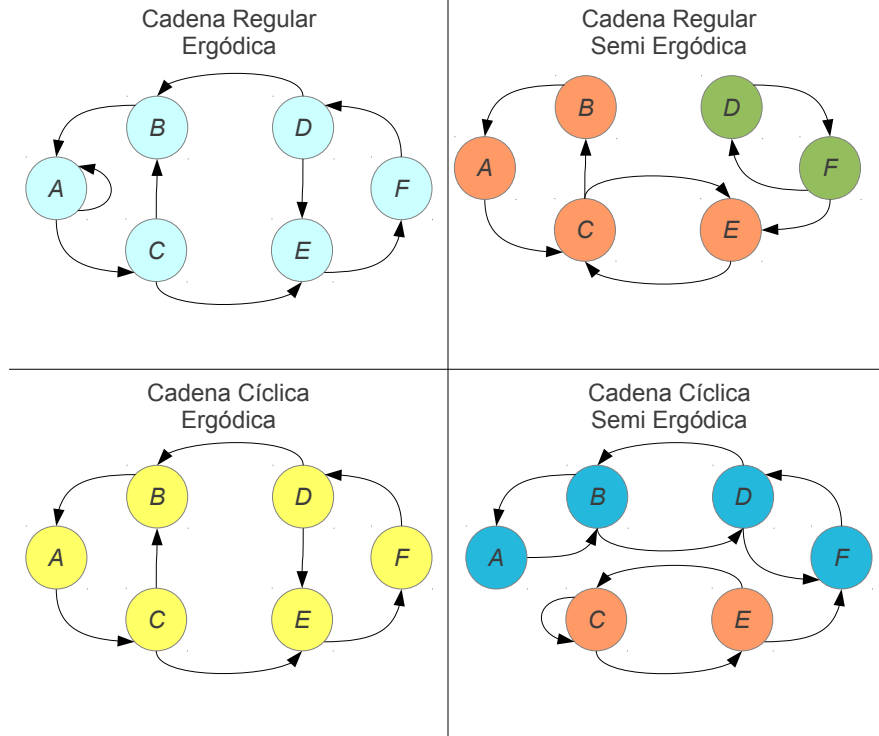
Fuente: Autor

Las cadenas regulares y las cíclicas pueden ser ergódicas o semi-ergódicas si presentan o no clases transitorias.

Aunque las cadenas ergódicas pueden ser ergódicas regulares o ergódicas cíclicas, los autores acostumbran llamar simplemente cadenas de Markov ergódicas, a las cadenas regulares (dado el interés que existe en estudiar este tipo de cadenas a largo plazo), como define Winston, “si los estados de una cadena son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre sí, se dice que la cadena es ergódica”¹.

¹ [Winston2005], p. 933.

Figura 9. Cadenas según la periodicidad de las clases recurrentes



Fuente: Autor.

2.2.12.3.1 Una clase final aperiódica.

“Una clase final acíclica representa una situación en la que la cadena evoluciona entre los distintos estados de la misma forma completamente aleatoria, descrita según las probabilidades indicadas por la ley condicional (o matriz T).

Se trata de un sistema estocástico “puro”, en el sentido que no se puede hacer una descripción de su comportamiento más precisa que las meras probabilidades. La ley estable del sistema representa la probabilidad real de que en una transición cualquiera el sistema se halle en uno u otro estado. ”¹

¹ [Toro2005], p. 30-31.

2.2.12.3.2 Clases finales cíclicas.

“En las clases finales cíclicas se puede establecer una partición de sus estados en p subclases, de manera que la evolución de la cadena dentro de ésta clase consistirá en que pasará sucesivamente por un estado de la subclase 1, luego uno de la subclase 2, etc. hasta llegar a la subclase p , después del cual volverá a un estado de la subclase 1.

Las clases finales cíclicas son un caso intermedio entre un sistema estocástico puro en el que no se puede predecir más allá de la mera descripción probabilística y el caso determinista en que la evolución es conocida y por lo tanto predecible: en este caso no se conoce cuál será el estado siguiente con exactitud, pero sí que forma parte de un subconjunto bien determinado. ”¹

2.2.13 Probabilidades de estado estable.

2.2.13.1 Cadenas de Markov regulares ergódicas.

En las cadenas ergódicas regulares, a medida que el sistema evoluciona en el tiempo (T, T^2, T^3, \dots, T^n), los valores de las probabilidades de estado p_{ij} van convergiendo a unos determinados valores π_j (probabilidades de estado estable o estacionarias), y cada una de las filas de la matriz terminan siendo idénticas entre sí.

¹ [Toro2005], p. 32-33.

$$T^* = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{bmatrix}$$

Lo anterior indica que al transcurrir un número grande de transiciones, las probabilidades p_{ij} de que el sistema se encuentre en un determinado estado j , no depende de las condiciones iniciales del sistema, e igualmente independientes de t

Para que existan las probabilidades de estado estable, la cadena de Markov debe ser irreducible y aperiódica, es decir, que en el largo plazo todos sus estados sean posibles y que su evolución sea completamente al azar.

Las probabilidades de estado estable cumplen con dos propiedades:

$$0 < \pi_j < 1, \text{ y } \sum_{j=1}^m \pi_j = 1$$

Para realizar el cálculo de las probabilidades de estado estable, se hace uso de las ecuaciones lineales

$$\pi_j = \sum_{i=1}^m \pi_i p_{ij} \text{ para } j=1, 2, \dots, m$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \dots + \pi_m p_{m1} \\ \pi_2 &= \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \dots + \pi_m p_{m2} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \pi_m &= \pi_1 p_{1m} + \pi_2 p_{2m} + \dots + \pi_m p_{mm} \end{aligned}$$

puede omitirse una de las anteriores ecuaciones y adicionalmente se usa la

siguiente ecuación (“propia de toda matriz estocástica”¹) a fin de poder da solución al sistema de ecuaciones lineales resultante.

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1, \quad \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1$$

La solución de este sistema de ecuaciones resultante de m ecuaciones por m incógnitas, puede hacerse mediante sustitución, reducción Gauss-Jordan, simplex, o realizando $X = \frac{1}{A} \times B$, es decir el producto cruz de la inversa de la matriz de los coeficientes por el vector de términos independientes.

Otra forma de realizar su cálculo, es mediante la matriz de transición de un paso T , multiplicándola consecutivamente hasta llegar a la forma T^* , donde cada fila corresponde al vector de probabilidades de estado estable $\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$.

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad T^2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 & \dots & p_{1m}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & \dots & p_{2m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}^2 & p_{m2}^2 & \dots & p_{mm}^2 \end{bmatrix} \dots T^* = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{bmatrix}$$

2.2.13.2 Cadenas de Markov regulares semi-ergódicas.

El método descrito en la sección anterior para cadenas regulares ergódicas es igualmente válido para calcular las probabilidades de estado estable de cadenas regulares semi-ergódicas, la diferencia entre estos dos tipos de cadenas radica en

¹ [Fonollosa2005], p. 66.

que a largo plazo las últimas “las $\pi_{Clases\ de\ paso} = 0$, dado que después de infinitas transiciones el sistema se encontrará en una clase final con toda seguridad.”¹

Una forma de simplificar el cálculo de las probabilidades estacionarias para este tipo de cadenas, es que conociendo cuales son los estados transitorios, se eliminen estos de las ecuaciones y simultáneamente se eliminen tantas ecuaciones como estados transitorios existan.

2.2.13.3 Cadenas de Markov semirregulares, cíclicas, policíclicas y mixtas.

Para estos tipos de cadenas, el método utilizado y la interpretación difieren de las anteriores, y no hace parte de los objetivos del presente trabajo; sin embargo puede consultarse en la bibliografía en el libro de Joan Fonollosa et al² a fin de profundizar en el tema.

2.2.14 Tiempos de interés.

2.2.14.1 Tiempo de primera pasada.

El tiempo de primera pasada se define como, el número de transiciones que le toma al sistema para ir del estado i al estado j (con $j \neq i$) por primera vez.

Para realizar el cálculo del tiempo de primera pasada, se hace uso de la ecuación

¹ [Fonollosa2005], p 67.

² [Fonollosa2005], p. 68-75

$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k=1}^m p_{ik} \mu_{kj}$, $k \neq j$ para toda $i \neq j$, desarrollando se tiene

$$\mu_{1j} = 1 + p_{11} \mu_{1j} + p_{12} \mu_{2j} + \dots + p_{1m} \mu_{mj}$$

$$\mu_{2j} = 1 + p_{21} \mu_{1j} + p_{22} \mu_{2j} + \dots + p_{2m} \mu_{mj}$$

...

$$\mu_{mj} = 1 + p_{m1} \mu_{1j} + p_{m2} \mu_{2j} + \dots + p_{mm} \mu_{mj}$$

luego de resolver el anterior sistema de ecuaciones lineales, se obtienen simultáneamente los tiempos de primera pasada desde cada estado $i \neq j$ al estado j .

2.2.14.2 Tiempo de recurrencia o de primer retorno.

En el caso en el que $j=i$, a μ_{ii} se le llama tiempo de recurrencia o de primer retorno, este es el número de transiciones que le toma al sistema para regresar a su estado inicial i .

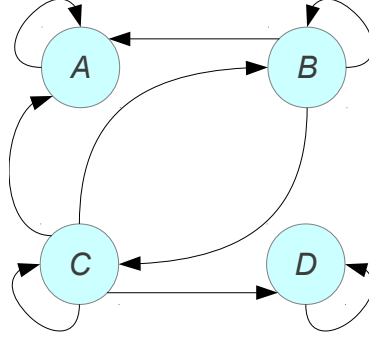
Su cálculo se realiza una vez se obtengan las probabilidades de estado estable,

mediante $\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$.

2.2.15 Cadenas absorbentes.

Una cadena de Markov será una cadena absorbente, si tiene por lo menos un estado absorbente. La probabilidad de llegar al estado absorbente dado que se inició en otro estado diferente, se le denomina probabilidad de absorción.

Figura 10. Cadena absorbente.



Fuente: Autor.

El cálculo de las probabilidades de absorción puede realizarse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{ik} &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} f_{jk} \\ f_{kk} &= 1 \\ f_{ik} &= 0 \quad \text{si } i \text{ es recurrente } i \neq k \end{aligned}$$

Según se aprecia en Winston¹, la matriz de transición puede ser reescrita para ajustarse a la siguiente forma

$$T = \begin{bmatrix} H & G \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Donde H y G serán dos matrices de tal forma que la matriz H será una matriz que irá de estados transitorios a estados transitorios, y la matriz G irá de estados transitorios a estados absorbentes.

¹ [Winston2005], p. 943.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C & A & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ A \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad G = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para hallar las probabilidades de absorción, se realiza mediante el cálculo de

$$F = (I - H)^{-1} \times G .$$

2.2.16 Cadenas de Markov con remuneración

Se dice que se tiene una cadena de Markov con remuneración, cuando para cada elemento $p_{ij} > 0$ de la matriz de transición T , se tiene asociado un valor c_{ij} que corresponde a los valores (pueden ser ingresos, egresos, costos, utilidades) en las que se incurre al ir del estado i al estado j en una transición.

En adelante, el término costo hará referencia al valor genérico asociado a un estado, sin implicar necesariamente un egreso, gasto, pudiendo referirse también a una renta o ingreso. La naturaleza de este valor estará determinada por el objetivo que se tenga, sea maximizar o minimizar el valor esperado del costo total.

Estos valores c_{ij} permiten construir una matriz C denominada matriz de costos o rendimientos, donde cada elemento $p_{ij} = 0$ en la matriz de transición, le

corresponderá un elemento $c_{ij}=0$ en la matriz de costos.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Es posible obtener un vector de costos totales $C_T = [c_{T1} \ c_{T2} \ \dots \ c_{Tm}]$ donde cada elemento c_{Ti} será el costo total asociado a un determinado estado i , el cálculo de cada elemento c_{Ti} se realiza mediante:

$$c_{Ti} = \sum_{j=1}^m c_{ij} p_{ij}$$

El valor esperado del costo total (en el largo plazo) por unidad de tiempo está determinado por la expresión:

$$E(C_T) = \sum_{j=1}^m c_{Tj} \pi_j$$

2.2.17 Procesos de decisión markovianos.

La construcción de la matriz de transición y la matriz de costos, se realiza de acuerdo a la política que este determinada en el sistema, la cual no necesariamente es la política óptima, pueden surgir políticas alternativas y la tarea ahora consiste en escoger la mejor de ellas, definiendo un objetivo, maximizar o minimizar el valor esperado del costo total.

Cuando se formula una nueva política, esta puede variar las probabilidades p_{ij} al

interior de la matriz de transición, o puede crear y/o eliminar estados de la matriz de transición original y por consiguiente variar los respectivos costos c_{ij} asociados a cada p_{ij} , es decir, para cada política que se formule para el sistema en observación, tiene asociada su propia matriz de transición y su respectiva matriz de costos, de tal forma que si se tienen s políticas, se tendrán s matrices de transición y s matrices de costos.

Mediante la matriz de transición y la matriz de costos de cada política, se puede determinar el valor esperado del costo total de la misma, a fin de poder comparar y elegir el mejor de ellos.

Los pasos de un proceso de decisión markoviano una vez se a definido un objetivo (maximizar, minimizar), se pueden resumir como:

- Determinar las matrices de transición y de costos para cada política definida.
- Calcular las probabilidades de estado estable para cada política.
- Calcular el valor esperado del costo total de cada política.
- Elegir la política que optimiza el valor esperado.

2.3 CADENAS DE MARKOV EN EL MUNDO REAL

Una recopilación de diversos proyectos en donde se pueden apreciar las aplicaciones de las cadenas de Markov, se lista a continuación, en el ANEXO C. se puede ver un resumen de cada uno de ellos.

- Modelo de Markov de tres estados: comparación de parametrizaciones de la tasa de intensidad de transición. Aplicación a datos de artritis reumatoidea.
- Análisis de cadenas de Markov y series de fourier en una secuencia hemipelágica del jurásico superior de la península antártica.
- Análisis markoviano de un proceso de estancia hospitalaria en un hospital de tercer nivel de complejidad.
- Uso de cadenas de Markov para la predicción de la dinámica del comportamiento de pacientes en una unidad de cuidado intensivo cardiológica.
- Aplicación de cadenas de Markov a la frecuencia de renta de vallas de una empresa de publicidad.
- Una revisión de la aplicación de las cadenas de Markov discretas al estudio de la movilidad geográfica.
- Estrategias óptimas de inversión en activos con riesgo de crédito. Un modelo markoviano.
- Asignación de maquinaria a los operarios de una tintorería, mediante simulación del proceso. Una aplicación de cadenas de Markov.
- Aplicación de cadenas de Markov continuas a las estadísticas del secuestro en Colombia.
- Uso de las cadenas de Markov en la selección de políticas de mantenimiento.
- Análisis del proceso de cambio de uso y cobertura de suelo en la expansión urbana del gran Valparaíso, su evolución y escenarios futuros.
- Predicciones de Markov aplicadas en el programa de ingeniería industrial de la universidad nacional experimental del Táchira (unet).

- Aplicación de las cadenas de Markov en la determinación de circuitos turísticos del Perú.
- Aporte de las cadenas de Markov al análisis de la tasa de desempleo de largo plazo.
- Aplicaciones no convencionales de cadena de Markov.
- Caracterización del proceso de fuga de clientes utilizando información transaccional.
- Movilidad social y transmisión de la pobreza en Bogotá.
- Procesos de Markov de tiempo discreto y espacio discreto: aplicaciones a procesos contables caso: empresa agroindustrial.
- Modelos markovianos para secuencias y aplicaciones a la predicción de genes.
- Aplicación de cadenas de Markov en protocolos de comunicación.
- Aplicación de las cadenas de Markov a los procesos de servicios hospitalarios para la toma de decisiones en la administración de la salud.
- Aplicación de las cadenas ocultas de Markov para la preferencia de los consumidores en el mercado cervecero.
- Optimización del procedimiento de trabajo para reducción de la necesidad de mantenimiento en tornos cnc.
- Dinámica del empleo informal en Colombia: una aproximación desde cadenas de Markov y funciones de riesgo. Primer trimestre de 2010.
- Análisis de costo-efectividad de un programa ambulatorio de rehabilitación pulmonar después de las exacerbaciones agudas de la epoc en Colombia.

3. APLICACIONES DE SOFTWARE EXISTENTE

Las siguientes son algunas aplicaciones encontradas en la internet, relacionadas con el estudio de cadenas de Markov de tiempo discreto.

3.1 WINQSB

La principal desventaja de este programa que es ampliamente conocido y usado por los estudiantes de ingeniería industrial, es que corre sólo en plataformas de 32 bits, la tendencia actualmente es que este tipo de plataformas están siendo reemplazadas por las de 64 bits, como en su momento las de 32 bits reemplazaron a las de 16 bits hasta que desaparecieron.

Desarrollador: Dr. Yih-Long Chang

Sitio web: No disponible

Versión: 2.0

Fecha: No disponible, los archivos que componen la la aplicación van desde 1996 hasta el 2001.

Sistema operativo: Microsoft Windows (sólo plataformas de 32 bits)

Licencia: No disponible, en los sitios de descarga está publicado como freeware aunque el programa no lo dice explícitamente.

Idioma: Inglés

Tamaño: 3.7 MB

Características:

Consta de 19 módulos, uno de ellos dedicado a procesos de Markov.

- Utiliza como parámetros:

- Matriz de transición.
- Vector de condiciones iniciales.
- Valores por estado.
- Número de transiciones.
- Calcula:
 - Probabilidades de estado estable.
 - Tiempos de recurrencia.
 - Tiempos de primera pasada.
 - Probabilidades absolutas.
 - Valor esperado total.
 - Análisis paramétrico en el tiempo de las probabilidades y de los valores esperados por estado y total.

3.2 SOFTWARE EDUCATIVO, CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

Aplicación desarrollada como trabajo de grado en la Pontificia Universidad Javeriana en el programa de Ingeniería Industrial. El principal inconveniente fue que no se encontró un sitio desde donde descargar la aplicación.

Desarrollador: Olga Lucía García Pinto, Felipe Nieto Ávila

Sitio web: No disponible

Versión: No disponible

Fecha: 2004

Sistema operativo: Microsoft Windows

Licencia: No disponible

Idioma: Español

Tamaño: No disponible

Características:

- Utiliza como parámetros:
 - Matriz de transición.
 - Vector de condiciones iniciales.
- Calcula:
 - Las probabilidades de estado estable.
 - Los tiempos de recurrencia.
 - Las probabilidades absolutas.
- Muestra:
 - Ecuaciones para calcular las probabilidades de estado estable.
 - Diagrama de transición.

3.3 MARKOV EXCEL

Aplicación disponible en el Centro para la Optimización y la Probabilidad Aplicada (COPA) de la Universidad de los Andes. La desventaja que presenta radica en que los nombres de las funciones no son muy intuitivos, dificultando su uso.

Desarrollador: Germán Riaño

Sitio web: <http://copa.uniandes.edu.co/?cat=12>

Versión: No disponible

Fecha: No disponible

Sistema operativo: Microsoft Windows (conjunto de macros para Microsoft Excel, muy probablemente también funcionen en Excel para Mac)

Licencia: No disponible, únicamente especifica que se puede usar sin costo para labores académicas.

Idioma: Inglés, Español.

Tamaño: 207 kB

Características:

Los cálculos realizados son tanto para cadenas de Markov de tiempo discreto como continuo.

- Utiliza como parámetros:
 - Matriz de transición.
 - Número de transiciones.
- Calcula:
 - Probabilidades de estado estable.
 - Matriz de transición de n pasos.
 - Matriz de ocupación.
 - Probabilidades de absorción.
 - Tiempos esperados antes de la absorción.

4. ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS

Se han llevado a cabo algunas propuestas para la enseñanza de la investigación de operaciones, muchas de ellas usando estrategias de aprendizaje colaborativo, en una revisión llevada a cabo sobre el tema se encontraron los ejemplos que a continuación se relacionan y cuya descripción puede verse en el ANEXO D. .:

- La Enseñanza de Investigación de Operaciones a través de Estudio de Caso: manejo de basura en la ciudad de México.
- La enseñanza de investigación de operaciones: un abordaje basado en el uso de recursos computacionales.
- Enseñanza problémica en la investigación de operaciones.
- Uso de la lúdica y el pensamiento lateral en la enseñanza de las cinco disciplinas para la construcción de organizaciones inteligentes.
- El comercio de canicas: Herramienta de apoyo para la enseñanza-aprendizaje práctico de la programación lineal.
- Estrategia metodológica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje en la a signatura investigación de operaciones I
- Resultados de una experiencia docente en Investigación Operativa.
- Estrategia didáctica para la enseñanza de los diversos métodos y técnicas aplicados en la praxis de la ingeniería industrial, desde una perspectiva constructivista.









4.1 EL APRENDIZAJE

El objetivo de la enseñanza es el aprendizaje, es decir, se enseña a fin de que los estudiantes aprendan algo. Al aprender, los estudiantes están adquiriendo información, comprendiéndola, memorizándola (nueva información o reemplazando la existente), para luego poder ponerla en práctica, proceso de

constante cambio que se da gracias a los sentidos.

Los actores principales en el proceso de aprendizaje son los sentidos, gracias a ellos adquirimos la información, y de acuerdo a la forma cómo se obtuvo esta información, se tendrá un grado mayor o menor de aprendizaje. En la Tabla 7 se puede apreciar el grado de aprendizaje de acuerdo a los sentidos utilizados.

Tabla 7. Porcentaje de retención de la información según la forma como se adquiere

10%	20%	30%	50%	65%	70%	90%	100%
de lo que leemos	de lo que oímos	de lo que vemos	de lo que vemos y oímos	de lo que escribimos	de lo que decimos	de lo que hacemos	de lo que practicamos con frecuencia
							

Fuente: [Candelo2003]. p.16.

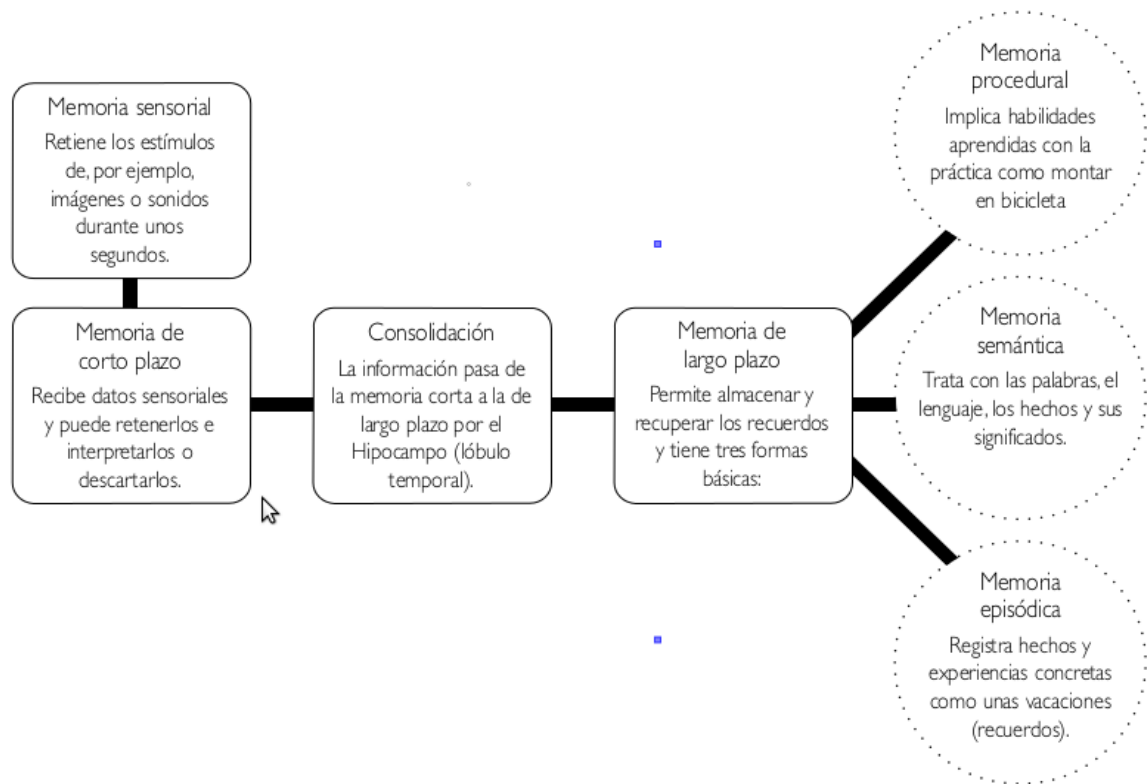
Puede verse la importancia de poner en practica repetidamente lo aprendido para así poder lograr la máxima retención de la información.

Según Candelo et al¹, la memoria está conformada por 3 partes, la primera es la memoria de fijación cuya duración es de unos pocos minutos, en segundo lugar se encuentra la memoria de corto plazo, en la que la información se puede retener

¹ [Candelo2003], p. 14.

aproximadamente por unos 45 minutos, el tercer lugar es para la memoria de largo plazo, todo el proceso en el que la información pasa de una memoria a otra o se descarta es totalmente subjetivo, en la Figura 11, se resumen las 3 partes que conforman la memoria.

Figura 11. Las memorias en la percepción y el aprendizaje.



Fuente: [Candelo2003], p. 15.

Algunas de las formas consideradas por Candelo et al¹ que pueden ser usadas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes son:

- Dar a conocer los objetivos que se pretende alcanzar.
- Dosificar la cantidad de información.

¹ [Candelo2003], p. 18.

- Posibilitar la reflexión.
- Avanzar a un ritmo según la capacidad de los estudiantes.
- Combinar la nueva información con experiencias de los estudiantes.
- Alternando dinámicas.
- Resumiendo y retomando lo aprendido.
- Poner en práctica lo aprendido.

A lo largo de la historia, se han utilizado diferentes estrategias pedagógicas, la más difundida y utilizada hasta el presente, es la clase expositiva, en la cual se profundizará un poco más en la siguiente sección.

4.2 LA CLASE EXPOSITIVA

Es el método más común, utilizado por los docentes para presentar a los estudiantes los contenidos de una determinada asignatura en el aula de clase. La información se presenta a los estudiantes en forma organizada y siguiendo una secuencia lógica mediante una exposición extensa.

4.2.1 Uso apropiado.

A partir de investigaciones realizadas, Bará et al¹ concluyen que es apropiado el uso de la clase expositiva para:

- Diseminar información.
- Presentar material que no está adecuadamente disponible en otro formato .

¹ [Bará2011], p. 56-57.

- Exponer a los alumnos, en poco tiempo, un material que hubiera requerido mucho más tiempo si hubiese tenido que ser localizado por ellos .
- Despertar el interés de los alumnos por un tema .
- Enseñar a estudiantes cuyo estilo de aprendizaje fundamental es el verbal .

4.2.2 Partes.

Una clase expositiva está compuesta por tres partes, Bará et al¹ las describen así:

- **Introducción:** es una descripción de los objetivos de aprendizaje de forma que los alumnos puedan saber desde el primer momento qué es lo que van a aprender .
- **Cuerpo:** presentación del material que debe aprenderse, en pequeños pasos organizados de forma lógica, para que la explicación sea fácil de seguir .
- **Conclusión:** revisión integradora de los principales puntos expuestos .

4.2.3 Problemas.

Diferentes investigaciones realizadas, han encontrado una variedad de problemas con las clases expositivas, tales como:

- La atención de los estudiantes: es decreciente a medida que avanza la clase expositiva, siendo buena la asimilación durante los primeros 10 a 15 minutos, y el resto de la exposición con una asimilación de muy bajo nivel, aumentando nuevamente al final.
- Orientado a personas bien educadas, inteligentes y orientadas hacia el aprendizaje auditivo : solo ellas pueden aprovechar realmente una clase expositiva, sin estar exentas de tener serios problemas en el aprendizaje.

¹ [Bará2011], p. 57.

- Promueve sólo el aprendizaje factual de bajo nivel cognitivo*: es tan efectiva para la lectura, ideal para aprender hechos o principios, pero no promueve la capacidad de resolución de problemas de alto nivel, la actitud positiva ni la motivación . “Cuando el material es complejo, detallado o abstracto, cuando los estudiantes tienen que analizar, sintetizar o integrar conocimiento, o cuando se pretende que retengan el conocimiento por largo tiempo, la clase expositiva no es un buen método: Para conseguir estos objetivos deben usarse grupos de aprendizaje cooperativo formal ”¹.
- Supone que todos los estudiantes requieren la misma información, al mismo ritmo y sin diálogo con el docente: en la realidad, los estudiantes aprenden a ritmos diferentes, y no siempre requieren de la misma información dado que no todos tienen el mismo nivel de conocimiento. “El material correspondiente a una clase expositiva puede comunicarse con la misma eficacia mediante la lectura de un texto. En la clase expositiva el profesor puede desperdiciar tiempo de los alumnos explicándoles cosas que pueden leer por ellos mismos ²”. En grupos grandes, hay mayor inhibición a la hora de hacer preguntas, quedando lagunas y una incierta comprensión de la información.
- A los estudiantes no les gustan las clases expositivas : los estudiantes tienen mayor preferencia por grupos donde se utilizan otros métodos como los grupos de discusión.
- Otras suposiciones: “asume que todos los estudiantes aprenden escuchando, que tienen una buena capacidad memorística, que tienen todo el conocimiento previo requerido, que tienen la habilidad de tomar buenas notas en clase, y que no son susceptibles de verse desbordados por la

* Asimilación literal, memorística y sin comprensión de la información, desconectada de los conocimientos previos relativos al contenido a aprender de los estudiantes.

¹ [Bará2011], p. 58.

² [Bará2011], p. 59.

cantidad de información ”¹.

4.3 EL APRENDIZAJE COLABORATIVO

Corredor et al lo definen como “una estrategia de organización de trabajo en el aula, en la cual los estudiantes reunidos en grupos no numerosos^{*}, trabajan de una manera organizada y colaborativa para resolver un problema, desarrollar un proyecto, cumplir unos objetivos o realizar una tarea, teniendo como propósito fundamental el logro de la meta que es común y la mejora en las competencias cognitivas y actitudinales de todos los participantes”².

¿Por qué se conforman grupos pequeños? Los grupos pequeños facilitan la participación de sus miembros, en grupos grandes los estudiantes tienden a inhibirse de participar.

En esta estrategia los estudiantes desarrollan su aprendizaje, preocupándose tanto del propio como del de sus compañeros, dado que los objetivos personales se alcanzan solo cuando los demás también logran alcanzar los suyos.

4.3.1 Objetivos.

El aprendizaje colaborativo busca la formación integral de los estudiantes, a fin de potencializar su futuro desempeño profesional, para ello plantea dos objetivos a los estudiantes:

- Aprender significativamente los contenidos de la asignatura que cursan.

¹ [Bará2011], p. 59.

^{*} Puede variar entre 2 y 6 estudiantes, pero más de 4 complica el logro de las metas.

² [Corredor2009], p. 87.

- Desarrollar habilidades sociales y colaborativas para un desempeño adecuado en los grupos de trabajo.

Los estudiantes deben dejar a un lado la competencia y la individualidad, para dar lugar a la colaboración, deben comprometerse con su propio aprendizaje y el de sus compañeros, y así, juntos alcanzar los objetivos comunes y los propios.

4.3.2 Principios rectores.

Existen unos principios básicos que rigen las actividades de aprendizaje colaborativo, para que puedan ser consideradas como tales, estos son:

- **Interdependencia positiva:** ocurre en el momento en el que los estudiantes son conscientes que su éxito está vinculado con el de sus compañeros y viceversa, trabajan coordinando esfuerzos, compartiendo recursos y apoyándose mutuamente. “Este tipo de interdependencia genera un ambiente en el cual los estudiantes ven que su trabajo beneficia a los compañeros de su grupo y el trabajo de sus compañeros los beneficia, y además que trabajan juntos, en grupos pequeños para maximizar el aprendizaje de todos los miembros”¹.
- **Responsabilidad individual y personal:** es necesario que los estudiantes sean conscientes que su desempeño en las tareas que se le asignen al interior del grupo, no solo afectan el éxito o fracaso propio, sino del grupo en general, debe reconocer que es valioso el aporte que él realiza. Mediante la evaluación del avance individual y grupal y la realimentación, es posible reconocer y valorar los aportes de cada uno de los miembros del

¹ [Corredor2009], p. 92-93.

equipo en pro del aprendizaje propio y de los demás, así como también permite determinar que miembros necesitan más apoyo, y soporte. Bajo este principio, los estudiantes aprenden juntos apoyándose unos a otros, para luego desempeñarse mejor individualmente.

- **Interacción promotora cara a cara:** aunque hoy en día la tecnología permite interactuar a distancia, la interacción física no debe dejarse de lado, gracias a ella los estudiantes pueden tanto emitir como percibir gestos de apoyo a las actividades y opiniones mutuos. La interacción entre los miembros del grupo, permite que puedan compartir recursos para el cumplimiento de las tareas, darse soporte entre si para una mejor comprensión del tema por parte de todos los miembros, realizar realimentación para mejorar el desempeño, propicia la argumentación y el razonamiento mejorando la calidad en la toma de decisiones, mantener la motivación y aumentar la confianza.
- **Habilidades interpersonales y de grupo:** el ambiente de aprendizaje es tradicionalmente individualista y competitivo, esto hace que los estudiante no desarrollen habilidades para un desempeñarse efectivamente en actividades colaborativas en pro de alcanzar las metas del grupo. Los conflictos que puedan surgir al interior del grupo, deben ser vistos como una oportunidad para el desarrollo de esas habilidades sociales que les permitirán un mejor desempeño profesional. Según Corredor et al¹, entre las habilidades que deben desarrollar los estudiantes están, la confianza y el conocimiento de las fortalezas y debilidades, la comunicación efectiva, la aceptación de las diferencia sin discriminación o imposición de ideas por la fuerza, solución efectiva de conflictos.

¹ [Corredor2009], p. 96.

- **Pensamiento grupal:** la reflexión que realicen los grupos acerca de su desempeño como equipo, les permiten identificar aspectos positivos y aspectos a mejorar de las estrategias usadas. Esta reflexión debe ser realizada tanto en los grupos pequeños como a nivel de toda la clase, al cabo de unas semanas de haber iniciado el trabajo, a fin de que los estudiantes hayan tenido la oportunidad de identificar las primeras dificultades, deben seguir realizándose eventualmente, y al finalizar el curso, y al fin evaluar y celebrar el éxito de los resultados obtenidos e identificar los aspectos a mejorar en caso de trabajar juntos a futuro.

4.3.3 Ventajas.

Son múltiples las ventajas que presenta el aprendizaje colaborativo como estrategia pedagógica en el aula, tanto para instituciones educativas como docentes comprometidos con la formación integral de sus estudiantes. En la Tabla 8, se muestran las ventajas que según Corredor et al¹, tiene el aprendizaje colaborativo.

¹ [Corredor2009], p. 98.

Tabla 8. Ventajas del aprendizaje colaborativo

El aprendizaje colaborativo permite promover:
<ul style="list-style-type: none">• La interacción, el respeto y el reconocimiento mutuo de los estudiantes.• La tolerancia, flexibilidad y apertura hacia el otro.• La identificación de estrategias que facilitan el trabajo de los grupos.• El desarrollo de habilidades para la solución de conflictos.• La socialización de conocimientos y recursos de aprendizaje.• Las habilidades lingüísticas necesarias para la comunicación clara y efectiva dentro de los grupos.• El nivel de motivación y autoestima de los estudiantes, puesto que se hace un permanente reconocimiento a los aportes de cada uno de los integrantes del grupo.• La cultura de la autoevaluación y la regulación de los procesos cognitivos.• La confrontación que realiza cada estudiante de su trabajo con el que hacen los demás miembros de su grupo.• La discusión grupal de los temas donde los participantes pueden explicar, entender, aclarar y corregir sus aprendizajes.• Las responsabilidades compartidas.• El desarrollo de habilidades para organizar y dividir tareas y los roles para alcanzar mejores resultados.

Fuente: Corredor et al.

Adicionalmente, se promueve la formación de nuevos conocimientos mientras los estudiantes se mantienen atentos y activos, comprometidos con su aprendizaje.

4.3.4 Desventajas.

La principal desventaja es la falta de experiencia tanto de docentes como de estudiantes en ambientes colaborativos, esto puede hacer que en un principio exista algún tipo de resistencia al cambio por parte de los estudiantes, habituados a trabajar en ambientes competitivos e individualistas, resistencia que podrá verse aminorada a medida que avanza el curso y los estudiantes comprometidos puedan

apreciar los resultados.

4.3.5 Roles.

4.3.5.1 Rol del docente.

“En cada clase, cada profesor debe elegir entre ser un sabio en el estrado o un guía al lado de sus alumnos: Al tomar esta decisión, el profesor debe recordar que el reto de la docencia universitaria no es cubrir el material sino ayudar a que sus alumnos lo descubran ”¹. Mediante ésta estrategia, el docente se convierte en un acompañante en todo el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, orientando las actividades en grupo ofreciendo su ayuda cuando es necesaria, enseñando los conceptos y estrategias básicos, ya no solo se limita a impartir el contenido curricular y evaluarlo.

Entre las tareas a desarrollar por el docente se tienen:

- Definición de objetivos en las actividades, en cuanto a contenido, como de habilidades.
- Planificación de los grupos y los recursos necesarios.
- Explicación de la metodología, los componentes, principios y el sentido del aprendizaje colaborativo.
- Orientar las actividades colaborativas.
- Evaluación de los logros individuales y grupales, y de las estrategias empleadas.
- Reconocimiento de los logros.

¹ [Bará2011], p. 54.

4.3.5.2 Rol del estudiante.

El estudiante tiene un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje y del aprendizaje de su grupo, deja de ser aun actor pasivo, para convertirse en un elemento activo, responsable, motivado y colaborativo, dispuesto a alcanzar los objetivos personales y grupales, dando motivación, soporte a sus compañeros.

Al interior de los grupos colaborativos, los estudiantes asumen diferentes roles entre los que están: los roles de tarea (contribuidor, buscador de información, buscador de opiniones, elaborador, coordinador, evaluador, registrador, investigador, relator, etc.), roles socioemocionales (animador, armonizador, facilitador, observador del grupo, etc.) y roles individuales (agresor, bloqueador, dominador, evasor y autoconfesor, buscador de ayuda, buscador de reconocimiento) .

4.3.6 Estrategias.

Existen diversas estrategias que pueden ser utilizadas con un enfoque en el aprendizaje colaborativo, a fin de lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, entre estas estrategias tenemos según Corredor et al¹:

- La lectura y la escritura.
- La resolución de problemas.
- El estudio de casos.
- Los mapas conceptuales.
- El error.
- La pregunta.

¹ [Corredor2009], p. 110-199

- El aprendizaje basado en proyectos.
- La exposición. (o la clase expositiva cooperativa)

4.3.7 Formas.

Según Bará et al¹, el aprendizaje colaborativo puede ser abordado de dos formas:

- **Aprendizaje significativo informal:** es útil para dinamizar periódicamente las clases expositivas y combatir de esta forma la pérdida de atención de los estudiantes en una clase expositiva tradicional. Consiste en que los estudiantes realicen tareas de corta duración (5 min.), en grupos de 2 o 3 personas, habitualmente las mas cercanas.
- **Aprendizaje significativo formal:** a diferencia del anterior, las tareas asignadas a los grupos pueden tener una duración desde una hora, hasta todo el curso, detallando el trabajo y los resultados parciales y finales.

4.3.8 Evaluación.

Como se ha visto hasta ahora, en el aprendizaje colaborativo, los esfuerzos que realice cada miembro del grupo deben contribuir al logro de los objetivos del equipo y de los propios, se hace importante que la evaluación pueda poner de manifiesto, tanto el grado de aprendizaje personal, como también la evolución del equipo de trabajo.

Respecto a la evaluación del aprendizaje colaborativo, Iborra e Izquierdo² consideran que:

¹ [Bará2011], p. 48.

² [Iborra2010], p. 8.

- La evaluación es una oportunidad para el aprendizaje.
- No existe una única forma de evaluar, depende del contexto en el que se dé el aprendizaje colaborativo.
- Es un proceso continuo que debe acompañar la formación.
- Los estudiantes la utilizan para establecer sus prioridades y programar sus actividades.
- Debe ser coherente, en ambientes de aprendizaje colaborativo no debe enfocarse en la evaluación individual.

Para realizar la evaluación puede disponerse de diferentes herramientas que pueden ser combinadas, entre las que pueden usarse cuestionarios individuales y grupales, registros de observación, carpetas de aprendizaje, diarios grupales e individuales, entrevistas, debates.

A continuación se presentan algunas ideas sobre la evaluación:

- La nota de la evaluación de un estudiante, es el promedio de las notas de la evaluación de los miembros de su grupo colaborativo.
- La nota de cada estudiante se incrementará un determinado valor, de acuerdo con la nota media de su grupo.
- La nota del estudiante se incrementa un determinado valor, si y solo si todos los miembros del grupo consiguen obtener una nota por encima de una nota mínima preestablecida.
- Escoger en forma aleatoria a uno de los miembros del grupo para que realice una prueba, la nota que éste obtenga será la nota para cada miembro del grupo.
- La evaluación de cada estudiante está compuesta por tres partes: una

referente al aprendizaje personal; una segunda respecto al aprendizaje de su grupo; y una tercera para valorar la participación individual al interior del grupo de trabajo.

- El estudiante evalúa la contribución realizada por cada uno de los demás miembros de su grupo.
- El grupo obtiene puntos adicionales cuando sea superada la evaluación anterior o cuando sus miembros superen su desempeño.

Es importante que cada estudiante y grupo, vayan realizando una autoevaluación continua de su aprendizaje, según Iborra e Izquierdo¹ debe considerarse incluir varios tipos de evaluación (diagnóstica, formativa y sumativa) en diferentes formas (autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación), el proceso de evaluación también puede ser una actividad colaborativa entre el docente y los estudiantes (mediante un representante por cada grupo), conformando una especie de comité evaluador.

4.4 LA CLASE EXPOSITIVA COLABORATIVA

Ya quedo expuesto en la sección 4.2.3 los problemas de una clase expositiva, para superar estos obstáculos “los estudiantes deben estar cognitivamente activos en clase ”², interactuando con sus compañeros y con el docente.

Una clara definición de lo que es una clase expositiva colaborativa puede encontrarse en Corredor et al “se trata pues de pasar del uso de la técnica de la exposición reducida a la simple presentación de contenidos, poca interacción con los alumnos, con escasa retroalimentación y pocas posibilidades de explicaciones

¹ [Iborra2010], p. 8.

² [Bará2011], p. 59.

alternativas, al uso de la exposición como estrategia dentro de la cual se propicie el diálogo y las discusiones guiadas para reforzar el aprendizaje de los conceptos”¹.

“Nuestra investigación sobre métodos docentes sugiere que ... si queremos que nuestros alumnos adquieran un aprendizaje más significativo, deben dedicar más tiempo a pensar y a realizar tareas significativas para el aprendizaje, no simplemente sentarse y recibir información de forma pasiva (McKeachie, 1986) ”².

Para lograr lo anterior, es posible mezclar la exposición con otras estrategias como pueden ser, resúmenes, discusiones, mapas conceptuales, etc, a fin de que los estudiantes permanezcan activos intelectualmente en clase, esto significa que luego de una corta exposición de un tema, hay que hacer interrupciones para realizar estas otras actividades sobre el tema expuesto, “de manera que la clase se haga más interactiva y se propicie el desarrollo de procesos mentales y funciones cognitivas en los estudiantes”³, una clase guiada de esta forma permite identificar y remediar vacíos de conocimiento, comprensiones incorrectas, evitando que la información pase “de las notas del profesor a las notas del estudiante sin pasar por la mente de ninguno de ellos ”⁴.

El desarrollo de la clase expositiva colaborativa puede darse mediante una corta introducción al tema, el desarrollo del contenido se debe realizar mediante cortas exposiciones y actividades acerca de ellas, para al finalizar realizar un cierre sintetizando lo aprendido. Las actividades que realicen los grupos colaborativos

¹ [Corredor2009], p. 192-193.

² [Bará2011], p. 54.

³ [Corredor2009], p. 193.

⁴ [Bará2011], p. 59.

deben generar un resultado específico, como puede ser una respuesta escrita (resumen, ensayo, etc), es importante ya que en ella se puede evidenciar el trabajo que han realizado los estudiantes.

Para que la clase expositiva colaborativa sea un éxito, debe realizarse una preparación previa del tema y de la exposición, delimitando y, organizando el contenido de forma lógica y secuencial, definiendo los objetivos a alcanzar por los estudiantes, identificar los recursos, elaborando el material de apoyo necesario para la exposición.

El desarrollo de la exposición debe darse con intervenciones de entre 10 a 15 minutos de duración, que según se vio en la sección 4.2.3, es el tiempo en el que los estudiantes prestan mayor atención en clase. Luego de los segmentos de exposición, deben darse las actividades realizadas por los grupos colaborativos, donde los estudiantes puedan interactuar, realizando controles de progreso, generando resultados específicos parciales.

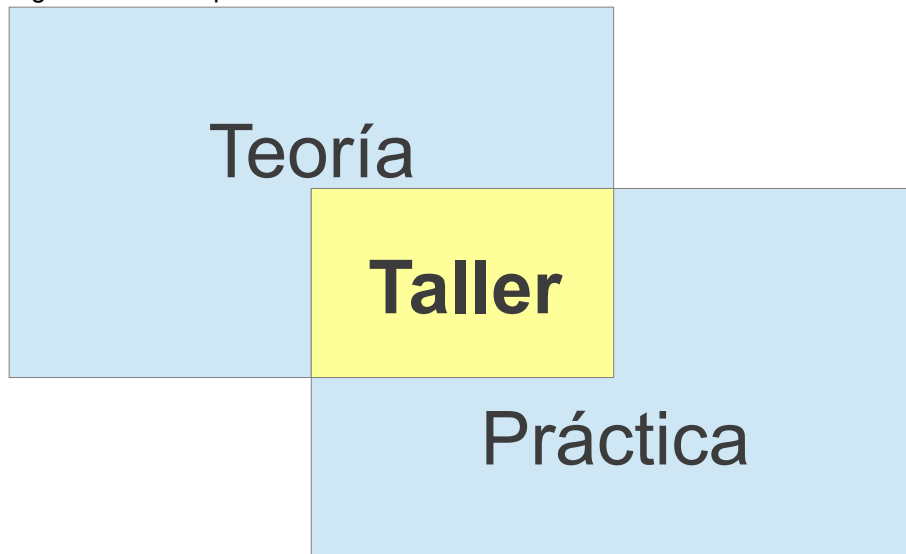
En la actividad de cierre, se hace un resumen de los principales conceptos que han sido expuestos en el transcurso de la clase, esto a fin de afianzar la información en la estructura de conocimiento de los estudiantes.

4.5 EL TALLER

Es común escuchar hablar sobre talleres de mecánica, de electrodomésticos, de metalmecánica, de carpintería, entre otros, teniendo en común que son lugares donde “algo” es construido o reparado, y en el campo de la educación no es diferente.

Según Candelo et al, “es un espacio de construcción colectiva que combina teoría y práctica alrededor de un tema, aprovechando la experiencia de los participantes y sus necesidades de capacitación.”¹, es por eso que hablar de un taller teórico-práctico es redundante.

Figura 12. Concepto de taller.



Fuente: [ConceptoTaller], p. 2.

Para la realización de un taller, intervienen pequeños grupos de personas, que trabajan activa y cooperativamente intercambiando ideas, conceptos, experiencias, reflexionando y discutiendo sobre un tema determinado, a fin de lograr apropiarse de la información y desarrollar y perfeccionar hábitos y habilidades, es decir en el taller se aprende haciendo. Dadas las características del taller, lo hacen una herramienta ideal para desarrollar el aprendizaje colaborativo.

¹ [Candelo2003], p. 33.

Los objetivos generales de los talleres son¹:

- Promover y facilitar una educación integral e integrar simultáneamente en el proceso de aprendizaje el Aprender a aprender, el Hacer y el Ser.
- Realizar una tarea educativa y pedagógica integrada y concertada entre docentes, alumnos, instituciones y comunidad.
- Superar en la acción la dicotomía entre la formación teórica y la experiencia práctica.
- Superar el concepto de educación tradicional en el cual el alumno ha sido un receptor pasivo, bancario, del conocimiento.
- Facilitar que los alumnos o participantes en los talleres sean creadores de su propio proceso de aprendizaje.
- Producir un proceso de transferencia de tecnología social.
- Hacer un acercamiento de contrastación, validación y cooperación entre el saber científico y el saber popular.
- Aproximar comunidad - estudiante y comunidad - profesional.
- Desmitificar la ciencia y el científico, buscando la democratización de ambos.
- Desmitificar y desalienar la concientización.
- Posibilitar la integración interdisciplinaria.
- Crear y orientar situaciones que impliquen ofrecer al alumno y a otros participantes la posibilidad de desarrollar actitudes reflexivas, objetivas, críticas y autocríticas.
- Promover la creación de espacios reales de comunicación, participación y autogestión en las entidades educativas y en la comunidad.

¹ [ConceptoTaller], p. 6-7.

5. DISEÑO DE LA HERRAMIENTA

Para la manipulación y análisis de datos, el uso de una hoja de cálculo presenta un ambiente familiar y flexible para el usuario, esto motivó a que para el desarrollo de la aplicación se eligiera implementarla en una hoja de cálculo, mediante macros.

La hoja de cálculo dominante en el mercado es Microsoft Excel la cual es parte de la suite de oficina Microsoft Office, como alternativas a ésta se pueden encontrar Apache OpenOffice y un fork de este último llamado LibreOffice, cada uno con una hoja de calculo llamada Calc.

Después de la adquisición de Sun Microsystems por parte de Oracle, nace The Document Foundation, con el fin de continuar con el desarrollo de OpenOffice.org, temiendo que Oracle decidiera cerrar el proyecto. El apoyo que ha tenido LibreOffice ha ido aumentando y ha recibido el apoyo de diversas empresas como Canonical que en su distribución GNU/Linux Ubuntu reemplazó OpenOffice.org por LibreOffice (entre otras distribuciones que también incluyen LibreOffice están Debian, Fedora openSUSE, Maegia).

Recientemente Oracle donó OpenOffice.org a la Apache Software Foundation cambiando su nombre a Apache OpenOffice, proyecto que sigue su desarrollo paralelo a LibreOffice.

En la Tabla 9, se aprecia una comparativa entre las suites de oficina de Microsoft Office y LibreOffice.

Tabla 9. Comparativa entre Microsoft Office y LibreOffice.

	Microsoft Office	LibreOffice
Desarrollador	Microsoft	The Document Foundation
Licencia	Privativa	LGPL v3.0
Sistemas Operativos	Microsoft Windows Mac Web	Microsoft Windows Mac OS GNU/Linux Android (próximamente) Web (próximamente) iOS (próximamente) Puede ser portada a otras plataformas y arquitecturas.
Idiomas	35 aprox.	110 aprox.
Precio	De acuerdo a la versión y el número de licencias.	Descarga sin costo y sin restricciones de uso y/o instalación.
Actualizaciones	Con costo.	Sin costo
Versión portable	No	Si

Fuente: Autor.

Las razones que motivaron a utilizar LibreOffice Calc:

- Una mejor licencia libre.
- La velocidad de desarrollo de la suite (tanto en la adición de nuevas características como en la corrección de errores).

- Una gran comunidad creciente de desarrolladores y usuarios.
- Disponible para una mayor cantidad de plataformas.
- Disponible en muchos idiomas.
- No tiene costo, se distribuye en forma gratuita mediante descarga.
- Puede ser instalada en cualquier cantidad de equipos y utilizarse para cualquier fin, sin ningún tipo de restricción.
- Tiene una versión portable para Windows, la cual permite que la suite pueda ser llevada y ejecutada desde una memoria USB sin necesidad de ser instalada en el equipo.
- La macros y los documentos elaborados en LibreOffice no solo funcionan en este, sino que también funcionan en Apache OpenOffice, y otros derivados como NeoOffice.
- Al estar disponible el código fuente, puede ser llevado a otras plataformas como a BSD, OpenVMS, OS/2, IRIX, UNIX, Solaris, OpenSolaris y otras arquitecturas como SPARC, IA64, ARM, entre muchas otras.
- Contribuir a la difusión y uso del software libre y no incentivar el uso de copias ilegales de software.
- Garantía de no contener virus, ni software malicioso.

Algunos de los algoritmos utilizados, fueron diseñados por el autor originalmente para las calculadoras HP 48GX y TI 83+, en donde se hacía uso principalmente de las funciones matriciales que poseen cada una de ellas. Estos algoritmos fueron adaptados, mejorados y complementados con otros, para ofrecer una mayor funcionalidad.

Estas dos primeras rutinas fueron tomadas de libro de Walter Mora¹ a fin de simplificar un poco el código.

- Función `calc_Func (sFunc$,args)`

Función para llamar las funciones propias de la hoja de cálculo, mediante el servicio 'FunctionAccess', donde `sFunc$` corresponde a la función a llamar y `args()` a los argumentos para esa función.

- Procedimiento `DataArray2PlainArray(aRows)`

Convierte un array anidado en un array corriente

Las macros fueron desarrolladas como funciones, es decir, que reciben un determinado número de argumentos, y devuelven un resultado, este resultado podrá ser, un único valor, una matriz de valores o un mensaje de error. El desarrollo de algunas de las siguientes funciones está basado en conceptos propios de la teoría de grafos, en el ANEXO E. se encuentra el código de todas las macros.

5.1 FUNCIONES BOOLEANAS

Estas funciones sólo devuelven uno de dos valores posibles, verdadero o falso (true o false), o en caso de haber un problema en la validación de alguno de los parámetros, devolverá el respectivo mensaje de error. Estas funciones se deben ingresar con control+shift+enter.

- **vEstocastico**

¹ [Mora2010] p. 254.

Recibe como parámetro un vector fila y evalúa si es o no estocástico.

Sintaxis:

- `vEstocastico` (vector)

Esta función verifica:

- Que el argumento sea un vector fila.
- Que los elementos del vector sean numéricos.
- Que los elementos del vector sean no negativos entre 0 y 1.
- Que la suma de los elementos del vector sea igual a 1.

Actualmente esta función está parcialmente desactivada, y lo único que no está verificando es la suma de los elementos, al parecer existe un bug en el interprete de basic, que hace que en ocasiones y dependiendo del orden de los elementos y a pesar de estos suman exactamente 1, la evaluación resulte falsa.

- **mCuadrada**

Recibe una matriz y verifica si es o no cuadrada.

Sintaxis:

- `mCuadrada` (matriz)

Esta función verifica:

- Que el argumento sea una matriz.
- Que el número de filas de la matriz sea igual al número de columnas.

- **mNumerica**

Recibe una matriz y verifica que todos sus elementos sean numéricos.

Sintaxis

- mNumerica (matriz)

Esta función verifica:

- Que el argumento sea una matriz.
- Que cada elemento de la matriz sea numérico.

- **mEstocastica**

Recibe una matriz de transición y verifica si es o no una matriz estocástica.

Sintaxis

- mEstocastica (matrizT)

Esta función verifica:

- Que el argumento sea una matriz cuadrada mediante la función mCuadrada.
- Que cada fila de la matriz sea un vector estocástico mediante la función vEstocastico.

- **mFConexa**

Recibe una matriz y evalúa si corresponde a un grafo fuertemente conexo, es decir, un grafo en el que existe un camino de cualquier longitud entre todos sus nodos.

Sintaxis:

- mFConexa (matriz)

Esta función verifica:

- Que todos los elementos de la matriz de conectividad calculada sean

iguales a 1.

La verificación de la matriz es realizada por la función mConectividad.

- **mIrreducible**

Recibe una matriz de transición y evalúa si es o no irreducible, es decir, que exista una única clase comunicante.

Sintaxis:

- mIrreducible (matrizT)

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función mEstocástica.
- Que la matriz sea fuertemente conexa mediante la función mFConexa.

- **mAperiodica**

Recibe una matriz y evalúa si es o no aperiódica. Que la matriz sea aperiódica no implica que exista una única clase comunicante, pueden existir una clase transitoria y una recurrente y ambas ser aperiódicas.

Sintaxis:

- mAperiodica (matrizT)

Las verificaciones de la matriz son realizadas por la función ePeriodo.

5.2 FUNCIONES MATRICIALES

Las funciones matriciales no devuelven un solo valor sino que retornan el resultado en forma de matriz, al introducirlas en la hoja, es necesario oprimir

Control+Shift+Enter y no solo Enter como sucede en las demás funciones.

- **mProducto**

Recibe dos matrices y calcula el producto cruz entre ellas, el parámetro entero opcional llamado tipo, se encarga de determinar si el producto a calcular es aritmético (tipo=0) o booleano (tipo=1), siendo el aritmético el valor por defecto.

Sintaxis:

- mProducto (matriz1, matriz2, [tipo])

Esta función verifica:

- Que los dos argumentos sean matrices.
- Que el número de columnas de matriz1 sea igual al número de filas de matriz2
- Que ambas matrices sean numéricas mediante la función mNumerica.
- Que tipo sea 0 o 1.

- **mPotencia**

Recibe una matriz, una potencia y eleva la matriz a dicha potencia, el parámetro entero opcional llamado tipo, se encarga de determinar si la potencia a calcular es aritmética (tipo=0) o booleana (tipo=1), siendo la aritmética el valor por defecto.

Sintaxis:

- mPotencia (matriz, potencia, [tipo])

Esta función verifica:

- Que tipo sea 0 o 1.
- Que la potencia sea numérica.
- Que la potencia sea positiva.
- Que la potencia sea entera.

Las verificaciones correspondientes a la matriz son realizadas por la función mProducto.

- **mAdyacencia**

Recibe una matriz y opcionalmente una potencia, calcula la matriz de adyacencia, opcionalmente elevada a una potencia. El valor por defecto de la potencia es 1.

La matriz de adyacencia es una matriz booleana, en la cual donde exista un camino de longitud igual a la potencia entre dos nodos, habrá un 1 de lo contrario un 0.

Sintaxis:

- mAdyacencia (matriz, [potencia])

Esta función verifica:

- Que la matriz sea una matriz cuadrada mediante la función mCuadrada.

Las verificaciones correspondientes a la matriz y a la potencia, son realizadas por la función mPotencia.

- **mConectividad**

Recibe una matriz y calcula la matriz de conectividad mediante el algoritmo de Warshall.

La matriz de conectividad es una matriz booleana, en la que si existe un camino de cualquier longitud entre dos nodos, habrá un 1, si no existe dicho camino entonces el valor será 0.

Sintaxis:

- mConectividad (matriz)

Esta función verifica:

- Que la matriz sea cuadrada mediante la función mCuadrada.

La verificación de la matriz es realizada por la función mAdyacencia.

- **ePeriodo**

Recibe una matriz y calcula el periodo de cada estado, el resultado lo retorna en forma de vector.

Sintaxis:

- ePeriodo (matrizT)

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función mEstocastica.

- **pEstable**

Recibe una matriz de transición y calcula las probabilidades de estado estable.

Sintaxis:

- pEstable (matrizT)

Esta función verifica:

- Que la matriz sea irreducible mediante la función mIrreducible.

- Que la matriz sea aperiódica mediante la función `mAperiodica`.

- **pAbsoluta**

Recibe el vector de condiciones iniciales, la matriz de transición y el periodo en el que se desea hacer la evaluación y calcula las probabilidades absolutas o incondicionales.

Sintaxis:

- `pAbsoluta (vector0, matrizT, periodo)`

Esta función verifica:

- Que el vector sea estocástico mediante la función `vEstocastico`.

Las verificaciones de la matriz y el periodo son realizadas por la función `mPotencia`.

- **mTiempos**

Recibe una matriz de transición y calcula los tiempo de recurrencia y los tiempos de primera pasada, retornándolos en forma de matriz.

Sintaxis:

- `mTiempos (matrizT)`

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función `mEstocastica`.

- **pAbsorcion**

Recibe como parámetros la matriz de estados transitorios a transitorios y la matriz de estados transitorios a absorbentes y calcula las probabilidades de

absorción.

Sintaxis:

- pAbsorcion (matrizH, matrizG)

Esta función verifica:

- Que la matrizH sea cuadrada mediante la función mCuadrada.
- Que la matrizH sea numérica mediante la función mNumerica.
- Que la matrizG sea numérica mediante la función mNumerica.
- Que los elementos de la matrizH estén entre 0 y 1.
- Que los elementos de la matrizG estén entre 0 y 1.

- **eValor**

Recibe la matriz de costos y la matriz de transición, y calcula el valor total para cada estado de la matriz. El resultado lo retorna en forma de vector columna.

Sintaxis:

- eValor (matrizC, matrizT)

Esta función verifica:

- Que la matriz de transición sea estocástica mediante la función mEstocastica.
- Que la matriz de costos sea cuadrada mediante la función mCuadrada.
- Que la matriz de costos sea numérica mediante la función mNumerica.
- Que las matrices sean de las mismas dimensiones.

5.3 FUNCIONES NO MATRICIALES

Este tipo de funciones devuelven un único valor.

- **tValor**

Recibe el vector de valores para cada estado y la matriz de transición, y calcular el valor esperado total.

Sintaxis:

- tValor (vectorC, matrizT)

Esta función verifica:

- Que existan las probabilidades de estado estable mediante la función pEstable.
- Que el vector sea numérico mediante la función mNumerica.

6. DISEÑO DEL MATERIAL DE CLASE

Inicialmente se consideró únicamente la elaboración de talleres para abordar el tema de cadenas de Markov de tiempo discreto, pero a fin de lograr una mejor experiencia para los estudiantes en el transcurso de las clases expositivas colaborativas, se desarrollo material adicional. El material de clase quedó compuesto por:

- Talleres
- Presentaciones
- Material teórico
- Quices - Preguntas

Los temas correspondientes a cadenas de Markov de tiempo discreto, se dividieron en cinco secciones de la siguiente forma:

- Sección 1. Introducción a las cadenas de Markov.
 - Procesos estocásticos.
 - Procesos de Markov.
 - Cadenas de Markov.
 - Estados.
 - Probabilidades de transición de un paso.
 - Formas de representación.
- Sección 2. N pasos – Orden k.
 - Probabilidades de transición de n pasos.

- Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.
- Matriz de transición de n pasos.
- Cadenas de orden superior.
- Probabilidades absolutas.
- Sección 3. Clasificación de estados y cadenas.
 - Clasificación de estados según su accesibilidad.
 - Clasificación de estados según su recurrencia.
 - Clases comunicantes.
 - Cadenas de Markov ergódicas.
- Sección 4. Estado estable.
 - Probabilidades de estado estable.
 - Tiempos de recurrencia y de primera pasada.
 - Probabilidades de absorción.
- Sección 5. Procesos de decisión markovianos.
 - Cadenas de Markov remuneradas.
 - Decisión markoviana.

Considerando que el presente trabajo se encuentra orientado a un curso de pregrado, hay unos temas que se encuentran excluidos, y no fueron tenidos en cuenta en la elaboración del material. Estos temas corresponden al análisis topológico de las cadenas de Markov y corresponden a:

- Clasificación de las cadenas de Markov según el número de clases recurrentes.

- Cadenas de Markov ergódicas.
- Cadenas de Markov semi ergódicas.
- Cadenas de Markov no ergódicas.
- Clasificación de las cadenas de Markov según la periodicidad de las clases recurrentes.
 - Cadenas de Markov regulares.
 - Cadenas de Markov semi regulares.
 - Cadenas de Markov cíclicas.
 - Cadenas de Markov policíclicas.
 - Cadenas de Markov mixtas.

A fin de no generar mayor confusión a los estudiantes, dado que este tema es complejo de entender, y siguiendo la tendencia de los libros de texto de la asignatura, se denominaron cadenas de Markov ergódicas a aquellas cadenas que son ergódicas y al mismo tiempo regulares. Otro tema que fue excluido del presente trabajo corresponde al análisis espectral de las cadenas de Markov.

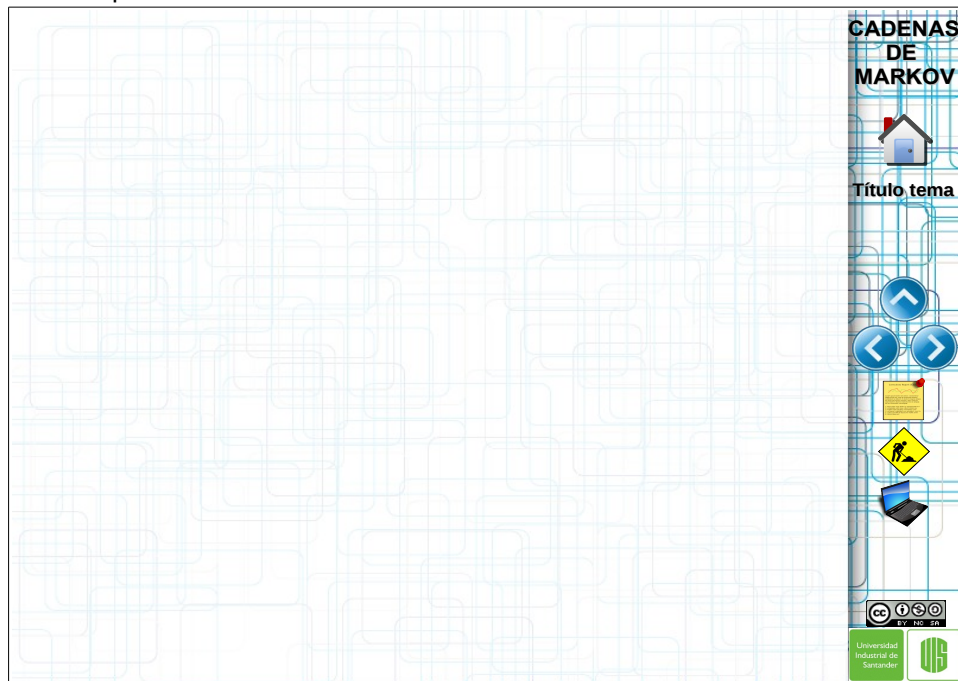
En la elaboración del material, todos los gráficos usados, fueron tomados de la galería libre OpenClipArt Gallery, los cuales debido a su licencia pueden ser usados sin infringir derechos de autor.

6.1 DISEÑO DE LAS PRESENTACIONES

En su diseño se utilizaron cuatro patrones diferentes de diapositivas, a fin de identificar visualmente la clase de contenido que tiene. Los patrones definidos fueron:

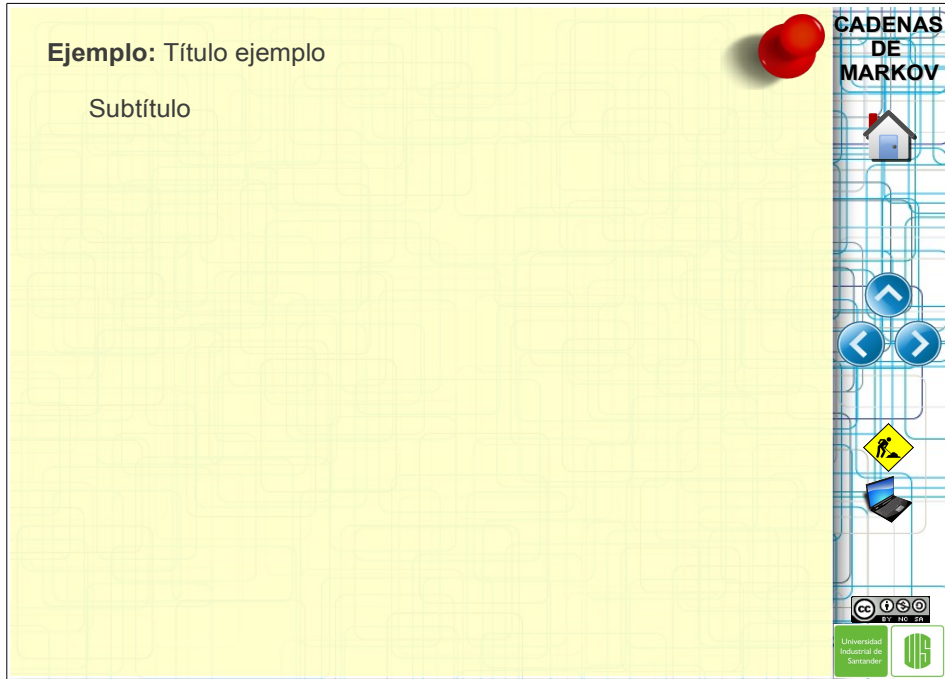
- Contenido teórico: usado para presentar el contenido teórico del tema.
- Ejemplo: usado para presentar un ejemplo del tema.
- Actividad 1: usado para hacer una interrupción en la exposición para que los estudiantes desarrollen una actividad contenida en el taller impreso.
- Actividad 2: usado para hacer una interrupción en la exposición para que los estudiantes desarrollen una actividad basada en el contenido de la diapositiva.
- Software: usado para presentar un ejemplo de uso del computador.

Figura 13. Patrón para contenido teórico.



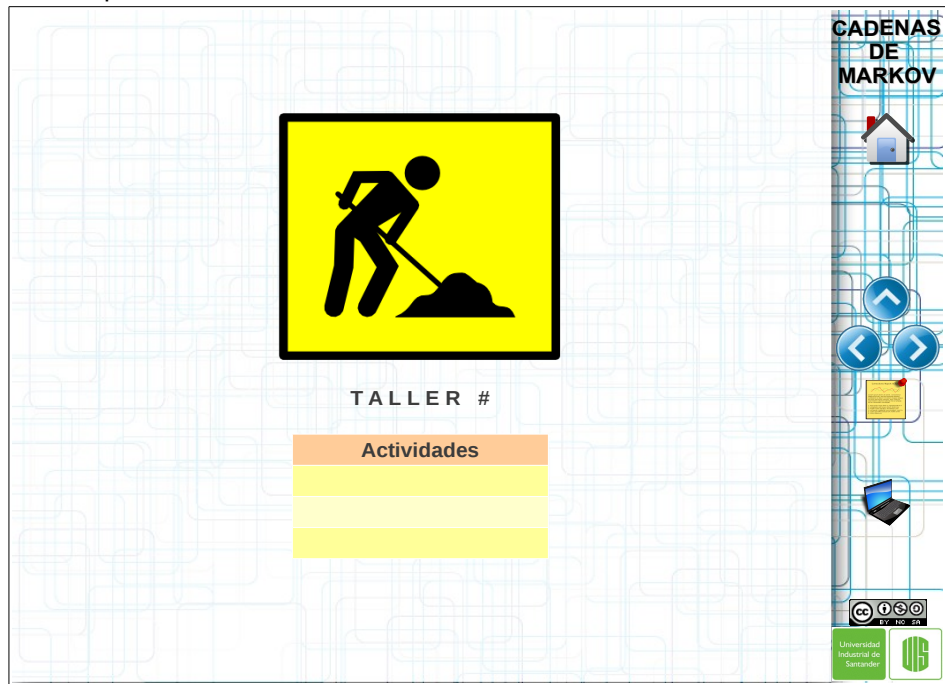
Fuente: Autor.

Figura 14. Patrón para ejemplos.



Fuente: Autor.

Figura 15. Patrón para realizar actividad del taller.



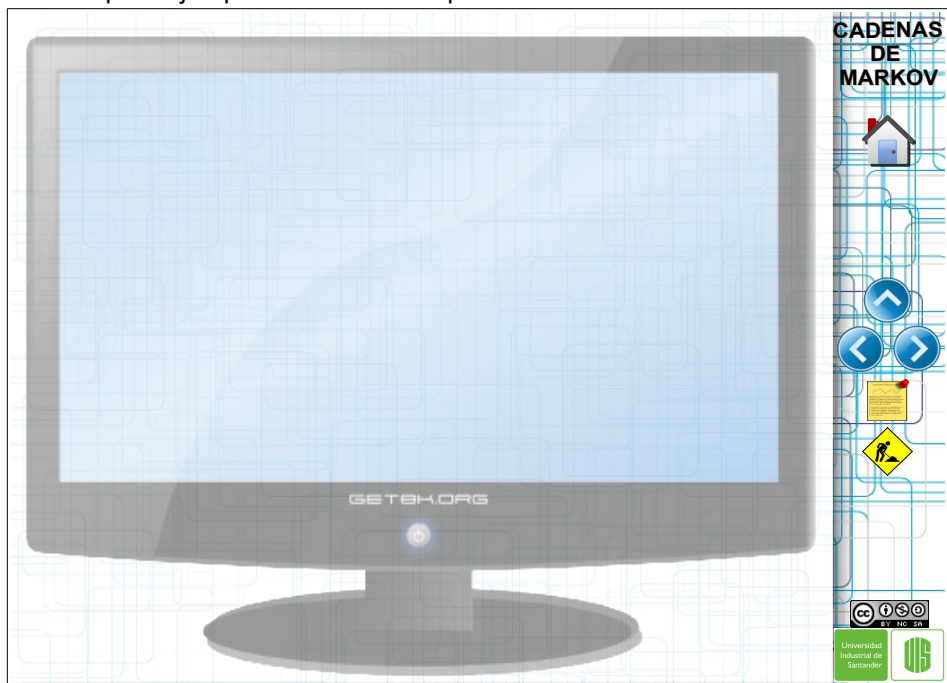
Fuente: Autor.

Figura 16. Patrón para realizar actividad.



Fuente: Autor.

Figura 17. Patrón para ejemplo de uso del computador.



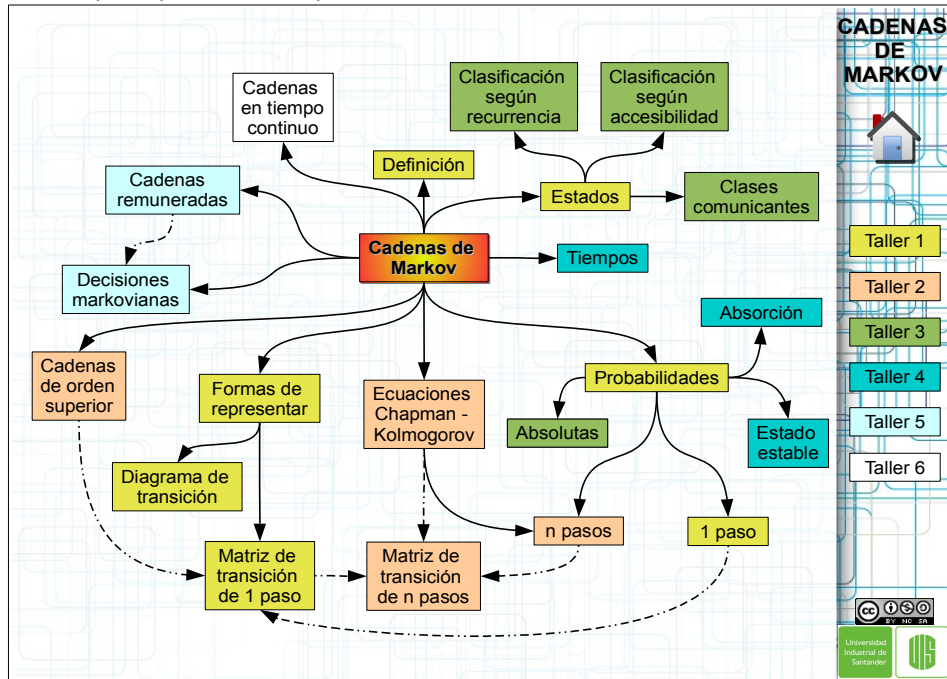
Fuente: Autor.

Para facilitar la navegación entre las diapositivas, cada una de ellas presentan un panel lateral, ubicado al lado derecho, con una serie de iconos según el contexto en el que se encuentre.

Igualmente para facilitar la navegación se presenta un menú principal, el cual muestra los temas a desarrollar, y desde el cual se puede acceder a ellos, presenta en el panel lateral unas convenciones, identificando por colores los contenidos de cada sección a tratar.







Las presentaciones en formato .pdf, tienen adicionalmente incluido el índice para facilitar la navegación en este formato.

Figura 18. Menú principal de las diapositivas.



Fuente: Autor.

Tabla 10. Iconos de navegación de las diapositivas.

Icono	Función
	Ir al menú principal.
	Ir al inicio de la sección o tema.
	Ir a la anterior / siguiente diapositiva según el contexto en el que se encuentre.
	Ir al ejemplo explicativo del tema.
	Ir a la actividad del tema.
	Ir al ejemplo de uso del computador.

Fuente: Autor.

Teniendo en cuenta lo visto en la sección 4.1, en lo referente al porcentaje de retención de la información, el cual es mayor en lo que se ve comparado con lo que se lee o lo que se escucha, se determinó que el contenido de las diapositivas fuese lo más gráfico posible, reduciendo al mínimo el uso de texto ya que no se pretendía hacer una transcripción literal de la teoría, haciendo de las presentaciones un material de soporte a la exposición y no un reemplazo de la misma.

El orden en el que se encuentran las diapositivas corresponde al orden en el que se presentaron los temas durante las clases expositivas, y añadiendo diapositivas intercaladas que tienen como objetivo hacer una pausa en la exposición del tema y dar inicio a la actividad del taller relacionada con el contenido visto.

Las presentaciones se elaboraron en LibreOffice Impress y se encuentran disponibles en los formatos .odp y .pdf, este se pueden apreciar en el ANEXO G. .

6.2 DISEÑO DE LOS TALLERES

Dada la relación directa que existe entre el orden de presentación de los temas y las diapositivas elaboradas, los talleres se diseñaron luego de tener definida la estructura y el contenido de las diapositivas. Cada taller corresponde a cada una de las secciones que fueron en las que se dividió el tema de cadenas de Markov de tiempo discreto, y se encuentran definidas al inicio de este capítulo.

Para cada taller se plantearon unos objetivos directamente relacionados con los temas que aborda el mismo, y una serie de actividades que procuran conseguir el logro de los objetivos planteados inicialmente.

Los objetivos definidos para cada uno de los talleres fueron:

- Taller 1. Introducción a las cadenas de Markov.
 - Identificar procesos y cadenas de Markov.
 - Reconocer las propiedades de las probabilidades de transición.
 - Diferenciar entre cadenas homogéneas y no homogéneas.
 - Reconocer las propiedades de las probabilidades de transición.

- Representar gráfica y matricialmente una cadena de Markov.
- Taller 2. N pasos – orden k
 - Calcular las probabilidades de transición de n pasos.
 - Transformar cadenas de orden superior en cadenas de primer orden.
 - Calcular las probabilidades absolutas.
- Taller 3. Clasificación de estados y cadenas.
 - Clasificar los estados según su accesibilidad.
 - Clasificar los estados según su recurrencia.
 - Identificar las clases comunicantes.
 - Identificar las cadenas ergódicas.
- Taller 4. Estado estable.
 - Reconocer cuando existen las probabilidades de estado estable de una cadena de Markov, y calcularlas.
 - Calcular los tiempos de primera pasada y de recurrencia.
 - Identificar una cadena de Markov absorbente y calcular las probabilidades de absorción.
- Taller 5. Procesos de decisión markovianos.
 - Calcular los costos totales para cada estado.
 - Calcular el valor esperado del costo total.
 - Definir un objetivo analizar las alternativas de decisión y elegir la opción óptima.

Para el desarrollo del primer taller, las actividades propuestas estaban basadas en

ejemplos propuestos por los mismos estudiantes, para los talleres restantes, las actividades a desarrollar se basaron en el contenido presentado en el mismo taller.

En el diseño del primer taller, se propuso que unas actividades se realizaran en forma individual y otras en forma grupal, a fin de ir adaptando a los estudiantes a desarrollar la interdependencia positiva, para que en los talleres sucesivos, la división de las tareas fuera planteada directamente por cada grupo de trabajo.

Los talleres se elaboraron en LibreOffice Writer y se encuentran disponibles en formato .odt y .pdf, este se pueden apreciar en el ANEXO F. .

6.3 DISEÑO DEL MATERIAL TEÓRICO

A partir de la revisión bibliográfica realizada sobre el tema objeto del presente trabajo, y en conjunto con las diapositivas elaboradas, se crean documentos para cada una de las secciones a tratar, en los cuales se mezcla la teoría relacionada con el tema de cadenas de Markov de tiempo discreto, junto con las imágenes que se encuentran en las diapositivas, a fin de ofrecer una guía visual que sirva como documento de consulta.

El material teórico se elaboró en LibreOffice Writer y se encuentra disponible en formato .odt y .pdf, este se pueden apreciar en el ANEXO H. .

6.4 DISEÑO DE LOS QUICES - PREGUNTAS

Se elaboró un banco de preguntas de selección múltiple con única respuesta de los temas tratados, para ser utilizadas en los quices teóricos.

Los quices fueron diseñados de forma tal que propicien la evaluación participativa al interior de los grupos colaborativos, éstos constan de dos partes, en la primera cada miembro del grupo se encarga de contestar en forma individual una pregunta, y en la segunda en consenso con el equipo de trabajo contestarla en forma grupal. Para la calificación se tomó en cuenta la respuesta grupal, dejando la respuesta individual como una forma de que cada grupo identificara cuales miembros presentaban falencias en los conceptos para así recibir el apoyo de sus compañeros.

El banco de preguntas y el formato para los quices, se elaboró en LibreOffice Writer y se encuentra disponible en formato .odt y .pdf, este se pueden apreciar en el ANEXO I. y ANEXO J. respectivamente.

6.5 DISEÑO DEL TRABAJO FINAL

Fue diseñado un trabajo para que los grupos lo desarrollaran a medida que se iban viendo los temas, y que sería entregado el día del examen final, el objetivo de este trabajo consistió en modelar un sistema estocástico real, mediante cadenas de Markov de orden uno y dos, aplicando lo visto en clase.

El desarrollo de este trabajo por parte de los grupos colaborativos, pretende que fomentar en sus miembros la interdependencia positiva y la responsabilidad individual y personal, principios rectores del aprendizaje colaborativo.

El trabajo final, se elaboró en LibreOffice Writer y se encuentra disponible en formato .odt y .pdf, este se pueden apreciar en el ANEXO K.

7. ELABORACIÓN DE LA DOCUMENTACIÓN

7.1 DOCUMENTACIÓN DE LOS TALLERES

Se elaboró una guía para el docente de la asignatura Investigación de Operaciones II, que brinde orientación en el proceso de replicar la implementación, en ésta encontrará información sobre la conformación de grupos, uso de las presentaciones en conjunto con los talleres, quices y la forma de evaluación. Esta guía se adjunta en el ANEXO L. y en el ANEXO M. , se encuentran disponibles los talleres resueltos.

7.2 DOCUMENTACIÓN DE LA HERRAMIENTA

Para que los estudiantes puedan aprovechar adecuadamente las funciones elaboradas mediante macros para LibreOffice Calc, se elaboró una guía de usuario, en la que se encuentra explicada cada una de las funciones diseñadas, cuales son los parámetros necesarios para su funcionamiento y la clase de valores que puede retornar, así como la forma de introducirlas en la hoja de cálculo. Igualmente en el inicio del documento se encuentran los enlaces para poder descargar la aplicación, tanto la versión instalable como la versión portable. Esta guía fue elaborada en LibreOffice Writer y se encuentra disponible en formato .odt y .pdf, puede verse en el ANEXO N. .

De forma complementaria, en el archivo donde se encuentran las macros, se elaboró un ejemplo de su utilización con cada una de las funciones diseñadas, para facilitar a los estudiantes su aprendizaje. En el ANEXO N. puede encontrarse este ejemplo.

8. VALIDACIÓN DE LOS TALLERES Y DE LA HERRAMIENTA

8.1 PRUEBA PILOTO

El grupo que participó en el presente estudio, fue el de los estudiantes matriculados en la asignatura Investigación de Operaciones II, código 23574, grupo H1, asignatura que se encontraba a cargo del docente Carlos Eduardo Díaz Bohórquez, quien a su vez es el director del presente trabajo. El horario que tenía asignado este grupo era los martes de 14:00 a 16:00 y los jueves de 14:00 a 16:00, en el aula 101 del edificio de Ingeniería Industrial. El listado de los estudiantes que participaron en la implementación, se puede encontrar en el ANEXO P.

La implementación se realizó durante los días 6, 11, 18, 20, 25 y 27 de septiembre de 2012, época que correspondió con el final del primer semestre de dicho año.

Al iniciar el trabajo con los estudiantes, les fue dada a conocer la metodología de trabajo colaborativo que se iba a seguir para abordar el tema de cadenas de Markov de tiempo discreto, conformándose en clase los grupos colaborativos, compuestos de 4 estudiantes cada uno elegidos de forma aleatoria.

Adicionalmente, se presento el modelo de evaluación que se iba a seguir, en el que la novedad fue plantear que la nota del examen, tuviera dos componentes, uno individual y otro grupal (que correspondería al promedio de las notas de los compañeros de su grupo de trabajo), como una forma de evaluar el trabajo colaborativo realizado y al mismo tiempo incentivar el apoyo y soporte en la asimilación de los contenidos a los miembros del grupo que tuvieran alguna dificultad. En la propuesta inicial para ambos componentes se propuso una participación de 50% cada uno, pero dado a que era la primera vez que los

estudiantes se enfrentaba a un modelo de evaluación como este, y sin querer que se tratara de una imposición, se llegó a un consenso con ellos modificando los porcentajes de participación, quedando al final definido así:

Tabla 11. Modelo de evaluación

Actividad	Porcentaje
Talleres	20%
Quices	10%
Trabajo	20%
Examen	50%
	(80% individual 20% promedio grupal)

Fuente: Autor.

En cuanto a los quices, la propuesta que se presentó inicialmente a los estudiantes, era que se elegiría al azar un representante de cada grupo colaborativo, para presentar el quiz en nombre de todo el grupo. Con este modelo se esperaba que promover la ayuda y el apoyo mutuo al interior de los grupos colaborativos, en donde los miembros que tenían claros los conceptos, entrarán a soportar a aquellos que aún presentaban vacíos, y de esta forma todos los miembros alcanzar el logro de los objetivos. Dado que es la primera vez que se enfrentaban a un modelo de evaluación como este, los estudiantes se manifestaron en contra, ya que no deseaban que dejar que la calificación obtenida dependiera de otro compañero y no del esfuerzo individual. Por este motivo, el modelo de los quices se modificó de forma tal que permitiera al interior de cada

grupo identificar los miembros con falencias y con fortalezas, pero valorando en consenso grupal.

Durante el desarrollo del primer taller, se evidenció que éste resultó ser muy extenso para ser abordado en una sola jornada de clase, fue necesario disponer del equivalente dos jornadas para poder ver el contenido y que los estudiantes desarrollaran los puntos propuestos.

Para los talleres 2, 3, y 4 aunque el contenido teórico se vio en su totalidad, el tiempo de la jornada de clase resultó ser insuficiente para poder desarrollarlos en su totalidad, siendo necesario que para su culminación, los grupos de trabajo los terminaran fuera de clase.

En la última jornada de clase, para el desarrollo del taller 5, el tiempo solo fue suficiente para exponer la parte teórica, y dado que era el último día de clase, no se desarrolló el taller a fin de poder exponer la totalidad del tema de cadenas de Markov de tiempo discreto. Considerando que el docente de la asignatura les había enviado a los estudiantes una serie de ejercicios tipo examen, el taller no fue entregado para ser contestado fuera de clase, dado que estos ejercicios también estaban enfocados a procesos de decisión markovianos.

La mayor dificultad para los estudiantes, radicó en determinar los estados, para a partir de ellos elaborar la matriz de transición, evidenciado esto, se procedió a crear una guía para determinar los estados y elaborar la matriz de transición, a partir de la elaboración de una tabla en la que se analiza estado por estado, como una forma de ayudarles en este proceso. Esta guía se elaboró en LibreOffice Writer y se encuentran disponibles en formato .odt y .pdf, y puede apreciarse en el ANEXO Q. .

Dado el inconveniente encontrado en las pruebas realizadas a las macros para LibreOffice, como se expuso en el capítulo 5, se elaboró una pequeña guía mediante un ejemplo en LibreOffice Calc, donde se presentaba una forma alternativa para construir el sistema de ecuaciones para calcular las probabilidades de estado estable, y adicionalmente dos formas de resolver dicho sistema de ecuaciones mediante una hoja de cálculo, esta guía esta basada en el algoritmo desarrollado por el autor para calculadoras que se mencionó en el capítulo 5, la guía esta disponible en formato .ods y .pdf y puede encontrarse en el ANEXO R.

También se creó una guía para elaborar el sistema de ecuaciones para calcular los tiempos de primera pasada a raíz del problema que se mencionó atrás, basada en el algoritmo desarrollado por el autor, implementado en la macro correspondiente. Esta guía elaborada en LibreOffice Calc, se encuentra en formato .ods y .pdf, y puede apreciarse en el ANEXO S.

En vista de que las cadenas de Markov de orden superior presentan un mayor nivel de dificultad, y con el ánimo de ilustrar mejor este tema, a fin de que los estudiantes logran entenderlo y pudieran afrontar mejor la elaboración del trabajo final, se elaboró un ejemplo con datos aleatorios, donde se pretendió mostrar el manejo que se le da a este tipo de cadenas. Este ejemplo fue elaborado en LibreOffice Calc, se encuentra en formato .ods y .pdf, y puede consultarse en el ANEXO T.

El material que se colocó a disposición de los estudiantes, se pretendió entregarlo mediante la plataforma moodle, desde donde podía ser descargado directamente por ellos, pero una gran mayoría de ellos manifestaron que fuera publicado en

carpintero.uis.edu.co, dado que es la plataforma más utilizada por ellos y a la que todos tienen acceso, mientras que moodle una gran mayoría no lo ha usado. La primera parte del material fue subida a carpintero, y luego para garantizar que todos lo tuvieran, les fue enviado directamente a los correos electrónicos de los estudiantes, y adicionalmente en su gran mayoría fue publicado en también en moodle.

Una vez finalizada la implementación, se solicitó a los estudiantes que participaron en la misma, que realizaran una evaluación del presente trabajo, mediante el formato de encuesta que se encuentra en el ANEXO U. , los resultados se presentan en la siguiente sección.

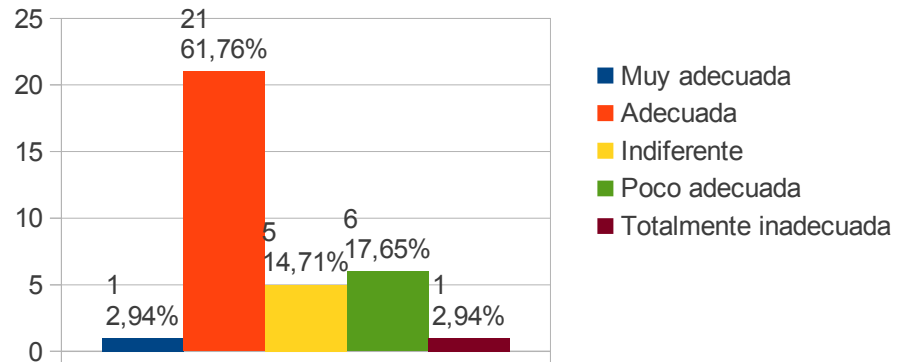
8.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS

8.2.1 Metodología y evaluación.

La metodología de aprendizaje colaborativo utilizada, tuvo una buena acogida por parte de los estudiante, con una valoración positiva del 64,7%, frente al 20,59% de valoración negativa, mientras que para el 14,71% le resultó indiferente, como puede apreciarse en el Gráfico 1.

Gráfico 1. Metodología.

1. La metodología utilizada cree que fue:

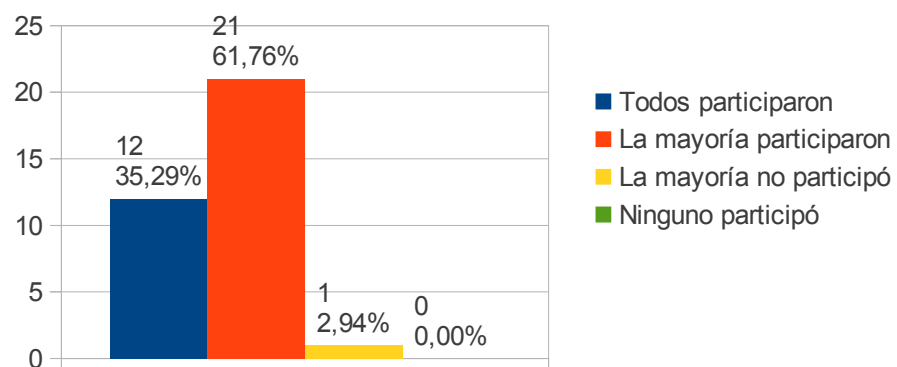


Fuente: Autor.

En lo relacionado con la participación de los estudiantes al interior de los grupos, puede apreciarse en Gráfico 2, que consideran que hubo una alta participación de los miembros del los equipos.

Gráfico 2. Participación del grupo.

2. La participación dentro del grupo de trabajo fue:

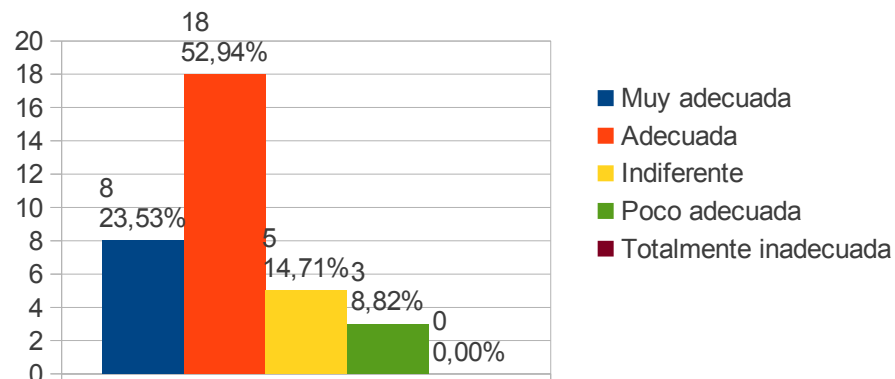


Fuente: Autor.

Pese a que inicialmente varios manifestaron no estar completamente de acuerdo en que las calificaciones, en especial la del examen, no dependieran solo del esfuerzo individual y tener que depender en alguna medida de sus compañeros de grupo, la forma de evaluación propuesta tuvo una buena acogida por parte del 76,47% de los encuestados, frente a un 8,82% que manifestó que fue poco adecuada, y para un 14,71% le fue indiferente, resultados que se pueden apreciar en el Gráfico 3.

Gráfico 3. Evaluación.

3. La forma de evaluación propuesta fue:



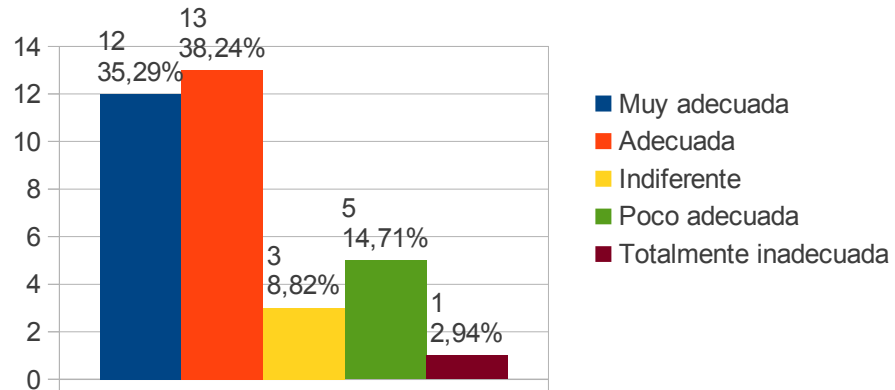
Fuente: Autor.

8.2.2 Material elaborado.

Las presentaciones utilizadas en el aula de clase, tuvieron una valoración muy positiva por parte del 73,53% de los estudiantes, frente a un 17,65% que le otorgaron una valoración negativa, tan solo para un 8,82% este material le resulto indiferente, resultados apreciados en el Gráfico 4.

Gráfico 4. Diapositivas.

4. Las presentaciones utilizadas en clase fueron:

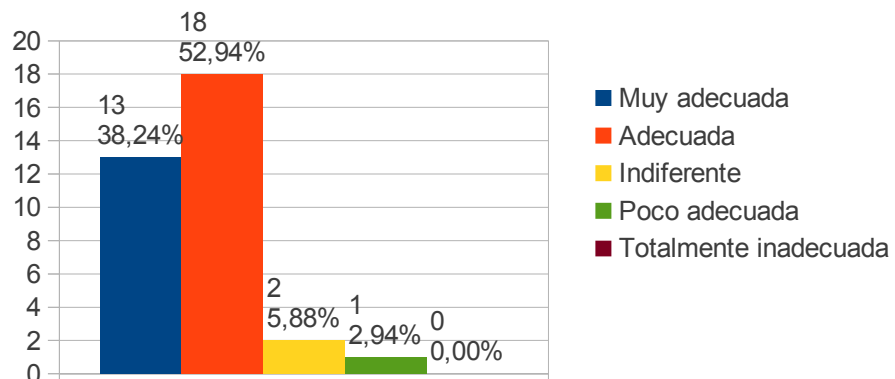


Fuente: Autor.

Puede verse en el Gráfico 5, que en cuanto al material teórico, la aceptación por parte de los estudiantes fue casi total, el 91,18% de los encuestados le otorgó una valoración positiva, mientras que solo el 2,94% lo valoró negativamente, y a un 5,88% le resultó indiferente.

Gráfico 5. Material teórico.

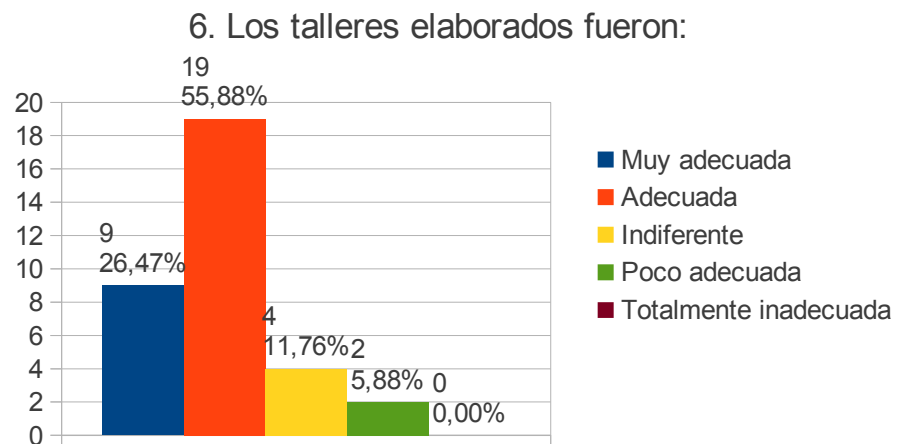
5. El material teórico entregado fue.



Fuente: Autor.

En cuanto a los talleres elaborados, según el Gráfico 6, la valoración positiva fue otorgada por el 82,35% de los estudiantes, un 11,76% se manifestó indiferente ante este recurso, y tan solo un 5,88% de los encuestados lo valoraron en forma negativa.

Gráfico 6. Talleres.

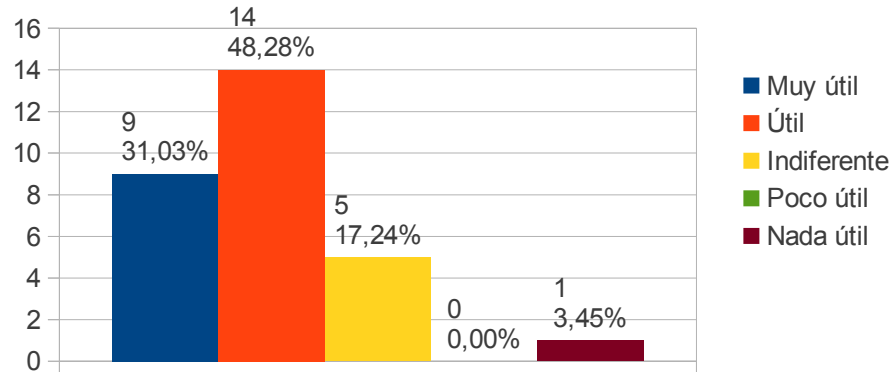


Fuente: Autor.

El 79,31% de los participantes valoró positivamente la guía elaborada para hallar los estados y construir la matriz de transición, mientras que a un 17,24% esta guía le resultó indiferente, y tan solo 3,45% manifestó haberla encontrado nada útil, resultados que pueden verse en el Gráfico 7.

Gráfico 7. Guía estados.

11. La guía para hallar los estados fue:



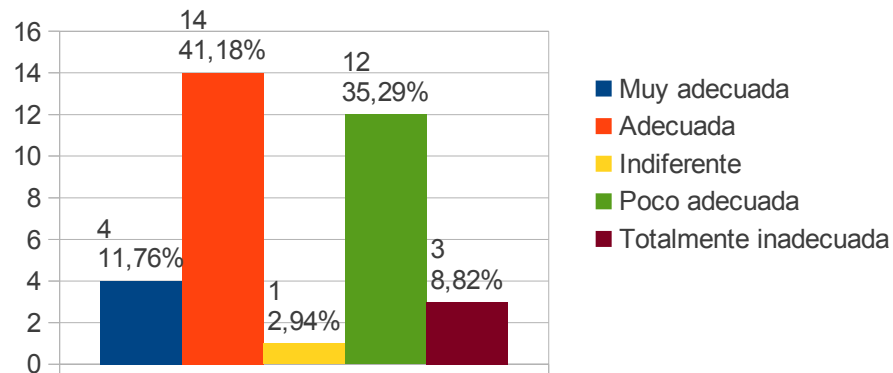
Fuente: Autor.

8.2.3 Tiempo dedicado.

En lo relacionado con el tiempo dedicado en clase al estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto, las opiniones entre los encuestados se encontraron muy divididas, mientras que el 52,94% lo encontró acertado, el 44,11% manifestó lo contrario y en opinión del autor, el tiempo no fue suficiente; tan solo el 2,94% se manifestó indiferente, como puede apreciarse en el Gráfico 8.

Gráfico 8. Tiempo.

7. El tiempo dedicado al tema fue:



Fuente: Autor.

8.2.4 Herramientas de cálculo.

En el Gráfico 9 se puede ver que en cuanto a las herramientas usadas por los estudiantes para realizar los diferentes cálculos, la menos empleada hoy en día es la calculadora, ésta ha sido desplazada por los computadores usados por el 94,12% de los estudiantes, tan solo uno utilizó exclusivamente la calculadora y uno mas uso la calculadora junto con otra herramienta.

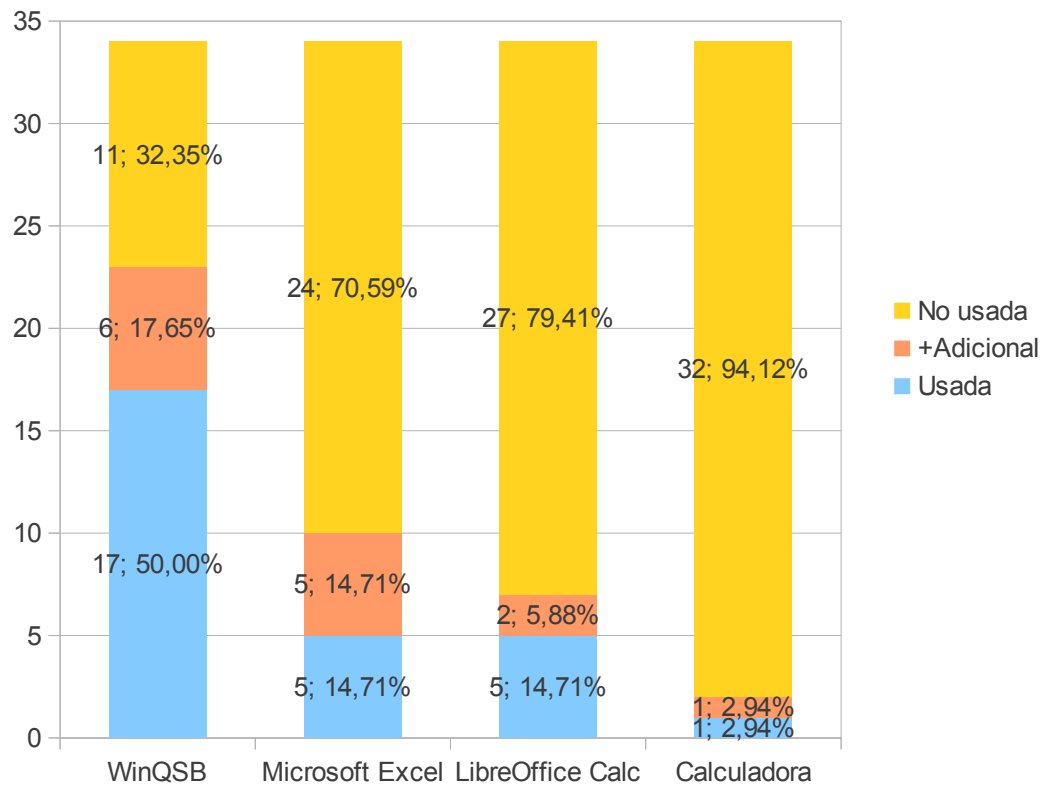
La herramienta más empleada fue WinQSB, el 67,65% de los estudiantes la usó y de ellos el 17,65% empleó otra herramienta adicional.

En el terreno de las hojas de cálculo, el porcentaje de estudiantes que emplearon de forma exclusiva Microsoft Excel o LibreOffice Calc, resultado igual para ambos, el 14,71%; mientras que fue mayor el porcentaje de quienes usaron Microsoft Excel junto a otra herramienta frente a aquellos que usaron LibreOffice Calc junto a otra herramienta, 14,71% contra 5,88% respectivamente. Cabe destacar que aquellos quienes emplearon LibreOffice Calc, tenían disponibles las macros diseñadas por

el autor, mientras que los que emplearon Microsoft Excel no tenían disponible una herramienta integrada a este.

Gráfico 9. Herramientas usadas.

8. Para realizar los cálculos utilizó:

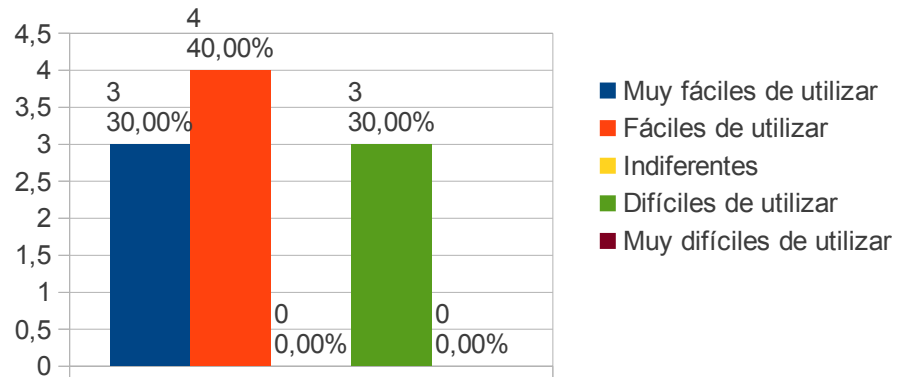


Fuente: Autor.

De aquellos estudiantes que emplearon las macros elaboradas, el 70% de ellos valoraron positivamente la facilidad de uso de las mismas, mientras que el 30% restante las encontraron difíciles de emplear, según se puede apreciar en el Gráfico 10.

Gráfico 10. Macros de LibreOffice.

9. Si utilizó LibreOffice, las macros usadas fueron:

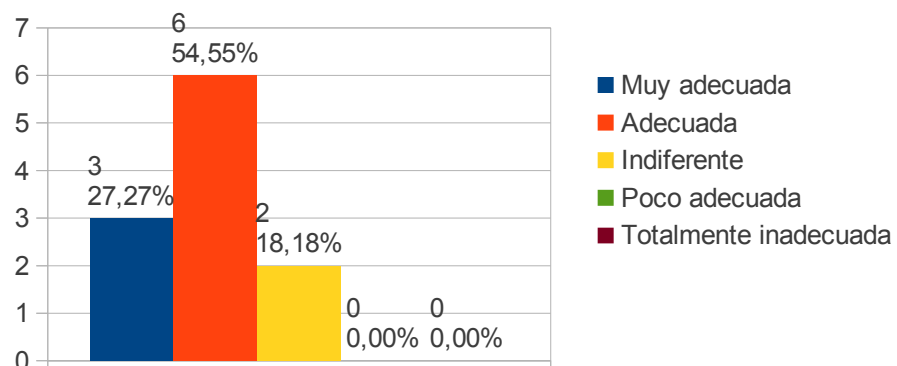


Fuente: Autor.

La guía de usuario de las macros elaborada, fue valorada positivamente por el 81,82% de los estudiantes que la emplearon, mientras que para un 18,18% le resulto indiferente. Es de destacar que esta guía no recibió ninguna valoración negativa como puede verse en el Gráfico 11.

Gráfico 11. Guía macros.

10. Si utilizó LibreOffice, la guía de uso fue:



Fuente: Autor.

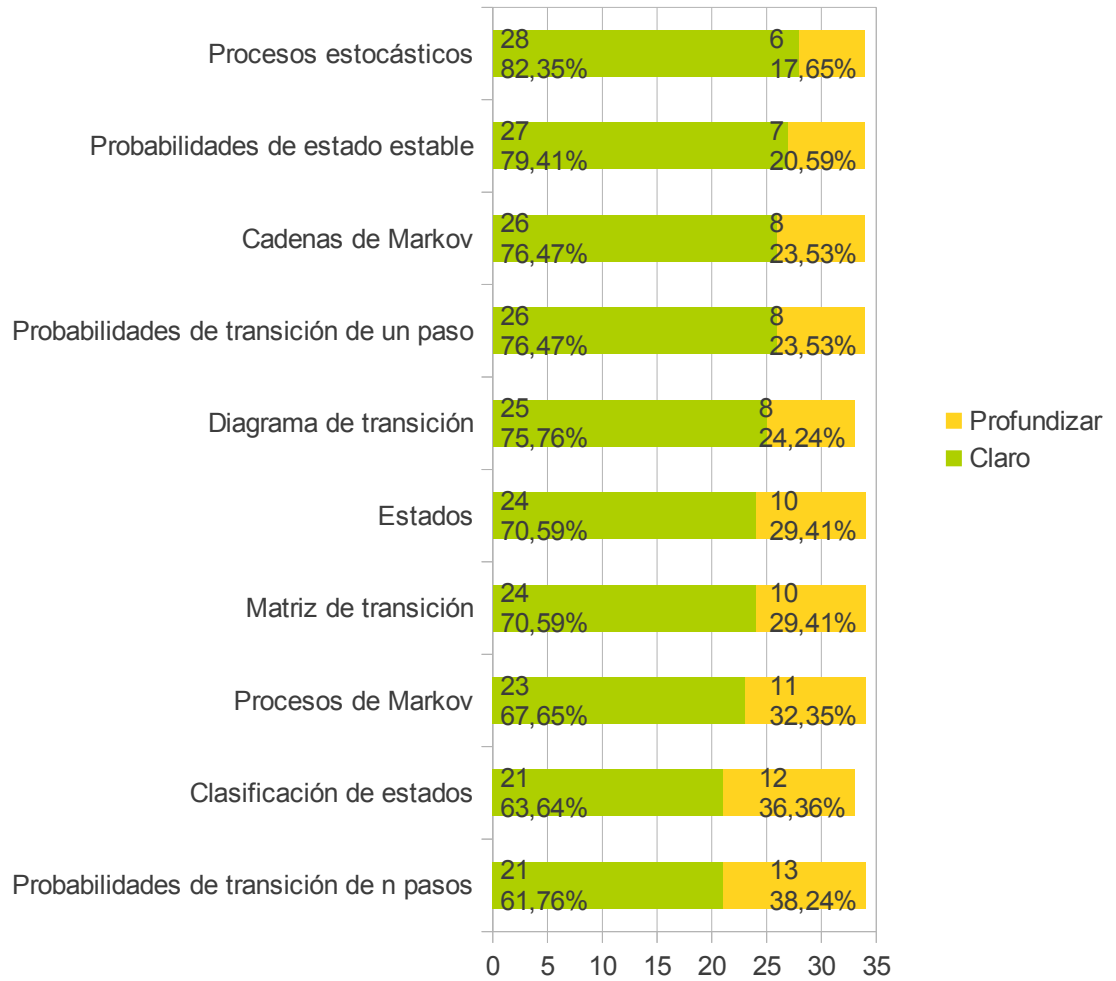
8.2.5 Temas claros y por profundizar.

Según la valoración dada por los estudiantes, los temas que quedaron claros se pueden apreciar en el Gráfico 12, y la de aquellos temas en los que faltó profundizar se encuentran en el Gráfico 13.

Puede apreciarse que los temas que a consideración de los encuestados quedaron claros, en su gran mayoría corresponden a la primera mitad de lo visto en clase, mientras que los temas en los que faltó profundizar son en una mayor parte los correspondientes al final del curso.

Gráfico 12. Temas que quedaron claros.

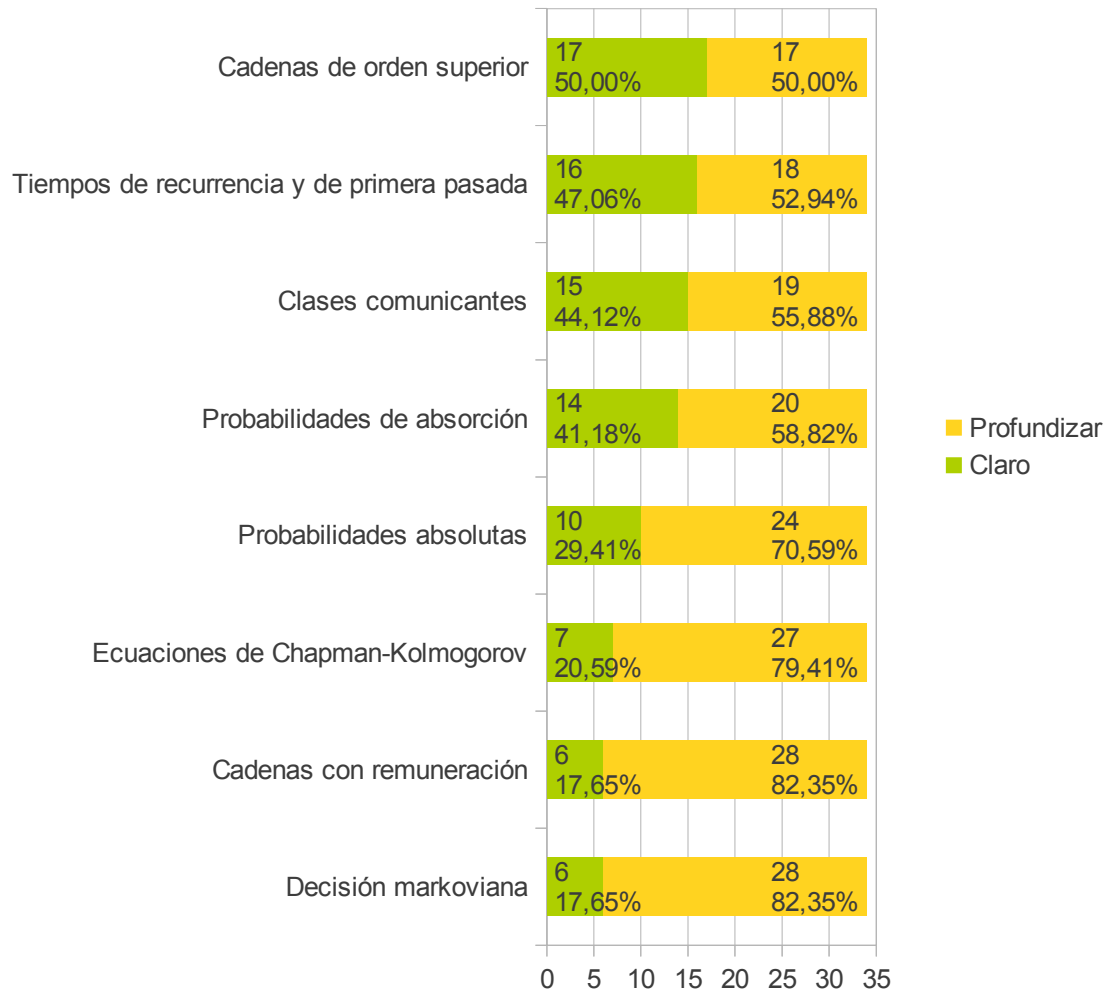
12. Al finalizar el curso, los temas quedaron:



Fuente: Autor.

Gráfico 13. Temas en los que faltó profundizar.

12. Al finalizar el curso, los temas quedaron:



Fuente: Autor.

8.2.6 Comentarios.

La última parte de la encuesta aplicada a los estudiantes, pretendía recolectar comentarios acerca del proceso vivenciado, los comentarios recogidos fueron:

- Las clases fueron muy teóricas, faltó tiempo para realizar ejercicios.

- El tema era muy extenso y debió tratarse en otro tiempo y no al final de la materia.
- La metodología fue adecuada, pero se demora mucho tiempo en explicación de conceptos básicos.
- Debe emplearse más tiempo en ejercicios.
- Las calificaciones grupales son buena idea, pero debe implementarse desde el comienzo del curso, aunque es complicado aceptar que la nota dependa de otra persona.
- Para mejoramiento del proceso educativo, debe cada taller explicarlo el docente titular y el docente auxiliar explicar con el buen material mostrado en clase, dar la parte teórica.
- Considero la nueva metodología muy adecuada y diferente a lo tradicional pero la persona que aplicó la metodología no lo hizo de la mejor forma, dado que no tiene facilidad de transmitir los conocimientos.
- No me identifiqué muy bien con algunas de las temáticas, el profesor y el muchacho son buenos a la hora de dar el tema pero, el problema es que no me logro concentrar con ninguna de las dos formas de enseñanza.
- La metodología fue buena, sí faltaron clases para dedicar a los ejercicios.
- La metodología es adecuada pero es necesaria la explicación del profesor.
- La metodología al ser nueva tiene todavía muchas cosas por mejorar pero en general me parece buena. Creo que con un poco más de tiempo y experiencia en su aplicación es bastante favorable.
- Considero que se deben promocionar los usos de software libre para desarrollar las herramientas de una forma más clara.

No todos los estudiantes encuestados aportaron comentarios, pero puede

apreciarse en los comentarios recolectados, que la metodología en general tuvo buena acogida, y que los inconvenientes están relacionados con el tiempo dedicado al tema el cual permitió desarrollar en clase muy pocos ejercicios tipo examen, y con la época en la que se desarrollo siendo esta final de semestre.

9. CONCLUSIONES

- El tiempo disponible para ver el tema de cadenas de Markov de tiempo discreto, fue un factor en contra, éste resultó ser escaso, la principal evidencia de esto es que los talleres no se desarrollaron en su totalidad en el aula de clase, y fue necesario que los estudiantes los terminaran en otro horario y los entregaran posteriormente, igualmente el último taller fue imposible de realizar en el aula, dado que era el último día de clase y era necesario terminar de exponer la parte teórica. Se esperaba que luego de la teoría se realizaran una o dos clases para desarrollar ejercicios tipo examen, pero al ser fin de semestre, no hubo una holgura de tiempo.
- La época en la que se realizó la experiencia, fue el final del semestre, representando otro factor en contra, dada la carga académica en la que los estudiantes se encontraban, con múltiples trabajos, evaluaciones y demás, de las diferentes asignaturas matriculadas, dejando el estudio del tema casi exclusivamente para las jornadas de clase, la cantidad de consultas realizadas fuera del aula fue mínima, disparándose ésta tres días antes del examen final. Esta época, por la carga que representa a los estudiantes, dificulta el aprendizaje.
- La metodología tuvo buena acogida en el grupo que participó en esta experiencia, los estudiantes se manifestaron a favor de la innovación en las estrategias usadas en el aula de clase.
- La forma de evaluar el examen final, causó cierto temor, ya que los estudiantes manifestaron que les era difícil aceptar que la calificación no dependiera del esfuerzo individual únicamente y tener que depender en cierta medida de sus compañeros, aún así se llegó a un acuerdo con ellos, dando una mayor participación al esfuerzo individual. La razón principal que origina esta situación es que este modelo de evaluaciones donde además

del esfuerzo individual, también se reconozcan los logros como grupo, no es común.

- El material elaborado, tuvo gran aceptación, desde las diapositivas, la teoría, y demás, algunos miembros del grupo manifestaron verbalmente al autor que el material lo encontraban claro y preciso, que les facilitaba el aprendizaje de los conceptos vistos.
- La aplicación desarrollada a pesar de que la mayoría de los estudiantes no la emplearon, los que si lo hicieron la encontraron fácil de utilizar, algunos de ellos descargaron e instalaron LibreOffice en sus computadores personales, y algunos otros utilizaron la versión portable desde una memoria USB. Los que no usaron la herramienta en su mayoría no lo hicieron porque implicaba descargar e instalar, y según algunos de ellos, aprender a manejar LibreOffice Calc.

10. RECOMENDACIONES

- Para replicar esta experiencia, se sugiere que la época que se escoja no corresponda al final del semestre, preferiblemente al inicio, esto permitiría disponer de una holgura de tiempo ante los imprevistos, además que la carga que tienen los estudiantes no es tan pesada como si lo es al final del periodo académico.
- Extender este modelo a los demás temas que conforman la asignatura, trabajando desde el inicio y hasta el final del periodo académico con una estrategia de aprendizaje colaborativo, permitiendo una mejor experiencia con mejores resultados, tanto académicos, como relacionales.
- Fomentar el uso de software y formatos libres (contribuyendo a no fomentar el uso de copias ilegales), tanto para aprovechar la funciones elaboradas, como para implementar nuevas funciones basadas en los demás temas de la investigación de operaciones, a fin de poder contar con un completo conjunto de algoritmos que puedan ser utilizados en un ambiente cómodo y flexible como lo es una hoja de cálculo. Licenciar el código que se pueda desarrollar en forma libre a fin de que muchas mas personas puedan sacar provecho de él, como también que puedan contribuir a mejorarlo, detectar bugs y complementarlo.
- El material elaborado puede ser mejorado con la participación de los estudiantes, promoviendo en la asignatura la elaboración de propuestas a nivel de grupos colaborativos, tendientes a generar nuevos contenidos, presentar nuevas formas de explicar conceptos, complementar el contenido ya existente, etc, usando herramientas y contenidos libres y creándolos igualmente libres.

11. HERRAMIENTAS USADAS

El presente trabajo fue elaborado haciendo uso de diferentes herramientas de software libre, desde el sistema operativo hasta la librería gráfica utilizada. Las herramientas usadas se relacionan a continuación:

- **Ubuntu:** Es un sistema operativo GNU/Linux derivado de Debian, ofrece una alternativa a Microsoft Windows de alta calidad y fácil manejo.
- **LibreOffice:** Es la suite de oficina libre alternativa a Microsoft Office, las aplicaciones usadas fueron:
 - **Writer:** Procesador de textos (alternativa a MS Word).
 - **Impress:** Programa para presentaciones (alternativa a MS Powerpoint).
 - **Calc:** Hoja de cálculo (alternativa a MS Excel).
 - **Draw:** Editor de gráficos vectoriales.
 - **Math:** Editor de fórmulas matemáticas.
- **Mozilla Firefox:** Navegador de internet libre.
- **Bibus:** Administrado de referencias bibliográficas.
- **Evince:** Visor de documentos (usado como lector de pdf).
- **Freeplane:** Aplicación para elaborar mapas mentales y conceptuales derivado y compatible con Freemind.
- **Wine:** Aplicación que permite la ejecución de programas diseñados para MS-DOS, y las versiones de Microsoft Windows 3.11, 95, 98, Me, NT, 2000, XP, Vista y 7.

BIBLIOGRAFÍA

- [Bará2011] BARÁ, Javier; DOMINGO, Joan y VALERO, Miguel. TALLER DE FORMACIÓN: Técnicas de Aprendizaje Cooperativo (AC) y Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). ed. España : Universitat Politècnica de Catalunya, 2011. 141 p
- [Candelo2003] CANDELO R., Carmen; ORTIZ R., Gracia Ana y UNGER, Barbara. HACER TALLERES. Una guía práctica para capacitadores.. ed. Colombia : Grafiq Editores, 2003. 204 p
- [ConceptoTaller] Universidad de los llanos. El concepto del taller. ed. Colombia en línea : Universidad de los llanos, . 36 p
- [Corredor2009] CORREDOR MONTAGUT, Martha Vitalia; PÉREZ ANGULO, Martha Ilse y ARBELÁEZ LOPEZ, Ruby. Estrategias de enseñanza y aprendizaje. ed. Colombia : División de publicaciones UIS, 2009. 239 p. ISBN 9789588504117.
- [Estocástico] Real Academia Española. estocástico, ca.. [en línea]. España: Real Academia Española, , [citado en]. Disponible en: http://buscon.rae.es/drae/?type=3&val=estocástico&val_aux=&origen=REDRAE.
- [Florez1993] FLOREZ BECERRA, Manuel Guillermo. Fundamentos de matemáticas discretas computacionales. ed. Bucaramanga : Universidad Industrial de Santander, 1993. 173 p
- [Fonollosa2005] FONOLLOSA, Joan B.; SALLÁN, José M. y SUÑÉ, Albert. Métodos cuantitativos de organización industrial II. ed. España : Edicions UPC, 2005. 144 p. ISBN 8483017946.
- [Hillier2001] HILLIER, Frederick S y LIEBERMAN, Gerald J. Investigación de Operaciones. 7 ed. México : McGraw-Hill, 2001. 1223 p. ISBN 970-10-3486-4.
- [Iborra2010] IBORRA CUÉLLAR, Alejandro y IZQUIERDO ALONSO, Mónica. ¿Cómo afrontar la evaluación del aprendizaje colaborativo? Una propuesta valorando el proceso, el contenido y el producto de la actividad grupal.. ed. España : Universidad Complutense Madrid, 2010. 21 p
- [InvOper] Investigación de Operaciones. Qué es la Investigación de Operaciones?. [en línea]. s.l.: , , [citado en]. Disponible en: <http://www.investigaciondeoperaciones.net/>.

[Mora2010] MORA FLORES, Walter. Introducción a los métodos numéricos. LibreOffice Basic, WxMaxima. Primera ed. Costa Rica : Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2010. 309 p. ISBN 978-9968-641-13-5.

[Taha2004] TAHA, Hamdy A. Investigación de Operaciones. 7 ed. México : Pearson Education, 2004. 848 p. ISBN 970-26-0498-2.

[Toro2005] TORO DÍAZ, Héctor Hernán. MODELACIÓN ESTOCÁSTICA, Cadenas de Markov. [en línea]. Colombia: Universidad del Valle, 2005-04, modificado en 2005-10-21 [citado en]. Disponible en: <http://pino.univalle.edu.co/~gconde/documentos/PresentaciónCadenasMarkov.pdf>.

[WikiGloGraf] Wikipedia, la enciclopedia libre. Anexo: Glosario de teoría de grafos. [en línea]. s.l.: Fundación Wikimedia, 2004-05-25, modificado en 2012-01-26 [citado en]. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Glosario_en_teoría_de_grafos.

[WikiPrEstoc] Wikipedia, la enciclopedia libre. Proceso Estocástico. [en línea]. s.l.: Fundación Wikimedia, 2004-11-07, modificado en 2011-12-14 [citado en]. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Proceso_estocástico.

[Winston2005] WINSTON, Wayne L. Investigación de Operaciones. 4 ed. México : International Thomson Editores, 2005. 1418 p. ISBN 970-696-362-1.

ANEXOS

ANEXO A. PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO - MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
Pregrado en Ingeniería Industrial

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

SÉPTIMO SEMESTRE

CÓDIGO: 23574

CRÉDITOS: 4

REQUISITOS:

1. Investigación de Operaciones I (23534)

Nota: Es simultánea con Estadística III (23521) y Dirección de Procesos I (23522)

INTENSIDAD HORARIA SEMANAL: 12

TAD: 4

TI: 8

JUSTIFICACIÓN

La Ingeniería Industrial tiene como objeto de estudio los sistemas productivos de bienes y servicios; para el estudio de estos sistemas es necesario contar con metodologías, procedimientos, herramientas y técnicas que permitan la toma de decisiones sobre los hechos.

La Investigación de Operaciones, la segunda parte del área cuantitativa del ciclo profesional del programa, apoya en la parte estratégica y operativa de las operaciones, donde deben tomarse decisiones que deben estar apoyadas en alguna metodología que dé cuenta de manera objetiva que están respaldadas por datos y hechos (La Estadística).

Los conocimientos y las herramientas adquiridas a través del curso de Investigación de Operaciones II, ofrecen al estudiante una de las principales herramientas de trabajo a la hora de gestionar procesos productivos o de servicios, ya que intentan explicar su comportamiento y la manera más adecuada de abordarlos en busca de los resultados ideales según el entorno.

PROPÓSITO

Brindar al estudiante herramientas basadas en modelos matemáticos para la evaluación racional de situaciones de las organizaciones, que le permitan obtener mayor información y lograr mejorar los resultados de su proceso de toma de decisiones en busca de la excelencia.

COMPETENCIAS

COGNITIVAS

1. Comprende la importancia de la evaluación racional de decisiones.

Logros

Descubre las bondades de enfrentar un problema con el apoyo de modelos matemáticos.

Conoce los resultados alcanzados por diferentes organizaciones en la solución de problemas con el apoyo de modelos matemáticos.

Comprende el procedimiento teórico para la solución de un problema bajo el enfoque de investigación de operaciones.

Identifica como a través de la investigación de operaciones se puede probar que el resultado alcanzado es óptimo bajo las condiciones establecidas.

2. Construye modelos matemáticos representativos de diferentes situaciones reales de las organizaciones.

Logros

Identifica la estructura apropiada de un modelo para representar una situación de análisis.

Identifica las variables a incluir en el planteamiento de un problema a través de un modelo matemático.

Establece la relación lógica de los componentes del modelo matemático.

3. Explica el comportamiento de procesos, define sus condiciones de operación e identifica sobre ellos posibilidades de mejora.

Logros

Interpreta los resultados encontrados al resolver el modelo matemático.

Describe las características de operación de un sistema a través del análisis de los resultados.

Identifica formas de evaluación de diferentes alternativas de solución del problema.

Propone implementar soluciones como solución de los problemas planteados.

4. Diseña sistemas de espera que cumplan con los objetivos de la organización.

Logros

Identifica los actores que definen el comportamiento de un sistema de colas
Comprende el impacto de los efectos aleatorios sobre las condiciones de operación del sistema.
Conoce las diferentes estructuras de sistemas de colas en la combinación del comportamiento y diseño de los componentes del sistema.
Evalúa las condiciones de operación de los sistemas de colas apoyado en modelos matemáticos.
Propone alternativas de decisión para alcanzar los objetivos propuestos.

5. Diseña políticas para la administración de los inventarios, que cumplan los objetivos de servicio al cliente de manera óptima.

Logros

Comprende la importancia de la administración de los inventarios en las empresas.
Identifica los componentes de costos para un modelo matemático representativo de la operación de un sistema de inventarios.
Identifica los diferentes modelos de inventario de acuerdo a las características de su operación.
Evalúa las condiciones de operación del sistema de inventarios.
Propone alternativas de solución que permitan optimizar las condiciones de operación de un sistema de inventarios.

6. Propone alternativas de solución a los problemas que impiden el logro de los objetivos.

Identifica los objetivos de la organización.
Identifica los elementos que impiden el logro de los objetivos y los establece como problemas que requieren solución
Clasifica los problemas a resolver mediante el impacto que tienen para la organización.
Representa la situación de análisis a través de un modelo matemático.
Resuelve el modelo matemático.
Interpreta los resultados.
Propone alternativas de solución y las evalúa.
Decide como resolver el problema.

ACTITUDINALES Y AXIOLÓGICAS

1. Comprende la importancia de trabajar con otras disciplinas para lograr el diseño de los modelos matemáticos, recolectar la información que permita definir sus parámetros, validarlos y analizar los resultados.

Comprende que en la obtención de información, conocimiento de las condiciones de operación de los sistemas, definición de su estructura, validación de los diseños, programación de los algoritmos de solución, interpretación de los resultados, se requiere el apoyo de personas conocedoras de las disciplinas específicas evaluadas.

2. Desarrolla la capacidad para la toma de decisiones.

Logros

Propone alternativas de decisión y las evalúa.
Determina el mejor curso de acción para la solución del problema.
Pierde el miedo en proponer alternativas de decisión.

CONTENIDOS

1. TEORÍA DE DECISIONES
 - 1.1 Conceptos Básicos
 - 1.2 Toma de decisiones con riesgo
 - 1.3 Toma de decisiones con incertidumbre
 - 1.4 Toma de decisiones con información (Decisiones Bayesianas)
 - 1.5 Teoría de juegos
2. CADENAS DE MARKOV
 - 2.1 Conceptos básicos
 - 2.2 Procesos de Estocásticos
 - 2.3 Cadenas de Markov
 - 2.4 Matriz de transición y probabilidades de transición.
 - 2.5 Estados de una cadena de Markov
 - 2.6 Condiciones de estado estable de una cadena de Markov
 - 2.7 Modelos de aplicación.
 - 2.8 Tiempos de primera pasada y probabilidades de absorción
 - 2.9 Cadenas de Markov de tiempo continuo
3. TEORÍA DE COLAS
 - 3.1 Conceptos Básicos.
 - 3.2 Proceso de nacimiento – muerte. Llegadas tipo Poisson y tiempos de servicios regulados exponencialmente.
 - 3.3 Modelos Markovianos
 - 3.4 Una Cola un servidor (M/M/1)
 - 3.5 Varias estaciones en paralelo (M/M/K)

- 3.6 Modelos de población finita
- 3.7 Modelos generalizados no markovianos.
- 3.8 Valoración económica
- 3.9 Colas con prioridades
- 3.10 Modelos de aplicación
- 4. SISTEMAS DE INVENTARIOS
- 4.1 Conceptos básicos
- 4.2 Costos en un sistema de inventarios
- 4.3 Modelos de una sola orden de compra y órdenes de compra repetitiva.
- 4.4 Modelos determinísticos
- 4.5 Modelos estocásticos

ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS

1. Clases magistrales para la explicación inicial de los fundamentos teóricos de cada tema.
2. Señalamiento de posibles aplicaciones y solución de problemas específicos utilizando los procedimientos teóricos.
3. Realización de talleres para la comprensión de los temas y problemas y la identificación de debilidades en el proceso de aprendizaje.
4. Incentivas la lectura de artículos de aplicación
5. Prácticas mediante el planteamiento y análisis de un caso de aplicación.

EVALUACIÓN DE LA ASIGNATURA

La evaluación debe ser formativa para ejercitar y desarrollar en el estudiante los rasgos de la motivación por los logros. Para ello se realizarán:

- Exámenes o pruebas parciales individuales (75%)
- Quices, tareas y asistencia participativa. (10%)
- Trabajos de investigación. (15%)

La materia está dividida en cuatro capítulos y cada uno de ellos se evaluará en una prueba escrita en la que se tendrán en cuenta los siguientes niveles de logro:

1. Comprende la situación planteada en el enunciado.
2. Identifica los objetivos a alcanzar.
3. Plantea un modelo matemático representativo de la condición planteada.
4. Establece las características de operación del sistema.
5. Evalúa las diferentes alternativas de solución.
6. Propone una estrategia de solución a través del análisis de los resultados.

Para cada tema el estudiante deberá entregar un artículo de aplicación sobre el tema tratado, tomado de la base de datos en ingles, con un análisis que contendrá por los menos:

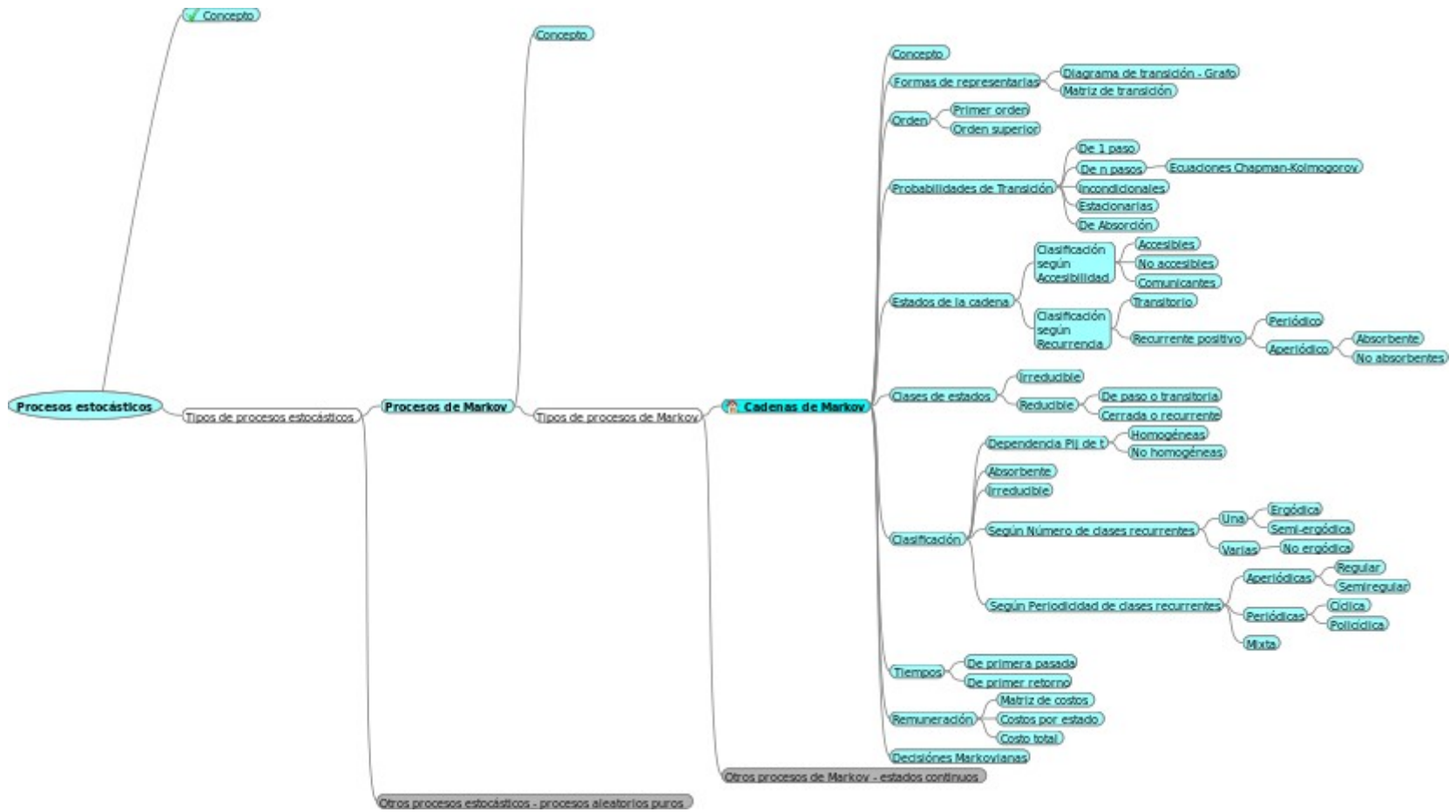
1. Problemática planteada.
2. Objetivos.
3. Marco teórico
4. Metodología aplicada para la solución del problema.
5. Resultados alcanzados.
6. Conclusiones.

Sobre uno de éstos temas seleccionados por el estudiante y propuestos al profesor, el estudiante presentará al final del curso una exposición al curso sobre el artículo.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA Y COMPLEMENTARIA

- HILLER, Frederick; LIEBERMAN, Gerald. Introducción a la Investigación de operaciones. Mc Graw Hill.
- TAHA, Hamdy. Investigación de Operaciones. Prentice Hall. México D.F., 2002.
- G.D. EPPEN – F.J. GOULD Investigación de operaciones en la ciencia administrativa Prentice Hall. 5ª Edición.
- ANDERSON, David y SWEENEY, Dennis y WILLIAMS, Thomas. Métodos cuantitativos para los negocios México, 1999 International Thomson Editores.
- GROSS, Donald; HARRIS, Carl. Fundamental of queuing. John Wiley and Sons.
- ROSS, Sheldon M. Introduction to probability Models. Academic Press.
- JONES, J. Morgan. Introducción a la teoría de decisiones. Alfaomega. México, D.F. 1995

ANEXO B. MAPA MENTAL DE CADENAS DE MARKOV



ANEXO C. CADENAS DE MARKOV EN EL MUNDO REAL

APLICACIONES DE LAS CADENAS DE MARKOV EN EL MUNDO REAL

La siguiente es una relación de varias aplicaciones relacionadas con el tema de cadenas de Markov, los resúmenes de cada una de las aplicaciones que se encuentran a continuación, están extractados de sus respectivos documentos.

1. MODELO DE MARKOV DE TRES ESTADOS: COMPARACIÓN DE PARAMETRIZACIONES DE LA TASA DE INTENSIDAD DE TRANSICIÓN. APLICACIÓN A DATOS DE ARTRITIS REUMATOIDEA

Fuente: http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-17512007000200005&script=sci_arttext

“Se considera un modelo múltiple de tres estados donde uno de ellos es absorbente. Se asume que la dependencia entre las observaciones registradas para un mismo sujeto sigue un proceso de Markov. Se comparan, vía simulación, tres diferentes parametrizaciones de la tasa de intensidad de transición: la primera está basada en el modelo de hazard multiplicativo de Andersen- Gill (Andersen et al. 1993), la segunda, en el modelo logístico, y la tercera depende del modelo log-log complementario. El método de estimación de parámetros se basa en la función de verosimilitud la cual se optimiza usando las soluciones exactas de un sistema de ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante junto con el algoritmo de Newton-Raphson (Abramowitz & Stegun 1972).

Usando el sesgo relativo, se selecciona el mejor método de parametrización y se ilustra usando datos recopilados en la Corporación para Investigaciones Biológicas, CIB1 , acerca de pacientes con artritis reumatoidea”.

2. ANÁLISIS DE CADENAS DE MARKOV Y SERIES DE FOURIER EN UNA SECUENCIA HEMIPELÁGICA DEL JURÁSICO SUPERIOR DE LA PENÍNSULA ANTÁRTICA

Fuente: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1851-49792009000100005

“La Formación Ameghino (Kimmeridgiano-Berriasiano), Cuenca Larsen, Península Antártica, está compuesta por una asociación de microfácies de pelitas con radiolarios (P1), pelitas negras (P2), pelitas bioturbadas y peloidales (P3), tobas (T) y areniscas (A) excelentemente preservadas. Este conjunto de microfácies revela sedimentación pelágica/ hemipelágica en un ambiente deficiente en oxígeno, periódicamente interrumpida por caídas de cenizas del arco volcánico antártico. Análisis basados en cadenas de Markov indican la recurrencia de las microfácies y sus relaciones cíclicas. Se interpreta que la alternancia de pelitas con radiolarios y pelitas negras (P1-P2) responde a variaciones en la productividad/dilución, mientras que las microfácies de tobas y areniscas corresponden a depósitos de evento que modificaron las condiciones ambientales

y diagenéticas evitando la disolución de los esqueletos de radiolarios en la masa de agua y en el fondo, y generando de este modo una memoria markoviana con ciclos T-P1-P2. Por otra parte, el análisis por transformadas de Fourier indica para los ciclos P1-P2 una duración del orden de 1000 años, en el rango de variaciones sub-Milankovitch”.

3. ANÁLISIS MARKOVIANO DE UN PROCESO DE ESTANCIA HOSPITALARIA EN UN HOSPITAL DE TERCER NIVEL DE COMPLEJIDAD

Fuente: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=12022107>

“Objetivo: estimar el número esperado de pacientes con trauma en los servicios de hospitalización, cirugía y unidad de cuidados intensivos y en la condición de egreso vivo y muerto, luego de ingresar por urgencias a un hospital de tercer nivel de complejidad. Materiales y métodos: con base en la información derivada de un estudio de seguimiento con 2.084 registros correspondientes a ingresos a urgencias por trauma en un hospital de tercer nivel de complejidad, se estimó la matriz de probabilidades de transición y el número esperado de pacientes en cada estado en una unidad de tiempo de 12 horas para todas las cohortes de pacientes, mediante el análisis de cadenas de Markov. Resultados: se obtuvo un análisis de sensibilidad para la probabilidad de permanecer en el servicio de cirugía y de ser trasladado de la unidad de cuidados intensivos a hospitalización. Conclusión: el modelo utilizado es adecuado para la reproducción de lo observado y puede utilizarse para predecir configuraciones observables si se conoce el ritmo de ingreso de las cohortes de pacientes o si se tiene un modelo teórico para ellas”.

4. USO DE CADENAS DE MARKOV PARA LA PREDICCIÓN DE LA DINÁMICA DEL COMPORTAMIENTO DE PACIENTES EN UNA UNIDAD DE CUIDADO INTENSIVO CARDIOLÓGICA

Fuente: http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-33052006000100009&script=sci_arttext

“En este trabajo presentamos un modelo probabilístico que contribuye al estudio de la dinámica en el comportamiento y permanencia de pacientes en una unidad de cuidados intensivos cardiológica. El modelo utilizado corresponde a una Cadena de Markov en tiempo discreto, que mediante la definición de determinados niveles de gravedad de un paciente (estados) y la obtención de las correspondientes probabilidades de transición entre un nivel de gravedad y otro, permite predecir los tiempos de permanencia. Los diferentes estados empleados se basan en la construcción de un nuevo score creado para este propósito. Se muestran los detalles de la metodología adoptada y los principales resultados alcanzados en la aplicación del modelo empleado”.

5. APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV A LA FRECUENCIA DE RENTA DE VALLAS DE UNA EMPRESA DE PUBLICIDAD

Fuente: biblioteca.usac.edu.gt/tesis/03/03_3935.pdf

“En el primer capítulo se presenta las generalidades y conceptos de lo que son los modelos matemáticos probabilísticos, sus características, así como, el desarrollo teórico del modelo a aplicar en este estudio. También se han incluido las generalidades acerca de publicidad, los medios publicitarios, y la publicidad exterior, esto con el fin de comprender la actividad económica y tipo de producto que la empresa ofrece en el mercado publicitario guatemalteco.

En el segundo capítulo se incluyen los antecedentes de la compañía; se definen las variables objeto de estudio, para posteriormente desarrollar la aplicación práctica del modelo, donde se analizó el cambio en la preferencia de vallas, pudiendo determinar cual es su comportamiento en el corto y largo plazo.”

6. UNA REVISIÓN DE LA APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV DISCRETAS AL ESTUDIO DE LA MOVILIDAD GEOGRÁFICA

Fuente: http://www.ine.es/ss/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition&blobheadervalue1=attachment%3B+filename%3D425%2F696%2F166_3.pdf&blobkey=urldata&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=425%2F696%2F166_3.pdf&ssbinary=true

Tras un recorrido por los antecedentes y fundamentos del empleo de cadenas de Markov al análisis de la movilidad, en este trabajo se profundiza en el contenido de las hipótesis de homogeneidad de la población y homogeneidad temporal de una cadena de Markov discreta, valorándose, primero, su posible inconsistencia en un marco particular de análisis social, como es la movilidad geográfica, y apuntándose y revisándose críticamente, después, las principales soluciones de relajación de estas dos hipótesis contempladas en la literatura.

7. ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE INVERSIÓN EN ACTIVOS CON RIESGO DE CRÉDITO. UN MODELO MARKOVIANO

Fuente: metodos.upct.es/asepuma/comunicaciones/completas/502.pdf

“En este trabajo analizamos las estrategias de inversión en bonos con riesgo de crédito. Presentamos un modelo dinámico para la búsqueda de estrategias óptimas de inversión; en él se aplican las herramientas proporcionadas por las cadenas y los procesos de Markov tanto para la valoración de este tipo de activos financieros, como para la búsqueda de estrategias óptimas de inversión. En este

modelo se supone una inversión en bonos que se desea mantener durante un periodo de tiempo determinado; basándonos en los modelos reducidos para la valoración de activos financieros con riesgo de crédito, el modelo propuesto encuentra una regla de decisión óptima para elegir la calificación crediticia que debe tener un bono cupón cero de la industria en la que se desea invertir.”

8. ASIGNACIÓN DE MAQUINARIA A LOS OPERARIOS DE UNA TINTORERÍA, MEDIANTE SIMULACIÓN DEL PROCESO. UNA APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV

Fuente: redalyc.uaemex.mx/pdf/215/21514106.pdf

“Este artículo presenta el desarrollo de un modelo de simulación de un proceso de tintorería, mediante cadenas de Markov de primer orden, desarrollado para la empresa Hilos de Colombia¹. El estudio tuvo como objetivo crear un modelo que permitiera evaluar diferentes configuraciones de asignación de operarios a máquinas, para comparar la eficiencia para minimizar el tiempo de perturbaciones con el fin de posteriormente decidir cuál configuración implementar.”

9. APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV CONTINUAS A LAS ESTADÍSTICAS DEL SECUESTRO EN COLOMBIA

Fuente: <http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/3749/1993>

“El secuestro es considerado un delito de lesa humanidad, las estadísticas en Colombia en cuanto a este fenómeno son de las más altas del mundo, infortunadamente es una de las principales fuentes de financiamiento de los grupos insurgentes y de la delincuencia común. En este trabajo se plantea el fenómeno como un proceso de Markov continuo, tomando como base estadísticas disponibles desde el año 1996 a 2006 y se realizan un análisis de ellas a la luz de esta herramienta matemática”.

10. USO DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA SELECCIÓN DE POLÍTICAS DE MANTENIMIENTO

Fuente: <http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/5549/3139>

“Actualmente el mantenimiento ha dejado de ser aquel campo que perseguía como único objeto mantener en un estado operacional los sistemas y se ha convertido ahora en la herramienta fundamental para toda empresa que busca conseguir objetivos corporativos que siempre recaen sobre un dominio total de los procesos productivos. Debido a la naturaleza estocástica inherente a los componentes de un sistema, en este artículo, se muestra el uso de las cadenas de Markov para la evaluación de políticas de mantenimiento, mostrando la forma de implementación y como decidir sobre diferentes políticas de acuerdo con los

resultados obtenidos”.

11. ANÁLISIS DEL PROCESO DE CAMBIO DE USO Y COBERTURA DE SUELO EN LA EXPANSIÓN URBANA DEL GRAN VALPARAÍSO, SU EVOLUCIÓN Y ESCENARIOS FUTUROS

Fuente:

http://www.cybertesis.uchile.cl/tesis/uchile/2009/aq-sandoval_g/pdfAmont/aq-sandoval_g.pdf

“El principal objetivo de esta investigación es analizar el proceso de cambio de usos coberturas de suelos causados por la expansión urbana en el Gran Valparaíso y realizar proyecciones para simular los escenarios de los años 2016 y 2025, con el fin de proporcionar antecedentes que permitan mejorar la planificación urbana, ambiental y territorial. Para el desarrollo de este estudio se obtuvieron, en primer lugar, las coberturas de uso de suelo de los años 1989, 1998 y 2007 a través de fotointerpretación de Imágenes Satelitales LANDSAT TM.

En segundo lugar se determinaron las probabilidades de cambio de los usos de suelo mediante la aplicación del Método de Cadenas de Markov, para proseguir a continuación con la creación de Imágenes de Aptitud Territorial para cada uso y cobertura de suelo. Ambos resultados fueron combinados con el empleo de Automatas Celulares para la simulación de escenarios para los años 2016 – 2025.

Se concluye identificando diferentes tasas de crecimiento para diversos usos urbanos a través de los escenarios simulados, en la medida que se contempla o no la implementación del PREMVAL. Además, se lograron establecer las diferencias en los patrones espaciales y estadísticos resultantes de los distintos escenarios simulados, como así también los alcances en los patrones de reemplazo de las coberturas naturales y seminaturales circundantes.”

12. PREDICCIONES DE MARKOV APLICADAS EN EL PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA (UNET)

Fuente:

<http://servicio.bc.uc.edu.ve/ingenieria/revista/Inge-Industrial/voll-n2/art3.pdf>

“La dinámica para obtener un título profesional es un proceso sujeto a múltiples factores, por lo que ningún aspirante tiene certeza absoluta sobre su futuro desempeño. El presente estudio tiene por objetivo la formulación de un modelo de cadena de Markov, que represente el desenvolvimiento de los alumnos de pregrado en Ingeniería Industrial de la UNET, con la finalidad de pronosticar su tiempo promedio de permanencia en la universidad. Se realizó la identificación del sistema, y se recogieron y ordenaron datos relevantes para lograr la construcción

de un modelo, que permite pronosticar, con soporte en valores de probabilidades, el tiempo que los estudiantes pasan en cada uno de los semestres de la carrera de Ingeniería Industrial de la UNET, y sus posibilidades de evolución dinámica semestre a semestre, hasta la graduación o retiro. Los resultados obtenidos permiten afirmar que el modelo aumenta considerablemente el conocimiento sobre el proceso evolutivo de los estudiantes en las carreras de la universidad, que es información fundamental para la gestión de planificación universitaria. Finalmente, el enfoque metodológico adoptado hace este estudio fácilmente aplicable en otras carreras y universidades, además de otros procesos del mundo real.”

13. APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA DETERMINACIÓN DE CIRCUITOS TURÍSTICOS DEL PERÚ

Fuente:

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/801/FARRO_DIAZ_VICTOR_CADENAS_MARKOV_CIRCUITOS_TURISTICOS.pdf

“La base teórica del estudio realizado está comprendida primordialmente por lo temas de Cadenas de Markov y Diseño de Rutas, con estos temas se puede dar la aplicación a la investigación realizada, además se ha desarrollado los temas de Vectores y Muestreo Estadístico que sirven de apoyo para la aplicación de los primeros temas mencionados.

La aplicación de las Cadenas de Markov a los recorridos turísticos se evidencia al formular los modelos o matrices para cada macro-región (norte, centro y sur) y a nivel nacional, los que al desarrollarlos, brindan las probabilidades de llegada de los turistas a los distintos departamentos. La obtención de datos se realizó en base a encuestas a turistas, internos o externos, e información dada por agencias de viaje y turismo ”.

14. APOORTE DE LAS CADENAS DE MARKOV AL ANÁLISIS DE LA TASA DE DESEMPLEO DE LARGO PLAZO

Fuente: http://www.consejo.org.ar/comisiones/com_39/files/Puesto3_tesina07.pdf

“El objetivo central de este trabajo es ver en qué medida es posible estimar la estructura del mercado laboral de largo plazo en base a encuestas longitudinales mediante el uso de paneles de datos para la conformación de cadenas de Markov. En ese sentido se investiga tanto el método de elaboración del indicador, como su poder de predicción y robustez respecto a los cambios en la coyuntura”.

15. APLICACIONES NO CONVENCIONALES DE CADENA DE MARKOV

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1248>

“En el presente trabajo se mostrarán aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov, las cuales han sido orientadas a disciplinas artísticas, con la finalidad de desmitificar la aparente incompatibilidad entre las matemáticas y las artes.

Entre las mencionadas aplicaciones se encuentran dos composiciones musicales contemporáneas, creadas utilizando como referencia la obra musical de una banda predeterminada. Dichas composiciones obtenidas guardan notoria relación con el estilo musical de la banda referencial. Los archivos de audio se encuentran adjuntos al presente documento.

Del mismo modo, se muestran poesías y textos generados con esta aplicación matemática y que guardan relación con el estilo literario de escritores tomados como referencia.

Finalmente se mostrarán aplicaciones de las Cadenas de Markov para la Generación de Imágenes y Videos a través de sistemas generativos, disciplina denominada “Arte Procesual-Aleatorio”.

16. CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE FUGA DE CLIENTES UTILIZANDO INFORMACIÓN TRANSACCIONAL

Fuente: <http://www.analytics.cl/wp-content/uploads/publicaciones/segovia.pdf>

“Para cualquier tipo de empresa es sumamente relevante detectar el momento en que un cliente se va de ella: es más barato retener a un cliente que captar uno nuevo. La metodología propuesta caracteriza el proceso de fuga de clientes utilizando sus datos transaccionales. La dinámica de la situación es modelada a través de cadenas de Markov, en donde cada estado representa un grupo de clientes con similares atributos Recency, Frequency y Monetary value (RFM). La metodología caracteriza el camino de los clientes hacia la fuga, estimando las probabilidades de fuga en cada período. En base a la información analizada, la metodología permitió detectar cómo los consumidores se mueven lentamente hacia la inactividad. Este conocimiento es importante para las empresas, porque les entrega una señal oportuna que pueden utilizar para definir acciones preventivas, enfocadas a retener a sus clientes más rentables”.

17. MOVILIDAD SOCIAL Y TRANSMISIÓN DE LA POBREZA EN BOGOTÁ

Fuente: <http://www.fuac.edu.co/revista/III/seis.pdf>

“La hipótesis de esta investigación es que la baja movilidad social está relacionada con el estado de baja escolaridad en los grupos sociales de los pobres, la cual es transmitida y replicada a través de las generaciones de las familias y de las

comunitarias durante largo tiempo, condenando a la población pobre a un círculo vicioso o una ‘trampa de pobreza’ perpetua. La metodología empleada en este estudio explica la movilidad social a través de los procesos estocásticos, específicamente las Cadenas de Markov y las matrices de probabilidades de transición. Adicionalmente, el análisis intergeneracional incluye las matrices de transición condicionada. Por un lado, se estimó el índice de Movilidad de Shorrocks (1978) y por otro, éstos fueron aplicados en la Encuesta Nacional de Hogares (1978-1998) y en la Encuesta de Calidad de Vida de 1997”.

18. PROCESOS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO Y ESPACIO DISCRETO: APLICACIONES A PROCESOS CONTABLES CASO: EMPRESA AGROINDUSTRIAL.

Fuente:

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/Tesis/Basic/Cabanillas_CE/T_completo.PDF

Sin nombre³“En el desarrollo de la monografía se presenta los Procesos de Markov como una herramienta fundamental para reforzar las políticas de cobranza en una empresa. Se plantea la teoría de los Procesos de Markov y su aplicación a un caso real. Se muestra su definición para luego desarrollarla en una Empresa Agroindustrial. El Proceso de Markov nos proporciona en cada una de las subcuentas información importante sobre las posibilidades de cobranza que existen sobre estas subcuentas relacionadas con las Cuentas por Cobrar de la empresa.

19. MODELOS MARKOVIANOS PARA SECUENCIAS Y APLICACIONES A LA PREDICCIÓN DE GENES

Fuente:

http://premat.fing.edu.uy/ingenieriamatematica/archivos/tesis_andrea_mesa.pdf

“En esta tesis se estudian técnicas para modelar secuencias de datos, en particular secuencias de ADN. Si bien las técnicas de secuenciación de genomas han avanzado mucho en estos últimos años, las herramientas para la anotación, es decir para la identificación de las regiones codificantes o genes, no se han desarrollado con la misma velocidad, por lo que es de gran importancia el estudio y perfeccionamiento de procedimientos que permitan la predicción de genes.

Como posibles predictores de genes se estudian los modelos de Markov ocultos (HMM) y modelos probabilísticos condicionados como los modelos de Markov de máxima entropía (MEMM) y los campos aleatorios condicionados (CRF), con un especial énfasis en los primeros. Se detallan los algoritmos de entrenamiento y posterior inferencia de los HMM y se aplican al caso particular de búsqueda de genes VSG en *Trypanosoma brucei*”.

20. APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV EN PROTOCOLOS DE COMUNICACIÓN

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/303?show=full>

“En este trabajo se explica cómo funciona la transferencia de datos y qué políticas de control siguen los protocolos Aloha Puro y el Aloha Ranurado para evitar y gestionar las colisiones. Se realiza la programación de un modelo de cadenas de Markov para cada uno de los protocolos y con ayuda del programa SCILAB se simulan los rendimientos que éstos en diferentes escenarios.

Se obtienen los gráficos de la trayectoria de números de paquetes bloqueados a través del tiempo para el análisis de su evolución. Con los datos obtenidos se comprueba que el rendimiento del Aloha Ranurado es mayor que el del Aloha Puro en todos los escenarios posibles. Además, se realiza una prueba de diferencia de medias donde se demuestra que efectivamente existe una diferencia significativa entre ambos protocolos.

Este trabajo pretende demostrar la gran utilidad de las cadenas de Markov para analizar y tomar decisiones en varios aspectos de la vida cotidiana, en este caso, en lo relacionado con las redes de comunicación”.

21. APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV A LOS PROCESOS DE SERVICIOS HOSPITALARIOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LA ADMINISTRACIÓN DE LA SALUD

Fuente: <http://www.eumed.net/cursecon/ecolat/cu/2011/pdc.htm>

“Teniendo en cuenta la necesidad imperiosa de satisfacer las necesidades de los pacientes cuando se encuentran recibiendo un servicio dentro de un centro hospitalario, se aplica la cadena de markov para determinar el tiempo promedio de estancia de los pacientes en una sala determinada, con un determinado nivel de probabilidad en dichos estados transitorios.

Se arriba a los resultados para dar a los directivos de la institución una herramienta para la toma de decisiones dentro del campo de la administración en salud, lo cual pudiera contribuir a conocer los costos hospitalarios de estadía, optimizar los recursos disponibles, perfeccionar los servicios de salud y lograr la excelencia en los servicios prestados.

Los autores hacen énfasis en el uso de la cadena de markov como herramienta estadística que permite determinar la ocurrencia de un evento futuro en dependencia de la ocurrencia del evento inmediatamente anterior, y tiene como bondades que permite encontrar la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado particular en un momento dado y más importante aún, el promedio a la larga o las probabilidades de estado estable para cada estado analizado, prediciendo el comportamiento del sistema a través del tiempo.

Dicha herramienta de análisis a pesar de haber surgido a principios del siglo pasado es una técnica novedosa, de gran utilidad y rigor científico que sirve tanto para economistas, sociólogos, físicos, y otros investigadores que analicen un proceso dado bajo ciertas circunstancias probabilísticas”.

22. APLICACIÓN DE LAS CADENAS OCULTAS DE MARKOV PARA LA PREFERENCIA DE LOS CONSUMIDORES EN EL MERCADO CERVECERO

Fuente: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1112/PATI%C3%91O_ANTONIOLI_MIGUEL_CADENAS_OCULTAS_MARKOV_CERVECERO.pdf

“Debido al ambiente competitivo en las industrias peruanas del sector consumo masivo, es de gran interés poder determinar las preferencias de los consumidores para poder estimar de manera más eficiente sus necesidades. Es en este punto importante el uso de las Herramientas Estocásticas para el desarrollo de predicciones a largo plazo, evaluar posibles estados de movimiento entre marcas y determinar factores claves en el proceso de elección del consumidor. Este análisis se hace posible mediante el uso de modelos Estocásticos, pues se basan en Probabilidades, útiles al estimar las decisiones de los potenciales clientes. Este documento tiene como objetivo desarrollar a fondo y presentar los modelos ocultos markovianos, con la finalidad de orientar el análisis hacia los Procesos Estocásticos de tiempo discreto, que son las Cadenas de Markov, con la evidencia del supuesto de la optimización del análisis a través del reconocimiento de Estados Ocultos, difíciles de definir y que en los modelos markovianos ocultos, son el pilar para obtener los resultados deseados. Se tocarán temas relacionados y se explicarán los conceptos necesarios para poder entender las Cadenas Ocultas de Markov y su aplicación directa al sector consumo masivo. Finalmente, se demostrará su directa aplicación al tema de preferencias y los aportes para futuros estudios relacionados. En cuanto a la aplicación al tema de preferencias de los consumidores, especialmente en el mercado cervecero, cada vez cambiante, se eligieron las principales dos variables críticas que afectan de manera determinante y que además alimentan la situación de incertidumbre por la que una modelación matemática - estocástica es una de las soluciones más convenientes. Estas dos variables son: el Volumen de Ventas de cada empresa (de manera estimada) y las Transiciones entre marcas representativas por empresa. Para esas dos variables entonces, nuestro análisis tratará de poner a prueba al Modelamiento Clásico de Markov contra el Modelamiento Oculto”.

23. OPTIMIZACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE TRABAJO PARA REDUCCIÓN DE LA NECESIDAD DE MANTENIMIENTO EN TORNOS CNC

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1277>

“Esta tesis presenta Optimización del Procedimiento de Trabajo para Reducción de la Necesidad de Mantenimiento en Tornos CNC; el tema abarca la descripción actual de la empresa y su sistema actual de trabajo. Se hace énfasis en el proceso principal, concerniente a las operaciones en Tornos CNC. Se describen los parámetros de trabajo, tales como el espacio de trabajo y la clasificación de los recursos disponibles, útiles para poder aplicar las herramientas de mejora que se plantean. En base a la data recopilada se realiza la predicción de la necesidad de mantenimiento, aplicando las cadenas de Markov, conjuntamente a la determinación del período crítico, en el cual los tornos con los que cuenta la empresa sufren fallas a la vez. Llegando a la aplicación de herramientas, realizamos cuatro propuestas de mejoras aplicables a la empresa y su proceso productivo, como son la distribución de planta, la estandarización de procesos, la determinación de la cantidad económica de pedido y la aplicación del mantenimiento centrado en la confiabilidad. Esta última herramienta será tomada como control para medir la efectividad de las propuestas. Finalmente, realizamos la comparación de las herramientas, estudiando primero el grado de influencia sobre el proceso productivo, su compatibilidad y las ventajas y desventajas que poseen los procedimientos de implementación. Una vez decidido el modo de proceder, se realiza una evaluación económica, mediante la medición del costo y el beneficio de la aplicación de la herramienta. El lograr un mayor beneficio con el procedimiento elegido que el logrado con la herramienta de control nos indica que este procedimiento es el correcto a aplicar para reducir la necesidad de mantenimiento. Es un indicador importante del éxito de lo planteado, con lo cual se pueden plantear nuevas expectativas en lo que horizontes de producción se refiere, asumiendo menos costos de oportunidad”.

24. DINÁMICA DEL EMPLEO INFORMAL EN COLOMBIA: UNA APROXIMACIÓN DESDE CADENAS DE MARKOV Y FUNCIONES DE RIESGO. PRIMER TRIMESTRE DE 2010.

Fuente: <http://www.bdigital.unal.edu.co/5904/>

“El presente documento presenta un análisis de la duración del empleo informal en Colombia a partir de la Gran Encuesta Integrada de Hogares sustentado en un análisis de funciones de riesgo y cadenas de Markov. Como principal resultado se destaca el hecho de que la informalidad en Colombia ha sido un fenómeno estable a través del tiempo y se espera que se consolide al correr de los años, además que son los más jóvenes y educados los que menos duran en la informalidad y que en términos de condiciones económicas son los empleados informales los que menos ICV presentan comparativamente. Se concluyó que existen evidencia estadística para argumentar que el componente espacial es un factor trascendental a hora de explicar los determinantes de la informalidad”

25. ANÁLISIS DE COSTO-EFECTIVIDAD DE UN PROGRAMA AMBULATORIO DE REHABILITACIÓN PULMONAR DESPUÉS DE LAS EXACERBACIONES AGUDAS DE LA EPOC EN COLOMBIA.

Fuente: <http://intellectum.unisabana.edu.co:8080/jspui/handle/10818/1328>

“La evidencia de costo-efectividad de la rehabilitación pulmonar es escasa en todo el mundo y no hay estudios en países Latinoamericanos. Metodología: Se diseñó un modelo de cadenas de Markov, para evaluar los beneficios económicos de un programa de Rehabilitación Pulmonar Ambulatorio vs TS, en pacientes con EPOC después de una exacerbación, en el Sistema de Salud Colombiano para el año 2008. Resultados: El costo anual de RP fue de COL \$4,594,407.00 comparado con el costo anual del TS que fue de COL \$9,124,326.00 Los años de vida ajustados por calidad de vida de la RP más TS fueron: 0,86577, versus de la TS sin PR: 0.852979 Conclusiones: La rehabilitación es costo efectiva para el sistema de salud Colombiano”.

ANEXO D. LA ENSEÑANZA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

LA ENSEÑANZA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La siguiente es una relación de varias experiencias y propuestas relacionadas con la enseñanza de la investigación de operaciones, los resúmenes de cada uno de estos ejemplos que se encuentran a continuación, están extractados de sus respectivos documentos.

1. LA ENSEÑANZA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES A TRAVÉS DE ESTUDIO DE CASO: MANEJO DE BASURA EN LA CIUDAD DE México.

Fuente: <http://www.adeepra.org.ar/congresos/Congreso%20IBEROAMERICANO/presentacion.htm>

“La adopción de un enfoque del proceso de aprendizaje desde la perspectiva de las tecnologías de la informática y la computación, a través de casos de estudio en las universidades, es un proceso complejo que se enfrenta con barreras tecnológicas y humanas. Por este motivo, es necesario diseñar una serie de objetivos y estrategias nuevas. Los casos de estudio constituyen un ejemplo de estrategias que invitan a los estudiantes a través de temas propuestos por su misma realidad, a tener una actitud de interés por el aprendizaje así como un compromiso con su comunidad por resolver situaciones emergentes como son los temas ambientales.

Este trabajo surge para responder algunas inquietudes y mostrar experiencias personales sobre la enseñanza de la Investigación de Operaciones en las licenciaturas de Economía y Administración. En este sentido se desarrollan tres casos de estudio: simulación Monte Carlo para un tema de juegos de azar, otro de toma de decisiones en inventarios, y el uso de la Programación Lineal en un tema de optimización para un problema de la basura en la Ciudad de México. Así mismo, se muestran algunas reflexiones que sobre el tema han hecho investigadores a cerca de la forma en que”.

2. LA ENSEÑANZA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES: UNA ABORDAJE BASADA EN EL USO DE RECURSOS COMPUTACIONALES

Fuente: inf.unisul.br/~davalos/material_ipo/artigo_prog_lin.pdf

“La Investigación de Operaciones (IO) se usa en una grande parte de las carreras de administración, ingeniería e informática, y su enseñanza se torna muy variada, resultando difícil para los docentes atingir de una forma satisfactoria todos los asuntos considerados en ella. El objetivo principal de este artículo es evaluar algunas experiencias para dar apoyo a la enseñanza de IO en la Universidad del Sur de Santa Catarina - Unisul, basados en el uso de recursos computacionales, tal como, planillas de cálculo, lenguajes de programación, paquetes específicos e investigaciones en la Internet. Además, para verificar las mejorías alcanzadas en

la enseñanza, serán comentadas algunas aplicaciones realizadas por los alumnos. Las principales contribuciones de este trabajo están relacionadas al uso adecuado de estos recursos, siendo que estas prácticas presentaron buenos resultados en la enseñanza, como motivación y participación efectiva de los alumnos.”.

3. ENSEÑANZA PROBLÉMICA EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Fuente: <http://rii.cujae.edu.cu/index.php/revistaind/article/view/49>

“Los modelos han sido ampliamente aceptados como un medio para el estudio de los fenómenos físicos productivos y otros. Sin embargo, los procesos que conducen a la formulación de los modelos matemáticos poseen carácter no estructurado y en general han sido poco estudiados. En el presente trabajo se plantea el problema del entrenamiento de los estudiantes en la formulación de los modelos matemáticos, se analiza la importancia de resolver los problemas de optimización a partir de los conceptos de la teoría de sistemas.”.

4. USO DE LA LÚDICA Y EL PENSAMIENTO LATERAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS CINCO DISCIPLINAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ORGANIZACIONES INTELIGENTES

Fuente: recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisdigitales/texto/6584034A282.pdf

“GEIO, Grupo en la Enseñanza de la Investigación de Operaciones, con una experiencia de seis años en el uso de la lúdica como herramienta pedagógica, recibe la propuesta de usar su metodología en un área hasta entonces poco explorada por el grupo: el talento humano y el desarrollo organizacional. El grupo acepta la propuesta y genera un nuevo proyecto de investigación, se decide entonces dar un nuevo enfoque a algunas de las lúdicas que ya se tiene e incorporar elementos que brindan las nuevas teorías que se abordarán a través del juego, como lo son por ejemplo, Los Seis Sombreros Para Pensar. Usando metodologías lúdicas se gestiona conocimiento en relación con La Quinta Disciplina para la construcción de organizaciones inteligentes, (organizaciones que aprenden), y el Pensamiento Lateral, en el curso llevado a la Maestría en Administración del Desarrollo Humano y Organizacional de la Universidad Tecnológica de Pereira.”.

5. EL COMERCIO DE CANICAS: HERRAMIENTA DE APOYO PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE PRÁCTICO DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Fuente: http://www.scielo.org/ve/scielo.php?script=sci_pdf&pid=S0798-40652010000100005&lng=es&nrm=iso&tlng=es

“Este artículo ofrece una lúdica denominada “El Comercio de Canicas”, diseñada para complementar la clase magistral de programación lineal (PL) con elementos

prácticos que permitan incorporar principios constructivistas, aprendizaje colaborativo y basado en problemas, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de: modelación, resolución y análisis de sensibilidad, y a su vez, vincularlos con el contenido de otras asignaturas. Desde el punto de vista académico se llena un vacío de conocimiento en el ámbito específico para el que fue desarrollado, y además, a nivel general subyace información útil para docentes, estudiantes e investigadores, como: ideas para trabajos futuros y elementos metodológicos que sirven de guía para estudiar y generar otras herramientas de apoyo a cursos magistrales. A nivel práctico, dado su diseño, simplicidad y accesibilidad a los materiales que se requieren, puede ser desplegada tal cual en cursos de PL de cualquier institución educativa. A modo de validación, la lúdica es desplegada exitosamente en uno de los cursos de PL de la Universidad de Antioquia (Colombia), exponiéndose en este artículo aspectos que más gustan, lecciones aprendidas y oportunidades de mejora.”

6. ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA EL PERFECCIONAMIENTO DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN LA A SIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I

Fuente: <http://www.eumed.net/libros-gratis/2011d/1041/index.htm>

“Teniendo en cuenta que la asignatura Investigación de Operaciones I tiene grandes aplicaciones prácticas por los contenidos que se imparten en la misma que conllevan a un adecuado uso de los recursos, proporciona una ayuda en la toma de decisiones y reconociendo el nexo existente con otras asignaturas, así como conociendo la situación que presentan los estudiantes del segundo año de la carrera de Contabilidad y Finanzas de la Universidad Vladimir I Lenin, al presentar en los problemas económicos dificultades con el aprendizaje de las habilidades modelar e interpretar. Se ha elaborado una estrategia metodológica que aporta el perfeccionamiento de la preparación metodológica de la asignatura Investigación de Operaciones I, partiendo de un sistema de acciones, las cuales consisten en el perfeccionamiento de la dosificación de los contenidos en actividades docentes, de las indicaciones metodológicas, de la estructura metodológica de cada actividad docente, de las estrategias curriculares las cuales incluyen además la elaboración de la página Web de la asignatura, la implementación de la plataforma interactiva Moodle, la implementación de un software educativo y un folleto sobre laboratorio de ejercicios para apoyar el proceso de Enseñanza- Aprendizaje en los estudiantes, todo esto con el objetivo de dotar la asignatura de componentes didácticos que hagan más eficientes el Proceso Enseñanza – Aprendizaje en los estudiantes de Contabilidad y Finanzas.”

7. ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA . METODOLOGÍAS ACTIVAS Y COMPETENCIAS PROFESIONALES

Fuente: www.caedi.org.ar/pcdi/Area%201/1-417.PDF

“El presente trabajo tiene por objeto hacer una introducción a uno de los temas más actuales en enseñanza- aprendizaje como es el enfoque por competencias profesionales. En particular, nos ocuparemos de un tema de Investigación Operativa para la carrera Ingeniería Industrial y mostraremos cómo utilizar metodologías activas en el desarrollo de la materia permite obtener el máximo provecho para los alumnos y administrar mejor el recurso tiempo, tan escaso siempre en el aula. Para ello se ha seleccionado un tema habitual en el programa de dicha asignatura, Programación Lineal. Una rápida mirada por Internet nos permitirá verificar que la temática de la Investigación Operativa se encuentra presente en la redacción de las competencias profesionales de los ingenieros en general y, en particular, de los ingenieros industriales. Asimismo, subyace en este trabajo la convicción de que los contenidos de la materia mencionada tienden a la formación de competencias transversales, aquellas competencias que tendrán los más disímiles ámbitos de aplicación.”

8. RESULTADOS DE UNA EXPERIENCIA DOCENTE EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Fuente: <http://polired.upm.es/index.php/relada/article/view/1393>

“En este artículo se muestran resultados de una experiencia docente en Investigación Operativa poniendo en valor las diferencias metodológicas empleadas en una enseñanza tradicional frente al modelo propuesto por el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) que permite innovar en la docencia incorporando materiales y herramientas didácticas basados en Tecnologías de la Información y metodologías docentes como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Esta metodología es la que se analiza y se utiliza en este trabajo. La conclusión es que los participantes ABP han obtenido mejores resultados académicos en comparación con aquellos que reciben clases basadas en una enseñanza tradicional.”

9. ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS DIVERSOS MÉTODOS Y TÉCNICAS APLICADOS EN LA PRAXIS DE LA INGENIERÍA INDUSTRIAL, DESDE UNA PERSPECTIVA CONSTRUCTIVISTA

Fuente: biblo.una.edu.ve/docu.7/bases/marc/texto/t6196.pdf

“El propósito del presente trabajo es diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza de los diferentes métodos y técnicas de Ingeniería Industrial, desde una perspectiva constructivista que permita superar la carencia del material instruccional vigente en cuanto a favorecer la transferencia de estas técnicas y métodos a cursos avanzados o a la propia práctica profesional por parte de los estudiantes. Para tal fin se documentó teóricamente tanto las estrategias didácticas actualmente utilizadas en los materiales instruccionales como aquellas

que indican las pautas modernas del diseño instruccional; así mismo, las características propias del sistema de enseñanza a distancia utilizado en la Universidad Nacional Abierta. La metodología manejada, está basada en un modelo de diseño instruccional que se combina con un proceso de investigación que, parte de un marco referencial el cual se sustenta en un análisis de necesidades y la descripción del entorno donde esta inmersa la situación problemática; para luego a través de un marco explicativo respaldar la forma de subsanar las necesidades detectadas en el referencial, todo ello desemboca en una estrategia instruccional propiamente dicha planteada para solucionar la problemática manifestada. Del trabajo se concluye que actualmente se utilizan estrategias didácticas de carácter conductista lo que hace que la enseñanza del objeto de estudio: los métodos y técnicas de ingeniería se haga de manera desvinculada de la realidad del estudiante y de forma poco significativa para éste; se plantea como solución a la problemática detectada una estrategia en la cual de manera colaborativa, a través de un enfoque constructivista, fundamentado en el aprendizaje basado en problemas, proyectos y estudio de casos, haciendo uso de las bondades de la tecnología del hipertexto y los entornos virtuales el estudiante sea capaz de aprender significativa y constructivamente el objeto de estudio.”.

10. USO DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA SELECCIÓN DE POLÍTICAS DE MANTENIMIENTO

Fuente: <http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/5549/3139>

“Actualmente el mantenimiento ha dejado de ser aquel campo que perseguía como único objeto mantener en un estado operacional los sistemas y se ha convertido ahora en la herramienta fundamental para toda empresa que busca conseguir objetivos corporativos que siempre recaen sobre un dominio total de los procesos productivos. Debido a la naturaleza estocástica inherente a los componentes de un sistema, en este artículo, se muestra el uso de las cadenas de Markov para la evaluación de políticas de mantenimiento, mostrando la forma de implementación y como decidir sobre diferentes políticas de acuerdo con los resultados obtenidos”.

11. ANÁLISIS DEL PROCESO DE CAMBIO DE USO Y COBERTURA DE SUELO EN LA EXPANSIÓN URBANA DEL GRAN VALPARAÍSO, SU EVOLUCIÓN Y ESCENARIOS FUTUROS

Fuente:

http://www.cybertesis.uchile.cl/tesis/uchile/2009/aq-sandoval_g/pdfAmont/aq-sandoval_g.pdf

“El principal objetivo de esta investigación es analizar el proceso de cambio de usos coberturas de suelos causados por la expansión urbana en el Gran Valparaíso y realizar proyecciones para simular los escenarios de los años 2016 y

2025, con el fin de proporcionar antecedentes que permitan mejorar la planificación urbana, ambiental y territorial. Para el desarrollo de este estudio se obtuvieron, en primer lugar, las coberturas de uso de suelo de los años 1989, 1998 y 2007 a través de fotointerpretación de Imágenes Satelitales LANDSAT TM.

En segundo lugar se determinaron las probabilidades de cambio de los usos de suelo mediante la aplicación del Método de Cadenas de Markov, para proseguir a continuación con la creación de Imágenes de Aptitud Territorial para cada uso y cobertura de suelo. Ambos resultados fueron combinados con el empleo de Automatas Celulares para la simulación de escenarios para los años 2016 – 2025.

Se concluye identificando diferentes tasas de crecimiento para diversos usos urbanos a través de los escenarios simulados, en la medida que se contempla o no la implementación del PREMVAL. Además, se lograron establecer las diferencias en los patrones espaciales y estadísticos resultantes de los distintos escenarios simulados, como así también los alcances en los patrones de reemplazo de las coberturas naturales y seminaturales circundantes.”

12. PREDICCIONES DE MARKOV APLICADAS EN EL PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA (UNET)

Fuente:

<http://servicio.bc.uc.edu.ve/ingenieria/revista/Inge-Industrial/voll-n2/art3.pdf>

“La dinámica para obtener un título profesional es un proceso sujeto a múltiples factores, por lo que ningún aspirante tiene certeza absoluta sobre su futuro desempeño. El presente estudio tiene por objetivo la formulación de un modelo de cadena de Markov, que represente el desenvolvimiento de los alumnos de pregrado en Ingeniería Industrial de la UNET, con la finalidad de pronosticar su tiempo promedio de permanencia en la universidad. Se realizó la identificación del sistema, y se recogieron y ordenaron datos relevantes para lograr la construcción de un modelo, que permite pronosticar, con soporte en valores de probabilidades, el tiempo que los estudiantes pasan en cada uno de los semestres de la carrera de Ingeniería Industrial de la UNET, y sus posibilidades de evolución dinámica semestre a semestre, hasta la graduación o retiro. Los resultados obtenidos permiten afirmar que el modelo aumenta considerablemente el conocimiento sobre el proceso evolutivo de los estudiantes en las carreras de la universidad, que es información fundamental para la gestión de planificación universitaria. Finalmente, el enfoque metodológico adoptado hace este estudio fácilmente aplicable en otras carreras y universidades, además de otros procesos del mundo real.”

13. APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA DETERMINACIÓN DE CIRCUITOS TURÍSTICOS DEL PERÚ

Fuente:

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/801/FARRO_DIAZ

[_VICTOR_CADENAS_MARKOV_CIRCUITOS_TURISTICOS.pdf](#)

“La base teórica del estudio realizado está comprendida primordialmente por lo temas de Cadenas de Markov y Diseño de Rutas, con estos temas se puede dar la aplicación a la investigación realizada, además se ha desarrollado los temas de Vectores y Muestreo Estadístico que sirven de apoyo para la aplicación de los primeros temas mencionados.

La aplicación de las Cadenas de Markov a los recorridos turísticos se evidencia al formular los modelos o matrices para cada macro-región (norte, centro y sur) y a nivel nacional, los que al desarrollarlos, brindan las probabilidades de llegada de los turistas a los distintos departamentos. La obtención de datos se realizó en base a encuestas a turistas, internos o externos, e información dada por agencias de viaje y turismo ”.

14. APOORTE DE LAS CADENAS DE MARKOV AL ANÁLISIS DE LA TASA DE DESEMPLEO DE LARGO PLAZO

Fuente: http://www.consejo.org.ar/comisiones/com_39/files/Puesto3_tesina07.pdf

“El objetivo central de este trabajo es ver en qué medida es posible estimar la estructura del mercado laboral de largo plazo en base a encuestas longitudinales mediante el uso de paneles de datos para la conformación de cadenas de Markov. En ese sentido se investiga tanto el método de elaboración del indicador, como su poder de predicción y robustez respecto a los cambios en la coyuntura”.

15. APLICACIONES NO CONVENCIONALES DE CADENA DE MARKOV

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1248>

“En el presente trabajo se mostrarán aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov, las cuales han sido orientadas a disciplinas artísticas, con la finalidad de desmitificar la aparente incompatibilidad entre las matemáticas y las artes.

Entre las mencionadas aplicaciones se encuentran dos composiciones musicales contemporáneas, creadas utilizando como referencia la obra musical de una banda predeterminada. Dichas composiciones obtenidas guardan notoria relación con el estilo musical de la banda referencial. Los archivos de audio se encuentran adjuntos al presente documento.

Del mismo modo, se muestran poesías y textos generados con esta aplicación matemática y que guardan relación con el estilo literario de escritores tomados como referencia.

Finalmente se mostrarán aplicaciones de las Cadenas de Markov para la Generación de Imágenes y Videos a través de sistemas generativos, disciplina denominada “Arte Procesual-Aleatorio”.

16. CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE FUGA DE CLIENTES UTILIZANDO INFORMACIÓN TRANSACCIONAL

Fuente: <http://www.analytics.cl/wp-content/uploads/publicaciones/segovia.pdf>

“Para cualquier tipo de empresa es sumamente relevante detectar el momento en que un cliente se va de ella: es más barato retener a un cliente que captar uno nuevo. La metodología propuesta caracteriza el proceso de fuga de clientes utilizando sus datos transaccionales. La dinámica de la situación es modelada a través de cadenas de Markov, en donde cada estado representa un grupo de clientes con similares atributos Recency, Frequency y Monetary value (RFM). La metodología caracteriza el camino de los clientes hacia la fuga, estimando las probabilidades de fuga en cada período. En base a la información analizada, la metodología permitió detectar cómo los consumidores se mueven lentamente hacia la inactividad. Este conocimiento es importante para las empresas, porque les entrega una señal oportuna que pueden utilizar para definir acciones preventivas, enfocadas a retener a sus clientes más rentables”.

17. MOVILIDAD SOCIAL Y TRANSMISIÓN DE LA POBREZA EN BOGOTÁ

Fuente: <http://www.fuac.edu.co/revista/III/seis.pdf>

“La hipótesis de esta investigación es que la baja movilidad social está relacionada con el estado de baja escolaridad en los grupos sociales de los pobres, la cual es transmitida y replicada a través de las generaciones de las familias y de las comunitarias durante largo tiempo, condenando a la población pobre a un círculo vicioso o una ‘trampa de pobreza’ perpetua. La metodología empleada en este estudio explica la movilidad social a través de los procesos estocásticos, específicamente las Cadenas de Markov y las matrices de probabilidades de transición. Adicionalmente, el análisis intergeneracional incluye las matrices de transición condicionada. Por un lado, se estimó el índice de Movilidad de Shorrocks (1978) y por otro, éstos fueron aplicados en la Encuesta Nacional de Hogares (1978-1998) y en la Encuesta de Calidad de Vida de 1997”.

18. PROCESOS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO Y ESPACIO DISCRETO: APLICACIONES A PROCESOS CONTABLES CASO: EMPRESA AGROINDUSTRIAL.

Fuente:

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/Tesis/Basic/Cabanillas_CE/T_completo.PDF

Sin nombre³“En el desarrollo de la monografía se presenta los Procesos de Markov como una herramienta fundamental para reforzar las políticas de cobranza en una empresa. Se plantea la teoría de los Procesos de Markov y su aplicación a

un caso real. Se muestra su definición para luego desarrollarla en una Empresa Agroindustrial. El Proceso de Markov nos proporciona en cada una de las subcuentas información importante sobre las posibilidades de cobranza que existen sobre estas subcuentas relacionadas con las Cuentas por Cobrar de la empresa.

19. MODELOS MARKOVIANOS PARA SECUENCIAS Y APLICACIONES A LA PREDICCIÓN DE GENES

Fuente:

http://premat.fing.edu.uy/ingenieriamatematica/archivos/tesis_andrea_mesa.pdf

“En esta tesis se estudian técnicas para modelar secuencias de datos, en particular secuencias de ADN. Si bien las técnicas de secuenciación de genomas han avanzado mucho en estos últimos años, las herramientas para la anotación, es decir para la identificación de las regiones codificantes o genes, no se han desarrollado con la misma velocidad, por lo que es de gran importancia el estudio y perfeccionamiento de procedimientos que permitan la predicción de genes.

Como posibles predictores de genes se estudian los modelos de Markov ocultos (HMM) y modelos probabilísticos condicionados como los modelos de Markov de máxima entropía (MEMM) y los campos aleatorios condicionados (CRF), con un especial énfasis en los primeros. Se detallan los algoritmos de entrenamiento y posterior inferencia de los HMM y se aplican al caso particular de búsqueda de genes VSG en *Trypanosoma brucei*”.

20. APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV EN PROTOCOLOS DE COMUNICACIÓN

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/303?show=full>

“En este trabajo se explica cómo funciona la transferencia de datos y qué políticas de control siguen los protocolos Aloha Puro y el Aloha Ranurado para evitar y gestionar las colisiones. Se realiza la programación de un modelo de cadenas de Markov para cada uno de los protocolos y con ayuda del programa SCILAB se simulan los rendimientos que éstos en diferentes escenarios.

Se obtienen los gráficos de la trayectoria de números de paquetes bloqueados a través del tiempo para el análisis de su evolución. Con los datos obtenidos se comprueba que el rendimiento del Aloha Ranurado es mayor que el del Aloha Puro en todos los escenarios posibles. Además, se realiza una prueba de diferencia de medias donde se demuestra que efectivamente existe una diferencia significativa entre ambos protocolos.

Este trabajo pretende demostrar la gran utilidad de las cadenas de Markov para analizar y tomar decisiones en varios aspectos de la vida cotidiana, en este caso, en lo relacionado con las redes de comunicación”.

21. APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV A LOS PROCESOS DE SERVICIOS HOSPITALARIOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LA ADMINISTRACIÓN DE LA SALUD

Fuente: <http://www.eumed.net/cursecon/ecolat/cu/2011/pdc.htm>

“Teniendo en cuenta la necesidad imperiosa de satisfacer las necesidades de los pacientes cuando se encuentran recibiendo un servicio dentro de un centro hospitalario, se aplica la cadena de markov para determinar el tiempo promedio de estancia de los pacientes en una sala determinada, con un determinado nivel de probabilidad en dichos estados transitorios.

Se arriba a los resultados para dar a los directivos de la institución una herramienta para la toma de decisiones dentro del campo de la administración en salud, lo cual pudiera contribuir a conocer los costos hospitalarios de estadía, optimizar los recursos disponibles, perfeccionar los servicios de salud y lograr la excelencia en los servicios prestados.

Los autores hacen énfasis en el uso de la cadena de markov como herramienta estadística que permite determinar la ocurrencia de un evento futuro en dependencia de la ocurrencia del evento inmediatamente anterior, y tiene como bondades que permite encontrar la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado particular en un momento dado y más importante aún, el promedio a la larga o las probabilidades de estado estable para cada estado analizado, prediciendo el comportamiento del sistema a través del tiempo.

Dicha herramienta de análisis a pesar de haber surgido a principios del siglo pasado es una técnica novedosa, de gran utilidad y rigor científico que sirve tanto para economistas, sociólogos, físicos, y otros investigadores que analicen un proceso dado bajo ciertas circunstancias probabilísticas”.

22. APLICACIÓN DE LAS CADENAS OCULTAS DE MARKOV PARA LA PREFERENCIA DE LOS CONSUMIDORES EN EL MERCADO CERVECERO

Fuente: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1112/PATI%C3%91O_ANTONIOLI_MIGUEL_CADENAS_OCULTAS_MARKOV_CERVECERO.pdf

“Debido al ambiente competitivo en las industrias peruanas del sector consumo masivo, es de gran interés poder determinar las preferencias de los consumidores para poder estimar de manera más eficiente sus necesidades. Es en este punto importante el uso de las Herramientas Estocásticas para el desarrollo de predicciones a largo plazo, evaluar posibles estados de movimiento entre marcas y determinar factores claves en el proceso de elección del consumidor. Este análisis se hace posible mediante el uso de modelos Estocásticos, pues se basan

en Probabilidades, útiles al estimar las decisiones de los potenciales clientes. Este documento tiene como objetivo desarrollar a fondo y presentar los modelos ocultos markovianos, con la finalidad de orientar el análisis hacia los Procesos Estocásticos de tiempo discreto, que son las Cadenas de Markov, con la evidencia del supuesto de la optimización del análisis a través del reconocimiento de Estados Ocultos, difíciles de definir y que en los modelos markovianos ocultos, son el pilar para obtener los resultados deseados. Se tocarán temas relacionados y se explicarán los conceptos necesarios para poder entender las Cadenas Ocultas de Markov y su aplicación directa al sector consumo masivo. Finalmente, se demostrará su directa aplicación al tema de preferencias y los aportes para futuros estudios relacionados. En cuanto a la aplicación al tema de preferencias de los consumidores, especialmente en el mercado cervecero, cada vez cambiante, se eligieron las principales dos variables críticas que afectan de manera determinante y que además alimentan la situación de incertidumbre por la que una modelación matemática - estocástica es una de las soluciones más convenientes. Estas dos variables son: el Volumen de Ventas de cada empresa (de manera estimada) y las Transiciones entre marcas representativas por empresa. Para esas dos variables entonces, nuestro análisis tratará de poner a prueba al Modelamiento Clásico de Markov contra el Modelamiento Oculto”.

23. OPTIMIZACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE TRABAJO PARA REDUCCIÓN DE LA NECESIDAD DE MANTENIMIENTO EN TORNOS CNC

Fuente: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1277>

“Esta tesis presenta Optimización del Procedimiento de Trabajo para Reducción de la Necesidad de Mantenimiento en Tornos CNC; el tema abarca la descripción actual de la empresa y su sistema actual de trabajo. Se hace énfasis en el proceso principal, concerniente a las operaciones en Tornos CNC. Se describen los parámetros de trabajo, tales como el espacio de trabajo y la clasificación de los recursos disponibles, útiles para poder aplicar las herramientas de mejora que se plantean. En base a la data recopilada se realiza la predicción de la necesidad de mantenimiento, aplicando las cadenas de Markov, conjuntamente a la determinación del período crítico, en el cual los tornos con los que cuenta la empresa sufren fallas a la vez. Llegando a la aplicación de herramientas, realizamos cuatro propuestas de mejoras aplicables a la empresa y su proceso productivo, como son la distribución de planta, la estandarización de procesos, la determinación de la cantidad económica de pedido y la aplicación del mantenimiento centrado en la confiabilidad. Esta última herramienta será tomada como control para medir la efectividad de las propuestas. Finalmente, realizamos la comparación de las herramientas, estudiando primero el grado de influencia sobre el proceso productivo, su compatibilidad y las ventajas y desventajas que poseen los procedimientos de implementación. Una vez decidido el modo de proceder, se realiza una evaluación económica, mediante la medición del costo y el beneficio de la aplicación de la herramienta. El lograr un mayor beneficio con el

procedimiento elegido que el logrado con la herramienta de control nos indica que este procedimiento es el correcto a aplicar para reducir la necesidad de mantenimiento. Es un indicador importante del éxito de lo planteado, con lo cual se pueden plantear nuevas expectativas en lo que horizontes de producción se refiere, asumiendo menos costos de oportunidad”.

24. DINÁMICA DEL EMPLEO INFORMAL EN COLOMBIA: UNA APROXIMACIÓN DESDE CADENAS DE MARKOV Y FUNCIONES DE RIESGO. PRIMER TRIMESTRE DE 2010.

Fuente: <http://www.bdigital.unal.edu.co/5904/>

“El presente documento presenta un análisis de la duración del empleo informal en Colombia a partir de la Gran Encuesta Integrada de Hogares sustentado en un análisis de funciones de riesgo y cadenas de Markov. Como principal resultado se destaca el hecho de que la informalidad en Colombia ha sido un fenómeno estable a través del tiempo y se espera que se consolide al correr de los años, además que son los más jóvenes y educados los que menos duran en la informalidad y que en términos de condiciones económicas son los empleados informales los que menos ICV presentan comparativamente. Se concluyó que existen evidencia estadística para argumentar que el componente espacial es un factor trascendental a hora de explicar los determinantes de la informalidad”

25. ANÁLISIS DE COSTO-EFECTIVIDAD DE UN PROGRAMA AMBULATORIO DE REHABILITACIÓN PULMONAR DESPUÉS DE LAS EXACERBACIONES AGUDAS DE LA EPOC EN COLOMBIA.

Fuente: <http://intellectum.unisabana.edu.co:8080/jspui/handle/10818/1328>

“La evidencia de costo-efectividad de la rehabilitación pulmonar es escasa en todo el mundo y no hay estudios en países Latinoamericanos. Metodología: Se diseño un modelo de cadenas de Markov, para evaluar los beneficios económicos de un programa de Rehabilitación Pulmonar Ambulatorio vs TS, en pacientes con EPOC después de una exacerbación, en el Sistema de Salud Colombiano para el año 2008. Resultados: El costo anual de RP fue de COL \$4,594,407.00 comparado con el costo anual del TS que fue de COL \$9,124,326.00 Los años de vida ajustados por calidad de vida de la RP más TS fueron: 0,86577, versus de la TS sin PR: 0.852979 Conclusiones: La rehabilitación es costo efectiva para el sistema de salud Colombiano”.

ANEXO E. CÓDIGO BASIC DE LAS MACROS

CÓDIGO BASIC DE LAS MACROS DESARROLLADAS

```
REM ***** BASIC *****
'
'Autor: José Humberto Araque Meza
'
'Universidad Industrial de Santander
'Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas
'Escuela de Estudios Industriales y Empresariales
'Ingeniería Industrial
'2012
'
'Versión: 0.4
'
'Licencia: GPL v.3
'
'*****
Option explicit
Option base 1
'*****
Function calc_Func(sFunc$,args())
'Función para llamar las funciones de la hoja vía el servicio 'FunctionAccess'
'fuente: http://dl.dropbox.com/u/56645701/libros-walter-mora/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf
Dim oFA As Object
oFA = createUNOService("com.sun.star.sheet.FunctionAccess")
calc_Func = oFA.callFunction(sFunc,args())
End Function
'*****
Sub DataArray2PlainArray(aRows())
'Convierte un array anidado en un array corriente
'fuente: http://dl.dropbox.com/u/56645701/libros-walter-mora/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf
Dim i%,j%, aCols(),aTmp()
ReDim aTmp(1 To UBound(aRows())+ 1, 1 To UBound(aRows(0)) +1)
For i = 0 To UBound(aRows())
aCols = aRows(i)
For j = 0 To UBound(aCols())
aTmp(i +1,j +1) = aCols(j)
Next
Next
aRows() = aTmp()
End Sub
'*****
'*****
Function vEstocastico (vector()) as variant
'Verifica que un vector sea estocástico
'Recibe:
'      - un vector
```

```

'Devuelve:
'   - verdadero si es estocástico
'   - falso si no es estocástico
'   - un mensaje de error según la validación realizada

dim i, m as integer
dim suma as double
dim ok as boolean
dim prueba as boolean

if isArray(vector()) then 'Verifica que vector sea un rango
    if ubound(vector, 1) = 1 then 'Verifica que el número de filas sea 1
        suma = 0
        m = ubound(vector, 2)
        ok = true
        for i = 1 to m
            prueba = calc_func("ISNUMBER", array(vector(1,i)))
            if prueba then 'Verifica que el elemento sea numérico
                if not((vector(1, i) >= 0) and (vector(1, i) <= 1)) then 'Verifica
que el elemento esté entre 0 y 1
                    vEstocastico = "Error: elemento fuera de rango"
                    i=m+1
                    ok = false
                end if
            else
                vEstocastico = "Error: el elemento no es numérico"
                i=m+1
                ok = false
            end if
        next
        if ok then 'Verifica que se hallan cumplido las condiciones
            suma = calc_func("SUM", array(vector()))
            if suma = 1 then 'Verifica que la suma de sus elementos sea 1
                vEstocastico = true
            else
                vEstocastico = false
            end if
        end if
    else
        vEstocastico = "Error: no es un vector"
    end if
else
    vEstocastico = "Error: no es un rango"
end if
End Function

```

```

*****

```

```

Function mCuadrada(matriz()) as variant

```

```

'Verifica que una matriz sea cuadrada

```

```

'Recibe:

```

```

'   - una matriz

```

```

'Devuelve:

```

```

'   - verdadero si es cuadrada

```

```

'   - falso si no es cuadrada

```

```

'      - un mensaje de error según la validación realizada

if IsArray(matriz()) then 'Verifica que matriz sea un rango
    if ubound(matriz, 1) = ubound(matriz, 2) then 'Verifica que la matriz sea cuadrada
        mCuadrada = true
    else
        mCuadrada = false
    end if
Else
    mCuadrada ="Error: no es un rango"
End If
end function

```

```

Function mNumerica(matriz()) as variant
'Verifica que todos los elementos de una matriz sean numéricos
'Recibe:
'      - una matriz
'Devuelve:
'      - verdadero si sus elementos son numéricos
'      - falso si sus elementos no son numéricos
'      - un mensaje de error según la validación realizada

```

```

dim i, j, m, n as integer
dim ok as boolean
dim prueba as boolean

```

```

if IsArray(matriz()) then 'Verifica que matriz sea un rango
    ok =true
    m = ubound(matriz, 1)
    n = ubound(matriz, 2)
    for i = 1 to m
        for j = 1 to n
            prueba = calc_func("ISNUMBER", array(matriz(i,j)))
            if not prueba then 'Verifica que el elemento sea numerico
                ok = false
                i=m+1
                j=n+1
            end if
        next
    next
    mNumerica= ok
Else
    mNumerica ="Error: no es un rango"
End If
end function

```

```

Function mEstocastica (matriz()) as variant
'Verifica que una matriz de transicion sea estocástica
'Recibe:
'      - una matriz de transicion
'Devuelve:
'      - verdadero si es estocástica

```

```

'      - falso si no es estocástica
'      - un mensaje de error según la validación realizada

dim temp (1, 1) as variant
dim i, j, k, m as integer
dim ok as boolean
dim prueba1, prueba2 as variant

prueba1 = mCuadrada(matriz)
select case prueba1    'Verifica que la matriz sea cuadrada
  case true:
    mEstocastica = false
    k = 0
    ok = true
    m = ubound(matriz, 1)
    redim temp (0, m-1)
    for i = 1 to m
      for j = 1 to m
        temp(1, j) = matriz(i, j)
      next
      prueba2 = vEstocastico(temp)
      select case prueba2
        case true:      'Verifica que el vector fila sea estocastico
          k = k + 1
        case false:
          case else:
            mEstocastica = prueba2
            i = i + 1
            j = j + 1
            ok = false
          end select
      next
    if ok then
      if k = m then    'Verifica todos los vectores fila sean estocasticos
        mEstocastica = true
      end if
    end if
  case false:
    mEstocastica = "Error: la matriz no es cuadrada"
  case else :
    mEstocastica = prueba1
end select
End Function

```

```

' *****

```

```

Function mProducto(matriz1(), matriz2(), optional tipo as integer) as variant
'Calcula el producto aritmético o booleano de dos matrices
'Recibe:
'      - dos matrices
'      - un tipo (opcional, por defecto se asume cero)
'          - si tipo es cero, calcula el producto aritmético
'          - si tipo es uno, calcula el producto booleano
'Devuelve:

```

```

'      - una matriz si el producto se realiza correctamente
'      - un mensaje de error según la validación realizada

dim mtemp() as variant
dim i, j, k as integer
dim m, n, o as integer
dim ok as boolean
dim prueba1, prueba2, prueba3 as variant

if isarray(matriz1) and isarray(matriz2) then      'Verifica que los argumentos sean matrices
    if ubound(matriz1,2) = ubound(matriz2, 1) then 'Verifica que sus dimensiones sean
correctas
        prueba1 = mnumerica(matriz1)
        select case prueba1      'Verifica que la matriz1 sea numerica
            case true:
                prueba2 = mnumerica(matriz2)
                select case prueba2      'Verifica que la matriz2 sea numerica
                    case true:
                        ok = true
                        if ismissing(tipo) then      'Verifica si se omitio el tipo
                            tipo = 0
                        else
                            prueba3 = calc_func("ISNUMBER",
array(tipo))
                            if prueba3 then 'Verifica que el tipo sea
numérico
                                select case prueba3
                                    case 0, 1      'Verifica
que el tipo sea 0 o 1
                                        case else
                                            mProducto =
"Error: tipo fuera de rango"
                                            ok = false
                                        end select
                                    else
                                        mProducto = "Error: el tipo no es
numérico"
                                        ok = false
                                    end if
                                end if
                            if ok then      'Verifica que los argumentos sean
correctos
                                if tipo = 0 then
                                    mtemp = calc_func("MMULT",
array(matriz1(), matriz2()))
                                    dataarray2plainarray mtemp
                                    mtemp(i, j) = mtemp(i, j) +
matriz1(i,k) * matriz2(k, j)      'Producto aritmetico
                                else
                                    m = ubound(matriz1, 1)
                                    n = ubound(matriz2, 2)
                                    o = ubound(matriz1, 2)
                                    redim mtemp(m-1, n-1)
                                end if
                            end if
                        end select
                    end if
                end select
            end if
        end if
    end if
end if

```

```

for i = 1 to m
    for j = 1 to n
        for k = 1 to o
            if
                (matriz1(i,k)=0 or matriz1(i,k)=1) and (matriz2(k, j)=0 or matriz2(k, j)=1) then 'Verifica que los
                    elementos sean binarios
                mt
                emp(i, j) =      mtemp(i, j) or (matriz1(i,k) and matriz2(k, j)) 'Producto booleano
                else
                    mP
            +1
            +1
            +1
            false
            end if
        next
    next
end if
if ok then 'Verifica que el producto se haya
    mproducto = mtemp
end if
case false:
    mProducto = "Error: el elemento no es numérico"
case else:
    mProducto = prueba2
end select
case false:
    mProducto = "Error: el elemento no es numérico"
case else:
    mProducto = prueba1
end select
else
    mProducto = "Error: dimensiones no concuerdan"
end if
else
    mProducto = "Error: alguno de los argumentos no es una matriz"
end if
end function

'*****
Function mPotencia (matriz(), potencia, optional tipo as integer) as variant
'Eleva una matriz a una potencia
'Recibe:
'      - una matriz cuadrada

```

```
'      - un tipo (opcional, por defecto se asume cero)
'      - si tipo es cero, calcula la potencia atirmética
'      - si tipo es uno, calcula la potencia booleana
```

'Devuelve:

```
'      - una matriz si la potencia se realiza correctamente
'      - un mensaje de error según la validación realizada
```

```
dim mtemp(), maux(), prueba as variant
dim i, j, k, m, t as integer
dim ok as boolean
dim prueba1, prueba2 as variant
dim prueba3, prueba4 as boolean
```

```
prueba1 = mcuadrada(matriz)
```

```
select case prueba1 'Verifica que la matriz sea cuadrada
```

```
  case true:
```

```
    ok = true
```

```
    if ismissing(tipo) then 'Verifica si se omitio el tipo
      tipo = 0
```

```
    else
```

```
      prueba4 = calc_func("ISNUMBER", array(tipo))
```

```
      if prueba4 then 'Verifica que el tipo sea numérico
```

```
        select case prueba3
```

```
          case 0, 1 'Verifica que el tipo sea 0 o 1
```

```
          case else
```

```
            mProducto = "Error: tipo fuera de rango"
```

```
            ok = false
```

```
          end select
```

```
        else
```

```
          mProducto = "Error: el tipo no es numérico"
```

```
          ok = false
```

```
        end if
```

```
    end if
```

```
    if ok then 'Verifica que los argumentos sean correctos
```

```
      prueba3 = calc_func("ISNUMBER", array(potencia))
```

```
      if prueba3 then 'Verifica que la potencia sea numérica
```

```
        if potencia > 0 then 'Verifica que la potencia sea positiva
```

```
          if (potencia\1) = potencia then 'Verifica que la potencia
```

```
sea entera
```

```
          if potencia > 1 then
```

```
            m = ubound(matriz, 1)
```

```
            redim maux(m-1, m-1)
```

```
            maux = matriz
```

```
            for t = 1 to potencia -1
```

```
              prueba = mproducto(maux(),
```

```
matriz(), tipo)
```

```
              if isarray(prueba) then 'Verifica
```

```
que el producto se haya realizado correctamente
```

```
                maux = prueba
```

```
            else
```

```
              mPotencia= prueba
```

```
              t=potencia +1
```

```
              ok =false
```

```

                                end if
                                next
                                if ok then      'Verifica que la potencia se
haya realizado correctamente
                                mpotencia = maux
                                end if
                                else
                                prueba2 = mnumerica(matriz)
                                select case prueba2
                                case true:      'Verifica que la
matriz sea numerica
                                mpotencia = matriz
                                case false:
                                mpotencia = "Error: el
elemento no es numérico"
                                case else:
                                mpotencia = prueba2
                                end select
                                end if
                                else
                                mPotencia = "Error: la potencia no es entera"
                                end if
                                else
                                mPotencia = "Error: la potencia no es positiva"
                                end if
                                else
                                mPotencia = "Error: la potencia no es numérica"
                                End If
                                end if
                                case false:
                                mPotencia = "Error: la matriz no es cuadrada"
                                case else:
                                mPotencia = prueba1
                                End select
                                End Function

```

```

'*****

```

```

Function mAdyacencia(matriz(), optional potencia as integer) as variant

```

```

'Calcula la matriz de adyacencia elevada a una potencia

```

```

'Recibe:

```

```

'      - una matriz de transicion

```

```

'      - una potencia (opcional, por defecto se asume 1)

```

```

'Devuelve:

```

```

'      - una matriz si se realiza correctamente

```

```

'      - un mensaje de error según la validación realizada

```

```

dim i, j, m as integer

```

```

dim mtemp, maux as variant

```

```

dim prueba as variant

```

```

prueba = mcuadrada(matriz)

```

```

select case prueba

```

```

    case true:      'Verifica que la matriz sea cuadrada

```

```

                    if ismissing(potencia) then      'Verifica si se omitio la potencia

```

```

        potencia = 1
    end if
    m = ubound(matriz, 1)
    mtemp = mpotencia(matriz, potencia)
    redim maux(m-1, m-1)
    if isarray(mtemp) then 'Verifica que la potencia se haya realizado correctamente
        for i = 1 to m
            for j = 1 to m
                if mtemp(i, j) <> 0 then
                    maux(i, j) = 1
                else
                    maux(i, j) = 0
                end if
            next
        next
        madyacencia = maux
    else
        madyacencia = mtemp
    end if
case false:
    mAdyacencia = "Error: la matriz no es cuadrada"
case else:
    mAdyacencia = prueba
end select
end function

```

Function mConectividad(matriz()) as variant

'Calcula la matriz de conectividad

'Recibe:

' - una matriz de transicion

'Devuelve:

' - una matriz si se realiza correctamente

' - un mensaje de error según la validación realizada

dim i, j, k as integer

dim m as integer

dim mtemp() as variant

dim prueba1, prueba2 as variant

prueba1 = mCuadrada(matriz)

select case prueba1

case true: 'Verifica que la matriz sea cuadrada

m = ubound(matriz, 1)

prueba2 = madyacencia(matriz)

if isarray(prueba2) then 'Verifica que la matriz de adyacencia se haya calculado correctamente

mtemp = prueba2

for k = 1 to m 'Algoritmo de Warshall

for i = 1 to m

for j = 1 to m

mtemp(i, j) = mtemp(i, j) or (mtemp(i, k) and

mtemp(k, j))

next

```

        next
        next
        mconectividad = mtemp
    else
        mconectividad = prueba2
    end if
case false:
    mconectividad = "Error: la matriz no es cuadrada"
case else:
    mConectividad = prueba1
end select
end function

'*****
Function mFConexa(matriz()) as variant
'Verifica que una matriz sea fuertemente conexa
'Recibe:
'    - una matriz de transición
'Devuelve:
'    - verdadero si es fuertemente conexa
'    - falso si no es fuertemente conexa
'    - un mensaje de error según la validación realizada

dim mtemp() as variant
dim i, j, m as integer
dim ok as boolean
dim prueba as variant

prueba = mconectividad(matriz)
if isarray(prueba) then 'Verifica que la matriz de conectividad se haya calculado correctamente
    mtemp = prueba
    m=ubound(mtemp, 1)
    ok = true
    for i = 1 to m
        for j = 1 to m
            if mtemp(i, j) = 0 then 'Verifica que no hayan ceros en la matriz de
conectividad
                ok = false
                i= m + 1
                j = m + 1
            end if
        next
    next
    mFConexa = ok
else
    mFConexa = prueba
end if
end function

'*****
Function mIrreducible(matriz()) as variant
'Verifica que una mariz sea irreducible
'Recibe:
'    - una matriz de transicion

```

```

'Devuelve:
'   - verdadero si es irreducible
'   - falso si no es irreducible
'   - un mensaje de error según la validación realizada

dim prueba1, prueba2 as variant

prueba1 = mestocastica(matriz)
select case prueba1
    case true:      'Verifica que la matriz sea estocástica
        prueba2 = mfconexa(matriz)
        select case prueba2
            case true:      'Verifica que la matriz sea fuertemente conexa
                mlIrreducible = true
            case false:
                mlIrreducible = false
            case else:
                mlIrreducible = prueba2
        end select
    case false:
        mlIrreducible = "Error: la matriz no es estocástica"
    case else:
        mlIrreducible = prueba1
end select
end function

'*****
Function ePeriodo(matriz()) as variant
'Calcula el periodo de cada estado de la matriz
'Recibe:
'   - una matriz de transicion
'Devuelve:
'   - un vector con el periodo de cada estado
'   - un mensaje de error según la validación realizada

dim i, k as integer
dim m as integer
dim mtemp(), vtemp() as integer
dim prueba as variant

prueba = mestocastica(matriz)
select case prueba
    case true:      'Verifica que la matriz sea estocastica
        m = ubound(matriz, 1)
        mtemp = matriz
        redim vtemp(m-1, 0)
        for i = 1 to m
            vtemp(i, 1) = mtemp(i, i)
        next
        for k = 2 to (2 * m)
            mtemp = mproducto(mtemp, matriz)
            for i = 1 to m
                if mtemp(i, i) <> 0 then
                    if vtemp(i, 1) <> 0 then

```

```

                                vtemp(i, 1) = calc_Func("GCD",Array(vtemp(i, 1), k))
                                else
                                vtemp(i, 1) = k
                                end if
                            end if
                        next
                    next
                eperiodo = vtemp
                case false:
                    ePeriodo = "Error: la matriz no es estocástica"
                case else:
                    ePeriodo = prueba
            end select
        end function

```

```

function mAperiodica(matriz()) as variant
'Verifica que todos los estados de la matriz sean aperiódicos
'Recibe:
'    - una matriz de transicion
'Devuelve:
'    - verdadero si todos sus estados son aperiódicos
'    - falso si no todos sus estados son aperiódicos
'    - un mensaje de error según la validación realizada

```

```

dim prueba as variant
dim i, k, m as integer

```

```

prueba = eperiodo(matriz)
if isarray(prueba) then 'Verifica que el periodo de cada estado se haya calculado correctamente
    m = ubound(prueba, 1)
    k=0
    for i = 1 to m
        if prueba (i,1)= 1 then
            k=k+1
        end if
    next
    if k=m then 'Verifica que todos los estados sean aperiodicos
        mAperiodica = true
    else
        mAperiodica = false
    end if
else
    mAperiodica = prueba
end if
end function

```

```

Function pEstable(matriz()) as variant
'Calcula las probabilidades de estado estable de una matriz de transicion
'Recibe:
'    - una matriz de transición
'Devuelve:
'    - n vector con la probabilidades de estado estable

```

```

'      - un mensaje de error según la validación realizada

dim mtemp(), midn() as variant
dim prueba1, prueba3 as variant
dim i, m as integer

prueba1 = mirreducible(matriz)
select case prueba1
    case true:      "Verifica que la matriz sea irreducible
                    prueba3 = mAperiodica(matriz)
                    select case prueba3
                        case true:      "Verifica que la matriz sea aperiodica
                                        m = ubound(matriz, 1)
                                        redim mtemp(m-1, m-1)
                                        redim midn(m-1, m-1)
                                        mtemp = calc_Func("TRANSPOSE",Array(matriz()))
                                        DataArray2PlainArray mtemp
                                        for i = 1 to m
                                            mtemp(i, i) = mtemp(i, i) - 1
                                            mtemp(m, i) = 1
                                        next
                                        mtemp = calc_Func("MINVERSE",Array(mtemp()))
                                        DataArray2PlainArray mtemp
                                        for i = 1 to m
                                            mtemp(i, 1) = mtemp(i, m)
                                        next
                                        redim preserve mtemp(m-1,0)
                                        pEstable= mtemp
                        case false:
                            pEstable = "Error: la matriz no es aperiódica"
                        case else:
                            pEstable = prueba3
                    end select
    case false
        pEstable = "Error: la matriz no es irreducible"
    case else:
        pEstable = prueba1
end select
End function

' *****
function pAbsoluta(vector(), matriz(), periodo) as variant
'Calcula el vector de probabilidades absolutas
'Recibe:
'      - el vector de condiciones iniciales
'      - la matriz de transición
'      - el número de transiciones
'Devuelve:
'      - un vector con las probabilidades absolutas
'      - un mensaje de error según la validación realizada

dim prueba1, prueba2 as variant

prueba1 = vestocastico(vector)

```

```

select case prueba1
  case true:      'Verifica que el vector sea estocástico
    prueba2 = mpotencia(matriz, periodo)
    if isarray(prueba2) then 'Verifica que la potencia se halla calculado correctamente
      pabsoluta = mproducto(vector, prueba2)
    else
      pAbsoluta = prueba2
    end if
  case false:
    pAbsoluta = "Error: el vector no es estocástico."
  case else:
    pAbsoluta = prueba1
end select
end function

```

```

'*****

```

```

function mTiempos(matriz()) as variant
'Calcula los tiempo de recurrencia y de primera pasada
'Recibe:
'  - una matriz de transición
'Devuelve:
'  - una matriz con los tiempos de recurrencia y de primera pasada
'  - un mensaje de error según la validación realizada

```

```

dim maux() as double
dim vaux(), mtemp(), vtemp() as variant
dim i, j, k, m as integer
dim x, y as integer
dim prueba as variant

```

```

prueba = mestocastica(matriz)
select case prueba
  case true:      ' Verifica que la matriz sea estocástica
    m = ubound(matriz, 1)
    redim mtemp(m-2, m-2)
    redim maux(m-1, m-1)
    for k = 1 to m
      for i = 1 to m
        for j = 1 to m
          if (i<>k) and (j<>k) then
            if i>k then
              x = i-1
            else
              x= i
            end if
            if j>k then
              y = j-1
            else
              y= j
            end if
            if x = y then
              mtemp(x, y) = 1 - matriz(i, j)
            else
              mtemp(x, y) = 0 - matriz(i, j)
            end if
          end if
        next j
      next i
    next k
  case false:
    pAbsoluta = "Error: la matriz no es estocástica."
  case else:
    pAbsoluta = prueba1
end select
end function

```

```

                                end if
                            end if
                        next
                    next
                next
                mtemp = calc_Func("MINVERSE", Array(mtemp()))
                DataArray2PlainArray mtemp
                redim vtemp(m-2, 0)
                for i = 1 to m-1
                    vtemp(i, 1) = 1
                next
                vtemp = mproducto(mtemp, vtemp)
                for i = 1 to m
                    if i<>k then
                        if i>k then
                            x = i-1
                        else
                            X = i
                        end if
                        maux(i, k) = vtemp(x, 1)
                    end if
                next
            next
            redim vaux(m-1, 0)
            vaux = pestable(matriz)
            if isarray(vaux) then    "Verifica que las probabilidades de estado estable se hallan
calculado correctamente
                for i = 1 to m
                    maux(i, i) = 1 / vaux(i, 1)
                next
                mTiempos = maux
            else
                mtiempos = vaux
            end if
        case false:
            mtiempos = "Error: la matriz no es estocástica"
        case else:
            mtiempos = prueba
    end select
end function

```

```

'*****

```

```

function pAbsorcion(matrizH(), matrizG()) as variant

```

```

'Calcula las probabilidades de absorción

```

```

'Recibe:

```

```

' - una matriz de estados transitorios a estados transitorios
' - una matriz de estados transitorios a estados absorbentes

```

```

'Devuelve:

```

```

' - una matriz con las probabilidades de absorción
' - un mensaje de error según la validación realizada

```

```

dim prueba1, prueba2, prueba3 as variant

```

```

dim mtemp(), maux() as variant

```

```

dim i, j, m, n as integer

```

```

dim ok as boolean

```

```

prueba3 = mcuadrada(matrizH)
select case prueba3
  case true: ' Verifica que la matriz1 sea cuadrada
    prueba1 = mnumerica(matrizH)
    select case prueba1
      case true: ' Verifica que la matriz1 sea numerica
        if mnumerica(matrizG) then ' Verifica que la matriz2 sea
          numerica
            ok =true
            m = ubound(matrizH, 1)
            redim mtemp(m-1, m-1)
            for i = 1 to m
              for j = 1 to m
                if (matrizH(i,j)>=0) and (matrizH(i,j)<=1)
                  then
                    if i = j then
                      mtemp(i, j) = 1 - matrizH(i,
                    j)
                    else
                      mtemp(i, j) = 0 - matrizH(i,
                    j)
                    end if
                  else
                    pabsorcion = "Error: el elemento
                    esta fuera de rango"
                    i=m+1
                    j=m+1
                    ok=false
                  end if
                next
              next
            next
            m = ubound(matrizG, 1)
            n = ubound(matrizG, 2)
            for i = 1 to m
              for j = 1 to n
                if not ((matrizG(i,j)>=0) and
                    (matrizG(i,j)<=1)) then
                  pabsorcion = "Error: el elemento
                  esta fuera de rango"
                  i=m+1
                  j=n+1
                  ok=false
                end if
              next
            next
            if ok then
              mtemp = calc_Func("MINVERSE", Array(mtemp()))
              dataArray2PlainArray mtemp
              maux = mproducto(mtemp, matrizG)
              pAbsorcion = maux
            end if
          else
            pabsorcion = "Error: no es un rango"
          end if
        end if
      end case
    end select
  end case
end select

```

```

        end if
    case false:
        pAbsorcion = "Error: la matriz no es numérica"
    case else:
        pAbsorcion = prueba1
    end select
case false:
    pAbsorcion = "Error: la matriz no es cuadrada"
case else:
    pAbsorcion = prueba3
end select
end function

'*****
Function tValor(vector(), matriz()) as variant
'Calcula el valor esperado total del sistema
'Recibe:
'    - un vector de valores totales por estado
'    - una matriz de transición
'Devuelve:
'    - el valor esperado total del sistema
'    - un mensaje de error según la validación realizada

dim prueba1, prueba2, vtemp as variant
dim i, m, n as integer
dim ok as boolean

prueba1 = pestable(matriz)
if isarray(prueba1) then 'Verifica que existan probabilidades de estado estable
    prueba2 = mnumerica(vector)
    select case prueba2
        case true:      'Verifica que el vector sea numerico
            ok = true
            m = ubound(vector, 1)
            n = ubound(vector, 2)
            if m= 1 and n>1 then    'Verifica que sea un vector fila
                redim vtemp(0, n-1)
                vtemp = vector
            elseif m>1 and n=1 then    'Verifica que sea un vector columna
                redim vtemp(0, m-1)
                vtemp = calc_Func("TRANSPOSE",Array(vector()))
                DataArray2PlainArray vtemp
            else
                tvalor = "Error: el elemento no es un vector"
                ok = false
            end if
            if ok then      'Verifica que el vector este correcto
                tvalor = mproducto(vtemp, prueba1)
            end if
        case false:
            tvalor = "Error: el elemento no es numérico"
        case else:
            tvalor = prueba2
    end select

```

```

else
    tvalor = prueba1
end if
end function

'*****
Function eValor(matrizC(), matrizT()) as variant
'Calcula el valor total para cada estado
'Recibe:
'    - una matriz de costos
'    - una matriz de transición
'Devuelve:
'    - el valor total para cada estado
'    - un mensaje de error según la validación realizada

dim prueba1, prueba2, prueba3 as variant
dim m,n as integer
dim i,j as integer
dim vtemp() as variant

prueba1 = mestocastica(matrizT)
select case prueba1
    case true:      'Verifica que la matriz de transición sea estocástica
        prueba2 = mcuadrada(matrizC)
        select case prueba2
            case true:      'Verifica que la matriz de costos sea cuadrada
                prueba3 = mnumerica(matrizc)
                select case prueba3
                    case true:      'Verifica que la matriz de costos sea
numérica
                                m= ubound(matrizc, 1)
                                n= ubound(matrizt,1)
                                if m=n then      'Verifica que las matrices sean de
las mismas dimensiones
                                redim vtemp(m-1, 0)
                                for i = 1 to m
                                    vtemp(i,1) = 0
                                    for j = 1 to m
                                        vtemp(i, 1) = vtemp(i, 1) +
(matrizc(i,j) * matrizt(i, j))
                                    next
                                next
                                evalor = vtemp
                            end if
                        case false:
                            evalor = "Error: la matriz no es numérica"
                        case else:
                            evalor = prueba3
                    end select
                case false:
                    evalor = "Error: la matriz no es cuadrada"
                case else:
                    evalor = prueba2
            end select
        end select
end select

```

```
    case false:
        evalor = "Error: la matriz no es estocástica"
    case else:
        evalor = prueba1
end select
end function
```

```
'*****'
```

ANEXO F. TALLERES ELABORADOS

TALLER 1 INTRODUCCIÓN A LAS CADENAS DE MARKOV

FECHA:	GRUPO:
---------------	---------------

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante se familiarizará con el concepto de cadenas de Markov, al finalizar, estará en capacidad de:

- Identificar procesos y cadenas de Markov.
- Reconocer las propiedades de las probabilidades de transición.
- Diferenciar entre cadenas homogéneas y no homogéneas.
- Reconocer las propiedades de las probabilidades de transición.
- Representar gráfica y matricialmente una cadena de Markov.

ACTIVIDADES

1. Individualmente proponer dos ejemplos de posibles procesos de Markov.
2. De los ejemplos anteriores identificar cuales son o no son cadenas de Markov y sustentar las respuestas.
3. Analizar las cadenas identificadas y definir los posibles estados de cada una de ellas.
4. Analizar los estados de cada una de las cadenas y completarlos en caso de que hagan falta y sustentarlos.
5. Definir formalmente X para cada ejemplo.
6. Clasificar cuales cadenas son homogéneas y cuales no. Sustentar la respuesta.
7. Proponer valores para las probabilidades de transición de los ejemplos propuestos. Verificar los valores de las probabilidades.
8. Elaborar los diagramas de transición de las cadenas.
9. Elaborar las matrices de transición de las cadenas y verificar sus

propiedades.

TALLER 2 N PASOS - ORDEN K

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante, estará en capacidad de:

- Calcular las probabilidades de transición de n pasos.
- Transformar cadenas de orden superior en cadenas de primer orden.
- Calcular las probabilidades absolutas.

ACTIVIDADES

1. Calcular las probabilidades de transición de tres pasos del ejemplo propuesto.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

t	X		t	X
1	Nublado		19	Nublado
2	Nublado		20	Nublado
3	Soleado		21	Nublado
4	Soleado		22	Soleado
5	Nublado		23	Soleado
6	Nublado		24	Nublado
7	Nublado		25	Soleado
8	Soleado		26	Soleado
9	Soleado		27	Soleado
10	Soleado		28	Soleado
11	Nublado		29	Soleado
12	Soleado		30	Soleado
13	Nublado		31	Soleado
14	Soleado		32	Soleado
15	Soleado		33	Soleado
16	Soleado		34	Soleado
17	Nublado		35	Soleado
18	Soleado		36	Soleado

2. ¿Cuáles serían los estados de la cadena de Markov de orden tres del ejemplo propuesto ? (tabla de datos anterior)

3. Plantear la matriz de transición de la cadena de Markov de orden dos del ejemplo propuesto. (tabla de datos anterior)

4. Si hoy esta nublado, que probabilidad hay de que en 3 días esté nublado?

TALLER 3 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS Y CADENAS

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

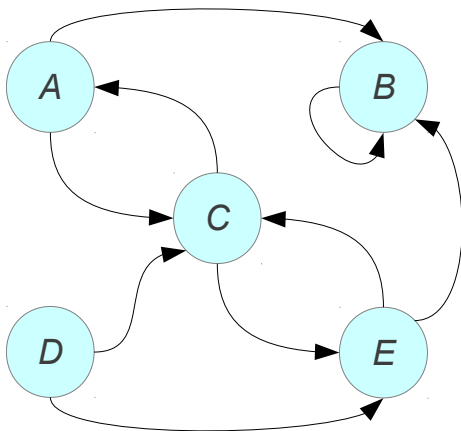
OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante se familiarizará con el concepto de cadenas de Markov, al finalizar, estará en capacidad de:

- Clasificar los estados según su accesibilidad.
- Clasificar los estados según su recurrencia.
- Identificar las clases comunicantes.
- Identificar las cadenas ergódicas.

ACTIVIDADES

1. De la cadena propuesta, clasificar los estados según su accesibilidad y sustentar las respuestas.

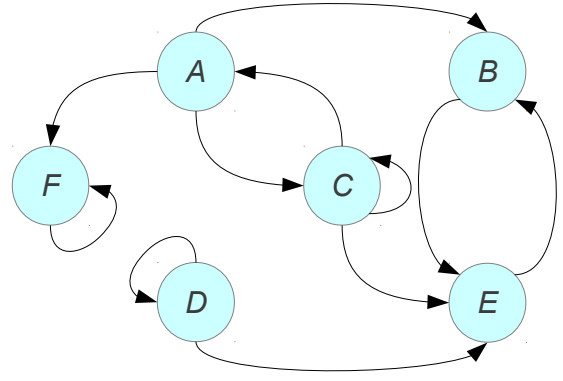


$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{CA} & 0 & 0 & 0 & p_{CE} \\ 0 & 0 & p_{DC} & 0 & p_{DE} \\ 0 & p_{EB} & p_{EC} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \begin{matrix} & B & & & & \\ C & p_{CA} & 0 & 0 & 0 & p_{CE} \\ D & 0 & 0 & p_{DC} & 0 & p_{DE} \\ E & 0 & p_{EB} & p_{EC} & 0 & 0 \end{matrix}$$

Clasificación de estados según su accesibilidad		
No accesibles	Accesibles	Comunicantes

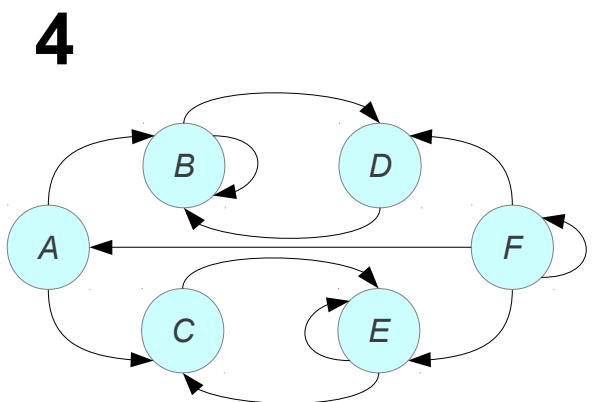
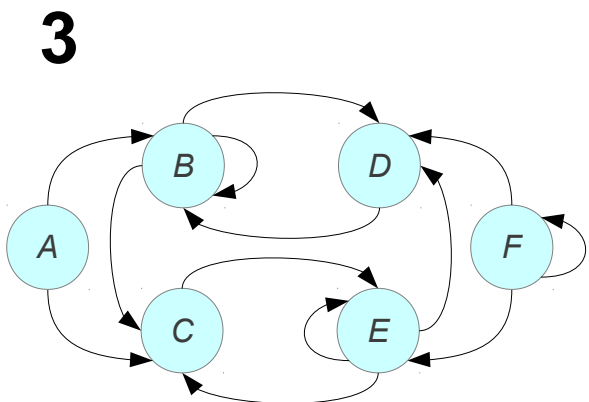
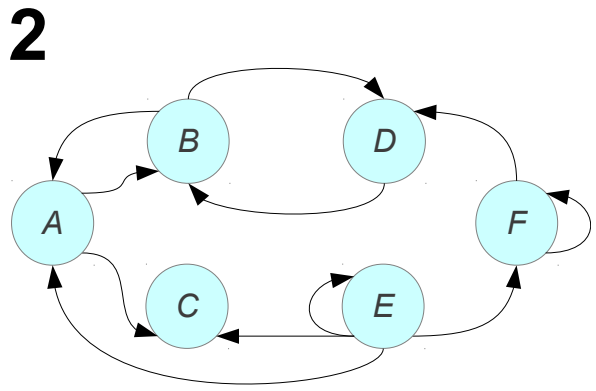
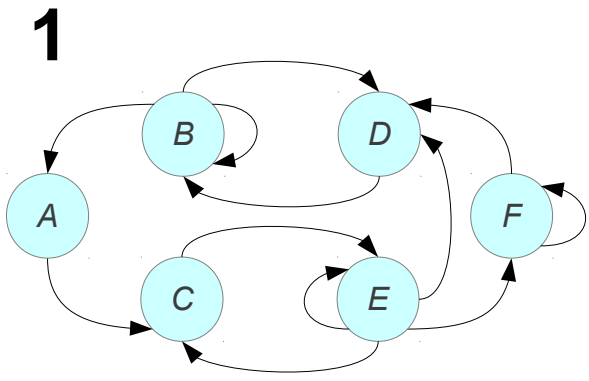
2. De la cadena propuesta, clasificar los estados según su recurrencia y sustentar las respuestas.



Transitorios (aperiódicos)			
Recurrentes periódicos			
Absorbentes			

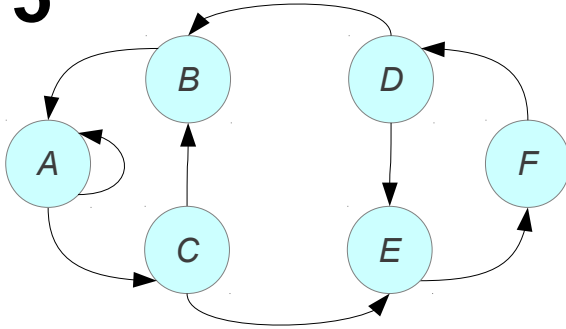
$$T = \begin{matrix} & A & B & C & D & E & F \\ A & 0 & p_{AB} & p_{AC} & 0 & 0 & p_{AF} \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & p_{CA} & 0 & p_{CC} & 0 & p_{CE} & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & p_{DD} & p_{DE} & 0 \\ E & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

3. Identificar las clases de las cadenas propuestas y sustentar las respuestas.

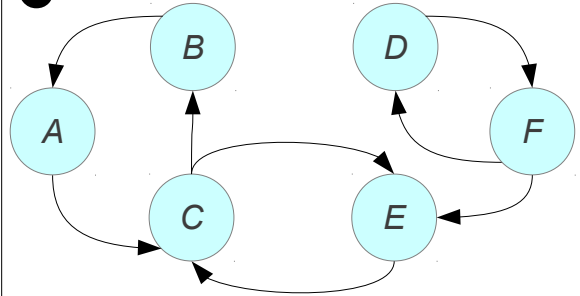


4. Determinar cuales cadenas son ergódicas y sustentar las respuestas.

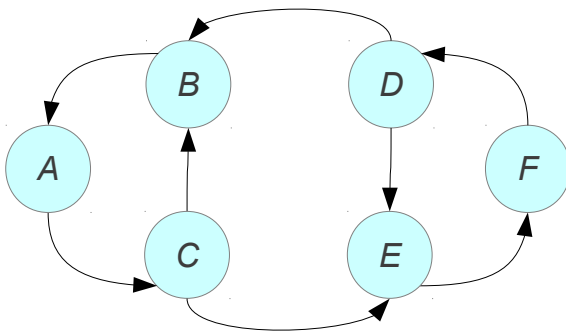
5



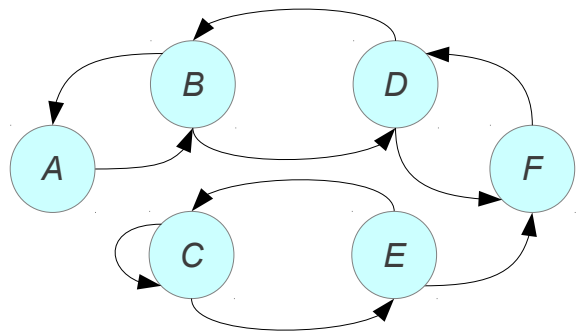
6



7



8



TALLER 4 ESTADO ESTABLE

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

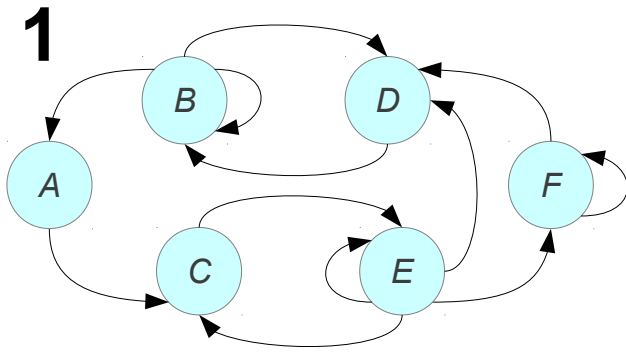
OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante estará en capacidad de:

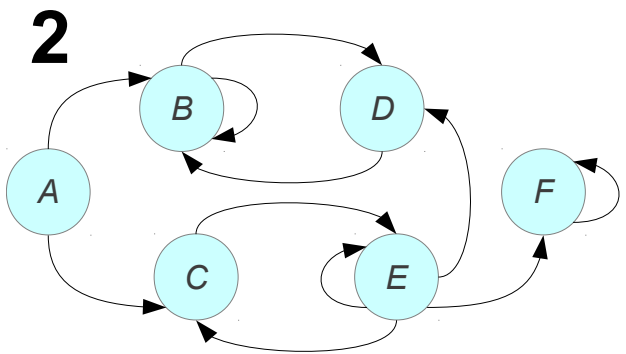
- Reconocer cuando existen las probabilidades de estado estable de una cadena de Markov, y calcularlas.
- Calcular los tiempos de primera pasada y de recurrencia.
- Identificar una cadena de Markov absorbente y calcular las probabilidades de absorción.

ACTIVIDADES

1. Calcular las probabilidades de estado estable (ver cadenas al final).
2. Calcular los tiempos de recurrencia y de primera pasada (ver cadenas al final).
3. Calcular las probabilidades de absorción (ver cadenas al final).



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

TALLER 5 DECISIÓN MARKOVIANA

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante estará en capacidad de:

- Determinar los costos totales de cada estado.
- Calcular el valor esperado del costo total.
- Determinar la política óptima.

ACTIVIDADES

1. Calcular los valores totales de cada estado, para cada una de las políticas propuestas.
2. Calcular el valor esperado del costo total, para cada una de las políticas propuestas.
3. Si los valores contenidos en cada una de las matrices de costos se determinaron considerando únicamente costos (es decir, solo valores negativos, ningún ingreso), determine cual es la política óptima y justifíquela.

Política 1.

$$T = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0,25 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,75 & 0 & 0,15 \\ 0,40 & 0 & 0,60 & 0 \\ 0,80 & 0,10 & 0,10 & 0 \end{array} \right]$$

$$C = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 450 & 35 & 240 \\ 80 & 275 & 0 & 312 \\ 57 & 0 & 428 & 0 \\ 121 & 5 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

Política 2.

$$T = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0,15 & 0,85 & 0 \\ 0,40 & 0 & 0,60 \end{array} \right]$$

$$C = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 250 & 121 \\ 301 & 25 & 0 \\ 17 & 0 & 280 \end{array} \right]$$

Política 3.

$$T = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0,05 & 0,35 & 0,60 \\ 0,50 & 0,35 & 0 & 0,15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,43 & 0,57 & 0 \end{array} \right]$$

$$C = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 145 & 130 & 40 \\ 30 & 25 & 0 & 92 \\ 980 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 45 & 0 \end{array} \right]$$

Política 4.

$$T = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,30 & 0,20 & 0,25 \\ 0,10 & 0,45 & 0 & 0,10 & 0,35 \\ 0,40 & 0 & 0,05 & 0 & 0,55 \\ 0,40 & 0,10 & 0,10 & 0 & 0,40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 243 & 463 & 92 & 19 \\ 81 & 321 & 0 & 34 & 29 \\ 53 & 0 & 285 & 0 & 29 \\ 5 & 55 & 42 & 0 & 94 \\ 0 & 0 & 721 & 0 & 0, \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ANEXO G. DIAPOSITIVAS ELABORADAS

Implementación de Talleres Basados en Cadenas de Markov de Tiempo Discreto con Probabilidades Estacionarias, para la Asignatura Investigación de Operaciones II

Trabajo de grado

Autor:
José Humberto Araque Meza

Director:
Carlos Eduardo Díaz Bohorquez
Magister en Ingeniería Industrial



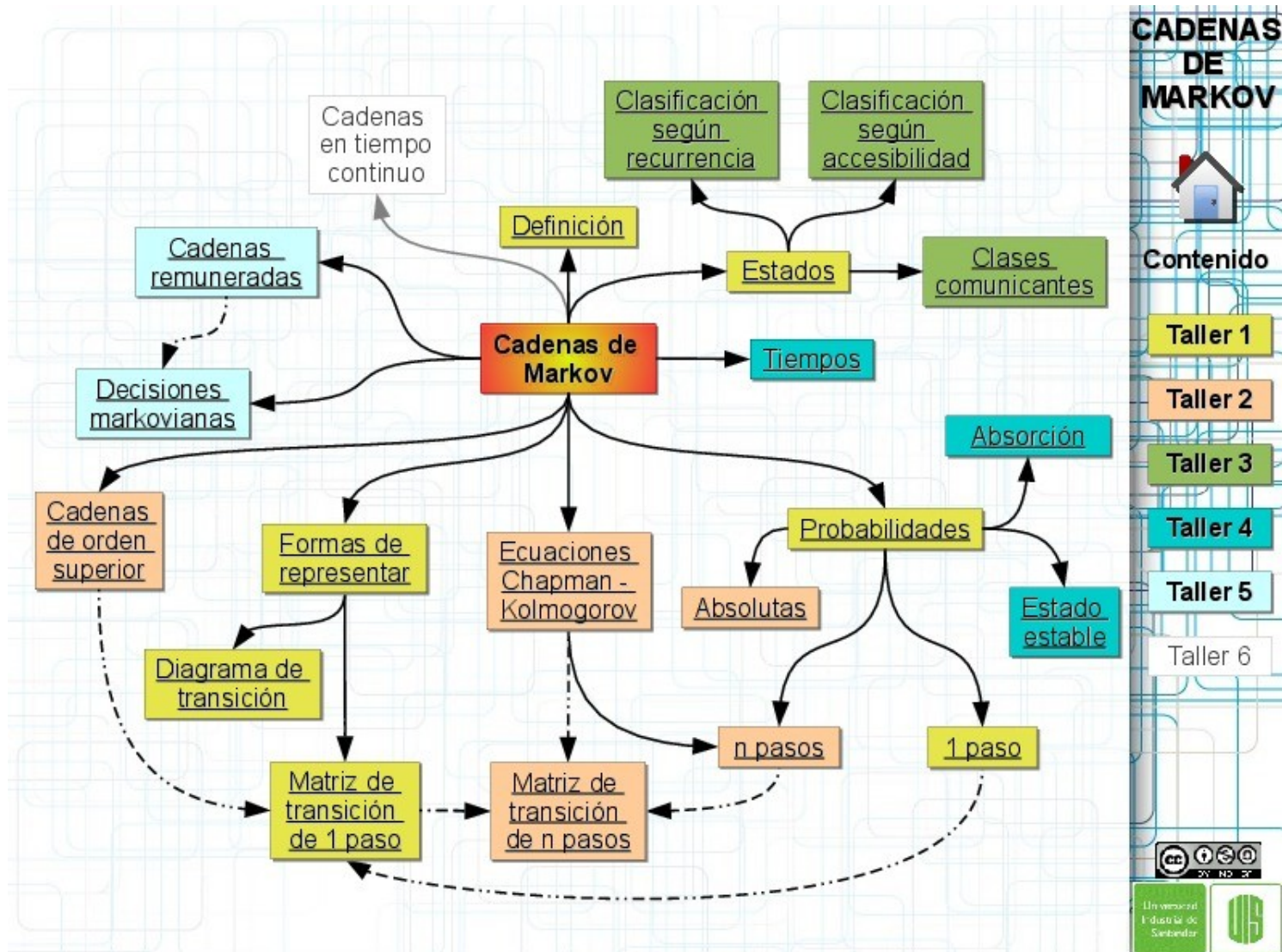
2012

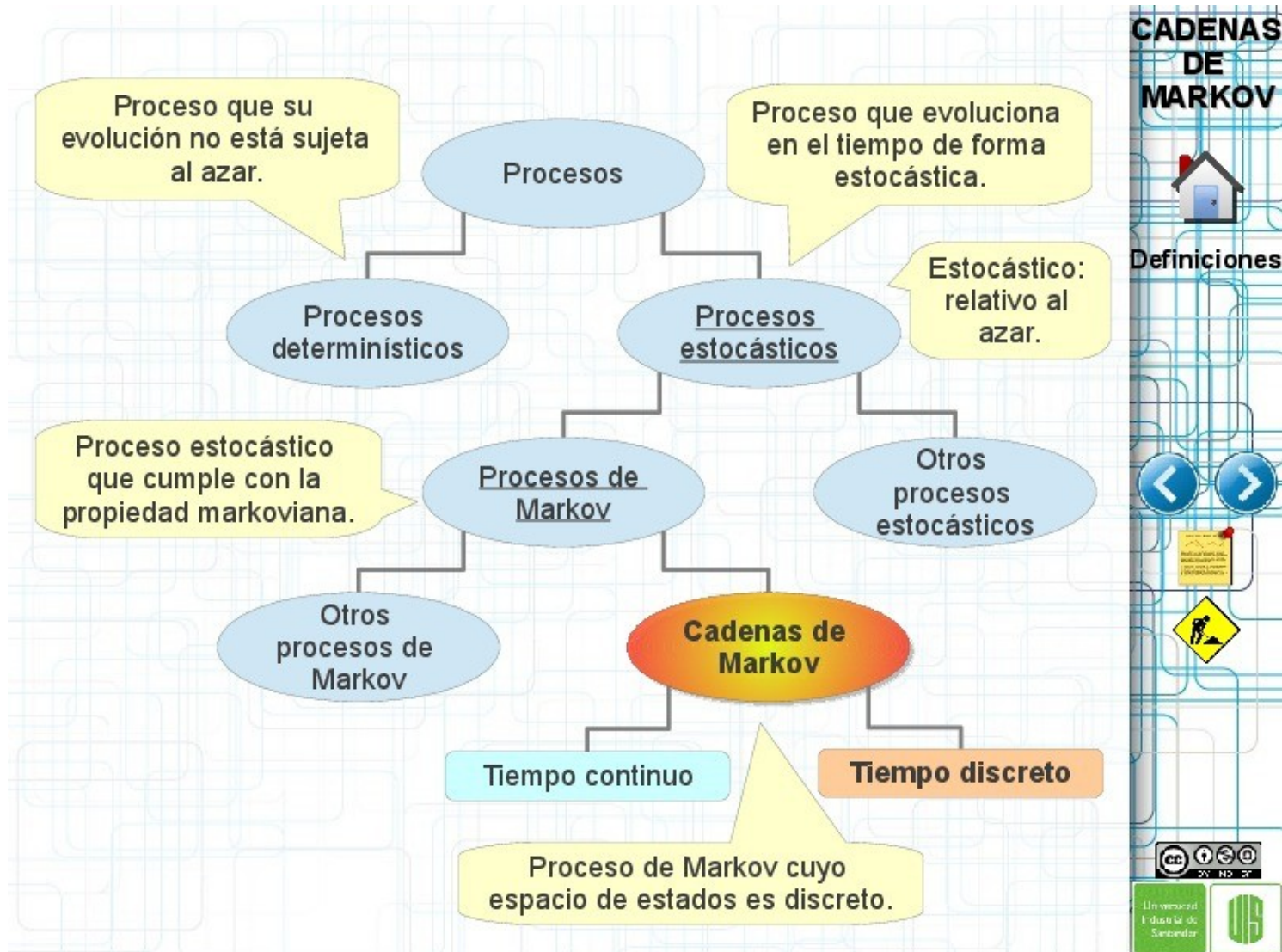
CADENAS
DE
MARKOV



Universidad
Eduarda de
Santander







Es la representación matemática de la evolución del estado de un sistema.

Proceso estocástico

Es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

Es una colección indexada de variables **aleatorias** $\{X_t\}$, donde el índice t toma valores de un conjunto T dado.

Con frecuencia T se toma como el conjunto de enteros no negativos y X_t representa una característica de interés measurable en el tiempo t .

CADENAS DE MARKOV

Proceso estocástico

Universidad I. de la Sorbona

Ejemplo: Datos del clima.

t	X	t	X	t	X	t	X
1	Nublado	19	Tormenta	37	Nublado	55	Lluvia
2	Nublado	20	Soleado	38	Nublado	56	Lluvia
3	Nublado	21	Nublado	39	Nublado	57	Nublado
4	Soleado	22	Lluvia	40	Soleado	58	Soleado
5	Soleado	23	Nublado	41	Soleado	59	Lluvia
6	Soleado	24	Nublado	42	Lluvia	60	Tormenta
7	Nublado	25	Lluvia	43	Lluvia	61	Lluvia
8	Nublado	26	Soleado	44	Nublado	62	Tormenta
9	Lluvia	27	Soleado	45	Lluvia	63	Nublado
10	Tormenta	28	Tormenta	46	Tormenta	64	Soleado
11	Nublado	29	Soleado	47	Tormenta	65	Lluvia
12	Lluvia	30	Nublado	48	Soleado	66	Tormenta
13	Soleado	31	Tormenta	49	Soleado	67	Lluvia
14	Tormenta	32	Tormenta	50	Tormenta	68	Nublado
15	Soleado	33	Tormenta	51	Soleado	69	Soleado
16	Lluvia	34	Soleado	52	Nublado	70	Soleado
17	Lluvia	35	Tormenta	53	Nublado	71	Tormenta
18	Soleado	36	Tormenta	54	Tormenta	72	Tormenta

CADENAS
DE
MARKOV



Universidad
Eduardo
Saverio





Procesos de Markov



Propiedad Markoviana

Futuro

Pasado

Presente

$$P(X_{t+1}=j | X_0=k_0, X_1=k_1, \dots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t=i)$$

$$= P(X_{t+1}=j | X_t=i)$$

Futuro

Presente

Propiedad markoviana:
el estado futuro de un sistema depende únicamente de su estado inmediatamente anterior.

Ejemplo: Probabilidades clima.

	Cantidad	Porcentaje
Soleado	20	27,7778%
Nublado	19	26,3889%
Lluvia	15	20,8333%
Tormenta	18	25,0000%
Total	72	100,00%

CADENAS
DE
MARKOV



Universidad
Eduardo de
Santander



Ejemplo: Probabilidades condicionales clima.

t-1	t	Cant.	%	Total	%	%
Soleado	Soleado	6	8,4507%	20	30,0000%	100%
	Nublado	4	5,6338%		20,0000%	
	Lluvia	4	5,6338%		20,0000%	
	Tormenta	6	8,4507%		30,0000%	
Nublado	Soleado	5	7,0423%	19	26,3158%	100%
	Nublado	7	9,8592%		36,8421%	
	Lluvia	5	7,0423%		26,3158%	
	Tormenta	2	2,8169%		10,5263%	
Lluvia	Soleado	3	4,2254%	15	20,0000%	100%
	Nublado	4	5,6338%		26,6667%	
	Lluvia	3	4,2254%		20,0000%	
	Tormenta	5	7,0423%		33,3333%	
Tormenta	Soleado	6	8,4507%	17	35,2941%	100%
	Nublado	3	4,2254%		17,6471%	
	Lluvia	3	4,2254%		17,6471%	
	Tormenta	5	7,0423%		29,4118%	
		71	100%	71		



Ejemplo: Procesos estocásticos.

- Señales de telecomunicación
- Señales biomédicas (electrocardiograma, encefalograma, etc.)
- Señales sísmicas
- El número de manchas solares año tras año
- El índice de la bolsa segundo a segundo
- La evolución de la población de un municipio año tras año
- El tiempo de espera en cola de cada uno de los usuarios que van llegando a una ventanilla
- El clima
- Velocidad del viento
- Humedad del aire

CADENAS DE MARKOV



Ejemplos procesos estocásticos.



Universidad
Eduardo
Sardón

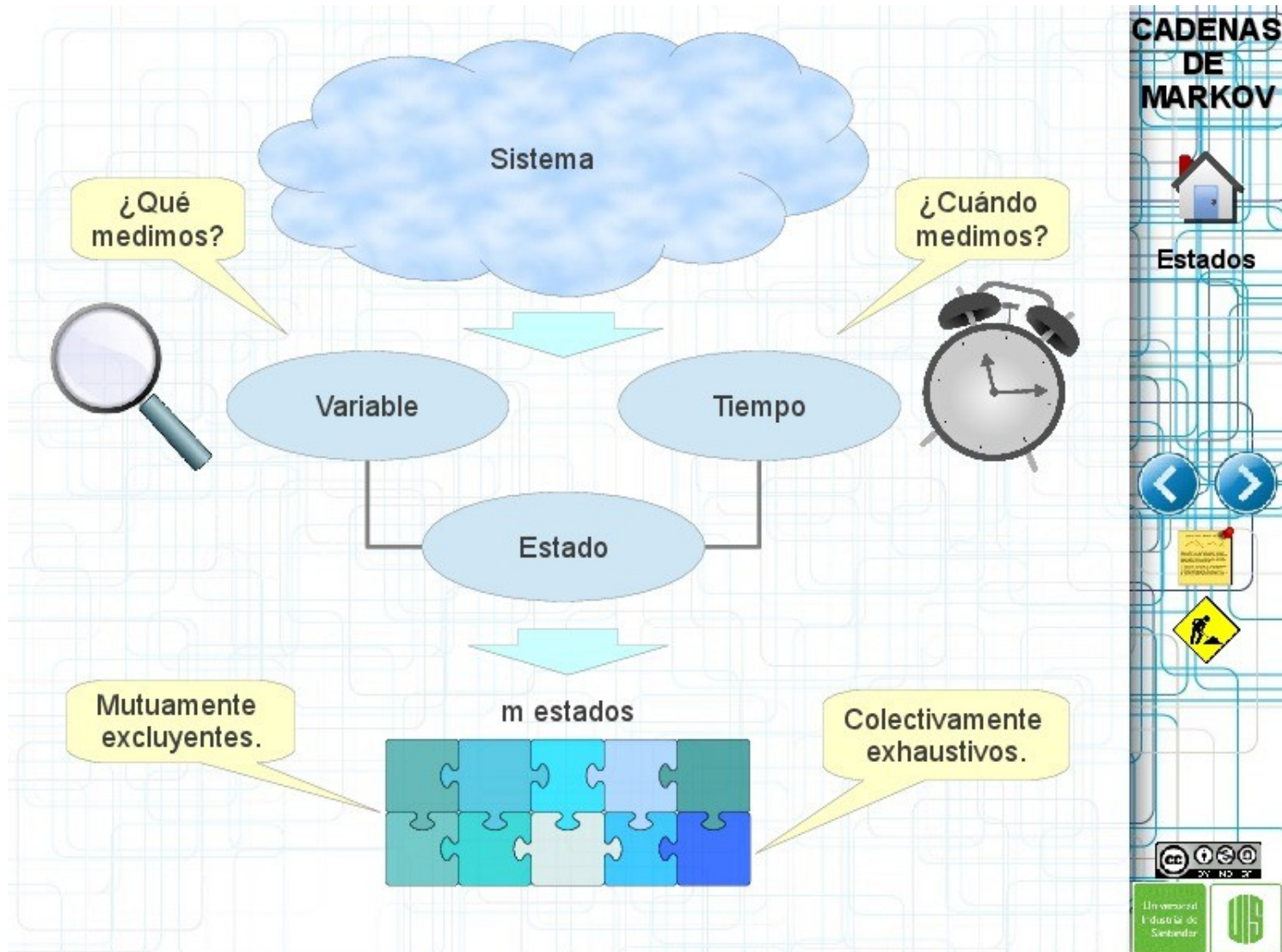


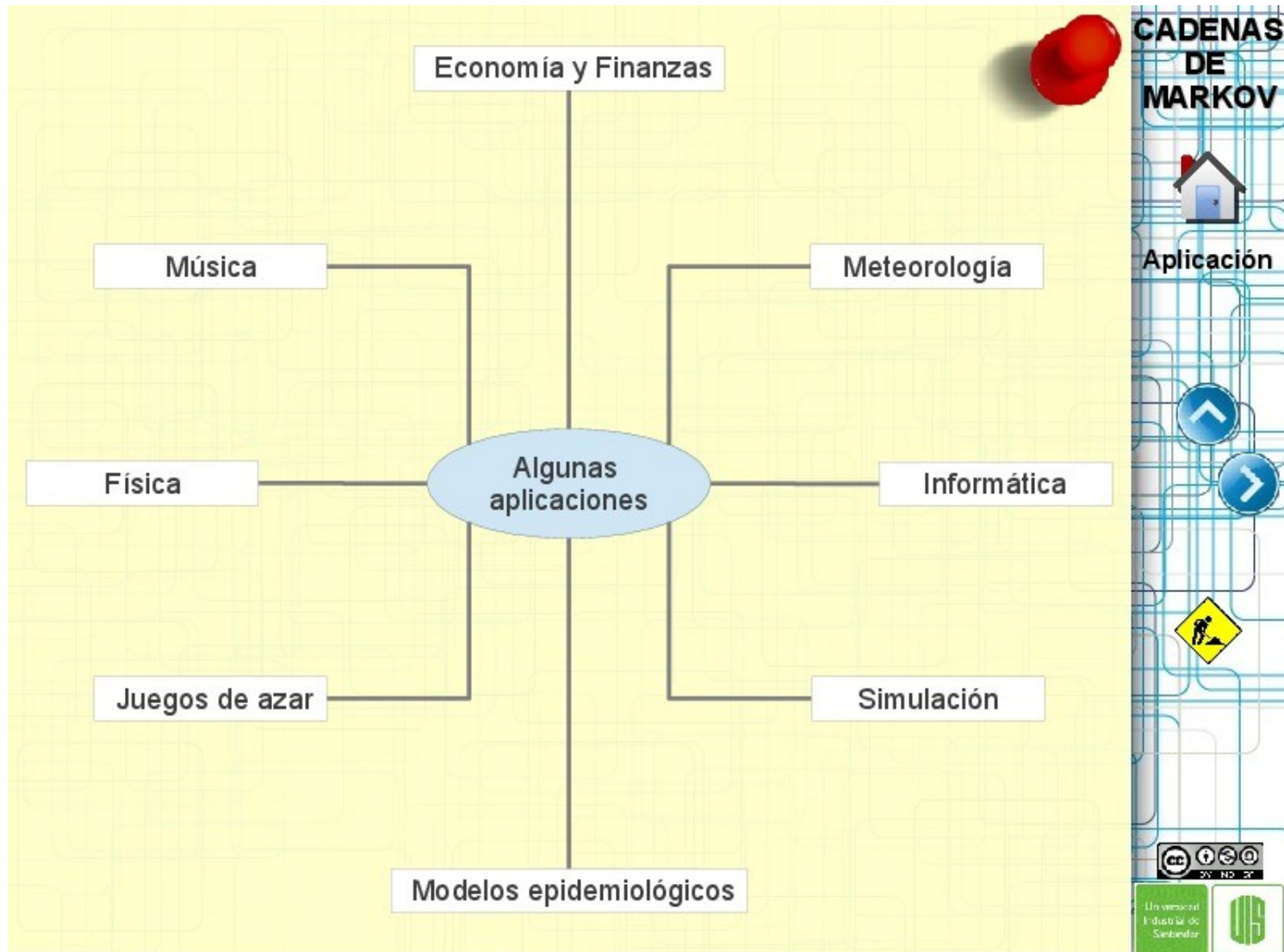


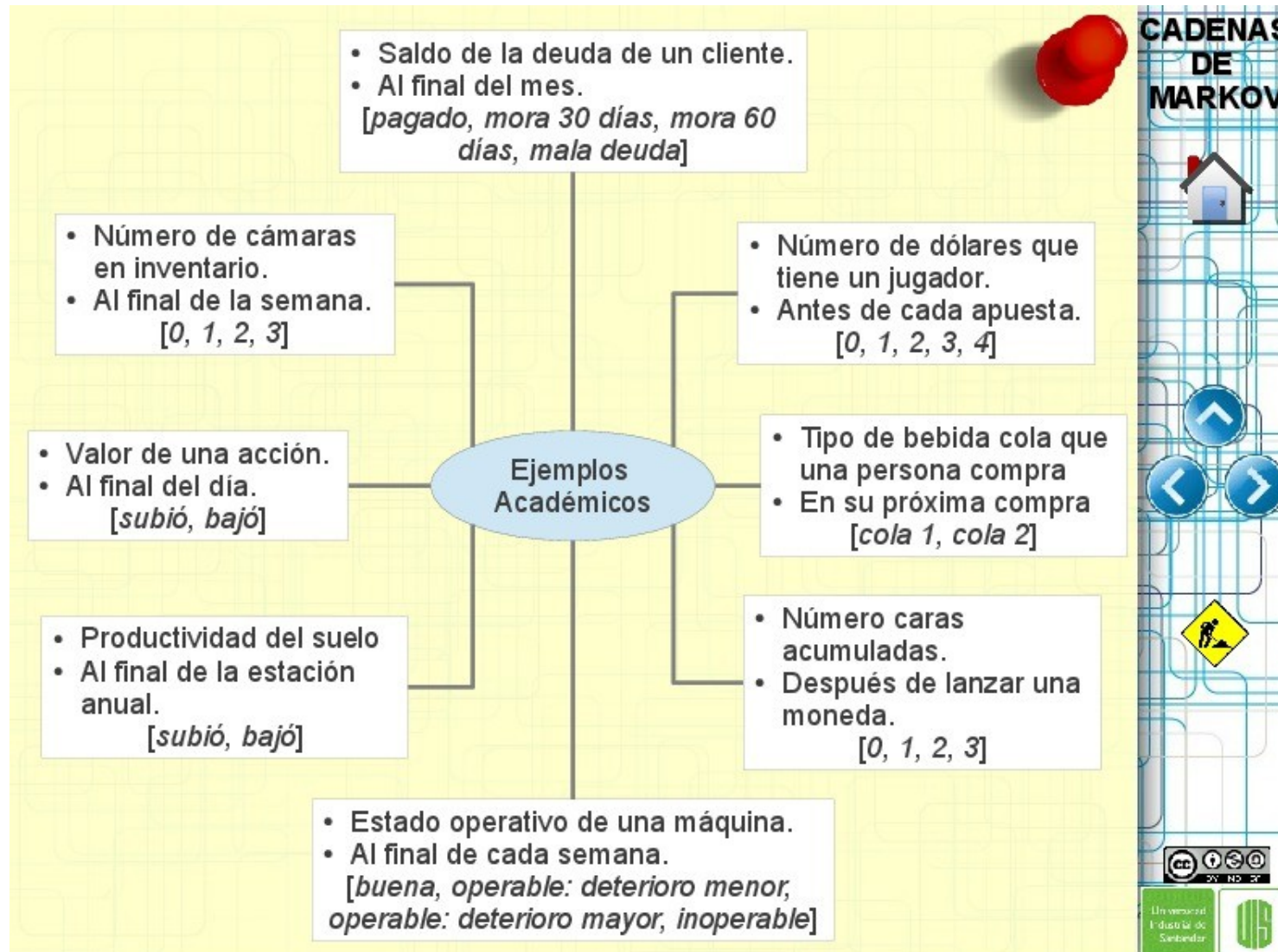
TALLER 1

Actividades

1, 2









- Situación en la que se encuentran los secuestrados en Colombia.
- Al final de cada año.

[*Farc, Eln, paramilitares, otros, libre, asesinado*]

- Fidelidad de un cliente.
- Al inicio de cada periodo.

[*leales, estables, en transito a fuga, en riesgo, alta probabilidad de fuga*]

- Semestre en que se encuentra un estudiante.
- Al inicio de cada periodo académico.

[*1,2,...,9,10, retirado, graduado*]

- Estado cuentas x cobrar.
- Al final del año.

[*pagado, incobrable, 1 año, 2 años*]

Ejemplos Mundo Real

- Número de tornos que requieren reparación.
- Al final de la semana.

[*0, 1, 2, 3, 4, 5*]

- Estado de un paciente con EPOC.
- Al inicio del mes.

[*controlado, exacerbado, muerto*]

- Número de paquetes de datos bloqueados.
- Al final de cada periodo de tiempo.

[*0, 1, 2, 3, 4, 5*]

- Nivel de escolaridad del jefe del hogar de la siguiente generación.
- Cada 20 años.

[*ninguna, primaria incompleta, primaria completa, secundaria incompleta, secundaria completa, superior-técnico*]

Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Enunciado:

Una tienda de cámaras tiene en almacén un modelo especial de cámara que se puede ordenar cada semana.

Sean D_1, D_2, \dots las demandas respectivas de esta cámara durante la primera, segunda, ..., semanas. Se supone que las D_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución de Poisson con media de 1.

El sábado en la noche la tienda hace un pedido que le entregan en el momento de abrir la tienda el lunes. La tienda usa la siguiente política para ordenar: si no hay cámaras en el inventario, ordena 3 cámaras. De otra manera, si se cuenta con cámaras en el almacén, no se hace pedido. Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda excede el inventario.

X_t : número de cámaras en el almacén al final de la semana t , antes de ordenar más.

Estados: 0, 1, 2, 3.

CADENAS
DE
MARKOV



Universidad
Eduardo
Sardón

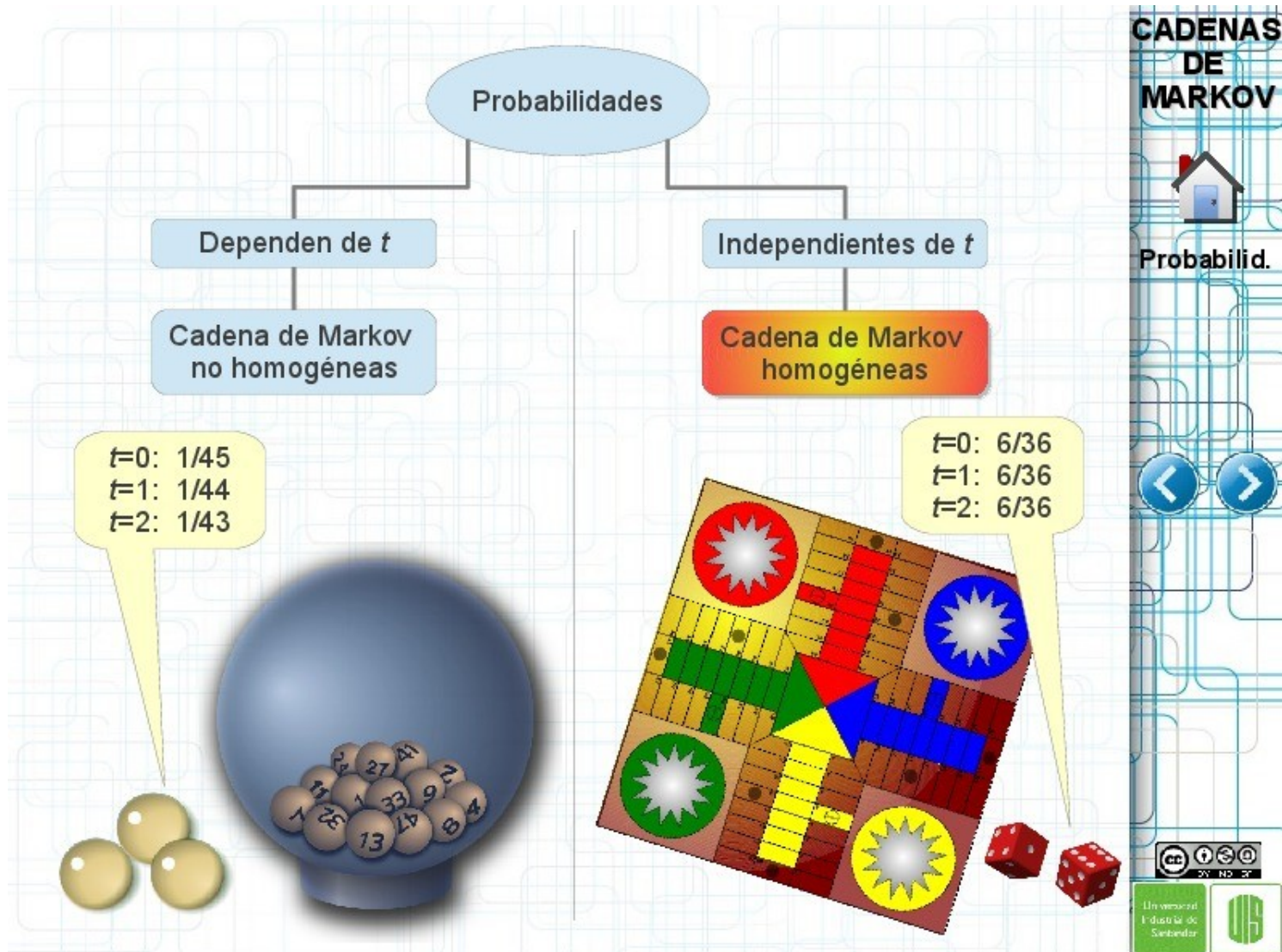


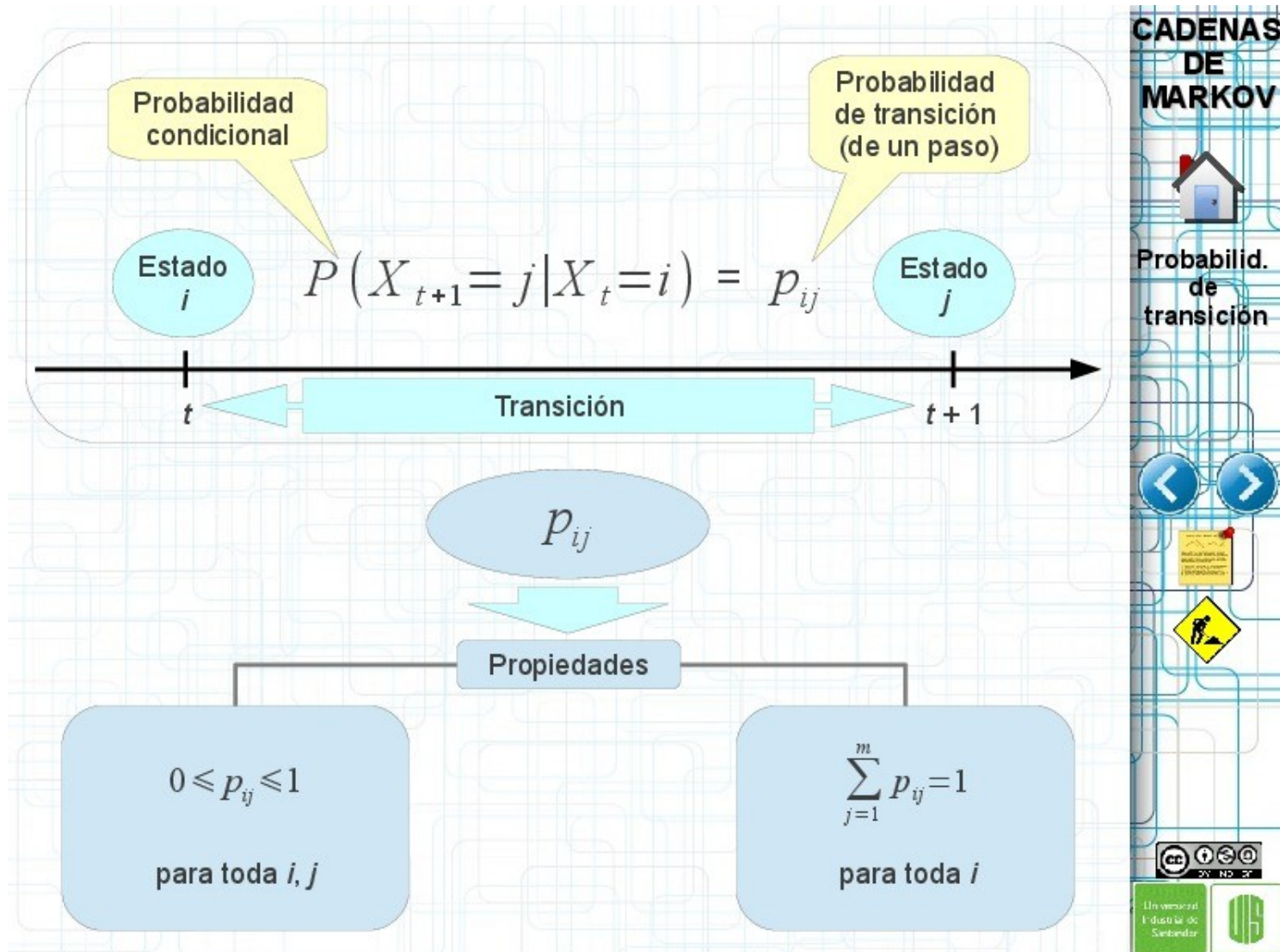


TALLER 1

Actividades

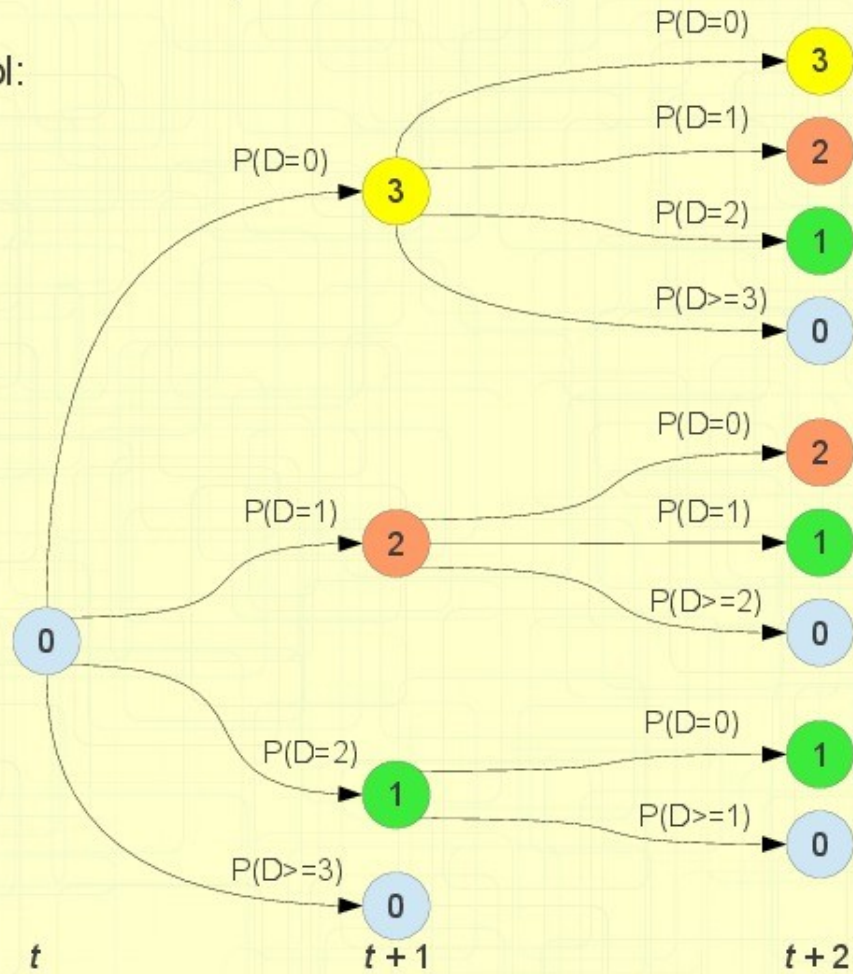
3, 4, 5





Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Árbol:



CADENAS DE MARKOV



Universitat
Tècnica de
Saragossa



Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Tabla:

t	t + 1	
Sábado	... Lunes	Demanda semanal	Sábado
0	3	0	3
		1	2
		2	1
		3...	0
3	3	0	3
		1	2
		2	1
		3...	0
2	2	0	2
		1	1
		2...	0
1	1	0	1
		1...	0



Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Probabilidades:

$$P \{ D_{t+1} = n \} = \frac{(1)^n e^{-1}}{n!}$$

para $n = 0, 1, \dots$

$$P \{ D_{t+1} = 0 \} = 0,368$$

$$P \{ D_{t+1} = 1 \} = 0,368$$

$$P \{ D_{t+1} = 2 \} = 0,184$$

$$P \{ D_{t+1} \geq 3 \} = 1 - P \{ D_{t+1} \leq 2 \} = 0,080$$

$$P \{ D_{t+1} \geq 2 \} = 1 - P \{ D_{t+1} \leq 1 \} = 0,264$$

$$P \{ D_{t+1} \geq 1 \} = 1 - P \{ D_{t+1} = 0 \} = 0,632$$





TALLER 1

Actividades

6, 7

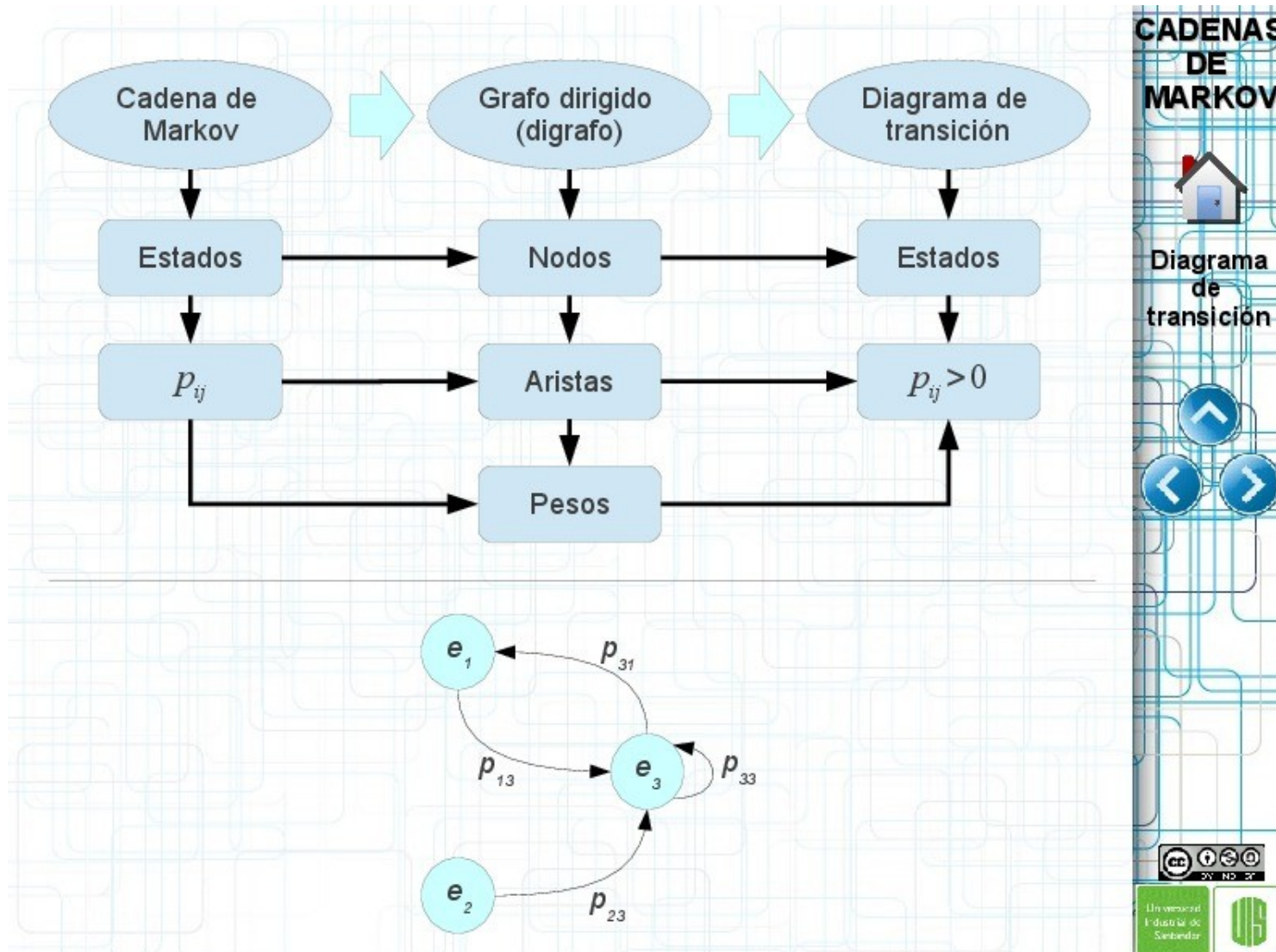
CADENAS DE MARKOV

Formas de representar

Estados	Probabilidades
1	p_{13} 1
2	p_{23} 1
3	p_{31} 0.7
	p_{33} 0.3

$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix}$

Universidad
Eduardo de
Santander



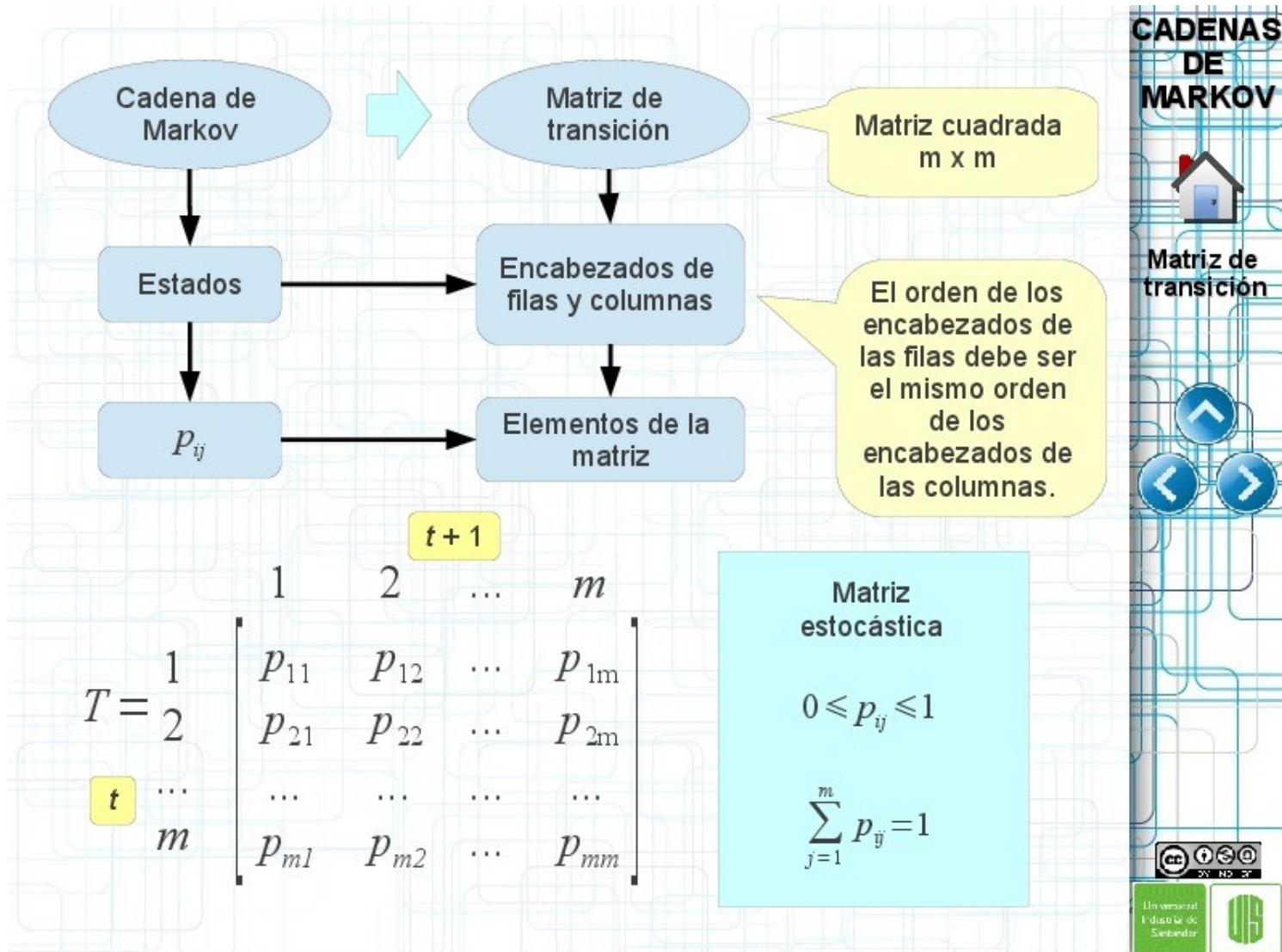
CADENAS DE MARKOV



Diagrama de transición



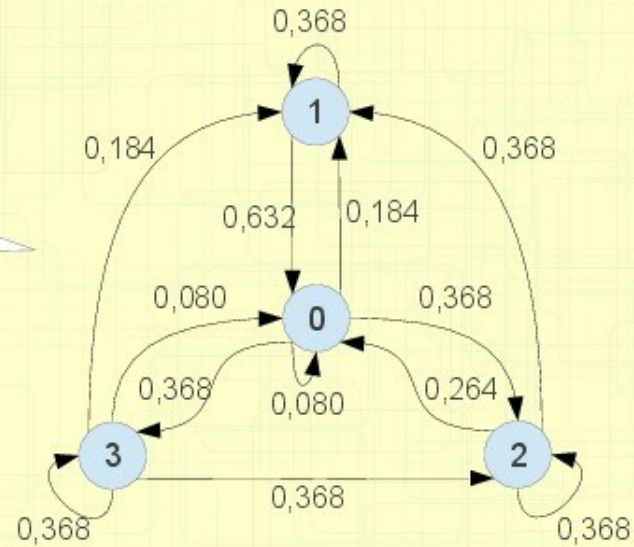
Universidad
 Educativa de
 Santander



Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Representación:

Diagrama de transición



Matriz de transición

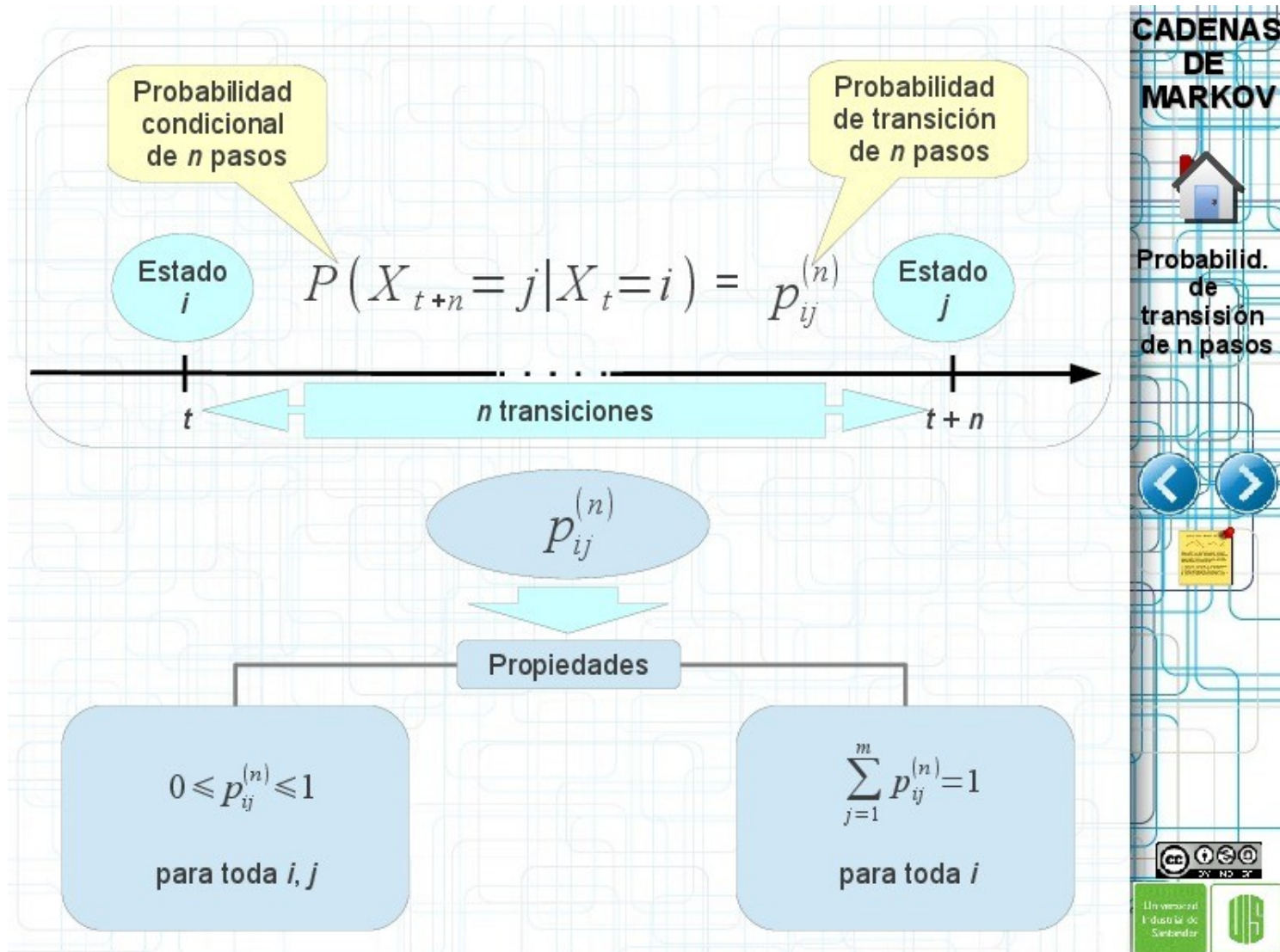
$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



TALLER 1

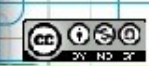
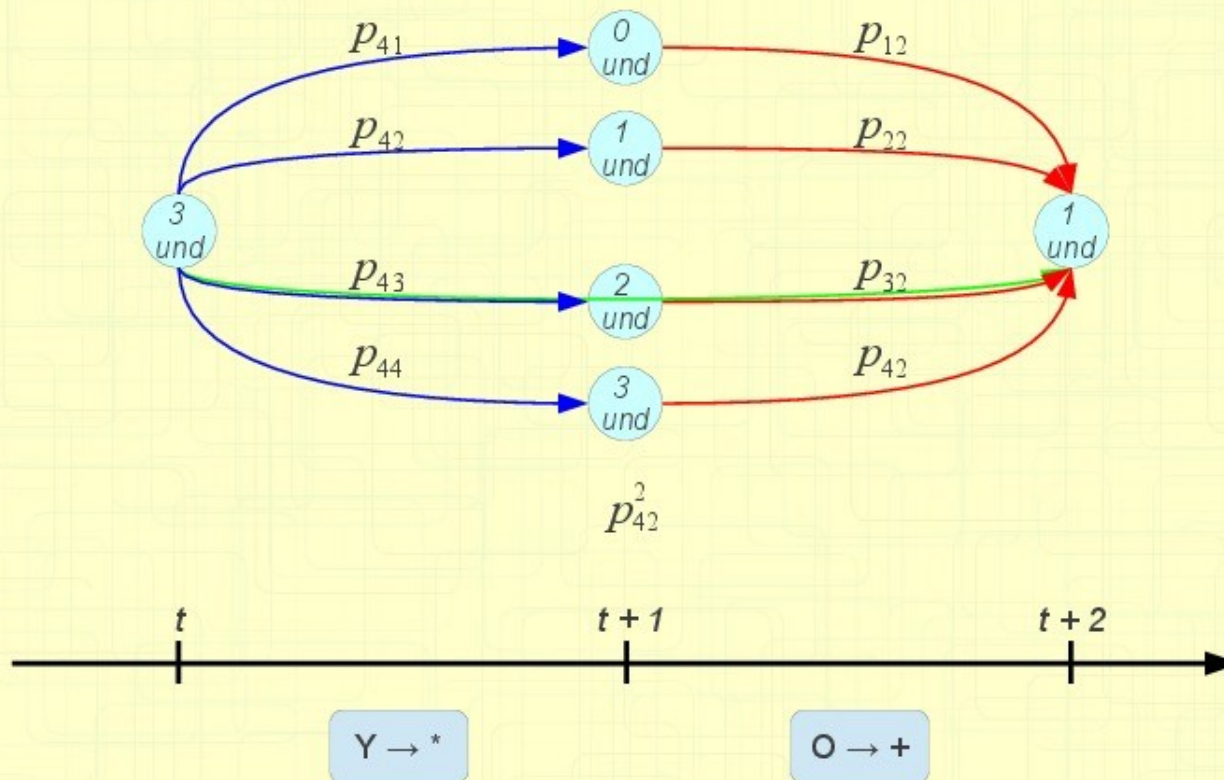
Actividades

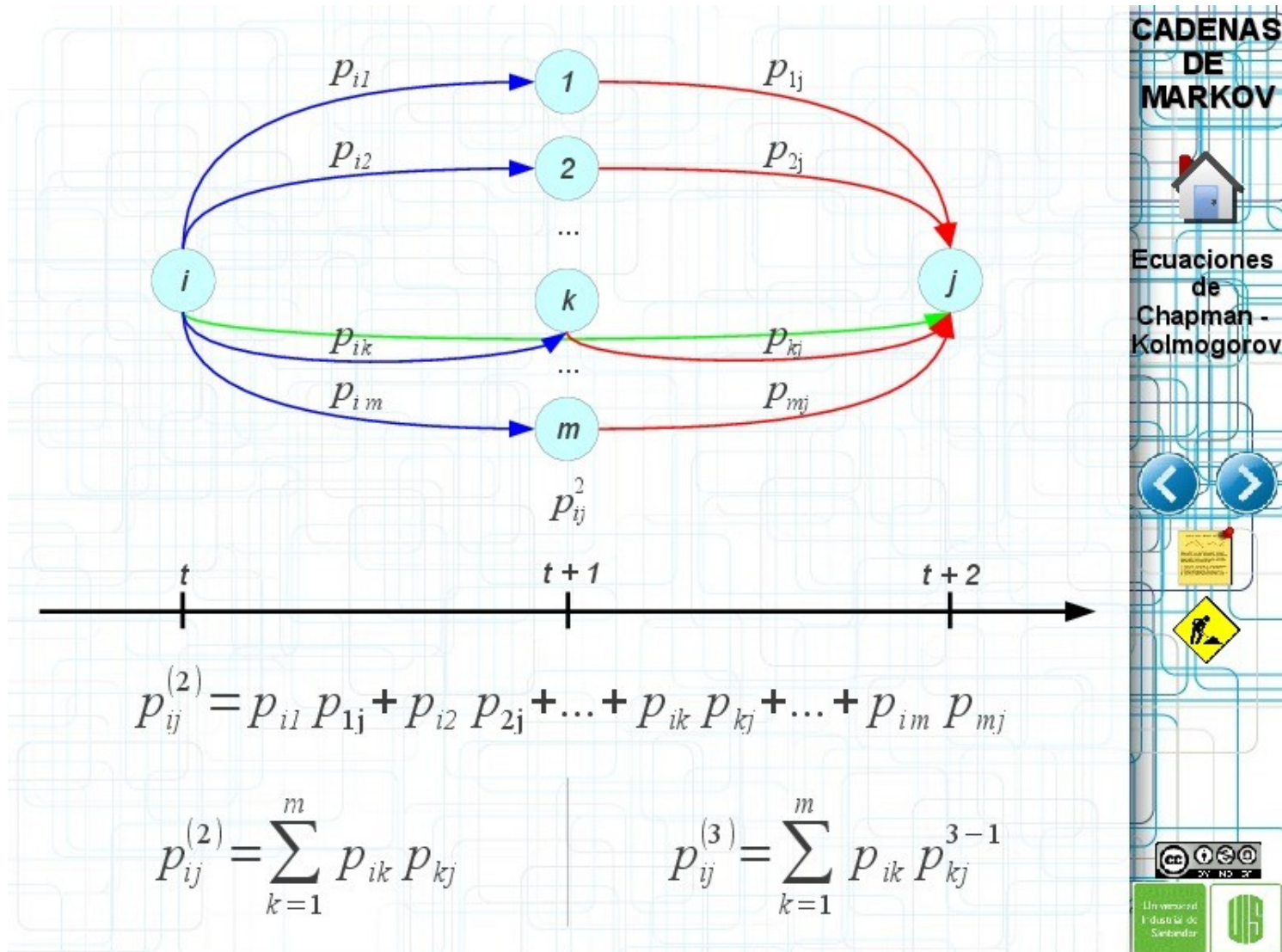
8, 9

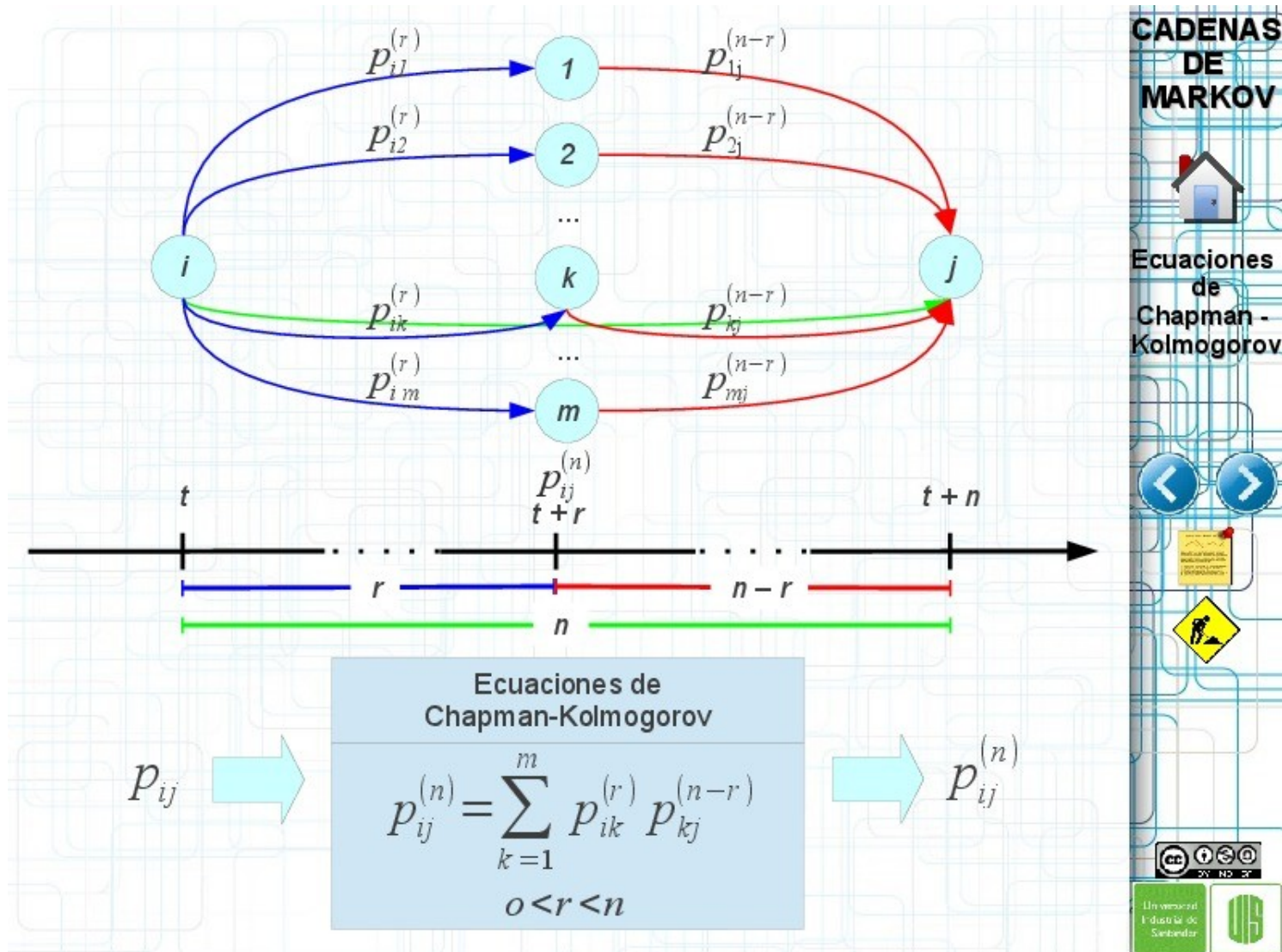


Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Chapman-Kolmogorov:







Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Chapman-Kolmogorov:

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$p_{ij}^{(2)} = p_{i1} p_{1j} + p_{i2} p_{2j} + \dots + p_{ik} p_{kj} + \dots + p_{im} p_{mj}$$

$$p_{11}^{(2)} = p_{11} p_{11} + p_{12} p_{21} + p_{13} p_{31} + p_{14} p_{41}$$

$$p_{11}^{(2)} = 0,080 * 0,080 + 0,184 * 0,632 + 0,368 * 0,264 + 0,368 * 0,080$$

$$p_{11}^{(2)} = 0,249$$



CADENAS DE MARKOV



Matriz de transición de n pasos



Probabilidad de transición (de un paso)

$$P_{ij}$$



$$T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

Matriz de transición (de un paso)

Probabilidad de transición de n pasos

$$P_{ij}^{(n)}$$



$$T^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & \dots & P_{1m}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & \dots & P_{2m}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}^{(n)} & P_{m2}^{(n)} & \dots & P_{mm}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Matriz de transición de n pasos

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{km} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} a_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{2k} a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^m a_{mk} a_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{mk} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{mk} a_{km} \end{bmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m P_{1k} P_{k1} & \sum_{k=1}^m P_{1k} P_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m P_{1k} P_{km} \\ \sum_{k=1}^m P_{2k} P_{k1} & \sum_{k=1}^m P_{2k} P_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m P_{2k} P_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^m P_{mk} P_{k1} & \sum_{k=1}^m P_{mk} P_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m P_{mk} P_{km} \end{bmatrix}$$

$$T^{(n)} = T^n = T \times T \times \dots \times T \text{ (n veces)}$$

Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Matriz T^2 :

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \\ 0,283 & 0,252 & 0,233 & 0,233 \\ 0,351 & 0,319 & 0,233 & 0,097 \\ 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

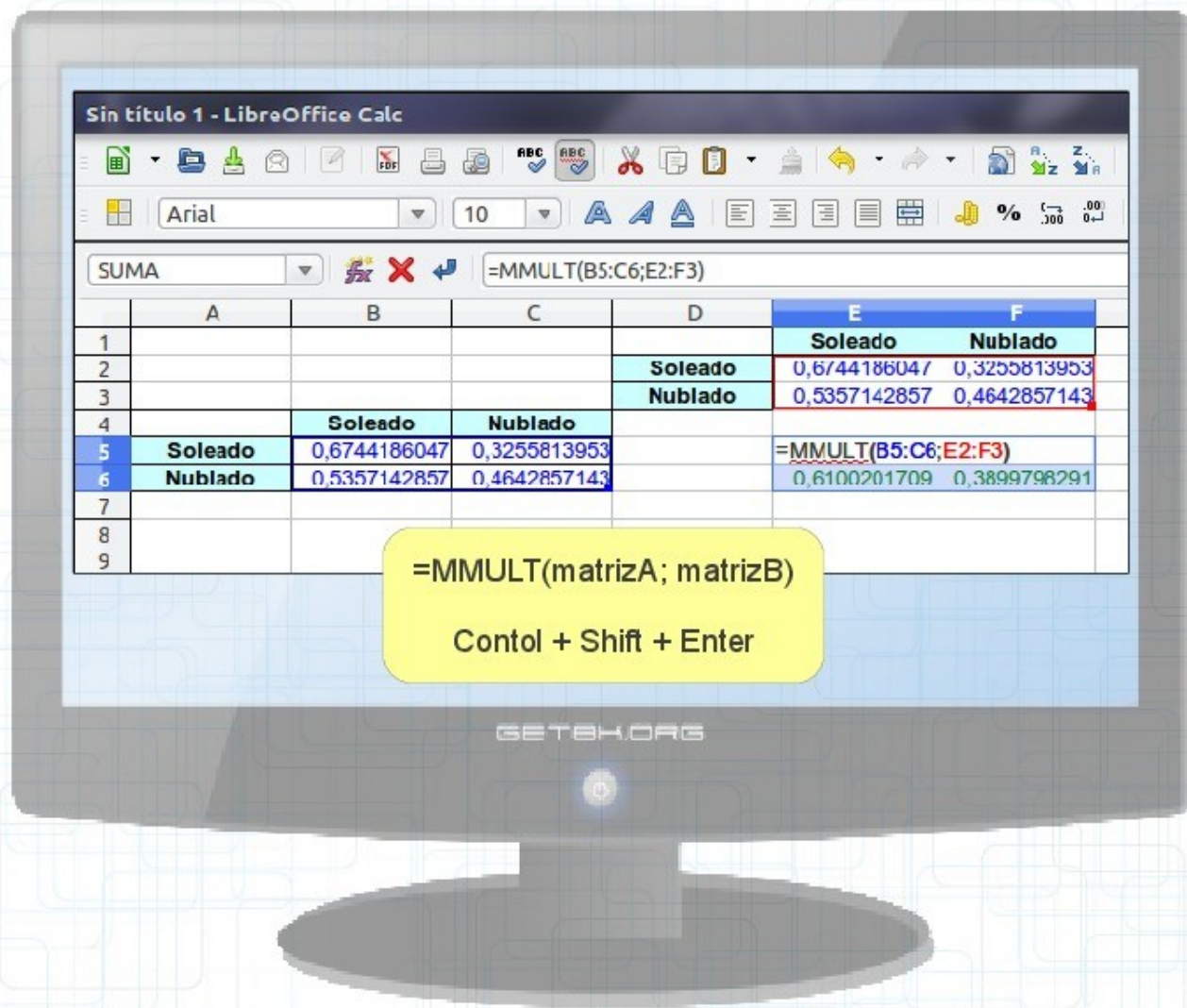




TALLER 2

Actividades

1



CADENAS DE MARKOV

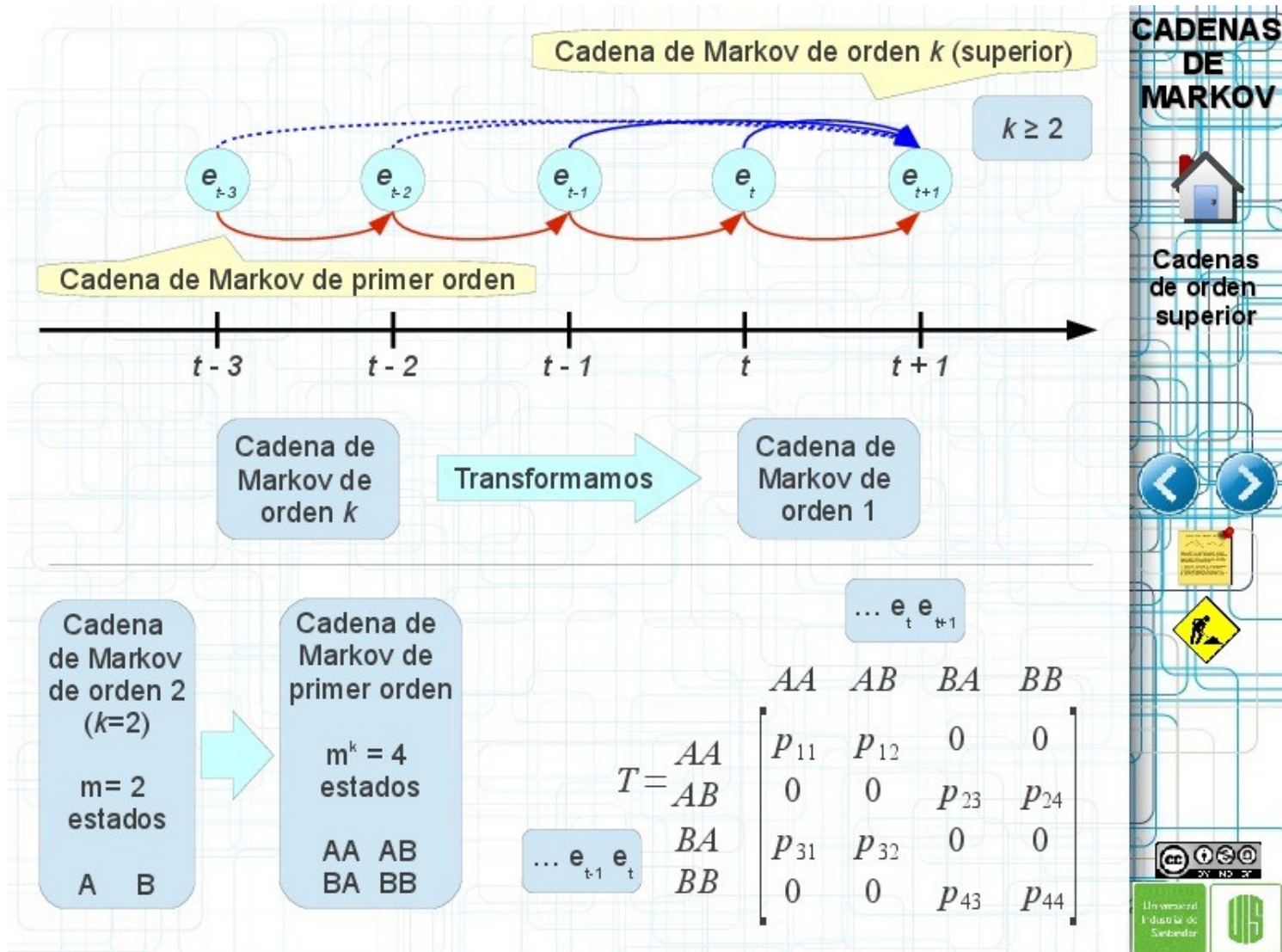


Hoja de cálculo -
multiplic. de
matrices



Universidad
Eduardo
Sáenz





Ejemplo: Datos del clima.

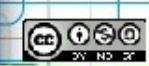
t	X	t	X	t	X	t	X
1	Nublado	19	Nublado	37	Soleado	55	Soleado
2	Nublado	20	Nublado	38	Nublado	56	Soleado
3	Soleado	21	Nublado	39	Nublado	57	Soleado
4	Soleado	22	Soleado	40	Nublado	58	Soleado
5	Nublado	23	Soleado	41	Soleado	59	Soleado
6	Nublado	24	Nublado	42	Nublado	60	Soleado
7	Nublado	25	Soleado	43	Soleado	61	Soleado
8	Soleado	26	Soleado	44	Nublado	62	Soleado
9	Soleado	27	Soleado	45	Nublado	63	Nublado
10	Soleado	28	Soleado	46	Soleado	64	Soleado
11	Nublado	29	Soleado	47	Nublado	65	Soleado
12	Soleado	30	Soleado	48	Nublado	66	Nublado
13	Nublado	31	Soleado	49	Nublado	67	Nublado
14	Soleado	32	Soleado	50	Soleado	68	Nublado
15	Soleado	33	Soleado	51	Soleado	69	Soleado
16	Soleado	34	Soleado	52	Soleado	70	Soleado
17	Nublado	35	Soleado	53	Nublado	71	Nublado
18	Soleado	36	Soleado	54	Nublado	72	Soleado

CADENAS DE MARKOV



Universitat
Eduard de
Saverio



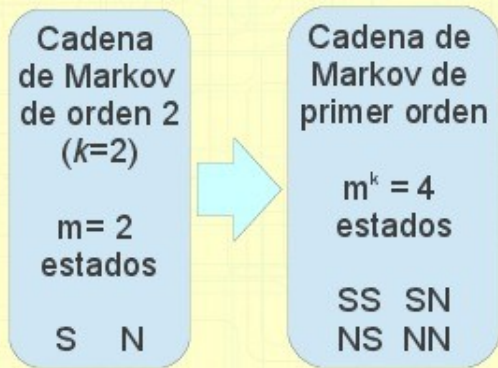


Ejemplo: Datos del clima.

t		t	t-1, t	t-2, t-1, t
1	Nublado	N		
2	Nublado	N	NN	
3	Soleado	S	NS	NNS
4	Soleado	S	SS	NSS
5	Nublado	N	SN	SSN

Mañana

$$T = \begin{matrix} & S & N \\ \text{Hoy } S & SS & SN \\ \text{Hoy } N & NS & NN \end{matrix}$$



Hoy, mañana

$$T = \begin{matrix} & SS & SN & NS & NN \\ \text{Ayer, hoy } SS & SSS & SSN & 0 & 0 \\ \text{Ayer, hoy } SN & 0 & 0 & SNS & SNN \\ \text{Ayer, hoy } NS & NSS & NSN & 0 & 0 \\ \text{Ayer, hoy } NN & 0 & 0 & NNS & NNN \end{matrix}$$



TALLER 2

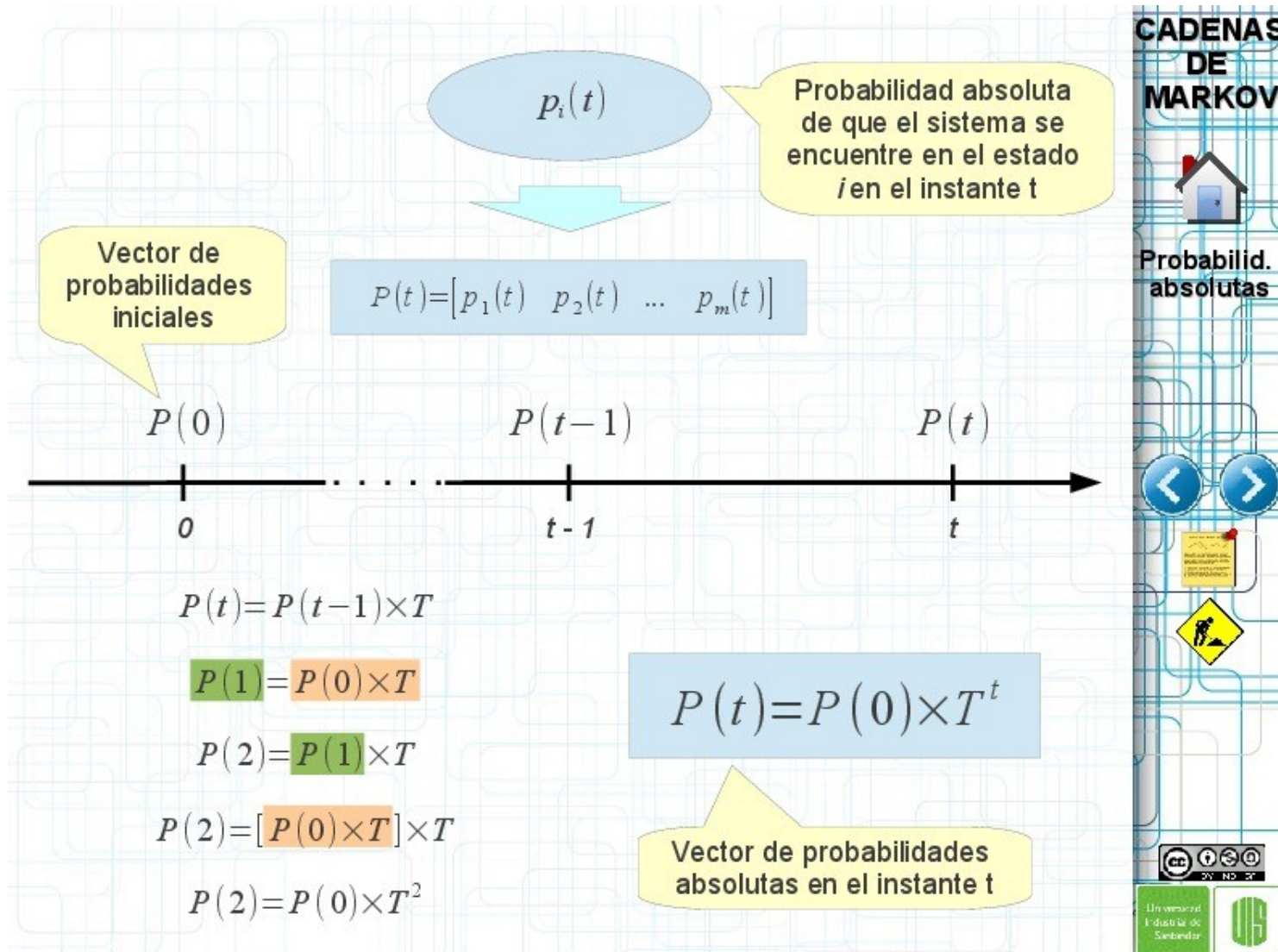
Actividades

2

CADENAS DE MARKOV



Probabilidad absolutas



Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

Probabilidad absoluta $P(2)$:

$$P(0) = \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ [0 & 0 & 0 & 1] \end{matrix}$$

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P(2) = P(0) \times T^2$$

$$P(2) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \times \begin{bmatrix} 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \\ 0,283 & 0,252 & 0,233 & 0,233 \\ 0,351 & 0,319 & 0,233 & 0,097 \\ 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \end{bmatrix}$$

$$P(2) = \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ [0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165] \end{matrix}$$

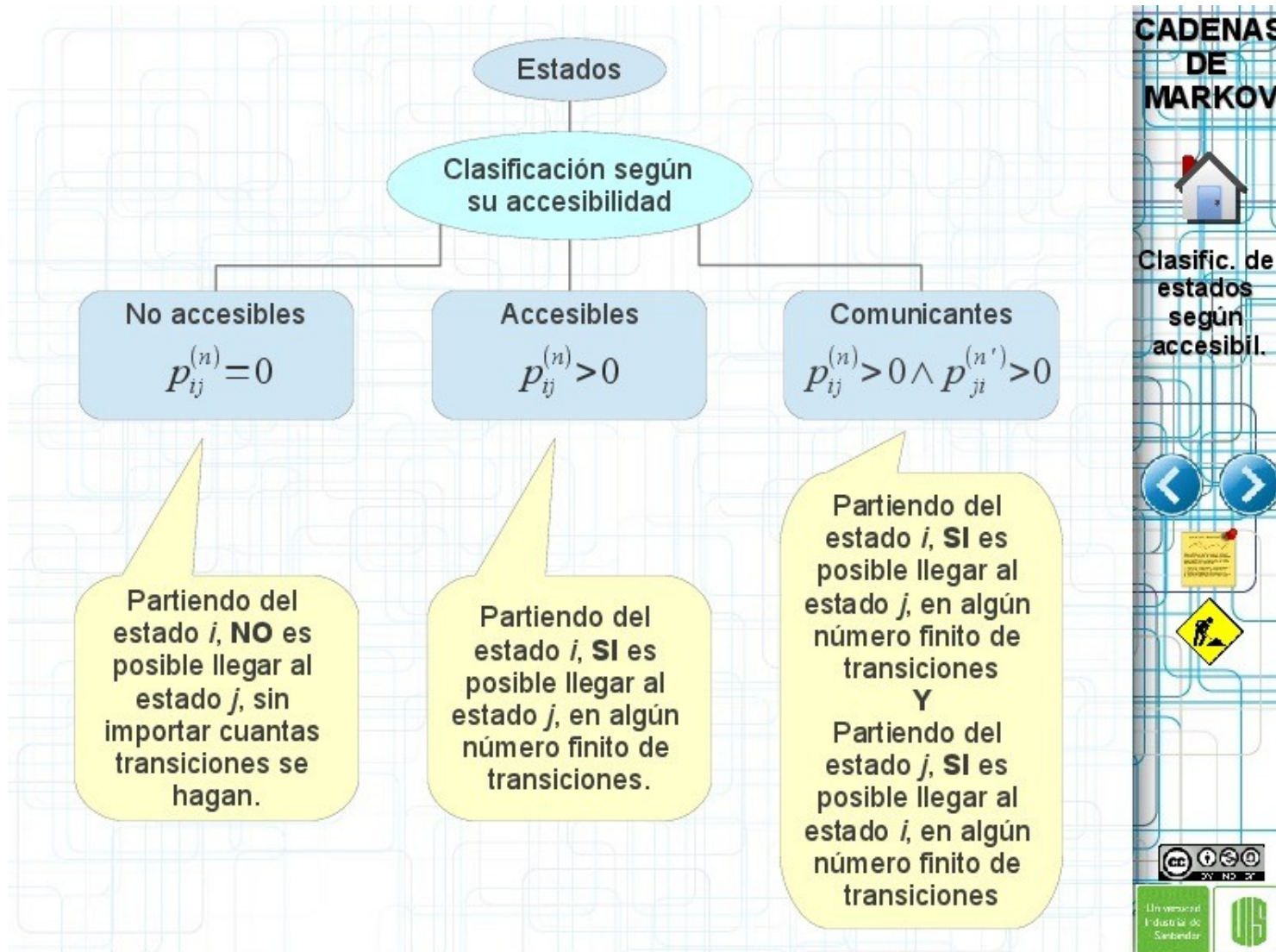




TALLER 2

Actividades

3



CADENAS DE MARKOV

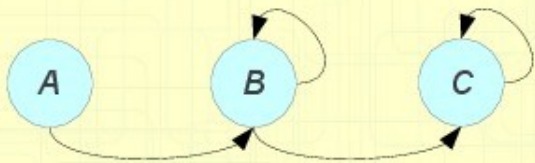


Clasific. de estados según accesibil.



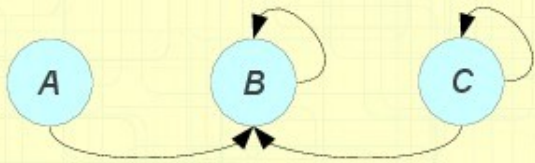
Universidad
Eduardo
Sardor





No accesibles	Accesibles
A no accesible desde B	A → B
B no accesible desde C	B → C
A no accesible desde C	A → C

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & P_{BB} & P_{BC} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



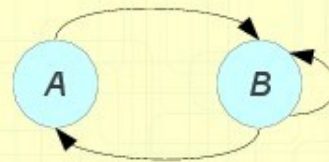
No accesibles	Accesibles
A no accesible desde B	A → B
A no accesible desde C	C → B
C no accesible desde A	
C no accesible desde B	

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & P_{CB} & P_{CC} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

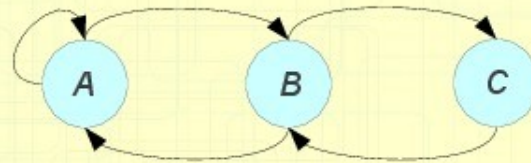


Comunicantes

A ↔ B



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} \end{matrix}$$



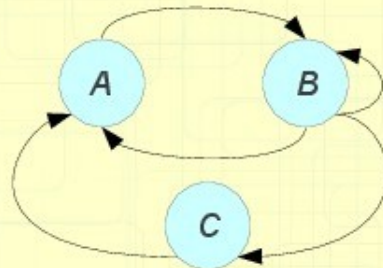
$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & 0 \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Comunicantes

A ↔ B

B ↔ C

A ↔ C



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{CA} & 0 & 0 & 0 & p_{CE} \\ 0 & 0 & p_{DC} & 0 & p_{DE} \\ 0 & p_{EB} & p_{EC} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$

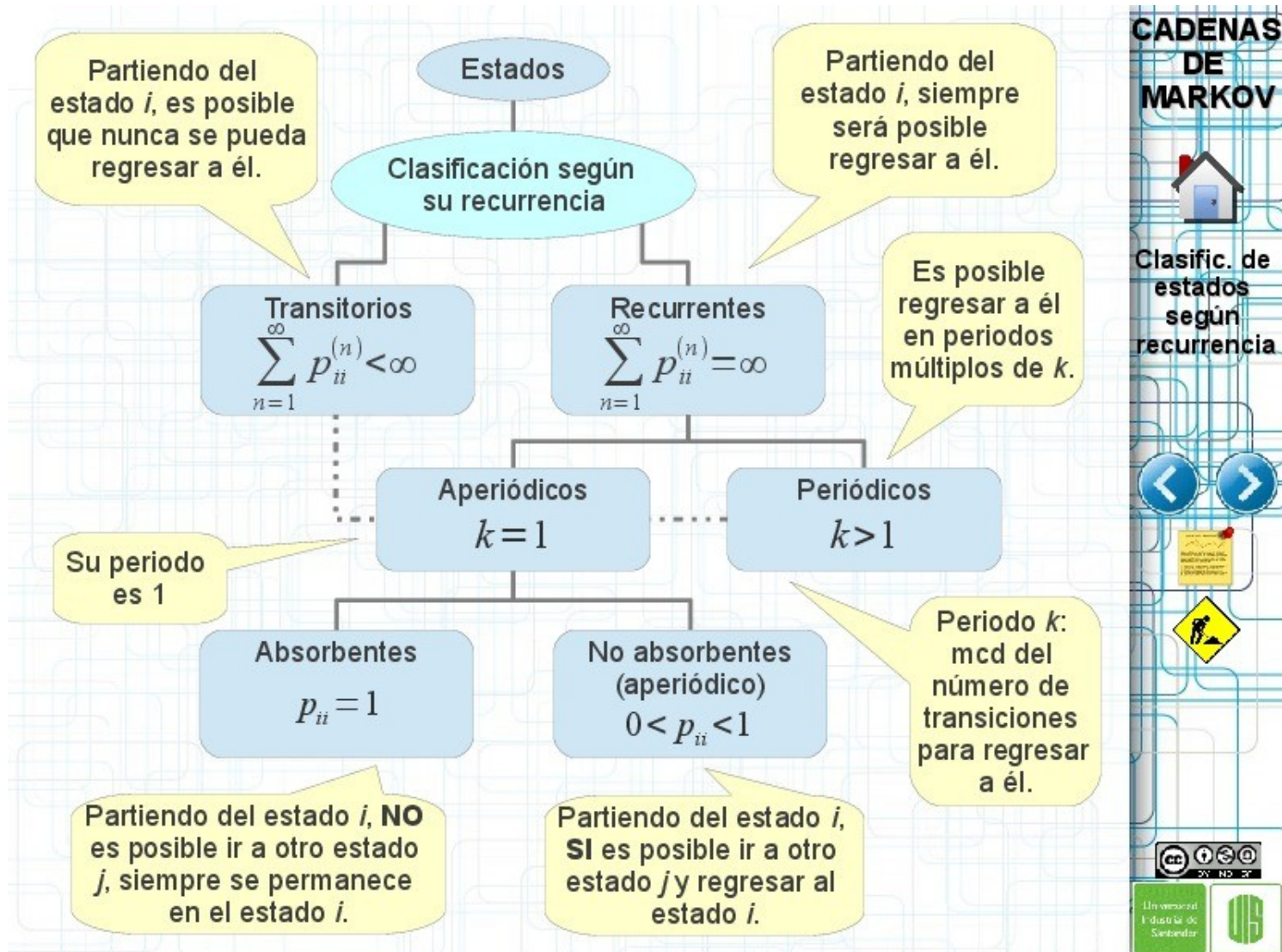
Clasificación de estados según su accesibilidad		
No accesibles	Accesibles	Comunicantes

CADENAS DE MARKOV



Universidad
Eduardo de
Santander





CADENAS DE MARKOV



Clasific. de estados según recurrencia

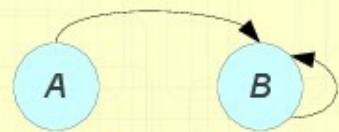




Universidad I. de San José



CADENAS DE MARKOV



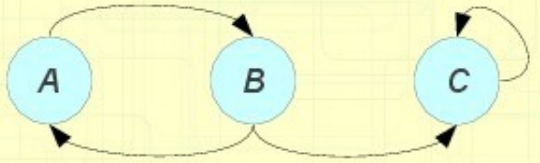
$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Transitorios	A
Absorbentes	B

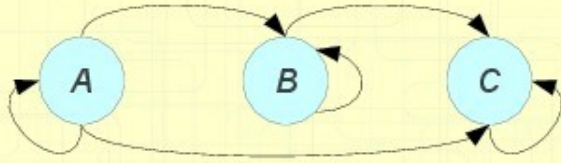


$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{AB} & p_{AA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

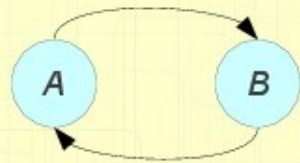
$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ 0 & p_{BB} & p_{BC} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

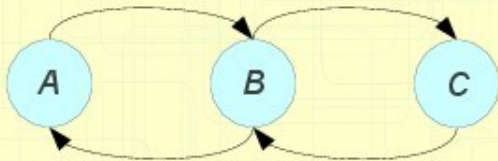


Transitorios	A	B
Absorbentes	C	

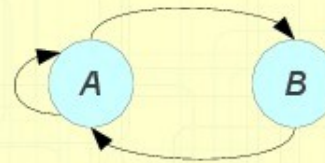


$$T = \begin{matrix} & A & B \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

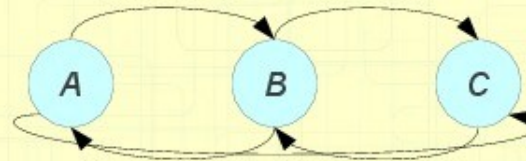


Recurrentes
periódicos
($k=2$)



$$T = \begin{matrix} & A & B \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Recurrentes
aperiódicos
($k=1$)

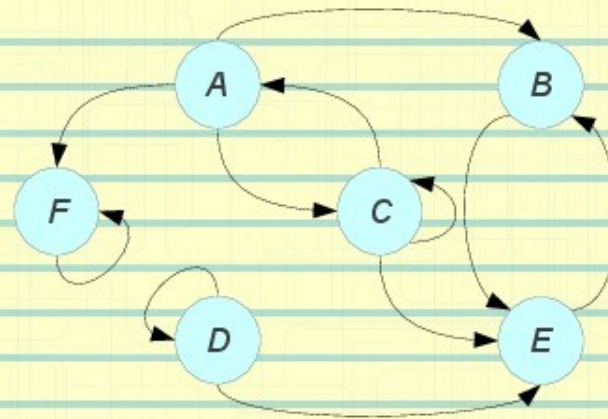
CADENAS DE MARKOV



Universidad
Eduardo de
Santander

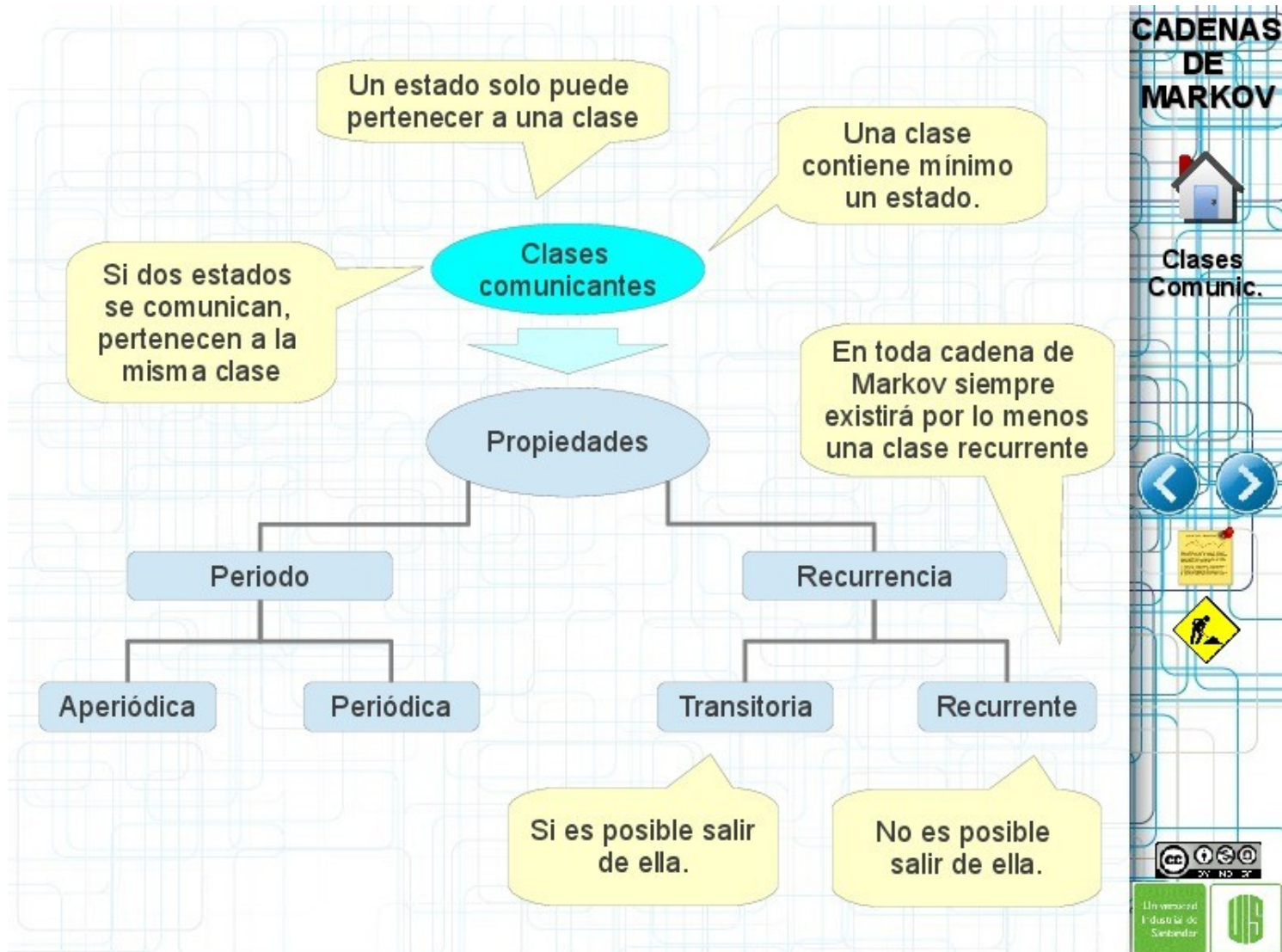


CADENAS DE MARKOV



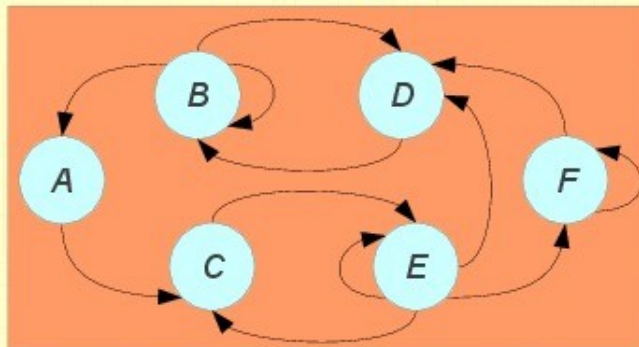
Transitorios (aperiódicos)			
Recurrentes periódicos			
Absorbentes			

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & P_{AB} & P_{AC} & 0 & 0 & P_{AF} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_{CA} & 0 & P_{CC} & 0 & P_{CE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{DD} & P_{DE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



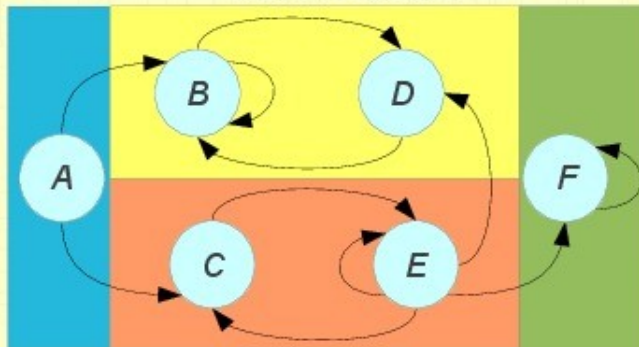
Clase irreducible



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_{BA} & P_{BB} & 0 & P_{BD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{EC} & P_{ED} & P_{EE} & P_{EF} \\ 0 & 0 & 0 & P_{FD} & 0 & P_{FF} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tiene una única clase recurrente

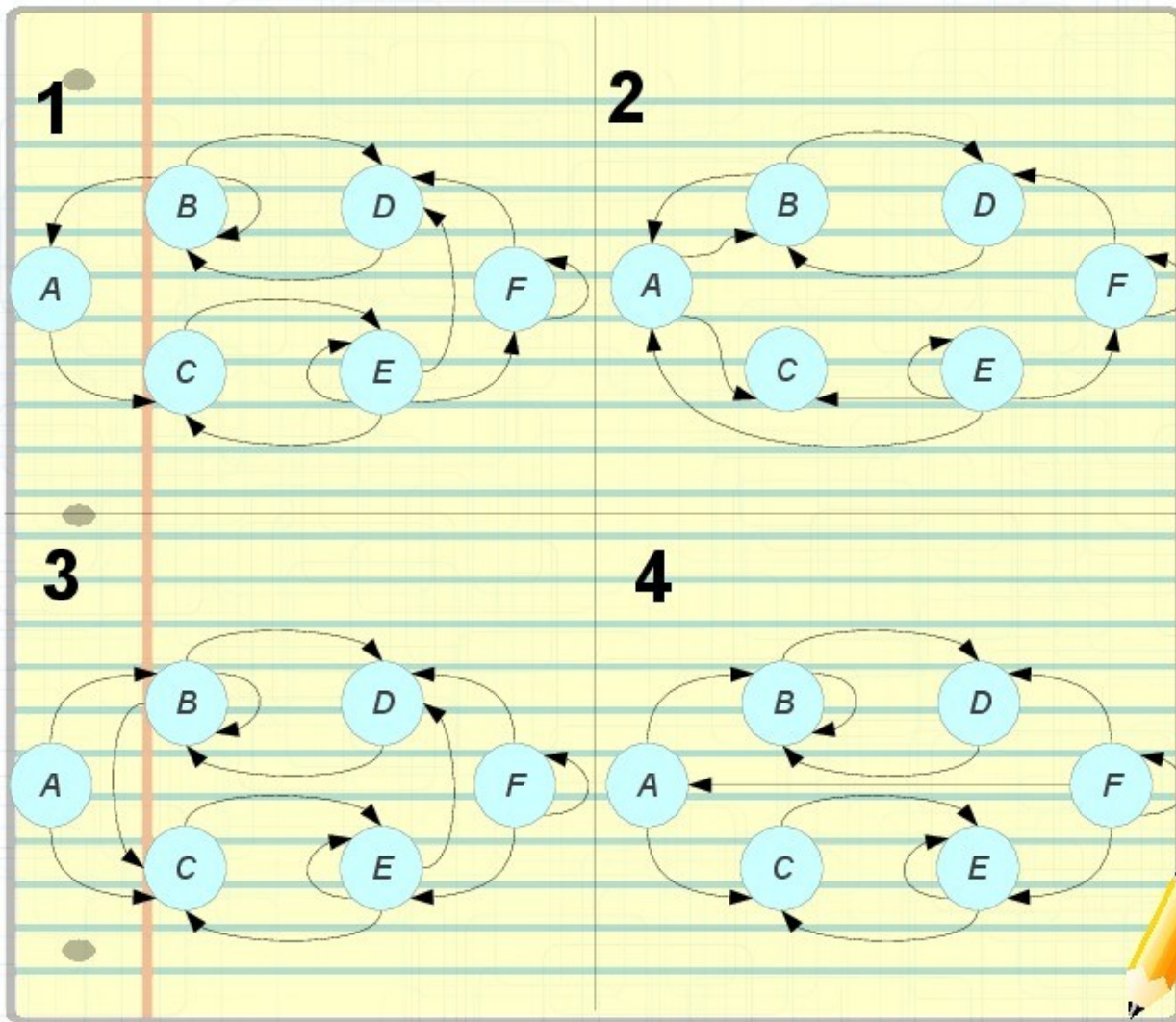
Clase reducible



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & P_{AB} & P_{AC} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{BB} & 0 & P_{BD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{EC} & P_{ED} & P_{EE} & P_{EF} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tiene por lo menos una clase transitoria

Está conformada por varias clases (transitorias y recurrentes)

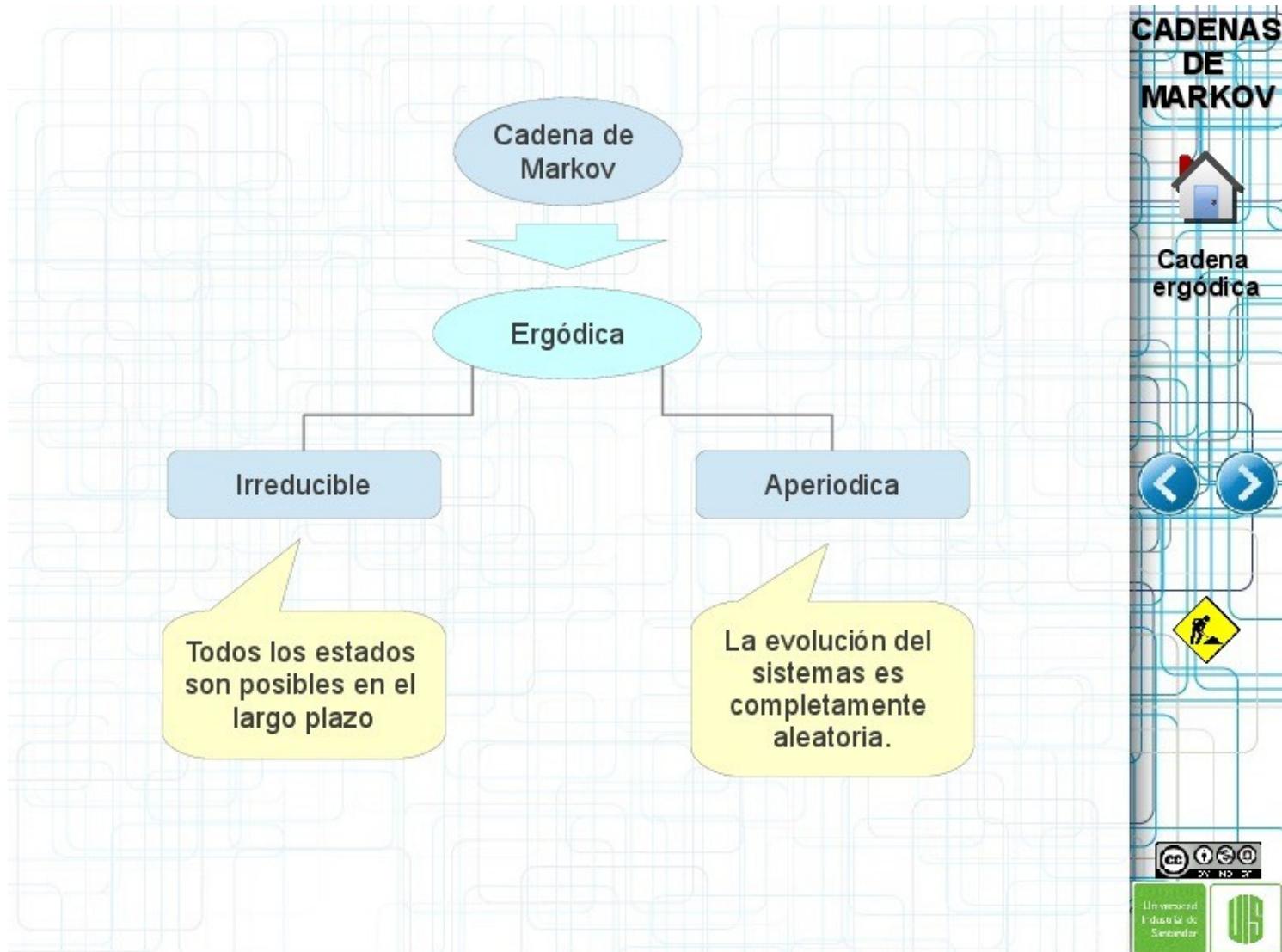


CADENAS DE MARKOV



Universitat
Eduard de
Sardaner





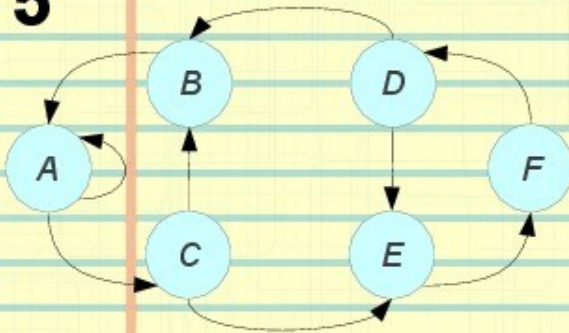
CADENAS DE MARKOV



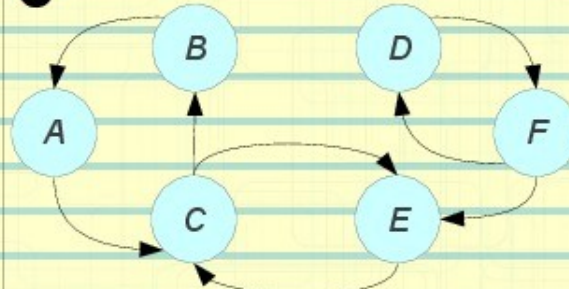
Universitat
Eduard de
Sardaner



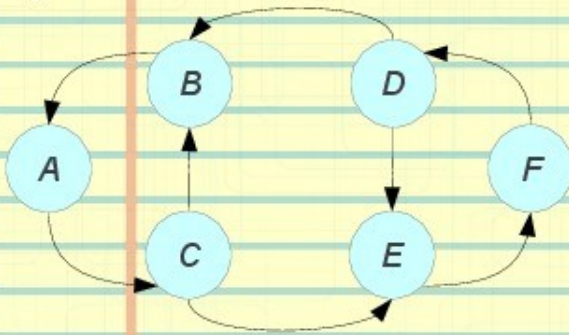
5



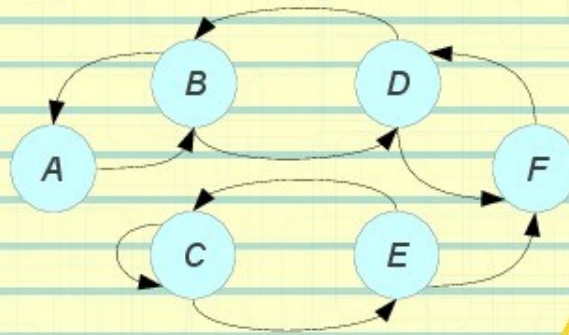
6



7



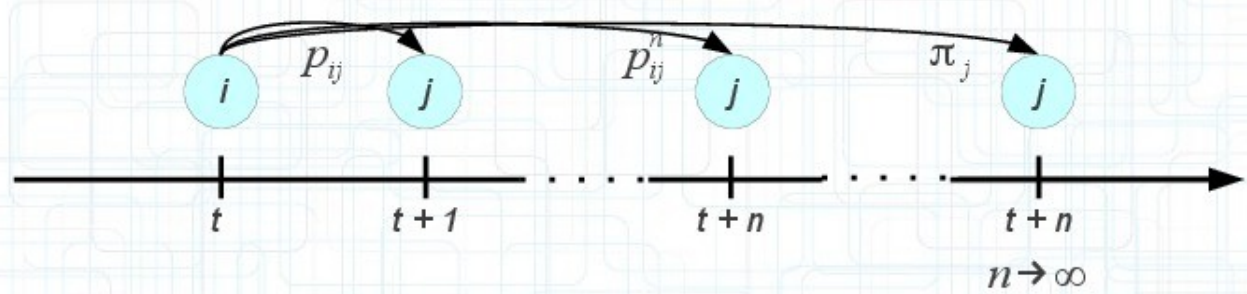
8



CADENAS DE MARKOV



Probabilid. de estado estable



$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n = \pi_j$$

Son independientes de t

Probabilidades de estado estable

$$\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$$

$$0 < \pi_j < 1 \quad \sum_{j=1}^m \pi_j = 1$$

Son independientes de las condiciones iniciales

Cadena de Markov Ergódica

CADENAS DE MARKOV



Probabilidad de estado estable



$$P(t) = P(t-1) \times T$$

$$\Pi = \Pi \times T$$

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m] = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m] \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m] = [(\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \dots + \pi_m P_{m1}), (\pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \dots + \pi_m P_{m2}), \dots, (\pi_1 P_{1m} + \pi_2 P_{2m} + \dots + \pi_m P_{mm})]$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \dots + \pi_m P_{m1} \\ \pi_2 &= \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \dots + \pi_m P_{m2} \\ &\dots \\ \pi_m &= \pi_1 P_{1m} + \pi_2 P_{2m} + \dots + \pi_m P_{mm} \end{aligned}$$



$$\pi_j = \sum_{i=1}^m \pi_i P_{ij}$$

Eliminamos unas de ellas

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1$$



$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$$

Resolvemos el sistema de m ecuaciones con m incógnitas resultante



$$\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$$

Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

$$T = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} + \pi_4 p_{41}$$

$$\pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} + \pi_4 p_{42}$$

$$\pi_3 = \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} + \pi_4 p_{43}$$

$$\pi_4 = \pi_1 p_{14} + \pi_2 p_{24} + \pi_3 p_{34} + \pi_4 p_{44}$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

$$\pi_1 = 0.080 \pi_1 + 0.632 \pi_2 + 0.264 \pi_3 + 0.080 \pi_4$$

$$\pi_2 = 0.184 \pi_1 + 0.368 \pi_2 + 0.368 \pi_3 + 0.184 \pi_4$$

$$\pi_3 = 0.368 \pi_1 + 0 \pi_2 + 0.368 \pi_3 + 0.368 \pi_4$$

$$\pi_4 = 0.368 \pi_1 + 0 \pi_2 + 0 \pi_3 + 0.368 \pi_4$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$



CADENAS DE MARKOV



Probabilidad de estado estable



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T \rightarrow T^2 \rightarrow T^4 \rightarrow T^8 \rightarrow \dots \rightarrow T^*$$

$$T^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$$

Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

$$T = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

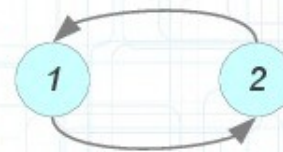
$$T^8 = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





Cadenas periódicas

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$T^{impar} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T^{par} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

No existen las probabilidades de estado estable.

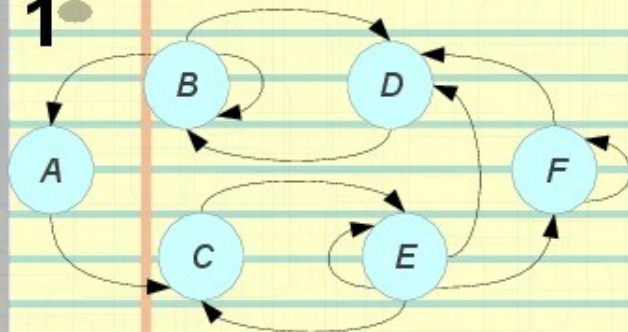
CADENAS DE MARKOV



Universitat
Eduard de
Santander

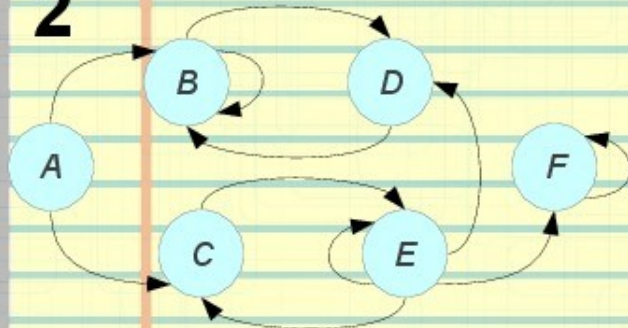


1



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

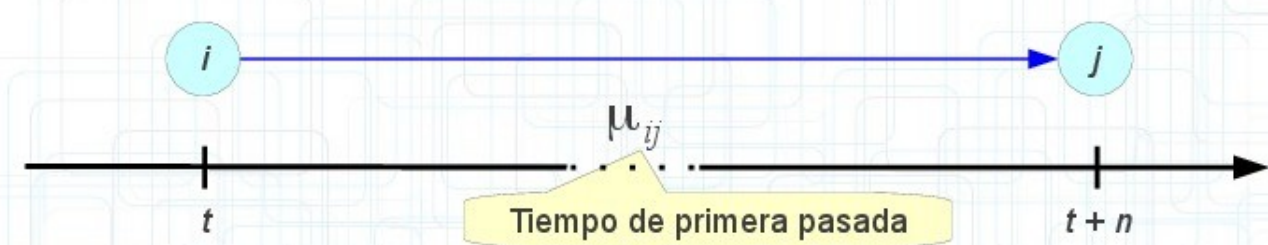
2



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Tiempos



$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m p_{ik} \mu_{kj}$$

Número estimado de transiciones que hace el proceso al ir del estado i al estado j por primera vez



$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

Número estimado de transiciones que hace el proceso para regresar al estado inicial i .

Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

$$T = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mu_{41} = 1 + p_{42}\mu_{21} + p_{43}\mu_{31} + p_{44}\mu_{41}$$

$$\mu_{31} = 1 + p_{32}\mu_{21} + p_{33}\mu_{31} + p_{34}\mu_{41}$$

$$\mu_{21} = 1 + p_{22}\mu_{21} + p_{23}\mu_{31} + p_{24}\mu_{41}$$

$$\mu_{41} = 1 + 0.184\mu_{21} + 0.368\mu_{31} + 0.368\mu_{41} = 2.50$$

$$\mu_{31} = 1 + 0.368\mu_{21} + 0.368\mu_{31} + 0\mu_{41} = 2.51$$

$$\mu_{21} = 1 + 0.368\mu_{21} + 0\mu_{31} + 0\mu_{41} = 1.58$$



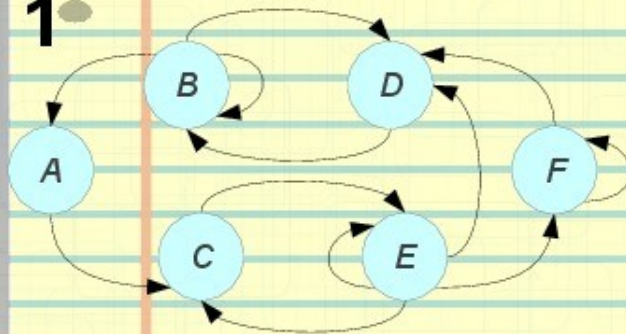
CADENAS DE MARKOV



Universitat
Eduard de
Saverdell

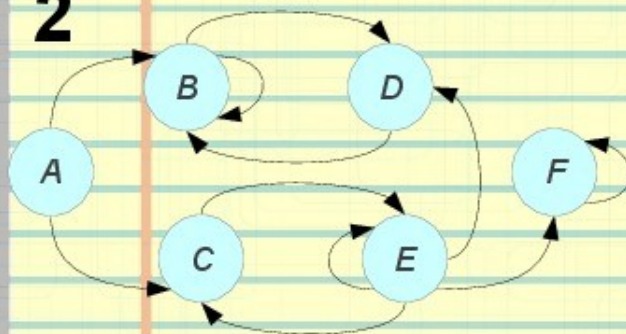


1

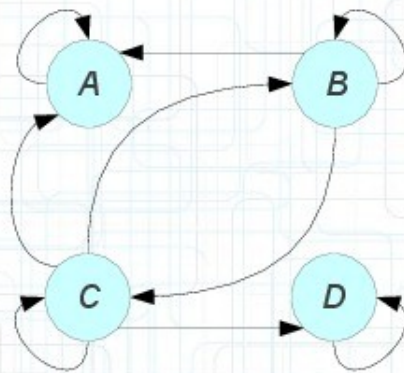


$$T = \begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \hline A & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0.3 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{array}$$

2



$$T = \begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \hline A & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

A: Saldo pagado
 B: Retraso 1 a 30 días
 C: Retraso 31 a 60 días
 D: Deuda mala

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Resolver el sistema de ecuaciones resultante

$$f_{ik} = 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} f_{jk}$$

$$f_{kk} = 1$$

$$f_{ik} = 0 \text{ si } i \text{ es recurrente } i \neq k$$

$$T = \begin{bmatrix} H & G \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$F = (I - H)^{-1} \times G$$

CADENAS DE MARKOV



Cadenas Absorbent.



Universidad
 I. de la
 Sábana



$$T = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ C & 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$T = \begin{array}{c|cccc} & B & C & A & D \\ \hline B & 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ C & 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ \hline A & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} H & G \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{array}{c|cc} & B & C \\ \hline B & 0,2 & 0,1 \\ C & 0,1 & 0,2 \end{array} \quad G = \begin{array}{c|cc} & A & D \\ \hline B & 0,7 & 0 \\ C & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

$$F = (I - H)^{-1} \times G$$

CADENAS DE MARKOV



Cadenas Absorbent.



Universitat
Eduard de
Sardània



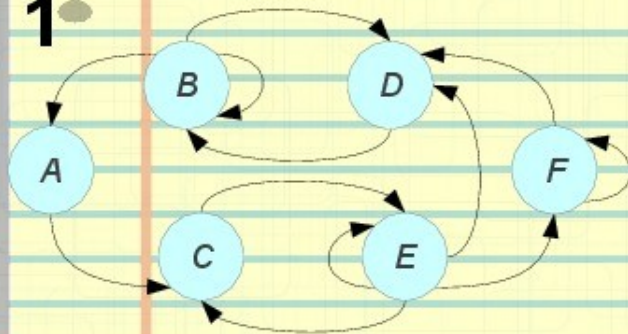
CADENAS DE MARKOV



Universitat
Eduard de
Santander

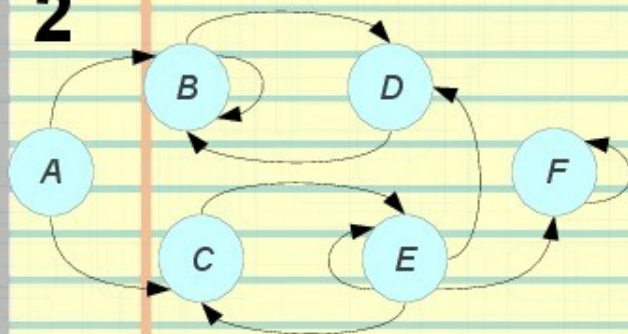


1

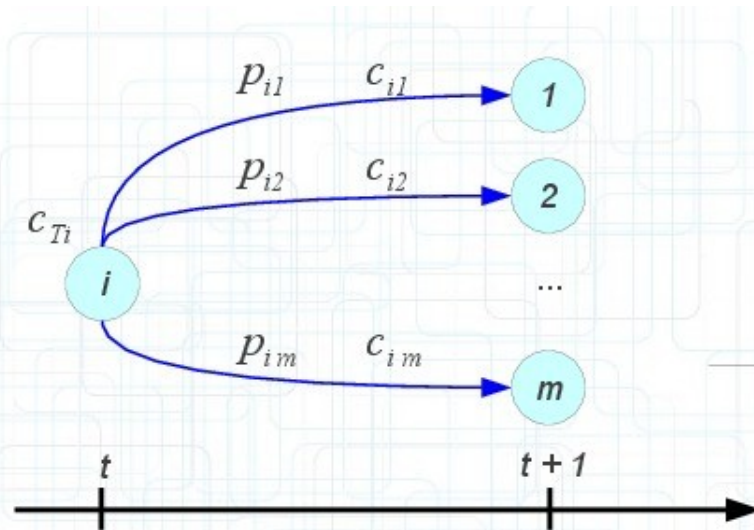


$$T = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.3 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ \hline \end{array}$$

2



$$T = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

$$C_T = [c_{T1} \quad c_{T2} \quad \dots \quad c_{Tm}]$$

$$c_{Ti} = \sum_{j=1}^m c_{ij} P_{ij}$$

Objetivo: Minimizar o Maximizar.

$$E(C_T) = \sum_{j=1}^m c_{Tj} \pi_j$$

$$C_T = [c_{T1} \quad c_{T2} \quad \dots \quad c_{Tm}]$$

$$\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$$

CADENAS DE MARKOV



Cadenas remunerad.



Universidad
Eduardo de
Santander



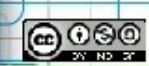
Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

$$T = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Costo de realizar pedido: \$10
 Costo Producto: \$25
 Costo de almacenamiento: \$3 del inventario promedio

$$C = \begin{matrix} & 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 89,5 & 91 & 92,5 & 94 \\ 1,5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4,5 & 6 & 0 \\ 4,5 & 6 & 7,5 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





Ejemplo: Inventario (Hillier-Lieberman)

$$C_T = \sum_{j=1}^m c_{ij} P_{ij}$$

El producto es término a término, **NO** es el producto cruz de dos matrices

Sumando cada fila se tiene el costo total por estado.

$$C * T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7,16 & 16,744 & 34,04 & 34,592 \\ 0,948 & 1,104 & 0 & 0 \\ 0,792 & 1,656 & 2,208 & 0 \\ 0,36 & 1,104 & 2,76 & 3,312 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C_T = [92,536 \quad 2,052 \quad 4,656 \quad 7,536]$$

$$\Pi = [0,286 \quad 0,285 \quad 0,263 \quad 0,166]$$

$$E(C_T) = \sum_{j=1}^m c_{Tj} \pi_j$$

$$E(C_T) = 26,465 + 0,585 + 1,225 + 1,251$$

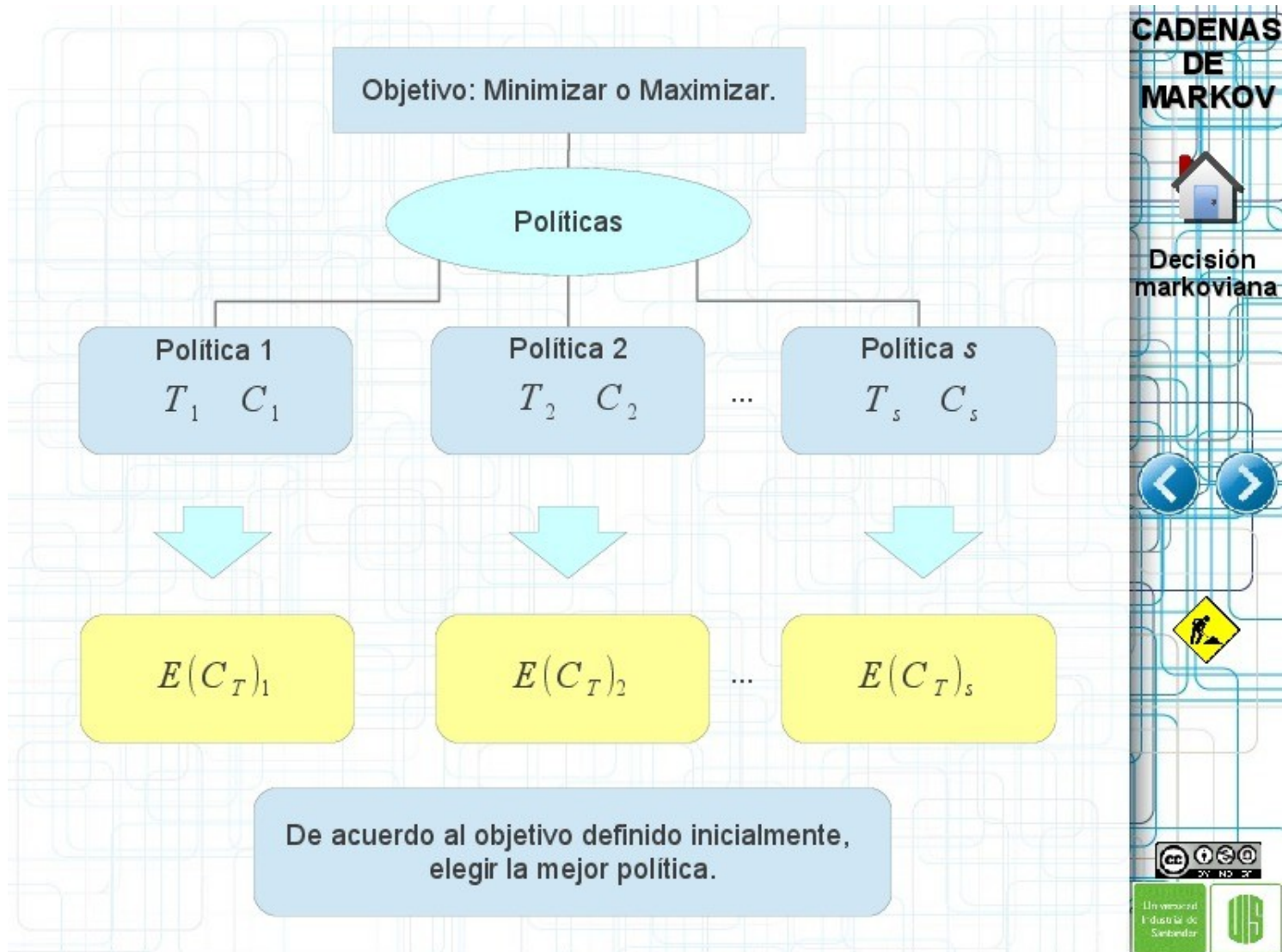
$$E(C_T) = 29,526$$



TALLER 5

Actividades

1





TALLER 5

Actividades

2





CADENAS DE MARKOV



ANEXO H. MATERIAL TEÓRICO ELABORADO

CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO

Autor:

JOSÉ HUMBERTO ARAQUE MEZA
Estudiante de Ingeniería Industrial

Director:

Carlos Eduardo Díaz Bohórquez
Magister en Ingeniería Industrial

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
INGENIERÍA INDUSTRIAL
BUCARAMANGA
2012

CONTENIDO

	pág.
1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y PROCESOS DE MARKOV	3
2. CADENAS DE MARKOV	4
3. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN (DE UN PASO)	5
4. DIAGRAMA DE TRANSICIÓN	6
5. MATRIZ DE TRANSICIÓN (DE UN PASO)	7
6. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE N PASOS	9
7. ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV	10
8. MATRIZ DE TRANSICIÓN DE N PASOS	11
9. ORDEN DE LAS CADENAS DE MARKOV	13
9.1. CADENAS DE MARKOV DE PRIMER ORDEN	13
9.2. CADENAS DE MARKOV DE ORDEN SUPERIOR	13
10. PROBABILIDADES ABSOLUTAS O INCONDICIONALES	14
11. CLASIFICACIÓN DE ESTADOS	15
11.1. CLASIFICACIÓN SEGÚN SU ACCESIBILIDAD	15
11.2. CLASIFICACIÓN SEGÚN SU RECURRENCIA	17
12. CLASES COMUNICANTES	20
13. CADENAS DE MARKOV ERGÓDICAS	22
14. PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE	24
15. TIEMPOS	26
15.1. TIEMPO DE PRIMERA PASADA	26
15.2. TIEMPO DE RECURRENCIA O DE PRIMER RETORNO	27
16. CADENAS ABSORBENTES	27
17. CADENAS DE MARKOV CON REMUNERACIÓN	29
18. PROCESOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS.	30

CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO

1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y PROCESOS DE MARKOV

La Real Academia Española define el término estocástico de dos formas, “Pertenciente o relativo al azar. Teoría Taller 1 Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado.”¹, conociendo esto, puede definirse proceso estocástico como “un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.”² en otras palabras, es la representación matemática de la evolución del estado de un sistema.

Debe definirse cual es la variable de interés en el sistema observado, a esta variable se denota como X_t , la cual representa el estado en el que se encuentra el sistema en el instante de tiempo t , este estado pertenece al conjunto de m estados colectivamente exhaustivos, mutuamente excluyentes (denominado espacio de estados), conjunto que puede ser finito o infinito³, al igual que t .

Figura 19: Características del conjunto de estados.



Fuente: Autor.

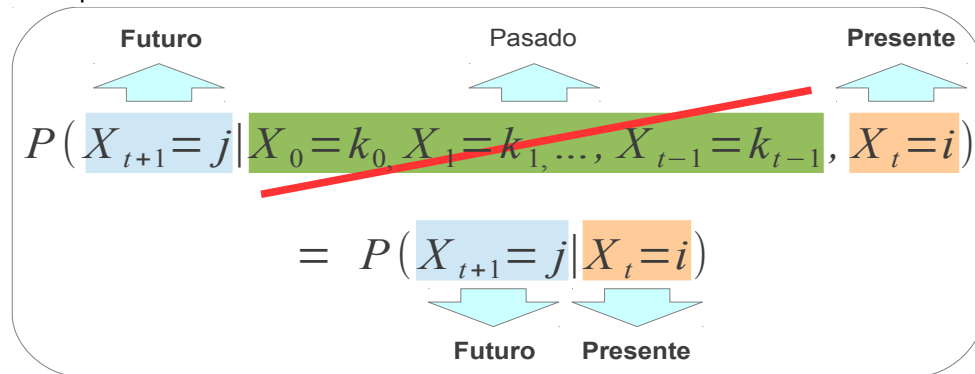
Un proceso de Markov es un caso especial de proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov,

¹ [Estocástico], citado en 2012-06-30

² [WikiPrEstoc] citado en 2011-12-29.

³ [Taha2004] p. 693.

Figura 20: Propiedad markoviana.

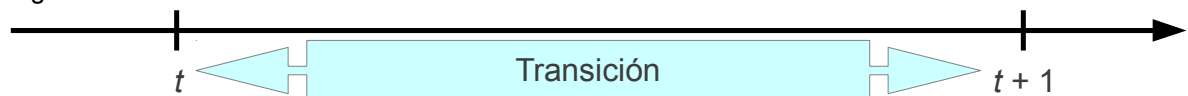


Fuente: Autor.

para $t=0,1,\dots$ y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$, es decir, que la probabilidad P de que el sistema se encuentre en el estado j en el instante $t+1$ depende únicamente del estado en el que se encontraba el sistema en el instante t , siendo totalmente independiente de los valores que haya tomado antes, en otras palabras, el estado futuro de un sistema depende únicamente del estado presente y no de su pasado.

El paso del instante t al instante $t+1$ se le denomina (una) transición.

Figura 21: Transición



Fuente: Autor.

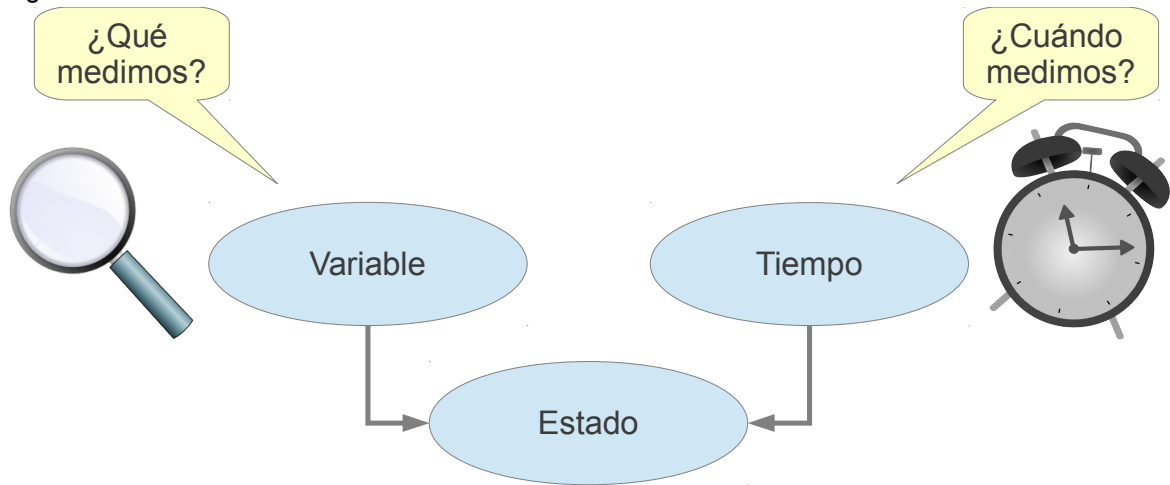
2 CADENAS DE MARKOV

Una cadena de Markov es un caso especial de los procesos de Markov¹, ésta cuenta con un espacio de estados discreto y puede ser estudiada en tiempo discreto o continuo. En adelante siempre que se haga referencia a cadenas de Markov, se referirá a las de tiempo discreto mientras no se exprese lo contrario.

Como se mencionó en la sección anterior, es importante determinar claramente la variable de estudio, así como también es igualmente importante definir el tiempo de observación de dicha variable, dado que dependiendo del momento en el que se realice la observación podría tomar un valor u otro diferente.

¹ [Taha2004] p. 694.

Figura 22: Qué define un estado.



Fuente: Autor.

Las aplicaciones de las cadenas de Markov pueden encontrarse en diferentes y variadas áreas como:

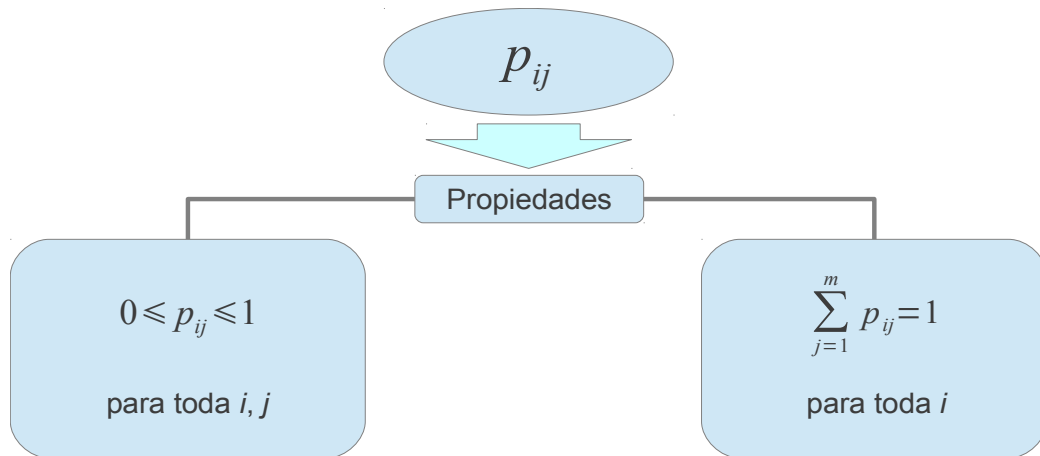
- Economía y finanzas
- Meteorología.
- Informática.
- Simulación.
- Modelos epidemiológicos.
- Juegos de azar.
- Física.
- Música.

3 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN (DE UN PASO)

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+1}=j|X_t=i)$, se denominan probabilidades de transición de un paso (para ir del estado i en el instante t al estado j en $t+1$) o simplemente probabilidades de transición, denotándose como p_{ij} , de tal forma que puede escribirse $P(X_{t+1}=j|X_t=i)=p_{ij}$.

Las probabilidades de transición deben cumplir con dos propiedades, la primera es que $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para toda i, j , y la segunda $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, para toda i .

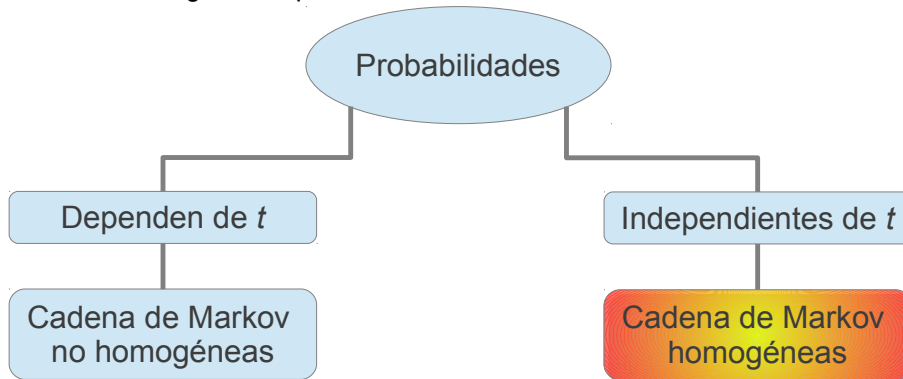
Figura 23: Propiedades de p_{ij}



Fuente: Autor.

Cuando para cualquier par de estados i y j , y para toda t , la probabilidad condicional $P(X_{t+1}=j|X_t=i)$ sea independiente de t , a la cadena de Markov se le denomina homogénea. En adelante siempre que se mencionen cadenas de Markov se hará referencia a cadenas de Markov homogéneas.

Figura 24: Clasificación según la dependencia de t .



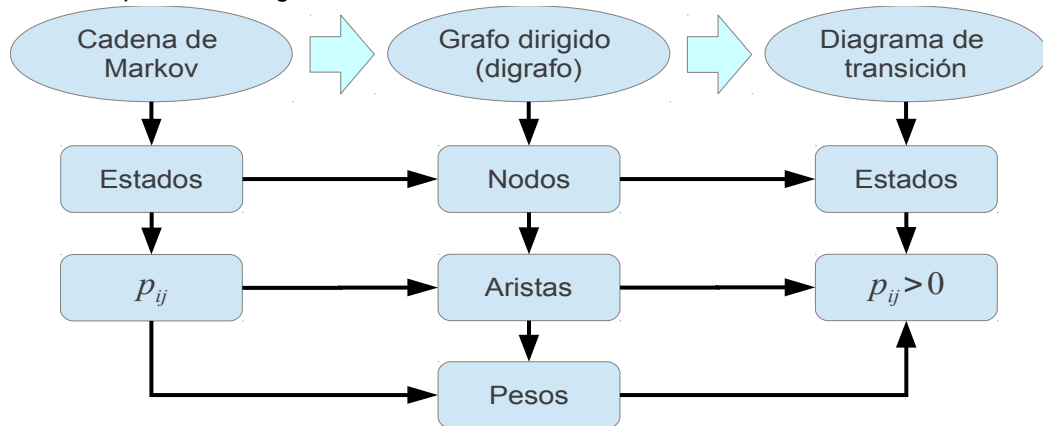
Fuente: Autor.

4 DIAGRAMA DE TRANSICIÓN

Una forma práctica de representar y entender mejor una cadena de Markov, es mediante la utilización de grafos dirigidos, donde cada uno de los m estados de la cadena será representado por un nodo y donde exista una probabilidad no nula de ir de un estado i a otro estado j se representará mediante una arista uniendo dichos estados (es decir si la probabilidad es 0 no existirá una arista), el peso de esta arista será el valor de la probabilidad condicional, en éste caso, al grafo se le

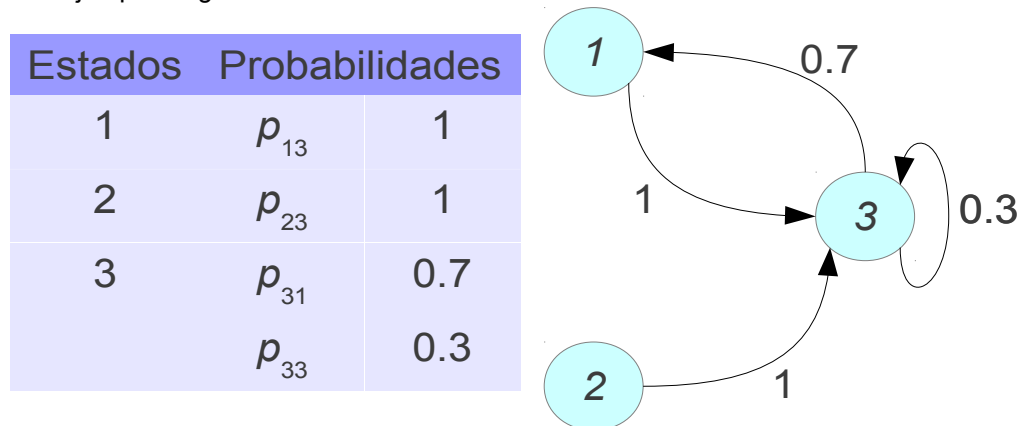
denomina diagrama de transición.

Figura 25: Componentes diagrama de transición.



Fuente: Autor.

Figura 26: Ejemplo diagrama de transición.

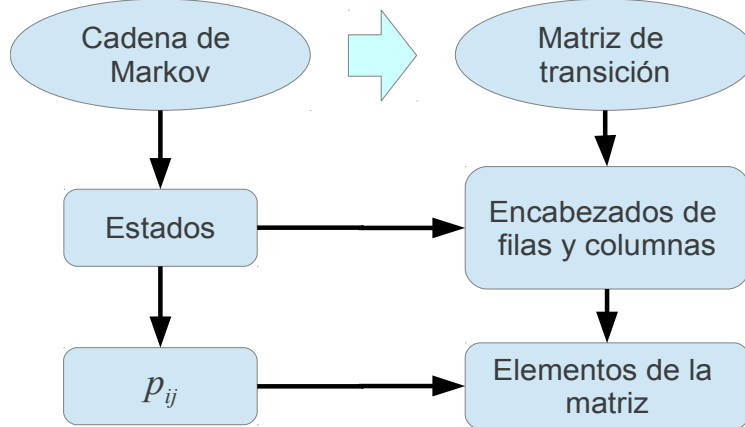


Fuente: Autor

5 MATRIZ DE TRANSICIÓN (DE UN PASO)

Debe recordarse que un grafo se puede representar matricialmente, y una de estas formas en las que se puede hacer es mediante la matriz de adyacencia, y dado que una cadena de Markov puede representarse mediante un grafo, también se puede hacer por medio de la matriz de adyacencia, solo que ésta va a tener una variante, en lugar de representar con un 1 la arista, se colocará el peso de la misma, es decir la probabilidad de transición p_{ij} correspondiente, a esta matriz de adyacencia modificada se le denomina matriz de transición T .

Figura 27: Componentes de la matriz de transición.



Fuente: Autor.

La matriz de transición es una matriz estocástica, donde cada una de sus filas son vectores de probabilidad (sus elementos toman valores entre 0 y 1, y la suma de todos sus elementos es 1). La estructura de la matriz es la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j, \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

Figura 28: Ejemplo matriz de transición.

Estados	Probabilidades
1	p_{13} 1
2	p_{23} 1
3	p_{31} 0.7
	p_{33} 0.3

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

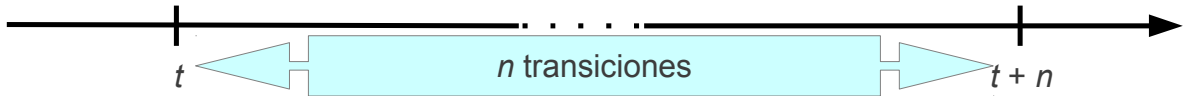
Fuente: Autor.

6 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE N PASOS

De la misma forma que el paso del instante t al instante $t+1$ se le denomina

(una) transición, el paso del instante t al instante $t+n$ se le denomina n transiciones.

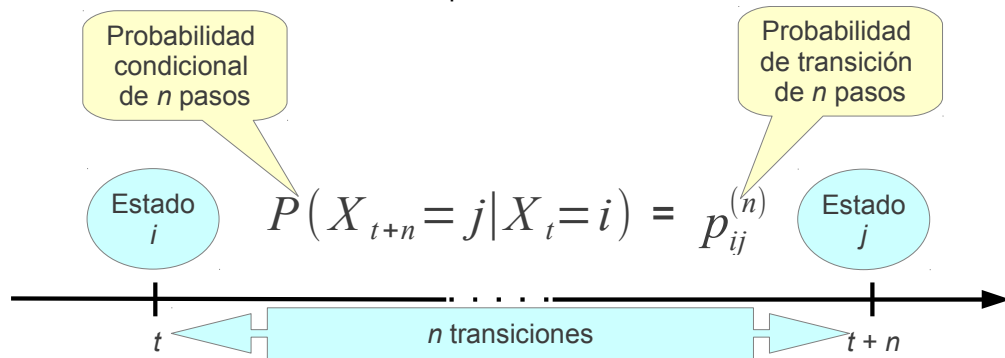
Figura 29: n transiciones.



Fuente: Autor.

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+n}=j|X_t=i)$, denominadas probabilidades de transición de n pasos, $p_{ij}^{(n)}$, son las probabilidades de que el sistema al cabo de n transiciones se encuentre en el estado j , dado que inició en el tiempo t en el estado i .

Figura 30: Probabilidades de transición de n pasos

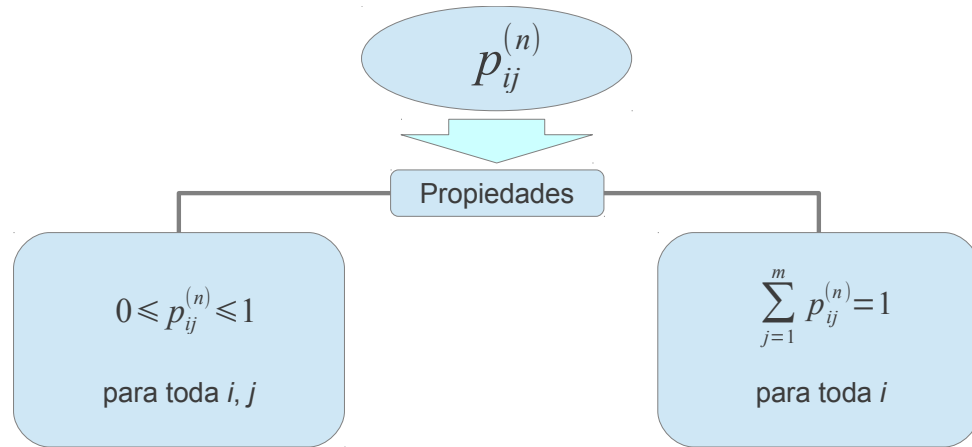


Fuente: Autor.

Al igual que las probabilidades de transición de un paso, las probabilidades de transición de n pasos tienen las mismas propiedades es decir que $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para

toda i, j , y $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, para toda i .

Figura 31: Propiedades de $p_{ij}^{(n)}$



Fuente: Autor.

7 ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Para calcular las probabilidades de transición de n pasos, se utilizan las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}, \quad 0 < r < n, \quad \forall i, j$$

Para ir del estado i , al estado j en n transiciones, el sistema llegará al estado k al cabo de r pasos ($p_{ik}^{(r)}$), y luego de $n-r$ pasos adicionales terminará en el estado j ($p_{kj}^{(n-r)}$).

Como puede verse en Hillier¹, los casos especiales cuando $r=1$ y $r=n-1$, obtenemos las expresiones:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \quad \text{y} \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, \quad \forall i, j$$

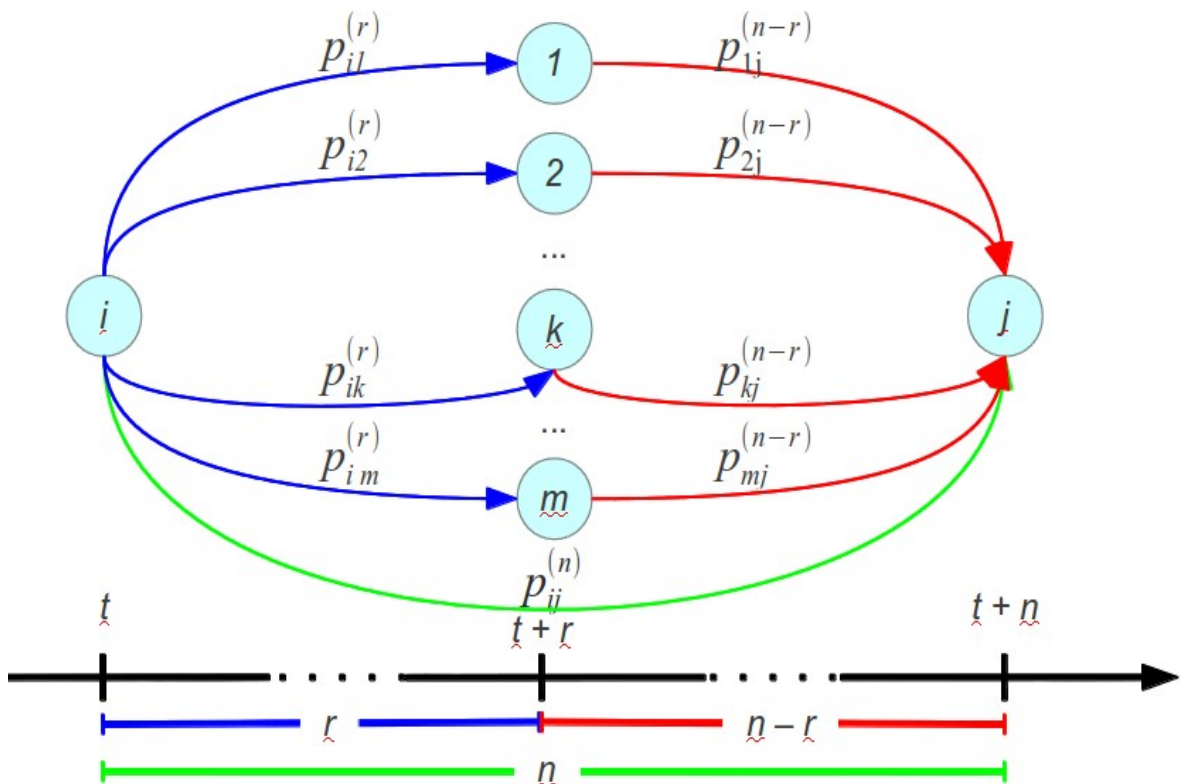
y para cuando $n=2$ se tiene

¹ [Hillier2001], p. 808.

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^m P_{ik} P_{kj}, \quad \forall i, j$$

a partir de las probabilidades de transición de un paso, pueden obtenerse de manera recursiva las probabilidades de transición de n pasos.

Figura 32: Ir de i a j en n transiciones.



Fuente: Autor.

8 MATRIZ DE TRANSICIÓN DE N PASOS

De forma similar a la matriz de transición de un paso, puede elaborarse la matriz de transición de n pasos, es decir la matriz que contiene las probabilidades de transición de que el sistema pase de un estado i a un estado j al cabo de n transiciones:

$$T^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots & p_{1m}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \dots & p_{2m}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}^{(n)} & p_{m2}^{(n)} & \dots & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq p_{ij}^{(n)} \leq 1 \quad \forall i, j, \quad \sum_{j=1}^m p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

Los elementos de la matriz $T^{(2)}$ son los mismos $p_{ij}^{(2)}$ mencionados al final de... la sección 2.2.5 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov... los cuales se pueden obtener mediante $T^{(2)} = T \times T = T^2$, y generalizando tenemos que para calcular la matriz de transición de n pasos $T^{(n)}$, se realiza calculando la n -ésima potencia de T , así $T^{(n)} = T^n = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_{n-1} \times T_n$. El producto de dos matrices estocásticas es una matriz estocástica.

Para realizar la multiplicación de dos matrices en una hoja de cálculo, existe la función matricial MMULT, esta función puede utilizarse en hojas de cálculo como LibreOffice, Apache OpenOffice, Microsoft Office, Google Docs, entre otras. Por tratarse de una función matricial, para insertarla correctamente en la hoja, luego de escribirla en vez de oprimir enter, se oprime simultáneamente control+shift+enter, así el resultado se verá como matriz.

Figura 33: Multiplicación de matrices en hoja de cálculo.

	A	B	C	D	E	F
1					Soleado	Nublado
2				Soleado	0,6744186047	0,3255813953
3				Nublado	0,5357142857	0,4642857143
4		Soleado	Nublado			
5	Soleado	0,6744186047	0,3255813953		=MMULT(B5:C6;E2:F3)	
6	Nublado	0,5357142857	0,4642857143		0,6100201709	0,3899798291
7						
8						
9						

Control + Shift + Enter

Fuente: Autor.

9 ORDEN DE LAS CADENAS DE MARKOV

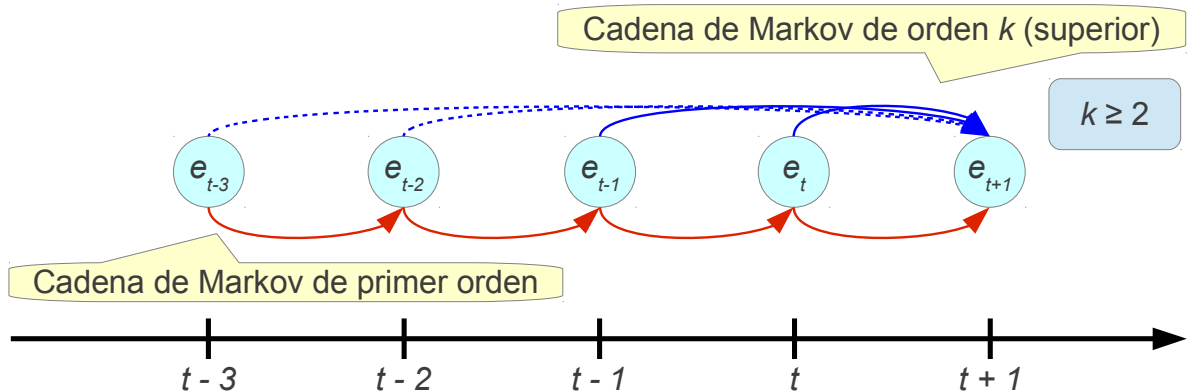
9.1 CADENAS DE MARKOV DE PRIMER ORDEN

Lo visto hasta el momento corresponde a cadenas de Markov de primer orden, es decir aquellas en las que el estado del sistema en el tiempo t , depende únicamente del estado en el que se encontraba el sistema en el tiempo $t-1$.

9.2 CADENAS DE MARKOV DE ORDEN SUPERIOR

Las cadenas de Markov de orden k ($k > 1$), son aquellas en las que el estado del sistema en el tiempo t , depende de los estados en los que se encontraba el sistema en los instantes $t-1, t-2, \dots, t-k$.

Figura 34: Cadena de Markov de orden superior.



Fuente: Autor.

El estudio de las cadenas de Markov de orden superior, puede hacerse mediante las cadenas de primer orden, "transformándolas adecuadamente"¹.

Figura 35: Transformación de una cadena de orden superior.



Fuente: Autor.

¹ [Fonollosa2005], p. 53.

A partir de una cadena de Markov de orden k , con un número finito de estados m , se calcula la cantidad de estados de la cadena de primer orden equivalente mediante $m' = m^k$, estos estados así calculados, serán combinaciones ordenadas de las últimas k transiciones en las que estuvo el sistema.

Por ejemplo, para una cadena de Markov de orden 2 con 2 estados A B , el número de estados de la cadena equivalente de primer orden es $m' = 2^2 = 4$, y los nuevos estados serán AA , AB , BA , BB .

Figura 36: Estructura de la matriz de primer orden de una cadena de orden 2.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} AA & AB & BA & BB \end{matrix} \\ \begin{matrix} AA \\ AB \\ BA \\ BB \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fuente: Autor.

Una vez se halla definido la matriz de primer orden equivalente, su estudio se realizará como cualquier otra matriz de primer orden.

10 PROBABILIDADES ABSOLUTAS O INCONDICIONALES

Las probabilidades incondicionales son las probabilidades de que el sistema se encuentre en un determinado estado i , al cabo de n transiciones, dadas unas condiciones iniciales $P(0)$, este vector se denota como $P(n)$, y dado que es un vector de probabilidades, también cumple con las propiedades $0 \leq p_j(n) \leq 1$, y

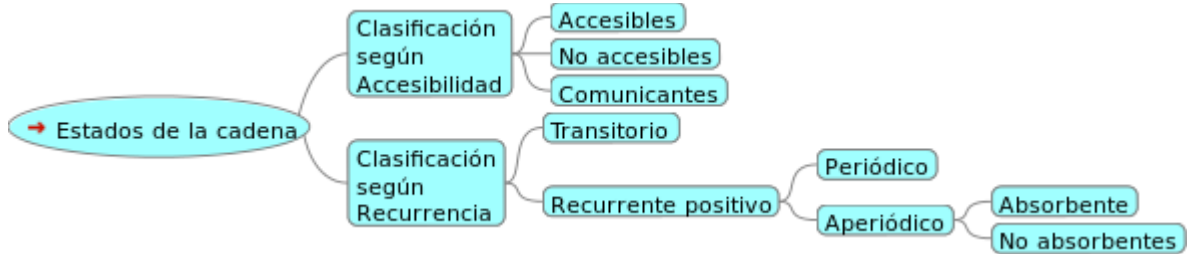
$$\sum_{j=1}^m p_j(n) = 1.$$

Para calcular las probabilidades absolutas debe realizarse $P(n) = P(0) \times T^n$.

11 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

Los estados de una cadena de Markov, pueden ser clasificados según su recurrencia o su accesibilidad. En la Figura 37 se resume la clasificación de los estados, los cuales serán definidos más adelante.

Figura 37: Clasificación de estados

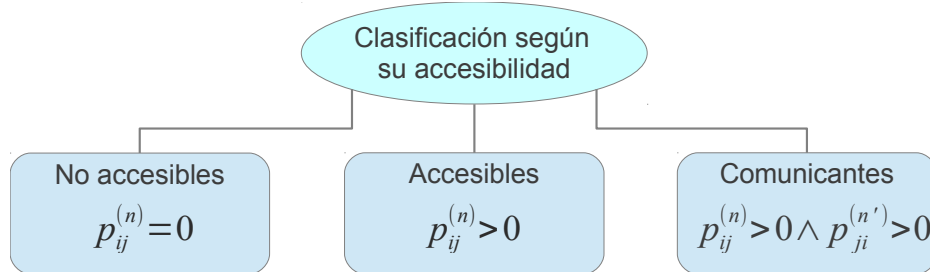


Fuente: Autor

11.1 CLASIFICACIÓN SEGÚN SU ACCESIBILIDAD

Según su accesibilidad, los estados de las cadenas de Markov pueden clasificarse en tal y como se muestra en la siguiente figura.

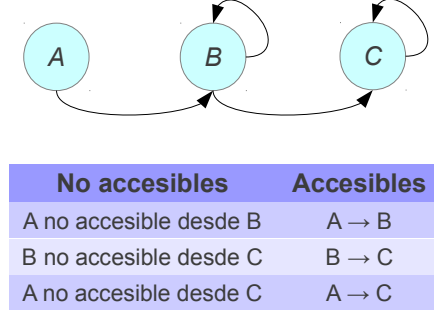
Figura 38: Clasificación de estados según su accesibilidad.



Fuente: Autor.

Si el sistema inicia en un estado i , y al cabo de n transiciones, se llega a un estado j , es decir, existe una trayectoria de i a j , se dice que j es accesible desde el estado i . Si no existe una trayectoria de i a j , simplemente se dice que j no es accesible desde i .

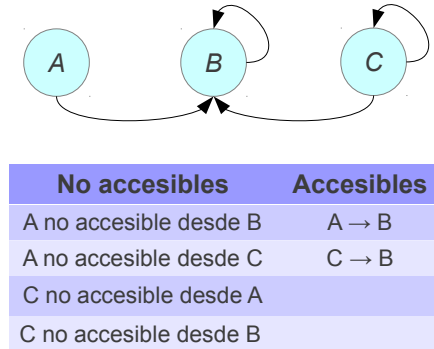
Figura 39: Ejemplo 1, estados accesibles y no accesibles.



$$T = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & p_{BB} & p_{BC} \\ C & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Fuente: Autor.

Figura 40: Ejemplo 2, estados accesibles y no accesibles.

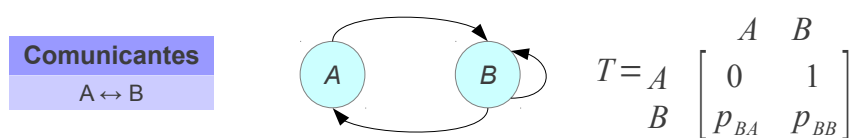


$$T = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & p_{CB} & p_{CC} \end{matrix}$$

Fuente: Autor.

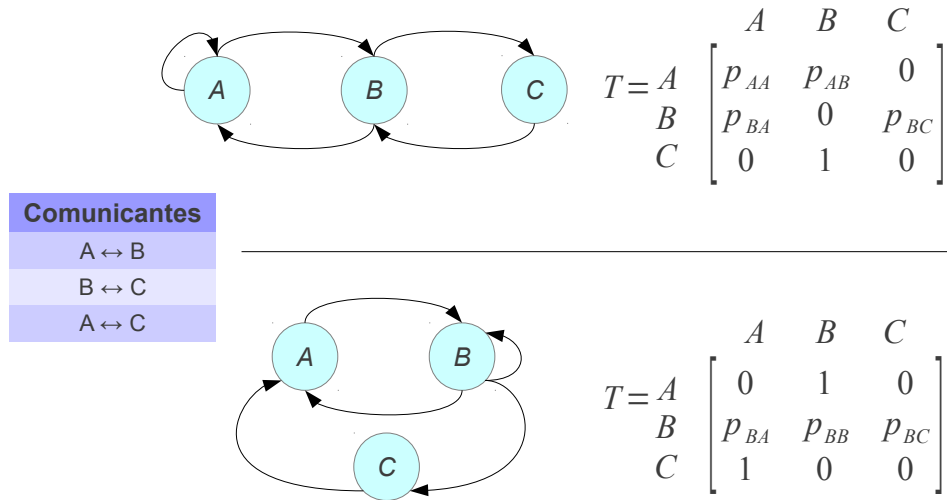
Si adicionalmente, también existe una trayectoria que conduzca de j a i al cabo de n' transiciones, es decir, i es accesible desde j , entonces se dice que los estados se comunican o son comunicantes. Los valores de n y n' no necesariamente son iguales.

Figura 41: Ejemplo 1, estados comunicantes.



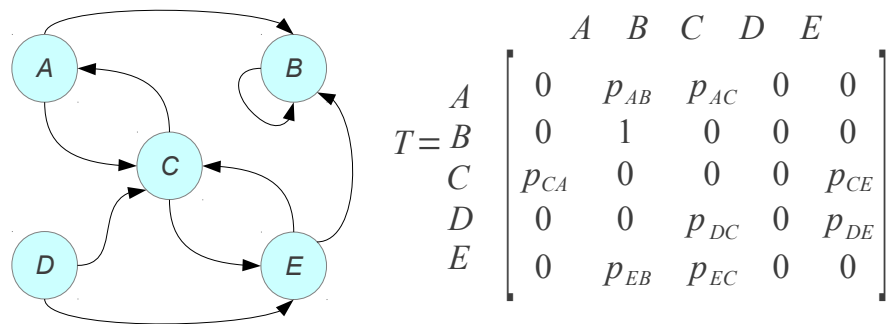
Fuente: Autor.

Figura 42: Ejemplo 2 estados comunicantes.



Fuente: Autor.

Figura 43: Ejemplo clasificación de estados según su accesibilidad.



Clasificación de estados según su accesibilidad		
No accesibles	Accesibles	Comunicantes
A no accesible desde B	A → B A → C A → E	A ↔ C
C no accesible desde B	C → A C → B C → E	C ↔ E
D no accesible desde A D no accesible desde B D no accesible desde C D no accesible desde E	D → A D → B D → C D → E	A ↔ E
E no accesible desde B	E → A E → B E → C	

Fuente: Autor.

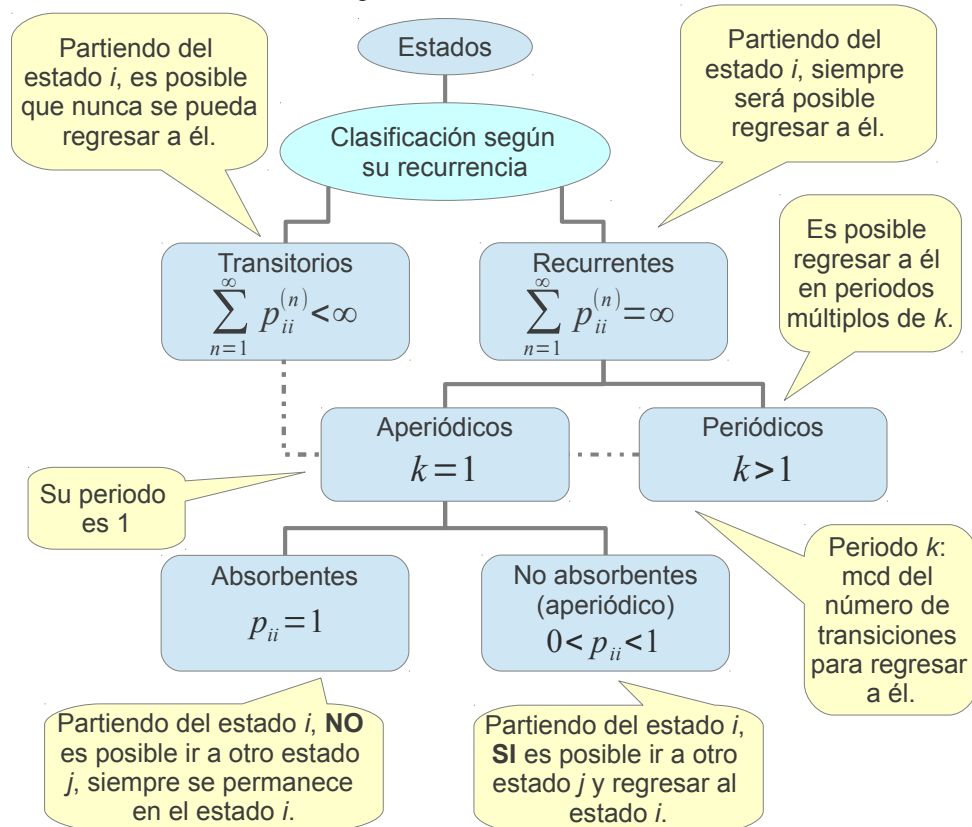
11.2 CLASIFICACIÓN SEGÚN SU RECURRENCIA

Si el sistema una vez llega a un estado j , es posible que no se pueda regresar a él en futuras transiciones (en el largo plazo), se dice que el estado es transitorio.

“Si un estado no es transitorio, se llama estado recurrente”¹.

Un estado recurrente (llamado también recurrente positivo), es aquel que una vez alcanzado por el sistema, es posible regresar a él posteriormente (en el largo plazo).

Figura 44: Clasificación de estados según su recurrencia.

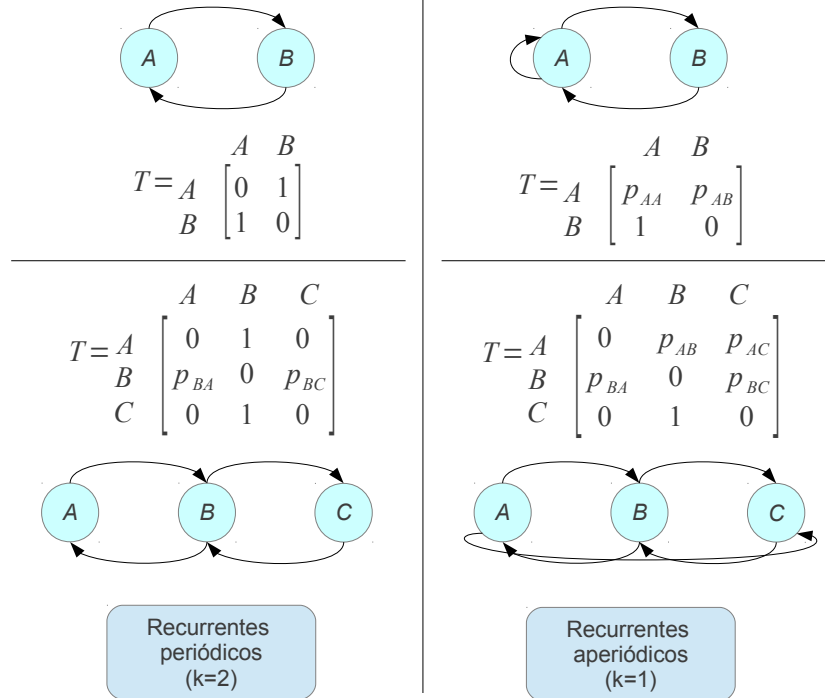


Fuente: Autor.

A un estado recurrente, al que se puede retornar sólo en los periodos múltiplos de un determinado valor $k > 1$, se le denomina estado periódico donde k es el periodo. Para los estados para los cuales $k=1$ se les llama aperiódicos. Si se inicia en un estado i , k será el máximo común divisor del número de transiciones necesarias para regresar a i donde se inició.

¹ [Winston2005], p. 933.

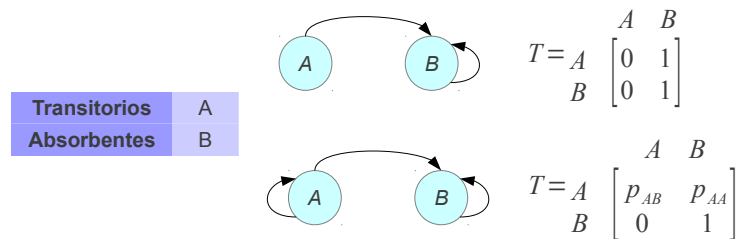
Figura 45: Ejemplo estados periódicos y aperiódicos.



Fuente: Autor.

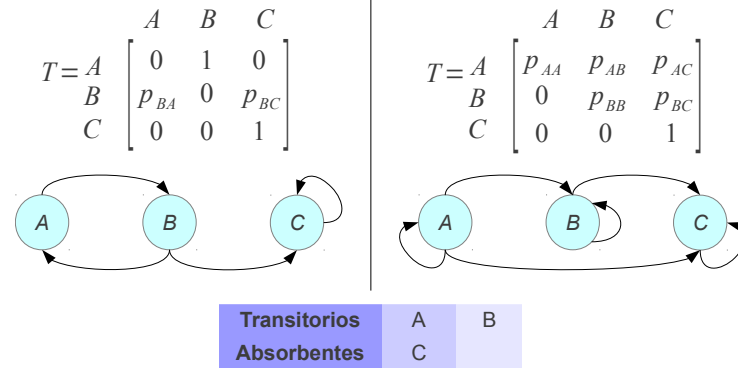
Los estados aperiódicos los podemos dividir en dos, aquellos para los cuales $p_{ii}=1$ llamados estados absorbentes, ya que una vez que el sistema llega a ellos nunca los abandonan, y los otros estados no absorbentes para los cuales se cumple que $0 < p_{ii} < 1$.

Figura 46: Ejemplo 1, estados transitorios y absorbentes.



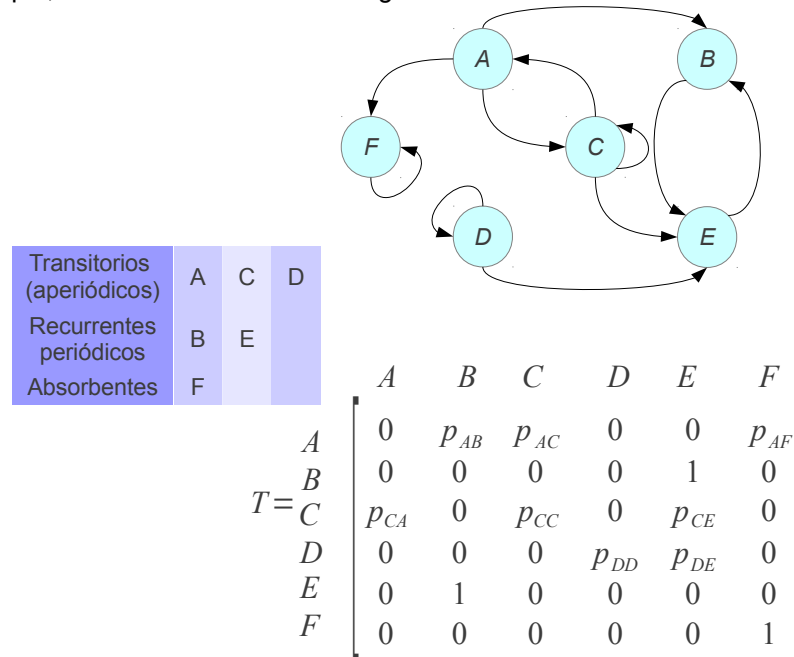
Fuente: Autor.

Figura 47: Ejemplo 2, estados transitorios y absorbentes.



Fuente: Autor.

Figura 48: Ejemplo, clasificación de estados según su recurrencia.



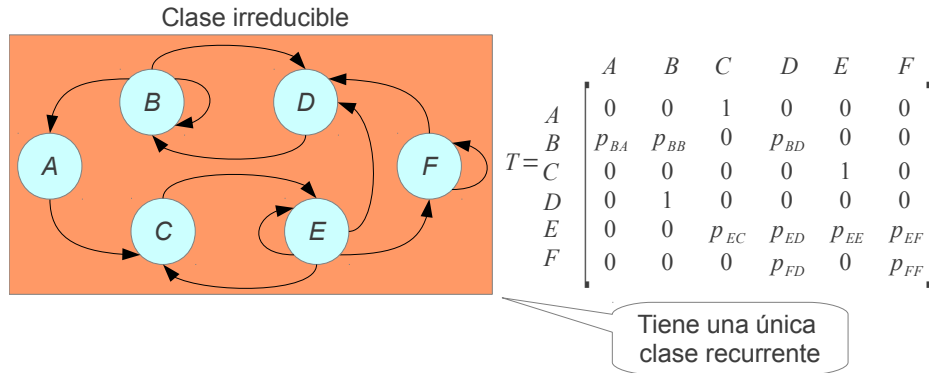
Fuente: Autor.

12 CLASES COMUNICANTES

Los estados según su accesibilidad pueden ser agrupados en conjuntos llamados clases comunicantes o simplemente clases, para hacer esto, debe tenerse en cuenta que dos estados que se comuniquen, pertenecen a la misma clase, equivalentemente, dos estados que no se comunican pertenecen a clases distintas. En el caso de los estados absorbentes, estos constituyen una clase de un único estado, hay que tener en cuenta que todo estado se comunica consigo mismo, ya que $p_{ii}^0 = 1$, es decir la probabilidad de ir del estado i al estado i en cero transiciones es igual a uno.

Cuando todos los estados de la cadena se comunican entre sí, solo existe una clase, a la cual se le denomina clase irreducible.

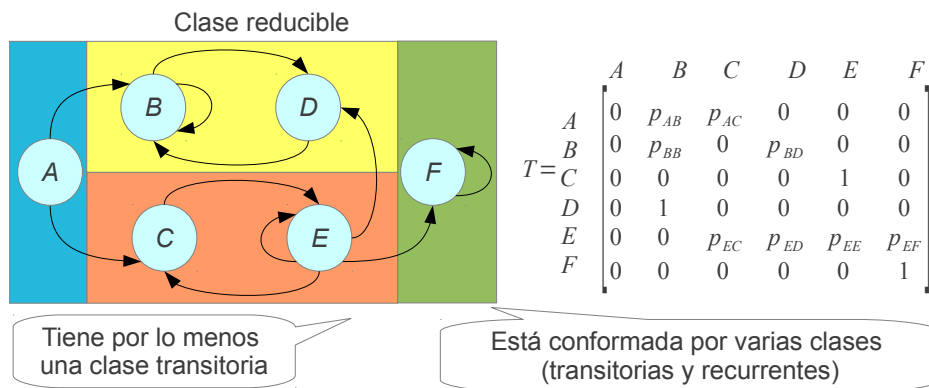
Figura 49: Clase irreducible.



Fuente: Autor.

Una clase que no es irreducible, es reducible y contiene dos tipos de clases, transitorias (o de paso) y recurrentes (o cerradas). De forma similar a los estados transitorios y recurrentes, una clase es transitoria cuando una vez el sistema la abandone, no es posible regresar a ella, y una clase recurrente es aquella que una vez el sistema se encuentre en ella, no es abandonada. Todo sistema debe tener por lo menos una clase recurrente.

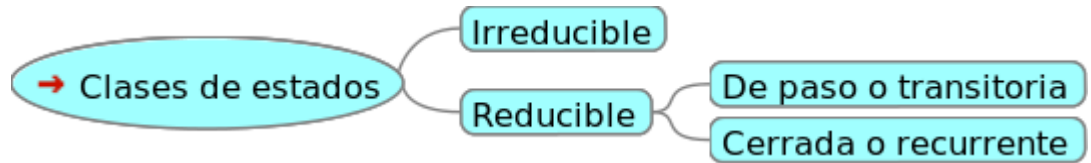
Figura 50: Clase reducible.



Fuente: Autor.

Al igual que los estados, las clases también tienen un periodo, definido éste como el máximo común divisor de las longitudes de los ciclos que están presentes al interior de la clase, de esta forma, a las clases cuyo periodo $k > 1$ se les denomina clases periódicas y a aquellas en las que $k = 1$ son llamadas clases aperiódicas.

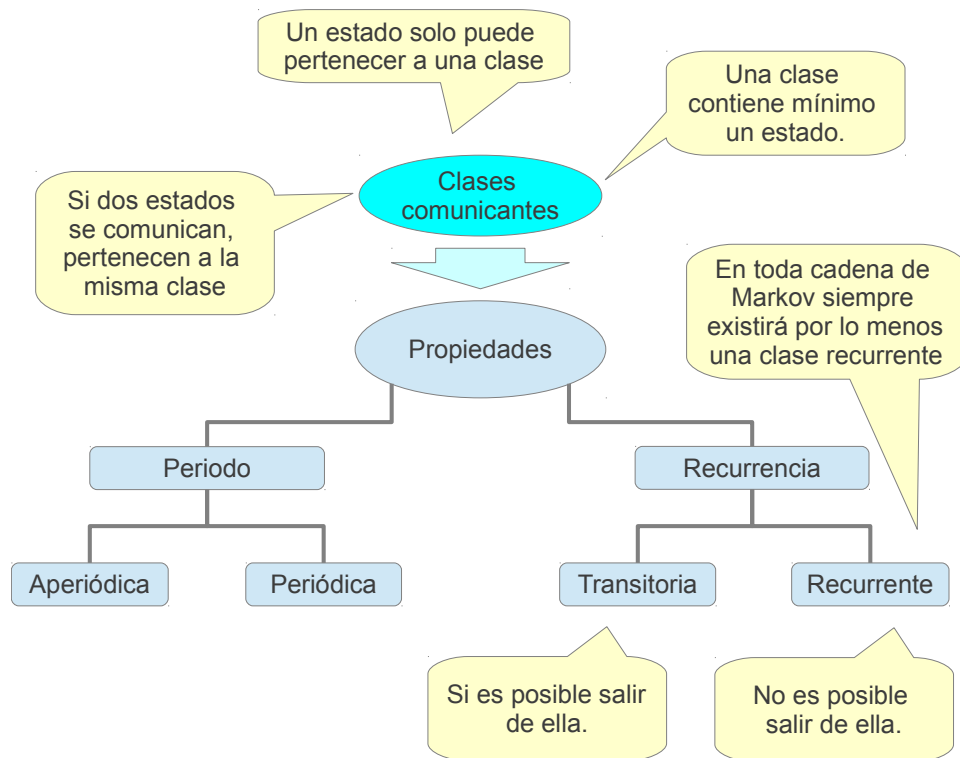
Figura 51: Clases comunicantes.



Fuente: Autor.

Todos los estados de una misma clase son transitorios o recurrentes y poseen el mismo periodo. Esto quiere decir que la recurrencia y la periodicidad son propiedades de clase. En la Figura 51 se resumen las clases de estados.

Figura 52: Clases comunicantes.



Fuente: Autor.

13 CADENAS DE MARKOV ERGÓDICAS

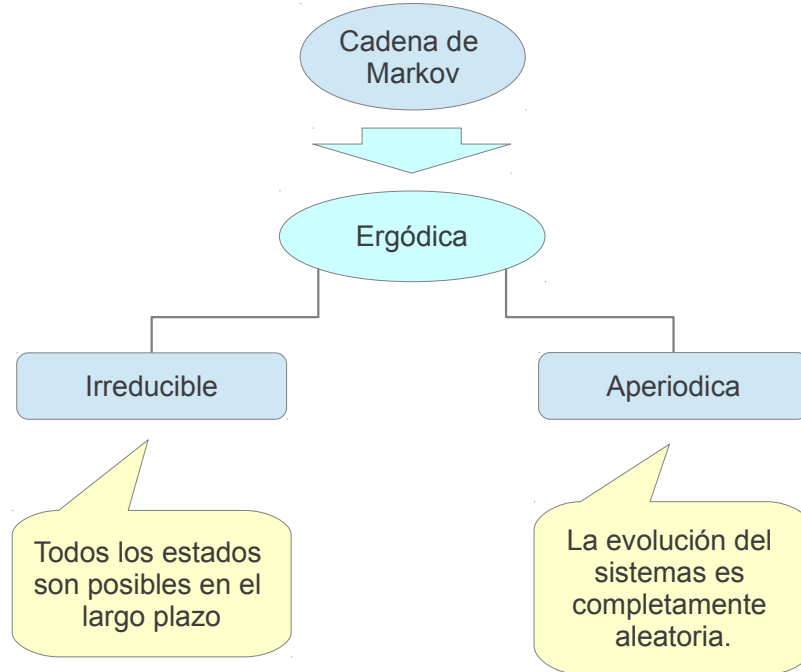
El estudio de las cadenas de Markov ergódicas regulares, llamadas simplemente cadenas de Markov ergódicas, es de interés dadas sus propiedades a largo plazo. Una cadena es ergódica si es irreducible y aperiódica, o como las define Winston, “si los estados de una cadena son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre sí, se dice que la cadena es ergódica”¹.

Este tipo de cadenas por ser irreducibles, en el largo plazo, todos sus estados

¹ [Winston2005], p. 933.

pueden darse, es decir, "todos ellos tienen una probabilidad no nula de aparecer. El comportamiento cualitativo de la cadena no varía a lo largo del tiempo."¹

Figura 53: Cadena de Markov ergódica.



Fuente: Autor.

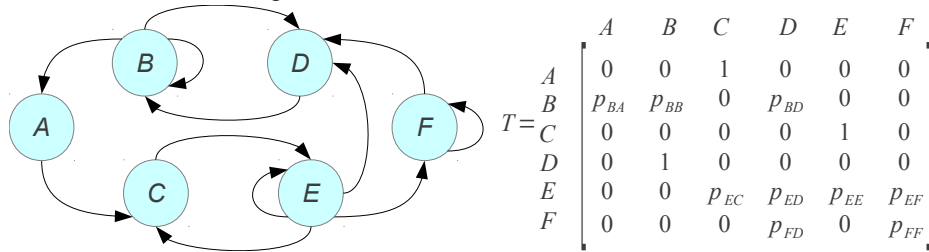
“Una clase final ...aperiódica... representa una situación en la que la cadena evoluciona entre los distintos estados de la misma forma completamente aleatoria, descrita según las probabilidades indicadas por la ley condicional (o matriz T).

Se trata de un sistema estocástico “puro”, en el sentido que no se puede hacer una descripción de su comportamiento más precisa que las meras probabilidades. La ley estable del sistema representa la probabilidad real de que en una transición cualquiera el sistema se halle en uno u otro estado.”²

¹ [Toro2005], p. 26.

² [Toro2005], p. 30-31.

Figura 54: Cadena de Markov ergódica.

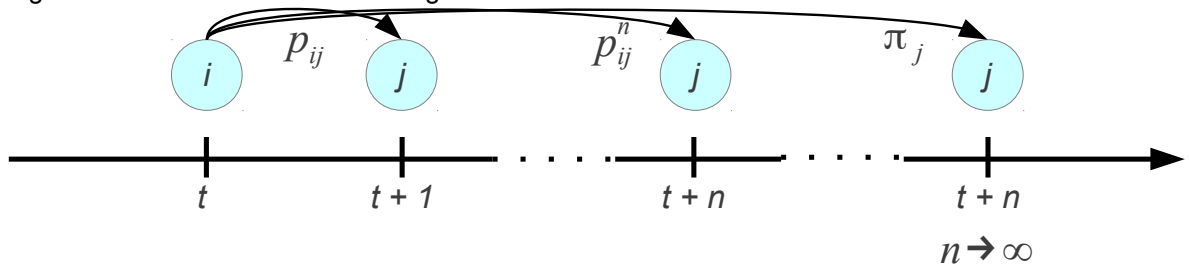


Fuente: Autor.

14 PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE

En las cadenas ergódicas regulares, a medida que el sistema evoluciona en el tiempo (T, T^2, T^3, \dots, T^n), los valores de las probabilidades de estado p_{ij} van convergiendo a unos determinados valores π_j (probabilidades de estado estable o estacionarias), y cada una de las filas de la matriz terminan siendo idénticas entre sí.

Figura 55: Evolución de cadenas ergódicas



Fuente: Autor.

$$T^* = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{bmatrix}$$

Lo anterior indica que al transcurrir un número grande de transiciones, las probabilidades p_{ij} de que el sistema se encuentre en un determinado estado j , no depende de las condiciones iniciales del sistema, (no interesa desde que estado se inicia), e igualmente son independientes de t

Para que existan las probabilidades de estado estable, la cadena de Markov debe ser irreducible y aperiódica, es decir, que en el largo plazo todos sus estados sean posibles y que su evolución sea completamente al azar.

Las probabilidades de estado estable cumplen con dos propiedades:

$$0 < \pi_j < 1, \text{ y } \sum_{j=1}^m \pi_j = 1$$

Para realizar el cálculo de las probabilidades de estado estable, se hace uso de las ecuaciones lineales que surgen de:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^m \pi_i p_{ij} \quad \text{para } j=1, 2, \dots, m$$

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \dots + \pi_m p_{m1}$$

$$\pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \dots + \pi_m p_{m2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\pi_m = \pi_1 p_{1m} + \pi_2 p_{2m} + \dots + \pi_m p_{mm}$$

puede omitirse una de las anteriores ecuaciones y adicionalmente se usa la siguiente ecuación (“propia de toda matriz estocástica”¹) a fin de poder da solución al sistema de ecuaciones lineales resultante.

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1, \quad \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1$$

La solución de este sistema de ecuaciones resultante de m ecuaciones por m incógnitas, puede hacerse mediante sustitución, reducción Gaus-Jordan, simplex, o realizando $X = \frac{1}{A} \times B$, es decir el producto cruz de la inversa de la matriz de los coeficientes por el vector de términos independientes.

Otra forma de realizar su cálculo, es mediante la matriz de transición de un paso T , multiplicándola consecutivamente hasta llegar a la forma T^* , donde cada fila corresponde al vector de probabilidades de estado estable $\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_m]$.

¹ [Fonollosa2005], p. 66.

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}, T^2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 & \dots & p_{1m}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & \dots & p_{2m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}^2 & p_{m2}^2 & \dots & p_{mm}^2 \end{bmatrix} \dots T^* = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{bmatrix}$$

Cuando se tienen cadenas periódicas, el sistema no llega a estabilizarse, en el caso de una cadena de dos estados con periodo 2, el sistema alternará periódicamente en dos conjuntos diferentes de probabilidades, para transiciones pares se tendrán unos valores y para impares otro diferente.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad T^{impar} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad T^{par} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

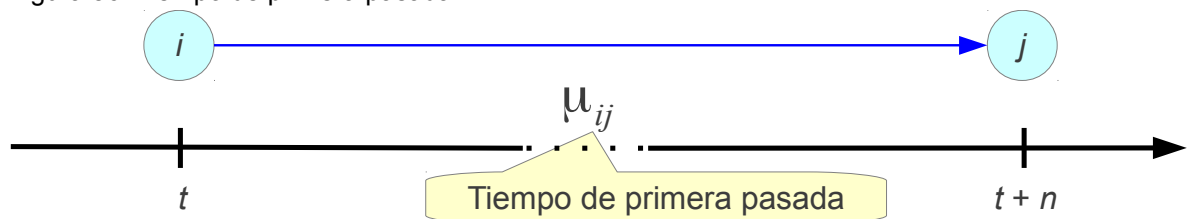
Dependiendo del periodo, se tendrán tantos conjuntos de probabilidades en los que el sistema estará alternando consecutivamente.

15 TIEMPOS

15.1 TIEMPO DE PRIMERA PASADA

El tiempo de primera pasada se define como, el número de transiciones que le toma al sistema para ir del estado i al estado j (con $j \neq i$) por primera vez.

Figura 56: Tiempo de primera pasada.



Fuente: Autor.

Para realizar el cálculo del tiempo de primera pasada, se hace uso de la ecuación

$$u_{ij} = 1 + \sum_{k=1}^m p_{ik} u_{kj}, \quad k \neq j \text{ para toda } i \neq j, \text{ desarrollándola se tiene}$$

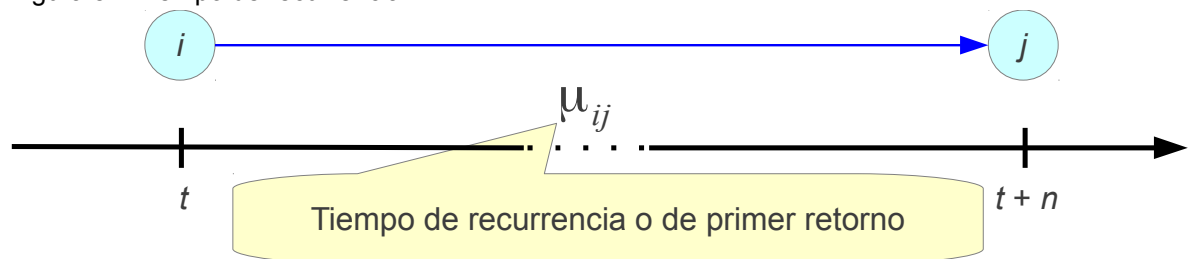
$$\begin{aligned} \mu_{1j} &= 1 + p_{11}\mu_{1j} + p_{12}\mu_{2j} + \dots + p_{1m}\mu_{mj} \\ \mu_{2j} &= 1 + p_{21}\mu_{1j} + p_{22}\mu_{2j} + \dots + p_{2m}\mu_{mj} \\ &\dots \\ \mu_{mj} &= 1 + p_{m1}\mu_{1j} + p_{m2}\mu_{2j} + \dots + p_{mm}\mu_{mj} \end{aligned}$$

luego de resolver el anterior sistema de ecuaciones lineales, se obtienen simultáneamente los tiempos de primera pasada desde cada estado $i \neq j$ al estado j .

15.2 TIEMPO DE RECURRENCIA O DE PRIMER RETORNO

En el caso en el que $j=i$, a μ_{ii} se le llama tiempo de recurrencia o de primer retorno, este es el número de transiciones que le toma al sistema para regresar a su estado inicial i .

Figura 57: Tiempo de recurrencia.



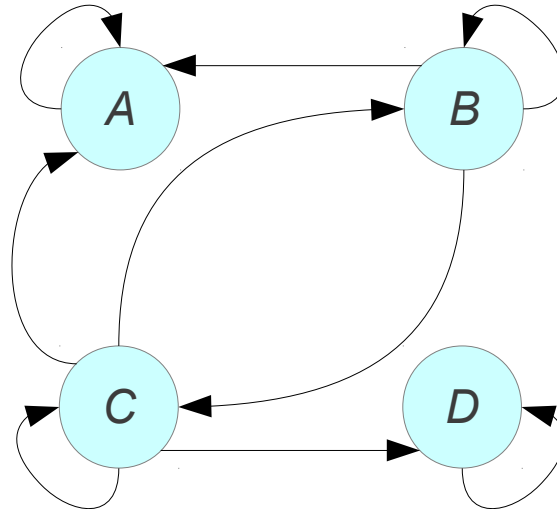
Fuente: Autor.

Su cálculo se realiza una vez se obtengan las probabilidades de estado estable, mediante $\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$.

16 CADENAS ABSORBENTES

Una cadena de Markov será una cadena absorbente, si tiene por lo menos un estado absorbente. La probabilidad de llegar al estado absorbente dado que se inició en otro estado diferente, se le denomina probabilidad de absorción.

Figura 58: Cadena absorbente.



Fuente:

El cálculo de las probabilidades de absorción puede realizarse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$f_{ik} = 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} f_{jk}$$

$$f_{kk} = 1$$

$$f_{ik} = 0 \text{ si } i \text{ es recurrente } i \neq k$$

Cuando tenemos por lo menos un estado absorbente, la matriz de transición puede ser reescrita para ajustarse a la siguiente forma

$$T = \begin{bmatrix} H & G \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Donde H y G serán dos matrices de tal forma que la matriz H será una matriz que irá de estados transitorios a estados transitorios, y la matriz G irá de estados transitorios a estados absorbentes.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C & A & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ A \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

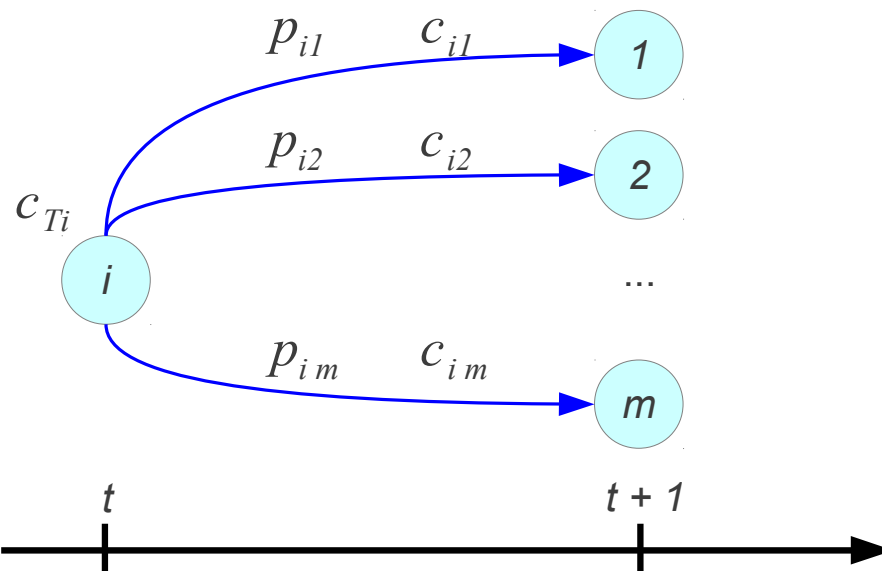
$$H = \begin{matrix} & B & C \\ B & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad G = \begin{matrix} & A & D \\ B & \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para hallar las probabilidades de absorción, se realiza mediante el cálculo de $F = (I - H)^{-1} \times G$.

17 CADENAS DE MARKOV CON REMUNERACIÓN

Se dice que se tiene una cadena de Markov con remuneración, cuando para cada elemento $p_{ij} > 0$ de la matriz de transición T , se tiene asociado un valor c_{ij} que corresponde a los valores (pueden ser ingresos, egresos, costos, utilidades) en las que se incurre al ir del estado i al estado j en una transición.

Figura 59: Costos asociados a cada transición



Fuente: Autor.

En adelante, el término costo hará referencia al valor genérico asociado a un estado, sin implicar necesariamente un egreso, gasto, pudiendo referirse también a una renta o ingreso. La naturaleza de este valor estará determinada por el objetivo que se tenga, sea maximizar o minimizar el valor esperado del costo total.

Estos valores c_{ij} permiten construir una matriz C denominada matriz de costos o rendimientos, donde cada elemento $p_{ij} = 0$ en la matriz de transición, le

corresponderá un elemento $c_{ij}=0$ en la matriz de costos.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Es posible obtener un vector de costos totales $C_T = [c_{T1} \ c_{T2} \ \dots \ c_{Tm}]$ donde cada elemento c_{Ti} será el costo total asociado a un determinado estado i , el cálculo de cada elemento c_{Ti} se realiza mediante:

$$c_{Ti} = \sum_{j=1}^m c_{ij} p_{ij}$$

El valor esperado del costo total (en el largo plazo) por unidad de tiempo está determinado por la expresión:

$$E(C_T) = \sum_{j=1}^m c_{Tj} \pi_j$$

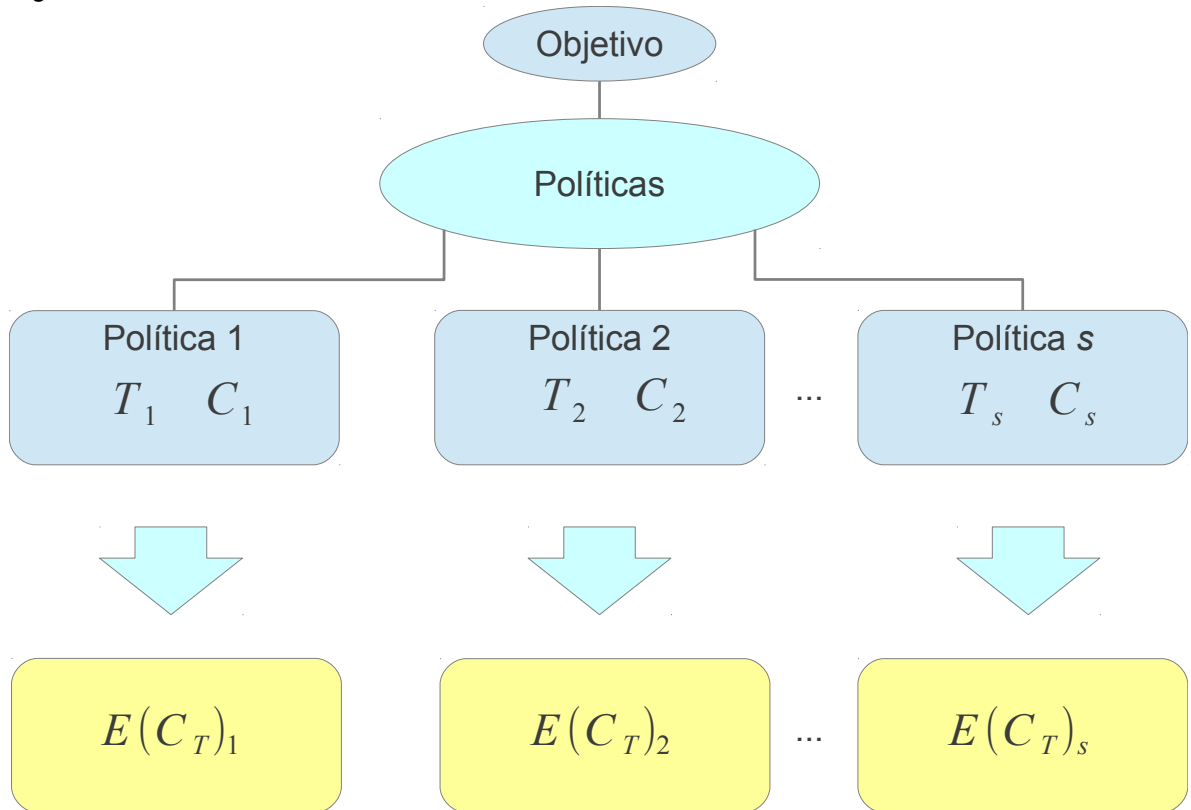
18 PROCESOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS.

La construcción de la matriz de transición y la matriz de costos, se realiza de acuerdo a la política que este determinada en el sistema, la cual no necesariamente es la política óptima, pueden surgir políticas alternativas y la tarea ahora consiste en escoger la mejor de ellas, definiendo un objetivo, maximizar o minimizar el valor esperado del costo total.

Cuando se formula una nueva política, esta puede variar las probabilidades p_{ij} al interior de la matriz de transición, o puede crear y/o eliminar estados de la matriz de transición original y por consiguiente variar los respectivos costos c_{ij} asociados a cada p_{ij} , es decir, para cada política que se formule para el sistema en observación, tiene asociada su propia matriz de transición y su respectiva matriz de costos, de tal forma que si se tienen s políticas, se tendrán s matrices de

transición y s matrices de costos.

Figura 60: Proceso de decisión markoviano



Fuente: Autor.

Mediante la matriz de transición y la matriz de costos de cada política, se puede determinar el valor esperado del costo total de la misma, a fin de poder comparar y elegir el mejor de ellos.

Los pasos de un proceso de decisión markoviano una vez se a definido un objetivo (maximizar, minimizar), se pueden resumir como:

- Determinar las matrices de transición y de costos para cada política definida.
- Calcular las probabilidades de estado estable para cada política.
- Calcular el valor esperado del costo total de cada política.
- Elegir la política que optimiza el valor esperado.

BIBLIOGRAFÍA

[Estocástico] Real Academia Española. estocástico, ca.. [en línea]. España: Real Academia Española, , [citado en]. Disponible en: http://buscon.rae.es/drae/?type=3&val=estocástico&val_aux=&origen=REDRAE.

[Fonollosa2005] FONOLLOSA, Joan B.; SALLÁN, José M. y SUÑÉ, Albert. Métodos cuantitativos de organización industrial II. ed. España : Edicions UPC, 2005. 144 p. ISBN 8483017946.

[Hillier2001] HILLIER, Frederick S y LIEBERMAN, Gerald J. Investigación de Operaciones. 7 ed. México : McGraw-Hill, 2001. 1223 p. ISBN 970-10-3486-4.

[Taha2004] TAHA, Hamdy A. Investigación de Operaciones. 7 ed. México : Pearson Education, 2004. 848 p. ISBN 970-26-0498-2.

[Toro2005] TORO DÍAZ, Héctor Hernán. MODELACIÓN ESTOCÁSTICA, Cadenas de Markov. [en línea]. Colombia: Universidad del Valle, 2005-04, modificado en 2005-10-21 [citado en]. Disponible en: <http://pino.univalle.edu.co/~gconde/documentos/PresentaciónCadenasMarkov.pdf>.

[WikiPrEstoc] Wikipedia, la enciclopedia libre. Proceso Estocástico. [en línea]. s.l.: Fundación Wikimedia, 2004-11-07, modificado en 2011-12-14 [citado en]. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Proceso_estocástico.

[Winston2005] WINSTON, Wayne L. Investigación de Operaciones. 4 ed. México : International Thomson Editores, 2005. 1418 p. ISBN 970-696-362-1.



Bibus

ANEXO I. BANCO DE PREGUNTAS ELABORADO

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 1

1. ¿Qué es un proceso estocástico?
 - a. **Es la representación matemática de la evolución del estado de un sistema.**
 - b. Es la representación geométrica de la evolución del estado de un sistema.
 - c. Es la representación matemática de un proceso de Markov.
 - d. Es un proceso determinístico cuyo espacio de estados es discreto.
 - e. Es la representación exponencial de la evolución del estado de un sistema.
2. ¿Cómo se le denomina a un proceso que evoluciona al azar?
 - a. Proceso escolástico.
 - b. Proceso determinístico.
 - c. Proceso continuo.
 - d. Proceso markoviano.
 - e. **Proceso estocástico.**
3. ¿Qué es un proceso de Markov?
 - a. **Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov.**
 - b. Es un proceso determinístico que cumple con la propiedad de Markov.
 - c. Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov, y su espacio de estados es discreto.
 - d. Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov, y su espacio de estados es continuo.
 - e. Es una cadena de Markov con espacio de estados discreto.
4. ¿Qué es una cadena de Markov?
 - a. Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov.
 - b. Es un proceso determinístico que cumple con la propiedad de Markov.
 - c. **Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov, y su espacio de estados es discreto.**
 - d. Es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov, y su espacio de estados es continuo.
 - e. Es un proceso de Markov con espacio de estados continuo.
5. ¿Cuál es la diferencia entre proceso de Markov y cadena de Markov?
 - a. El proceso de Markov se estudia en tiempo continuo y la cadena de Markov en tiempo discreto
 - b. El proceso de Markov cumple con la propiedad markoviana cuando su espacio de estados es continuo, y la cadena de Markov cuando es discreto.
 - c. **El proceso de Markov tiene un espacio de estados finito.**
 - d. La cadena de Markov tiene un espacio de estados finito.
 - e. La cadena tiene un espacio de estados continuo.
6. ¿Cuál es la propiedad markoviana?
 - a. El estado futuro del sistema depende únicamente de su estado inmediatamente posterior.
 - b. Los estados son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.
 - c. El estado futuro del sistema depende de todos sus estados anteriores.
 - d. **El estado futuro del sistema depende únicamente de su estado inmediatamente anterior.**
 - e. Ninguna de las anteriores.
7. ¿Qué es
$$P(X_{t+1}=j|X_0=k_0, X_1=k_1, \dots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t=i) ?$$
$$=P(X_{t+1}=j|X_t=i)$$
 - a. La ecuación de Kolmogorov
 - b. **La propiedad markoviana.**
 - c. La condición para que un proceso sea estocástico.
 - d. Una propiedad de la matriz de transición.
 - e. Una propiedad que solo cumplen las cadenas de Markov.
8. ¿Qué define un estado?
 - a. Las características del medio.
 - b. La característica de interés y el momento angular.
 - c. Las condiciones del tiempo de observación
 - d. **La característica de interés y el momento de observación.**

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 1

- e. Ninguna de las anteriores.
9. ¿Por qué es importante definir el tiempo de observación de la variable?
- Es indiferente el momento de observación.
 - Dependiendo del momento de observación puede tomar un valor u otro distinto.**
 - Definir el momento de observación hace que el proceso sea estocástico.
 - Si el momento de observación esta definido la cadena es homogénea.
 - Para que cumpla la propiedad markoviana.
10. ¿Qué características tiene el espacio de estados?
- Solo cuando es discreto sus estados son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.
 - Siempre es continuo.
 - Sus estados son mutuamente incluyentes y colectivamente exhaustivos.
 - Siempre que sus estados son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, es continuo.
 - Sus estados son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.**
11. ¿Qué significa que los estados sean mutuamente excluyentes?
- Que solo se puede dar uno a la vez.**
 - Que no existen más estados.
 - Que todos los estados son posibles.
 - Que no se puede dar uno a la vez.
 - Que son incontables.
12. ¿Qué significa que el espacio de estados sea colectivamente exhaustivo?
- Que el espacio de estados es discreto.
 - Que pertenecen a un proceso estocástico.
 - Que no existen más estados fuera del espacio de estados.**
 - Que el espacio de estados es continuo.
 - Que existen más estados fuera del espacio de estados.
13. ¿Qué diferencia una cadena de Markov homogénea de una no homogénea?
- Las probabilidades de transición de una cadena homogénea son independientes de t.**
 - La cadena homogénea tiene todos sus estados iguales.
 - La cadena no homogénea no cumple la propiedad markoviana.
 - La cadena no homogénea cumple la propiedad markoviana.
 - Las probabilidades de transición de una cadena no homogénea son independientes de t.
14. ¿Qué es una transición?
- Pasar de $p_{ij}=0$ a $p_{ij}>0$.
 - Pasar del estado i al estado j.
 - Pasar de t-1 a t+1
 - Pasar de $p_{ij}=0$ a $p_{ij}=1$.
 - Pasar de t a t+1.**
15. ¿Qué es $P(X_{t+1}=j|X_t=i)$?
- probabilidad de transacción.
 - probabilidad incondicional.
 - probabilidad absoluta.
 - probabilidad de transición.
 - probabilidad condicional.**
16. ¿Qué es p_{ij} ?
- probabilidad de transacción.
 - probabilidad incondicional.
 - probabilidad absoluta.
 - probabilidad de transición.**
 - probabilidad estocástica.
17. ¿Cuáles son las propiedades de las probabilidades de transición?
- $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.
 - $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$.

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 1

c. $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

d. $0 < p_{ij} < 1$, $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$.

e. $0 < p_{ij} < 1$, $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

18. Una propiedad de las probabilidades de transición es:

a. $0 < p_{ij} \leq 1$.

b. $0 < p_{ij} < 1$.

c. $0 < p_{ij} < -1$.

d. $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

e. $0 \leq p_{ij} \leq -1$.

19. Una propiedad de las probabilidades de transición es:

a. $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

b. $\sum_{j=1}^m p_{ij} = -1$.

c. $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

d. $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 0$.

e. $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$.

20. Las probabilidades de transición son:

a. positivas.

b. no negativas.

c. negativas.

d. no positivas.

e. imaginarias.

21. ¿Cuáles son las formas de representar una cadena de Markov?

a. Diagrama de transición y matriz de transacción.

b. Diagrama de transición y matriz de transición.

c. Diagrama de transacción y matriz de transacción.

d. Diagrama de transacción y matriz de transición.

e. Ninguna de las anteriores.

22. ¿Cómo se representan los estados de una cadena de Markov en un diagrama de transición?

a. Mediante una matriz de transición.

b. Mediante puntos desde donde parten o llegan las aristas.

c. No se representan.

d. Mediante una arista de i a j .

e. Ninguna de las anteriores.

23. En un diagrama de transición, ¿cuántas aristas deben salir de un estado?

a. Por lo menos una.

b. Por lo menos una hacia cada estado.

c. Ninguna, todas llegan a él.

d. La misma cantidad de aristas que llegan a él.

e. Ninguna de las anteriores.

24. ¿Cómo se representan las $p_{ij} > 0$ de una

cadena de Markov en un diagrama de transición?

a. No se representa.

b. Mediante una arista de i a j .

c. Mediante una arista de i a i .

d. No existe.

e. Mediante una arista de j a i .

25. ¿Cómo se representan las $p_{ij} = 0$ de una

cadena de Markov en un diagrama de transición?

a. No se representa.

b. Mediante una flecha de i a j .

c. Mediante una flecha de i a i .

d. No existe.

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 1

- e. Mediante una flecha de j a i.
26. ¿Cómo se representan las $p_{ij} < 0$ de una cadena de Markov en un diagrama de transición?
- No se representa.
 - Mediante una flecha de i a j.
 - Mediante una flecha de i a i.
 - No existe.**
 - Mediante una flecha de j a i.
27. ¿Cómo se representan las $p_{ii} > 0$ de una cadena de Markov en un diagrama de transición?
- No se representa.
 - Mediante una flecha de i a j.
 - Mediante una flecha de i a i.**
 - No existe.
 - Mediante una flecha de j a i.
28. ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz de transición?
- $m \times 1$
 - $1 \times m$
 - $n \times m$
 - $m \times n$
 - $n \times n$**
29. ¿En qué orden deben estar los encabezados de las filas y las columnas?
- Ordenados alfabéticamente.
 - Completamente al azar.
 - Ordenados de mayor a menor.
 - No importa el orden siempre y cuando coincidan el de filas y columnas.**
 - Ordenados de menor a mayor.
30. Si los encabezados de las filas representan el instante $t-1$, ¿que instante representarán los encabezados de las columnas?
- t .
 - $t-1$.
 - $t+1$.
 - $t-2$.
 - $t+2$.
31. Si los encabezados de las columnas representan el instante $t-1$, ¿que instante representarán los encabezados de las filas?
- t .
 - $t-1$.
 - $t+1$.
 - $t-2$.
 - $t+2$.
32. ¿Qué es una matriz estocástica?
- Es una matriz cuadrada en la que la suma de los elementos de cada columna es igual a 1.
 - Es una matriz en la que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.
 - Es una matriz en la que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1, y sus elementos son no negativos.
 - Es una matriz cuyos elementos son 0 o 1.
 - Es una matriz cuadrada en la que sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.**

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 2

1. La probabilidad de transición de n pasos es:
 - a. La probabilidad de que llegue al estado j en el instante t+n dado que estaba en el estado i en el instante t.
 - b. La probabilidad de que estando en el estado i, haya partido del estado j, n transiciones atrás.
 - c. La probabilidad de que llegue al estado j en el instante t dado que estaba en el estado i en el instante t-n.
 - d. Todas las anteriores.**
 - e. Ninguna de las anteriores.

2. Las probabilidades de transición de n pasos pueden ser calculadas:
 - a. Utilizando la propiedad markoviana.
 - b. Multiplicando n veces la matriz de transición.
 - c. Mediante las ecuaciones de Chapman - Kolmogorov..
 - d. a y b.
 - e. b y c.**

3. ¿Qué es $P(X_{t+n}=j|X_t=i)$?
 - a. probabilidad de transacción de n pasos.
 - b. probabilidad condicional de un paso.
 - c. probabilidad absoluta.
 - d. probabilidad de transición.
 - e. probabilidad condicional de n pasos.**

4. ¿Qué es p_{ij}^n ?
 - a. probabilidad de transición de un paso.
 - b. probabilidad incondicional de n pasos.
 - c. probabilidad absoluta.
 - d. probabilidad de transición de n pasos.**
 - e. probabilidad estocástica de un paso.

5. ¿Cuáles son las propiedades de las probabilidades de transición de n pasos?
 - a. $0 \leq p_{ij}^n \leq 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^n = 1$.
 - b. $0 \leq p_{ij}^n \leq 1$, $\sum_{i=1}^m p_{ij}^n = 1$.
 - c. $0 \leq p_{ij}^n \leq 1$, $\sum_{j=1}^m p_{ij}^n = 1$.
 - d. $0 < p_{ij}^n < 1$, $\sum_{i=1}^m p_{ij}^n = 1$.
 - e. $0 < p_{ij}^n < 1$, $\sum_{j=1}^m p_{ij}^n = 1$.

6. Una propiedad de las probabilidades de transición de n pasos es:
 - a. $0 < p_{ij}^n \leq 1$.
 - b. $0 < p_{ij}^n < 1$.
 - c. $0 < p_{ij}^n < -1$.
 - d. $0 \leq p_{ij}^n \leq 1$.**
 - e. $0 \leq p_{ij}^n \leq -1$.

7. Una propiedad de las probabilidades de transición de n pasos es:
 - a. $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^n = 1$.
 - b. $\sum_{j=1}^m p_{ij}^n = -1$.
 - c. $\sum_{j=1}^m p_{ij}^n = 1$.**
 - d. $\sum_{j=1}^m p_{ij}^n = 0$.
 - e. $\sum_{i=1}^m p_{ij}^n = 1$.

8. Las probabilidades de transición de n pasos son:
 - a. positivas.
 - b. no negativas.**
 - c. negativas.
 - d. no positivas.
 - e. imaginarias.

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 2

9. Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se utilizan para:
- Calcular la propiedad markoviana.
 - Calcular las probabilidades de transición de n pasos.**
 - Para determinar si una matriz es estocástica.
 - Calcular las probabilidades de transición.
 - Ninguna de las anteriores.
10. En una cadena de Markov de orden 2, el estado actual depende de:
- Los dos estados inmediatamente anteriores.**
 - Todos los estados anteriores
 - Los dos estados inmediatamente posteriores.
 - Ningún estado anterior.
 - Todos los estados posteriores.
11. Transformando una cadena de Markov de orden 3 con 4 estados en una de primer orden, ¿cuántos estados tendrá?
- 12
 - 16
 - 64**
 - 24
 - 8

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 3

- Los estados i, j son comunicantes si:
 - Se puede pasar en n transiciones de i a j , y en n' transiciones de i a j .
 - Se puede pasar en n transiciones de j a i pero no de i a j .
 - Se puede pasar en n transiciones de i a i , y en n' transiciones de j a j .
 - Se puede pasar en n transiciones de i a j , y en n' transiciones de j a i .**
 - Se puede pasar en n transiciones de i a j pero no de j a j .
- El estado i es accesible desde el estado j si:
 - Se puede pasar en n transiciones de i a i
 - Se puede pasar en n transiciones de j a j
 - Se puede pasar en n transiciones de i a j
 - Se puede pasar en n transiciones de j a i**
 - No se puede pasar en n transiciones de i a j
- Si desde el estado j es posible ir al estado i , se dice que:
 - j es accesible desde i
 - i es accesible desde j**
 - Son comunicantes
 - Todas las anteriores
 - Ninguna de las anteriores
- Desde un estado absorbente:
 - Puede irse a cualquier otro estado.
 - Puede irse solo a algunos estados.
 - No se puede ir a ningún estado.**
 - Puede irse a uno solo de los demas estados
 - Es el único estado que existe.
- Un estado absorbente es:
 - Periódico.
 - Recurrente.**
 - Transitorio.
 - Ninguna de las anteriores.
 - Todas las anteriores
- Un estado es aperiódico cuando:
 - $k=0$
 - $k>1$
 - $k<1$
 - $k<0$
 - $k=1$**
- Un estado transitorio:
 - Nunca se presenta.
 - Es posible que nunca se presente.**
 - Siempre se presenta.
 - Es el único que se presenta.
 - Ninguna de las anteriores.
- Un estado recurrente:
 - Nunca se presenta.
 - Es posible que nunca se presente.
 - Siempre es posible que se presente.**
 - Es el único que se presenta.
 - Ninguna de las anteriores.
- Un estado i es absorbente cuando:
 - $p_{ii} < 1$
 - $p_{ii} > 1$
 - $p_{ji} = 1$
 - $p_{ij} = 1$
 - $p_{ii} = 1$
- Una clase comunicante es recurrente si:
 - Solo a veces se sale de ella.
 - Es posible salir de ella.
 - No es posible salir de ella.**
 - Todas las anteriores.
 - Ninguna de las anteriores
- Una clase comunicante es transitoria si:
 - Solo a veces se sale de ella.
 - Es posible salir de ella.**
 - No es posible salir de ella.
 - Todas las anteriores.
 - Ninguna de las anteriores
- Los estados i, j pertenecen a la misma clase comunicante si:
 - i es accesible desde j
 - j es accesible desde i
 - No son comunicantes
 - i es accesible desde i
 - Son comunicantes**

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 3

13. Si el estado i es transitorio y el estado j es recurrente:
- Pertenece a la misma clase comunicante.
 - Pertenece a clases comunicantes diferentes.**
 - Todas las anteriores.
 - Ninguna de las anteriores.
14. Los estados que pertenecen a la misma clase comunicante:
- Tienen el mismo periodo y diferente recurrencia.
 - Tienen diferente periodo y la misma recurrencia
 - Tienen el mismo periodo y la misma recurrencia**
 - Todas las anteriores.
 - Ninguna de las anteriores.
15. Una clase irreducible:
- Tiene una única clase recurrente.**
 - Tiene una única clase transitoria.
 - Tiene solo varias clases recurrentes.
 - Tiene solo varias clases transitorias
 - Tiene clases recurrentes y clases transitorias.
16. Una clase reducible
- Puede tener varias clases recurrentes y ninguna transitoria.
 - Puede tener varias clases transitorias y ninguna recurrente.
 - Puede tener varias clases transitorias y varias recurrentes**
 - Puede tener una clase recurrente y ninguna transitoria.
 - Puede tener una clase transitoria y ninguna recurrente.
17. Una cadena es ergódica si:
- Es irreducible y periódica.
 - Es reducible y periódica.
 - Es reducible y aperiódica.
 - Es irreducible y aperiódica.**
 - Todas las anteriores.

BANCO DE PREGUNTAS – TALLER 4

1. La probabilidades de estado estable son:
 - a. **Independientes de t.**
 - b. Dependientes de t.
 - c. Dependientes de t-1.
 - d. Dependientes de t+1.
 - e. Ninguna de las anteriores

2. Las probabilidades de estado estable son:
 - a. Dependientes de las condiciones iniciales.
 - b. Dependientes de las condiciones finales.
 - c. **Independientes de las condiciones iniciales.**
 - d. Todas las anteriores.
 - e. Ninguna de las anteriores.

3. Para que existan las probabilidades de estado estable, la cadena debe ser:
 - a. Periódica.
 - b. No ergódica.
 - c. **Ergódica.**
 - d. Transitoria.
 - e. Ninguna de las anteriores.

4. En una cadena periódica, las probabilidades de estado estable existen siempre y cuando
 - a. Sea irreducible.
 - b. Sea transitoria.
 - c. Sea ergódica.
 - d. Todas las anteriores.
 - e. **Ninguna de las anteriores.**

5. El tiempo de primera pasada es:
 - a. **Número estimado de transiciones que hace el proceso al ir del estado i al estado j por primera vez.**
 - b. Número estimado de transiciones que hace el proceso al ir del estado i al estado i por primera vez.
 - c. Es el tiempo que hay entre t y t+1
 - d. Todas las anteriores.
 - e. Ninguna de las anteriores.

6. El tiempo de recurrencia es:
 - a. **Número estimado de transiciones que hace el proceso para regresar al estado inicial i por primera vez.**
 - b. Número estimado de transiciones que hace el proceso al ir del estado i al estado j por primera vez.
 - c. Es el tiempo que hay entre t y t+1
 - d. Todas las anteriores.
 - e. Ninguna de las anteriores.

ANEXO J. FORMATO DE QUIZ ELABORADO

A Fecha _____ Grupo: _____
Nombre: _____

- 1.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.

Respuesta individual:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

Respuesta grupal:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

C Fecha _____ Grupo: _____
Nombre: _____

- 3.
-
-
-
-
-

Respuesta individual:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

Respuesta grupal:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

B Fecha _____ Grupo: _____
Nombre: _____

- 2.
-
-
-
-
-

Respuesta individual:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

Respuesta grupal:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

D Fecha _____ Grupo: _____
Nombre: _____

- 4.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.

Respuesta individual:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

Respuesta grupal:

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

ANEXO K. FORMATO DE TRABAJO FINAL

TRABAJO FINAL

CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO

OBJETIVO

Aplicar los conceptos de cadenas de Markov vistos en clase para modelar y analizar un proceso estocástico real.

ACTIVIDADES

Escoger una empresa que cotice en la bolsa de valores, recolectar los valores de cierre de las acciones del último año y determinar los momentos en los que sube, baja o mantiene su valor, modelarlo como una cadena de Markov de primero y segundo orden, y para cada una de ellas:

1. Construir la matriz de transición.
2. Elaborar el diagrama de transición.
3. Calcular las probabilidades de estado estable.
4. Calcular los tiempos de recurrencia y de primera pasada.
5. Construir la matriz de costos.
6. Determinar el costo total de cada estado.
7. Determina valor esperado del costo total.
8. Analizar y sacar conclusiones.

ANEXO L. GUÍA DEL DOCENTE PARA LA IMPLEMENTACIÓN

CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO

GUÍA DEL DOCENTE

1 APRENDIZAJE COLABORATIVO

Corredor et al lo definen como “una estrategia de organización de trabajo en el aula, en la cual los estudiantes reunidos en grupos no numerosos^{*}, trabajan de una manera organizada y colaborativa para resolver un problema, desarrollar un proyecto, cumplir unos objetivos o realizar una tarea, teniendo como propósito fundamental el logro de la meta que es común y la mejora en las competencias cognitivas y actitudinales de todos los participantes”¹.

En esta estrategia los estudiantes desarrollan su aprendizaje, preocupándose tanto del propio como del de sus compañeros, dado que los objetivos personales se alcanzan solo cuando los demás también logran alcanzar los suyos.

2 ROLES

2.1 ROL DEL DOCENTE

“En cada clase, cada profesor debe elegir entre ser un sabio en el estrado o un guía al lado de sus alumnos: Al tomar esta decisión, el profesor debe recordar que el reto de la docencia universitaria no es cubrir el material sino ayudar a que sus alumnos lo descubran ”². Mediante ésta estrategia, el docente se convierte en un acompañante en todo el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, orientando las actividades en grupo ofreciendo su ayuda cuando es necesaria, enseñando los conceptos y estrategias básicos, ya no solo se limita a impartir el contenido curricular y evaluarlo.

* Puede variar entre 2 y 6 estudiantes, pero más de 4 complica el logro de las metas.

¹ [Corredor2009], p. 87.

² [Bará2011], p. 54.

Entre las tareas a desarrollar por el docente se tienen:

- Definición de objetivos en las actividades, en cuanto a contenido, como de habilidades.
- Planificación de los grupos y los recursos necesarios.
- Explicación de la metodología, los componentes, principios y el sentido del aprendizaje colaborativo.
- Orientar las actividades colaborativas.
- Evaluación de los logros individuales y grupales, y de las estrategias empleadas.
- Reconocimiento de los logros.

2.2 ROL DEL ESTUDIANTE

El estudiante tiene un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje y del aprendizaje de su grupo, deja de ser aun actor pasivo, para convertirse en un elemento activo, responsable, motivado y colaborativo, dispuesto a alcanzar los objetivos personales y grupales, dando motivación, soporte a sus compañeros.

Al interior de los grupos colaborativos, los estudiantes asumen diferentes roles entre los que están: los roles de tarea (contribuidor, buscador de información, buscador de opiniones, elaborador, coordinador, evaluador, registrador, investigador, relator, etc.), roles socioemocionales (animador, armonizador, facilitador, observador del grupo, etc.) y roles individuales (agresor, bloqueador, dominador, evasor y autoconfesor, buscador de ayuda, buscador de reconocimiento) .

3 CONFORMACIÓN DE GRUPOS COLABORATIVOS

Se deben conformar grupos pequeños ya que estos facilitan la participación de sus miembros, en grupos grandes los estudiantes tienden a inhibirse de participar,

se sugiere que sean de 4 personas, elegidas al azar, bien sea por enumeración, orden en la lista, código de estudiante, u otros.

4 EVALUACIÓN

Para realizar la evaluación puede disponerse de diferentes herramientas que pueden ser combinadas, entre las que pueden usarse cuestionarios individuales y grupales, registros de observación, carpetas de aprendizaje, diarios grupales e individuales, entrevistas, debates.

A continuación se presentan algunas ideas sobre la evaluación:

- La nota de la evaluación de un estudiante, es el promedio de las notas de la evaluación de los miembros de su grupo colaborativo.
- La nota de cada estudiante se incrementará un determinado valor, de acuerdo con la nota media de su grupo.
- La nota del estudiante se incrementa un determinado valor, si y solo si todos los miembros del grupo consiguen obtener una nota por encima de una nota mínima preestablecida.
- Escoger en forma aleatoria a uno de los miembros del grupo para que realice una prueba, la nota que éste obtenga será la nota para cada miembro del grupo.
- La evaluación de cada estudiante está compuesta por tres partes: una referente al aprendizaje personal; una segunda respecto al aprendizaje de su grupo; y una tercera para valorar la participación individual al interior del grupo de trabajo.
- El estudiante evalúa la contribución realizada por cada uno de los demás miembros de su grupo.
- El grupo obtiene puntos adicionales cuando sea superada la evaluación anterior o cuando sus miembros superen su desempeño.

El modelo de evaluación que se puede emplear es:

Tabla 12. Modelo de evaluación

Actividad	Porcentaje
Talleres	20%
Quices	10%
Trabajo	20%
Examen	50%
	(80% individual 20% promedio grupal)

Fuente: Autor.

Los quices pretenden reforzar los conceptos teóricos, a la hora de realizarlos se sugiere que sea al inicio de la clase, evaluando los conceptos vistos en la clase anterior, puede elegirse al azar un representante de cada grupo colaborativo, para presentar el quiz en nombre de todo el grupo. Con este modelo se esperaba que promover la ayuda y el apoyo mutuo al interior de los grupos colaborativos, en donde los miembros que tenían claros los conceptos, entraran a soportar a aquellos que aún presentaban vacíos, y de esta forma todos los miembros alcanzar el logro de los objetivos, y/o emplear los diseñados, que constan de dos partes, en la primera cada miembro del grupo se encarga de contestar en forma individual una pregunta, y en la segunda en consenso con el equipo de trabajo contestarla en forma grupal, para la calificación se toma en cuenta la respuesta grupal, dejando la respuesta individual como una forma de que cada grupo identifique cuales miembros presentan falencias en los conceptos para así recibir el apoyo de sus compañeros.

Puede en ocasiones realizarse quices individuales pero sin emplear el formato donde van las dos respuestas (individual y grupal) a fin de que cuando este formato sea usado, los estudiantes contesten la parte individual lo mas sinceramente posible, sin la presión de una calificación.

5 MATERIAL DE CLASE

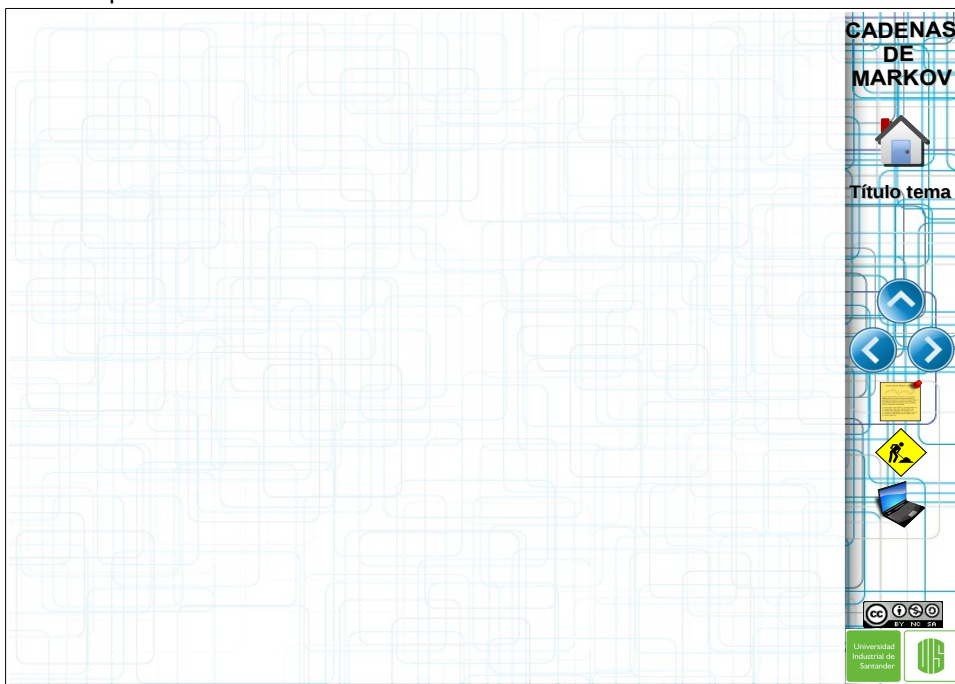
5.1 DIAPOSITIVAS Y TALLERES

Las diapositivas y los talleres se utilizan conjuntamente,

En su diseño se utilizan cuatro patrones diferentes de diapositivas, a fin de identificar visualmente la clase de contenido que tiene. Los patrones definidos fueron:

- Contenido teórico: usado para presentar el contenido teórico del tema.

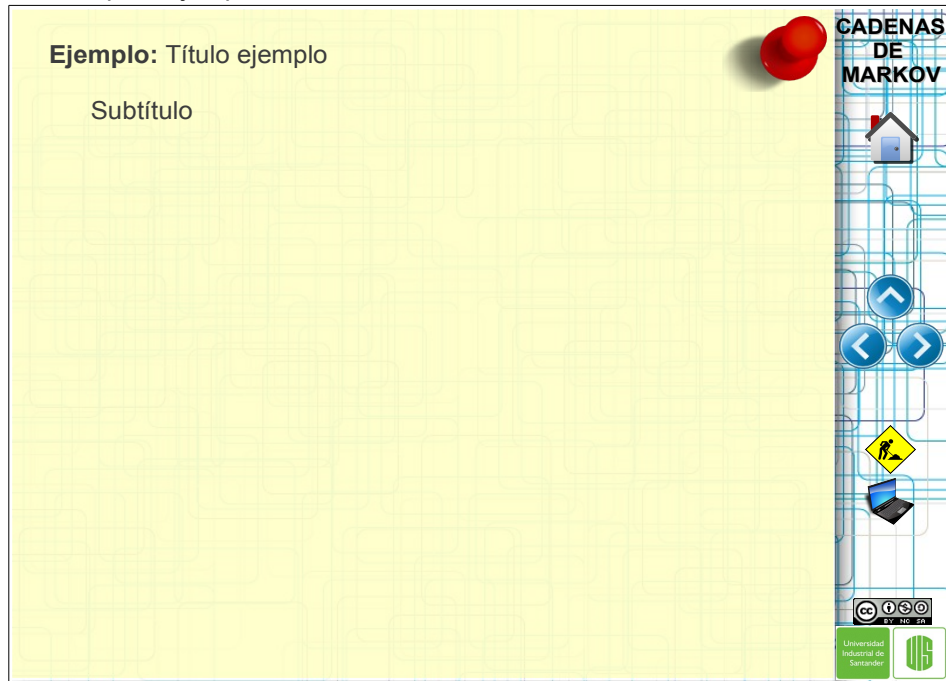
Figura 61. Patrón para contenido teórico.



Fuente: Autor.

- Ejemplo: usado para presentar un ejemplo del tema.

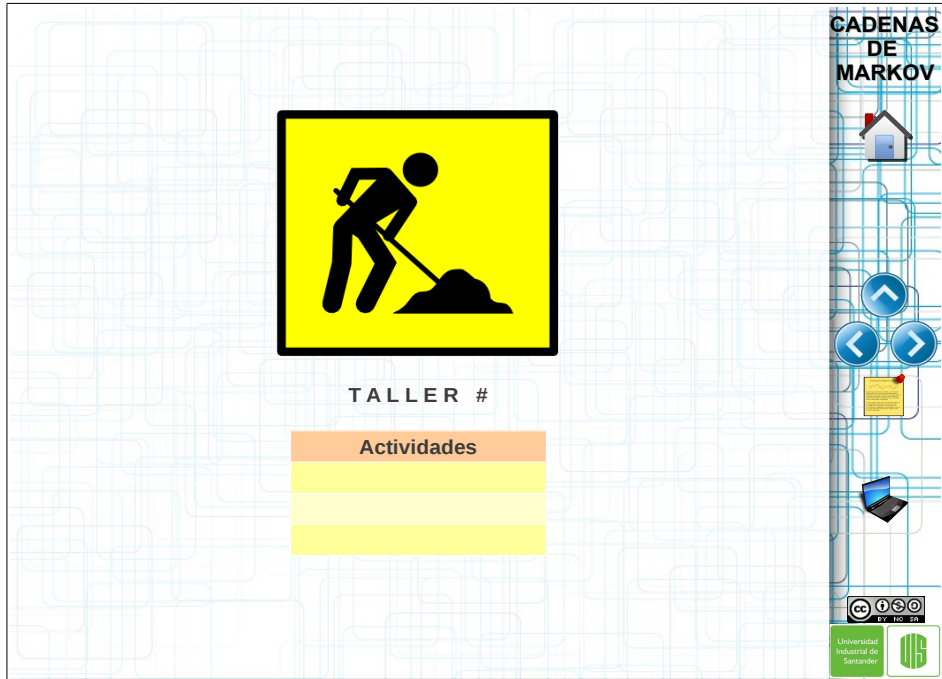
Figura 62. Patrón para ejemplos.



Fuente: Autor.

- Actividad 1: usado para hacer una interrupción en la exposición para que los estudiantes desarrollen una actividad contenida en el taller impreso.

Figura 63. Patrón para realizar actividad del taller.



Fuente: Autor.

- Actividad 2: usado para hacer una interrupción en la exposición para que los estudiantes desarrollen la actividad contenida en la diapositiva.

Figura 64. Patrón para realizar actividad.



Fuente: Autor.

- Software: usado para presentar un ejemplo de uso del computador.




Figura 65. Patrón para ejemplo de uso del computador.



Fuente: Autor.

Para facilitar la navegación entre las diapositivas, cada una de ellas presentan un panel lateral, ubicado al lado derecho, con una serie de íconos según el contexto en el que se encuentre.

Tabla 13. Íconos de navegación de las diapositivas.

Ícono	Función
	Ir al menú principal.
	Ir al inicio de la sección o tema.
	Ir a la anterior / siguiente diapositiva según el contexto en el que se encuentre.



Ir al ejemplo explicativo del tema.



Ir a la actividad del tema.

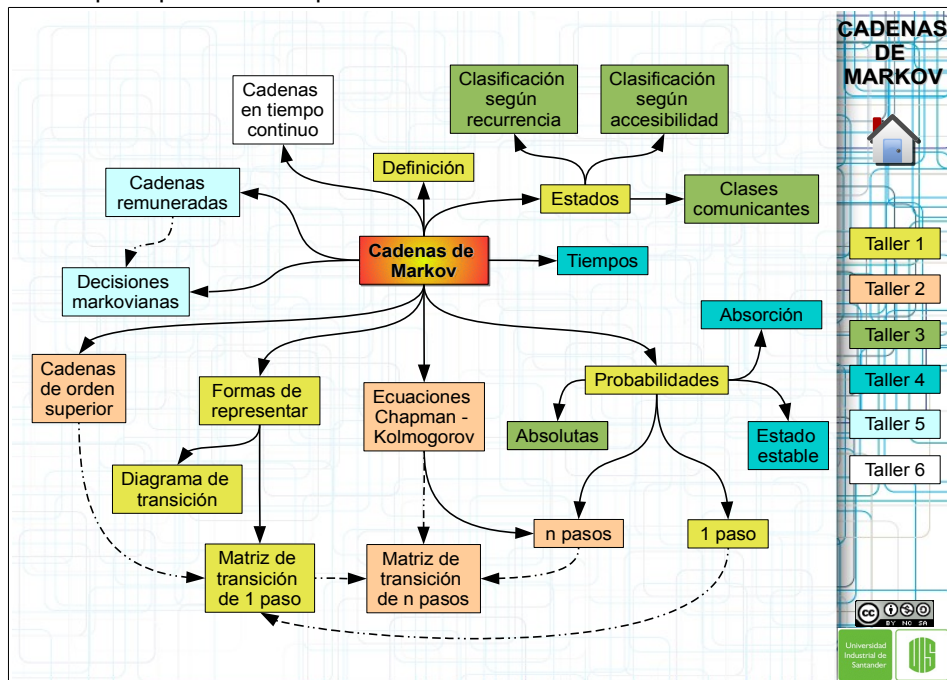


Ir al ejemplo de uso del computador.

Fuente: Autor.

Igualmente para facilitar la navegación se presenta un menú principal, el cual muestra los temas a desarrollar, y desde el cual se puede acceder a ellos, presenta en el panel lateral unas convenciones, identificando por colores los contenidos de cada sección a tratar. Las presentaciones en formato .pdf, tienen adicionalmente incluido el índice para facilitar la navegación en este formato.

Figura 66. Menú principal de las diapositivas.



Fuente: Autor.

El orden en el que se encuentran las diapositivas corresponde al orden en el que se presentaron los temas durante las clases expositivas, y añadiendo diapositivas intercaladas que tienen como objetivo hacer una pausa en la exposición del tema y dar inicio a la actividad del taller relacionada con el contenido visto.

5.2 QUICES

El banco de preguntas disponible fue diseñado inicialmente para emplearse en los quices, y está enfocado a evaluar los conceptos teóricos, aunque en ocasiones se podría llevar a cabo uno mediante el desarrollo de un ejercicio corto evaluando el uso de los conceptos teóricos aplicados.

5.3 TRABAJO FINAL

Este se diseñó empleando valores de las acciones de una empresa, y se sugiere variarlo usando otros procesos aleatorios como el clima, en donde los estudiantes puedan por medio de internet recolectar datos reales y en base a ellos desarrollar ente trabajo. Pueden acordarse entregas parciales o únicamente la entrega al final del tema.

5.4 APLICACIÓN

La aplicación se diseñó lo más completa posible, de tal forma que se puedan realizar con ella todos los cálculos que se puedan requerir en un algún momento, y empleando software que pueda llevarse y ejecutarse desde una memoria usb, a fin de que puedan contar con el en cualquier momento y lugar, no dependan se si el software X está o no instalado en determinado computador. Se puede sugerir e incentivar su uso a los estudiantes, mostrando sus ventajas, facilidad de uso.

ANEXO M. SOLUCIÓN DE LOS TALLERES

TALLER 2 N PASOS - ORDEN K

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante, estará en capacidad de:

- Calcular las probabilidades de transición de n pasos.
- Transformar cadenas de orden superior en cadenas de primer orden.
- Calcular las probabilidades absolutas.

ACTIVIDADES

1. Calcular las probabilidades de transición de tres pasos del ejemplo propuesto.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \\ 0,283 & 0,252 & 0,233 & 0,233 \\ 0,351 & 0,319 & 0,233 & 0,097 \\ 0,249 & 0,286 & 0,300 & 0,165 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0_{und} & 1_{und} & 2_{und} & 3_{und} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{und} \\ 1_{und} \\ 2_{und} \\ 3_{und} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,293 & 0,292 & 0,263 & 0,152 \\ 0,262 & 0,273 & 0,275 & 0,19 \\ 0,299 & 0,286 & 0,25 & 0,165 \\ 0,293 & 0,292 & 0,263 & 0,152 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

t	X			t	X		
1	Nublado			19	Nublado	SN	NSN
2	Nublado	NN		20	Nublado	NN	SNN
3	Soleado	NS	NNS	21	Nublado	NN	NNN
4	Soleado	SS	NSS	22	Soleado	NS	NNS
5	Nublado	SN	SSN	23	Soleado	SS	NSS
6	Nublado	NN	SNN	24	Nublado	SN	SSN
7	Nublado	NN	NNN	25	Soleado	NS	SNS
8	Soleado	NS	NNS	26	Soleado	SS	NSS
9	Soleado	SS	NSS	27	Soleado	SS	SSS
10	Soleado	SS	SSS	28	Soleado	SS	SSS
11	Nublado	SN	SSN	29	Soleado	SS	SSS
12	Soleado	NS	SNS	30	Soleado	SS	SSS
13	Nublado	SN	NSN	31	Soleado	SS	SSS
14	Soleado	NS	SNS	32	Soleado	SS	SSS
15	Soleado	SS	NSS	33	Soleado	SS	SSS
16	Soleado	SS	SSS	34	Soleado	SS	SSS
17	Nublado	SN	SSN	35	Soleado	SS	SSS
18	Soleado	NS	SNS	36	Soleado	SS	SSS

2. ¿Cuáles serían los estados de la cadena de Markov de orden tres del ejemplo propuesto ? (tabla de datos anterior)

SSS SSN SNS SNN NSS NSN NNS NNN

3. Plantear la matriz de transición de la cadena de Markov de orden dos del ejemplo propuesto. (tabla de datos anterior)

PRIMER ORDEN	ELEMENTOS			
		S	N	
	S	SS	SN	
	N	NS	NN	
	CONTEO			
		S	N	Total
	S	17	6	23
	N	7	5	12
	PROBABILIDADES			
		S	N	Matriz de transición
S	0,73913	0,26087		
N	0,58333	0,41667		

SEGUNDO ORDEN	ELEMENTOS					
		SS	SN	NS	NN	
	SS	SSS	SSN	0	0	
	SN	0	0	SNS	SNN	
	NS	NSS	NSN	0	0	
	NN	0	0	NNS	NNN	
	CONTEO					
		SS	SN	NS	NN	Total
	SS	12	4	0	0	16
	SN	0	0	4	2	6
	NS	5	2	0	0	7
	NN	0	0	3	2	5
	PROBABILIDADES					
		SS	SM	NS	NN	Matriz de transición
	SS	0,75	0,25	0	0	
	SN	0	0	0,66667	0,33333	
NS	0,71429	0,28571	0	0		
NN	0	0	0,6	0,4		

4. Si hoy esta nublado, que probabilidad hay de que en 3 días esté nublado?

$$P(3) = P(0) \times T^3, \quad P(0) = \begin{matrix} S & N \\ 0 & 1 \end{matrix} \times T^3 = \begin{matrix} S & N \\ 0,692 & 0,308 \end{matrix} = P(3) = \begin{matrix} S & N \\ 0,688 & 0,312 \end{matrix}$$

Rta.: 0,312

TALLER 3 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS Y CADENAS

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

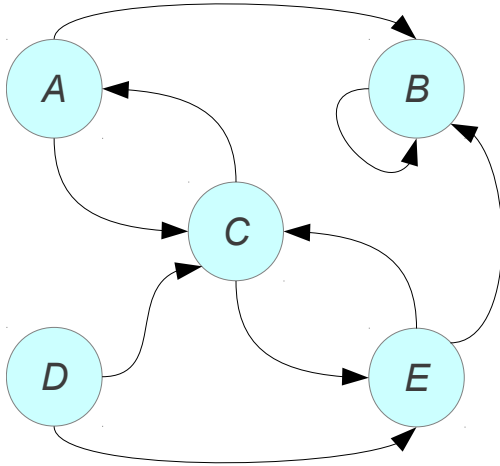
OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante se familiarizará con el concepto de cadenas de Markov, al finalizar, estará en capacidad de:

- Clasificar los estados según su accesibilidad.
- Clasificar los estados según su recurrencia.
- Identificar las clases comunicantes.
- Identificar las cadenas ergódicas.

ACTIVIDADES

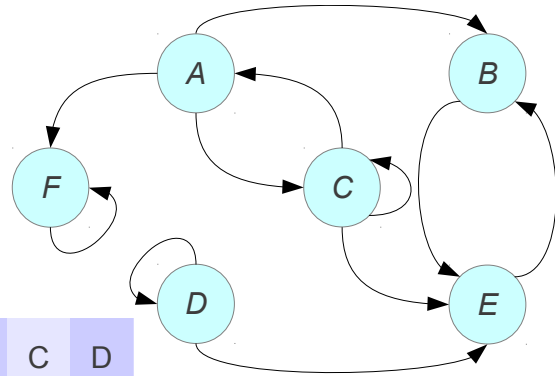
1. De la cadena propuesta, clasificar los estados según su accesibilidad y sustentar las respuestas.



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{CA} & 0 & 0 & 0 & p_{CE} \\ 0 & 0 & p_{DC} & 0 & p_{DE} \\ 0 & p_{EB} & p_{EC} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Clasificación de estados según su accesibilidad		
No accesibles	Accesibles	Comunicantes
A no accesible desde B	A → B A → C A → E	A ↔ C
C no accesible desde B	C → A C → B C → E	C ↔ E
D no accesible desde A D no accesible desde B D no accesible desde C D no accesible desde E	D → A D → B D → C D → E	A ↔ E
E no accesible desde B	E → A E → B E → C	

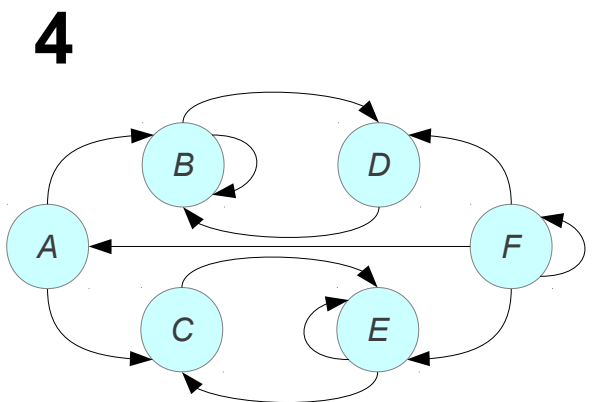
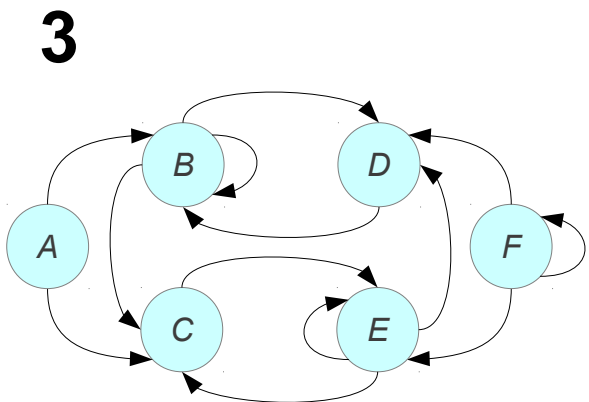
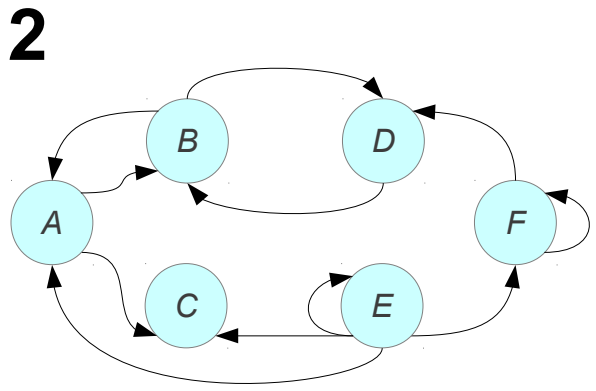
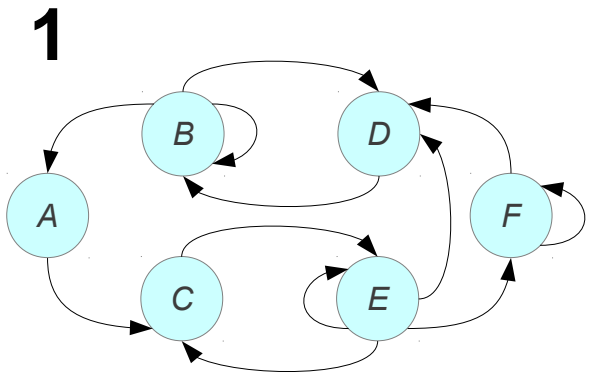
2. De la cadena propuesta, clasificar los estados según su recurrencia y sustentar las respuestas.



Transitorio (aperiódico)	Transitorios (aperiódicos)	A	C	D
Recurrente periódico	Recurrentes periódicos	B	E	
Absorben	Absorbentes	F		

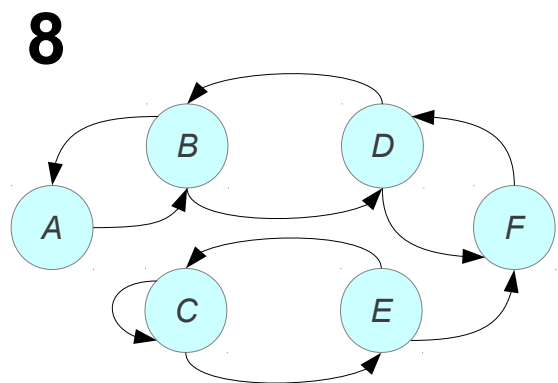
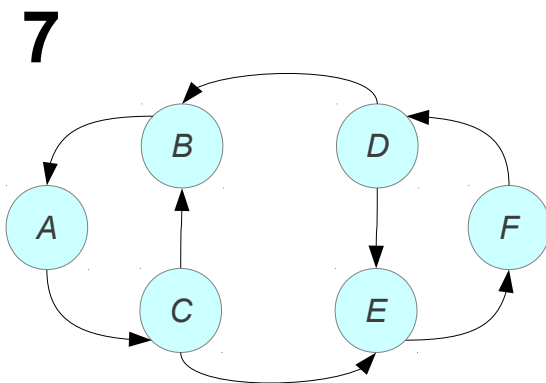
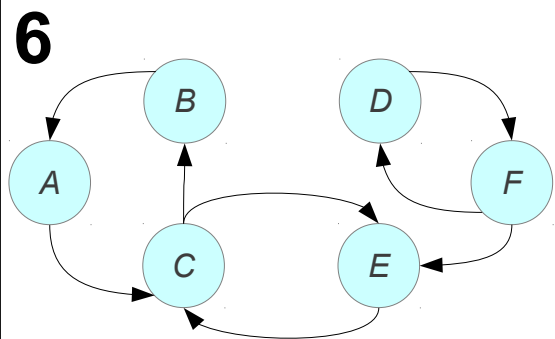
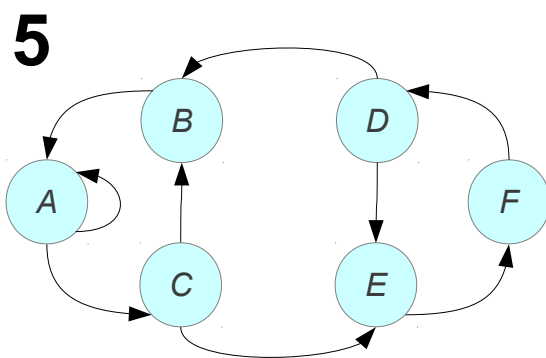
$$T = \begin{matrix} & & & B & C & D & E & F \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} & 0 & 0 & p_{AF} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{CA} & 0 & p_{CC} & 0 & p_{CE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{DD} & p_{DE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3. Identificar las clases de las cadenas propuestas y sustentar las respuestas.



1. Clase irreducible, tiene una única clase recurrente, todos los estados se comunican entre sí.	2. Está mal planteada, desde C no se puede ir a ningún otro estado ni al mismo C.
3. Clase reducible A: clase transitoria BCDE: clase recurrente F: clase recurrente	4. Clase reducible A: clase transitoria BD: clase recurrente CE: clase recurrente F: clase transitoria

4. Determinar cuales cadenas son ergódicas y sustentar las respuestas.



5. Es ergódica, es irreducible y aperiódica.	6. No es ergódica ABCE: clase recurrente DF: clase transitoria
7. No es ergódica, es irreducible pero es periódica.	8. No es ergódica ABDF: clase recurrente

	CE: clase transitoria
--	-----------------------

TALLER 4 ESTADO ESTABLE

INTEGRANTES

Nombre	Código
•	
•	
•	
•	

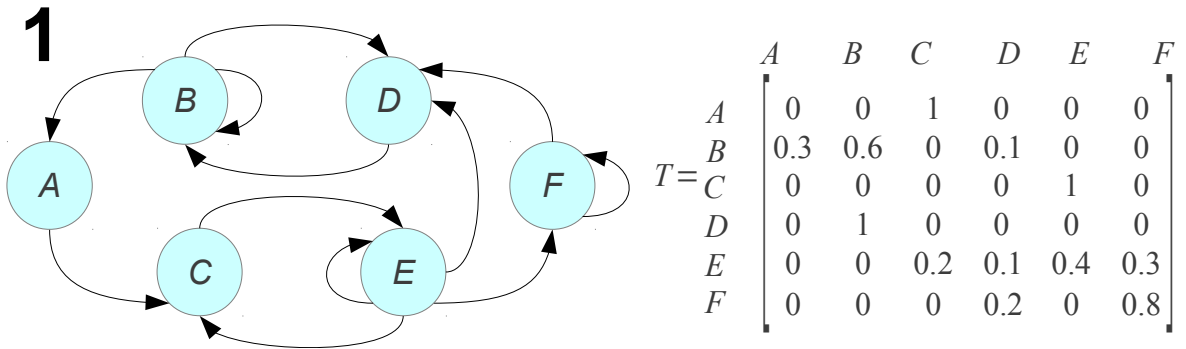
OBJETIVOS

Con el desarrollo del presente taller, el estudiante estará en capacidad de:

- Reconocer cuando existen las probabilidades de estado estable de una cadena de Markov, y calcularlas.
- Calcular los tiempos de primera pasada y de recurrencia.
- Identificar una cadena de Markov absorbente y calcular las probabilidades de absorción.

ACTIVIDADES

1. Calcular las probabilidades de estado estable (ver cadenas al final).
2. Calcular los tiempos de recurrencia y de primera pasada (ver cadenas al final).
3. Calcular las probabilidades de absorción (ver cadenas al final).



Es irreducible y aperiódica, si tiene probabilidades de estado estable.

Sistema de ecuaciones:

1	-0,3	0	0	0	0	0
0	0,4	0	-1	0	0	0
-1	0	1	0	-0,2	0	0
0	-0,1	0	1	-0,1	-0,2	0
0	0	-1	0	0,6	0	0
0	0	0	0	-0,3	0,2	0
1	1	1	1	1	1	1

Probabilidades de estado estable:

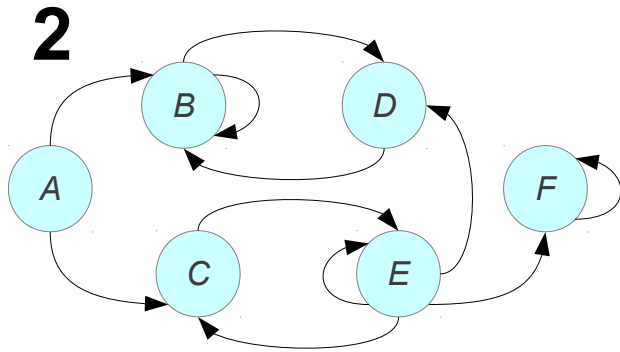
0,0745341615
0,248447205
0,1118012422
0,099378882
0,1863354037
0,2795031056

Tiempos de recurrencia y de primera pasada

	A	B	C	D	E	F
A	13,41667	9,75	1	8,75	2	8,22222
B	3,66667	4,025	4,66667	9,0625	5,66667	11,88889
C	12,41667	8,75	8,94444	7,75	1	7,22222

D	4,66666	1	5,66667	10,0625	6,66667	12,88889
E	11,41667	7,75	7,94444	6,75	5,36667	6,22222
F	9,66667	6	10,66667	5	11,66667	3,57778

No tiene estados absorbentes.



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

No es irreducible, F es un estado absorbente, BC son una clase recurrente, A es recurrente, y CE son una clase recurrente. No tiene probabilidades de estado estable.

Matriz H:

	A	C	E
A	0	0,6	0
C	0	0	1
E	0	0,5	0,1

Matriz G:

	F
A	0
C	0
E	0,2

Probabilidades de absorción:

	F
A	0,3
C	0,5
E	0,5

ANEXO N. GUÍA DE USUARIO DE LAS MACROS

MANUAL DE USUARIO

MACROS PARA EL ESTUDIO DE CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO DISCRETO

Conjunto de macros desarrolladas en basic para libreoffice 3.6, para realizar los cálculos necesarios para el estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto. Las funciones matriciales se insertan mediante **Control+Shift+Enter**. Es necesario habilitar las macros desde el menú Herramienta - Opciones - Seguridad - Seguridad de macros.

LibreOffice puede ser descargado para su instalación desde <http://es.libreoffice.org/descarga/> o la versión portable que permite su utilización desde una memoria usb puede descargarse desde <http://www.libreoffice.org/download/portable/> .

Función: vEstocastico

Evalúa si un vector fila es o no estocástico.

Sintaxis:

- vEstocastico(vector)

Recibe:

- un vector fila

Devuelve:

- verdadero si es estocástico
- falso si no es estocástico
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que el argumento sea un vector fila.
 - Que los elementos del vector sean numéricos.
 - Que los elementos del vector sean no negativos entre 0 y 1.
 - Que la suma de los elementos del vector sea igual a 1.
-

Función: mEstocastica

Verifica que una matriz de transición sea estocástica.

Sintaxis:

- mEstocastica (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- verdadero si es estocástica
- falso si no es estocástica
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que el argumento sea una matriz cuadrada mediante la función mCuadrada.
 - Que cada fila de la matriz sea un vector estocástico mediante la función vEstocastico.
-

Función matricial: mProducto

Calcula el producto aritmético o booleano de dos matrices.

Sintaxis:

- mProducto (matriz1, matriz2, [tipo])

Recibe:

- dos matrices
- un tipo (opcional, por defecto se asume cero)
- si tipo es cero, calcula el producto aritmético
- si tipo es uno, calcula el producto booleano

Devuelve:

- una matriz si el producto se realiza correctamente
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que los dos argumentos sean matrices.
- Que el número de columnas de matriz1 sea igual al número de

filas de matriz2

- Que ambas matrices sean numéricas mediante la función mNumerica.
 - Que tipo sea 0 o 1.
-

Función matricial: mPotencia

Eleva una matriz a una potencia.

Sintaxis:

- mPotencia (matriz, potencia, [tipo])

Recibe:

- una matriz cuadrada
- una potencia entera
- un tipo (opcional, por defecto se asume cero)
- si tipo es cero, calcula la potencia aritmética
- si tipo es uno, calcula la potencia booleana

Devuelve:

- una matriz si la potencia se realiza correctamente
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que tipo sea 0 o 1.
- Que la potencia sea numérica.
- Que la potencia sea positiva.
- Que la potencia sea entera.

Las verificaciones correspondientes a la matriz son realizadas por la función mProducto.

Función matricial: mConectividad

Calcula la matriz de conectividad.

Sintaxis:

- mConectividad (matriz)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- una matriz si se realiza correctamente
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz sea cuadrada mediante la función mCuadrada.

La verificación de la matriz es realizada por la función mAdyacencia.

Función: mIrreducible

Verifica que una matriz sea irreducible.

Sintaxis:

- mIrreducible (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- verdadero si es irreducible
- falso si no es irreducible
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función mEstocástica.
 - Que la matriz sea fuertemente conexa mediante la función mFConexa.
-

Función matricial: ePeriodo

Calcula el periodo de cada estado de la matriz

Sintaxis:

- ePeriodo (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- un vector con el periodo de cada estado
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función mEstocastica.
-

Función: mAperiodica

Verifica que todos los estados de la matriz sean aperiódicos

Sintaxis:

- mAperiodica (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- verdadero si todos sus estados son aperiódicos
- falso si no todos sus estados son aperiódicos
- un mensaje de error según la validación realizada

Las verificaciones de la matriz son realizadas por la función ePeriodo.

Función matricial: pEstable

Calcula las probabilidades de estado estable de una matriz de transición.

Sintaxis:

- pEstable (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- un vector con la probabilidades de estado estable
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz sea irreducible mediante la función mIrreducible.
 - Que la matriz sea aperiódica mediante la función mAperiodica.
-

Función matricial: pAbsoluta

Calcula el vector de probabilidades absolutas.

Sintaxis:

- pAbsoluta (vector0, matrizT, periodo)

Recibe:

- el vector de condiciones iniciales
- la matriz de transición
- el número de transiciones

Devuelve:

- un vector con las probabilidades absolutas
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que el vector sea estocástico mediante la función vEstocastico.

Las verificaciones de la matriz y el periodo son realizadas por la función mPotencia.

Función matricial: mTiempos

Calcula los tiempo de recurrencia y de primera pasada.

Sintaxis:

- mTiempos (matrizT)

Recibe:

- una matriz de transición

Devuelve:

- una matriz con los tiempos de recurrencia y de primera pasada
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz sea estocástica mediante la función mEstocastica.
-

Función matricial: pAbsorcion

Calcula las probabilidades de absorción

Sintaxis:

- pAbsorcion (matrizH, matrizG)

Recibe:

- una matriz de estados transitorios a estados transitorios
- una matriz de estados transitorios a estados absorbentes

Devuelve:

- una matriz con las probabilidades de absorción
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matrizH sea cuadrada mediante la función mCuadrada.
 - Que la matrizH sea numérica mediante la función mNumerica.
 - Que la matrizG sea numérica mediante la función mNumerica.
 - Que los elementos de la matrizH estén entre 0 y 1.
 - Que los elementos de la matrizG estén entre 0 y 1.
-

Función: tValor

Calcula el valor esperado total del sistema

Sintaxis:

- tValor (vectorC, matrizT)

Recibe:

- un vector de valores totales por estado
- una matriz de transición

Devuelve:

- el valor esperado total del sistema
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que existan las probabilidades de estado estable mediante la función pEstable.
 - Que el vector sea numérico mediante la función mNumerica.
-

Función matricial: eValor

Calcula el valor total para cada estado

Sintaxis:

- eValor (matrizC, matrizT)

Recibe:

- una matriz de costos
- una matriz de transición

Devuelve:

- el valor total para cada estado
- un mensaje de error según la validación realizada

Esta función verifica:

- Que la matriz de transición sea estocástica mediante la función mEstocastica.
- Que la matriz de costos sea cuadrada mediante la función mCuadrada.
- Que la matriz de costos sea numérica mediante la función mNumerica.

- Que las matrices sean de las mismas dimensiones.

ANEXO O. EJEMPLO DE USO DE LAS MACROS

pedido 10
 almacen 3 inv prom
 costo 25

Vector de condiciones iniciales

0	1	2	3
0	0	1	0

Matriz de costos

	0	1	2	3
0	89,5	91	92,5	94
1	1,5	3	0	0
2	3	4,5	6	0
3	4,5	6	7,5	9

Probabilidades de estado estable Valor esperado por cada estado

estable	0	0,28565	estado	0	92,536
	1	0,28483		1	2,052
	2	0,26318		2	4,656
	3	0,16633		3	7,536

Matriz de conectividad

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

Probabilidad absoluta

$P(4) = P(0) \times T^4$

	0	1	2	3
	0,28372	0,28263	0,26291	0,17074

Matriz de conectividad

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0,7	0,2	0,1	0
C	0,5	0,1	0,2	0,2
D	0	0	0	1

Probabilidades de absorción

	D
B	0,0317460317
C	0,253968254

vector estocástico	True
matriz cuadrada	True
matriz numérica	True

matriz estocástica	True	True
matriz irreducible	True	False
matriz aperiódica	True	True
matriz fuerte conexa	True	False

Matriz de adyacencia

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	1	1	1	0
C	1	1	1	1
D	0	0	0	1

Matriz de conectividad

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	0	0	0	1

Matriz de transición

	0	1	2	3
0	0,08	0,184	0,368	0,368
1	0,632	0,368	0	0
2	0,264	0,368	0,368	0
3	0,08	0,184	0,368	0,368

T^4

	0	1	2	3
0	0,28945	0,28607	0,26062	0,16387
1	0,28142	0,28492	0,2675	0,16616
2	0,28372	0,28263	0,26291	0,17074
3	0,28945	0,28607	0,26062	0,16387

Tiempos de recurrencia y de primera pasada

	0	1	2	3
0	3,50074	3,97279	3,50853	6,01214
1	1,58228	3,51081	5,09081	7,59441
2	2,50361	3,2418	3,79967	8,51574
3	3,50074	3,97279	3,50853	6,01214

Periodo de cada estado

0	1
1	1
2	1
3	1

Valor esperado total del sistema
29,4966

Matriz de adyacencia

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
3	1	1	1	1

ANEXO P. LISTADO DE ESTUDIANTES QUE PARTICIPARON

GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

LISTADO DE ESTUDIANTES

Código	Nombre	Grupo	Correo
2070251	ACOSTA TORRES ARMANDO	5	hitmer_120@hotmail.com
2083633	AGUIRRE CASTILLA ADRIANA MARCELA	7	aguirre_02@hotmail.com
2081951	ALARCON GARDERET LAURA	2	lalarcon89@hotmail.com
2043024	ARCHILA SANCHEZ DIANA ROCIO	4	dianitaarchilas34@hotmail.com
2063293	ARMERO TORRES JULIO CESAR	4	armerot07@gmail.com
2062240	BARAJAS BERMUDEZ CINDY JULIETH	1	july11_226@outlook.com
2090347	BARBOSA BARBOSA ALVARO ALEJANDRO	2	alejokio@gmail.com
2083729	BASTO ROA DECCY MILENA	3	deyvalentina21@gmail.com
2063429	BERNAL CONDIA NANCY ELIZABET	2	nabe_indus@hotmail.com
2000134	BOHORQUEZ GARCIA DIEGO ANDRES	7	d.bohorquez83@hotmail.com
2081383	CENTENO ALDANA CESAR AUGUSTO	7	drako_cesar27@hotmail.com
2080354	CRUZ CARDENAS ANGELA MARCELA	3	angelacruz.1291@gmail.com
2022416	DIAZ GOMEZ NIDIA JULIANA	4	nijuliana@gmail.com
2072032	ENTRALGO MALDONADO MONICA	5	monik_7789@hotmail.com
2083086	ESPARZA ARGUELLO JEFFER ALBERTO	9	miber2009@hotmail.com
2073654	ESTUPIÑAN MORENO MARICELA	6	maesmo88@gmail.com
2080381	FERNANDEZ PALACIO. SILVIA JULIANA	9	silviwho@gmail.com
2070232	FLOREZ VELANDIA BRAYAN	9	brayanflorez@uis.edu.co
2083645	GAMBOA SUAREZ LISETH JOHANNA	4	joha_gamboa@hotmail.com
2072013	GARCIA RAMIREZ JUDITH ELIZABETH	3	elzjud_grm@hotmail.com
2040372	JIMENEZ SANCHEZ DAVID JULIAN	3	david53087@hotmail.com
2072104	LEON MUÑOZ SERGIO ISNARDO	5	sergioleon20@gmail.com
2083464	MARTINEZ MEDINA ANGY ZAMARA	6	zmrmtzn@hotmail.com
2090304	MENESES SALAZAR JORGE ENRIQUE	8	jorge.meneses25@gmail.com
2083651	MUJICA MUÑOZ JENNY KATHERINE	2	jennysita_91@hotmail.com
2072779	OSPIÑO LEON LUIS FERNANDO	8	fernando.ospinoleon@gmail.com
2062540	PARRA CONDE LEIDY JOHANA	1	leidy2416@hotmail.com
2073657	PEDRAZA LOPEZ DIANA MARCELA	5	Dianita8928@hotmail.com

Código	Nombre	Grupo	Correo
2093145	POVEDA GOMEZ LISSETH PATRICIA	6	patypg903@hotmail.com
2073397	PRADA HERNANDEZ MARTHA LILIANA	8	martha.prada3@hotmail.com
2041993	QUIROGA SALAMANCA VICTOR ALFONSO	7	victorquirolga-@hotmail.com
2073211	RANGEL URREA ERIKA VIVIANA	1	erikaviviana610@hotmail.com
2083168	ROMERO PENARANDA LUZ JENNIFER	8	jennromero_90@hotmail.com
2083259	SANTOS NEIRA EDWARD STEVEN	6	edwardelx@hotmail.com
2063622	VILLAFANE SUAREZ ORLANDO JOSE	1	orjovisu@gmail.com

**ANEXO Q. GUÍA PARA DETERMINAR LOS ESTADOS Y ELABORAR LA
MATRIZ DE TRANSICIÓN**

GUÍA PARA DETERMINAR LOS ESTADOS Y ELABORAR LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV.

0. Conservar la calma, por más difícil que pueda parecer el problema, realmente no lo es tanto. Recuerde que si otros lo han logrado, usted también lo hará.
1. Leer todo el enunciado del problema las veces que sean necesarias hasta entenderlo, muy difícilmente se puede abordar la solución de un problema sin haber entendido previamente de que se trata.
2. Identificar la información relevante, pueden existir datos que realmente carezcan de utilidad.
3. Identificar y definir formalmente la variable y el momento de observación, ambos datos son importantes ya que de ellos se originan los estados del sistema.
4. Identificar los eventos que afectan el valor de la variable de estudio y ordenarlos cronológicamente según se presenten.
5. Identificar un estado del sistema y registrarlo en la columna del instante t .

Instante t	Eventos que alteran el valor de la variable, en el orden cronológico en que se presenten.				Instante $t+1$
	Compras	Ventas	...	Otros	

6. Relacionar los eventos que se presentan y cambian el valor de la variable, en su respectiva columna, teniendo en cuenta los nuevos valores que va tomando ésta, según se van presentando dichos eventos.
7. Identificar y registrar el estado final al que llega la variable en el instante $t+1$. Es posible que un estado sea muy similar a otro, pero no por eso es el mismo, habrá alguna característica que los diferencie.

8. Por cada nuevo estado que aparezca en la columna del instante $t+1$, registrarlo en la columna del instante t y analizarlo (paso 6 y 7) hasta que estén todos los estados analizados.
9. Cada fila corresponde a pasar de un estado i en el instante t , a otro estado j en el instante $t+1$, las probabilidades de transición son el producto de las probabilidades de la respectiva fila. Es posible que resulte mas de una forma de ir del estado i al estado j , en ese caso habrá que sumar las probabilidades resultantes.
10. A partir de las probabilidades calculadas, construir la matriz de transición y al finalizar la construcción de la matriz, verificar que la suma de cada fila sea igual a 1.

**ANEXO R. GUÍA PARA CONSTRUIR Y RESOLVER EL SISTEMA DE
ECUACIONES DE ESTADO ESTABLE MEDIANTE UNA HOJA DE
CÁLCULO**

En esta hoja vamos a ver como construir nuestro sistema de ecuaciones.

MATRIZ DE TRANSICIÓN						
0,2	0,5	0,3	0	0	0	0
0,2	0,5	0,3	0	0	0	0
0	0,2	0,5	0,3	0	0	0
0	0	0,2	0,5	0,3	0	0
0	0	0	0,2	0,5	0,3	0
0	0	0	0	0,2	0,5	0,3
0,2	0,5	0,3	0	0	0	0

Transponemos la matriz de transición						
0,2	0,2	0	0	0	0	0,2
0,5	0,5	0,2	0	0	0	0,5
0,3	0,3	0,5	0,2	0	0	0,3
0	0	0,3	0,5	0,2	0	0
0	0	0	0,3	0,5	0,2	0
0	0	0	0	0,3	0,5	0
0	0	0	0	0	0,3	0

MATRIZ IDENTIDAD						
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1

Restamos MATRIZ IDENTIDAD - MATRIZ DE TRANSICIÓN TRANSPUESTA						
0,8	-0,2	0	0	0	0	-0,2
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0
0	0	0	0	-0,3	0,5	0
0	0	0	0	0	-0,3	1

Agregamos una columna de ceros							
0,8	-0,2	0	0	0	0	-0,2	0
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5	0
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3	0
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	0
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0
0	0	0	0	-0,3	0,5	0	0
0	0	0	0	0	-0,3	1	0

Con la columna de ceros estamos igualando a cero todas las ecuaciones

SISTEMA DE ECUACIONES							
Reemplazamos una fila cualquiera por una fila de unos							
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5	0
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3	0
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	0
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0
0	0	0	0	-0,3	0,5	0	0
0	0	0	0	0	-0,3	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$A \times X = B$
Este es el sistema de ecuaciones a resolver, la última columna corresponde a los términos independientes.

La fila de unos representa ecuación de la sumatoria de las probabilidades = 1

En esta hoja vamos a ver una forma de resolver nuestro sistema de ecuaciones.

SISTEMA DE ECUACIONES								$A \times X = B$
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5	0	Este es el sistema de ecuaciones a resolver, la última columna corresponde a los términos independientes.
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3	0	
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	0	
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	
0	0	0	0	-0,3	0,5	0	0	
0	0	0	0	0	-0,3	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	

Matriz de coeficientes							
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5	
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3	
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	
0	0	0	0	-0,3	0,5	0	
0	0	0	0	0	-0,3	1	
1	1	1	1	1	1	1	

Vector de términos independientes	
0	
0	
0	
0	
0	
0	
0	
1	

MATRIZ INVERSA							
-1	-1,4892812	-1,6380832	-1,5598991	-1,3303909	-1	0,05321564	
1	-1,0592686	-1,8247163	-1,7276166	-1,0554855	0	0,18221942	
0	0,81967213	-1,147541	-1,6393443	-1,147541	0	0,24590164	
0	0,71878941	1,91677175	0,10088272	-0,3909206	0	0,21563682	
0	0,56746532	1,51324086	2,7112232	0,74401009	0	0,1702396	
0	0,34047919	0,90794451	1,62673392	2,44640605	0	0,10214376	
0	0,10214376	0,27238335	0,48802018	0,73392182	1	0,03064313	

Calculamos la matriz inversa de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.

$X = A^{-1} \times B$	
0,05321564	Probabilidades de estado estable
0,18221942	
0,24590164	
0,21563682	
0,1702396	
0,10214376	
0,03064313	

Multiplicamos la matriz inversa por el vector de términos independientes para obtener el resultado.

En esta hoja vamos a ver otra forma de resolver nuestro sistema de ecuaciones.

SISTEMA DE ECUACIONES								
-0,5	0,5	-0,2	0	0	0	-0,5	0	Este es el sistema de ecuaciones a resolver, la última columna corresponde a los términos independientes.
-0,3	-0,3	0,5	-0,2	0	0	-0,3	0	
0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	0	
0	0	0	-0,3	0,5	-0,2	0	0	
0	0	0	0	-0,3	0,5	0	0	
0	0	0	0	0	-0,3	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	

CELDA DE REFERENCIA	
1,145E-016	Estas celdas representan las restricciones del sistema, en cada una de ellas se multiplica cada coeficiente con su respectiva variable.
-1,11E-016	
-1,11E-016	
1,978E-016	
-1,39E-017	
-1,08E-016	
1	

VARIABLES	OBJETIVO
0,0532156 0,1822194 0,2459016 0,2156368 0,1702396 0,1021438 0,0306431	1

Estas son las celdas que cambiarán, representan las variables del sistema. Esta celda representa el objetivo, puede colocarse como función la suma de las variables.

- Pasos a seguir:**
- 1 Abrir el Solver
 - 2 Introducir los datos recordando que las restricciones son =
 - 3 Los valores de las restricciones son los términos independientes del sistema de ecuaciones.
 - 4 Para quienes usen libreoffice, en opciones seleccionar el solucionador lineal de libreoffice
 - 5 Solucionar.

**ANEXO S. GUÍA PARA CONSTRUIR Y RESOLVER EL SISTEMA DE
ECUACIONES PARA CALCULAR LOS TIEMPOS DE PRIMERA PASADA
MEDIANTE UNA HOJA DE CÁLCULO**

En esta hoja vamos a ver como construir nuestro sistema de ecuaciones para calcular los tiempos de primera pasada.

MATRIZ DE TRANSICIÓN				
	0	1	2	3
0	0,08	0,184	0,368	0,368
1	0,632	0,368	0	0
2	0,264	0,368	0,368	0
3	0,08	0,184	0,368	0,368

Para calcular los tiempos de primera pasada desde cualquier estado al estado 2

Eliminamos de la matriz la fila y la columna que corresponden al estado 2

	0	1	3
0	0,08	0,184	0,368
1	0,632	0,368	0
3	0,08	0,184	0,368

MATRIZ IDENTIDAD			
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

Restamos

MATRIZ IDENTIDAD - MATRIZ DE TRANSICIÓN

	0	1	3
0	0,92	-0,184	-0,368
1	-0,632	0,632	0
3	-0,08	-0,184	0,632

SISTEMA DE ECUACIONES					$A \times X = B$
Agregamos una columna de unos.					
	0	1	3		
0	0,92	-0,184	-0,368	1	Con la columna de unos estamos igualando a uno todas las ecuaciones
1	-0,632	0,632	0	1	
3	-0,08	-0,184	0,632	1	

Matriz de coeficientes			
	0	1	3
0	0,92	-0,184	-0,368
1	-0,632	0,632	0
3	-0,08	-0,184	0,632

1	Vector de términos independientes
1	
1	

Matriz inversa			
	0	1	3
0	1,7173913043	0,7911392405	1
1	1,7173913043	2,3734177215	1
3	0,7173913043	0,7911392405	2

Calculamos la matriz inversa de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.

$X = A^{-1} \times B$	
0	3,5085305449
1	5,0908090259
3	3,5085305449

Tiempos de primera pasada desde los estados de la derecha al estado 2.

Multiplicamos la matriz inversa por el vector de términos independientes para obtener el resultado.

**ANEXO T. EJEMPLO ILUSTRATIVO DE CADENAS DE ORDEN
SUPERIOR**

t	Observación	Estados matriz primer orden	Diferencia	Estados matriz segundo orden	Promedio	Elementos matriz segundo orden	Promedio
		S: Subió M: Mantuvo B: Bajó		Elementos matriz primer orden			
1	4						
2	1	B	-3				
3	0	B	-1	BB	-2		
4	1	S	1	BS	0	BBS	-1
5	6	S	5	SS	3	BSS	1,666666667
6	8	S	2	SS	3,5	SSS	2,666666667
7	1	B	-7	SB	-2,5	SSB	0
8	10	S	9	BS	1	SBS	1,333333333
9	6	B	-4	SB	2,5	BSB	-0,666666667
10	0	B	-6	BB	-5	SBB	-0,333333333
11	7	S	7	BS	0,5	BBS	-1
12	0	B	-7	SB	0	BSB	-2
13	2	S	2	BS	-2,5	SBS	0,666666667
14	0	B	-2	SB	0	BSB	-2,333333333
15	3	S	3	BS	0,5	SBS	1
16	8	S	5	SS	4	BSS	2
17	0	B	-8	SB	-1,5	SSB	0
18	6	S	6	BS	-1	SBS	1
19	8	S	2	SS	4	BSS	0
20	7	B	-1	SB	0,5	SSB	2,333333333
21	6	B	-1	BB	-1	SBB	0
22	7	S	1	BS	0	BBS	-0,333333333
23	6	B	-1	SB	0	BSB	-0,333333333
24	9	S	3	BS	1	SBS	1
25	7	B	-2	SB	0,5	BSB	0
26	4	B	-3	BB	-2,5	SBB	-0,666666667
27	3	B	-1	BB	-2	BBB	-2
28	7	S	4	BS	1,5	BBS	0
29	0	B	-7	SB	-1,5	BSB	-1,333333333
30	9	S	9	BS	1	SBS	2
31	2	B	-7	SB	1	BSB	-1,666666667
32	5	S	3	BS	-2	SBS	1,666666667
33	0	B	-5	SB	-1	BSB	-3
34	2	S	2	BS	-1,5	SBS	0
35	7	S	5	SS	3,5	BSS	0,666666667
36	7	M	0	SM	2,5	SSM	2,333333333
37	0	B	-7	MB	-3,5	SMB	-0,666666667
38	8	S	8	BS	0,5	MBS	0,333333333
39	7	B	-1	SB	3,5	BSB	0
40	7	M	0	BM	-0,5	SBM	2,333333333
41	9	S	2	MS	1	BMS	0,333333333
42	3	B	-6	SB	-2	MSB	-1,333333333
43	7	S	4	BS	-1	SBS	0
44	0	B	-7	SB	-1,5	BSB	-3
45	4	S	4	BS	-1,5	SBS	0,333333333
46	0	B	-4	SB	0	BSB	-2,333333333
47	9	S	9	BS	2,5	SBS	3
48	4	B	-5	SB	2	BSB	0
49	6	S	2	BS	-1,5	SBS	2
50	6	M	0	SM	1	BSM	-1
51	1	B	-5	MB	-2,5	SMB	-1
52	1	M	0	BM	-2,5	MBM	-1,666666667
53	3	S	2	MS	1	BMS	-1

PRIMER ORDEN	ELEMENTOS				
		S	M	B	
	S	SS	SM	SB	
	M	MS	MM	MB	
	B	BS	BM	BB	
	CONTEO				
		S	M	B	Total
	S	6	4	21	31
	M	3	0	4	7
	B	23	3	6	32
	PROBABILIDADES				
		S	M	B	Matriz de transición
	S	0,19355	0,12903	0,67742	
	M	0,42857	0	0,57143	
	B	0,71875	0,09375	0,1875	
	COSTOS				
	S	M	B	Matriz de costos	
S	3	1,5	0,33333		
M	1	0	-2,375		
B	-0,0217	-1,1667	-3,3333		

ELEMENTOS									
	SS	SM	SB	MS	MM	MB	BS	BM	BB
SS	SSS	SSM	SSB	0	0	0	0	0	0
SM	0	0	0	SMS	SMM	SMB	0	0	0
SB	0	0	0	0	0	0	SBS	SBM	SBB
MS	MSS	MSM	MSB	0	0	0	0	0	0
MM	0	0	0	MMS	MMM	MMB	0	0	0
MB	0	0	0	0	0	0	MBS	MBM	MBB
BS	BSS	BSM	BSB	0	0	0	0	0	0
BM	0	0	0	BMS	BMM	BMB	0	0	0
BB	0	0	0	0	0	0	BBS	BBM	BBB

CONTEO										
	SS	SM	SB	MS	MM	MB	BS	BM	BB	Total
SS	1	2	3	0	0	0	0	0	0	6
SM	0	0	0	2	0	2	0	0	0	4
SB	0	0	0	0	0	0	14	3	4	21
MS	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3
MM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MB	0	0	0	0	0	0	3	0	1	4
BS	5	2	15	0	0	0	0	0	0	22
BM	0	0	0	1	0	2	0	0	0	3
BB	0	0	0	0	0	0	5	0	1	6

Para este caso particular, el estado MM no se presenta.

PROBABILIDADES									
	SS	SM	SB	MS	MB	BS	BM	BB	
SS	0,16667	0,33333	0,5	0	0	0	0	0	Matriz de transición
SM	0	0	0	0,5	0,5	0	0	0	
SB	0	0	0	0	0	0,66667	0,14286	0,19048	
MS	0	0	1	0	0	0	0	0	
MB	0	0	0	0	0	0,75	0	0,25	
BS	0,22727	0,09091	0,68182	0	0	0	0	0	
BM	0	0	0	0,33333	0,66667	0	0	0	
BB	0	0	0	0	0	0,83333	0	0,16667	

COSTOS									
	SS	SM	SB	MS	MB	BS	BM	BB	
SS	0	2	0,88889	0	0	0	0	0	Matriz de costos
SM	0	0	0	0	-1	0	0	0	
SB	0	0	0	0	0	1,45238	0,77778	-0,1667	
MS	0	0	-0,5556	0	0	0	0	0	
MB	0	0	0	0	0	0	#DIV/0!	-2,6667	
BS	0,73333	-1,1667	-1,1556	0	0	0	0	0	
BM	0	0	0	-0,3333	-1,5	0	0	0	
BB	0	0	0	0	0	-0,9333	#DIV/0!	0	

PRIMER ORDEN	Probabilidades estado estable	
	S	0,3874006476
	M	0,1271710333
	B	0,4854283191
	Costo total por estado	
	S	1,1071428571
	M	-1,5
	B	-0,573529412
	Valor esperado del costo total	
	-0,0402561083	

SEGUNDO ORDEN	Probabilidades estado estable	
	SS	0,0426655831
	SM	0,0426655831
	SB	0,3042394691
	MS	0,0340241094
	MB	0,0937017473
	BS	0,3128809427
	BM	0,0850602736
	BB	0,0847622918
	Costo total por estado	
	SS	1,7777777778
	SM	-0,666666667
	SB	1,1060606061
	MS	0
	MB	-0,555555556
	BS	-0,545454545
BM	-1,2	
BB	-0,666666667	
Valor esperado del costo total		
0,0026141135		

ANEXO U. FORMATO DE ENCUESTA FINAL A ESTUDIANTES

Fecha: _____

Nombre: _____ Código: _____

1. La metodología utilizada cree que fue:
 - a. Muy adecuada
 - b. Adecuada
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuada
 - e. Totalmente inadecuada
2. La participación dentro del grupo de trabajo fue:
 - a. Todos participaron
 - b. La mayoría participaron
 - c. La mayoría no participó
 - d. Ninguno participó
3. La forma de evaluación propuesta fue:
 - a. Muy adecuada
 - b. Adecuada
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuada
 - e. Totalmente inadecuada
4. Las presentaciones utilizadas en clase fueron:
 - a. Muy adecuada
 - b. Adecuada
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuada
 - e. Totalmente inadecuada
5. El material teórico entregado
 - a. Muy adecuado
 - b. Adecuado
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuado
 - e. Totalmente inadecuado
6. Los talleres elaborados fueron:
 - a. Muy adecuados
 - b. Adecuados
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuados
 - e. Totalmente inadecuados
7. El tiempo dedicado al tema fue:
 - a. Muy adecuado
 - b. Adecuado
 - c. Indiferente
 - d. Poco adecuado
 - e. Totalmente inadecuado
8. Para realizar los cálculos en el estudio de las cadenas de Markov de tiempo discreto utilizó:
 - a. WinQSB
 - b. Microsoft Excel
 - c. LibreOffice Calc
 - d. Calculadora
 - e. Otro. Cual?

9. Si utilizó LibreOffice, las macros usadas fueron:

- a. Muy fáciles de utilizar
- b. Fáciles de utilizar
- c. Indiferentes
- d. Difíciles de utilizar
- e. Muy difíciles de utilizar

10. Si utilizó LibreOffice, la guía de uso fue:

- a. Muy adecuada
- b. Adecuada
- c. Indiferente
- d. Poco adecuada
- e. Totalmente inadecuada

11. La guía para hallar los estados fue:

- a. Muy útil
- b. Útil
- c. Indiferente
- d. Poco útil
- e. Nada útil

12. De los temas correspondientes a cadenas de Markov vistos en clase, cuales considera que:

- a. Quedaron claros (C)
- b. Se deben profundizar (P)

	C	P
Procesos estocásticos		
Procesos de Markov		
Cadenas de Markov		
Estados		
Probabilidades de transición de un paso		
Matriz de transición		
Diagrama de transición		
Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov		
Probabilidades de transición de n pasos		
Cadenas de orden superior		
Probabilidades absolutas		
Clasificación de estados		
Clases comunicantes		
Probabilidades de estado estable		
Tiempos de recurrencia y de primera pasada		
Probabilidades de absorción		
Cadenas con remuneración		
Decisión markoviana		