

PUESTAS A TIERRA: PROGRAMA DE CALCULO DE PUESTAS A TIERRA DE  
MEDIANA POTENCIA

LUIS CARLOS LIZARAZO HERRERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA, ELECTRONICA Y  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2005

PUESTAS A TIERRA: PROGRAMA DE CALCULO DE PUESTAS A TIERRA DE  
MEDIANA POTENCIA

LUIS CARLOS LIZARAZO HERRERA

Trabajo de grado para optar al título de  
Ingeniero Electricista

Director  
CIRO JURADO JEREZ  
Ingeniero Electricista

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA, ELECTRONICA Y  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2005

## CONTENIDO

|  | pag. |
|--|------|
| INTRODUCCION   | 1    |
| 1. PROBLEMATICA DE LA PUESTA ATIERRA   | 2    |
| 1.1 GENERALIDADES  | 2    |
| 1.2 EFECTOS DEL PASO DE LA CORRIENTE ELECTRICA A TRAVES<br>DEL CUERPO HIMANO | 5    |
| 1.2.1 El mecanismo de electrocución.   | 6    |
| 1.2.2 Factores concomitantes de la electrocución.                            | 7    |
| 1.2.3 Efectos térmicos de la corriente.                                      | 8    |
| 1.3 EL CIRCUITO DE CHOQUE ELECTRICO  | 9    |
| 1.3.1 Resistencia del cuerpo humano.   | 11   |
| 1.4 TERMINOLOGIA EMPLEADA EN EL DISEÑO DE UNA PUESTA A TIERRA                | 14   |
| 1.5 RELACIONES Y CONCEPTOS DETERMINANTES                                     | 15   |
| 1.5.1 De la resistencia del cuerpo humano.                                   | 16   |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| 1.5.2     | Corriente de cuerpo permisible.                       | 18 |
| 1.5.2.1   | Ecuación de electrocución.                            | 18 |
| 1.5.2.1.1 | Ecuación de Dalziel.                                  | 19 |
| 1.5.2.1.2 | Ecuación del grupo medico de la UNIPEDE               | 20 |
| 1.5.3     | Voltaje de cuerpo máximo.                             | 21 |
| 1.6       | CRITERIOS DE SEGURIDAD                                | 22 |
| 1.7       | RESISTIVIDAD DEL TERRENO                              | 24 |
| 1.7.1     | Factores que influyen en la resistividad del terreno. | 27 |
| 1.7.1.1   | Composición del terreno.                              | 27 |
| 1.7.1.2   | Sales solubles y su concentración.                    | 27 |
| 1.7.1.3   | Estado higrométrico del terreno.                      | 27 |
| 1.7.1.4   | Temperatura.  | 28 |
| 1.7.1.5   | Granulometría.  | 28 |
| 1.7.1.6   | Compacidad.   | 28 |
| 1.7.1.7   | Estratigrafía.  | 29 |

|  |    |
|--|----|
| 1.7.1.8 Otros factores.  | 29 |
| 1.7.1.8.1 Gradientes de potencial elevados.  | 30 |
| 1.7.1.8.2 Calentamiento del suelo por la circulación de corrientes elevadas.                     | 30 |
| 1.7.1.8.2.1 Calentamiento de estado estable.   | 31 |
| 1.7.1.8.2.2 Calentamiento de estado transitorio.   | 33 |
| 1.8 INTENSIDADES DE DEFECTO  | 35 |
| 1.8.1 Tipos de falla a tierra.   | 36 |
| 1.8.2 Caso de instalaciones de tercera categoría ( $1\text{ kV} \leq U_n \leq 30\text{ kV}$ )    | 38 |
| 1.8.2.1 Neutro aislado.  | 39 |
| 1.8.2.2 Neutro a tierra.   | 41 |
| 1.8.2.3 Valor máximo de la resistencia de puesta a tierra en instalaciones de tercera categoría. | 43 |
| 1.8.3 Tiempo máximo de eliminación del defecto.  | 46 |
| 2 TEORIA DE ELECTRODOS ELEMENTALES   | 48 |
| 2.1 GENERALIDADES  | 48 |
| 2.2 TEORIA TECNOLOGICA SUSTANTIVA  | 51 |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 2.3 Electrodo semiesférico.         | 51  |
| 2.3.1 Electrodo de placa circular.  | 59  |
| 2.3.2 Electrodo de pica.            | 66  |
| 2.3.3 Electrodo de placa elíptica.  | 73  |
| 2.3.4 Electrodo de banda.           | 77  |
| 2.3.5 Electrodo en anillo circular. | 78  |
| 2.4 TEORIA TECNOLOGICA DE LA ACCION | 86  |
| 2.4.1 Introducción.                 | 86  |
| 2.4.2 Electrodo semiesférico.       | 87  |
| 2.4.3 Electrodo de pica.            | 94  |
| 2.4.4 Electrodo de banda.           | 102 |
| 2.4.5 Electrodo de placa circular.  | 109 |
| 2.4.5.1 Placa semienterrada.        | 112 |
| 2.4.5.2 Placa totalmente enterrada. | 114 |
| 2.4.6 Electrodo en anillo circular. | 119 |

|  |     |
|--|-----|
| 2.4.6.1 El proceso de la media Aritmética-Geométrica.                  | 120 |
| 2.4.7 El método del potencial promedio.                                | 122 |
| 2.4.8 El método de Rüdénberg.  | 129 |
| 3 ELECTRODOS MULTIPLES   | 133 |
| 3.1 TEORIA TECNLOGICA SUSTANTIVA                                       | 133 |
| 3.1.1 Generalidades.   | 133 |
| 3.1.2 Propiedades generales de los electrodos múltiples superficiales. | 134 |
| 3.1.2.1 Resistencia a la propagación.                                  | 134 |
| 3.1.2.2 Zona de peligro.   | 135 |
| 3.1.2.3 Grado de influencia mutua.                                     | 136 |
| 3.1.2.4 Influencia de la forma geométrica.                             | 136 |
| 3.1.3 Electrodo superficiales múltiples distanciados.                  | 136 |
| 3.1.3.1 Electrodo múltiple en arreglo circular.                        | 138 |
| 3.1.3.2 Arreglo asimétrico.  | 141 |
| 3.1.3.2.1 Electrodo múltiple en línea.                                 | 141 |

|  |            |
|--|------------|
| 3.1.4 Propiedades generales de los electrodos múltiples enterrados.    | 149        |
| 3.1.4.1 Generalidades.   | 149        |
| 3.1.4.2 Electrodo profundo.  | 149        |
| 3.1.4.2.1 Resistencia del electrodo.                                   | 151        |
| 3.1.4.3 Electrodo rasantes.  | 160        |
| 3.1.4.3.1 Electrodo esférico.  | 160        |
| 3.1.4.3.2 Electrodo de placa circular.                                 | 162        |
| 3.1.4.3.3 Electrodo de pica.   | 163        |
| 3.1.4.3.4 Electrodo en anillo circular.                                | 165        |
| <b>3.2 TEORIA TECNOLOGICA DE LA ACCION DE LOS ELECTRODOS MÚLTIPLES</b> | <b>167</b> |
| 3.2.1 Generalidades.   | 167        |
| 3.2.2 Electrodo múltiple con electrodos semiesféricos.                 | 168        |
| 3.2.3 Electrodo múltiple de picas.                                     | 173        |
| 3.2.3.1 Arreglo simétrico.   | 173        |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2.3.2 Arreglos asimétricos.   | 176 |
| 3.2.4 Electrodo múltiple de bandas.   | 176 |
| 3.2.4.1 Electrodo de bandas formando mallas rectangulares.                                    | 178 |
| 3.2.4.1.1 Electrodo de bandas paralelas para el control de la distribución del potencial.     | 189 |
| 3.2.4.2 Electrodo de banda formando mallas cuadrículadas.                                     | 194 |
| 3.2.5 Electrodo múltiple de anillos circulares concéntricos.                                  | 197 |
| 3.2.6 Electrodo múltiple con semiesfera y anillo.   | 215 |
| 3.2.7 Electrodo compuesto de pica y anillo(s).  | 221 |
| 3.2.8 Electrodo múltiple de semiesfera y pica.  | 241 |
| 3.2.9 Cálculo de la resistencia combinada de electrodos por el método del potencial promedio. | 246 |
| 3.2.9.1 Arreglos de electrodos de pica.   | 247 |
| 3.2.9.1.1 Arreglo circular.   | 248 |
| 3.2.9.1.2 Electrodo múltiple en línea.  | 253 |
| 3.2.9.2 Electrodo de banda enterrado.   | 259 |
| 3.2.9.2.1 Electrodo múltiple de bandas paralelas.   | 260 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.2.9.3 Electrodo en anillo enterrado.   | 262 |
| 3.2.9.4 Electrodo múltiple en estrella.  | 263 |
| 3.2.9.5 Electrodo de banda enterrado combinado con picas.  | 266 |
| 3.2.9.6 Radio equivalente de conductores planos.   | 267 |
| 3.2.10 Puesta a tierra de placa.   | 268 |
| 3.2.11 Cálculo de la resistencia combinada de un arreglo de electrodos de pica por el método de Rüdénberg. | 269 |
| 4. PUESTA A TIERRA EN UN TERRENO ESTRATIFICADO   | 274 |
| 4.1 GENERALIDADES  | 274 |
| 4.2 ELECTRODO PUNTUAL EN UN TERRENO DE DOS CAPAS   | 276 |
| 4.2.1 Efecto de una fuente puntual en la capa superior en un punto en la capa superior.                    | 282 |
| 4.2.2 Efecto de una fuente puntual en una capa del fondo en un punto en la capa superior.                  | 284 |
| 4.3 ELECTRODO DE BANDA EN UN TERRENO DE DOS CAPAS  | 288 |
| 4.3.1 Voltaje producido en un punto $p$ por una fuente lineal.   | 288 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.3.2 Efecto de la estratificación en la resistencia de puesta a tierra del electrodo de banda.  | 289 |
| 4.4 ELECTRODO EN ANILLO CIRCULAR EN UN TERRENO DE DOS CAPAS                                      | 290 |
| 4.4.1 Voltaje producido en un punto p por un electrodo en anillo circular.                       | 290 |
| 4.4.2 Efecto de la estratificación en la resistencia de puesta a tierra del electrodo en anillo. | 292 |
| 4.5 EFECTO DE LA ESTRATIFICACIÓN EN LA RESISTENCIA DE CONTACTO DEL PIE                           | 294 |
| 4.6 EVALUACION DE LAS EXPRESIONES  | 298 |
| CONCLUSIONES   | 300 |
| BIBLIOGRAFIA   | 301 |
| ANEXOS   | 303 |

## LISTA DE FIGURAS

|  | pag. |
|--|------|
| Figura 1. Tipos de contacto a través de las manos.   | 11   |
| Figura 2. Posibles formas de contacto de personas con los medios eléctricos de servicio, y valor aproximado de las resistencias de cuerpo, según la técnica de la seguridad. | 12   |
| Figura 3. Gráfica de peligrosidad con base en tiempos y umbrales de interruptores diferenciales.   | 21   |
| Figura 4. Tipos de falla a tierra.   | 37   |
| Figura 5. Circuito para establecer la corriente de defecto para instalaciones de tercera categoría con neutro aislado.   | 40   |
| Figura 6. Circuito para establecer la corriente de defecto para instalaciones de tercera categoría con neutro unido a tierra.  | 41   |
| Figura 7. Obtención de un neutro artificial para conectar a tierra redes cuyo devanado alimentador esté dispuesto en triángulo.  | 42   |
| Figura 8. Electrodo semiesférico.  | 51   |
| Figura 9. Aplicación del principio de reflexión al electrodo semiesférico.   | 52   |
| Figura 10. Perfil de tensión del electrodo semiesférico.   | 55   |
| Figura 11. Diferencias de potencial que una persona puede puentear dentro del embudo de tensión.   | 56   |
| Figura 12. Electrodo de placa circular.  | 59   |
| Figura 13. Figura del campo del electrodo de placa circular.   | 60   |
| Figura 14. Perfil de tensión del electrodo de placa circular.  | 64   |
| Figura 15 Relación de los ángulos $\theta$ con $\rho$ y con $a$ .  | 64   |
| Figura 16. Electrodo de pica.  | 67   |
| Figura 17. Superficies equipotenciales del electrodo de pica.  | 68   |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 18. Perfil de tensión del electrodo de pica.   | 72  |
| Figura 19. Electrodo de placa elíptica.   | 74  |
| Figura 20. Electrodo de banda.  | 77  |
| Figura 21. Banda toroidal de sección semicircular.  | 79  |
| Figura 22. Electrodo en anillo circular.  | 79  |
| Figura 23. Coordenadas para el electrodo en anillo.   | 80  |
| Figura 24. Perfil de tensión del electrodo en anillo.   | 85  |
| Figura 25. Superficies equipotenciales del electrodo semiesférico.  | 87  |
| Figura 26. Electrodo esférico enterrado.  | 90  |
| Figura 27. Arreglo de electrodos esféricos.   | 90  |
| Figura 28. Circuito equivalente para el cálculo de la corriente de cuerpo.  | 92  |
| Figura 29. Circuito equivalente que relaciona el voltaje de paso con la corriente de cuerpo.  | 94  |
| Figura 30. Electrodo de pica (teoría tecnológica de la acción)  | 95  |
| Figura 31. Aplicación del principio de reflexión al electrodo de pica.  | 96  |
| Figura 32. Distribución de potencial del electrodo de pica.   | 98  |
| Figura 33. Arreglo de electrodos de pica.   | 101 |
| Figura 34. Electrodo de banda (teoría tecnológica de la acción)   | 102 |
| Figura 35. Electrodo de banda semienterrado.  | 104 |
| Figura 36. Electrodo de banda enterrado.  | 104 |
| Figura 37. Arreglo de electrodos de banda.  | 105 |
| Figura 38. Electrodo de banda enterrado: potencial en dirección normal al eje del electrodo en su punto medio (centro de gravedad eléctrico). | 107 |
| Figura 39. Perfil de tensión del electrodo de banda enterrado.  | 108 |
| Figura 40. Distribución de potencial del electrodo de placa circular.   | 114 |
| Figura 41. Arreglo de electrodos de placa circular.   | 114 |
| Figura 42. Superficies equipotenciales del electrodo de placa circular.   | 118 |
| Figura 43. Electrodo de placa circular en un terreno de dos capas.  | 118 |
| Figura 44. Electrodo de pica aproximado por $n$ elementos esféricos.  | 130 |
| Figura 45. Esquema para el cálculo del potencial propio del electrodo de pica.  | 132 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 46. Electrodo superficiales múltiples distanciados.   | 137 |
| Figura 47. Aplicación del principio de reflexión a los electrodos superficiales distanciados.                                      | 137 |
| Figura 48. Electrodo múltiple en arreglo circular.   | 139 |
| Figura 49. Electrodo múltiple en arreglo circular compuesto por cuatro electrodos individuales.                                    | 140 |
| Figura 50. Electrodo múltiple en línea.  | 142 |
| Figura 51. Electrodo múltiple en línea compuesto por cuatro electrodos individuales.   | 144 |
| Figura 52. Electrodo múltiple superficial compuesto por cuatro electrodos de pica.   | 146 |
| Figura 53. Electrodo profundo.   | 150 |
| Figura 54. Aplicación del principio de reflexión al electrodo profundo.  | 150 |
| Figura 55. Electrodo esférico enterrado.   | 151 |
| Figura 56. Electrodo de pica enterrado a la profundidad $t \gg l$ .  | 154 |
| Figura 57. Esquema para la determinación de la distribución del potencial sobre el suelo para el electrodo de pica enterrado.      | 156 |
| Figura 58. Transcurso del potencial para el electrodo de pica enterrado a la profundidad de $t = 10 m$ .                           | 158 |
| Figura 59 Aplicación del principio de reflexión al electrodo esférico enterrado a la profundidad $t > A$ .                         | 161 |
| Figura 60. Aplicación del principio de reflexión al electrodo de placa circular enterrado de manera rasante a la profundidad $t$ . | 162 |
| Figura 61. Aplicación del principio de reflexión al electrodo en anillo circular enterrado.  | 165 |
| Figura 62. Arreglo de cuatro electrodos semiesféricos colocados simétricamente sobre la circunferencia de un círculo.              | 169 |
| Figura 63. Electrodo múltiple compuesto por cuatro electrodos individuales semiesféricos.  | 171 |
| Figura 64. Electrodo múltiple de bandas.   | 177 |
| Figura 65. Aplicación del principio de reflexión a un electrodo múltiple de cinco bandas paralelas.                                | 179 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 66. Modos de conexión de los electrodos individuales en un electrodo múltiple de bandas paralelas.                                | 182 |
| Figura 67. Electrodo múltiple con $n$ bandas paralelas formando mallas rectangulares.  | 183 |
| Figura 68. Electrodo múltiple con dos bandas paralelas.  | 184 |
| Figura 69. Puntos donde se desea determinar el potencial del electrodo múltiple de bandas.   | 185 |
| Figura 70. Distribución del potencial del electrodo múltiple de bandas.  | 187 |
| Figura 71. Electrodos de banda para el control de la distribución del potencial.   | 190 |
| Figura 72. Electrodo de múltiple de bandas al que se le han agregado dos electrodos de control en los extremos.                          | 191 |
| Figura 73. Puntos donde se desea determinar el potencial del electrodo múltiple de bandas con dos electrodos de control en los extremos. | 192 |
| Figura 74. Distribución del potencial del electrodo múltiple de bandas con dos electrodos de control en los extremos.                    | 193 |
| Figura 75. Electrodo múltiple de bandas formando mallas cuadrículadas.   | 195 |
| Figura 76. Electrodo de placa elíptica con una superficie equivalente a la del electrodo de malla cuadrículada.                          | 196 |
| Figura 77. Posibles arreglos de electrodos en anillos circulares concéntricos.   | 198 |
| Figura 78. Aplicación del principio de reflexión a un sistema de electrodos en anillos circulares concéntricos.                          | 199 |
| Figura 79. Ejemplos de aplicación del electrodo múltiple en anillos.   | 202 |
| Figura 80. Electrodo múltiple compuesto de cuatro anillos concéntricos.  | 202 |
| Figura 81. Electrodo múltiple compuesto por cuatro anillos concéntricos colocados de manera rasante a una profundidad de $0.75 m$ .      | 205 |
| Figura 82. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo de la figura 81.                                  | 205 |
| Figura 83. Electrodo múltiple compuesto por dos anillos circulares.  | 207 |
| Figura 84. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple compuesto por dos anillos.               | 208 |
| Figura 85. Distribución del potencial del electrodo múltiple compuesto por dos anillos.  | 210 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 86. Electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.   | 211 |
| Figura 87. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.                | 212 |
| Figura 88. Distribución del potencial del electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.  | 215 |
| Figura 89. Electrodo múltiple con semiesfera y anillo.   | 215 |
| Figura 90. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple con semiesfera y anillo.                                     | 216 |
| Figura 91. Ejemplo de electrodo múltiple de semiesfera y anillo.   | 217 |
| Figura 92. Distribución de potencial del electrodo compuesto de semiesfera y anillo.   | 220 |
| Figura 93. Posibles configuraciones del electrodo múltiple de pica y anillo.   | 221 |
| Figura 94. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo de pica con sólo un anillo de control colocado de manera superficial. | 222 |
| Figura 95. Esquema para la determinación de la contribución de potencial del electrodo en anillo sobre el electrodo de pica.                                 | 224 |
| Figura 96. Ejemplo de electrodo múltiple de pica y anillo.   | 225 |
| Figura 97. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y anillo.  | 228 |
| Figura 98. Ejemplo de electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante.  | 229 |
| Figura 99. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de pica y anillo de control colocado de manera rasante.      | 229 |
| Figura 100. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante a una profundidad de $0.5 m$ .                      | 233 |
| Figura 101. Electrodo múltiple de pica y dos anillos de control colocados de manera rasante.   | 234 |
| Figura 102. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de la figura 101.   | 235 |
| Figura 103. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y dos anillos de control.   | 238 |
| Figura 104. Arreglo de electrodos comúnmente usado en subestaciones.   | 239 |
| Figura 105. Electrodo múltiple de semiesfera y pica.   | 241 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 106. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de semiesfera y pica.  | 242 |
| Figura 107. Ejemplo de electrodo múltiple de semiesfera y pica.   | 244 |
| Figura 108. Distribución de potencial del electrodo múltiple de semiesfera y pica.  | 246 |
| Figura 109. Electrodo múltiple en estrella.   | 263 |
| Figura 110. Ejemplos de aplicación de un electrodo múltiple en estrella.  | 264 |
| Figura 111. Electrodo múltiple de picas conectadas en paralelo.   | 269 |
| Figura 112. Malla a tierra.   | 273 |
| Figura 113. Electrodo puntual en un terreno de dos capas.   | 277 |
| Figura 114. Reflexiones de corriente en un suelo de dos capas con una fuente de corriente en el suelo más bajo.   | 282 |
| Figura 115. <i>a)</i> Electrodo puntual en la capa superior en un terreno de dos capas<br><i>b)</i> Sistema de imágenes equivalente que considera el límite tierra aire.                              | 283 |
| Figura 116. Sistema equivalente de múltiples imágenes en una tierra homogénea ilimitada ( $\rho_1$ ) para la evaluación del potencial en la primera capa, de una fuente puntual en la capa superior.  | 285 |
| Figura 117. <i>a)</i> Electrodo puntual en la capa del fondo de un terreno de dos capas<br><i>b)</i> Sistema de imágenes equivalente que considera el límite tierra aire.                             | 286 |
| Figura 118. Sistema equivalente de múltiples imágenes en una tierra homogénea ilimitada ( $\rho_1$ ) para la evaluación del potencial en la primera capa, de una fuente puntual en la capa del fondo. | 287 |
| Figura 119. Circuito de voltaje de paso.  | 296 |
| Figura 120. Circuito de voltaje de toque.   | 297 |
| Figura 121. Elipse.   | 313 |
| Figura 122. Hipérbola.  | 314 |
| Figura 123 Ventana principal programa de puesta a tierra.   | 316 |
| Figura 124 Ventana para el análisis de seguridad del electrodo de pica.   | 317 |

## LISTA DE TABLAS

|   | pág. |
|---|------|
| Tabla 1. Potenciales del electrodo semiesférico en función de $\varphi/I$ y de $\varphi_x/\varphi_0$  | 55   |
| Tabla 2. Potenciales del electrodo de placa circular  | 63   |
| Tabla 3. Potenciales del electrodo de pica.   | 72   |
| Tabla 4. Potenciales del electrodo en anillo en función de $[\rho]_{z=0}$   | 85   |
| Tabla 5. Voltajes del electrodo de pica.  | 98   |
| Tabla 6. Potenciales en dirección normal al eje del electrodo de banda enterrado  | 108  |
| Tabla 7. Potenciales del electrodo de placa semienterrado.  | 113  |
| Tabla 8. Números triples para determinar la integral elíptica normal del primer tipo por medio de la función media aritmética –geométrica.    | 121  |
| Tabla 9. Valores de $f(n)$ en función del número de electrodos $n$ .  | 140  |
| Tabla 10. Resistencia de un electrodo esférico con radio de $0.5 m$ a diferentes profundidades.   | 152  |
| Tabla 11. Ganancia en función de la profundidad para el electrodo de pica.  | 155  |
| Tabla 12. Potenciales del electrodo de pica enterrado a diferentes profundidades.   | 157  |
| Tabla 13. Cálculo de los potenciales en los puntos indicados en la figura 69.   | 186  |
| Tabla 14. Cálculo de los potenciales en los puntos indicados en la figura 73.   | 193  |
| Tabla 15. Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple compuesto por dos anillos.                             | 210  |
| Tabla 16. Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante. | 214  |
| Tabla 17. Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple con semiesfera y anillo.                               | 220  |
| Tabla 18. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y anillo.                                     | 228  |

|   |     |
|---|-----|
| Tabla 19. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante.      | 233 |
| Tabla 20. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y dos anillos de control.                 | 238 |
| Tabla 21. Cálculo de potenciales a lo largo de la línea recta que une a los electrodos de semiesfera y pica.                              | 246 |
| Tabla 22. Cálculo del radio equivalente de un electrodo múltiple en arreglo circular compuesto por distinto número de electrodos de pica. | 251 |
| Tabla 23. Cálculo de las constantes $c$ .   | 251 |
| Tabla 24. Resistencia combinada para diferente número de electrodos individuales en un electrodo múltiple en línea.                       | 258 |
| Tabla 25. Distancia media geométrica de picas paralelas.  | 272 |

## LISTA DE ANEXOS

|                                   | pag. |
|-----------------------------------|------|
| Anexo A. Coordenadas curvilíneas. | 303  |
| Anexo B. Descripción del programa | 316  |

## RESUMEN

TITULO: PUESTAS A TIERRA: PROGRAMA DE CALCULO DE PUESTAS A TIERRA DE MEDIANA POTENCIA \*

AUTOR: LUIS CARLOS LIZARAZO HERRERA \*\*

PALABRAS CLAVE: Puestas a tierra, diseño, electrocución, electrodo.

### DESCRIPCION

El diseño de las puestas a tierra, una medida de seguridad para disminuir el riesgo de electrocución y protección de los medios eléctricos de servicio, es una tarea que presenta dificultades al ingeniero electricista debido a la escasez de información válida, fundamental y coherente sobre esta materia.

Es por ello que en el presente proyecto se hizo una revisión de las bases matemáticas y metodologías para el diseño de una puesta a tierra con el fin de resolver esta dificultad y a la vez tener una base teórica para el desarrollo de un programa de cálculo de puestas a tierra en subestaciones de mediana potencia y centros de cómputo. Este programa se realizó con la idea de disponer de una herramienta que agilice el cálculo de las mismas y ayude al ingeniero electricista en la selección de la configuración de electrodo o arreglo de electrodos más adecuados.

Al disponer de un programa que toma en cuenta las diferentes metodologías para el modelado de una puesta a tierra es posible tener un mayor número de alternativas de solución en el diseño de las mismas lo que resulta en la elaboración de proyectos más adecuados desde los puntos de vista técnico y económico.

---

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Dirigido por Ciro Jurado Jerez

## SUMMARY

TITLE: GROUNDING: AVERAGE POWER GROUNDING CALCULATION PROGRAM\*

AUTHOR: LUIS CARLOS LIZARAZO HERRERA\*\*

KEYWORDS: Grounding, design, electrocution, electrode.

### ABSTRACT

The grounding design, a safety measurement to decrease electrocution risk and protection of electrical service resources, is a difficult task to electrical engineers due to scarcity of valid, fundamental and coherent information about this subject.

For that reason, the present project makes a revision of mathematic and methodological foundations for grounding design to resolve this difficulty and at the same time, to have a theoretical foundation for the development of a grounding calculation program in average power substations and computation centers. This program was conceived as a useful tool to electrical engineers to calculate and select an electrode configuration or an accurate electrode arrangement.

A program that takes into account different grounding modeling methodologies makes possible better solution options of design and permits an accurate project development from technical and economic point of views.

---

\* Project of grade

\*\* Faculty Engineering Physical mechanics, Engineerings Electrical , Electronic and Telecommunications School. Directed by Ciro Jurado Jerez

## INTRODUCCION

En las sociedades modernas la seguridad en los sitios de trabajo recibe especial atención ya que es más conveniente empeñarse en tratar de prevenir los accidentes en el trabajo que pagar los elevados costos sociales y económicos que estos ocasionan. Como sabemos, de manera directa o indirecta, en todos los sitios de trabajo participa la electricidad, en consecuencia, la prevención de los accidentes eléctricos requiere un cuidado adicional.

La puesta a tierra de los circuitos eléctricos es una medida directa de protección tanto para los medios de servicio como para los seres vivos, de ahí su trascendencia, no obstante se cometen errores al diseñarlas tales como su sobredimensionado lo cual las hace seguras pero económicamente más costosas o subdimensionarlas, sucediendo en este caso todo lo contrario, con el agravante que pueden ocasionar accidentes fatales. Estos errores se cometen debido a la escasa información (libros) sobre esta materia y que el problema puede ser resuelto de varias maneras dependiendo de la metodología que se use. Por esto la primera impresión que se tiene sobre esta teoría es que es un tanto ambigua y complicada. Ante este panorama el problema del diseño de un sistema de puesta a tierra termina resolviéndose con la ayuda de manuales, guías, normas, a través de programas de computadora; en este caso tratándose a la puesta a tierra con teorías de “caja negra” desconociendo los procesos que tienen lugar dentro de la caja; o lo que es peor, recurriendo a hábitos preestablecidos no comprobados.

Es por ello que en el presente proyecto tiene como meta revisar las bases matemáticas y metodologías para el diseño de una puesta a tierra con el fin de resolver estas dificultades y a la vez tener una base teórica para el desarrollo de un programa de cálculo de puestas a tierra de subestaciones de mediana potencia y centros de cómputo. Este programa se realiza con la idea de disponer de una herramienta que agilice el cálculo de las mismas y ayude al ingeniero electricista en la selección de la configuración de electrodo o arreglos de electrodos más adecuados.

# 1. PROBLEMÁTICA DE LA PUESTA A TIERRA

## 1.1 GENERALIDADES

En el año 1883 Carl August Steinheil comprueba que la tierra conduce la electricidad y que, por lo tanto, puede ser utilizada como circuito de retorno de ésta. Este descubrimiento pronto encontró aplicación en el campo de las comunicaciones con el desarrollo de la telegrafía por hilo y en la operación de las redes de suministro de energía eléctrica.

Desde entonces, el traspaso de corriente eléctrica al suelo en condiciones normales de operación como sucede en sistemas de comunicación o bajo condiciones de falla en redes de suministro de energía eléctrica, ha sido una práctica común.

La puesta a tierra se encarga de llevar a cabo este traspaso de corriente al terreno, ya se trate de corrientes de defecto o debidas a descargas atmosféricas, de carácter impulsional; por medio de la introducción de un elemento conductor llamado electrodo en el suelo y la conexión del mismo a través de un conductor a la red que necesita hacer este traspaso de corriente.

Con ello se logra:

- Limitar la diferencia de potencial que, en un momento dado, puede presentarse entre estructuras metálicas y tierra.
- Posibilitar la detección de defectos a tierra y asegurar la actuación y coordinación de las protecciones, eliminando o disminuyendo, así, el riesgo que supone una avería para las instalaciones y las personas.
- Limitar las sobretensiones internas de maniobra (transitorias y temporales) que puedan aparecer en la red eléctrica, en determinadas condiciones de explotación.

- Evitar que las tensiones de frente escarpado que originan las descargas de los rayos provoquen “cebados inversos”, en el caso de instalaciones exteriores y, particularmente en líneas aéreas.

La circulación de las intensidades mencionadas por la instalación de puesta a tierra originan la aparición de diferencias de potencial entre la instalación de puesta a tierra y el terreno que la rodea o entre dos puntos del mismo, por cuya razón debe concebirse la instalación de puesta a tierra para que, incluso con la aparición de tales diferencias de potencial se cubran los siguientes objetivos:

- Seguridad de las personas.
- Protección de las instalaciones.
- Mejora de la calidad del servicio.
- Establecimiento y permanencia de un potencial de referencia.

Debe hacerse especial énfasis en que la seguridad de las personas es lo que verdaderamente preocupa y se constituye en el fin primordial de la instalación de puesta a tierra, lo que no significa que se deje de reconocer la importancia de los otros tres objetivos.

En las instalaciones eléctricas de alta tensión la puesta a tierra es la medida técnica directa esencial de protección para las personas, formando sistema con los dispositivos de protección (en el caso de líneas con neutro puesto a tierra directa o indirectamente) y ,en ciertos casos, aplicando a la vez la medida de aislamiento de protección (suelo cubierto con una capa de grava); en cambio, en las instalaciones electrotécnicas de baja tensión se dispone de ocho medidas técnicas para la protección de las personas y/o animales útiles, de las cuales sólo en una la puesta a tierra es la esencial, interviniendo junto con algunas de las otras medidas sólo de manera auxiliar. Estas medidas de protección son:

Medidas que llevan conductor de Protección

- Protección por medio de la puesta a tierra.
- Conexión de las masas al neutro (neutralización).
- Conexiones equipotenciales (línea de protección).
- Circuito automático de protección por defecto de tensión (Dispositivo de tensión).
- Circuito automático de protección por corriente de defecto (relé diferencial).

#### Medidas que no llevan conductor de Protección

- Aislamiento de protección (Elemento de servicio y/o del lugar de emplazamiento).
- Empleo de pequeñas tensiones de seguridad (menor de 42 Voltios).
- Separación de circuitos.

Se ha establecido que cuando la tensión respecto a tierra es superior a 50 Voltios (excesiva tensión de contacto) se necesita aplicar alguna (o algunas simultáneamente) de tales medidas de protección adicionales.

Al considerar el riesgo de accidente por la puesta a tierra en una instalación eléctrica, debe tenerse en cuenta que éste sólo se producirá cuando ocurran ciertos sucesos aleatorios independientes, como son:

- Aparición de un defecto o falla a tierra en la instalación.
- Existencia de una resistividad del terreno y una distribución en el mismo de la corriente de defecto tales que puedan darse puntos con altos gradientes de potencial.

- Presencia de una persona en ese punto, en ese momento y en una posición tal que su cuerpo quede sometido a ese alto gradiente.
- La no existencia de una resistencia de contacto suficiente ni de cualquier otra resistencia en serie que limite la circulación de la corriente a través del cuerpo a un valor no peligroso.
- Duración de la falla y el contacto con el cuerpo el tiempo suficiente para causar daños con la intensidad de corriente dada.

Por lo tanto, para disminuir el riesgo de accidente debido a las diferencias de potencial que se originan al traspasar corriente en la tierra, a través de la puesta a tierra, necesitamos determinar las magnitudes de estos potenciales ya que por medio de estos valores se calcula la corriente máxima que circulará por el cuerpo de una persona y de esta forma se podrá analizar el grado de peligrosidad que ofrecerá la puesta a tierra.

Este análisis se hace con la ayuda de la electrofisiología, una rama de la medicina que estudia los efectos del paso de la corriente eléctrica a través del cuerpo humano y la producción de la electricidad en los órganos vivos.

De la electrofisiología se extrae la siguiente información la cual es relevante para el diseño de una puesta a tierra.

## 1.2 EFECTOS DEL PASO DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA A TRAVÉS DEL CUERPO HUMANO

Los efectos fisiológicos de la corriente eléctrica en el cuerpo, ordenados en orden de incremento de la magnitud de la corriente son percepción, contracción muscular, inconciencia, fibrilación del corazón, bloqueo de los nervios respiratorios y quemaduras.

La parte más sensible del cuerpo se encuentra en la retina; con sólo  $0,02 \text{ mA}$  aplicados al globo ocular se produce un fosfeno visual (sensación luminosa). Le sigue la lengua, con la intensidad de  $0,045 \text{ mA}$  y se manifiesta por medio de un sabor alcalino. En cuanto a la piel,

la percepción es variable y es función del electrodo, así como de las condiciones físicas en que se encuentre.

La corriente de  $1\text{ mA}$  es generalmente reconocida como el umbral de percepción, esto es, la magnitud de la corriente que una persona es justo capaz de detectar por una ligera sensación de hormigueo en sus manos o extremos de sus dedos al paso de la corriente.

Las corrientes de  $1 - 6\text{ mA}$ , a menudo llamadas corrientes de desprendimiento, aunque dolorosas, generalmente no impiden el control voluntario de los músculos de modo que una persona reteniendo un objeto energizado puede aún liberarse de este. El experimento clásico de Dalziel con 28 mujeres y 134 hombres proveyó de datos que indican una corriente de desprendimiento promedio de  $10,5\text{ mA}$  para mujeres y  $16\text{ mA}$  para hombres y  $6$  y  $9\text{ mA}$  como los respectivos valores umbral.

En el rango de  $9 - 25\text{ mA}$  las corrientes pueden ser dolorosas y hacen difícil o imposible el liberarse de objetos energizados cogidos con la mano. Para todavía más altas corrientes ( $20 - 50\text{ mA}$ ) puesto que la corriente puede interesar por igual a los músculos de la respiración; sofocación e incluso asfixia es posible, si la duración del choque eléctrico dura por minutos.

### 1.2.1 El mecanismo de electrocución.

No es hasta que magnitudes de corriente en el rango de  $60$  a  $100\text{ mA}$  son alcanzadas que la fibrilación ventricular (paro cardíaco) o la inhibición de la respiración (paro respiratorio) pueden ocurrir y causar lesiones o muerte. La fibrilación, más común que la asfixia como una causa de muerte, es la contracción desordenada y relajación de las fibras musculares cardíacas en los ventrículos que resultan en una pérdida de la acción de bombeo de las cámaras del corazón (paro cardíaco).

A menos que la circulación sea restaurada (por ejemplo, por desfibrilador) no más tarde que 3 o 4 minutos después del choque eléctrico, daños cerebrales irreversibles ocurren. El paro respiratorio sucede por la contracción de los músculos del pecho durante el paso de la corriente. Generalmente ocurre restauración espontánea de la respiración después que la corriente de choque ha cesado. Para duraciones de choque de unos pocos segundos o menos, el paro respiratorio es improbable. Es sólo cuando el paro respiratorio persiste después del choque eléctrico que un serio riesgo de muerte existe, si la víctima no es reanimada por respiración artificial. Lee[1] describe varios incidentes de electrocución, que sugieren que este paro respiratorio sostenido ocurre solamente cuando la trayectoria de la corriente es a través del centro respiratorio (formación reticular) localizado en la parte más baja del cerebro.

En los experimentos sobre animales la aplicación de una corriente de cincuenta miliamperes (50 mA) siguiendo una trayectoria de las extremidades anteriores a las posteriores, causó la parada respiratoria, pero ésta se restableció al interrumpir la circulación de la corriente. En las personas esta clase de efecto se presenta cuando la corriente atraviesa el tórax con una intensidad de 50 mA. Aunque los efectos fisiológicos no necesariamente conducen a la muerte de la persona, por los efectos físicos que se pueden presentar ( si ella está montada sobre una escalera puede caer de la misma) ya se considera como “*peligrosa para la vida*” y, en consecuencia, se le denomina “*corriente peligrosa*”. Reportes de accidentes de esta clase en personas han informado que, en ciertos casos, fueron necesarias de tres a ocho horas de aplicación de respiración artificial, para que el aparato respiratorio volviera a funcionar por si mismo.

Donde la mayor parte de los incidentes de electrocución no involucran la cabeza, la fibrilación es usualmente usada como una referencia en el diseño de instalaciones eléctricas seguras.

### 1.2.2 Factores concomitantes de la electrocución.

Se ha establecido que en realidad, se presentan una serie de factores aleatorios que pueden coadyuvar en la electrocución, como los siguientes:

- Complicaciones en el sistema circulatorio debido a coronarias, infartos o predisposición a los mismos.
- El peligro de electrocución aumenta con la edad; así, a partir de los 50 años existe mayor peligro.
- El cansancio; pues la vitalidad disminuye notablemente por exceso de trabajo físico.
- La sorpresa y el susto.
- En el caso de la mujer, cuando está embarazada aumenta el peligro debido a que su resistencia de cuerpo baja mucho.
- Presencia de alcohol en la sangre.
- Estados depresivos psíquicos.

### 1.2.3 Efectos térmicos de la corriente.

Cuando circulan por el cuerpo corrientes intensas, por ejemplo, a partir de 10 A, el calor producido es de la mayor trascendencia. En este caso es determinante la energía transformada en calor por el cuerpo, la cual es definida por medio de la siguiente expresión:

$$W = R \int i^2 dt, \text{ en joules}$$

En la cual  $R$  es la resistencia del cuerpo y  $\int i^2 dt$  es el impulso cuadrado de la corriente que se introduce al cuerpo en  $A^2 s$ .

El calor producido por la circulación de la corriente de alta intensidad, causa quemaduras y/o carbonización, tanto interna como externa, de diferentes grados de peligrosidad, en función de:

- La intensidad de la corriente.
- El recorrido de la corriente por el cuerpo.
- Duración de la corriente.
- Forma y frecuencia de la corriente.

Las altas intensidades de corriente a través del cuerpo son muy peligrosas, pues originan la destrucción de alúmina, así como la evaporación por cocción de los fluidos de los tejidos del cuerpo. Ello conduce frecuentemente, después de algunos días, a la muerte de la persona afectada, debido a que el cuerpo no puede eliminar y transformar los productos de la calcinación presentándose un cuadro de envenenamiento.

### 1.3 EL CIRCUITO DE CHOQUE ELÉCTRICO

Los choques eléctricos son posibles sólo cuando una corriente fluye a través del cuerpo de un ser humano o animal. Esto necesariamente significa la existencia de una trayectoria cerrada, el circuito de choque eléctrico, el cual incluye al menos una porción del cuerpo de la víctima.

Debido a las numerosas actividades desarrolladas por los seres humanos y la variedad de aparatos eléctricos usados, los puntos de contacto en un choque eléctrico pueden ser cualquiera en el cuerpo. Sin embargo, los puntos de contacto más comunes son básicamente dos: por medio de la(s) mano(s), o bien con un pie.

El tipo de contacto influye en la manera que se distribuye la corriente por el cuerpo y en su magnitud, ya que según sea su trayectoria, la resistencia que presentará el cuerpo tendrá diferente valor.

Ciertas trayectorias por el cuerpo son más peligrosas que otras, siendo la de mayor riesgo la que pasa por el tórax ya que afecta el corazón directamente, seguida por la de la mano izquierda hacia los pies. Algunos investigadores afirman que con este último recorrido de la corriente, el 88% de los accidentes son mortales.

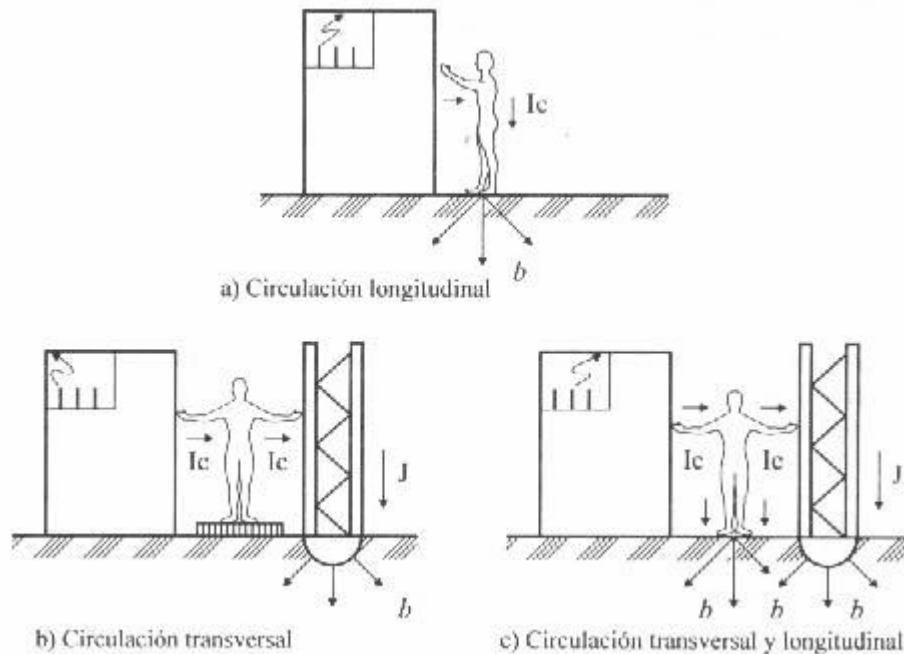
En el caso del contacto por medio del pie se origina el llamado “*voltaje de paso*”, en el cual la corriente circulará de un pie al otro recorriendo la parte baja del abdomen, por lo que resulta el menos dañino. De acuerdo con Loucks[2], un hombre puede resistir una corriente de pie a pie alrededor de 25 veces más alta que una corriente de mano a pie.

En cuanto al contacto por medio de las manos pueden diferenciarse dos casos desde el punto de vista del recorrido de la corriente:

1. Circulación de corriente longitudinal: de manos a pies.
2. Circulación transversal: de una mano a la otra pasando entonces por el tórax. Este recorrido sólo es posible si la persona está parada sobre suelo aislante; de no ser así, se presentaría una circulación transversal y al mismo tiempo una circulación longitudinal (figura. 1).

En la figura 2 se muestran las maneras típicas en que las personas pueden establecer un contacto con la corriente eléctrica de defecto indicando los valores promedio de la resistencia ofrecida por el cuerpo humano, según la técnica de la seguridad[3].

Figura 1. Tipos de contacto a través de las manos.



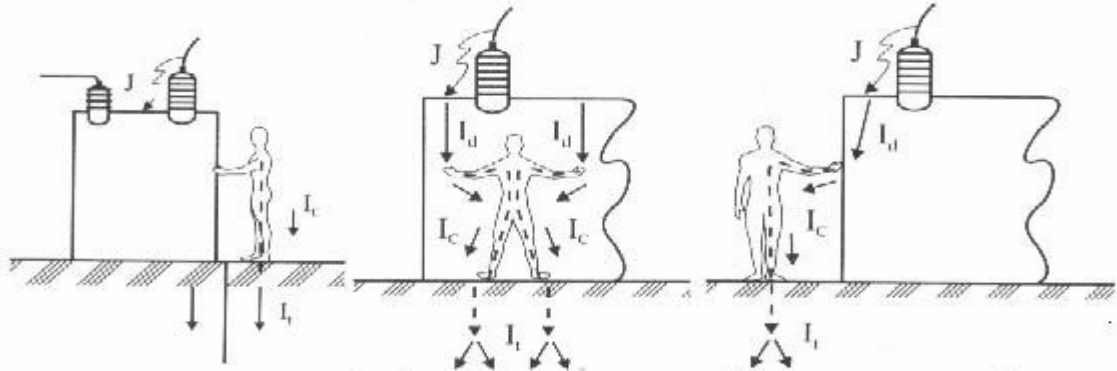
Tales aseveraciones sobre el grado de peligrosidad según el recorrido de la corriente a través del cuerpo están sustentadas en una larga serie de experimentos efectuados en animales con peso semejante al del hombre así como de análisis de accidentes.

### 1.3.1 Resistencia del cuerpo humano.

La resistencia del cuerpo humano ha sido el tema de muchas investigaciones. A continuación se presenta un pequeño resumen de los resultados obtenidos de una larga serie de experimentos efectuados por un grupo de investigadores de diferentes nacionalidades:

- De la medición de la resistencia del cuerpo en varios grupos de individuos se ha encontrado una gran variabilidad en ella. Por ejemplo, personas con valor de resistencia de cuerpo de cien mil ohmios e individuos con resistencia menor de mil ohmios. Tal variación repercute en el valor de la corriente de cuerpo para personas con alta o baja resistencia, siendo por supuesto mayor en individuos con menor resistencia. Este hecho explica algunos accidentes mortales que han sucedido con sólo 80 voltios en c.c.

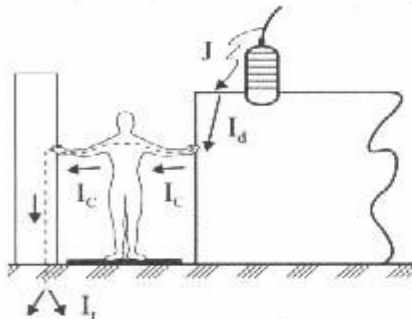
Figura 2. Posibles formas de contacto de personas con los medios eléctricos de servicio, y valor aproximado de las resistencias de cuerpo, según la técnica de la seguridad.



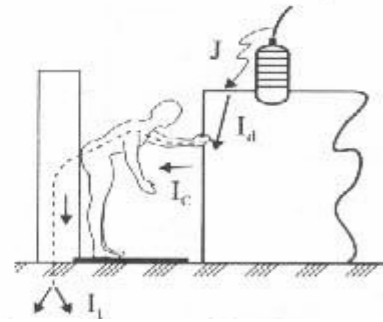
Contacto con una mano, estando la persona parada sobre suelo conductor; circulación de corriente longitudinal, de manos a pies:  $R_c \cong 750 \Omega$

Contacto con las dos manos, parada la persona sobre suelo conductor; circulación de corriente longitudinal, de manos a pies:  $R_c \cong 500 \Omega$

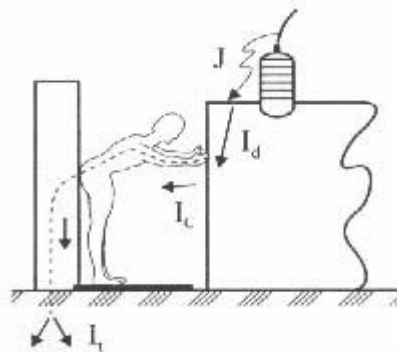
Contacto con una mano, la persona parada con un pie sobre suelo aislante y con el otro sobre piso conductor; circulación de corriente longitudinal, de la mano a pie:  $R_c \cong 1000 \Omega$



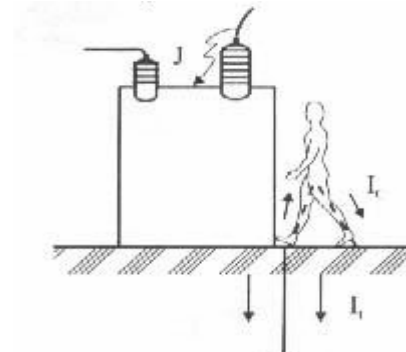
Contacto con una mano y con la otra tocando un muro conductor (columna, etc.), la persona parada en un piso aislante; circulación de corriente transversal de mano a mano:  $R_c \cong 1000 \Omega$



Contacto de mano a cadera, la persona parada sobre piso aislante; circulación de corriente parcial de mano a cadera:  $R_c \cong 500 \Omega$



Contacto de manos a cadera, la persona parada sobre suelo aislante; circulación de corriente parcial de manos a cadera:  $R_c \cong 250 \Omega$



Contacto con un pie, la persona parada sobre suelo conductor; circulación de corriente parcial de un pie a otro:  $R_c \cong 1000 \Omega$

- La resistencia del cuerpo humano es inversamente proporcional a la humedad relativa del aire y a la temperatura ambiente.

En una serie de experimentos sobre docenas de individuos con una resistencia de cuerpo de  $250\text{ k}\Omega$  a una temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$  y una humedad relativa de 50% al cambiar la temperatura ambiente a  $35^{\circ}\text{C}$  y la humedad a 95%, el valor de la resistencia de cuerpo se desplomó a valores entre  $15\text{ k}\Omega$  y  $20\text{ k}\Omega$ . Este hecho es sin duda muy significativo para el personal que trabaja en climas tropicales.

- La resistencia de cuerpo está también muy relacionada con la condición física de la persona, es decir, si se encuentra húmeda, mojada, etc.; la resistencia disminuye en ese orden.
- La resistencia varía de acuerdo con el modo o circunstancia del contacto, como se puede ver en la figura 2.
- Una variación notable de la resistencia del cuerpo humano se tiene según las condiciones físicas de la piel en los puntos de contacto.
- La resistencia del cuerpo varía de manera inversa con la corriente circulante.
- La resistencia cambia en función de la clase de corriente aplicada.
- La resistencia del cuerpo disminuye significativamente con niveles de voltaje aplicado cada vez más altos.

En una serie de pruebas que fueron realizadas en 25 personas de ambos sexos con diferentes profesiones, por la Empresa Eléctrica del Cantón de Zurich en el año 1929 mostraron una fuerte disminución de la resistencia de cuerpo con la magnitud de la tensión aplicada (del orden de  $40\text{ k}\Omega$  a cerca de  $2\text{ k}\Omega$ ), lo que significaba que en tales

circunstancias la resistencia que permanecía era únicamente la resistencia interna del cuerpo. El investigador Freiburger [ 4 ], llamó a este fenómeno “*perforación de la piel*”.

Por todo lo anterior, es evidente que la resistencia del cuerpo humano es determinada por múltiples factores. De fundamental importancia es la resistencia de la piel que, bajo condiciones normales, es dominante debido a que su valor es muchas veces más grande que el valor de la resistencia interna del cuerpo. Desafortunadamente, esta resistencia de la piel es altamente variable y, bajo condiciones de laboratorio, puede ser reducida a valores comparables a la resistencia interna del cuerpo.

Basados en esta experiencia de laboratorio, varios investigadores han sugerido valores de “peor caso” de resistencia de cuerpo que, cuando se usan en combinación con el criterio de seguridad de corriente de cuerpo, pueden utilizarse para obtener valores de tensiones permisibles con las que el cuerpo humano no se ve expuesto a ningún peligro.

Así, una serie de experimentos efectuados arrojaron valores mínimos para la resistencia de cuerpo bajo la piel entre 500 y 1000  $\Omega$ , medidos entre la superficie de las manos. No obstante, se han señalado varias situaciones donde el valor de la resistencia de cuerpo puede aún ser menor, en el orden de 200  $\Omega$ , usualmente cuando el efecto de la resistencia de la piel es disminuido por el mal estado de la misma en los puntos de contacto debido a raspaduras, pequeñas cortadas, etc.

Debe ser observado, sin embargo, que sólo bajo condiciones ideadas en laboratorio ha sido posible el medir los valores de resistencia de cuerpo. Tales condiciones ideadas del “peor caso” requieren que los sujetos humanos permanezcan en baldes de agua salada para formar un electrodo de contacto y apretando con las manos humedecidas con agua salada el otro electrodo.

#### 1.4 TERMINOLOGÍA EMPLEADA EN EL DISEÑO DE UNA PUESTA A TIERRA

En el diseño de una puesta a tierra se manejan varios conceptos que deben ser muy bien entendidos e interpretados a fin de evitar confusiones que puedan conducir a errores en su cálculo. Los conceptos son:

*Tensión de falla:* es la tensión que aparece a causa de una falla de aislamiento entre dos masas (envolventes de medios de servicio eléctrico), entre una masa y un elemento conductor, o bien entre una masa y tierra.

*Tensión a tierra o de electrodo:* es la tensión existente entre un electrodo o sistema de electrodos y un punto de referencia supuesto con potencial cero, cuando por dicho electrodo o sistema de electrodos circula una corriente de falla.

*Tensión de contacto:* es la diferencia de potencial que puede resultar aplicada durante un defecto entre la mano y el pie de la persona que toque con aquella a un elemento metálico o masa normalmente sin tensión.

*Tensión de paso:* es la diferencia de potencial que puede resultar aplicada entre los pies de una persona cuando en el terreno donde esté caminando, o parada, circula una corriente de tierra.

## 1.5 RELACIONES Y CONCEPTOS DETERMINANTES

De la anterior reseña, emergen tres campos problemáticos que son decisivos para el diseño de una puesta a tierra:

- 1) La magnitud de la resistencia de cuerpo que debe ser considerada para los cálculos de peligrosidad.
- 2) El valor de la corriente peligrosa para el cuerpo y sus efectos según la manera en que la persona haga el contacto con la corriente de defecto a tierra.

- 3) Los valores de voltaje permisible de electrodo y, por lo tanto, los voltajes de contacto y/o de paso, que deben satisfacer los diseños de los sistemas de puesta a tierra.

#### 1.5.1 De la resistencia del cuerpo humano

El comportamiento del cuerpo humano al paso de la corriente eléctrica es impredecible debido a que su resistencia es muy variable. Ello impide que en la normalización se fije un valor preciso de la resistencia de cuerpo con base en la cual se pueda planear y evaluar la seguridad de las personas contra el contacto de las corrientes peligrosas; sin embargo, se conoce un rango de valores dentro de los cuales se puede considerar a la generalidad de las personas, asumiendo que se presentan asimismo ciertas circunstancias características de las clases de instalaciones y de las condiciones de trabajo. En consecuencia, se considera que las condiciones más desfavorables, tanto en lo concerniente a las personas como a las condiciones de trabajo, se presentan dentro de las instalaciones de baja tensión, por lo que se recomienda adoptar valores que correspondan a condiciones desfavorables de cuerpo (húmedo, sin vestimentas de protección, piel dañada, etc.).

El problema de la magnitud de la resistencia del cuerpo humano a usarse en los cálculos de diseño de una puesta a tierra puede resolverse de cuatro formas:

- 1) Criterio riguroso: se asume que el cuerpo no presenta resistencia (se adopta la condición más desfavorable), por lo tanto, cuando se establece un contacto por medio de la mano o el pie con un elemento que conduce corriente a tierra, se considera como un contacto directo con una resistencia de paso igual a cero.
- 2) Criterio intermedio: este segundo enfoque, menos riguroso, acepta que una vez perforada la piel, el cuerpo ofrece una resistencia mínima longitudinal (de brazo a brazo o de pie a pie) de  $1000 \Omega$ . En este caso, según se realice el contacto, se debe agregar o no una resistencia de paso.

- 3) Criterio optimista: este enfoque, típico de la baja tensión, se considera con más detalle la manera en que la persona establece el contacto con el elemento defectuoso, como se muestra en la figura 2, según la técnica de la seguridad [ 3 ].

Trayectoria longitudinal:

Mano a pie  $\cong 1000 \Omega$

Mano a pies  $\cong 750 \Omega$

Trayectoria transversal:

Mano a mano  $\cong 1000 \Omega$

Trayectorias parciales:

Mano a tronco  $\cong 500 \Omega$

Manos a tronco  $\cong 250 \Omega$

- 4) Cuarto criterio: con base en reglas tecnológicas tales como normas, prescripciones y/o reglamentos oficiales de seguridad o en guías generales de diseño de instalaciones de puesta a tierra para subestaciones de alta tensión.

De esta forma se tiene una primera evaluación, un tanto superficial, del grado de peligro o de seguridad para los seres vivos dentro y fuera de las instalaciones de puesta a tierra, pero sin entrar a comprobar la magnitud real de la corriente que circula por el cuerpo en función de la manera particular en que establezca el contacto ni las condiciones del mismo.

Por ejemplo, en la guía para “la puesta a tierra segura en subestaciones[5]” de la IEEE Std. 80-1986, se declara que se adopta el valor de  $1000 \Omega$  para la resistencia de cuerpo, considerando las trayectorias de una mano a ambos pies, así como de un pie a otro pie.

Este enfoque procura, primordialmente, facilitar el trabajo de planeación del electrodo (múltiple) de puesta a tierra, dejando el problema de la seguridad de los seres vivientes, tanto dentro como fuera de tal sistema, en un segundo plano, al no entrar en los detalles de

su comprobación. Los valores de resistencia de cuerpo que generalmente se asumen en el nivel de alta tensión son  $1300 \Omega$ ,  $2000 \Omega$  y  $3000 \Omega$ .

### 1.5.2 Corriente de cuerpo permisible.

En el diseño de un sistema eléctrico de puesta a tierra, uno de los más importantes aspectos a ser considerados es la seguridad de la instalación durante condiciones de falla cuando la corriente entra a el sistema de puesta a tierra y causa diferencias de potencial entre varios puntos accesibles de cualquier estructura metálica aterrizada y la superficie del suelo en la vecindad del sistema de puesta a tierra. A fin de asegurar la seguridad de una instalación, el ingeniero debe saber la más alta corriente de cuerpo tolerable (o voltaje) que debe ser comparada con las corrientes calculadas o medidas bajo condiciones de falla. Este importante valor de referencia es el umbral de la corriente de fibrilación o corriente de cuerpo tolerable usualmente especificada por normas nacionales e internacionales o guías y es determinada de la ecuación de electrocución. En Norteamérica, la ecuación propuesta por Dalziel [ 6 ] es recomendada por la ampliamente usada guía de la IEEE N<sup>o</sup> 80. En otros continentes y países, diferentes ecuaciones están en uso.

Sin embargo, todas las ecuaciones conducen a resultados prácticamente equivalentes y relacionan la magnitud de la corriente de cuerpo con su duración sin distinguir entre los puntos de aplicación del estímulo eléctrico el cual es implícitamente asumido senoidal y con frecuencia de 50 a 60 Hz.

La ecuación de electrocución es de vital importancia en el diseño de etapas de mitigación para la prevención efectiva de choques eléctricos.

#### 1.5.2.1 Ecuación de electrocución.

La ecuación de electrocución, aplicable a humanos, puede sólo ser determinada empíricamente al extrapolar datos experimentales obtenidos de pruebas en animales de cuatro extremidades y primates.

A pesar del desacuerdo entre los diferentes investigadores acerca de la naturaleza de esta ecuación, ellos coinciden en que el cuerpo humano puede soportar niveles de corriente más altos si el tiempo de aplicación se reduce.

Las ecuaciones de electrocución más ampliamente usadas son las siguientes:

#### 1.5.2.1.1 Ecuación de Dalziel.

Dalziel observó en los experimentos desarrollados por otros que energía constante fue requerida para fibrilar el corazón en un intervalo de tiempo entre 8,3 y 5000 mS. En esta región de tiempo, él concluyó que la corriente que fibrila es proporcional a  $t^{-1/2}$  implicando una relación de energía constante.

Dalziel parte de una energía permisible, la cual no debe ser sobrepasada ( $E \leq 27 \text{ Ws}$ ), pues experimentos con una energía de 10 Ws originan descargas eléctricas severas. Con esta hipótesis, Charles Dalziel concluyó que el 99,5% de las personas con un peso aproximado de 50 kg. podrían soportar, sin fibrilación ventricular, corrientes determinadas por medio de la siguiente expresión:

$$I^2 t = 0,0135 \quad \text{o bien} \quad I_c = \frac{0,116}{\sqrt{t}} \quad \text{en la cual}$$

$I_c$  = corriente a través del cuerpo en mA (rms).

$t$  = tiempo de aplicación en segundos.

0,0135 = "constante de energía" derivada empíricamente.

Esta ecuación no es válida para tiempos muy cortos o muy largos, y algunos valores de corriente pueden ser tolerados indefinidamente.

#### 1.5.2.1.2 Ecuación del grupo médico de la UNIPEDA.

Esta ecuación fue determinada a partir de estudios del Grupo Médico de la Unión Internacional de Productores y Distribuidores de Energía Eléctrica (UNIPEDA) en Europa.

La expresión básica es la siguiente:  $I_{pe} = I_d + \frac{10}{t}$

En la cual:

$I_{pe}$  = corriente de contacto peligrosa en mA.

$I_d$  = corriente de desprendimiento en mA (distinta para hombres, mujeres y niños). Se adopta el valor promedio de 10 mA.

$t$  = tiempo de permanencia del defecto en segundos.

Un medio gráfico para el análisis de la peligrosidad de la corriente eléctrica en las instalaciones de baja tensión es aquel que se basa en numerosos estudios médicos [ 7 ] de casos de accidentes por contactos con duración menor a un segundo.

En la figura 3, en el eje de las ordenadas están los tiempos de permanencia de la corriente y en el eje de las abscisas la intensidad de la corriente de defecto.

Se distinguen cuatro zonas de influencia de la intensidad de la corriente de defecto:

Zona 1: Margen de disparo del interruptor automático por corriente de defecto, con

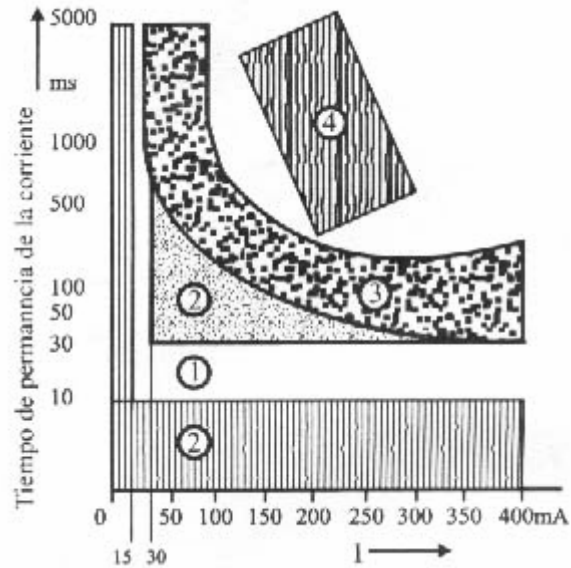
$$I_{FN} = 30 \text{ mA} .$$

Zona 2: La corriente de defecto no influye sobre el ritmo cardíaco ni sobre el sistema nervioso.

Zona 3: La intensidad de la corriente es aún soportable, más si pasa de 50 mA se llega a perder el conocimiento.

Zona 4: Peligro de muerte; se produce ya la fibrilación ventricular.

Figura 3. Gráfica de peligrosidad con base en tiempos y umbrales de interruptores diferenciales.



Los fabricantes de interruptores diferenciales (que se utilizan en la medida adicional de protección con circuito de corte por intensidad de defecto) definen los tiempos y umbrales de interacción de sus aparatos en relación con las anteriores zonas.

### 1.5.3 Voltaje de cuerpo máximo.

En las instalaciones de alta tensión se acostumbra fijar los valores de voltaje de cuerpo máximo según la clase de red que alimente la instalación en cuestión, es decir, de la manera en que se maneje el punto estrella de la fuente alimentadora (alternador o transformador).

En el caso de una red con neutro aislado o compensado (por medio de bobina de extinción) se adopta el valor de 125 V para el voltaje de electrodo máximo admisible (establecido en varios sistemas de normalización, por ejemplo, en la VDE/DIN), lo cual generalmente satisface el requisito de seguridad exigido (voltaje de cuerpo máximo de 50 a 65 V), puesto que el voltaje de cuerpo máximo aplicado será sólo una parte del voltaje de electrodo.

En una red con el neutro puesto a tierra directa o indirectamente (que es el caso general en líneas de alta tensión), resulta práctica y económicamente imposible limitar el voltaje de electrodo al valor de 125 V, debido a las elevadas corrientes a tierra en esta clase de redes, así que se deben tomar en consideración otras medidas técnicas para garantizar la seguridad de los seres vivos. Es por ello que el voltaje de cuerpo máximo admisible se determina en función del tiempo de permanencia de la corriente a tierra (del tiempo de eliminación de la falla de los dispositivos de protección) y de otros aspectos relacionados con la zona específica en que se puedan encontrar (en el área del sistema de tierra o fuera, voltaje de contacto o de paso, densidad de tráfico de personas y vehículos en el caso de zonas externas, etc.).

En las instalaciones de baja tensión, los valores de voltaje de contacto se acostumbra fijarlos en función de la naturaleza particular de la instalación en cuestión. Los valores normalizados oscilaban entre 50 V (en la SEV de Suiza) y 65 V (en la VDE de Alemania), pero actualmente, la mayoría de países han adoptado el valor de 50 V, excepto para locales muy especiales en los cuales se requiere una alta seguridad, como por ejemplo, en quirófanos o donde existan materias explosivas o inflamables, en los cuales se limita el voltaje de cuerpo a solamente 24 V.

En resumen, no se pueden fijar valores exactos de las corrientes peligrosas para personas y/o animales útiles; en consecuencia, en la práctica mundial se manejan diferentes conceptos (voltaje de paso, voltaje de contacto, peligrosidad de la corriente eléctrica, etc.) que finalmente variarán en función de la resistencia de cuerpo que se asuma. Desde luego, es conveniente que las personas que planeen y diseñen los sistemas de tierra conozcan los posibles niveles en que se puede resolver el problema de la seguridad de los seres vivientes (desde el más rígido al más optimista) para que estén en posibilidad de perseguir soluciones de compromiso de manera racional.

## 1.6 CRITERIOS DE SEGURIDAD

Es ahora posible el definir las condiciones que garantizarán que la corriente de cuerpo no es un umbral de corriente de fibrilación para al menos un  $x\%$  de la población.

Si  $V_c$  es el voltaje de contacto calculado (mano a pie), la corriente de cuerpo  $i$  debe ser menor que el umbral de fibrilación  $I_b$  :

$$i = \frac{V_c}{R_b + \frac{1}{2}R_{pie}} \leq I_b$$

Si  $V_p$  es el voltaje de paso calculado (pie a pie) tenemos similarmente:

$$i = \frac{V_p}{R_b + 2R_{pie}} \leq I_b$$

Donde:

$R_b$  = resistencia del cuerpo.

$R_{pie}$  = resistencia serie de suelo a pie.

La resistencia serie de suelo a pie se puede determinar al suponer que un pie posado sobre el suelo es asimilable a una placa circular de un diámetro aproximado de 20 cm., por lo que su resistencia de tierra, expresada en función de la resistividad del suelo superficial,  $\rho_s$  ( $\Omega \cdot m$ ) viene dada por la siguiente fórmula:

$$R_{pie} = \frac{\rho_s}{2d_e} = \frac{\rho_s}{2 \times 0.2} = 2,5\rho_s$$

Donde:

$\rho_s$  = resistividad superficial del terreno.

$d_e$  = diámetro equivalente del pie (20 cm).

Como los dos pies nunca están posados completamente en el suelo de forma simultánea, cuando una persona está caminando, se asocia a cada pie una superficie inferior ( $200 \text{ cm}^2$  en lugar de  $314 \text{ cm}^2$ ) y una resistencia de tierra mayor,  $3\rho_s$ , valor comúnmente usado en las puestas a tierra de las subestaciones.

En la expresión de cálculo de la corriente de cuerpo por voltaje de contacto se toma la mitad de la resistencia de suelo a pie debido a que en esta clase de contacto la persona se supone tocando con una mano la estructura puesta a tierra y parada con los pies juntos. A causa de la interacción entre los dos pies, las resistencias a tierra de los mismos están en paralelo, lo cual resulta en una resistencia equivalente igual a la mitad de la resistencia de suelo a pie. En la otra expresión, la resistencia de suelo a pie se multiplica por dos, pues en este caso, el contacto se realiza entre los dos pies por lo que las dos resistencias están en serie.

Por ejemplo, si la ecuación de Dalziel es usada, y se asume una resistencia de cuerpo de  $1000 \Omega$  las anteriores ecuaciones llegan a ser:

$$i = \frac{V_c}{1000 + 1.5\rho_s} \leq \frac{0,116}{\sqrt{t}}$$

$$i = \frac{V_p}{1000 + 6\rho_s} \leq \frac{0,116}{\sqrt{t}}$$

Si se usa la ecuación del grupo médico de la UNIPEDA y la misma resistencia de cuerpo, la corriente de cuerpo viene dada por las siguientes expresiones:

$$i = \frac{V_c}{1000 + 1.5\rho_s} \leq I_d + \frac{10}{t}$$

$$i = \frac{V_p}{1000 + 6\rho_s} \leq I_d + \frac{10}{t}$$

Los voltajes de paso y contacto dependen de la geometría del electrodo, dimensiones, de la disposición en el espacio de los diferentes electrodos si es un electrodo compuesto, la corriente de falla a tierra y de la resistividad del terreno que rodea el electrodo; siendo este último factor el que tiene más influencia en su comportamiento. Estos valores se determinarán para cada tipo y disposición de electrodos en los siguientes capítulos.

## 1.7 RESISTIVIDAD DEL TERRENO

Aunque los dos principales componentes del terreno; el óxido de silicio y el óxido de aluminio, son excelentes aisladores, la tierra conduce la electricidad debido a la presencia de sales solubles y humedad embebida entre esos materiales. La conductividad del suelo es, por lo tanto, esencialmente de naturaleza electrolítica; en ella, el transporte de la electricidad se realiza por medio de conducción iónica (por moléculas que tienen un exceso o deficiencia de electrones). La corriente fluye lentamente en comparación de la conducción óhmica y el movimiento representa un real transporte de material que generalmente resulta en una transformación química.

En el sistema internacional de unidades se usa el símbolo  $\gamma$  (gamma) para la conductividad eléctrica y sus unidades son el siemens por metro ( $S/m$ ). Su expresión matemática es:  $\gamma = G \frac{l}{q}$ , en la cual  $G$  es la conductancia eléctrica ( $G = \frac{1}{R}$ );  $l$  = longitud

del conductor,  $q$  = sección transversal del conductor; y  $R$  = resistencia eléctrica en  $\Omega$  ( $R = \frac{1}{G} = \frac{V}{I}$ ). Generalmente, en la práctica, la conductividad se expresa por el valor de su

inversa que es la resistencia eléctrica específica, que se denota por la letra griega Rho ( $\rho$ ) y se expresa matemáticamente por medio de  $\rho = \frac{1}{\gamma} = R \frac{q}{l}$  ( $\Omega \cdot m$ ).

En relación con las dimensiones de la resistividad del suelo, debe tenerse presente que es práctica usual “simplificar” sus unidades ( $\Omega \frac{m^2}{m}$ ) e indicarla como  $\Omega \cdot m$ .

La resistividad eléctrica de cualquier sustancia se determina numéricamente por la resistencia que se obtiene en un centímetro cúbico de esa sustancia, tomada en forma de cubo, a la corriente eléctrica dirigida perpendicularmente a una de las aristas de ese cubo.

Debe señalarse que, incluso en los casos más favorables, la resistividad del terreno es mucho mayor que la presentada por los metales. Por ejemplo, el cobre, que es el material más utilizado en la electrotecnia, presenta una resistividad de:

$$\rho_{cu(20^{\circ}C)} = \frac{1}{58} \left( \Omega \frac{mm^2}{m} \right) = \frac{1}{58} \cdot \frac{\Omega mm^2}{m} \cdot \frac{1m^2}{10^6 mm^2} = \frac{1}{58 \times 10^6} \Omega \cdot \frac{m^2}{m} = \frac{1}{58 \times 10^6} \Omega \cdot m$$

Mientras que para un terreno excelente, en circunstancias favorables, rara vez podría alcanzarse una  $\rho_i = 1 \Omega \cdot m$ . Por lo tanto, en el mejor de los casos, la tierra posee una resistividad 58 millones de veces mayor que la del cobre. Por esta razón poco importa, desde el punto de vista de la resistividad, el metal utilizado como electrodo.

Debido a la alta resistividad, todas las corrientes que fluyen a través de la tierra sufren una considerable caída de voltaje por lo que se debe romper con el concepto popular que el potencial de la tierra es siempre cero. Una sustancial intensidad de campo eléctrico o gradiente de potencial, puede desarrollarse y afectar regiones extensas de la superficie de la tierra.

La resistividad de la tierra tiene las siguientes características:

- Es extremadamente variable de un lugar a otro, de acuerdo con la naturaleza del suelo o de las rocas y su grado de humedad. Los valores extremos varían de un inusual bajo valor de resistividad de  $1 \Omega \cdot m$  a un inusual alto valor de  $10000 \Omega \cdot m$ .
- La tierra en un lugar dado, es a menudo muy heterogénea presentándose capas, bolsas, depósitos, etc. Tanto horizontal como verticalmente.
- La resistividad de las capas superficiales de la tierra muestran considerables variaciones debido a cambios climáticos, lluvias, sequías y heladas. Este efecto es encontrado hasta una profundidad de uno a dos metros aproximadamente.
- La conductividad de la tierra es de naturaleza macroscópica ya que su magnitud depende de múltiples factores, tales como:

#### 1.7.1 Factores que influyen en la resistividad del terreno.

##### 1.7.1.1 Composición del terreno.

La resistividad varía de manera muy acusada dependiendo de la composición del terreno. Sucede incluso, que para una misma clase de terreno, situado en distintos parajes, la resistividad puede ser sensiblemente diferente.

Aunque material más viejo, en general, presenta más alta resistividad, muchas excepciones han sido encontradas. El fango, la arcilla y la piedra caliza usualmente tienen las resistividades más bajas; materiales arenosos y rocosos tienen la más alta resistividad.

Los valores extremos que se encuentran en la práctica pueden variar de algunas decenas de  $\Omega \cdot m$  para terrenos orgánicos y húmedos a una decena de miles de  $\Omega \cdot m$  para granitos secos.

#### 1.7.1.2. Sales solubles y su concentración.

Al ser aislantes los principales componentes del terreno, la conductividad del suelo es, esencialmente de naturaleza electrolítica, esto es, la conducción de corriente tiene lugar, principalmente, a través del electrolito formado por las sales y el agua habitualmente contenida en el terreno. La composición y la cantidad de estas sales solubles, ácidos o bases presentes en el suelo afectan considerablemente su resistividad.

#### 1.7.1.3. Estado higrométrico del terreno.

El contenido de agua o grado de humedad del terreno influye de forma apreciable sobre su resistividad. Su valor no es constante ya que varía con el clima, época del año, naturaleza del subsuelo y la profundidad considerada.

El principal efecto del agua en el terreno es disolver las sales solubles, de modo que, al aumentar el grado de humedad en el suelo, la resistividad disminuye con rapidez pero, a partir de cifras del orden de 15% en peso, esta disminución es mucho menos pronunciada debido a la práctica saturación del mismo.

#### 1.7.1.4 Temperatura.

La resistividad del terreno aumenta a medida que desciende la temperatura y este aumento es mucho más pronunciado al alcanzarse los  $0^{\circ}C$ . Esto se debe a que, a medida que es mayor la cantidad de agua en estado de congelación, se va reduciendo el movimiento de los electrolitos, lo cual resulta en un aumento de su resistividad. Por ello en zonas con peligro de heladas es aconsejable enterrar los electrodos a una profundidad que no alcance esta temperatura.

#### 1.7.1.5 Granulometría.

Hace referencia al tamaño del grano, el cual influye tanto en la porosidad como en la capacidad del terreno para retener humedad. A mayor tamaño de grano mayor es la resistividad del terreno. Esta es la razón por la cual el valor de la resistividad de la grava es superior a la correspondiente a la arena y que el de ésta supere al de la arcilla.

El tamaño de grano también influye sobre la calidad del contacto con los electrodos. Por ello las tierras de granos grandes tales como gravas, guijarros (piedrecitas), etc. hacen difícil el establecer electrodos de tierra satisfactorios, y es a menudo necesario dar solución a esta situación rodeando la superficie de los mismos con un espesor de tierra fina o con algún otro material relativamente buen conductor.

#### 1.7.1.6 Compacidad.

La resistividad aumenta con el grado de compactación del terreno, pues, entre más compacto es el suelo, su textura es más apretada, disminuyendo su porosidad y por lo tanto su capacidad para retener humedad. Por esta razón es que los suelos compuestos por materiales rocosos presentan valores de resistividad más altos.

Como regla, entre más compacta es la roca, más antigua es y más grande su resistividad. Entre los materiales rocosos más compactos se encuentran el granito, gneis, esquisto y el basalto.

#### 1.7.1.7 Estratigrafía.

En general se asume que el terreno es homogéneo, es decir, que tiene la misma naturaleza geológica y, por lo tanto, presenta la misma conductividad en cualquier punto del volumen del terreno. Esta suposición se hace para facilitar el análisis del comportamiento de los diferentes electrodos al paso de una corriente eléctrica.

En realidad, el subsuelo presenta varias capas con características eléctricas muy diversas lo que ocasiona que su resistividad total sea la resultante de las correspondientes a las distintas capas que los constituyen. Puede suceder que una sola capa presente una resistividad tan baja que la influencia de las demás sea imperceptible, como es el caso, cuando se alcanzan zonas de agua.

Por todo lo anterior, es evidente que la resistividad del terreno es una magnitud variable y el único camino aceptable para conocer su valor consiste en medirla, lo que permite establecer su magnitud en las condiciones existentes en cada caso.

#### 1.7.1.8 Otros factores.

Existen, sin embargo, otros factores distintos de los ya enumerados que son susceptibles de modificar apreciablemente la resistividad del terreno pero que, por su naturaleza eléctrica, sólo pueden surgir posteriormente al establecimiento de la red de tierra, tales como:

- a) El efecto de gradientes de potencial elevados.
- b) El calentamiento del suelo a consecuencia de la circulación de corrientes de puesta a tierra elevadas o de forma prolongada.

##### 1.7.1.8.1 Gradientes de potencial elevados.

La resistividad del suelo no es afectada por un gradiente de voltaje a menos que se exceda un cierto valor crítico. El valor varía un poco con el material del suelo pero este usualmente tiene la magnitud de varios kilovoltios por centímetro. Una vez excedido, los arcos pueden desarrollarse en la superficie del electrodo y progresar en la tierra incrementando su tamaño efectivo, hasta que los gradientes son reducidos a valores que el material del suelo puede soportar.

Por diseño, debe evitarse el establecimiento de tales descargas, por que deterioran rápidamente los electrodos. Donde el sistema de puesta a tierra normalmente es diseñado para cumplir con los más exigentes criterios de seguridad de voltaje de contacto y de paso, el gradiente puede ser siempre asumido por debajo del valor crítico.

#### 1.7.1.8.2 Calentamiento del suelo por la circulación de corrientes elevadas.

Si un electrodo de puesta a tierra transporta corriente continuamente, o aún, por un tiempo corto, la elevación de la temperatura del suelo debe ser considerada a fin de evitar una sobrecarga que pueda evaporar la humedad.

La temperatura es máxima en la proximidad inmediata del electrodo y las condiciones se convierten en críticas cuando se acerca a  $100^{\circ}C$ , pues, al provocarse la evaporación rápida del agua ocluida, queda el electrodo en contacto con una capa deshidratada muy resistente que incluso puede llegar a producir la calcinación del terreno a su alrededor. La toma de tierra pierde entonces su poder de evacuación y tiende a subir su potencial hasta la tensión simple de la red, situación evidentemente peligrosa.

La densidad de corriente  $J$  alrededor de un electrodo esférico con radio  $B$  embebido en la tierra varía sobre la distancia  $r$  así:  $J = \frac{I}{4\pi r^2}$

Por lo tanto una cantidad de calor  $\rho J^2$  es producido en cada elemento de volumen, el cual puede ser considerable debido al alto valor de la resistividad  $\rho$ . Este calor es en parte almacenado en los elementos de volumen de la tierra que tienen un calor específico medio

de  $C_e \cong 1,75 \times 10^6 \text{ Ws/m}^3 \cdot ^\circ\text{C}$ ; en parte conducido de las más altas a las más bajas temperaturas dentro de la tierra, la conductividad calórica siendo  $\lambda = 1,2 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ . Aunque estas dos constantes térmicas del suelo son de mayor importancia, sus valores verdaderos rara vez han sido medidos exactamente.

La ecuación diferencial de la conducción radial de calor alrededor de una esfera es:

$$C_e \frac{d\theta}{dt} - \frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = \rho J^2$$

Es difícil obtener una solución general de esta ecuación donde  $J$  varía con  $r$ . Sin embargo, se pueden obtener soluciones parciales de esta ecuación al analizarla desde el punto de vista de las fases de calentamiento, a saber, el estado estable y estado transitorio.

#### 1.7.1.8.2.1 Calentamiento de estado estable.

Para corrientes a tierra constantes, la derivada de tiempo en la anterior ecuación desaparece y la ecuación diferencial llega a ser:

$$\frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + \rho \left( \frac{I}{4\pi r^2} \right)^2 = 0$$

Con dos simples integraciones la solución para la distribución de temperatura  $\theta$  sobre la

distancia  $r$  es: 
$$\theta = \frac{\rho}{\lambda} \left( \frac{I}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{2r} \right)$$

La máxima temperatura de la puesta a tierra en el electrodo con  $r = B$ , es:

$$\theta_B = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda} \left( \frac{I}{4\pi B} \right)^2$$

Y depende sólo de dos constantes de tierra  $\rho$  y  $\lambda$  y de la densidad de corriente lineal  $I/B$ .

La corriente admisible a tierra del electrodo esférico es por lo tanto:

$$I = 4\pi B \sqrt{2 \frac{\lambda}{\rho} \theta} = \frac{1}{R} \sqrt{2\rho\lambda\theta}$$

Donde el término de la mano derecha es obtenido al sustituir la resistencia  $R = \frac{\rho}{4\pi B}$

La capacidad de transporte de corriente del electrodo es así determinada, además de las constantes del terreno, por la resistencia y el aumento de temperatura  $\theta$  solamente.

Donde el flujo de calor y la distribución de corriente alrededor de los electrodos de cualquier forma siguen la misma ley matemática, esto es, la ecuación diferencial de Laplace, la última expresión es válida no sólo para electrodos esféricos sino para cualquier forma de electrodo sea este una pica, un anillo, un disco o una forma más complicada. Por lo tanto, si la resistencia es conocida, la cual difiere con la forma, la capacidad de carga constante de corriente puede ser determinada fácilmente.

El voltaje en el electrodo de puesta a tierra, medido del metal a un punto distante es igual a:

$$V = IR = \sqrt{2\rho\lambda\theta}$$

Además de las constantes del suelo  $V$  depende solamente de la elevación de temperatura en el estado estable. Inversamente, el voltaje aplicado al electrodo de tierra determina su temperatura de estado estable. Estas conclusiones son válidas para cualquier forma de electrodo.

Como ejemplo, para  $\theta = 60 \text{ }^\circ\text{C}$  en suelo húmedo con  $\rho = 100 \text{ } \Omega \cdot m$ .

$$V = \sqrt{2 \cdot 10^2 \cdot 1.2 \cdot 60} = 120 \text{ V}$$

Este voltaje no debe ser sobrepasado para no elevar la temperatura del terreno en más de  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ .

La densidad de corriente admisible en la superficie del electrodo de puesta a tierra, donde la más alta temperatura existe, determinada para un electrodo esférico es:

$$J = \frac{I}{4\pi B^2} = \frac{1}{B} \sqrt{2 \frac{\lambda}{\rho} \theta}$$

Para el anterior ejemplo, con  $B = 1 \text{ m}$

$$J = \frac{1}{1\text{m}} \sqrt{2 \cdot \frac{1.2}{10^2} \cdot 60} = 1,2 \text{ A/m}^2$$

Así que la densidad de corriente permitida para una carga constante de corriente del electrodo es justamente pequeña. El suelo que rodea el electrodo no debe calentarse hasta cien grados celsius, donde la humedad podría entonces evaporarse completamente, y la corriente podría ser interrumpida por el enorme incremento de la resistencia.

#### 1.7.1.8.2.2 Calentamiento de estado transitorio.

Para una carga de tiempo corto del electrodo de puesta a tierra el segundo término de la ecuación de conducción de calor puede ser despreciado y la ecuación diferencial llega a ser:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho}{C_e} J^2$$

La elevación de temperatura sigue así la misma ley de los conductores lineales ordinarios. Si la resistividad  $\rho$  y el calor específico  $C_e$  son constantes, la elevación de temperatura es lineal con el tiempo y la densidad de corriente admisible es:

$$J = \sqrt{\frac{C_e \theta}{\rho t}}$$

Esta ecuación es válida para cada elemento de volumen de suelo independientemente del patrón de flujo de la corriente y por lo tanto para cualquier forma de electrodo de puesta a tierra.

Por ejemplo, un electrodo en un suelo húmedo con resistividad  $\rho = 100 \Omega \cdot m$  y para una elevación de temperatura que no exceda  $60^\circ C$  puede ser cargado por un período de tiempo de 100 segundos por una densidad de corriente de:

$$J = \sqrt{\frac{1,75 \cdot 10^6}{10^2} \cdot \frac{60}{100}} = 102,4695 \text{ A}/m^2$$

Lo cual es un alto valor. Para suelo arenoso con resistividad diez veces más alta, una carga de tiempo corto a la misma densidad de corriente es permitida por diez segundos solamente. Más altas densidades de corriente o períodos de carga más largos podrían evaporar la humedad del suelo en un tiempo muy corto y una explosión del espacio que rodea el electrodo podría suceder..

El voltaje en el electrodo con carga de tiempo corto puede alcanzar un alto valor. En el ejemplo para el suelo húmedo con resistividad  $\rho = 100 \Omega \cdot m$ , el voltaje es más alto que en el ejemplo de estado estable por la razón de las densidades de corriente, y por lo tanto alcanza el valor de:

$$V = \frac{120 \cdot 102.4695}{1.2} = 10246.95 \text{ V}$$

También podemos determinar la constante de tiempo,  $\tau$ , definida como el tiempo en que la elevación lineal inicial puede alcanzar la temperatura de estado estable. En este caso  $\theta_e = \theta_t$

Donde

$\theta_e$  = temperatura de estado estable.

$\theta_t$  = elevación lineal inicial de temperatura (estado transitorio).

Tenemos

$$\theta_e = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda} B^2 J^2 \text{ y } \theta_t = \frac{\rho}{C_e} J^2 \tau$$

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda} B^2 J^2 = \frac{\rho}{C_e} J^2 \tau$$

Por lo tanto la constante de tiempo de calentamiento para un electrodo de tierra esférico y su suelo circundante es:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{C_e}{\lambda} B^2$$

Además de las constantes termales del terreno,  $\tau$  depende sólo del cuadrado del radio  $B$ . Para otras formas de electrodos la constante de tiempo sigue una forma similar excepto que otra dimensión característica del electrodo debe ser usada.

Por ejemplo, para una esfera con radio  $B = 1$  metro, la constante de tiempo es:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,75 \cdot 10^6}{1.2} \cdot 1^2 = 0,7291 \cdot 10^6 \text{ s} = 8,4394 \text{ días}$$

Este es un período de tiempo muy largo, debido a la muy baja conductividad de calor del suelo, pero está de acuerdo con resultados experimentales.

## 1.8 INTENSIDADES DE FALLA

La aplicación de las fórmulas para determinar las máximas tensiones de paso y contacto que pueden ser aplicadas al cuerpo humano requieren del conocimiento del tiempo máximo de eliminación de la falla, aspecto necesariamente ligado a la magnitud de la intensidad de falla y al sistema de protección que se utilice.

Se restringirá el análisis a las instalaciones de tercera categoría ( $1 \text{ kV} \leq U_n \leq 30 \text{ kV}$ ) por ser el escenario más corriente que puede encontrarse todo proyectista que no pertenezca a una compañía eléctrica que, generalmente, será la llamada a solucionar la problemática que plantean las centrales eléctricas y subestaciones.

Conviene diferenciar los conceptos de intensidades de falla y de puesta a tierra. Esta última,  $I_E$ , la constituye la totalidad de la corriente que se deriva a tierra a través de la puesta a tierra de la instalación, y es la que provoca la elevación del potencial de la misma pero no ha de coincidir, necesariamente, con la intensidad de defecto a tierra, siendo en general una parte de ésta.

En primer lugar se establece cual de los posibles tipos de falla a tierra originará la mayor circulación de corriente entre la puesta a tierra y el terreno y, por lo tanto, la mayor elevación del potencial y los mayores gradientes en la zona de la instalación.

A pesar que se utilice el valor más desfavorable de los correspondientes a los distintos niveles de tensión existentes en la instalación, no se tomará en cuenta la posibilidad de defectos simultáneos.

### 1.8.1 Tipos de falla a tierra

Los tipos de falla a tierra se presentan en la figura 4. Los tres primeros casos hacen referencia a fallas a tierra dentro de la instalación y el último, en una línea que sale de ella.

Por ejemplo, en el caso uno de la figura, en que la instalación es la única que tiene los neutros de los transformadores puestos a tierra, la corriente de puesta a tierra,  $I_E$ , para fallas dentro de la instalación (situación representada) es nula, circulando toda la intensidad de

falla,  $I_f$ , por el sistema de puesta a tierra hacia la red sin pasar a tierra. Sin embargo, de considerar el defecto fuera de la instalación,  $I_E$  coincide con  $I_f$ .

En el caso dos, en que los neutros están a tierra en otras instalaciones, serían iguales las corrientes de falla y la de puesta a tierra para el caso de defecto dentro de la instalación pero si la falla fuera externa, no existiría  $I_E$  para la instalación que se comenta.

El caso tres reproduce la existencia de neutros a tierra en la instalación considerada y en otros lugares de la red.

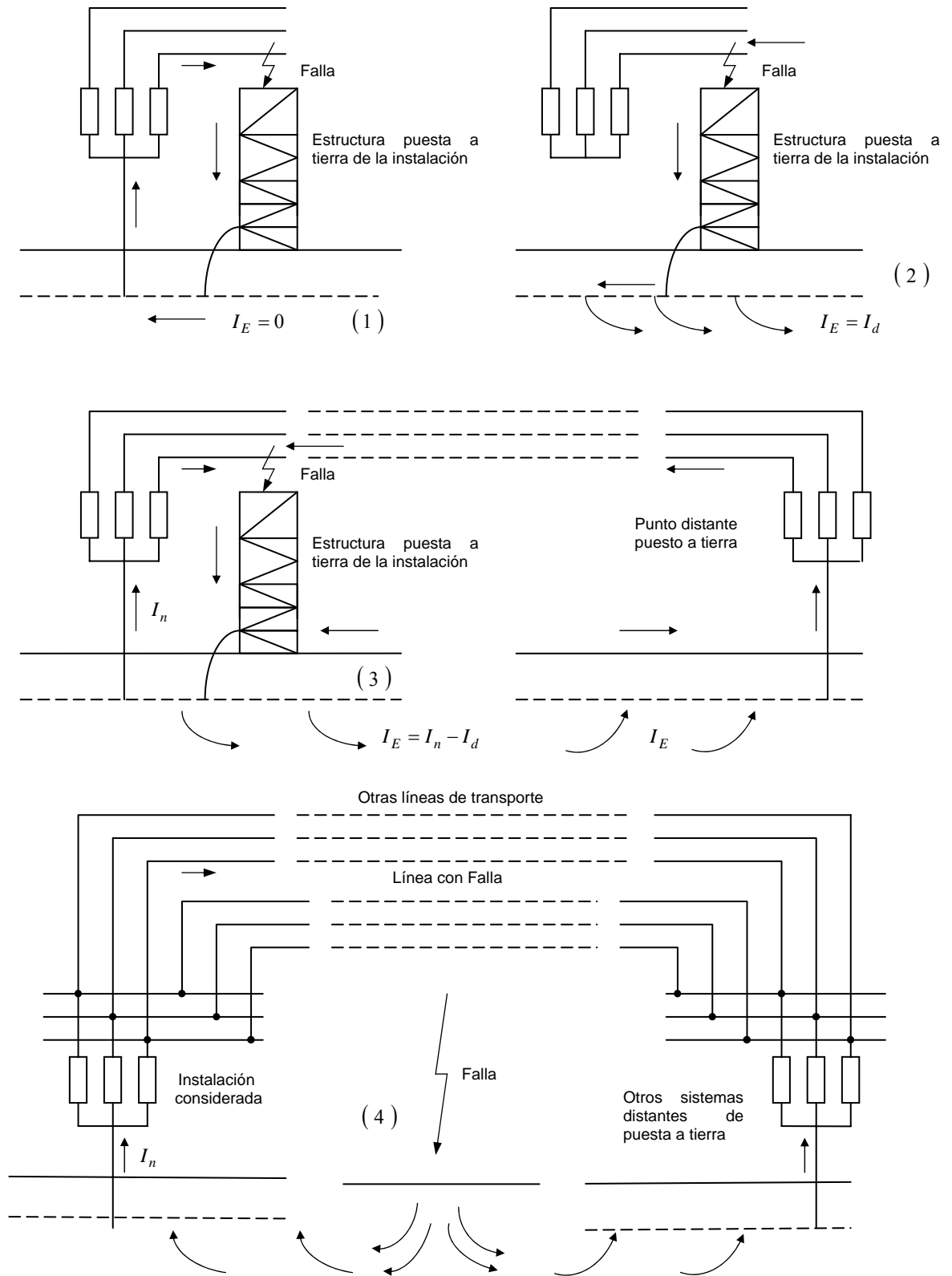
Para fallas situadas dentro de la instalación  $I_E$  vendrá dada por la diferencia entre  $I_f$  y la aportada a la falla por los transformadores puestos a tierra de la misma,  $I_n$ , mientras que para fallas sobre la red, exteriores a la instalación, por el sistema de puesta a tierra sólo circulará la correspondiente a los citados transformadores.

Por último, el caso cuatro sitúa la falla en una línea que sale de la instalación, existiendo neutros puestos a tierra en ella y en otros lugares. Son válidos los mismos comentarios que se han realizado para el caso anterior.

Por lo tanto, es preciso determinar las situaciones más desfavorables considerando fallas dentro y fuera de la instalación. Por lo general puede afirmarse que, que para redes normalmente puestas a tierra en varios puntos, las situaciones más desfavorables corresponden a fallas dentro de la instalación.

En cuanto a la naturaleza de la falla, se considera solamente la falla monofásica a tierra, pues si bien el defecto bifásico con tierra o la doble falla monofásica a tierra pueden, en determinadas ocasiones, originar corrientes más elevadas, son fallas poco probables.

Figura 4. Tipos de falla a tierra.



### 1.8.2 Caso de instalaciones de tercera categoría ( $1 \text{ kV} \leq U_n \leq 30 \text{ kV}$ ).

La determinación, con rigor, de la corriente máxima de puesta a tierra obliga a efectuar el cálculo de la corriente de defecto mediante el uso de las componentes simétricas.

Este proceder, aunque laborioso, resulta claramente justificado en centrales y subestaciones, pero no parece el más adecuado para instalaciones de menor entidad como son las de tercera categoría [8].

En estos sistemas, son muy frecuentes las redes en disposición radial (antena) y, generalmente, con el neutro puesto a tierra a través de una reactancia o resistencia limitadora de la corriente de defecto a tierra (en algún caso especial, ambos elementos en serie) en la subestación de alimentación.

Sin embargo, los parámetros de la red que definen la corriente de falla a tierra, como son la resistencia y la reactancia de las líneas, son muy variables por la frecuencia con que se intercalan nuevos circuitos y subestaciones.

Para no condicionar el valor de la corriente de falla a la disposición del esquema de alimentación en el momento de los cálculos, resulta obligado simplificar los mismos incluyendo, en la aproximación, las consideraciones que hagan posible que las variaciones posteriores (nuevas instalaciones y/o modificaciones de explotación, físicas o eléctricas) no alteren las condiciones de seguridad que se establezcan para cada instalación.

Como el aspecto más decisivo a tener en cuenta en el cálculo de la corriente máxima de falla a tierra es el tratamiento del neutro de la red, se analizarán las variantes que se pueden dar en este tipo de instalaciones, que son:

1. Neutro aislado.
2. Neutro unido a tierra

- Directamente
- Mediante impedancia ( $X_n$ ,  $R_n$  o  $X_n + R_n$ )

El neutro unido a tierra directamente puede considerarse como un caso particular de la conexión mediante impedancia, dado que la conexión a tierra siempre presenta una resistencia de cierto valor, por reducido que este sea.

### 1.8.2.1 Neutro aislado.

La intensidad de falla a tierra es la corriente capacitiva de la red respecto a tierra (ver figura 5), que resulta directamente proporcional a la longitud de la misma pero no es constante, ya que el sistema se va ampliando con el transcurso del tiempo. Salvo aquellos casos que el proyectista justifique otros valores, puede hacerse uso de la expresión:

$$I_f = \frac{V_f}{\sum Z_i} = \frac{V_l/\sqrt{3}}{\sqrt{R_t^2 + \frac{1}{[3\omega(\sum C_i)]^2}}} = \frac{\frac{V_l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{R_t^2 + \frac{1}{[3\omega(\sum C_i)]^2}}} = \frac{V_l\sqrt{3}}{3\sqrt{R_t^2 + \frac{1}{[3\omega(\sum C_i)]^2}}}$$

$$I_f = \frac{V_l\sqrt{3}}{\sqrt{(3R_t)^2 + \frac{1}{[\omega(\sum C_i)]^2}}} = \frac{V_l\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{R_t^2 [3\omega(\sum C_i)]^2 + 1}{[\omega(\sum C_i)]^2}}} = \frac{V_l\sqrt{3}[\omega(\sum C_i)]}{\sqrt{1 + R_t^2 [3\omega(\sum C_i)]^2}}$$

Pero  $\sum C_i = C_a L_a + C_s L_s$ , reemplazando en la anterior ecuación resulta:

$$I_f = \frac{V_l\sqrt{3}\omega(C_a L_a + C_s L_s)}{\sqrt{1 + R_t^2 [3\omega(C_a L_a + C_s L_s)]^2}}$$

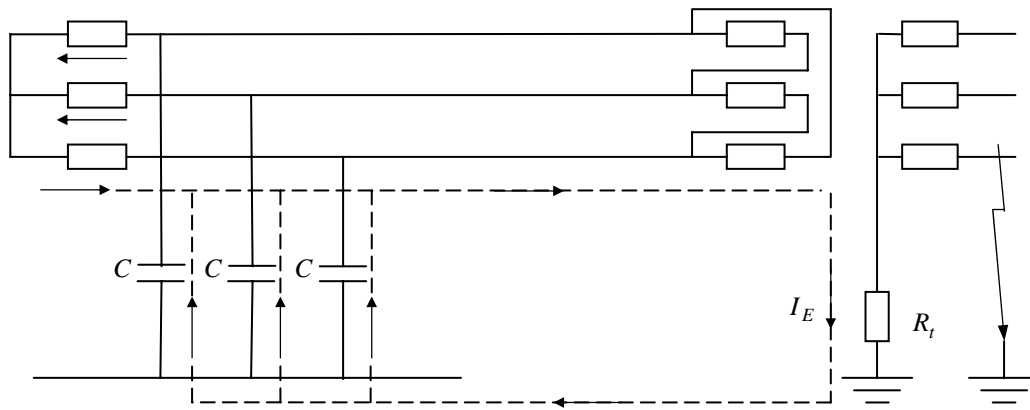
Siendo:

$V_f$  : Tensión de fase de la red (V)

$V_l$  : Tensión de línea de la red (V)

$C_a$  : Capacidad homopolar de las líneas aéreas (F/km)

Figura 5. Circuito para establecer la corriente de falla para instalaciones de tercera categoría con neutro aislado.



$L_a$  :Longitud total de las líneas aéreas de alta tensión, subsidiarias de la misma transformación AT/AT. ( $km$ )

$C_s$  :Capacidad homopolar de los cables subterráneos de alta tensión, subsidiarios de la misma transformación AT/AT.

$L_s$  :Longitud total de los cables subterráneos de alta tensión, subsidiarios de la misma transformación AT/AT. ( $km$ )

$R_t$  :Resistencia de la puesta a tierra general de la instalación que se estudia ( $\Omega$ )

$\omega$  :Pulsación de la corriente, de valor  $2\pi f$

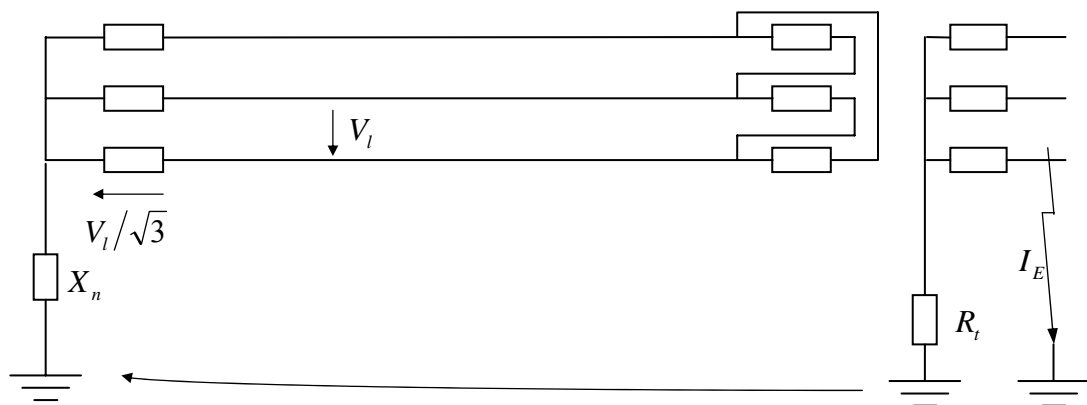
### 1.8.2.2 Neutro a tierra

En este caso, la intensidad de defecto a tierra es inversamente proporcional a la impedancia total del bucle que debe recorrer.

Como caso más desfavorable y para simplificar los cálculos (salvo que el proyectista desee considerar otros aspectos), puede prescindirse de todas las impedancias intermedias existentes en la cabecera de la línea o líneas que alimentan la instalación considerada y ésta, adoptándose el valor más elevado de la corriente que resulta de suponerla limitada

exclusivamente, por la impedancia de puesta a tierra del neutro del sistema y la resistencia de tierra que presentará la instalación que se está proyectando, figura 6. Esta simplificación es favorable a la seguridad pues proporciona una magnitud de la corriente de falla superior a la que circulará en realidad y es el sistema adoptado por las compañías eléctricas en cálculos de esta naturaleza para los centros de transformación en sus redes de distribución.

Figura 6. Circuito para establecer la corriente de defecto en instalaciones de tercera categoría con neutro unido a tierra.



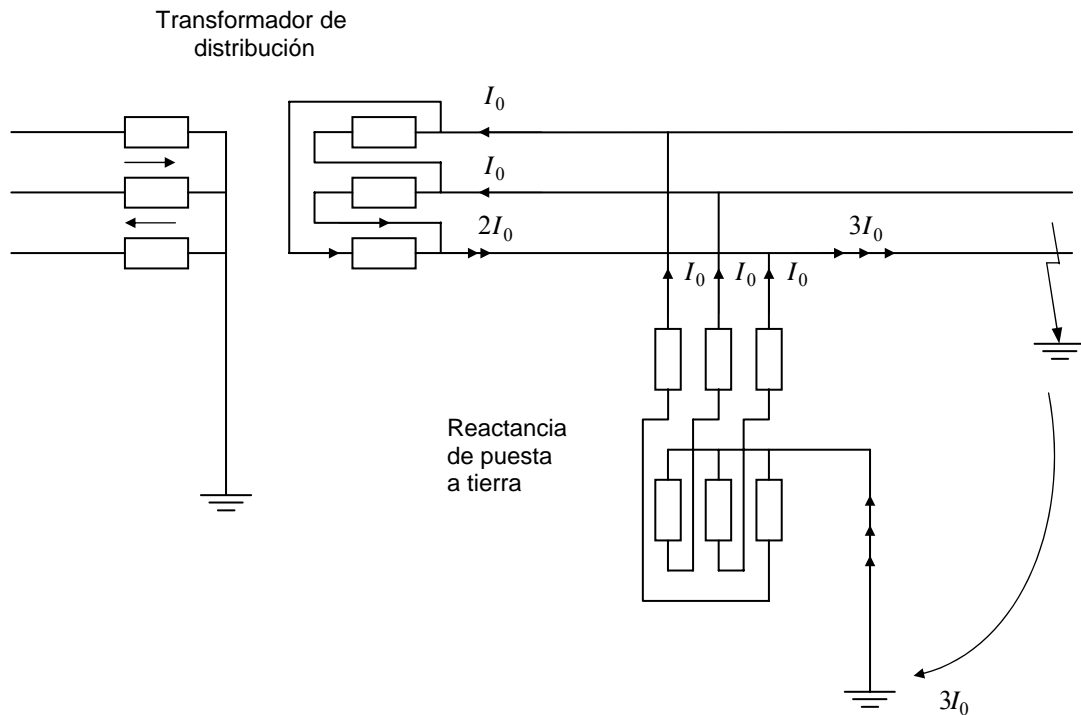
Es frecuente, en los transformadores que alimentan estas redes, encontrar grupos de conexión estrella triángulo que obligan a la creación de un neutro artificial conectable a tierra (lado triángulo) mediante una bobina en disposición zig-zag como se presenta en la figura 7, donde se ha indicado la circulación de corriente en el caso de un defecto monofásico a tierra.

Puede razonarse como si el arrollamiento secundario estuviera conectado en estrella y existiera una reactancia monofásica intercalada entre su centro y el sistema de puesta a tierra, ya que esta hipotética sustitución sólo afecta la distribución de la corriente en el propio transformador pero no en el lado de la red.

La intensidad de falla a tierra es igual a:

$$I_f = \frac{3V_f}{\sqrt{(3X_n)^2 + (3R_t + 3R_n)^2}} = \frac{V_l/\sqrt{3}}{\sqrt{X_n^2 + (R_t + R_n)^2}}$$

Figura 7. Obtención de un neutro artificial para conectar a tierra redes cuyo devanado alimentador esté dispuesto en triángulo.



Donde:

$R_n$  : Resistencia de la puesta a tierra del neutro de la red

$R_t$  : Resistencia de la puesta a tierra general de la instalación ( $\Omega$ )

$X_n$  : Reactancia de la puesta a tierra del neutro de la red

Siendo  $R_n$  y  $X_n$  característicos de cada red

### 1.8.2.3 Valor máximo de la resistencia de puesta a tierra en instalaciones de tercera categoría

El criterio simplificador adoptado para formular la expresión de la corriente de falla conduce, necesariamente, a utilizar el valor de la resistencia de puesta a tierra,  $R_t$ , de una instalación que todavía no está diseñada y cuyo dimensionado es función de la corriente de falla que se está calculando. Se entra así, en un círculo vicioso, pues la resistencia a tierra

de la instalación depende de la corriente de defecto, que es lo que se está tratando de calcular. Hay dos condiciones, sin embargo, que facilitarán la acotación de su máximo valor, como sucede en los casos de los centros de transformación de las compañías eléctricas, suministros directos, en alta tensión, a abonados fuertemente consumidores, etc., que son las que siguen a continuación:

1. El máximo valor de la resistencia de tierra,  $R_t$ , debe permitir que la intensidad de falla,  $I_f$ , supere el valor mínimo de actuación de las protecciones de la(s) cabecera de línea(s).

Un valor normalmente aceptado es  $I_f \geq 100 A$  para redes con neutro no aislado.

Si se trata de sistemas con neutro aislado, no existe valor mínimo pues la falla se eliminará por sistemas de detección de tensión homopolar.

2. El máximo valor del potencial absoluto,  $V_d$ , que alcanza el sistema de puesta a tierra de la instalación, en caso de falla a tierra, no debe exceder la tensión soportada, a frecuencia industrial, de la instalación de baja tensión.

Como quiera que:  $V_d = R_t I_f$

Y ha de satisfacerse que:  $V_d \leq V_{bt}$

Se tendrá finalmente:  $R_t I_f \leq V_{bt}$

Expresión que tiene validez independientemente del tratamiento del neutro del sistema.

Pueden agruparse la condición anterior y la expresión de la corriente de falla, en cada caso, para constituir un sistema de ecuaciones que permitirá evaluar la resistencia de puesta a tierra en todas las situaciones planteadas del tratamiento del neutro.

Así, se tendrá, para:

– Neutro aislado

$$I_f R_t \leq V_{bt} \rightarrow I_f \leq V_{bt} / R_t$$

$$I_f = \frac{V_l \sqrt{3} \omega (C_a L_a + C_s L_s)}{\sqrt{1 + R_t^2 [3\omega (C_a L_a + C_s L_s)]^2}}$$

$$\frac{V_l \sqrt{3} \omega (C_a L_a + C_s L_s)}{\sqrt{1 + R_t^2 [3\omega (C_a L_a + C_s L_s)]^2}} \leq \frac{V_{bt}}{R_t} \rightarrow \frac{3V_l^2 \omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 R_t^2}{1 + R_t^2 [3\omega (C_a L_a + C_s L_s)]^2} \leq V_{bt}^2$$

$$3V_l^2 \omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 R_t^2 \leq V_{bt}^2 \{1 + R_t^2 [3\omega (C_a L_a + C_s L_s)]^2\}$$

$$V_{bt}^2 [3\omega (C_a L_a + C_s L_s)]^2 R_t^2 - 3V_l^2 \omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 R_t^2 + V_{bt}^2 \geq 0$$

$$3\omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 [3V_{bt}^2 - V_l^2] R_t^2 + V_{bt}^2 \geq 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, resulta:

$$R_t = \frac{\sqrt{-4 \cdot 3\omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 (3V_{bt}^2 - V_l^2) V_{bt}^2}}{2 \cdot 3\omega^2 (C_a L_a + C_s L_s)^2 (3V_{bt}^2 - V_l^2)} = \frac{V_{bt}}{\omega (C_a L_a + C_s L_s) \sqrt{3(V_l^2 - 3V_{bt}^2)}}$$

$$R_t = \frac{V_{bt}}{\omega (C_a L_a + C_s L_s) \sqrt{3} \sqrt{V_l^2 - 3V_{bt}^2}}$$

Sin limitación en su mínimo valor.

– Neutro unido a tierra

$$I_f R_t \leq V_{bt} \rightarrow I_f \leq V_{bt} / R_t$$

$$I_f = \frac{V_l / \sqrt{3}}{\sqrt{(R_t + R_n)^2 + X_n^2}}$$

$$\frac{V_f}{\sqrt{(R_n + R_t)^2 + X_n^2}} \leq \frac{V_{bt}}{R_t} \rightarrow \frac{R_t^2 V_f^2}{(R_n + R_t)^2 + X_n^2} \leq V_{bt}^2$$

$$R_t^2 V_f^2 \leq V_{bt}^2 [(R_n + R_t)^2 + X_n^2]$$

$$R_t^2 V_f^2 \leq V_{bt}^2 [R_n^2 + 2R_n R_t + R_t^2 + X_n^2]$$

$$R_t^2 V_f^2 \leq V_{bt}^2 R_n^2 + 2V_{bt}^2 R_n R_t + V_{bt}^2 R_t^2 + V_{bt}^2 X_n^2$$

$$V_{bt}^2 R_t^2 - R_t^2 V_f^2 + 2V_{bt}^2 R_n R_t + V_{bt}^2 R_n^2 + V_{bt}^2 X_n^2 \geq 0$$

$$R_t^2(V_{bt}^2 - V_f^2) + 2V_{bt}^2 R_n R_t + V_{bt}^2(R_n^2 + X_n^2) \geq 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática resulta:

$$R_t = \frac{-2V_{bt}^2 R_n \pm \sqrt{4V_{bt}^4 R_n^2 - 4(V_{bt}^2 - V_f^2)V_{bt}^2(R_n^2 + X_n^2)}}{2(V_{bt}^2 - V_f^2)}$$

$$R_t = \frac{-V_{bt}^2 R_n \pm V_{bt} \sqrt{V_{bt}^2 R_n^2 - (V_{bt}^2 - V_f^2)(R_n^2 + X_n^2)}}{(V_{bt}^2 - V_f^2)}$$

Aunque la expresión de  $R_t$ , en general, es más sencilla pues la puesta a tierra del neutro suele únicamente constar de  $R_n$  o  $X_n$  pero no las dos a la vez, resultando entonces:

Para  $R_n = 0$

$$R_t = \frac{\pm V_{bt} X_n \sqrt{V_f^2 - V_{bt}^2}}{V_{bt}^2 - V_f^2}$$

Y si  $X_n = 0$

$$R_t = \frac{R_n V_{bt} [-V_{bt} \pm V_f]}{V_{bt}^2 - V_f^2}$$

Tomándose, por supuesto, sólo la solución positiva. Debe satisfacerse además el requisito de  $I_f \geq 100 A$

### 1.8.3 Tiempo máximo de eliminación de la falla

El tiempo de despeje de una falla está estrechamente ligado al tipo de protecciones que se utilicen y a las características mecánicas y eléctricas de la apartamta que tiene que efectuar la interrupción, puesto que la eliminación del defecto se consigue mediante la actuación de un elemento de corte, ordenada por un dispositivo de protección que, de alguna manera, detecta la existencia de la falla.

En las instalaciones de tercera categoría las técnicas de corte son muy variadas; se emplea aceite, aire (soplado magnético), vacío y hexafluoruro de azufre. No sucede lo mismo con las protecciones que en el caso de neutro no aislado, la constituye de ordinario, un relé de

sobreintensidad o los cortacircuitos fusibles que serán los que establezcan el tiempo de detección,  $t'$ .

El tiempo final resultante,  $t$ , será  $t' + t_m$ , incorporando en  $t_m$  el tiempo de la maniobra de apertura del interruptor y el de extinción del arco.

En estas instalaciones, las variantes normales respecto a los tiempos de actuación de los relés son:

- Tiempo independiente.
- Tiempo dependiente.

En los primeros, el tiempo de actuación, que es prefijado, no depende del valor de la sobreintensidad,  $I_d$ , y se inicia cuando ésta supera el valor llamado de arranque,  $I_a$ .

Para los relés de tiempo dependiente, el tiempo de actuación está en relación inversa con la sobreintensidad.

En el caso de que exista reenganche rápido, el tiempo a considerar será la suma de los correspondientes a la primera actuación y a la posterior desconexión, tras la reconexión automática, aunque esta segunda no tenga lugar por tratarse de un defecto fugitivo, o sea:

$$t = 2(t' + t_m)$$

Debe señalarse que esta suma de los tiempos parciales es una hipótesis conservadora pues, en general, se acepta que, en caso de descargas consecutivas, si bien existe un efecto acumulativo de las mismas sobre el cuerpo humano, las consecuencias finales son inferiores a las que resultarían de una aplicación continuada con duración igual a la suma de los tiempos parciales.

## 2. TEORIA DE ELECTRODOS ELEMENTALES

### 2.1 GENERALIDADES

Los electrodos elementales son aquellos que se utilizan para poner a tierra medios de servicio e instalaciones eléctricas de manera unitaria, es decir, cuando se deriva a tierra toda la corriente a través de un solo electrodo. Generalmente adoptan formas geométricas bien definidas y ensayadas a lo largo de muchos años de experiencia práctica, tales como:

- Semiesfera: este electrodo pertenece en rigor al grupo de electrodos naturales que no se construyen exclusivamente para tal fin.
- Placa: puede ser circular o elíptica.
- Pica: ya sea en forma de varilla sólida, tubo o aún de algún perfil.
- Banda: ya sea como listón o como conductor cilíndrico, la cual puede ser colocada longitudinalmente o formando un anillo.

Desde el punto de vista tecnológico sustantivo un electrodo elemental es aquel que al aplicarle el principio de la imagen reflejada dan por resultado un electrodo gemelo de forma geométrica unitaria.

Con los anteriores electrodos se llegan a formar los electrodos compuestos o múltiples, por medio de los cuales la derivación de la corriente a tierra se realiza de manera distribuida, siendo más grandes y complejos y además cuando se les refleja originan electrodos gemelos en paralelo.

El análisis de los electrodos elementales es de suma importancia, no solo para la determinación de todas sus propiedades, sino también por que son la base para el análisis de los electrodos compuestos o múltiples.

El problema consiste en determinar por medio de algún procedimiento la expresión de la función potencial del electrodo. Esto se realiza siguiendo la metodología para la determinación de campos eléctricos en general la cual tiene en cuenta lo siguiente:

- Determinación del sistema de coordenadas apropiado.
- Condiciones del electrodo.
- Condiciones límite: en la proximidad del electrodo y en el infinito.
- Condiciones de continuidad de la corriente.
- Satisfacción de la ecuación de Laplace
- Otras

Una vez hallada la función potencial se pueden determinar todas las magnitudes que son de interés para el cálculo y análisis del comportamiento del electrodo.

Aún tratándose de un campo estacionario, la determinación rigurosa de la función potencial es un problema nada trivial. A fin de facilitar la tarea resulta valioso el método de las imágenes desarrollado por J.J. Thompson para la solución de ciertos problemas de electrostática. Con base en dicho método fue posible desde hace algunas décadas, desarrollar una teoría científica para el análisis de los electrodos elementales como para los múltiples, la cual ha demostrado su eficiencia en la práctica y que ; por tanto sigue vigente.

El problema se enfoca como caso directo, es decir, se asume que se conoce siempre la magnitud del manantial de corriente que alimenta al electrodo.

El análisis de los distintos electrodos se realizará desde dos enfoques diferentes, como es propuesto por Miguel de la Vega [9], los cuales son:

1. El análisis científico y el tecnológico sustantivo: en general este método obliga a la consideración de todas las circunstancias, causas y efectos de fenómenos relacionados, por intrascendente que pudiera parecer en la práctica.
2. Análisis tecnológico de la acción y/o ingeniería: Se ignoran algunas de las circunstancias, por un lado considerando su pequeña influencia en el resultado práctico pero, por otro, debido a su desconocimiento. Se trata de que la deducción de las expresiones finales sean menos complejas utilizando parámetros más fáciles de determinar en la práctica, haciendo simplificaciones cuyos efectos se puedan compensar por medio de los factores de seguridad típicos de la técnica de la fiabilidad, etc., consiguiéndose entonces una teoría de mayor eficiencia, lo cual es de mucha importancia en la práctica general de la ingeniería.

El conocimiento de ambos enfoques ofrece mayores ventajas para la planeación, cálculo y proyección de sistemas de puesta a tierra, ya que redundan en la adquisición de un amplio criterio y mayores opciones de solución a los problemas de la práctica, lo cual se reflejará en proyectos racionales.

Se revisarán primero los aspectos esenciales de la teoría tecnológica sustantiva del análisis de las clases y tipos de electrodos de uso común en la práctica de la ingeniería de puesta a tierra y posteriormente se abordará la revisión de la correspondiente teoría de la acción o de ingeniería.

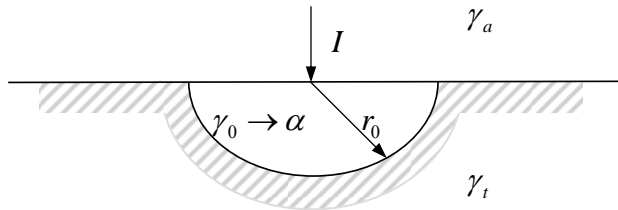
Al terreno durante el análisis general se le considerará siempre de naturaleza homogénea, es decir, como si tuviera la misma estructura geológica, si bien en la realidad no es el caso general, esta aproximación se hace para no complicar más, de lo que ya es, el trabajo de análisis. Posteriormente se analizará el caso de un terreno estratificado o foliado y se determinará su efecto sobre las expresiones ya deducidas para el caso del terreno homogéneo.

## 2.2 TEORÍA TECNOLÓGICA SUSTANTIVA

### 2.2.1 Electrodo semiesférico.

Este electrodo tiene la forma geométrica de una cáscara esférica igual a la mitad de una esfera, la cual se embute en el terreno con su diámetro ecuatorial contra la atmósfera, según se muestra en la figura 8.

Figura 8. Electrodo Semiesférico.



Es por ello que este electrodo queda incluido dentro de la clase de los llamados electrodos superficiales, es decir, aquellos que se embuten en el terreno pero quedan expuestos contra la atmósfera.

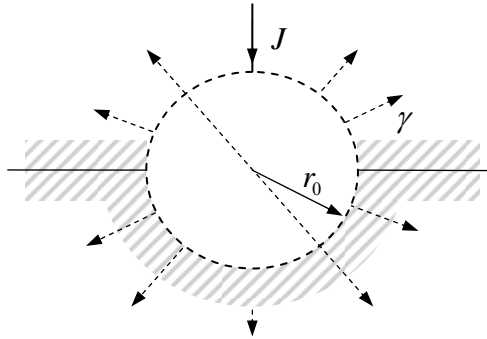
Desde este punto de vista, pueden diferenciarse tres clases de electrodos:

1. Superficiales.
2. Rasantes: están enterrados en el terreno casi a flor de tierra.
3. Profundos: se encuentran colocados en el terreno a gran profundidad.

El electrodo se encuentra en contacto con dos medios de diferente conductividad (la atmósfera  $\gamma_a$  y la del terreno  $\gamma_t$ ). Al aplicarle el principio de la imagen reflejada al electrodo se integra un electrodo gemelo (constituido por el electrodo real y por el reflejado o ficticio) de forma completamente esférica de radio  $r_0$ , como se observa en la figura 9, cuya

corriente impresa  $J=2I$  será irradiada a través de toda la superficie de la esfera( en dirección normal a su superficie) a partir de su centro de gravedad eléctrico, hacia el ahora ilimitado medio de conductividad homogénea  $\gamma$  (gracias al principio de reflexión ).

Figura 9. Aplicación del principio de reflexión al electrodo semiesférico.



La fuente de corriente debe obedecer la ley de ohm, así:

$$J = \gamma E$$

Donde:

$$E = -\nabla \varphi \text{ ( V/m).}$$

$J$  es la densidad de corriente ( A/m<sup>2</sup> ).

$\gamma$  es la conductividad de la tierra S/m

Se asume que no hay otras fuentes de corriente en el volumen de tierra, la condición de divergencia establece que:

$$\nabla \cdot J = 0$$

Combinando las anteriores dos ecuaciones resulta en la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot J = \gamma \nabla \cdot E = \gamma \nabla^2 \varphi$$

Donde  $\varphi$  es la función potencial escalar definida como:

El sistema de coordenadas que mejor se ajusta a la simetría del electrodo es el sistema de coordenadas esféricas (ver anexo A). La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Debido a la completa simetría del flujo de corriente con respecto a las coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$ , las derivadas con respecto a esas variables son cero y la anterior ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es directa:

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B$$

A y B son constantes las cuales son determinadas de las condiciones de frontera:

$$\varphi = 0, \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} =$$

Donde  $s$  es la superficie de la semiesfera.

Así que,  $B = 0$  y  $A$  es obtenida de:

$$I = \int_s \gamma E ds = -\int_s \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds = \int_s \gamma \frac{A}{r^2} dr = 2\pi\gamma A$$

$$\text{La cual conduce a: } A = \frac{I}{2\pi\gamma}$$

En consecuencia:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma r} \text{ para toda } r > r_o \quad (1)$$

Por lo tanto, sobre el electrodo mismo reina el potencial  $\varphi_o = \frac{I}{2\pi\gamma r_o}$

La potencia del electrodo resulta entonces así:  $P_o = \varphi_o J^2 = \frac{1}{2\pi\gamma r_o} I^2$  y puesto que  $\varphi_o = R_o J$

$$\text{, la resistencia a la propagación del electrodo resulta: } R_o = \frac{\varphi_o}{J} = \frac{1}{2\pi\gamma r_o} \quad (2)$$

Una vez conocida la expresión de la función potencial, se puede deducir la distribución del potencial alrededor del electrodo sobre el suelo al cual, por la forma que adopta se le

denomina “embudo de tensión”, al variar el valor del radio de la semiesfera desde  $r_0$  hasta el infinito ( $r_0 \rightarrow \infty$ ); con los valores obtenidos de  $\varphi$  se dibuja la gráfica correspondiente al embudo de tensión, en función del potencial del electrodo  $\varphi_0$ .

Como un ejemplo del cálculo del perfil de tensión alrededor del electrodo se hará el cálculo para un electrodo con los siguientes datos:

Radio del electrodo 1 m

Conductividad del terreno  $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$

Corriente del electrodo  $J(A)$

Con los anteriores datos la resistencia a la propagación del electrodo es igual a:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-2} \text{ S/m}(1\text{m})} = \frac{100}{2\pi} = 15.92 \text{ } \Omega$$

Se determina la curva del transcurso de tensión a las distancias  $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  y  $10 \text{ m}$  del eje del electrodo.

- Con base en la expresión (1), se tiene que  $\frac{\varphi}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma r}$ , así que :

$$\frac{\varphi_1}{I} = \frac{100}{2\pi \times 1} = 15,92 ; \text{ y así sucesivamente para los demás valores de } r, \text{ con lo cual se puede}$$

dibujar la curva del embudo en función de  $\varphi/I$  ( ver figura 10 a).

- Asimismo, es posible trazar la curva del embudo en función de  $\varphi_x/\varphi_0$  (ver figura 10 b).

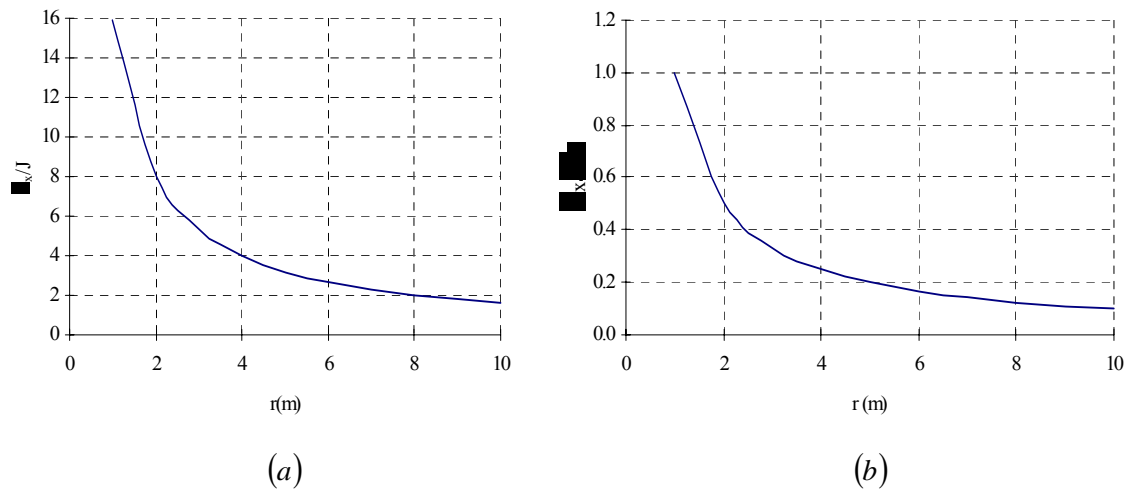
Entonces se tiene que como  $r = 1 = r_0$ , la relación anterior resulta igual a 1.

- En la tabla 1 se incluyen los valores correspondientes para las dos alternativas.

Tabla 1. Potenciales del electrodo semiesférico en función de  $\varphi/I$  y de  $\varphi_x/\varphi_0$

| $r(m)$ | $\varphi_x/J$ | $\varphi_x/\varphi_0$ |
|--------|---------------|-----------------------|
| 1      | 15,915        | 1,000                 |
| 2      | 7,958         | 0,500                 |
| 3      | 5,305         | 0,333                 |
| 4      | 3,979         | 0,250                 |
| 5      | 3,183         | 0,200                 |
| 6      | 2,653         | 0,167                 |
| 7      | 2,274         | 0,143                 |
| 8      | 1,989         | 0,125                 |
| 9      | 1,768         | 0,111                 |
| 10     | 1,592         | 0,100                 |

Figura 10. Perfil de tensión del electrodo semiesférico (a) En función de  $\varphi/I$  (b) En función de  $\varphi_x/\varphi_0$



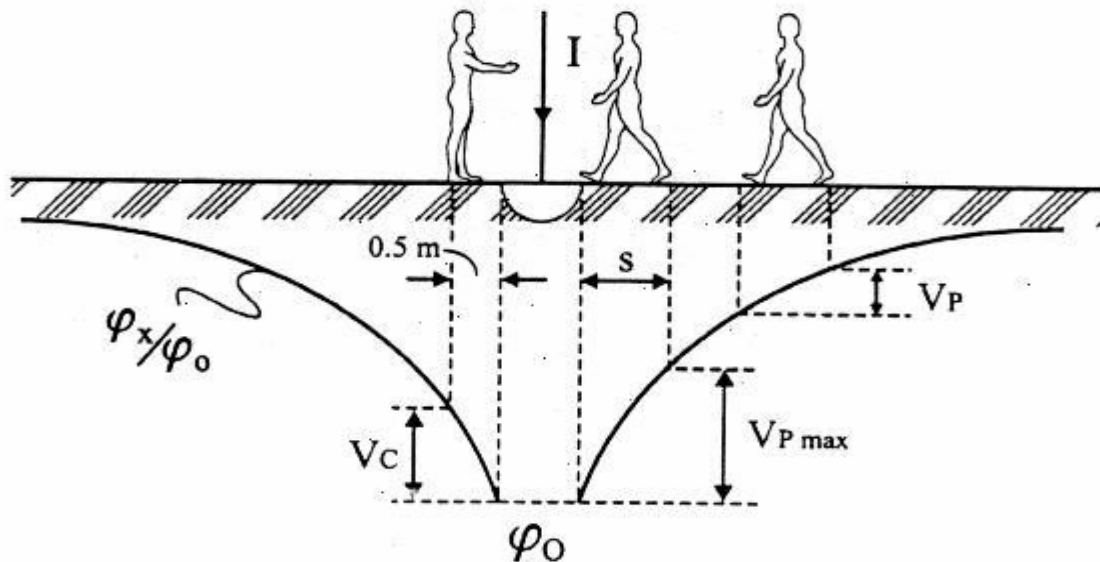
Para los fines prácticos interesa determinar la diferencia de potencial que una persona o animal útil puede puentear dentro del embudo de tensión, ya sea por medio de un contacto directo (manual o con el pie) según se muestra en la figura 11 ;cuando se toca al electrodo o

al conductor de tierra ( o a un elemento conectado al mismo) unido a él, por medio de la mano o el pie ; a la tensión puenteadada se le designa tensión de contacto y cuando la persona se ve afectada por el gradiente de potencial sobre el terreno entre sus pies al ir caminando o estando parada, como se puede ver en la figura, a la tensión actuante se le llama tensión de paso. En la figura citada “s” designa la distancia entre los dos pies de la persona al caminar. Aceptando que esta distancia puede variar en función de su estatura, generalmente ha sido normalizada a un metro.

Las posibles situaciones que pueden representar peligro para las personas son las siguientes:

1. La persona al irse aproximando al electrodo (o al conductor de tierra, etc.) lo toca con el pie adelantado, se aplica de igual manera una tensión de contacto.
2. La persona va caminando dentro del embudo de tensión; se aplica entonces una tensión de paso.

Figura 11. Diferencias de potencial que una persona puede puentear dentro del embudo de tensión.



Debe observarse que el caso dos es una variante del tres en el que la tensión de paso tendrá su valor máximo, valor que siempre es necesario determinar.

En relación con la figura anterior, se puede deducir una expresión analítica para las tensiones de paso como sigue. Si una persona va caminando dentro del embudo de tensión del electrodo a la distancia  $r$  del eje del mismo, se verá afectada por la siguiente tensión de paso:

$$V_p = \varphi_1\left(r - \frac{1}{2}s\right) - \varphi_2\left(r + \frac{1}{2}s\right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{r - s/2} - \frac{1}{r + s/2} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{s}{r^2 - s^2/4}$$

De la figura se deduce que el voltaje de paso tendrá el valor máximo para la condición  $r = r_o + s/2$

$$|V_p|_{\max} = |I| \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{s}{r_o^2 + sr_o}$$

Por otra parte, el valor absoluto del voltaje de paso para la condición  $r \gg r_o, s$  se va haciendo insignificante en comparación de  $r$ , se le puede desprestigiar en el denominador de la expresión quedando de la siguiente manera:

$$|V_p| \cong |I| \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{s}{r^2}$$

En el caso que la persona toque al electrodo o al conductor de tierra unido a él con un pie, la tensión de contacto en función de la resistencia que presente su cuerpo originará una corriente a través del mismo. Considerando este caso con cierto rigor, la resistencia ofrecida por el cuerpo es muy pequeña ya que se reduciría la resistencia de paso a la mitad de la resistencia presentada por sus pies en el terreno (en este caso se considera el contacto del pie con el electrodo como un contacto directo), calculada como un electrodo de placa circular. Así la corriente de cuerpo  $|I_c|$  resultante será:

$$|I_c| = \frac{|V_p|_{\max}}{r_{pie}} = |I| \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{s}{r_o^2 + sr_o} 2\gamma d$$

$$|I_c| = |I| \frac{1}{\pi} \frac{sd}{r_o^2 + sr_o}$$

Se puede apreciar que la corriente de cuerpo resulta independiente de la conductividad del terreno y/o de su inversa la resistividad.

Durante el diseño de un sistema de puesta a tierra es necesario conocer la magnitud de la corriente de electrodo que origina la corriente de cuerpo peligrosa para la salud y/o la vida de las personas. Siendo conveniente deducir una expresión particular para tal magnitud, a la cual se le denomina como “corriente peligrosa de electrodo” ( $I_{pe}$ ).

La electrofisiología proporciona información sobre el grado de peligrosidad de la corriente sobre el cuerpo, siendo función del tiempo de permanencia del contacto con la corriente y variando entre aquella intensidad que ya no permite que la persona se desprenda voluntariamente del elemento electrificado hasta aquella con la cual se inicia el paro respiratorio. Si a tal intensidad se le denomina “corriente crítica”, relacionándola con la ecuación anterior, se tiene que:

$$|I_{cr}| = \frac{1}{\pi} |I_{pe}| \frac{sd}{r_o^2 + sr_o}$$

Por lo tanto la corriente peligrosa de electrodo queda expresada así:

$$|I_{pe}| = |I_{cr}| \pi \frac{r_o^2 + sr_o}{sd_{pie}}$$

Cuando se presenta el caso de que  $|I| > |I_{pe}|$ , es decir, que la corriente que se introduce al electrodo es mayor que la corriente peligrosa de electrodo es conveniente durante el diseño del sistema de puesta a tierra determinar el “radio peligroso  $r_{pe}$ ”, de la “zona peligrosa”, con el fin de proteger a las personas por medio de alguna medida de protección indirecta (cerca, vallado, etc.).

Para determinar el radio peligroso se procede así:

Considerando la expresión aproximada  $|V_p| \cong |I| \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{s}{r^2}$  y asumiendo que la resistencia que presenta el cuerpo es  $2r_{pi} = 4\gamma d$ , la corriente resulta:

$$|I| = \frac{|V_p|}{2r_{pi}} = |I| \frac{2}{\pi} \frac{sd}{r^2} \text{ es decir, que } |I_{cr}| = \frac{|V_p|}{2r_{pi}} = |I| \frac{2}{\pi} \frac{sd}{r^2}, \text{ por lo tanto, la corriente } |I| \text{ tendrá}$$

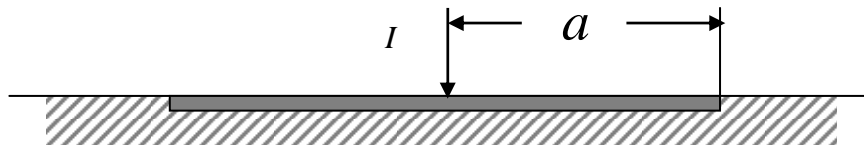
$$\text{el valor } |I_{cr}| \text{ aún a la distancia } r_{pe} = \sqrt{\frac{|I|}{|I_{cr}|} \frac{2sd}{\pi}}$$

En consecuencia la zona peligrosa cubrirá la superficie  $Z_{pe} = \pi r_{pe}^2 = \frac{|I|}{|I_{cr}|} 2sd$ , en  $m^2$ .

### 2.2.2 Electrodo de placa circular

Desde el punto de vista práctico no resulta económico utilizar un electrodo semiesférico con el único propósito de funcionar como tal, siendo preferible usar un electrodo plano. El electrodo menos difícil de analizar y construir es el electrodo plano superficial de forma circular el cual como se muestra en la figura 12, se embebe en el terreno con una cara expuesta contra la atmósfera.

Figura 12. Electrodo de placa circular

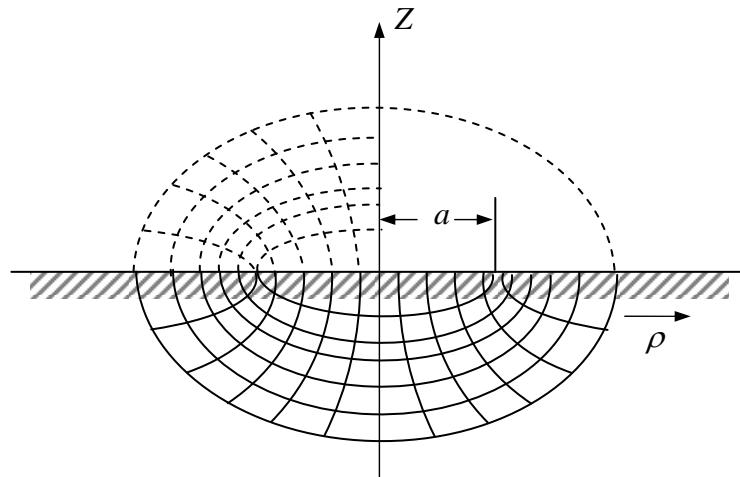


En este caso la determinación de las expresiones fundamentales de este electrodo ya no es una tarea tan sencilla como en el caso del electrodo semiesférico. La razón fundamental

estriba en el hecho que al aplicarle a la placa circular el principio de la imagen reflejada, la forma del campo resultante engendra una figura geométrica más compleja que la esfera, semejante a un elipsoide de rotación achatado (la esfera es un caso particular de elipsoide en el que los ejes de simetría son iguales precisamente a su radio).

En este caso hay simetría alrededor de un solo eje por lo que es más conveniente un sistema coordenado que permita orientar las líneas de campo de manera más sencilla y clara, siendo el sistema coordenado esferoidal achatado el más apropiado. Con la suposición de una superficie totalmente plana, el procedimiento de la imagen reflejada conduce a un electrodo gemelo emplazado en un medio homogéneo (de la misma conductividad) ilimitado por todos lados y alimentado por una corriente impresa  $J = 2I$ , al cual se le concibe como un elipsoide de rotación achatado, con semieje menor decreciente, como puede verse en la figura 13.

Figura 13. Figura del campo del electrodo de placa circular



La ecuación de Laplace en el sistema esferoidal achatado es igual a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \eta \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \xi \eta \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi \eta \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right] = 0$$

Las superficies equipotenciales corresponden a elipsoides de rotación achatados. Ellas quedan completamente especificadas por la coordenada  $\xi = constante$  luego la ecuación de Laplace no depende ni de  $\eta$  ni de  $\phi$  luego

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \eta \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\alpha}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$\alpha$  es la constante que resulta de la primera integración

$$\varphi = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\alpha d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Para puntos muy lejos del electrodo el potencial queda expresado de la siguiente forma

$$\varphi = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\alpha d\xi}{\xi^2} = \left[ -\frac{\alpha}{\xi} \right]_{\xi}^{\infty} = \frac{\alpha}{\xi}$$

Para las coordenadas esferoidales achatadas  $\xi$  está relacionada con las coordenadas cartesianas por medio de la siguiente ecuación

$$\frac{\rho^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2 \quad \text{donde } c^2 = a^2$$

Donde se ha supuesto que el espesor de la placa es despreciable en comparación a su radio

Para puntos muy alejados del eje del electrodo la anterior ecuación toma la forma

$$\frac{\rho^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2} = a^2 \rightarrow \frac{1}{\xi^2} (\rho^2 + y^2) = a^2 \quad \text{siendo en este caso } \rho^2 = x^2 + z^2 \quad (\text{la distancia}$$

$$\text{horizontal al eje del electrodo) } \rho^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \frac{r^2}{\xi^2} = a^2 \rightarrow \xi = \frac{r}{a}$$

Y el potencial para puntos alejados del eje del electrodo toma la forma  $\varphi = \frac{\alpha a}{r}$

Pero sabemos que para puntos alejados del electrodo el potencial toma la forma del

electrodo esférico  $\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma r}$ , igualando tenemos:

$$\frac{J}{4\pi\gamma r} = \frac{\alpha a}{r} \rightarrow \alpha = \frac{J}{4\pi\gamma a}$$

Luego el potencial toma la forma.

$$\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma a} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Con la sustitución  $\frac{1}{\xi} = \lambda$  la ecuación resulta en:

$$\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma a} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{J}{4\pi\gamma a} \left[ \text{sen}^{-1}(\lambda) \right]_0^{1/\lambda}$$

Pero  $\frac{1}{\lambda} = \xi \rightarrow \varphi = \frac{J}{4\pi\gamma a} \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)_{\infty}^{\xi} = \frac{J}{4\pi\gamma a} \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)$

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2c} \text{ (ver anexo A coordenadas esferoidales achatadas)}$$

A nivel del suelo ( $z = 0$ )  $r_1 = \rho - a$ ,  $r_2 = \rho + a$ ,  $r_1 + r_2 = 2\rho$  luego  $\xi = \frac{\rho}{a}$

$$\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma a} \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

Pero  $J = 2I$ , finalmente el potencial del electrodo de placa es igual a:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

Para  $\rho = a$  tenemos el potencial de electrodo:  $\varphi_0 = \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma a} \frac{\pi}{2} = \frac{I}{4\gamma a}$

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\gamma a} \quad R_0 = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{4\gamma a}$$

Para determinar la curva característica del embudo de tensión del electrodo de placa asumiremos un electrodo con los siguientes datos:

$$a = 2m, \gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$$

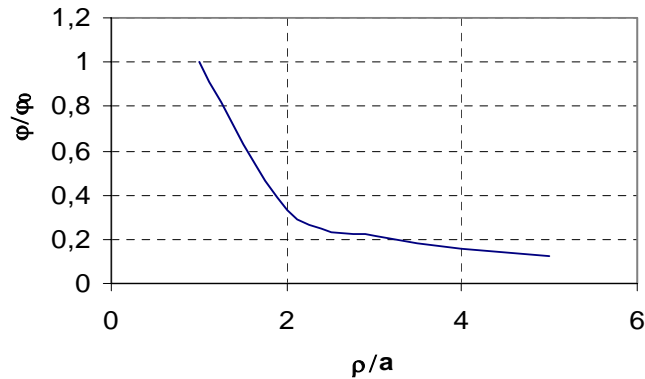
Para  $\rho = a$ ;  $\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{2}{\pi} \text{Sen}^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 1$ , y así sucesivamente. Las magnitudes necesarias para el trazado de la curva se incluyen en la tabla 2.

Tabla 2. Potenciales del electrodo de placa circular.

| $\rho/a$ | $\varphi/\varphi_0$ |
|----------|---------------------|
| 1        | 1                   |
| 2        | 0,333               |
| 3        | 0,216               |
| 4        | 0,161               |
| 5        | 0,128               |

La curva resultante se esboza en la figura 14.

Figura 14. Perfil de tensión del electrodo de placa circular.



$$V_p = \left[ \varphi_{\rho-s/2} - \varphi_{\rho+s/2} \right]_{z=0}$$

$$V_p = \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho - s/2} \right) - \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho + s/2} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma a} \left[ \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho - s/2} \right) - \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho + s/2} \right) \right]$$

$$\theta_1 = \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho - s/2} \right) \quad \theta_2 = \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{\rho + s/2} \right) \quad V_p = \frac{I}{2\pi\gamma a} (\theta_1 - \theta_2)$$

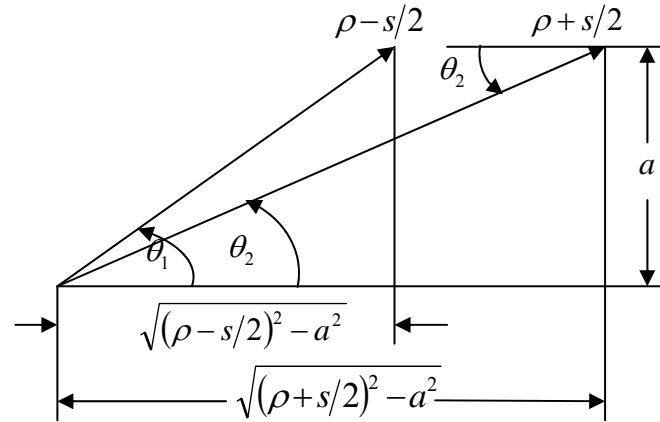
De la anterior ecuación y por trigonometría se puede construir la figura 15. Esta gráfica permite relacionar los ángulos con las distancias horizontales y el radio del electrodo de placa.

De la figura 15 y por ley de senos:

$$\frac{\text{Sen } \theta_2}{\rho - s/2} = \frac{\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{(\rho + s/2)^2 - a^2} - \sqrt{(\rho - s/2)^2 - a^2}}$$

pero

Figura 15. Relación de los ángulos  $\theta$  con  $\rho$  y con  $a$ .



La anterior ecuación se convierte en:

$$\frac{a}{(\rho - s/2)(\rho + s/2)} = \frac{\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{(\rho + s/2)^2 - a^2} - \sqrt{(\rho - s/2)^2 - a^2}}$$

$$\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{a \left[ \sqrt{(\rho + s/2)^2 - a^2} - \sqrt{(\rho - s/2)^2 - a^2} \right]}{[\rho^2 - s^2/4]}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{Sen}^{-1} \left\{ \frac{a \left( \sqrt{(\rho + s/2)^2 - a^2} - \sqrt{(\rho - s/2)^2 - a^2} \right)}{(\rho^2 - s^2/4)} \right\}$$

Reemplazando en la expresión del voltaje de paso, la ecuación se convierte en:

$$V_p = \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{Sen}^{-1} \left\{ \frac{a \left( \sqrt{(\rho + s/2)^2 - a^2} - \sqrt{(\rho - s/2)^2 - a^2} \right)}{(\rho^2 - s^2/4)} \right\}$$

Con base en la suposición:  $s\rho \ll \rho^2 + s^2/4 - a^2$

Tomando los dos primeros términos del desarrollo del binomio los radicales se pueden aproximar a

$$a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{s\rho}{(\rho^2 + s^2/4 - a^2)} - \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{s\rho}{(\rho^2 + s^2/4 - a^2)} \right] \right\} = \frac{\frac{s\rho a}{(\rho^2 + s^2/4 - a^2)}}{\frac{(\rho^2 - s^2/4)}{\sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}}} = \frac{\frac{s\rho a}{(\rho^2 + s^2/4 - a^2)}}{\frac{(\rho^2 - s^2/4)}{\sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}}}$$

$$\frac{\frac{s\rho a}{(\rho^2 + s^2/4 - a^2)}}{\frac{(\rho^2 - s^2/4)}{\sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}}} = \frac{s\rho a \sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}}{(\rho^2 - s^2/4)(\rho^2 + s^2/4 - a^2)} = \frac{s\rho a}{(\rho^2 - s^2/4)\sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}}$$

Con la anterior expresión el voltaje de paso resulta en la siguiente expresión aproximada:

$$V_p = \frac{I}{2\pi\gamma a} \text{Sen}^{-1} \left( \frac{s\rho a}{(\rho^2 - s^2/4)\sqrt{\rho^2 + s^2/4 - a^2}} \right)$$

El voltaje de paso máximo ocurre cuando  $\rho = a + s/2$

$$|V_p|_{\text{máx}} = \frac{I}{2\pi\gamma a} \left[ \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{a + s/2 - s/2} \right) - \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{a + s/2 + s/2} \right) \right] = \frac{I}{2\pi\gamma a} \left[ \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{a} \right) - \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{a + s} \right) \right]$$

$$|V_p|_{\text{máx}} = \frac{I}{2\pi\gamma a} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Sen}^{-1} \left( \frac{a}{a + s} \right) \right]$$

Pero  $\cos^{-1} x + \text{sen}^{-1} x = \pi/2$  con esta identidad la anterior ecuación se puede convertir a:

$$|V_p|_{\text{máx}} = \frac{I}{2\pi\gamma a} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a + s} \right)$$

Cuando una persona toque el borde del electrodo con uno de sus pies al ir caminando, la tensión de paso máxima excitará en ella, en función de la resistencia de uno de sus pies:

$$r_{pi} = \frac{1}{2\gamma d} \quad |I_c|_{\text{máx}} = \frac{|V_p|_{\text{máx}}}{r_{pi}} = |I| \frac{1}{\pi} \frac{d}{a} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a + s} \right)$$

La corriente peligrosa de electrodo  $|I_{pe}| = |I_{cr}| \frac{\pi a}{d} \frac{1}{\cos^{-1} \left( \frac{a}{a + s} \right)}$

En virtud que el perfil de tensión de este electrodo se aproxima muy rápidamente al de una fuente puntual, el radio de la zona de peligro  $\rho < \rho_{pe}$  del electrodo de placa se extiende mucho menos que el correspondiente al electrodo semiesférico con igual intensidad de

corriente; por lo tanto, con base en la expresión del radio peligroso del electrodo semiesférico, se tiene que:

$$r_{pe} \ll \sqrt{\frac{|I|}{|I_{cr}|} \frac{2}{\pi}} sd$$

En el enfoque riguroso se considera que el cuerpo es completamente conductor, presentando entonces el cuerpo al paso de la corriente por sí sólo la resistencia de paso ofrecida por la planta de los pies, asumiendo a la persona descalza (caso más desfavorable) o con calzado en mal estado (mojado, roto, huarache, etc.), sobre el suelo. La planta de los pies se modela como un electrodo de placa generalmente circular (y de manera más aproximada por medio de una placa elíptica) con un diámetro estimado de 0,2 m; por lo

$$\text{tanto: } r_{pi} = \frac{1}{4\gamma a_{pie}} = \frac{1}{4\gamma \frac{d_e}{2}} = \frac{1}{2\gamma d_e}$$

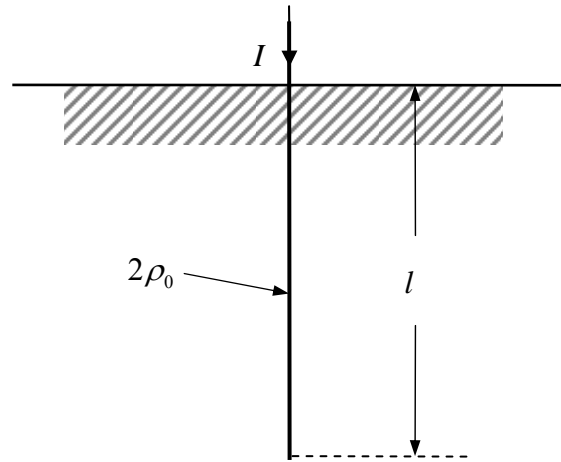
### 2.2.3 Electrodo de pica.

Es uno de los electrodos más usados en la técnica de la puesta a tierra. Se forma por medio de la introducción vertical en el terreno de un elemento metálico conductor (tubo, varilla sólida, perfil, etc.) muy delgado en comparación de su longitud como se muestra en la figura 16.

Al aplicarle al electrodo el principio de la imagen reflejada, resulta un electrodo gemelo cuya forma geométrica de su campo de corriente se le puede identificar con un elipsoide de rotación alargado (ver anexo A, coordenadas esferoidales alargadas), con el eje mayor  $l$  y el eje menor  $\rho_0$  con la siguiente relación:

$$\rho_0 \ll l \text{ y de excentricidad } e = \frac{\sqrt{l^2 - \rho_0^2}}{l}$$

Figura16. Electrodo de pica



Las superficies equipotenciales son elipsoides de rotación alargados, con los focos localizados en los extremos del electrodo, el cual por si mismo es un elipsoide degenerado de eje menor decreciente. Para grandes distancias, el eje mayor y el eje menor llegan a ser aproximadamente iguales; las superficies equipotenciales se aproximan a esferas como puede verse en la figura 17. Las líneas de campo son dadas por el sistema ortogonal de hipérbolas confocales.

Las coordenadas que mejor se ajustan a la geometría del electrodo son las coordenadas esferoidales alargadas, en las cuales la ecuación de Laplace es igual a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right] = 0$$

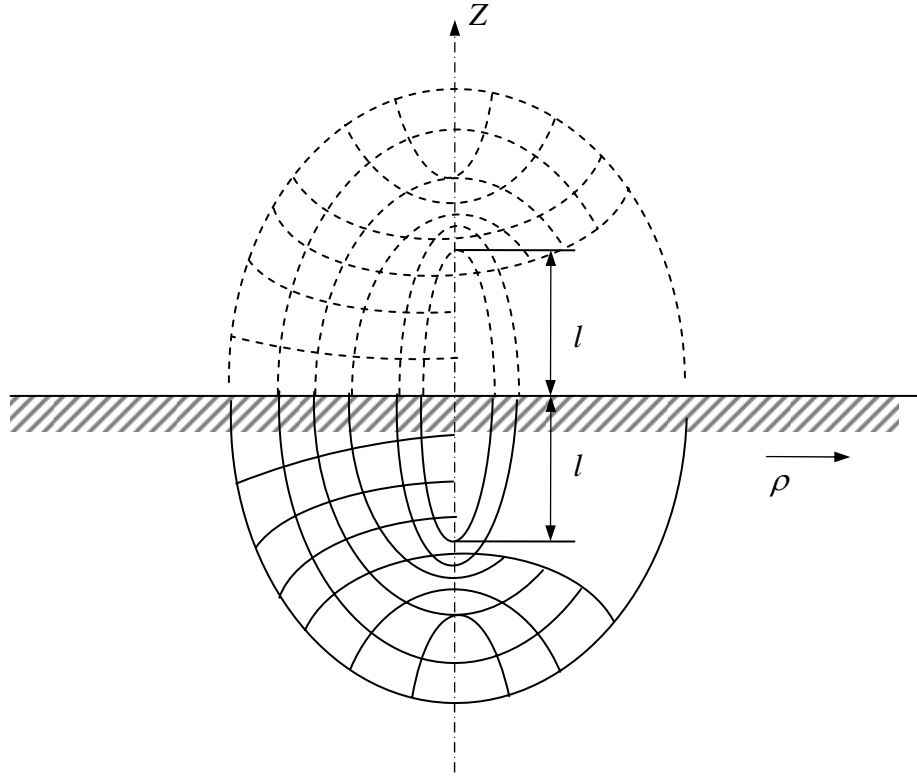
En este caso  $\varphi$  no depende de  $\eta$  ni de  $\phi$  luego la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, el potencial queda expresado de la siguiente forma:

$$\varphi = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\alpha d\xi}{\xi^2 - 1} \text{ donde } \alpha \text{ es la constante de la primera integración}$$

Figura 17. Superficies equipotenciales del electrodo de pica



Realizando la integral resulta la siguiente expresión para el potencial:  $\varphi = -\frac{\alpha}{2} \ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)$

Como  $\xi$  tiende al infinito el potencial se puede calcular de:

$$\varphi = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\alpha d\xi}{\xi^2} = \left[ -\frac{\alpha}{\xi} \right]_{\xi}^{\infty} = \frac{\alpha}{\xi}$$

Pero para puntos muy lejos del electrodo el potencial es igual al potencial del electrodo

esférico, esto es  $\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma r}$ , luego igualando las dos expresiones tenemos:  $\frac{J}{4\pi\gamma r} = \frac{\alpha}{\xi}$

Como  $\xi \rightarrow \infty$   $\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{\rho^2}{\xi^2} = c^2$  (ver anexo A) donde  $c = \sqrt{l^2 - \rho_0^2}$

$$\frac{1}{\xi^2}(x^2 + \rho^2) = c^2 \quad \frac{r^2}{\xi^2} = c^2 \quad \text{luego } \xi = \frac{r}{c}$$

Reemplazando este valor de  $\xi$  en la ecuación del potencial de electrodo para puntos muy alejados del mismo, resulta la siguiente expresión para la constante de integración  $\alpha$

$$\frac{J}{4\pi\gamma r} = \frac{\alpha c}{r} \text{ luego } \alpha = \frac{J}{4\pi\gamma c}$$

El potencial queda expresado de la siguiente forma

$$\varphi = -\frac{J}{8\pi\gamma\sqrt{l^2 - \rho_0^2}} \ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)_\xi^\infty$$

Como  $\rho_0 \ll l$  es válida la siguiente aproximación  $\sqrt{l^2 - \rho_0^2} \approx l$

$$\varphi = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right) \text{ pero } \xi = \frac{r_1+r_2}{2c} \text{ (ver anexo A coordenadas esferoidales) Donde}$$

$r_1$  y  $r_2$  son las distancias a los focos y  $c$  es igual a la distancia de el origen a cualquier

$$\text{foco } c = \sqrt{l^2 - \rho_0^2}$$

A nivel del suelo  $z=0$  y  $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + c^2}$  donde  $\rho$  es la distancia horizontal al eje

$$\text{del electrodo. Luego } \xi = \frac{2\sqrt{\rho^2 + c^2}}{2c} = \frac{\sqrt{\rho^2 + c^2}}{c}$$

La expresión para el potencial del electrodo de pica queda expresada de la siguiente forma:

$$\varphi = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left[\frac{\frac{\sqrt{\rho^2 + c^2}}{c} + 1}{\frac{\sqrt{\rho^2 + c^2}}{c} - 1}\right] = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left[\frac{\sqrt{\rho^2 + c^2} + c}{\sqrt{\rho^2 + c^2} - c}\right]$$

Como  $c = \sqrt{l^2 - \rho_0^2}$  y siendo  $\rho_0 \ll l$ , la anterior ecuación se puede aproximar mediante

la siguiente expresión:

$$c = \sqrt{l^2 - \rho_0^2} = \frac{l}{l} (l^2 - \rho_0^2)^{\frac{1}{2}} = l \left( \frac{l^2 - \rho_0^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = l \left[ 1 - \left( \frac{\rho_0}{l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong l \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_0}{l} \right)^2 \right] = l - \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{l}$$

Que resulta de tomar los dos primeros términos del teorema del binomio de Newton.

Para puntos cercanos al eje del electrodo  $\rho \ll l$ , aplicando el mismo procedimiento que se hizo para aproximar  $c$  se obtiene para  $\sqrt{\rho^2 + c^2}$  la siguiente expresión:

$$\frac{c}{c} \sqrt{\rho^2 + c^2} = c \sqrt{\frac{\rho^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2}} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{c}\right)^2} \cong c \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{c}\right)^2 \right] \cong c + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{c}$$

$\sqrt{\rho^2 + c^2} \cong c + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{c}$ , luego el potencial queda expresado

$$\varphi = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left(\frac{c + \rho^2/2c + c}{c + \rho^2/2c - c}\right) = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2c}{\rho^2/2c}\right) = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left(\frac{4c^2}{\rho^2}\right) = \frac{J}{8\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2c}{\rho}\right)^2 = \frac{J}{4\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2c}{\rho}\right)$$

Pero  $c \cong l - \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{l} \cong l$  luego  $\varphi = \frac{J}{4\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho}\right)$

Este sería el potencial si el electrodo estuviera en un medio ilimitado y homogéneo, pero sabemos que la mitad de ese medio está conformado por el aire, luego por allí no circulará corriente.

Reemplazando  $J = 2I$  en la anterior ecuación hallamos finalmente que el potencial del electrodo de pica es igual a:

$$\varphi = \frac{2I}{4\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho}\right)$$

Y el potencial de electrodo se obtiene al reemplazar  $\rho$  por  $\rho_0$ , el radio del electrodo de pica

luego  $\varphi_0 = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho_0}\right)$

Resulta para el embudo de tensión la siguiente expresión

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\ln\left[\frac{\sqrt{\rho^2 + c^2} + c}{\sqrt{\rho^2 + c^2} - c}\right]}{\ln(2l/\rho_0)}$$

En la vecindad del electrodo, puesto que  $\rho \ll l$ , se puede aproximar así:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\ln(2l/\rho)}{\ln(2l/\rho_0)}$$

Con esta expresión se puede trazar el embudo de tensión de un electrodo de pica. Como ejemplo se determinará para un electrodo con los siguientes datos:  $l = 3m$ ,  $\rho_0 = 0,025m$  y  $\gamma = 10^{-2} S/m$ .

Para  $\rho = 0,03m$  se tiene la relación  $\rho/l = 0,01$ , así que:

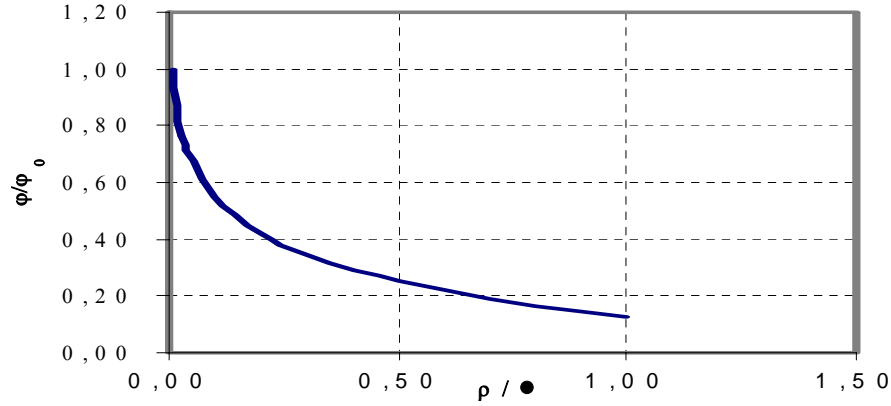
$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\ln\left(\frac{2 * 3}{0,03}\right)}{\ln\left(\frac{2 * 3}{0,025}\right)} = \frac{\ln(200)}{\ln(240)} = \frac{5,29}{5,48} = 0,965$$

Y así sucesivamente; los valores necesarios para el trazado de la curva se incluyen en la tabla 3. La curva resultante se muestra en la figura 18.

Tabla 3. Potenciales del electrodo de pica

| $\rho(m)$ | $\rho/l$ | $\varphi/\varphi_0$ |
|-----------|----------|---------------------|
| 0,025     | 0,0083   | 1,00                |
| 0,09      | 0,03     | 0,77                |
| 0,15      | 0,05     | 0,67                |
| 0,3       | 0,1      | 0,55                |
| 0,6       | 0,2      | 0,42                |
| 0,9       | 0,3      | 0,35                |
| 1,2       | 0,4      | 0,29                |
| 1,5       | 0,5      | 0,25                |
| 1,8       | 0,6      | 0,22                |
| 2,1       | 0,7      | 0,19                |
| 2,4       | 0,8      | 0,17                |
| 2,7       | 0,9      | 0,15                |
| 3,0       | 1,0      | 0,13                |

Figura 18. Perfil de tensión del electrodo de pica.



Cuando el ancho de paso  $s \ll l$ , el voltaje de paso en la misma zona se puede determinar de la siguiente expresión:

$$Vp = \varphi_{\rho-s/2} - \varphi_{\rho+s/2} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho-s/2}\right) - \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho+s/2}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{\rho-s/2}\right) - \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho+s/2}\right) \right]$$

$$Vp = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left[ \frac{\frac{2l}{\rho-s/2}}{\frac{2l}{\rho+s/2}} \right] = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left[ \frac{\rho+s/2}{\rho-s/2} \right] \quad \frac{Vp}{\varphi_0} = \frac{\ln\left(\frac{\rho+s/2}{\rho-s/2}\right)}{\ln\left(\frac{2l}{\rho_0}\right)}$$

El voltaje de paso máximo ocurre cuando  $\rho = \rho_0 + s$  y su valor se puede determinar de:

$$|Vp|_{mx} = \varphi_{\rho_0} - \varphi_{\rho_0+s} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho_0}\right) - \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho_0+s}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{\rho_0}\right) - \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{\rho_0+s}\right) \right]$$

$$|Vp|_{mx} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left( \frac{\frac{2l}{\rho_0}}{\frac{2l}{\rho_0+s}} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left( \frac{\rho_0+s}{\rho_0} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln\left( 1 + \frac{s}{\rho_0} \right)$$

La corriente de cuerpo debido al voltaje de paso máximo, en función de la resistencia de cuerpo será:

$$|Ic| = \frac{|Vp|_{mx}}{r_{pi}} = \frac{\frac{|I|}{2\pi\gamma l} \ln\left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)}{\frac{1}{2\gamma dep}} = \frac{|I|}{\pi l} dep \ln\left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)$$

Donde  $r_{pi}$  es la resistencia del cuerpo y es igual a  $r_{pi} = \frac{1}{2\gamma dep}$

La corriente peligrosa de electrodo se puede calcular por medio de:

$$|Ipe| = |Icr| \frac{\pi l}{dep} \frac{1}{\ln(1 + s/\rho_0)}$$

#### 2.2.4 Electrodo de placa elíptica.

El análisis del electrodo de placa elíptica es de interés por que de él se derivan las expresiones correspondientes del electrodo rectilíneo de banda (ya sea en forma de listón o cilíndrica) el cual forma parte prácticamente de todos los sistemas de puesta a tierra.

Se trata de un electrodo superficial en forma elíptica, según se muestra en la figura 19, es decir embutido en el terreno y con una de sus caras expuesta contra la atmósfera, con semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ , al cual se le introduce desde el exterior la corriente  $I$ . Al reflejar tal electrodo, resulta un electrodo gemelo, del cual brota la corriente  $J = 2I$  hacia todas direcciones del ahora ilimitado medio de conductividad  $\gamma$ . La orientación del campo de corriente del electrodo se hace considerando que en el centro de la elipse se origina el sistema de coordenadas cartesianas con los ejes dirigidos según se muestra en la figura 19.

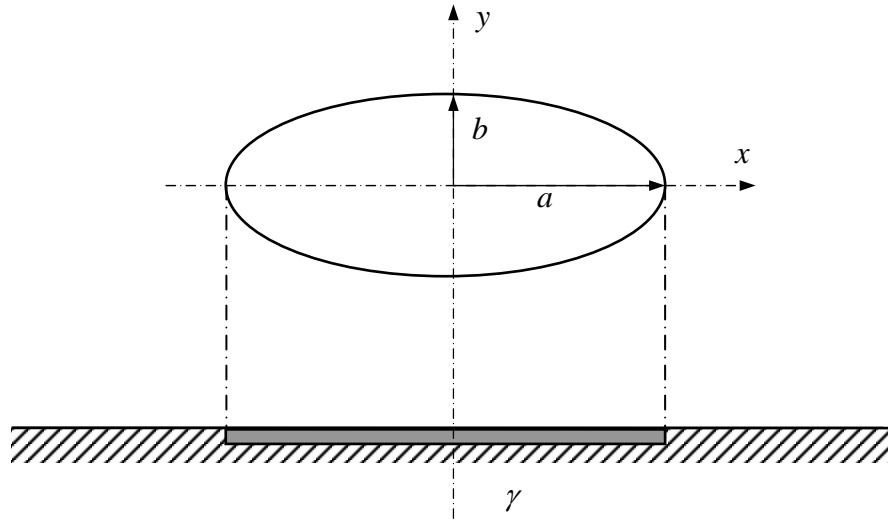
El sistema coordinado que mejor se ajusta a las condiciones del electrodo es el sistema coordinado elipsoidal general  $(\xi, \eta, \zeta)$  ( ver anexo A), en las cuales el potencial está sometido a la siguiente ecuación de Laplace :

$$\nabla^2 \varphi = (\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( R_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) = 0$$

$$\text{Donde } R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \quad (s = \xi, \eta, \zeta)$$

En este caso para el electrodo de placa elíptica  $c=0$  luego  $R_s = \sqrt{s(s+a^2)(s+b^2)}$   
 $(s = \xi, \eta, \zeta)$

Figura 19. Electrodo de placa elíptica.



La condición de frontera en las coordenadas elipsoidales siendo usadas involucra solo la coordenada  $\xi$ , se asume que el potencial depende, en cualquier punto, solo de  $\xi$ , y es independiente de  $\eta$  y  $\zeta$ . Si ésta suposición guía a una solución que satisface todas las condiciones del problema, está solución, donde es sabido que es única, es el potencial buscado. Se asume, por lo tanto, que el potencial satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0$$

La cual se reduce después de remover el factor independiente de  $\xi$ , a la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\xi(\xi+a^2)(\xi+b^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$$

Las condiciones del potencial  $\varphi$  son entonces expresadas en coordenadas elipsoidales

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\xi(\xi + a^2)(\xi + b^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{en el espacio libre}$$

$\varphi$  es nula en el infinito

$$\varphi \text{ es constante} \quad \left| \quad \int_s \gamma E \, ds = I \quad \right| \quad \text{en la superficie del conductor}$$

La ecuación que satisface el potencial en el espacio libre puede ser integrada una vez para dar

$$\varphi = \alpha \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi + a^2)(\xi + b^2)}}$$

Donde  $\alpha$  es la constante de integración de la primera integración. El límite superior de la integral asegura que  $\varphi$  sea nula en el infinito.

De la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1$$

Es claro que como  $x$ ,  $y$  o  $z$  aumentan sin límite así lo hace  $\xi$ , y donde

$$\frac{x^2}{1 + \frac{a^2}{\xi}} + \frac{y^2}{1 + \frac{b^2}{\xi}} + \frac{z^2}{1 + \frac{c^2}{\xi}} = \xi$$

Se deduce que la coordenada  $\xi$  de un punto muy lejos del origen es aproximadamente igual al cuadrado de la distancia  $r$  al punto. Esto es

$$\xi = r^2$$

Para tales puntos el potencial es dado por:

$$\varphi = \alpha \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = \left[ -2\alpha \xi^{-1/2} \right]_{\xi}^{\infty} = \frac{2\alpha}{\xi^{1/2}} = \frac{2\alpha}{r}$$

Donde cualquier electrodo produce a muy grandes distancias un potencial de la forma

$$\varphi = \frac{J}{4 \pi \gamma r} . \text{ De las dos ecuaciones anteriores se deduce que } \alpha = \frac{J}{8\pi\gamma} . \text{ Luego el}$$

potencial queda expresado en la forma

$$\varphi = \frac{J}{8 \pi \gamma} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\partial \xi}{\sqrt{\xi (\xi + a^2) (\xi + b^2)}}$$

En el libro de Abramowitz [10] se demuestra que la integral de la anterior ecuación se puede llevar a la forma de una integral elíptica de primera clase  $F(\phi, k)$  con módulo

$$k = \sqrt{1 - (b/a)^2} \text{ y argumento } \sin^2 \phi = \frac{\xi}{\xi + b^2} , \text{ es decir:}$$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\partial \xi}{\sqrt{\xi (\xi + a^2) (\xi + b^2)}} = \frac{2}{a} F(\phi, k)$$

En la cual cuando  $\xi \rightarrow \infty$  , se convierte en la integral completa de igual clase.

Finalmente se llega a la siguiente expresión para el potencial de electrodo:

$$\varphi = \frac{1}{2 \pi \gamma} I \frac{K(k)}{a} \quad (3)$$

La expresión para la resistencia a la propagación del electrodo de placa elíptica queda así:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{K(k)}{2 \pi \gamma a} \quad (4)$$

Debe observarse que cuando  $b \rightarrow a$  la placa elíptica se convierte en placa circular luego el módulo  $k \rightarrow 0$  y, por lo tanto:

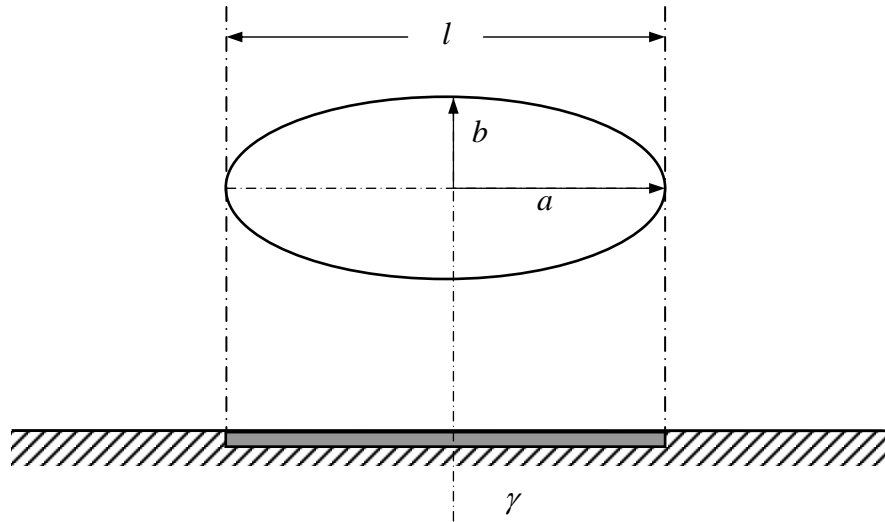
$$\lim_{k \rightarrow 0} K(k) = \frac{\pi}{2}$$

Al sustituir tal valor en la expresión (3), se transforma en la correspondiente a la de la placa circular lo cual sirve como comprobación del método de análisis.

### 2.2.5 Electrodo de banda.

Del concepto de electrodo de placa elíptica se deriva el electrodo rectilíneo de banda, según se muestra en la figura 20, el cual interviene prácticamente en todos los sistemas de puesta a tierra, ya sea en forma de listón o de conductor cilíndrico.

Figura 20. Electrodo de banda



La suposición de que  $b \ll a$  conduce a la representación a manera de modelo, de un electrodo de banda. Para la condición  $k' = \frac{b}{a}$  es válida la aproximación dada por Jahnke y

$$\text{Ende [11]: } K \cong \ln \frac{4}{k'} = \ln \left( 4 \frac{a}{b} \right) \quad (5)$$

Donde  $k'$  es el módulo complementario de la integral normal elíptica de primera clase definido por  $k'^2 = 1 - k^2$  y  $a$  se debe sustituir por la mitad de la longitud de la banda, es decir:  $a = l/2$ .

En virtud de que el semieje menor  $b$  de la elipse interviene sólo logarítmicamente en la expresión de  $R_0$  se puede, con suficiente grado de exactitud, a partir del ancho equivalente de la banda ( $b'$ ) \_con base en el requisito de igualdad de superficies\_ establecer las siguientes relaciones:

$$\pi ab = lb' \rightarrow b = \frac{l}{\pi} \frac{b'}{l/2} = \frac{2b'}{\pi}$$

Así que la ecuación (5) se convierte en:

$$\ln\left(4 \frac{a}{b}\right) = \ln\left[\left(4 \frac{1}{2}l\right)\left(\frac{1}{\frac{2b'}{\pi}}\right)\right] = \ln\left(\pi \frac{l}{b'}\right)$$

Y en consideración de la ecuación (4), se llega finalmente a la expresión para la resistencia a la propagación del electrodo de banda:

$$R_0 = \frac{1}{\pi \gamma l} \ln\left(\pi \frac{l}{b'}\right) \quad (6)$$

#### 2.2.6 Electrodo en anillo circular.

En muchas ocasiones se prefiere utilizar un electrodo de banda en forma circular en lugar de usar la misma longitud de la banda en forma rectilínea tanto por razones de espacio como por la forma geométrica del medio que se desea poner a tierra, como es el caso, por ejemplo, de una torre de una línea aérea.

Esta clase de electrodo se forma embediendo en el terreno la banda (supuesta de momento por conveniencia de sección transversal semicircular) de radio  $\rho_0$ , con su superficie ecuatorial contra la atmósfera, según se muestra en la figura 21.

Al reflejarse el electrodo resulta un electrodo gemelo en forma de toroide, del cual brota la corriente  $J = 2I$ , que se disipa en el medio ilimitado por todos lados y ahora con una única conductividad  $\gamma$ , como se puede ver en la figura 22.

Para la determinación de la función potencial se escoge el sistema de coordenadas cilíndricas debido a la simetría axial existente. Se asume el centro del anillo en el origen de las coordenadas con el eje  $z$  pasando a través de el centro del anillo y los ejes  $x$  y  $y$  en el plano de anillo como es mostrado en la figura 23.

Figura 21. Banda toroidal de sección semicircular.

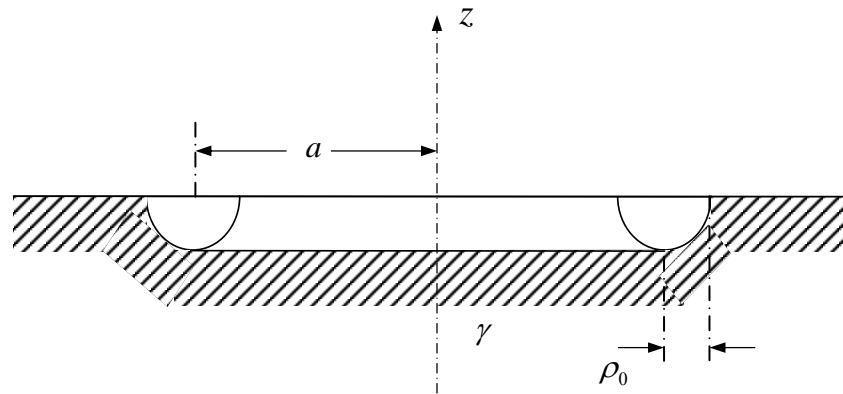
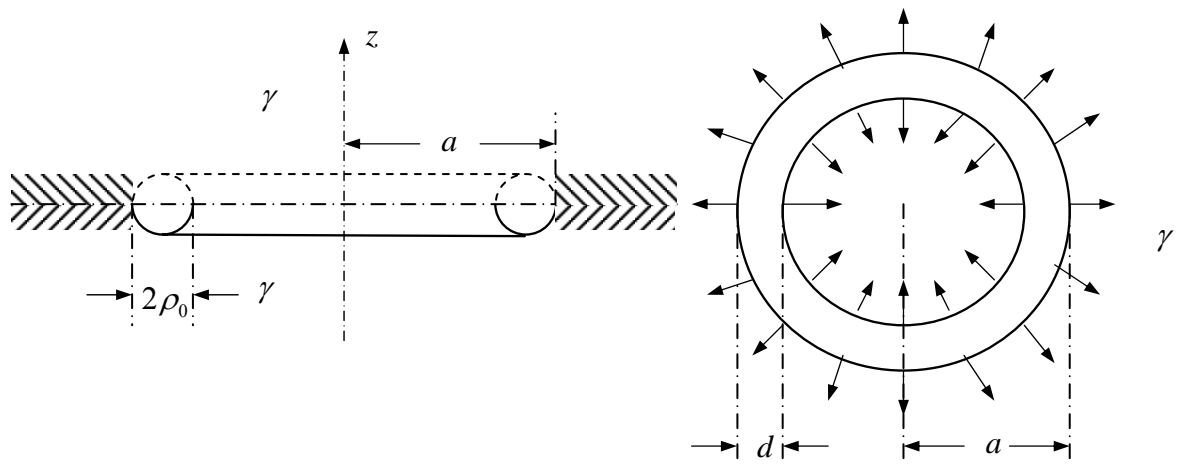


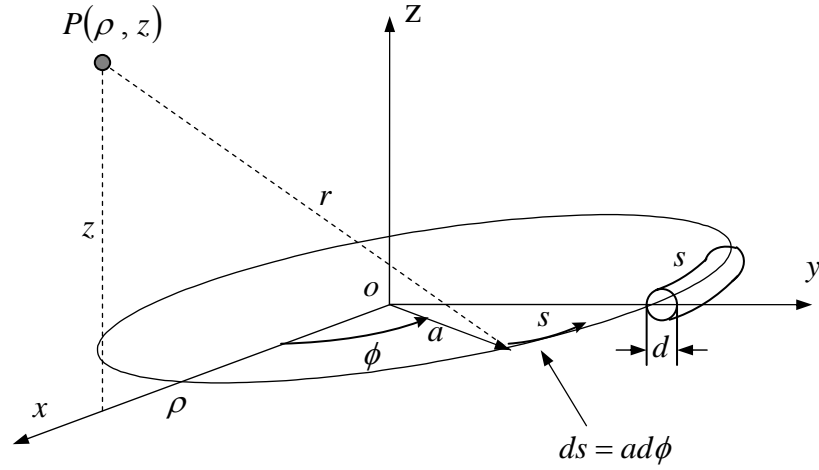
Figura 22. Electrodo en anillo circular



Debido a la forma simétrica del electrodo la corriente se distribuye uniformemente a lo largo del anillo. Del elemento de arco  $ds = a d\phi$  emanará la corriente  $dJ = J \frac{d\phi}{2\pi}$ . De la figura uno puede escoger el punto de observación  $P(\rho, z)$  en el plano  $xz$  debido a la simetría axial. El potencial en el punto P debido al elemento de corriente será:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\gamma r} J \frac{d\phi}{2\pi} \quad \text{donde } r = \left[ (\rho - a \cos \phi)^2 + (a \sin \phi)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Figura 23. Coordenadas para el electrodo en anillo



En virtud de la linealidad de la ecuación de Laplace, resulta para  $\phi$  la siguiente expresión integral

$$\phi = \frac{1}{4\pi\gamma} J \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left[ (\rho - a \cos \phi)^2 + (a \sin \phi)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Introduciendo el cambio de variables  $\beta = \frac{\pi - \phi}{2} \rightarrow \phi = \pi - 2\beta \quad d\phi = -2d\beta$  ; las

funciones trigonométricas dentro del radical en la integral se reducen a:

$$\cos \phi = \cos(\pi - 2\beta) = \cos \pi \cos 2\beta + \sin \pi \sin 2\beta = -\cos 2\beta = -(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$$

$$\cos \phi = \sin^2 \beta - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - (1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta - 1 + \sin^2 \beta = 2\sin^2 \beta - 1$$

$$\sin \phi = \sin(\pi - 2\beta) = \sin \pi \cos 2\beta - \cos \pi \sin 2\beta = \sin 2\beta$$

Sustituyendo los anteriores resultados, el radical de la integral se transforma en:

$$\sqrt{(\rho - a \cos \phi)^2 + (a \sin \phi)^2 + z^2} = \sqrt{[\rho - a(-\cos 2\beta)]^2 + (a \sin 2\beta)^2 + z^2}$$

$$\sqrt{\rho^2 + 2\rho a \cos 2\beta + a^2 \cos^2 2\beta + a^2 \sin^2 2\beta + z^2} = \sqrt{\rho^2 + 2\rho a \cos 2\beta + a^2 (\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) + z^2}$$

$$\sqrt{\rho^2 + 2\rho a \cos 2\beta + a^2 + z^2} \quad \text{pero } \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 1 - 2\sin^2 \beta \rightarrow$$

$$\sqrt{\rho^2 + 2\rho a(1 - 2\sin^2 \beta) + a^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + 2\rho a - 4\rho a \sin^2 \beta + a^2 + z^2}$$

$$\sqrt{\rho^2 + 2\rho a + a^2 - 4\rho a \sin^2 \beta + z^2} = \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2 - 4\rho a \sin^2 \beta}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2+4\rho a \sin^2 \beta}} \cdot \frac{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{(\rho+a)^2+z^2}{(\rho+a)^2+z^2} - \frac{4\rho a \sin^2 \beta}{(\rho+a)^2+z^2} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \frac{4\rho a \sin^2 \beta}{(\rho+a)^2+z^2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

La integral toma la forma de:  $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}}$  con el módulo

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(\rho+a)^2+z^2}$$

Como la función dentro de la integral es par, se puede calcular de la siguiente forma:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}}$$

El potencial del anillo resulta:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\gamma} J \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[(\rho+a)^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi^2\gamma} J \frac{1}{[(\rho+a)^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} K(k)$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^2\gamma} J \frac{1}{[(\rho+a)^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} K(k) = \frac{1}{4\pi^2\gamma} J \frac{k}{\sqrt{a\rho}} K(k) \quad (7)$$

Donde  $K(k)$  es la integral elíptica completa de primer tipo definida por:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{[1-k^2 \sin^2 \beta]^{\frac{1}{2}}}$$

Para la determinación del potencial del electrodo  $\varphi_0$  se escoge el punto con coordenadas  $(\rho, \phi, z) = (a + \rho_0, 0, 0)$  sobre la superficie del toroide como punto de referencia; encontrándose que en este punto  $k^2$  aproxima a la unidad por lo que es más conveniente usar el módulo complementario definido por  $k'^2 = 1 - k^2$  y en virtud de que  $\rho_0 \ll a$

$$k_0^2 = \frac{4a(a+\rho_0)}{(2a+\rho_0)^2} = \frac{(4a^2 + 4a\rho_0 + \rho_0^2 - \rho_0^2)}{(2a+\rho_0)^2} = \frac{(2a+\rho_0)^2 - \rho_0^2}{(2a+\rho_0)^2} = 1 - \left(\frac{\rho_0}{2a+\rho_0}\right)^2 \approx 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2$$

$$k_0^2 \approx 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2; \quad k_0'^2 = 1 - k_0^2 \approx \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2 \ll 1$$

La integral elíptica completa  $K(k)$  puede ser expresada en potencias ascendentes de  $k'$  [11] así:

$$K = \Lambda + \frac{\Lambda-1}{4}k'^2 + \frac{9}{64}\left(\Lambda - \frac{7}{6}\right)k'^4 + \frac{25}{256}\left(\Lambda - \frac{37}{30}\right)k'^6 + \dots \quad (8)$$

Donde  $\Lambda = \ln\left(\frac{4}{k'}\right)$  o  $k' = 4e^{-\Lambda}$

Usando sólo el primer término \*  $K(k) = \ln\left(\frac{4}{k'}\right) = \ln\left(8\frac{a}{\rho_0}\right)$ .

Finalmente, con base en la expresión (7) la expresión para el potencial del electrodo toma la forma:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\gamma} J \frac{k_0}{\pi\sqrt{a(a+\rho_0)}} K(k_0) \cong \frac{1}{2\pi\gamma} I \frac{1}{\pi a} \ln\left(8\frac{a}{\rho_0}\right) \quad (9)$$

Por lo tanto, el electrodo circular de longitud  $C = l_r = 2\pi a$ , alcanza en su totalidad la resistencia a la propagación:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{1}{\pi a} \ln\left(8\frac{a}{\rho_0}\right) = \frac{1}{\pi\gamma l_r} \ln\left(\frac{4}{\pi} \frac{l_r}{\rho_0}\right) \quad (10)$$

La dificultad en determinar el embudo de tensión para el electrodo reside en la evaluación de la integral elíptica de primera clase  $K(k)$  con módulo  $[k]_{z=0} = \frac{2\sqrt{a\rho}}{a+\rho}$

Hay varios métodos para realizar este cálculo, uno de ellos ya ha sido sugerido y es evaluar  $K$  en potencias ascendentes del módulo complementario. Se presentan a continuación otras dos formas por medio de las cuales  $K$  puede ser evaluada.

$K$  puede ser calculada por medio de la serie infinita:

---

\* Esta aproximación es mejor que el 2% para  $d/a \leq 0,1$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (11)$$

Con la condición ( $|k| < 1$ )

$K$  también puede ser evaluada por medio de la siguiente aproximación polinomial [10]:

$$K(k) = [a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2] + [b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2] \ln \left( \frac{1}{m_1} \right) + \varepsilon(k) \quad (12)$$

Donde  $m_1 = k'^2$

$$a_0 = 1,3862944$$

$$b_0 = 0,5$$

$$a_1 = 0,1119723$$

$$b_1 = 0,1213478$$

$$a_2 = 0,0725296$$

$$b_2 = 0,0288729$$

$\varepsilon(k)$  es el error de la aproximación polinomial siendo  $|\varepsilon(k)| \leq 3 \times 10^{-5}$

Otra forma para calcular  $K$  es por medio de tablas. Hay muchos libros donde se puede encontrar tabulada  $K$  en función de su módulo  $k$  uno de los cuales es el libro de Abramowitz [10].

Se determinará el embudo de tensión por medio de la aproximación polinomial, para un electrodo en anillo con los siguientes datos:

$$l_r = 20 \text{ m}, \quad \rho_0 = 0,05 \text{ m} \quad \text{y} \quad \gamma = 10^{-2} \frac{S}{m}$$

La resistencia a la propagación del electrodo en anillo con base en los datos anteriores es:

$$R_0 = \frac{100}{20\pi} \ln \left( \frac{4}{\pi} \frac{20}{0,05} \right) = 9,9 \quad \Omega$$

La curva aproximada del transcurso del voltaje de paso para el electrodo en anillo se calcula de la siguiente forma:

- Dado un valor de  $\rho$  se determina el valor del módulo  $k$  correspondiente.
- Con la magnitud del módulo  $k$  se procede a calcular el valor de la integral normal elíptica de primer tipo.

- Con el resultado de la integral se calcula el valor del potencial del electrodo en anillo, el cual queda expresado en función de I.
- Como  $I = \frac{\varphi_0}{R_0} = \frac{\varphi_0}{9,9} = 0,101 \cdot \varphi_0$  se reemplaza este valor de I en la función del potencial del electrodo, quedando todos los potenciales normalizados con respecto al potencial del electrodo.

Los resultados se presentan a continuación en la tabla 4 y en la gráfica de la figura 24.

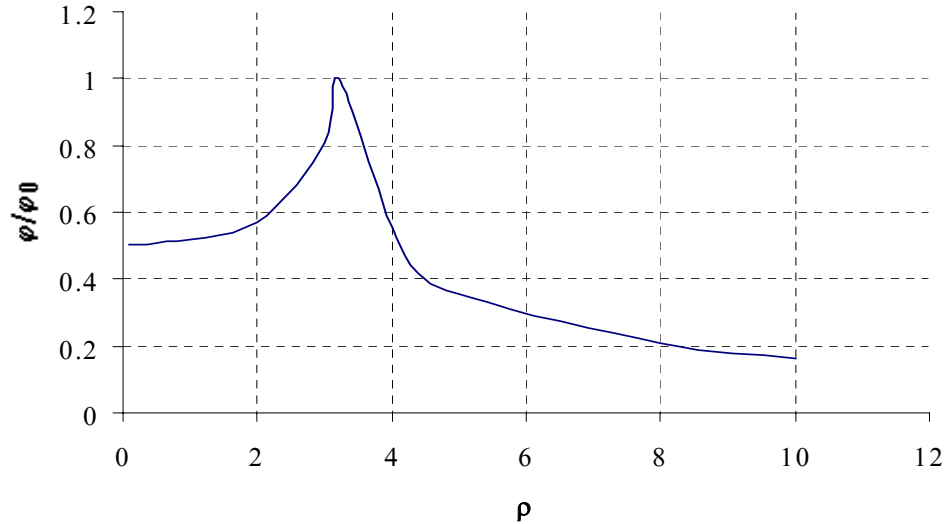
Tabla 4. Potenciales del electrodo en anillo en función de  $[\rho]_{z=0}$

| $\rho (m)$ | $\rho / a$ | $k$     | $m_1$   | $K$     | $\varphi / I$ | $\varphi / \varphi_0$ |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------------|-----------------------|
| 0,1        | 0,03142    | 0,34369 | 0,88187 | 1,62057 | 5,00133       | 0,50413               |
| 0,5        | 0,15708    | 0,68506 | 0,53070 | 1,82888 | 5,03121       | 0,50715               |
| 2          | 0,62832    | 0,97360 | 0,05210 | 2,88850 | 5,64656       | 0,56917               |
| 3          | 0,94248    | 0,99956 | 0,00088 | 4,90669 | 8,04049       | 0,81048               |
| 3,2331     | 1,01571    | 0,99997 | 0,00006 | 6,24093 | 9,85535       | 0,99342               |
| 4,18       | 1,31319    | 0,99079 | 0,01833 | 3,39689 | 4,67435       | 0,47117               |
| 5,18       | 1,62734    | 0,97107 | 0,05701 | 2,84523 | 3,44708       | 0,34747               |
| 8          | 2,51327    | 0,90248 | 0,18553 | 2,29144 | 2,07609       | 0,20927               |
| 10         | 3,14159    | 0,85593 | 0,26739 | 2,12647 | 1,63434       | 0,16474               |

Debido a que el ancho de paso de las personas es, en general, muy superior al radio  $\rho_0$  del anillo se permite definir al voltaje de paso máximo por medio de la siguiente expresión aproximada:

$$|Vp|_{\max} = |\varphi(a + \rho_0) - \varphi(a + \rho_0 + s)| = |\varphi_0 - \varphi(a + s)| \quad ; \quad \text{para } z = 0$$

Figura 24. Perfil de tensión del electrodo en anillo.



El correspondiente módulo  $k$  para la determinación de  $\varphi(a+s)$  queda expresado de la siguiente forma:

$$k^2 = \frac{4a(a+s)}{(2a+s)^2}$$

Se llega a la siguiente expresión para el voltaje de paso máximo:

$$|V_p|_{\max} = \frac{1}{2\pi\gamma} |I| \frac{1}{a\pi} \left[ \ln\left(8 \frac{a}{\rho_0}\right) - \frac{2a}{2a+s} K\left(\frac{2\sqrt{a(a+s)}}{2a+s}\right) \right] \quad (13)$$

Si además se considera que  $a \gg s$ , siguiendo un razonamiento similar como se hizo para la determinación del potencial del electrodo, el término derecho de la anterior ecuación toma la forma  $\ln\left(8 \frac{a}{s}\right)$  y la expresión para el voltaje de paso máximo se simplifica, quedando expresado de la siguiente manera:

$$|V_p|_{\max} = \frac{1}{2\pi\gamma} |I| \frac{1}{\pi a} \left[ \ln\left(8 \frac{a}{\rho_0}\right) - \ln\left(8 \frac{a}{s}\right) \right] = \frac{1}{2\pi\gamma} |I| \frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{s}{\rho_0}\right) \quad (14)$$

## 2.3 TEORÍA TECNOLÓGICA DE LA ACCIÓN

### 2.3.1 Introducción.

Las expresiones deducidas por el método del análisis riguroso de problemas de campo son, en general poco explícitas y difíciles de aplicar en la práctica de la ingeniería de puesta a tierra, por lo que es conveniente tener métodos alternos de análisis con el fin de llegar a expresiones que sean más fáciles de interpretar, evaluar y aplicar a los problemas de la práctica.

Un método alternativo de análisis consiste en considerar a los electrodos elementales ya conocidos como una extensión de una fuente puntual, aplicarle el principio de la imagen reflejada, investigar la distribución del potencial resultante de tal fuente y luego identificar sus líneas equipotenciales con la de algún electrodo conocido procurando que las expresiones finales de los electrodos queden en función de parámetros, índices, etc., que sean fáciles de evaluar en la práctica general.

En la práctica no siempre es necesario alcanzar la verdad absoluta, puesto que existen un sinnúmero de factores que no se pueden controlar exactamente, por ello es válido utilizar métodos simplificados y/o aproximados que permitan obtener resultados aceptables para los fines prácticos sin la necesidad de emplear demasiado tiempo ni recursos de cálculo costosos y/o sofisticados; y aún para la práctica general, los métodos gráficos son de utilidad para ciertas clases de problemas y/o en ciertas fases de un proyecto.

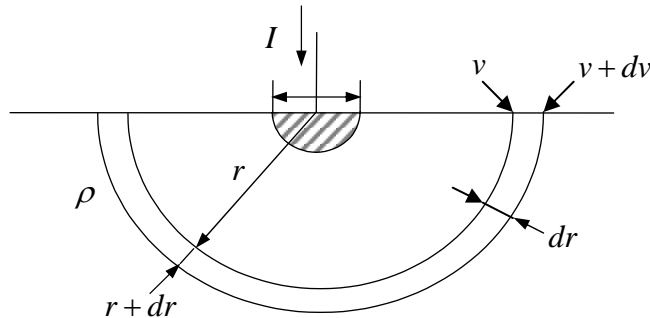
Se debe señalar que en la práctica no es común ni sencillo medir la conductividad de los terrenos, existiendo en cambio numerosos aparatos comerciales que permiten medir fácil y rápidamente su resistividad; por ello en la formulación matemática en el análisis tecnológico de la acción del comportamiento de los electrodos se considera mejor introducir la resistividad en lugar de la conductividad ( $\gamma$ ).

### 2.3.2 Electrodo semiesférico.

En esta clase de electrodo la distribución de la corriente a una distancia suficientemente grande del contraelectrodo, es completamente simétrica sobre una superficie esférica o semiesférica. La corriente emana a partir del centro de la esfera en forma radial hacia todas direcciones y se extiende aproximadamente de la misma manera a través del terreno.

Para la deducción de las expresiones matemáticas del electrodo semiesférico superficial, se asume que un electrodo esférico está enterrado en el terreno. Debido a la simetría esférica, las líneas equipotenciales son cascarones esféricos concéntricos al electrodo esférico según se muestra en la figura 25.

Figura 25. Superficies equipotenciales del electrodo esférico



La caída de voltaje entre dos superficies equipotenciales colocadas a las distancias  $r$  y  $r + dr$  es:

$$2JdR = (\varphi + d\varphi) - \varphi = d\varphi \quad (15)$$

Donde  $dR$  es la resistencia del volumen de tierra encerrado entre dos superficies equipotenciales, por ejemplo:

$$dR = \rho \frac{\text{longitud}}{\text{Area}} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2} \quad (16)$$

Donde  $dr$  puede hacerse tan pequeña como se desee, las dos superficies equipotenciales pueden ambas ser hechas iguales a  $4\pi r^2$ .

De (15) y (16) la siguiente ecuación es deducida:  $d\varphi = 2J \frac{\rho dr}{4\pi r^2}$  (17)

La ecuación (17) integrada entre  $r$  e  $\infty$  resulta:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{4\pi} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = 2J \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = 2J \frac{\rho}{4\pi r}$$

Y el potencial del electrodo esférico con radio  $r_0$ , será entonces:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{4\pi r_0} = IR_0$$

Por lo tanto la resistencia a la propagación del electrodo esférico es:  $R_0 = \frac{\rho}{4\pi r_0} = \frac{\rho}{2\pi D_0}$

En la cual  $D_0$  representa el diámetro de la esfera.

Se puede ahora dividir todo el espacio en el cual se encuentra el electrodo esférico, por medio de un corte realizado a través del punto medio de la esfera, en dos semiespacios iguales, lo cual no cambia en nada la distribución del potencial, ya que en ese plano de corte no existe ninguna línea de corriente normal al mismo; cada mitad transmite la mitad de la corriente total emitida por la esfera. Se puede, por lo tanto, separar completamente a un semiespacio y representar el plano de corte por la superficie de la tierra contra la atmósfera, encontrándose abajo el embebido electrodo semiesférico y un espacio de terreno infinitamente grande.

Debido a que el electrodo semiesférico, colocado superficialmente, con el mismo potencial solo transmite la mitad de la corriente correspondiente a la del electrodo esférico, su resistencia debe ser igual al doble de la del electrodo esférico, es decir:

$$R_0 = \frac{\rho}{\pi D_0}$$

La cual es equivalente a la expresión deducida por el método riguroso.

Debe observarse de la expresión anterior, que a pesar de la distancia infinita del contra-electrodo, tiene siempre un valor finito para la resistencia a la propagación, ello debido a la propagación tridimensional de las líneas de corriente. Usualmente en la fórmula anterior se introduce  $D$  en metros y  $\rho$  en  $\Omega \cdot m$  así que  $R_0$  resulta en  $\Omega$ .

El potencial en cualquier punto a la distancia  $x$  del eje del electrodo esférico queda definido por la expresión:

$$\varphi_x = 2J \frac{\rho}{4\pi x}$$

Así que para el electrodo esférico superficial resulta:  $\varphi_x = 2J \frac{\rho}{2\pi x}$

A partir de esta ecuación se puede deducir la distribución del potencial alrededor del electrodo (embudo de tensión). También se puede derivar la expresión para el voltaje de paso, como sigue:

$$V_p = J \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+s} \right) = J \frac{\rho}{2\pi} \frac{s}{x(x+s)}$$

Si bien en la práctica no es usual la colocación del electrodo semiesférico completamente enterrado en el terreno, en cuyo caso se trataría realmente de un electrodo esférico, si es de interés analizar el comportamiento del electrodo esférico en tales circunstancias, ya que sienta las bases para el análisis de las otras clases de electrodo que si se instalan de aquella forma.

En la figura 26 se muestra un electrodo esférico con radio  $r_0$  enterrado a la profundidad  $t$ ; al aplicarle el principio de la reflexión resulta el electrodo gemelo que se muestra en la figura 27, cuyos electrodos situados simétricamente a nivel del suelo, emiten la corriente  $J$ . Como las líneas de corriente del electrodo real y del ficticio se suman vectorialmente, la corriente del electrodo gemelo vale  $2J$ .

Aquí son igualmente válidos todos los razonamientos hechos antes para la deducción de la resistencia del electrodo semiesférico, en cuanto a la división en dos espacios, dada la simetría del eje  $-x$  y  $+x$ .

Figura 26. Electrodo esférico enterrado

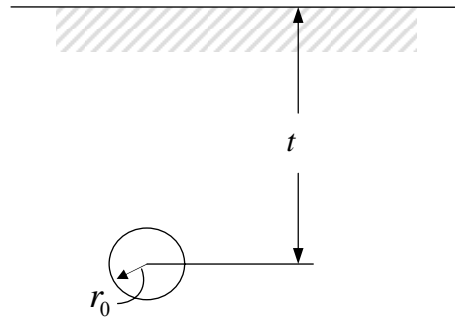
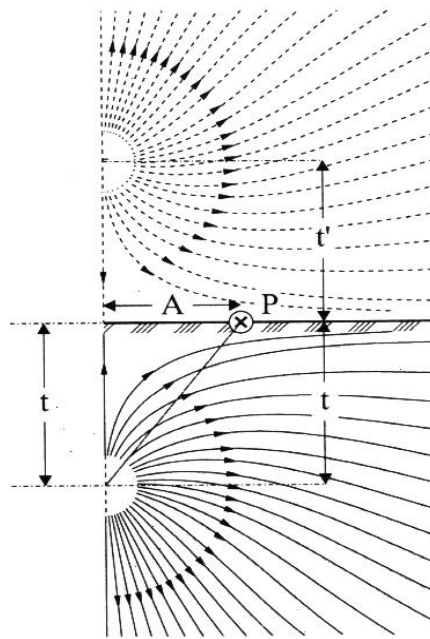


Figura 27. Arreglo de electrodos esféricos.



Interesa ahora calcular la resistencia del electrodo esférico enterrado a partir de los potenciales de los electrodos real y ficticio en la posición en que se encuentran, es decir, del potencial propio y del potencial de la imagen reflejada que se encuentra situada a la distancia  $2t$ . Entonces se tiene para el electrodo real la siguiente expresión:

$$\varphi_{11} = J \frac{\rho}{4\pi r_0}$$

Y para el potencial del electrodo ficticio actuando sobre el real, la siguiente:

$$\varphi'_{11} = J \frac{\rho}{4\pi \cdot 2t}$$

Entonces el potencial total del electrodo esférico, enterrado a la profundidad  $t$  queda expresado así:

$$\varphi_0 = \varphi_{11} + \varphi'_{11} = J \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2t} \right)$$

Y, por lo tanto, la resistencia del electrodo esférico enterrado a la profundidad  $t$  queda expresada así:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{J} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2t} \right)$$

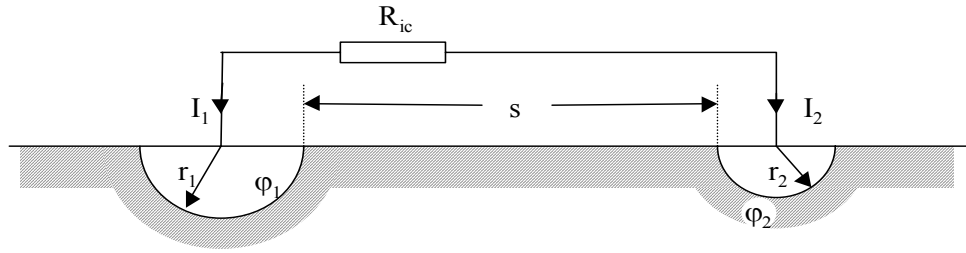
Se puede determinar la distribución del potencial sobre la superficie en algún punto de interés, por ejemplo en el punto  $P$  de la figura 27, donde se observa que el punto queda determinado por  $A$  y  $t$ ; así la distancia del punto medio de la esfera al punto  $P$  es  $z = \sqrt{A^2 + t^2}$  y considerando la influencia sobre el punto  $P$  tanto del electrodo real como del ficticio, el potencial total resulta:

$$\varphi_p = 2J \frac{\rho}{4\pi \sqrt{A^2 + t^2}} \quad \text{donde } 2J \text{ representa la corriente del electrodo esférico}$$

A partir de la ecuación del potencial del electrodo semiesférico se puede determinar una expresión aproximada para el cálculo de la corriente del cuerpo sobre una persona que establezca un contacto con el electrodo al ir caminando, modelando la planta de los pies por medio de electrodos semiesféricos (en lugar de placas circulares o elípticas).

La resistencia interna del cuerpo, medida entre la superficie de la mano y la planta de los pies, se representa por  $R_{ic}$ , el ancho de paso  $s = 1 \text{ m}$  y  $J_1$  la corriente traspasada a tierra por medio del electrodo, el radio del electrodo  $= r_1$  y el radio equivalente de la planta del pie  $= r_2$ ; en la figura 28 se muestra el circuito equivalente de tal arreglo.

Figura 28. Circuito equivalente para el cálculo de la corriente de cuerpo.



Si bien en rigor ambos electrodos se influyen mutuamente, ya que cada uno permanece en el campo del otro, el efecto recíproco es prácticamente insignificante, considerando la pequeña corriente que circulará a través de la persona en comparación de la corriente del electrodo, por ello es válido no tomar en cuenta tal hecho; así se pueden deducir las expresiones siguientes que relacionan los potenciales involucrados.

$$\phi_1 = \frac{\rho}{2\pi r_1} J_1 + \frac{\rho}{2\pi(r_1 + s)} J_2$$

$$\phi_2 = \frac{\rho}{2\pi(r_1 + s)} J_1 + \frac{\rho}{2\pi r_2} J_2$$

Y para el potencial de la planta del pie  $\phi_2 = \phi_1 - R_{ic} J_2$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones se obtiene la expresión para la corriente que recorrerá el cuerpo de la persona:

$$J_2 = \phi_1 \frac{s}{\frac{\rho}{2\pi} \left[ \frac{(r_1 + s)^2 - r_1 r_2}{r_2 (r_1 + s)} \right] + R_{ic} (r_1 + s)}$$

Esta expresión se puede simplificar al considerar que el producto  $r_1 r_2$  es insignificante en comparación con  $(r_1 + s)^2$ , quedando así:

$$J_2 \cong \phi_1 \frac{s}{r_1 + s} \frac{1}{\frac{\rho}{2\pi r_2} + R_{ic}}$$

En la cual se puede apreciar el grado de influencia de la resistencia de paso de las plantas de los pies, consideradas como electrodos semiesféricos, de la resistencia interna del cuerpo de la persona y de la resistividad del terreno.

También es posible encontrar una expresión para el cálculo del voltaje del cuerpo ( $V_c$ ) sobre una persona que haga contacto con un electrodo semiesférico, en función del voltaje de paso, de la siguiente forma:

$$V_c = R_{ic} J_2 = \varphi_1 \frac{s}{(r_1 + s)} \frac{R_{ic}}{\left(\frac{\rho}{2\pi r_2} + R_{ic}\right)}$$

Y se había obtenido la expresión para el voltaje de paso del electrodo semiesférico:

$$V_p = \varphi_1 \frac{s}{r_1 + s}$$

Resulta entonces la siguiente relación:

$$V_c = V_p \frac{R_{ic}}{\frac{\rho}{2\pi r_2} + R_{ic}} = V_p N$$

Ya que el factor  $N$  resulta siempre menor que la unidad (exceptuando el caso especial en que se asume que la resistencia interna del cuerpo tiende hacia cero), el voltaje de contacto de cuerpo será siempre menor que el voltaje de paso máximo en una instalación de puesta a tierra. Se puede estar seguro que las personas dentro del embudo de tensión no podrán verse afectadas por mayores magnitudes de tensión.

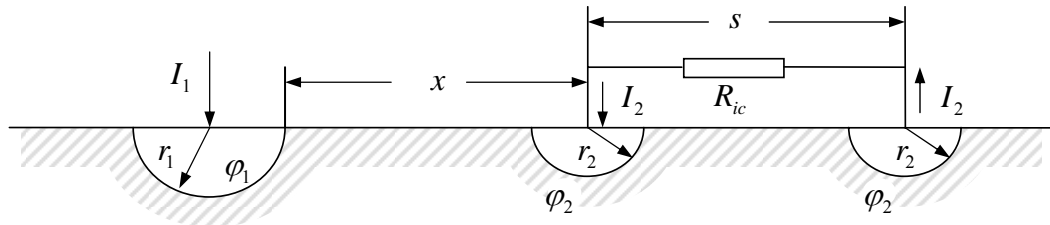
Resulta conveniente deducir una expresión que relacione la tensión de paso con la de cuerpo que permanecerá entre ambos pies. Ello se puede conseguir con base en el circuito equivalente de la figura 29. De ella se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2\pi r_1} J_1 + \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{x + r_1} - \frac{1}{x + r_1 + s} \right) J_2 &= \varphi_1 \\ \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{x + r_1} - \frac{1}{x + r_1 + s} \right) J_1 + \left[ \frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s} \right) + R_{ic} \right] J_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se deduce que:

$$J_2 = J_1 \frac{\rho}{2\pi} \frac{s}{(x + r_1)(x + r_1 + s)} \frac{1}{\frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s} \right) + R_{ic}} \quad \text{pero } V_c = R_{ic} J_2$$

Figura 29. Circuito equivalente que relaciona el voltaje de paso con el voltaje de cuerpo.



Resultando entonces entre las plantas de los pies la tensión:

$$V_c = J_1 \frac{\rho}{2\pi} \frac{s}{(x+r_1)(x+r_1+s)} \cdot \frac{R_{ic}}{\frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s} \right) + R_{ic}}$$

Y considerando la ecuación de voltaje de paso del electrodo semiesférico, así como las relaciones de la anterior figura, resulta la expresión:

$$V_p = J_1 \frac{\rho}{2\pi} \frac{s}{(x+r_1)(x+r_1+s)}$$

Entonces, se tiene la relación:

$$V_c = V_p \cdot \frac{R_{ic}}{\frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s} \right) + R_{ic}} = V_p \cdot P$$

En la cual también el factor  $P$  es siempre menor a la unidad; pero se debe tener presente que  $\frac{\rho}{\pi r_2}$  representa la resistencia de paso de ambas plantas de los pies actuando en

conexión serie, teniendo cada una de ellas el valor  $\frac{\rho}{2\pi r_2}$

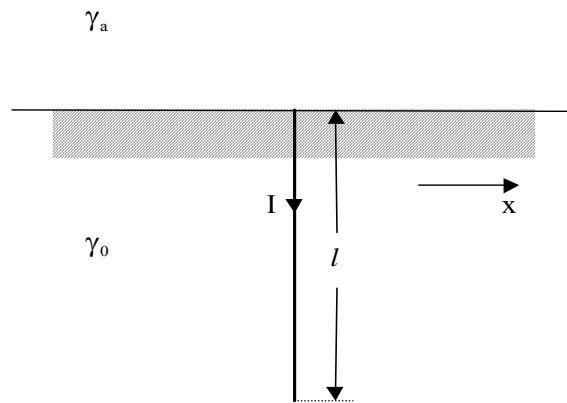
### 2.3.3 Electrodo de pica.

Otro método válido para determinar las expresiones matemáticas de electrodos es considerarlos como una extensión natural de una fuente puntual o lineal. En el caso particular del electrodo de pica (varilla, tubo, perfil, etc.) se puede partir de una fuente

lineal, a la cual se le aplica el principio de la imagen reflejada, se indaga la distribución de su potencial y luego se trata de identificar la distribución de sus líneas equipotenciales con las de algún electrodo conocido; persiguiendo que las expresiones finales queden en función de parámetros fáciles de determinar en la práctica.

Considere una fuente lineal como la mostrada en la figura 30 embebida en el terreno de resistividad  $\rho$ , pero contra la atmósfera, a la cual al aplicarle el principio de la imagen reflejada origina un electrodo lineal con una longitud doble, como se muestra en la figura 31.

Figura 30. Electrodo de pica (teoría tecnológica de la acción)

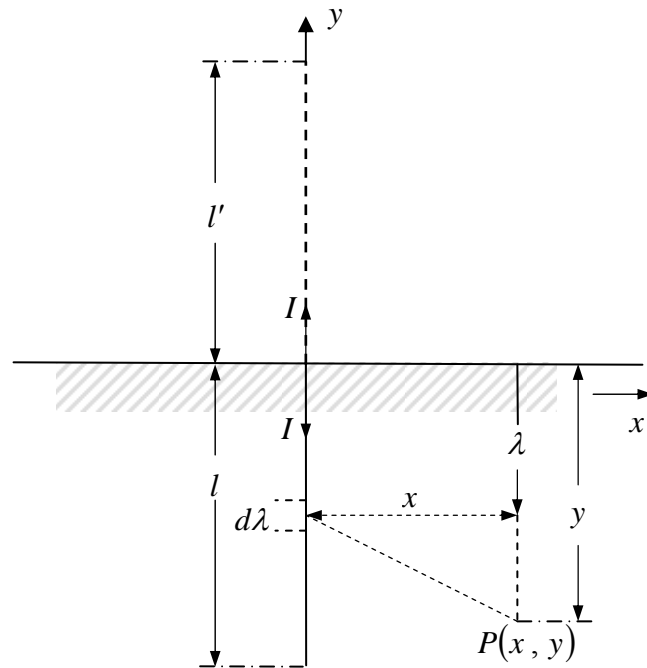


Rodeado ahora por todos lados por un medio homogéneo, el cual emite una corriente supuesta en principio uniformemente distribuida a lo largo de la longitud  $2l$  (en rigor no es así, pero la diferencia que existe es insignificante para la práctica general y sólo se considera con fines de optimización).

Para investigar la distribución de potencial generado por tal fuente lineal se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas, haciendo coincidir la longitud  $2l$  con el eje  $y$ , quedando el eje  $x$  normal al anterior y dividiendo en dos partes iguales  $l$  a la fuente, la cual emite la corriente total  $2J$ .

El potencial en un punto arbitrario  $P$  en el espacio, con coordenadas  $(x, y)$ , estará determinado por la contribución de potencial de todas y cada una de las partes parciales que forman la fuente lineal.

Figura 31. Aplicación del método de imágenes al electrodo de pica.



Si la longitud de cada una de las partes parciales es  $d\lambda$ , entonces la corriente parcial será igual a:  $\frac{2J}{2l} d\lambda$

En la que  $\lambda$  es la distancia del pedazo parcial a partir de la superficie del suelo, por lo tanto, la distancia al punto  $P$  es:  $\sqrt{x^2 + (y - \lambda)^2}$

Así que la contribución de potencial del pedazo parcial de fuente al punto en cuestión es igual a:

$$d\phi = \left( 2J \frac{d\lambda}{2l} \right) \left( \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \lambda)^2}} \right)$$

Y por lo tanto, contribución total de todos los pedazos parciales de fuente sobre el punto

$$P; \text{ es } \varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \int_{-l}^l \frac{d\lambda}{\sqrt{x^2 + (y-\lambda)^2}} = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + (y+l)^2} + y+l}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2} + y-l} \right)$$

Y sustituyendo en ella la condición  $y = 0$  que corresponde al nivel del suelo, así como a  $x$  por  $x = ml$ , se transforma a:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1}$$

Y aún en la forma simplificada:  $\varphi = J \frac{\rho}{4\pi l} \ln K$

En la cual el valor de  $\ln K$  queda en función de la relación  $m = \frac{x}{l}$ . En la literatura técnica existen gráficas de las que se puede extraer rápidamente de forma aproximada el valor de  $\ln K$ .

La distribución de potencial sobre el suelo se determinará para un electrodo con los siguientes parámetros:

$$\rho = 100 \Omega \cdot m, \quad l = 3 m, \quad d = 0,00254 m, \quad I = 10 A$$

Se calculará el potencial en los puntos:  $x = 0.1, 0.5, 1.0, 1.1, 2.0, 3, 4, 5, 6, 7$  y  $8 m$

Para  $x = 0,5$ , por ejemplo, se tiene que  $m = \frac{0,5}{3} = 0,167$ , por lo tanto:

$$\varphi = I \frac{100}{4\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{0.167^2 + 1} + 1}{\sqrt{0.167^2 + 1} - 1} = 13,185I = 0,403\varphi_0$$

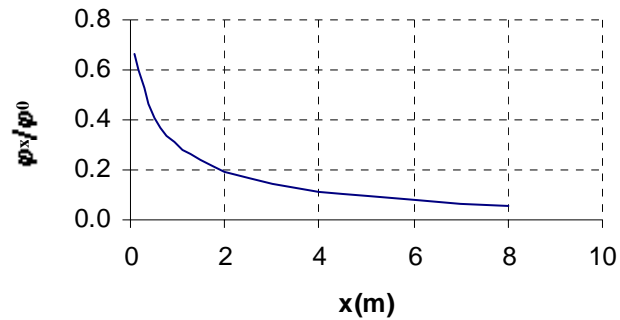
Procediendo de manera análoga, se obtienen los demás valores involucrados, los cuales se incluyen en la tabla 5.

En la figura 32 se dibuja la distribución de potencial del electrodo de pica.

Tabla 5. Voltajes del electrodo de pica.

| $x(m)$ | $m_x$ | $\ln x$ | $\varphi_x/I$ | $\varphi_x(V)$ | $\varphi_x/\varphi_0$ |
|--------|-------|---------|---------------|----------------|-----------------------|
| 0,1    | 0,033 | 8,189   | 21,723        | 217,226        | 0,664                 |
| 0,5    | 0,167 | 4,984   | 13,219        | 132,193        | 0,404                 |
| 1,0    | 0,333 | 3,637   | 9,647         | 96,472         | 0,295                 |
| 1,1    | 0,367 | 3,457   | 9,170         | 91,699         | 0,280                 |
| 2,0    | 0,667 | 2,390   | 6,338         | 63,384         | 0,194                 |
| 3,0    | 1,000 | 1,763   | 4,676         | 46,758         | 0,143                 |
| 4,0    | 1,333 | 1,386   | 3,677         | 36,773         | 0,112                 |
| 5,0    | 1,667 | 1,138   | 3,018         | 30,177         | 0,092                 |
| 6,0    | 2,000 | 0,962   | 2,553         | 25,529         | 0,078                 |
| 7,0    | 2,333 | 0,833   | 2,209         | 22,092         | 0,068                 |
| 8,0    | 2,667 | 0,733   | 1,946         | 19,455         | 0,059                 |

Figura 32. Distribución de potencial del electrodo de pica.



En este caso de la fuente lineal se encuentra que los puntos de igual potencial se localizan sobre un elipsoide de rotación, cuyos puntos focales se hallan en los extremos de la fuente lineal; las superficies equipotenciales son por ello elipsoides de rotación con puntos focales comunes. Asimismo, los elipsoides de rotación que están en la inmediata cercanía de la fuente, tienen los ejes menores muy cortos en comparación de sus ejes mayores, los cuales son aproximadamente cilíndricos y con extremos redondeados. Por esto, se puede

considerar a un electrodo de pica como una superficie equipotencial de una fuente lineal, asumiéndose que la longitud del electrodo es igual a la de la fuente lineal.

Si el electrodo de pica tiene la forma de un tubo cuyo diámetro es  $d$ , entonces el semieje menor del cilindro que suplanta al elipsoide es igual a  $d/2$ , así que con base en la expresión del potencial del electrodo de pica, el potencial propio del electrodo con  $y = 0$  y  $x = d/2$ , queda expresado así:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{(d/2)^2 + l^2} + l}{\sqrt{(d/2)^2 + l^2} - l}$$

Considerando que en un electrodo de tubo  $d/2$  es siempre muy pequeño en comparación de su longitud, se puede hacer la siguiente sustitución

$$\sqrt{(d/2)^2 + l^2} = l\sqrt{(d/2l)^2 + 1} \cong l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2l} \right)^2 \right] \cong l + \frac{d^2}{8l}$$

La cual resulta de tomar los dos primeros términos del desarrollo del binomio de Newton.

Puesto que  $d^2/8l$  es muy pequeño en comparación con  $l$  se le puede despreciar en el numerador, llegándose finalmente a la siguiente expresión para el potencial del electrodo de pica:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{d^2/8l + l + l}{d^2/8l + l - l} = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{16l^2}{d^2} = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \left( \frac{4l}{d} \right)^2 = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \cdot 2 \ln \left( \frac{4l}{d} \right)$$

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{4\pi l} \ln \left( \frac{4l}{d} \right)$$

Por lo tanto, la resistencia a la propagación del electrodo de pica rodeado por todos lados de un terreno homogéneo de resistividad  $\rho$ , queda expresado así:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{2J} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln \left( \frac{4l}{d} \right)$$

Cuando se hace un corte por el eje de simetría (a nivel del suelo) no cambia la distribución del potencial, ya que ambas partes son iguales tanto arriba como abajo del plano de simetría; entonces al quitarse el semiespacio superior, el restante representa la tierra en la

cual está el electrodo; tal electrodo emite solo la mitad de la corriente del electrodo gemelo la cual, para toda la longitud  $2l$  y el espacio completo, se le había asignado el valor  $2J$ . Por lo tanto la resistencia del electrodo de pica embutido en el terreno en toda su longitud  $l$  pero contra la atmósfera debe tener un valor doble al indicado en la ecuación anterior, es decir:

$$R_0 = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$$

El voltaje de paso haciendo la sustitución  $s = al$  queda expresado de la siguiente forma:

$$V_p = \varphi_m - \varphi_{m+a} \quad m = x/l \quad m_1 = \frac{x+s}{l} = \frac{x}{l} + \frac{s}{l} = m + a$$

$$V_p = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \frac{\sqrt{m^2+1}+1}{\sqrt{m^2+1}-1} - \ln \frac{\sqrt{(m+a)^2+1}+1}{\sqrt{(m+a)^2+1}-1} \right] \quad \text{o bien} \quad V_p = J \frac{\rho}{4\pi l} (\ln K_1 - \ln K_2)$$

Si el electrodo de pica está enterrado, la expresión del potencial en un punto  $P$  puede determinarse, como antes, aplicando el método de las imágenes, lo que resulta en el arreglo mostrado en la figura 33.

La integración sobre ambas líneas de carga de longitud  $l$  (real y su imagen) resulta con las designaciones de la figura en la siguiente expresión del potencial

$$\varphi = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \frac{(y+h+c) + \sqrt{(y+h+c)^2 + x^2}}{(y+h-c) + \sqrt{(y+h-c)^2 + x^2}} + \ln \frac{(y-h+c) + \sqrt{(y-h+c)^2 + x^2}}{(y-h-c) + \sqrt{(y-h-c)^2 + x^2}} \right]$$

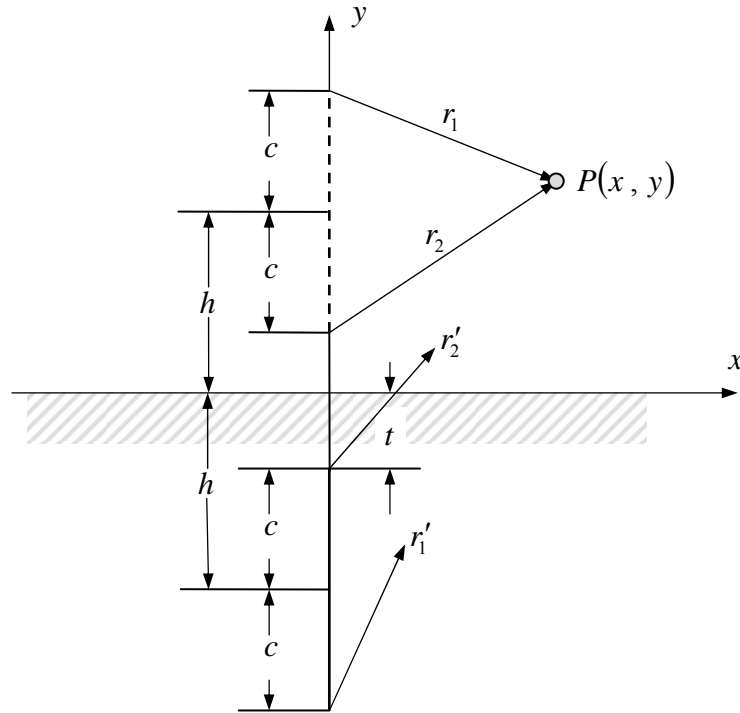
El primer término entre paréntesis corresponde al potencial debido al electrodo real y el segundo al de su imagen.

Nos interesa determinar el potencial propio del electrodo, para ello hacemos la sustitución  $y = -h$  lo que resulta en:

$$\varphi = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \frac{c + \sqrt{c^2 + x^2}}{-c + \sqrt{c^2 + x^2}} + \ln \frac{-2h+c + \sqrt{(-2h+c)^2 + x^2}}{-2h-c + \sqrt{(-2h-c)^2 + x^2}} \right]$$

En el primer término reemplazamos a  $x$  por  $d/2$  siendo el diámetro del electrodo de pica y como  $\frac{d}{2} \ll l$ , se puede hacer la siguiente aproximación:

Figura 33. Arreglo de electrodos de pica



$$\sqrt{c^2 + (d/2)^2} \cong c \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2c} \right)^2 \right] \cong c + \frac{1}{8} \frac{d^2}{c}$$

Y en el segundo término hacemos la sustitución  $x = 0$  lo que resulta en:

$$\varphi_0 = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \frac{c + c + d^2/8c}{-c + c + d^2/8c} + \ln \frac{2(-2h+c)}{2(-2h-c)} \right] = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \left( \frac{16c^2}{d^2} \right) + \ln \left( \frac{2h-c}{2h+c} \right) \right]$$

$$\varphi_0 = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4c}{d} \right)^2 + \ln \left( \frac{2h-c}{2h+c} \right) \right] \text{ reemplazando } c \text{ por } l/2$$

$$\text{Puesto que } h = t + c \rightarrow \varphi_0 = J \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{d} \right) \sqrt{\frac{2t+l/2}{2t+3l/2}} \right]$$

Y la resistencia del electrodo de pica enterrado a la profundidad  $t$  es igual a:

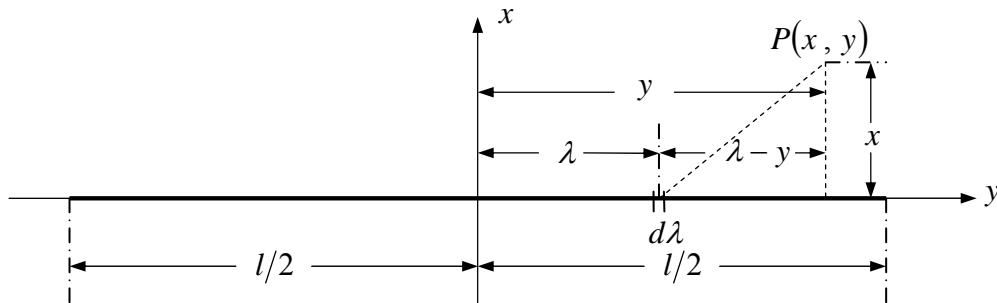
$$R_0 = \frac{\varphi_0}{J} = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{d}\right) \sqrt{\frac{2t+l/2}{2t+3l/2}} \right] \quad t > 0$$

Con esta expresión se puede determinar la ganancia en reducción de la resistencia al enterrar el electrodo de pica a una profundidad  $t$ .

### 2.3.4 Electrodo de banda.

La deducción de las expresiones matemáticas del electrodo de banda se puede lograr fácilmente a partir del análisis hecho para el electrodo de pica, asumiendo que la fuente lineal está colocada en un medio homogéneo ilimitado por todos lados en posición horizontal como se muestra en la figura 34.

Figura 34. Electrodo de banda (teoría tecnológica de la acción)



Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas se supone al eje  $x$  normal al eje horizontal de la fuente. Se designa con  $l$  a la longitud completa de la fuente lineal y con  $2J$  a la corriente que transmite al terreno de manera uniforme a lo largo de toda la longitud de la fuente lineal. Se asume además que la sección transversal de la fuente lineal es de forma circular, con diámetro  $d$ .

Considerando un pequeño pedazo parcial  $d\lambda$  de fuente, la corriente parcial que emitirá es

$2J \frac{d\lambda}{l}$  y por lo tanto, la contribución del potencial del mismo al punto de referencia

$$P(x, y), \text{ resulta así: } d\varphi = 2J \frac{\rho}{4\pi l} \frac{d\lambda}{\sqrt{x^2 + (y - \lambda)^2}}$$

Luego, la contribución de todos los pedazos parciales será:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{4\pi l} \int_{\lambda=-l/2}^{\lambda=l/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{x^2 + (y - \lambda)^2}}$$

De la cual resulta

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (y + l/2)^2} + y + l/2}{\sqrt{x^2 + (y - l/2)^2} + y - l/2}$$

Y siguiendo un razonamiento análogo al caso del electrodo de pica, se puede determinar que el potencial de electrodo es igual a:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{d} \right)$$

Por lo tanto, la resistencia del electrodo de banda dentro de un volumen de terreno ilimitado por todos lados es igual a:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{2J} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{d} \right)$$

Si se hace un corte por el plano del eje  $y$ , el electrodo circular queda dividido en dos secciones de forma semicircular (media caña); y si se retira después el volumen del semiespacio superior, el semiespacio inferior representa al terreno en el cual queda embebido el electrodo con perfil semicircular de longitud  $l$ . Como este electrodo transmite con el mismo potencial  $\varphi_0$  únicamente la mitad de la corriente (como en el caso del electrodo de pica, el campo de corriente no cambia con el corte), entonces la resistencia del electrodo de banda debe tener un valor doble del expresado por la anterior ecuación:

$$R_0 = \frac{\rho}{\pi l} \ln\left(\frac{2l}{d}\right)$$

Tal expresión representa la resistencia del electrodo de banda de perfil semicircular embutido en el terreno pero contra la atmósfera (semienterrado), como se muestra en la figura 35.

Para deducir la expresión del voltaje de paso de este electrodo, se debe tener presente que la distribución de potencial sobre la superficie del suelo depende de la profundidad en la cual esté enterrado el electrodo. Considerando al electrodo colocado a la profundidad  $t$  que se muestra en la figura 36 al aplicarle el principio de la imagen reflejada, resulta el electrodo gemelo que se muestra en la figura 37, cuyos electrodos quedan en paralelo, separados entre sí por la distancia  $2t$  y en un espacio ilimitado por todos lados de naturaleza homogénea.

Figura 35. Electrodo de banda semienterrado.

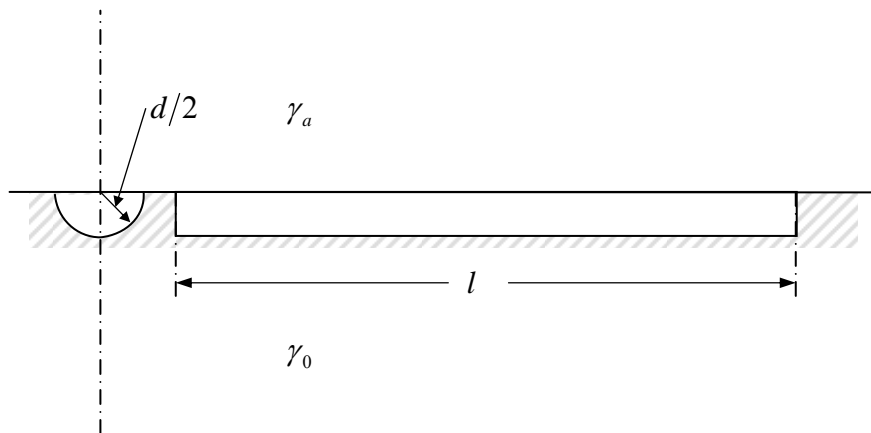
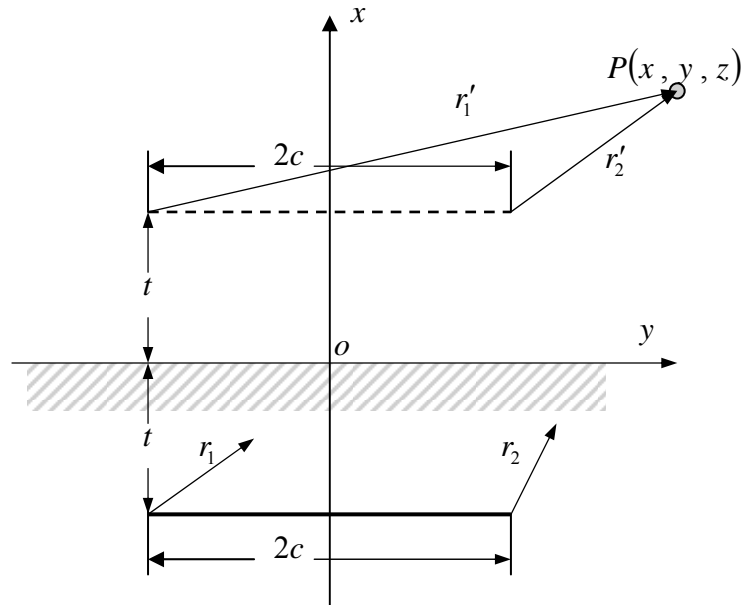


Figura 36. Electrodo de banda enterrado.



Figura 37. Arreglo de electrodos de banda.



En tales condiciones, el potencial del electrodo real es igual a la suma de su propio potencial y del potencial del electrodo ficticio originado por la reflexión en el cual se sustituye  $x = 2t$  y se hace  $y = 0$ .

Designando a la corriente que conduce el electrodo de banda enterrado totalmente por  $J$  en lugar de  $2J$ , entonces la expresión para el potencial propio del electrodo de banda enterrado a la profundidad  $t$  es la siguiente:

$$\varphi_0 = J \frac{\rho}{4\pi l} \cdot 2 \ln\left(\frac{2l}{d}\right) + J \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} - l/2} = J \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{d}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} - l/2} \right]$$

Entonces la resistencia del electrodo de banda totalmente enterrado resulta

$$R_0 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{d}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{(2t)^2 + (l/2)^2} - l/2} \right]$$

Si se divide al numerador y al denominador del segundo término entre paréntesis por  $l/2$  y

se hace la sustitución  $\frac{2t}{l/2} = m$ , la expresión queda así:

$$R_0 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{d}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \right] = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{d}\right) + \ln K \right]$$

El potencial en el punto  $P$ , con las designaciones mostradas en la figura 37, resulta en la siguiente expresión:

$$\varphi = J \frac{\rho}{4\pi l} \left[ \ln \frac{y+c+\sqrt{(x+t)^2+(y+c)^2+z^2}}{y-c+\sqrt{(x+t)^2+(y-c)^2+z^2}} + \ln \frac{y+c+\sqrt{(x-t)^2+(y+c)^2+z^2}}{y-c+\sqrt{(x-t)^2+(y-c)^2+z^2}} \right]$$

Donde  $c = l/2$

Obsérvese de la expresión anterior que forzosamente se debe incluir la tercera coordenada  $z$ .

El potencial para cualquier punto a nivel del suelo es igual a:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{y+c+\sqrt{t^2+(y+c)^2+z^2}}{y-c+\sqrt{t^2+(y-c)^2+z^2}}$$

Estamos interesados en el transcurso de potencial a nivel del suelo ( $x=0$ ) en dos direcciones:

1. En la dirección normal al eje del electrodo en su punto medio, ( $y=0$  su centro de gravedad eléctrico), ver figura 38.
2. En la dirección del eje del electrodo ( $z=0$ ).

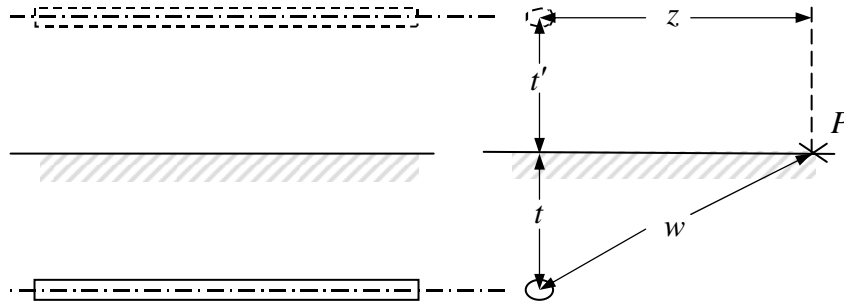
En el primer caso al hacer las sustituciones  $x=0$  y  $y=0$  el potencial resulta en:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{c^2+t^2+z^2}+c}{\sqrt{c^2+t^2+z^2}-c}$$

Haciendo la sustitución  $w = \sqrt{t^2+z^2}$  la expresión anterior resulta en:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{w^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{w^2 + (l/2)^2} - l/2}$$

Figura 38. Electrodo de banda enterrado: potencial en dirección normal al eje del electrodo en su punto medio (centro de gravedad eléctrico).



Dividiendo el numerador y el denominador por  $l/2$  y haciendo la sustitución  $m = \frac{w}{l/2}$  la expresión anterior se convierte en:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln K$$

Se determinará la distribución del potencial sobre el suelo para el electrodo con los siguientes parámetros:

$$l = 20, \quad d = 0,05 \text{ m}, \quad \rho = 100 \Omega \cdot \text{m}, \quad t = 1 \text{ m}$$

Se calculará el potencial en los puntos  $z$  sobre el suelo: 0.1, 0.5, 1.0, 1.1, 2.0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 m

$$\text{Para } z = 0,5, \quad w = \sqrt{1^2 + 0,5^2} = 1,1180, \quad m = \frac{1,1180}{20/2} = 0,1118, \text{ así que}$$

$$\ln K = \ln \frac{\sqrt{0,1118^2 + 1} + 1}{\sqrt{0,1118^2 + 1} - 1} = 5,7745, \text{ por lo tanto:}$$

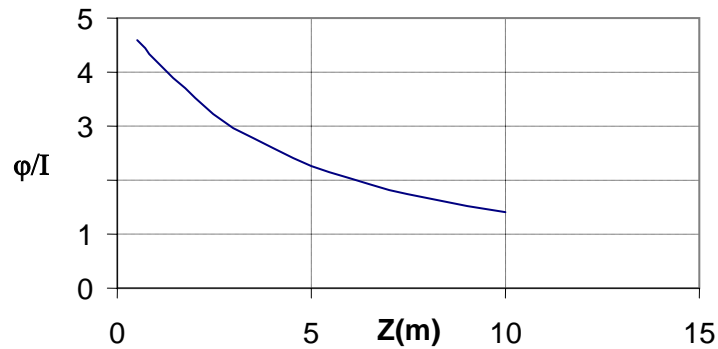
$$\varphi = J \frac{100}{2\pi \cdot 20} \cdot 5,7745 = 4,59 J$$

Procediendo de la misma manera para los otros puntos se obtienen los valores que se presentan en la tabla 6. Con ellos se bosqueja el transcurso de la curva en la figura 39.

Tabla 6. Potenciales en dirección normal al eje del electrodo de banda enterrado.

| $z(m)$ | $w$     | $m$    | $\ln K$ | $\varphi/J$ |
|--------|---------|--------|---------|-------------|
| 0,5    | 1,1180  | 0,1118 | 5,7745  | 4,5952      |
| 1      | 1,4142  | 0,1414 | 5,3082  | 4,2242      |
| 2      | 2,2361  | 0,2236 | 4,4066  | 3,5066      |
| 3      | 3,1623  | 0,3162 | 3,7371  | 2,9739      |
| 4      | 4,1231  | 0,4123 | 3,2383  | 2,5770      |
| 5      | 5,0990  | 0,5099 | 2,8523  | 2,2698      |
| 6      | 6,0828  | 0,6083 | 2,5441  | 2,0246      |
| 7      | 7,0711  | 0,7071 | 2,2924  | 1,8243      |
| 8      | 8,0623  | 0,8062 | 2,0831  | 1,6577      |
| 9      | 9,0554  | 0,9055 | 1,9065  | 1,5171      |
| 10     | 10,0499 | 1,0050 | 1,7557  | 1,3972      |

Figura 39. Perfil de tensión del electrodo de banda enterrado.



El potencial en la dirección del eje del electrodo haciendo las sustituciones  $x = 0$  y  $z = 0$  resulta en la siguiente expresión:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{t^2 + (y + l/2)^2} + y + l/2}{\sqrt{t^2 + (y - l/2)^2} + y - l/2}$$

Pero  $y$  debe ser mayor a  $l/2$  sino tendríamos el potencial propio del electrodo, teniendo en cuenta lo anterior hacemos la sustitución  $y = l/2 + B$  y el potencial en la dirección del eje del electrodo resulta en:

$$\varphi = J \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{t^2 + (B + l)^2} + B + l}{\sqrt{t^2 + B^2} + B} \quad B > 0$$

Conviene señalar que en el caso de electrodos de banda colocados de manera rasante, es decir, a profundidades que varían entre 0,5 y 1 m (como se hace generalmente en la práctica), la diferencia de valores de los potenciales obtenidos para los puntos situados en dirección normal al centro de gravedad eléctrico y para los puntos en la dirección longitudinal de los extremos, es prácticamente insignificante. Además cuando la banda es muy larga presenta en una gran parte de su longitud la misma distribución de potencial que en el punto medio. Es por ello que en la práctica general es válido y suficiente realizar el cálculo de la distribución de potencial en puntos localizados en la dirección normal.

### 2.3.5 Electrodo de placa circular.

Las expresiones matemáticas para el electrodo de placa circular pueden ser deducidas fácilmente con base en el análisis del electrodo de pica. Recuérdese que el potencial de tal electrodo quedó definido por medio de la ecuación:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \int_{-l}^l \frac{d\lambda}{\sqrt{x^2 + (y - \lambda)^2}} = 2J \frac{\rho}{8\pi l} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + (y + l)^2} + y + l}{\sqrt{x^2 + (y - l)^2} + y - l} \right)$$

Encontrándose las líneas equipotenciales sobre un elipsoide de rotación; asimismo debido a que el diámetro del electrodo era muy pequeño en comparación de su longitud, es decir que  $\rho_0 \ll l$ , la longitud de la fuente lineal  $2l$  fue casi igual a la longitud del eje mayor  $2a$ , y

el eje menor  $2b$  se aproximó al diámetro de aquel elipsoide de rotación; el cual al girar alrededor del eje  $y$  coincide con el eje  $2a$ .

Si se supone que el eje  $2a$  se va reduciendo, tendiendo finalmente hacia cero y que, en cambio, el eje  $2b$  conserva su magnitud, se llegaría a tener un disco circular que giraría sobre el eje, y cuyo campo de corriente resultante sería entonces el correspondiente a la placa circular. Por todo lo anterior, es válido formular la función potencial y la resistencia a la propagación del electrodo de placa circular a partir de las correspondientes al electrodo de pica (la expresión antes citada).

El semieje mayor de la elipse es igual a  $l = \sqrt{a^2 - b^2}$  que al introducirla en la expresión de potencial del electrodo de pica la transforma a la siguiente forma:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{a^2 - b^2})^2} + y + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{a^2 - b^2})^2} + y - \sqrt{a^2 - b^2}} \right)$$

y haciendo las sustituciones:  $a = 0$ ,  $j = \sqrt{-1}$  resulta en

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi j b} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + (y + jb)^2} + y + jb}{\sqrt{x^2 + (y - jb)^2} + y - jb} \right)$$

Expresión que describe el potencial deseado en el espacio, caracterizado por las coordenadas  $(x, y)$ .

Se puede demostrar que  $\varphi$  tiene valores reales por medio de las siguientes transformaciones:

Al desarrollar las operaciones dentro de los radicales resulta

$$x^2 + (y + jb)^2 = x^2 + y^2 + 2jby - b^2 = (x^2 + y^2 - b^2) + 2jby$$

$$x^2 + (y - jb)^2 = x^2 + y^2 - 2jby - b^2 = (x^2 + y^2 - b^2) - 2jby$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2) + 2jby} = m + nj \rightarrow (m + nj)^2 = (x^2 + y^2 - b^2) + 2jby$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} - 2jby = m - nj$$

$$m^2 + 2mnj - n^2 = (x^2 + y^2 - b^2) + 2jby$$

$$m^2 - n^2 = (x^2 + y^2 - b^2) \quad (18) \quad by = mn \quad (19)$$

Despejando  $n$  en (19) y reemplazando en (18)

$$m^2 - \left(\frac{by}{m}\right)^2 = x^2 + y^2 - b^2 \rightarrow m^2 - \frac{b^2 y^2}{m^2} = x^2 + y^2 - b^2 \rightarrow \frac{m^4 - b^2 y^2}{m^2} = x^2 + y^2 - b^2$$

$$m^4 - (x^2 + y^2 - b^2)m^2 - b^2 y^2 = 0$$

Haciendo el cambio de variable  $u = m^2$  la anterior ecuación se transforma en:

$$u^2 - (x^2 + y^2 - b^2)u - b^2 y^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$u = \frac{(x^2 + y^2 - b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)^2 + 4b^2 y^2}}{2} \text{ volviendo a la variable original } m$$

$$m^2 = \frac{(x^2 + y^2 - b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)^2 + 4b^2 y^2}}{2}$$

$$m = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 - b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)^2 + 4b^2 y^2}}{2}}$$

La expresión dentro del logaritmo queda expresada de la siguiente forma:

$$\ln \frac{m + nj + y + jb}{m - nj + y - jb} = \ln \frac{(m + y) + j(n + b)}{(m + y) - j(n + b)}$$

De la anterior ecuación se puede observar que el denominador del logaritmo es el complejo conjugado del numerador, luego:

$$\ln \frac{e^{j\alpha}}{e^{-j\alpha}} = \ln e^{2j\alpha} = 2j\alpha \text{ donde } \alpha = \arctg\left(\frac{n + b}{m + y}\right) \text{ pero } n = \frac{by}{m} \rightarrow$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{by/m + b}{m + y}\right) = \arctg\left[\frac{b(y/m + 1)}{m + y}\right] = \arctg\left[\frac{b(y + m)/m}{m + y}\right] = \arctg\left(\frac{b}{m}\right)$$

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi j b} \cdot 2j\alpha = 2J \frac{\rho\alpha}{4\pi b}$$

### 2.3.5.1 Placa semienterrada.

Cuando la placa está embutida en el terreno y contra la atmósfera, si  $y = 0$ , entonces el punto considerado está situado sobre el plano en el cual está colocada la placa, y la expresión del potencial de la placa queda así:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi j b} \ln \frac{\sqrt{x^2 - b^2} + jb}{\sqrt{x^2 - b^2} - jb} = 2J \frac{\rho}{8\pi j b} \ln \frac{m + nj}{m - nj}$$

y como  $\frac{m + nj}{m - nj}$  es equivalente a  $\frac{e^{j\alpha}}{e^{-j\alpha}} = e^{2j\alpha}$  donde  $\alpha = \arctg \frac{n}{m} = \text{tg}^{-1} \frac{b}{\sqrt{x^2 - b^2}}$ ,

finalmente el potencial en el punto en cuestión queda expresado por medio de:

$$\varphi = 2J \frac{\rho}{8\pi j b} \ln e^{2j\alpha} = 2J \frac{\rho}{8\pi b} \cdot 2j\alpha = 2J \frac{\rho}{4\pi b} \cdot \alpha$$

El potencial de la placa se obtiene al hacer la sustitución  $x = b$ , es decir, igual al radio de la placa circular, resultando la siguiente expresión:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{8b} \text{ puesto que } \alpha = \arctg \left( \frac{b}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la resistencia a la propagación del electrodo de placa circular en un espacio ilimitado por todos lados (cuando es aplicado el método de las imágenes), queda expresada por medio de:

$$R_0 = \frac{\rho}{8b}$$

Al eliminar el principio de reflexión, el electrodo real conduce solamente la mitad de la corriente, es decir, sólo  $J$ . Por lo tanto la resistencia del electrodo de placa semienterrado debe tener el doble del valor calculado en la expresión anterior, esto es:

$$R_0 = 2 \left( \frac{\rho}{8b} \right) = \frac{\rho}{4b} = \frac{\rho}{2D}$$

La distribución del potencial sobre la superficie del suelo que rodea al electrodo de placa se puede expresar así:

$$\varphi = \left(2J \frac{\rho}{8b}\right) \frac{2\alpha}{\pi} = \varphi_0 \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right) \rightarrow \varphi = \varphi_0 K_x \text{ con } K_x = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Como ejemplo se determinará la distribución de potencial sobre el suelo para un electrodo de placa semienterrado con los siguientes datos:  $\rho = 100 \Omega \cdot m$ ,  $D = 2 m$

Se determinará el potencial para los puntos  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  y  $10 m$

El potencial en el punto  $x = 1$ :  $\varphi_0 = \frac{100}{4 \times 1} J = 25 J$

Para  $x = 2$ ,  $\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{2^2 - 1^2}} = 0,5236$  ; así que  $\varphi_x / \varphi_0 = \frac{2 \times 0,5236}{\pi} = 0,333$

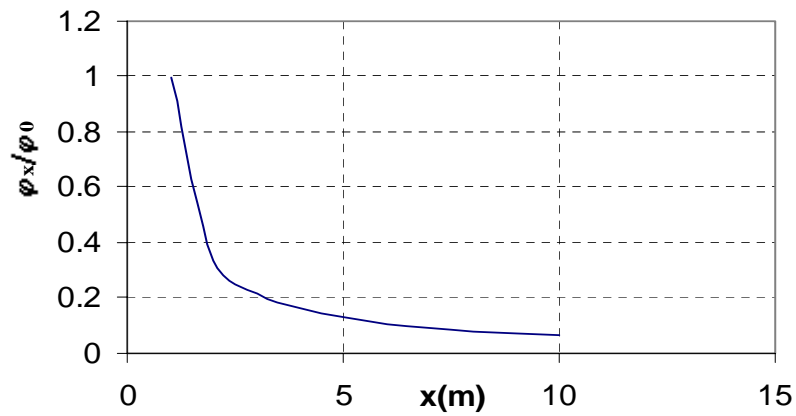
Procediendo de manera similar se obtienen los otros valores involucrados los cuales se incluyen en la tabla 7. La distribución de potencial de del electrodo se muestra en la figura 40.

Tabla 7. Potenciales de electrodo de placa semienterrado.

| $x(m)$ | $\varphi_x$ | $\varphi_x / \varphi_0$ | $V_p / \varphi_0$ |
|--------|-------------|-------------------------|-------------------|
| 1      | 1,5708      | 1                       |                   |
| 2      | 0,5236      | 0,3333                  | 0,6667            |
| 3      | 0,3398      | 0,2163                  | 0,1170            |
| 4      | 0,2527      | 0,1609                  | 0,0555            |
| 5      | 0,2014      | 0,1282                  | 0,0327            |
| 6      | 0,1674      | 0,1066                  | 0,0216            |
| 7      | 0,1433      | 0,0913                  | 0,0153            |
| 8      | 0,1253      | 0,0798                  | 0,0115            |
| 9      | 0,1113      | 0,0709                  | 0,0089            |
| 10     | 0,1002      | 0,0638                  | 0,0071            |

Los voltajes de paso: por ejemplo entre los puntos 1 y 2:  $V_p = (1 - 0,333)\varphi_0 = 0,667\varphi_0$ ; en la tabla anterior también se incluyen los voltajes de paso correspondientes.

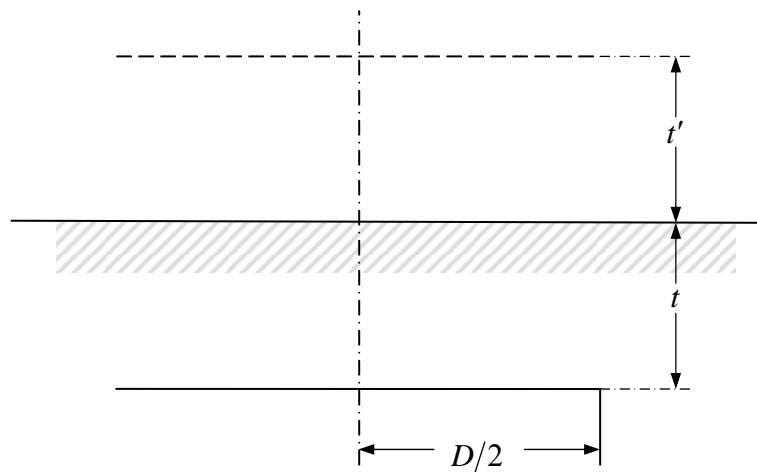
Figura 40. Distribución de potencial del electrodo de placa circular.



### 2.3.5.2 Placa totalmente enterrada.

Cuando el electrodo de placa está enterrado a una cierta profundidad  $t$ , al aplicarle el principio de la imagen reflejada se origina el electrodo gemelo mostrado en la figura 41.

Figura 41. Arreglo de electrodos de placa circular.



El potencial sobre el electrodo real, como en casos anteriores, será igual a la suma de su propio potencial y de la contribución del potencial del electrodo ficticio

El potencial propio se calcula por medio de la expresión:

$$\varphi_{11} = J \frac{\rho}{4D} = J \frac{\rho}{8b}$$

Mientras que la contribución de potencial del electrodo ficticio se determina con la expresión del potencial del electrodo de placa semienterrado, la cual al hacer las sustituciones de las coordenadas correspondientes relacionadas con la imagen reflejada, es decir  $y = 2t$  ;  $x = 0$  , se transforma en la siguiente expresión:

$$\varphi'_{11} = J \frac{\rho}{8\pi j b} \ln \frac{2t + jb}{2t - jb} = J \frac{\rho}{8\pi j b} \cdot 2\alpha \quad \text{en la cual } \alpha = \arctg \frac{b}{2t}$$

Por lo tanto, la resistencia a la propagación para la placa enterrada totalmente, resulta así:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{J} = \frac{\rho}{4D} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \right)$$

Cuando la placa está colocada verticalmente a una profundidad  $t$  de su punto medio bajo la superficie, se obtienen las mismas expresiones para el cálculo de la resistencia.

La distribución del potencial sobre la superficie del suelo en el caso de la placa circular colocada a pequeñas profundidades es de mucho interés, a pesar de que la utilización de los electrodos de placa es bastante restringida, por las siguientes razones:

- 1) Los sistemas de tierra extensos (como los utilizados en las grandes subestaciones a la intemperie), se forman generalmente por medio de electrodos de banda (conductor cilíndrico) en paralelo, formando mallas rectangulares y/o cuadradas cubriendo todo el terreno sobre el cual está emplazada la instalación de energía eléctrica, en el cual además existen otros muchos elementos que actúan de electrodos naturales (cimientos de equipos, líneas de tuberías metálicas, etc.) los cuales interactúan con la red artificial de tierra (la malla), dando por resultado un campo de corriente que se aproxima bastante al de una placa.

2) Disponer de un terreno homogéneo en la práctica es en verdad un caso ideal, mas no general; en la realidad se presentan muchas clases de heterogeneidades, siendo una de ellas el corte geoelectrico estratificado en capas de diferentes características geológicas, lo que resulta en resistividades diferentes en función de la profundidad. Esto debe ser tomado muy en consideración cuando se diseña el sistema de tierra de instalaciones de energía eléctrica de gran extensión (subestaciones de alta y extra alta tensión a la intemperie), de lo contrario se corre el riesgo de diseñar una puesta a tierra muy sobrada o por el contrario, insuficiente y por lo tanto ineficiente y/o peligrosa para los seres vivientes. La obtención de un buen diseño involucra por una parte, el correcto conocimiento de las resistividades de las diversas capas de suelo (con la ayuda de las técnicas de la exploración eléctrica) y, por otra, el conocimiento de la distribución de potencial a través del subsuelo, lo cual se logra de una manera bastante aproximada (pero válida para los fines prácticos), con base en el análisis de la distribución del potencial bajo la placa, a partir del cual se pueden trazar las líneas equipotenciales relacionadas con las correspondientes capas de terreno.

Para analizar la distribución del potencial debajo de la placa, se debe indagar el valor del potencial en suficientes puntos a lo largo de ejes verticales  $-y$ , desde el eje central de la placa hasta el borde de la misma, lo cual es bastante laborioso y hasta tedioso (a menos que se disponga de facilidades de cálculo automático y de programas apropiados); sin embargo, para la práctica general, es suficiente investigar sólo en algunas posiciones claves, por ejemplo, en el centro, en el borde y en un lugar intermedio.

Primeramente se indagarán las condiciones del potencial debajo de la placa a lo largo de su eje  $-y$ ; considerando la expresión del potencial del electrodo de placa, en la cual se hace la sustitución  $x = 0$ , transformándose a:

$$\varphi_{(y)} = 2J \frac{\rho}{8\pi b} \ln \frac{2(y + jb)}{2(y - jb)} = 2J \frac{\rho}{8b} \frac{2\alpha_1}{\pi}$$

En la cual  $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{b}{y}$ , y considerando que  $\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{8b}$ , y con  $K_y = \frac{2\alpha_1}{\pi}$  la anterior expresión se simplifica así:  $\varphi_{(y)} = \varphi_0 K_y$

Las condiciones del potencial en los bordes de la placa se determinan haciendo la sustitución  $x = b$ , resultando entonces la siguiente expresión:

$$\varphi_{yb} = 2J \frac{\rho}{8\pi b} \cdot 2\alpha_2$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} (b/m) = \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{y^2/2 \pm y\sqrt{y^2/4 + b^2}}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{y \sqrt{1/2 \pm \sqrt{1/4 + (b/y)^2}}}$$

Por supuesto, en las anteriores expresiones sólo tiene significado para los respectivos radicales los signos positivos, ya que los negativos darían valores imaginarios de los denominadores.

Se llega finalmente a la siguiente expresión para el potencial en el borde de la placa:

$$\varphi_{yb} = \varphi_0 \cdot \frac{2\alpha_2}{\pi} = \varphi_0 K_{yb} \text{ en la que } K_{yb} = \frac{2\alpha_2}{\pi}$$

Entonces con las anteriores expresiones es posible determinar las condiciones del potencial, abajo (en la zona central) y en los bordes del electrodo de placa circular.

Del análisis de los valores del potencial tanto en el centro como en los bordes de la placa se hace evidente (en especial en la cercanía del suelo) que las líneas equipotenciales no son líneas rectas, corresponden al elipsoide de rotación, como puede observarse en la figura 42. Desde luego el grado de curvatura variará en función del diámetro de la placa.

Obsérvese la mayor densidad de las líneas de campo en la proximidad de los bordes de la placa, lo cual influye desfavorablemente en el valor del voltaje de paso.

Con base en el análisis anterior es posible determinar como será la distribución (repartición) de la resistividad total de un terreno con estructura geológica en capas (estratificado o foliado). En tales clases de terreno es muy común, por ejemplo, que la capa

superior de espesor  $t$  tenga una resistividad  $\rho_1$  y que el subsuelo restante posea una resistividad  $\rho_2$  menor (suponiendo un terreno con dos capas) como se muestra en la figura 43.

Figura 42. Superficies equipotenciales del electrodo de placa circular

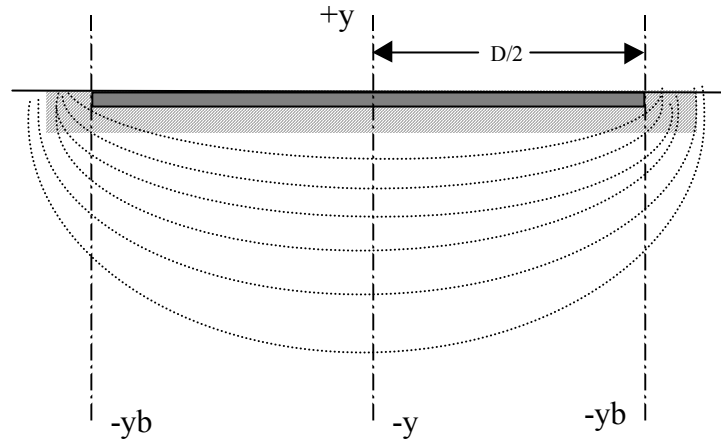
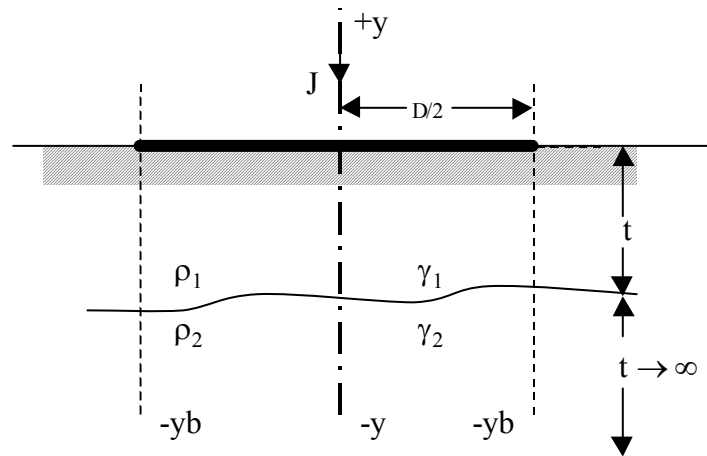


Figura 43. Electrodo de placa circular en un terreno de dos capas.



En estos casos se puede determinar el factor  $K_{yb}$  para  $y = t$ , determinando la distribución de potencial en esas condiciones y entonces calcular de manera aproximada la parte de resistividad que le corresponde a la capa superior, por medio de la relación  $\frac{\rho_1}{4b}(1 - K_{yb})$ .

Asimismo, la parte de la resistividad que recae en la capa inferior por medio de la relación

$$\frac{\rho_1}{4b} K_{yb}.$$

La suma de ambas resistividades es igual a la resistividad efectiva del terreno. Debe señalarse que el cálculo hecho en la forma anterior sería absolutamente exacto cuando la superficie que divide a las dos capas diferentes fuese un esferoide y no un plano, pues entonces si serían aprovechados eficientemente los volúmenes de tierra comprendidos entre las diferentes superficies equipotenciales.

En la realidad generalmente la estratificación y/o foliación de las capas se presenta formando planos más o menos paralelos. Por lo tanto ello influye en la exactitud del cálculo, especialmente en la distribución de la corriente en la proximidad de los bordes de la placa, ocasionando un espesamiento de las líneas del campo de corriente; sin embargo, en la práctica se puede evaluar el factor  $K_{yb}$  para el borde de la placa, relacionada con el terreno ocupado por la instalación de energía eléctrica, para un espesor dado de capa, obteniéndose una coincidencia bastante buena con las relaciones del sistema de puesta a tierra formada por medio de bandas paralelas con una separación entre ellas de cinco a diez metros.

### 2.3.6 Electrodo en anillo circular.

En el caso del electrodo de banda en forma de anillo circular, el análisis riguroso condujo a una expresión para el potencial del electrodo no muy apropiada para la práctica general ya que plantea la solución analítica de una integral elíptica completa de primer grado. Ello ha motivado a diversos investigadores a buscar representaciones más comprensibles y fáciles de calcular para dicho potencial en la resolución de los problemas.

Debido a esto anteriormente se dieron varias alternativas para el cálculo de esta integral, como:

1. Por medio de una serie (en potencias ascendentes de su módulo  $k$  o de su módulo complementario  $k'$  ).
2. Por medio de una aproximación polinomial.
3. Por medio de tablas.

A continuación se presentará un método alternativo para el cálculo de la integral elíptica desarrollado por Potthof [12] el cual demostró que el campo de un electrodo en anillo se podía representar fácilmente por medio de la introducción de la función conocida como “función media aritmética geométrica”

### 2.3.6.1 El proceso de la media Aritmética –Geométrica [10]

Empezando con un número triple  $(a_0, b_0, c_0)$  procedemos a determinar números triples  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_N, b_N, c_N)$  de acuerdo con el siguiente esquema:

| $a_0$                                  | $b_0$                           | $c_0$                                  |
|--|---------------------------------|--|
| $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$         | $b_1 = (a_0 b_0)^{1/2}$         | $c_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0)$         |
| $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$         | $b_2 = (a_1 b_1)^{1/2}$         | $c_2 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$         |
| .                                      | .                               | .                                      |
| .                                      | .                               | .                                      |
| .                                      | .                               | .                                      |
| $a_N = \frac{1}{2}(a_{N-1} + b_{N-1})$ | $b_N = (a_{N-1} b_{N-1})^{1/2}$ | $c_N = \frac{1}{2}(a_{N-1} - b_{N-1})$ |

Paramos en el enésimo paso cuando  $a_N = b_N$  , por ejemplo, cuando  $c_N = 0$  con el grado de exactitud en el cual el número sea requerido.

Para determinar la integral elíptica completa  $K(\alpha)$  empezamos con:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \cos \alpha, \quad c_0 = \sin \alpha \quad \text{donde} \quad k = \sin \alpha = c_0 \quad \text{y} \quad b_0 = \sqrt{1 - k^2}$$

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{2a_N}$$

Como ejemplo se hará el cálculo de la integral elíptica para  $k^2 = \sin^2 \alpha = 80/81$ . En este

caso empezamos con  $a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{9}, \quad c_0 = \sqrt{80/81} = 0,99380799$

Los datos del esquema se han incluido en la tabla 8.

Tabla 8. Números triples para determinar la integral elíptica normal del primer tipo por medio de la función media aritmética-geométrica.

| n | $a_0$        | $b_0$        | $c_0$        |
|---|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 1,0000000000 | 0,1111111111 | 0,9938079900 |
| 1 | 0,5555555556 | 0,3333333333 | 0,4444444444 |
| 2 | 0,4444444444 | 0,4303314829 | 0,1111111111 |
| 3 | 0,4373879637 | 0,4373310381 | 0,0070564808 |
| 4 | 0,4373595009 | 0,4373594999 | 0,0000284628 |
| 5 | 0,4373595004 | 0,4373595004 | 0,0000000005 |

$$\text{Así que } K(80/81) = \frac{\pi}{2} a_5^{-1} = 3,591545001$$

La expresión del potencial para este electrodo es la misma que se obtuvo en el método riguroso solo que se calcula de otra forma la integral elíptica completa  $K$ .

La expresión para el cálculo del potencial propio del electrodo en anillo circular colocado de manera rasante contra la atmósfera es la siguiente:

$$\varphi_0 = 2J \frac{\rho}{\pi^2 D} \ln \left( 8 \frac{D}{d} \right)$$

Donde en cambio del radio  $a$  del anillo se ha usado su diámetro  $D$  y en lugar del radio de la sección transversal  $\rho_0$  se ha usado el diámetro  $d$  de la misma.

Por lo tanto la resistencia del electrodo en anillo circular es:

$$R_0 = \frac{\rho}{\pi^2 D} \ln\left(8 \frac{D}{d}\right)$$

### 2.3.7 El método del potencial promedio.

Existe otro método aproximado llamado el *método del potencial promedio* el cual nos permite el cálculo de las resistencias propias o mutuas de los electrodos. Su diferencia con los anteriores métodos es que asume uniforme distribución de corriente a lo largo del electrodo pero con el fin de obtener el valor de su resistencia.

La esencia del método, el cual es mostrado en el libro de Sunde [13], es la siguiente:

Supongamos que tenemos un conductor cilíndrico embebido en un medio conductor de infinita extensión. Asuma que el conductor se extiende a lo largo del eje  $x$  entre  $x = -l/2$  y  $x = l/2$ , y que la corriente  $I_0$  entra en el punto medio.

Estableciendo que la corriente del conductor a la distancia  $x = u$  sea  $I(u)$ . El potencial en el punto  $(x, y)$  en el medio circundante debido a la corriente que deja un elemento conductor  $du$  en  $x = u$  es entonces:

$$dV(x, y) = \frac{dI(u)}{du} \frac{\rho}{4\pi} [(x-u)^2 + y^2]^{-1/2} du$$

Donde el término que multiplica  $\frac{dI(u)}{du} du$  es la resistencia entre dos puntos en un medio de infinita extensión. En esta expresión se asume que el potencial debido a la corriente que deja un elemento conductor es el mismo de una fuente puntual en el eje del conductor.

El potencial debido a la pérdida de corriente a lo largo de todo el conductor es entonces:

$$V(x, y) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} [(x-u)^2 + y^2]^{-1/2} \frac{dI(u)}{du} du \quad (20)$$

Si la resistencia del conductor se asume despreciable de modo que la caída de voltaje a lo largo del conductor puede ser omitida, la condición de frontera a ser satisfecha en la superficie del conductor  $y = a$  es:

$$\frac{dV(x, a)}{dx} = 0$$

Por lo tanto la distribución de corriente a través del conductor debe satisfacer la ecuación integral

$$0 = \frac{d}{dx} \int_{-l/2}^{l/2} [(x-u)^2 + a^2]^{-1/2} \frac{dI(u)}{du} du$$

Por aproximaciones sucesivas es posible el encontrar una distribución de pérdida de corriente  $\frac{dI(u)}{du}$  a lo largo del conductor que satisfaga esta ecuación. Cuando la distribución de corriente es obtenida de esta forma y el potencial del conductor es luego calculado de la ecuación (20), resulta que el valor promedio de éste, es dentro de un pequeño porcentaje de error, igual al potencial promedio de (20) donde  $\frac{dI(u)}{du} du$  es tomado igual a la pérdida de corriente promedio  $2I(0)/l = I_0/l$ .

Asumiendo pérdida de corriente constante  $\frac{dI(u)}{du} = 2I(0)/l$  a través del conductor, la evaluación de (20) da:

$$V(x, y) = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \alpha(x, y) \quad \text{donde} \quad \alpha(x, y) = \frac{\sqrt{(x+l/2)^2 + y^2} + x + l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2 + y^2} + x - l/2} \quad (21)$$

Cuando la longitud del conductor es mucho más grande que su diámetro, el potencial en el punto medio y en los puntos extremos es, con  $y = a$

$$V(0, a) = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{(l/2)^2 + a^2} + l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + a^2} - l/2}$$

Pero  $\sqrt{(l/2)^2 + a^2} \cong l/2 + a^2/l$  por el teorema del binomio, luego:

$$V(0, a) = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{l/2 + a^2/l + l/2}{l/2 + a^2/l - l/2} = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{l}{a^2/l} = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l} \ln \left(\frac{l}{a}\right)$$

Y en los extremos

$$V(l/2, a) = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{a} \quad \text{en este caso } \sqrt{l^2 + a^2} \cong l + a^2/2l \quad \text{luego}$$

$$V(l/2, a) = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{l + a^2/2l + l}{a} = \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \left(\frac{2l}{a}\right)$$

Así que, asumiendo pérdida de corriente uniforme, el potencial en el punto medio es cerca del doble que en los puntos extremos. Es evidente, por lo tanto, que la pérdida de corriente será más grande hacia los extremos del conductor.

Seguidamente se calcula el potencial promedio obtenido por integración de la ecuación (21)

entre  $x = 0$  y  $x = l/2$  y reemplazando a  $y = a$  así:

$$\bar{V} = \frac{1}{l/2} \int_0^{l/2} V(x, a) dx = \frac{1}{l/2} \int_0^{l/2} \frac{2I(0)\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{(x+l/2)^2 + a^2} + x + l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2 + a^2} + x - l/2} dx$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \int_0^{l/2} \left\{ \ln \left[ \sqrt{(x+l/2)^2 + a^2} + x + l/2 \right] - \ln \left[ \sqrt{(x-l/2)^2 + a^2} + x - l/2 \right] \right\} dx$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ (x+l/2) \ln \left[ \sqrt{(x+l/2)^2 + a^2} + x + l/2 \right] \Big|_0^{l/2} - \sqrt{(x+l/2)^2 + a^2} \Big|_0^{l/2} - (x-l/2) \ln \left[ \sqrt{(x-l/2)^2 + a^2} + x - l/2 \right] \Big|_0^{l/2} + \sqrt{(x-l/2)^2 + a^2} \Big|_0^{l/2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \left[ \sqrt{l^2 + a^2} + l \right] - \frac{l}{2} \ln \left[ \sqrt{(l/2)^2 + a^2} + l/2 \right] - \sqrt{l^2 + a^2} + \sqrt{(l/2)^2 + a^2} - \frac{l}{2} \ln \left[ \sqrt{(l/2)^2 + a^2} - l/2 \right] + a - \sqrt{(l/2)^2 + a^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \left[ \sqrt{l^2 + a^2} + l \right] - \frac{l}{2} \ln \left[ \left( \sqrt{(l/2)^2 + a^2} + l/2 \right) \left( \sqrt{(l/2)^2 + a^2} - l/2 \right) \right] + a - \sqrt{l^2 + a^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \left[ \sqrt{l^2 + a^2} + l \right] - \frac{l}{2} \ln \left[ (l/2)^2 + a^2 - (l/2)^2 \right] + a - \sqrt{l^2 + a^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \left[ \sqrt{l^2 + a^2} + l \right] - \frac{l}{2} \ln a^2 + a - \sqrt{l^2 + a^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \left[ \sqrt{l^2 + a^2} + l \right] - l \ln a + a - \sqrt{l^2 + a^2} \right\} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l^2} \left\{ l \ln \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{a} + a - \sqrt{l^2 + a^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l} \left\{ \ln \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{a} + \frac{a}{l} - \sqrt{1 + \left( \frac{a}{l} \right)^2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2I(0)\rho}{2\pi l} \left\{ \ln \left[ \frac{l}{a} \left( 1 + \sqrt{1 + (a/l)^2} \right) \right] + \frac{a}{l} - \sqrt{1 + (a/l)^2} \right\}$$

Luego la resistencia propia del conductor cilíndrico de longitud  $l$  rodeado por un medio de extensión infinita es igual a:

$$R = \frac{\bar{V}}{2I(0)} = \frac{\rho}{2\pi l} \left\{ \ln \left[ \frac{l}{a} \left( 1 + \sqrt{1 + (a/l)^2} \right) \right] + \frac{a}{l} - \sqrt{1 + (a/l)^2} \right\} \quad (22)$$

Si  $l \gg a$

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \approx \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{0.74l}{a} \right)$$

Otro método que da el mismo resultado es como sigue:

Volviendo a la ecuación (21) puede demostrarse que las líneas equipotenciales  $V(x, y)$ ; que corresponden a  $\alpha(x, y)$  constante, son elipses confocales con los focos en los extremos del conductor. Cuando  $\alpha$  es dado, el eje mayor  $l_0$  de esas elipses son obtenidas de:

$$l_0 = l \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad (23)$$

Donde  $\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$  puede demostrarse que es la coordenada esferoidal  $\xi$  (ver anexo A, coordenadas esferoidales) que define una elipse así:

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{\sqrt{(x+l/2)^2+y^2}+x+l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2+y^2}+x-l/2} + 1}{\frac{\sqrt{(x+l/2)^2+y^2}+x+l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2+y^2}+x-l/2} - 1} = \frac{\sqrt{(x+l/2)^2+y^2}+x+l/2 + \sqrt{(x-l/2)^2+y^2}+x-l/2}{\sqrt{(x-l/2)^2+y^2}+x-l/2}$$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\sqrt{(x+l/2)^2+y^2} + \sqrt{(x-l/2)^2+y^2} + 2x}{\sqrt{(x+l/2)^2+y^2} - \sqrt{(x-l/2)^2+y^2} + l}$$

En las coordenadas esferoidales  $r_1 = \sqrt{(x+l/2)^2+y^2}$  y  $r_2 = \sqrt{(x-l/2)^2+y^2}$  son las distancias de un punto  $(x, y)$  a los focos, luego la anterior expresión se transforma en:

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{r_1+r_2+2x}{r_1-r_2+l}$$

Pero en estas coordenadas  $\xi = \frac{r_1+r_2}{l} \rightarrow \xi l = r_1+r_2$  y  $\eta = \frac{r_1-r_2}{l} \rightarrow \eta l = r_1-r_2$  por

lo tanto la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\xi l + 2x}{\eta l + l}$$

la coordenada  $x$  es igual a (en coordenadas esferoidales):  $x = \frac{l}{2} \xi \eta$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\xi l + l \xi \eta}{\eta l + l} = \frac{l \xi (1 + \eta)}{l(1 + \eta)} = \xi$$

El semieje menor  $a$  queda expresado de la siguiente forma

$$c = \sqrt{(l_0/2)^2 - a^2} \quad c = l/2 \rightarrow (l/2)^2 = (l_0/2)^2 - a^2 \rightarrow a^2 = (l_0/2)^2 - (l/2)^2$$

$$\text{Pero } l_0 \text{ es igual a } l_0 = l \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \rightarrow a^2 = \left( \frac{l}{2} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^2 - \left( \frac{l}{2} \right)^2 \rightarrow a^2 = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \left[ \left( \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^2 - 1 \right]$$

$$a^2 = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \left[ \frac{(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} \right] = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \left[ \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha - 1}{(\alpha-1)^2} \right] = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \cdot \frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{l^2}{4} \frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

$$a^2 = l^2 \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} \rightarrow a = l \frac{\alpha^{1/2}}{(\alpha-1)}$$

$$\text{Pero } l_0 = l \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \rightarrow l = l_0 \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \rightarrow a = l_0 \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\alpha-1} = l_0 \frac{\alpha^{1/2}}{\alpha+1} \quad (24)$$

Cualquier superficie equipotencial puede ser reemplazada por una hoja delgada de resistividad despreciable, sin alterar la distribución del potencial. Si el material dentro de la hoja es luego reemplazado por un material de resistividad despreciable, el potencial fuera de la superficie equipotencial no es alterado y un electrodo teniendo la forma de un elipsoide de revolución es obtenido. Su resistencia se calcula al sustituir en (21)  $l$  como es obtenido de (23) y  $\alpha$  como es obtenida por solución de (24) así:

$$\alpha^{1/2} = \frac{a(\alpha+1)}{l_0} \quad \text{elevando al cuadrado}$$

$$\alpha = (a/l_0)^2 (\alpha^2 + 2\alpha + 1) \rightarrow (a/l_0)^2 \alpha^2 + [2((a/l_0)^2 - 1)]\alpha + (a/l_0)^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática

$$\alpha = -\frac{[2(a/l_0)^2 - 1]}{2(a/l_0)^2} \pm \frac{\sqrt{[2(a/l_0)^2 - 1]^2 - 4(a/l_0)^4}}{2(a/l_0)^2}$$

$$\alpha = \frac{1 - 2(a/l_0)^2}{2(a/l_0)^2} \pm \frac{\sqrt{[2(a/l_0)^2 - 1]^2 - 4(a/l_0)^4}}{2(a/l_0)^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (l_0/a)^2 - 1 \pm \frac{\sqrt{4(a/l_0)^4 - 4(a/l_0)^2 + 1 - 4(a/l_0)^4}}{2(a/l_0)^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (l_0/a)^2 - 1 \pm \frac{\sqrt{1 - 4(a/l_0)^2}}{2(a/l_0)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{a}\right)^2 - 1 \pm \frac{1}{2} \frac{l_0}{a} \sqrt{\left(\frac{l_0}{a}\right)^2 - 4}$$

$$\text{Si hacemos } \alpha_0 = (l_0/a)^2 - 2 \text{ entonces } \alpha = \frac{\alpha_0}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha_0^2}} \right]$$

Reemplazando el valor de  $l$  y  $\alpha$  en (21)

$$R = \frac{\rho}{4\pi l_0} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \ln \alpha$$

Cuando la anterior expresión se aplica a una esfera de radio  $a$ ,  $\alpha \rightarrow 1$  y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\alpha - 1} \ln \alpha \rightarrow 1, \text{ así que la resistencia resulta, con } l_0 = 2a, R = \frac{\rho}{4\pi a} \text{ lo cual es correcto.}$$

Cuando el eje mayor se aproxima a cero, el elipsoide de revolución llega a ser un disco circular. En este caso  $l_0/a \ll 1$  y  $\alpha = -1 + i(l_0/a)$ . Despreciando la parte compleja de  $\alpha$ ,  $\ln \alpha = \ln(-1) = i\pi$  y la resistencia es igual a:

$$R = \frac{\rho}{4\pi l_0} \frac{-1 + i(l_0/a) + 1}{-1 + i(l_0/a) - 1} \cdot i\pi = \frac{\rho}{4\pi l_0} \frac{i(l_0/a)}{-2} \cdot i\pi = \frac{\rho}{8a}$$

Este es el resultado apropiado para un disco circular en un medio de extensión infinita en todas direcciones.

La resistencia de un elipsoide de revolución de longitud  $l_0$  y radio máximo  $y = a$  mucho más pequeño que  $l_0$ , rodeado por un medio de extensión infinita puede ser calculado tomando  $\alpha$  igual a:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{l_0}{a} \right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \frac{l_0^2}{a^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2a}{l_0} \right)^2 \right] \quad *$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{l_0}{a} \right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{l_0}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{l_0^2}{a^2} \cdot \frac{4a^2}{l_0} = \left( \frac{l_0}{a} \right)^2 - 2$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{(l_0/a)^2 - 2 + 1}{(l_0/a)^2 - 2 - 1} = \frac{(l_0/a)^2 - 1}{(l_0/a)^2 - 3} \approx 1 \rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi l_0} \ln \left( \frac{l_0}{a} \right)$$

Esta fórmula es la misma como aquella obtenida al tomar el potencial en el punto medio de un conductor cilíndrico y difiere solo ligeramente de aquella obtenida cuando el método del potencial promedio es usado.

Las anteriores expresiones son válidas para un medio ilimitado y homogéneo de resistividad  $\rho$ . Para hallar la resistencia de los electrodos semienterrados se usa, como antes, el método de las imágenes. Así para el electrodo de pica se asume un plano perpendicular al eje del electrodo de longitud  $l$  en su punto medio. El medio, el conductor

---

\* Por desarrollo del binomio en el segundo término de la expresión.

y la corriente  $I(0)$  en un lado de este plano pueden entonces ser removidos sin perturbar la corriente o el potencial en el otro lado.

El potencial es así obtenido para un conductor vertical de longitud  $l/2$  llevando una corriente  $I(0)$ . Donde el potencial es el mismo pero la corriente total es  $I(0)$  en cambio de  $2I(0)$ , la resistencia de tal conductor es dos veces más grande que aquella dada por (21) donde  $l$  es dos veces la longitud del conductor, así:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left\{ \ln \left[ \frac{2l}{a} \left( 1 + \sqrt{1 + (a/2l)^2} \right) \right] + \frac{a}{2l} - \sqrt{1 + (a/2l)^2} \right\}$$

Cuando  $l \gg a$

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right)$$

Para los demás electrodos semienterrados su resistencia se obtiene multiplicando su correspondiente expresión por dos. Así para el electrodo semiesférico  $R = \frac{\rho}{2\pi a}$

Para el electrodo de placa circular semienterrado  $R = \frac{\rho}{4a}$

Y por último para el electrodo de banda superficial:

$$R = \frac{\rho}{\pi l} \left\{ \ln \left[ \frac{l}{a} \left( 1 + \sqrt{1 + (a/l)^2} \right) \right] + \frac{a}{l} - \sqrt{1 + (a/l)^2} \right\}$$

Si  $l \gg a$

$$R \cong \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 \right)$$

### 2.3.8 El método de Rüdénberg.

Por último, existe otro método aproximado para el análisis del electrodo de pica, el cual por la sencillez de la expresión del potencial que se obtiene ofrece ciertas ventajas.

Este método aproximado desarrollado por *Riidenberg* [14] subdivide el electrodo de pica embebido en el terreno, como se muestra en la figura 44, en un gran número de elementos aproximadamente esféricos, los cuales sobre la longitud  $l$  de la pica tienen la distancia mutua

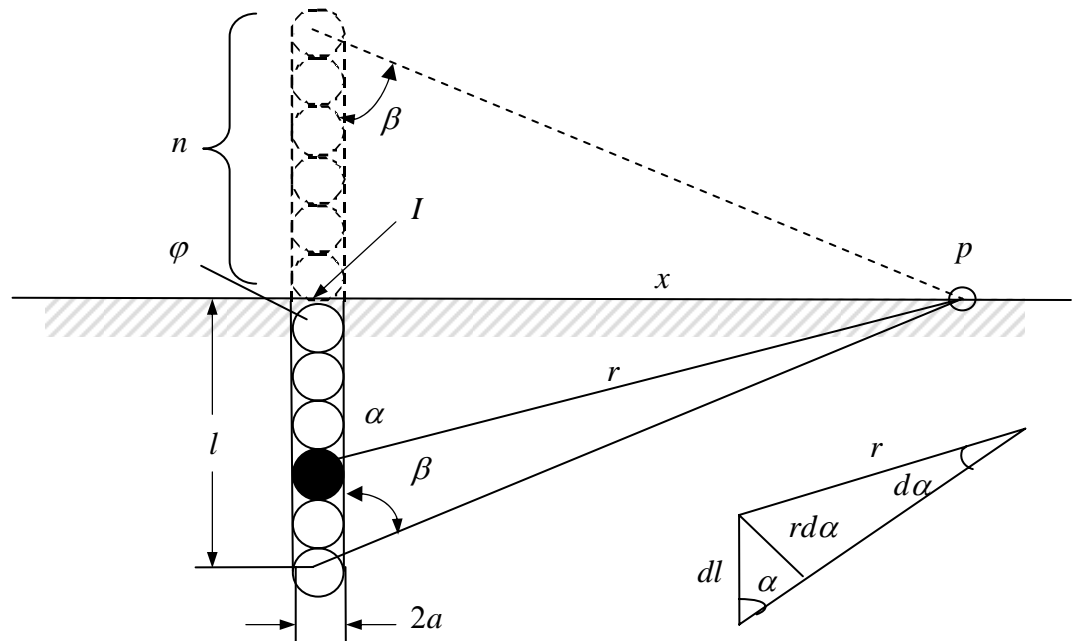
$$dl = l/n$$

Cada elemento alimenta una corriente  $I/n$  en la tierra.

Si  $r$  es la distancia de cualquier elemento a un punto en la superficie y  $\alpha$  es el ángulo de  $r$  con el eje de la pica, el pequeño diagrama de la figura 44 muestra que:

$$\sin \alpha = r \frac{d\alpha}{dl}$$

Figura 44. Electrodo de pica aproximado por  $n$  elementos esféricos



El potencial  $d\varphi$  de cada elemento es dado por la expresión del potencial del electrodo esférico, esto es  $\varphi = J \frac{\rho}{4\pi r}$  con corriente  $J$  igual a  $I/n$ .

Por todo lo anterior, el potencial incremental en la superficie de la tierra es igual a:

$$d\varphi = \frac{\rho \cdot I/n}{4\pi r} = \frac{\rho I}{4\pi n l} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$$

Si el valor límite del ángulo  $\alpha$  es denotado por  $\beta$ , como se muestra en la figura 44, el potencial en el punto central de una pica de longitud  $2l$ , que contiene  $2n$  esferas (así incluyendo la imagen ficticia arriba de la tierra) es dado por la integral de  $d\varphi$  entre  $+\beta$  a  $\pi/2$  y de  $-\beta$  a  $-\pi/2$  así:

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi l} \left\{ \int_{\beta}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + \int_{-\beta}^{-\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right\} = \frac{\rho I}{4\pi l} \left\{ \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|_{\beta}^{\pi/2} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|_{-\beta}^{-\pi/2} \right\}$$

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi l} \{ \ln(\operatorname{tg} \pi/4) - \ln(\operatorname{tg} \beta/2) + \ln(\operatorname{tg} \pi/4) - \ln(\operatorname{tg} \beta/2) \} = \frac{\rho I}{4\pi l} \{ -2 \ln(\operatorname{tg} \beta/2) \}$$

$$\varphi = \frac{\rho I}{2\pi l} \{ \ln(\operatorname{tg} \beta/2)^{-1} \} = \frac{\rho I}{2\pi l} \ln(\cot \beta/2)$$

Este resultado sería riguroso si la densidad de corriente que emerge de la pica a la tierra fuera uniforme sobre la longitud del electrodo, lo cual es sólo una buena aproximación.

El potencial eléctrico en el plano de simetría de la pica enterrada es por lo tanto dependiente únicamente de cuatro parámetros a saber: resistividad  $\rho$  de la tierra, la corriente  $I$  que fluye en el electrodo de pica, su longitud  $l$  dentro de la tierra, tres datos que son siempre dados para un determinado electrodo de pica, y el ángulo de visión  $\beta$  entre el eje de la pica y la distancia del extremo de la pica a el punto bajo consideración en la superficie. Para cualquier punto en este plano central,  $\beta$  es el único parámetro variable.

Para calcular el potencial propio del electrodo, en la figura 45 se observa que para radios  $a$  pequeños comparados con la longitud  $l$ ,  $\cot(\beta/2) = 2l/a$  por lo tanto el potencial del electrodo de pica es igual a:

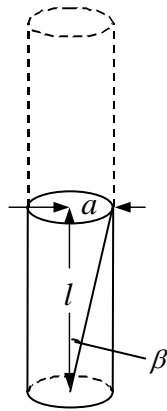
$$\varphi_0 = \frac{\rho I}{2\pi l} \ln\left(\frac{2l}{a}\right)$$

La resistencia del electrodo, como cociente del voltaje y la corriente es igual a:

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{2l}{a}\right)$$

La última expresión también se obtuvo por el método riguroso.

Figura 45. Esquema para el cálculo del potencial propio del electrodo de pica.



### 3. ELECTRODOS MÚLTIPLES

#### 3.1 TEORÍA TECNOLÓGICA SUSTANTIVA

##### 3.1.1 Generalidades.

En la práctica cuando se desea poner a tierra una instalación de energía eléctrica, se encuentra que por medio de un solo electrodo no se puede lograr tal fin debido a las siguientes razones:

1. La corriente que se introduce al terreno por conducto de un único electrodo no debe sobrepasar la magnitud de la corriente peligrosa sobre personas y/o animales útiles en la proximidad del mismo y por otra parte el calor producido en el electrodo y en la tierra que lo circunda debido a la potencia eléctrica transformada en calor resulta en un aumento en la resistividad del terreno alrededor del electrodo llegando a modificar su comportamiento original pudiendo ocasionar su falla mecánica.
2. El tipo de instalación eléctrica que se desee poner a tierra. Se puede tratar de medios eléctricos de servicio de dimensiones reducidas que den lugar a una instalación de tierra pequeña o de una instalación eléctrica cuyos medios de servicio estén distribuidos en una extensa superficie; por ejemplo, de una subestación de extra alta tensión, requiriendo entonces un sistema de puesta a tierra extenso.

Por lo tanto, cuando se debe introducir al terreno corriente de elevada intensidad, es muy conveniente distribuirla sobre varios electrodos elementales que trabajen en paralelo y que por medio de cada uno de ellos se introduzca a la tierra solo una parte de la corriente total a tierra.

El alcance del análisis comprende cuatro clases de problemas involucrados:

1. Las propiedades fundamentales generales de la operación en paralelo de un sistema de electrodos elementales.
2. Las propiedades particulares de electrodos compuestos cuyos electrodos elementales están instalados muy distanciados entre sí.
3. El control del potencial: la manera de modificar la distribución del potencial en la proximidad de los electrodos.
4. Las propiedades generales de los distintos electrodos múltiples que se utilizan generalmente en las instalaciones electrotécnicas, tanto de energía eléctrica en alta y baja tensión, como de telecomunicación.

El desarrollo del análisis considera primeramente electrodos superficiales, es decir, embutidos en el terreno, pero expuestos contra la atmósfera, con el propósito de que el mismo no sea complicado. Se abordará después el problema de su colocación totalmente enterrados (tanto rasantes como a gran profundidad), evaluando las ventajas de tal hecho en contra de la facilidad y rapidez en la práctica de utilizar las fórmulas finales del tratamiento superficial en el diseño de los sistemas de tierra.

### 3.1.2 Propiedades generales de los electrodos múltiples superficiales.

#### 3.1.2.1 Resistencia a la propagación.

Un cálculo de primera importancia es el de la magnitud de la resistencia a la propagación de un electrodo compuesto integrado por  $n$  electrodos individuales, en principio del mismo tipo y con la misma dimensión, enterrados en un terreno homogéneo.

Si se considera primero un arreglo de varios electrodos separados entre sí por una distancia inconmensurable, resulta lógico suponer que el campo de corriente de cada uno de tales

electrodos no es perturbado por los demás; en otras palabras, no existe interacción entre ellos. Ello permite inferir que la resistencia a la propagación del arreglo se puede calcular como si se tratara de un arreglo de resistencias en paralelo en el aire, en cuyo caso el valor límite queda expresado así:

$$R_{\infty} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \quad (25)$$

En la cual  $R_k$  es la resistencia a la propagación del electrodo  $k$ , perteneciente a un electrodo múltiple con  $n$  electrodos individuales; sin embargo, en la práctica, los electrodos elementales de un electrodo múltiple se encuentran localizados a distancias finitas unos de otros, por lo que cada uno de ellos al influirse mutuamente sus campos de corriente restringen el volumen del “terreno vital” del electrodo vecino, lo que origina un calentamiento adicional del mismo y por lo tanto un aumento en su propia contribución a la resistencia a la propagación resultante. Así la resistencia de tal clase de electrodo resulta:

$$R'_k > R_k$$

Y por lo tanto la resistencia a la propagación total del sistema de electrodos en paralelo queda expresada así:

$$R = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R'_k}} \quad (26)$$

Del análisis de la expresión anterior se deduce que la resistencia a la propagación de un sistema de electrodos en paralelo excede siempre el valor límite  $R_{\infty}$ . Por lo tanto, el grado

de eficiencia de un electrodo múltiple, queda expresado por medio de:  $\eta = \frac{R_{\infty}}{R}$  (27)

Para el diseño racional de sistemas de tierra es de sumo interés la determinación del grado de eficiencia  $\eta$ .

### 3.1.2.2 Zona de peligro.

Debe observarse que la corriente total que ahora actúa es:  $I = \sum_{k=1}^n I_k$

y el radio de la zona de peligro es prácticamente igual al correspondiente al electrodo semiesférico con igual carga, actuando en el centro de gravedad eléctrico del electrodo compuesto.

#### 3.1.2.3 Grado de influencia mutua.

Al analizar con rigor el grado de influencia mutua entre electrodos elementales formando un arreglo (electrodo compuesto) se encuentra que resulta diferente según los electrodos elementales estén muy separados entre sí o por el contrario estén muy próximos. En consecuencia debe diferenciarse el método de análisis para cada uno de éstos dos casos, es decir, para electrodos compuestos distanciados y para electrodos múltiples próximos.

#### 3.1.2.4 Influencia de la forma geométrica.

En el análisis por simplicidad se considera a los electrodos como electrodos puntuales. En realidad tienen diversas formas geométricas las cuales influyen en la función potencial. Por ello se deben diferenciar dos casos básicos:

1. Cuando todos los electrodos elementales tienen la misma forma geométrica.
2. Cuando se tienen electrodos elementales de distintas formas geométricas.

Se analizará sólo el primer caso para mayor claridad.

#### 3.1.3 Electrodos superficiales múltiples distanciados.

Se considera que un electrodo múltiple es distanciados cuando la separación entre los electrodos individuales que lo conforman es muy grande en relación con las dimensiones de los mismos. La teoría de esta clase de electrodos es la base de los sistemas de tierra extensos (estaciones, subestaciones, etc.).

De la figura 46 la distancia entre dos electrodos elementales cualesquiera pertenecientes a un electrodo compuesto con  $n$  electrodos individuales puede ser expresada como  $d_{kl} = d_{lk}$ . Asimismo al aplicar el principio de reflexión hace posible considerar a los electrodos como fuentes puntuales como se muestra en la figura 47.

Figura 46. Electrodos superficiales múltiples distanciados.

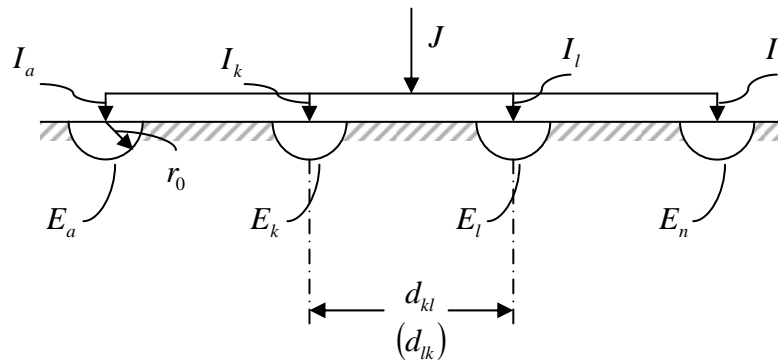
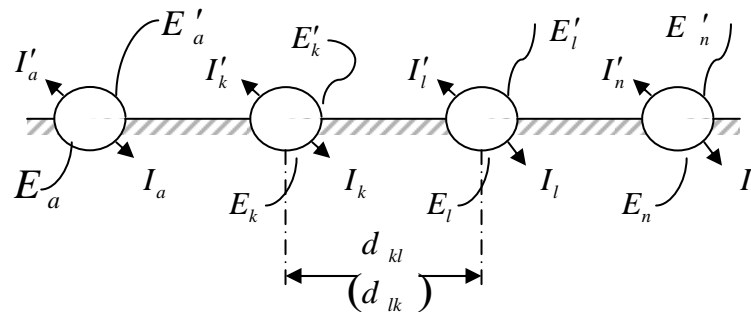


Figura 47. Aplicación del principio de reflexión a los electrodos superficiales distanciados.



El potencial en el electrodo  $l$  debido a el electrodo  $k$ ,  $\varphi_{lk}$ , excitado por la corriente  $I_k$  es

igual a: 
$$\varphi_{lk} = \frac{1}{2\pi\gamma} I_k \frac{1}{d_{lk}}$$

Al sumar todas las contribuciones de los electrodos vecinos al electrodo  $l$  se obtiene el potencial total que se ejerce sobre él, el cual queda expresado así:

$$\varphi_l = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{k=1}^n I_k \cdot \frac{1}{d_{lk}} \quad \text{con } l \neq k$$

Si se representa por medio de  $R_l$  a la resistencia propia del electrodo  $l$ , entonces el potencial propio de  $l$  mismo será:  $\varphi' = R_l I_l$

Por lo tanto, el potencial resultante del electrodo  $l$  queda expresado así:

$$\varphi = \varphi'_l + \varphi_l = R_l I_l + \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{k=1}^n I_k \cdot \frac{1}{d_{lk}} \quad (28)$$

Este potencial es igual al potencial propio  $\varphi_0$  del electrodo múltiple (ya que los electrodos individuales del arreglo están conectados en paralelo). Luego  $\varphi = \varphi_0$  para  $1 \leq l \leq n$ .

Estas  $n$  ecuaciones son suficientes, con un potencial dado  $\varphi_0$ , para el cálculo de las  $n$  componentes de las corrientes  $I_l$  de la corriente total  $I$ , es decir, para determinar como se distribuye la corriente total  $I$  en los diferentes electrodos individuales; esto según la

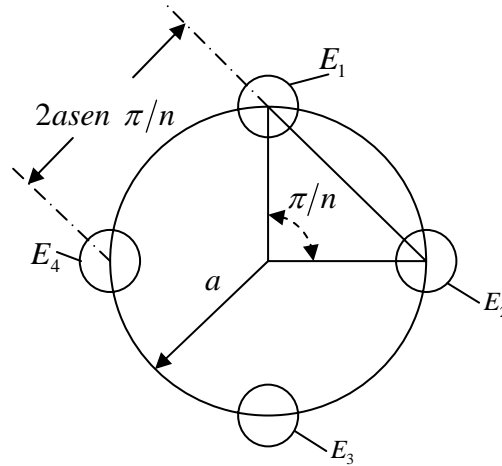
expresión 
$$I = \sum_{k=1}^n I_k$$

Con esto se tiene resuelto el problema del cálculo de la resistencia del electrodo compuesto puesto que  $\varphi_0 = RI$ , asumiendo que se conoce la magnitud de la corriente  $I$ . Después a partir de la ecuación (28) se puede determinar las diferencias de potencial que se presentan en la vecindad del electrodo.

### 3.1.3.1 Electrodo múltiple en arreglo circular.

Cuando el electrodo compuesto tiene sus electrodos elementales distribuidos simétricamente sobre una circunferencia de un círculo como se muestra en la figura 48; la corriente que cada uno conducirá será igual a la corriente total dividida por el número de electrodos  $n$  del arreglo, es decir  $I_k = \frac{I}{n}$ ; para  $1 \leq k \leq n$

Figura 48. Electrodo múltiple en arreglo circular.



De acuerdo con la figura anterior, se tiene que la distancia entre el centro de gravedad eléctrico  $k$  -ésimo y el  $l$  -ésimo, se encuentra por medio de la expresión:

$$d_{lk} = 2a \left| \text{sen} \left\{ \frac{\pi}{n} (k-l) \right\} \right| \quad (29)$$

Considerando las ecuaciones (28) y (29) se llega a:

$$\varphi_0 = \frac{I}{n} \left[ R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 2a} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sen} (\pi k/n)} \right]$$

Siendo  $R_0$  la resistencia de los electrodos individuales por lo que la resistencia del electrodo múltiple resulta entonces:

$$R = \frac{R_0}{n} + \frac{1}{4\pi\gamma a} f(n)$$

En la cual la función  $f(n)$  es igual a: 
$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sen} (\pi k/n)} \quad (30)$$

En la tabla 9 se calculan ciertos valores de  $f(n)$  en relación con la expresión (30).

Cuando  $n \gg 1$  se puede utilizar la expresión aproximada de  $f(n)$  que se obtiene al aplicar regresión logarítmica a los datos dados en la tabla 1.

$$f(n) \approx 0,0629 + 0,6431 \cdot \ln n$$

Y la eficiencia del arreglo es igual a:

Tabla 9. Valores de  $f(n)$  en función del número de electrodos  $n$ .

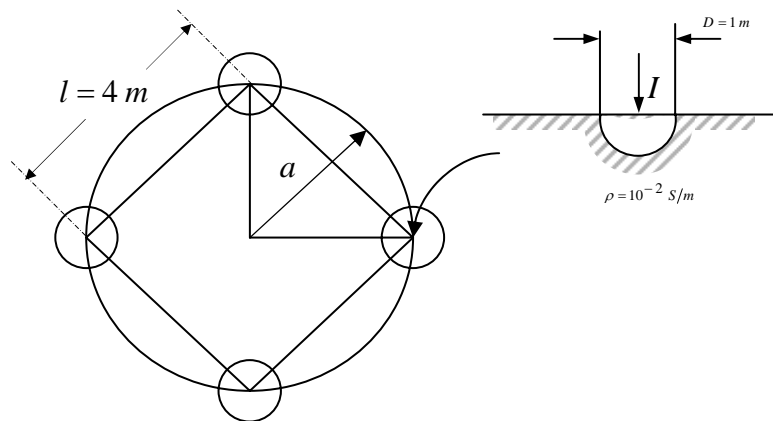
| $n$ | $f(n)$      |
|-----|-------------|
| 2   | 0,5         |
| 3   | 0,769800359 |
| 4   | 0,957106781 |
| 5   | 1,101105536 |
| 6   | 1,218233513 |
| 7   | 1,317008498 |

| $n$ | $f(n)$      |
|-----|-------------|
| 8   | 1,402432923 |
| 9   | 1,477701194 |
| 10  | 1,54497996  |
| 15  | 1,803591076 |
| 20  | 1,986904721 |
| 25  | 2,12904082  |

$$\eta = \frac{R_\infty}{R} = \frac{R_0/n}{R} = \frac{R_0/n}{R_0/n + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 2a} f(n)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\pi\gamma a R_\infty} f(n)} \quad (31)$$

Como ejemplo de aplicación, se calculará la resistencia de un electrodo en arreglo circular, según se muestra en la figura 49.

Figura 49. Electrodo múltiple en arreglo circular compuesto por cuatro electrodos individuales.



$$2a \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = l \rightarrow a = \frac{l}{2 \operatorname{sen} \pi/n} = \frac{4}{2 \operatorname{sen} \pi/4} = 2\sqrt{2}$$

Para  $n = 4$ ,  $f(n) = 0.9571$  (de la tabla 9)

$$\text{Resistencia de un electrodo elemental: } R_0 = \frac{\rho}{\pi D} = \frac{100}{\pi \cdot 1} = 31.83 \Omega$$

$$\text{Resistencia infinita: } R_\infty = \frac{31,83}{4} = 7,9577 \Omega$$

$$\text{El grado de eficiencia: } \eta = \frac{1}{1 + \frac{100}{4\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 7.9577} \cdot 0.9571} = \frac{1}{1 + 0.3383} = 0.7471$$

$\eta = 0.7471$  y como  $\eta = \frac{R_\infty}{R}$  la resistencia del electrodo múltiple es entonces:

$$R = \frac{R_\infty}{\eta} = \frac{7.9577}{0.7471} = 10.65 \Omega$$

Observaciones

1. Si se calcula la resistencia del electrodo compuesto como un arreglo de resistencias en paralelo en el aire su resistencia sería igual a  $7.9577 \Omega$ .
2. El grado de eficiencia crece conforme la distancia entre los electrodos individuales aumenta debido a que la interacción entre sus líneas de corriente va disminuyendo

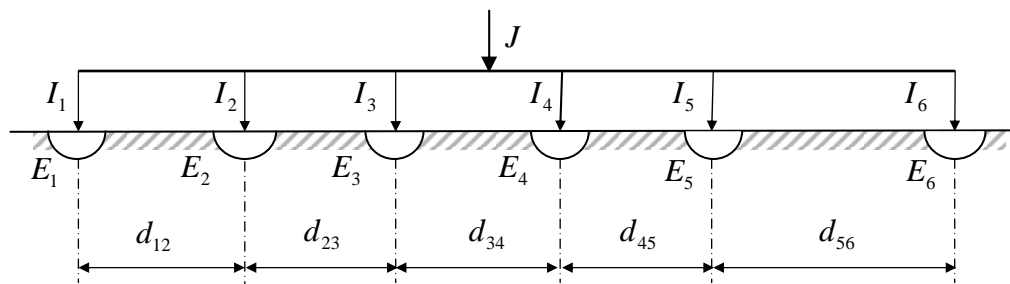
### 3.1.3.2 Arreglo asimétrico.

Cuando las distancias entre los electrodos elementales que conforman un electrodo múltiple no son las mismas, sus corrientes serán diferentes; tenemos por lo tanto un arreglo asimétrico. En este caso se requiere determinar la corriente en cada electrodo elemental, la cual estará en función de sus distancias respecto a los demás electrodos. Este método es más general que el aplicado en los electrodos múltiples donde existe simetría, los cuales sólo son casos particulares.

#### 3.1.3.2.1 Electrodo múltiple en línea

Un electrodo compuesto que se usa mucho en la práctica es aquel en el que sus electrodos individuales están dispuestos en línea recta como se muestra en la figura 50. El análisis de esta clase de electrodo es muy interesante ya que se puede extender a los electrodos extensos que se utilizan en la práctica (electrodos formando mallas rectangulares o de torres de líneas eléctricas aéreas) y por que conduce a un método para la solución de cualquier sistema de electrodos compuestos.

Figura 50. Electrodo múltiple en línea.



Se considera primero un sistema de electrodos elementales semiesféricos trabajando en paralelo, es decir, como electrodo múltiple. Al aplicar a tal sistema el principio de la imagen reflejada, se obtiene un sistema de electrodos esféricos embebidos en un volumen de terreno ilimitado por todos lados, de naturaleza homogénea y conductividad  $\gamma$ , conduciendo cada uno de ellos la corriente  $2I$  (la del electrodo real y la del electrodo ficticio), con un plano imaginario que corta por un punto medio a dichos electrodos.

Como los electrodos están al mismo potencial por lo tanto estarán relacionados por medio de un sistema lineal de ecuaciones que exige una solución simultánea, es decir, un conjunto solución. El potencial en cada uno de los electrodos será igual a la suma del potencial propio del electrodo (del electrodo real y del ficticio), más la contribución de potencial de todos los electrodos individuales restantes, la cual dependerá de la distancia entre ellos, así como de su forma geométrica.

El sistema lineal de ecuaciones tiene la siguiente forma general:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_{11} + \varphi'_{11} + \varphi_{12} + \varphi'_{12} + \varphi_{13} + \varphi'_{13} + \cdots + \varphi_{1(n-1)} + \varphi'_{1(n-1)} + \varphi_{1n} + \varphi'_{1n} \\
\varphi_2 &= \varphi_{21} + \varphi'_{21} + \varphi_{22} + \varphi'_{22} + \varphi_{23} + \varphi'_{23} + \cdots + \varphi_{2(n-1)} + \varphi'_{2(n-1)} + \varphi_{2n} + \varphi'_{2n} \\
&\vdots \\
\varphi_n &= \varphi_{n1} + \varphi'_{n1} + \varphi_{n2} + \varphi'_{n2} + \varphi_{n3} + \varphi'_{n3} + \cdots + \varphi_{n(n-1)} + \varphi'_{n(n-1)} + \varphi_{nn} + \varphi'_{nn}
\end{aligned}$$

Donde:

$\varphi_{11}$  representa el potencial propio del electrodo 1.

$\varphi_{1n}$  representa la influencia del electrodo  $n$  sobre el electrodo 1.

Si todos los electrodos elementales son del mismo tipo:  $\varphi_{11} = \varphi_{22} \cdots \varphi_{nn}$

$\varphi_{11} = \varphi_{22} \cdots \varphi_{nn}$  representan los potenciales propios y los que tienen apóstrofo corresponden a las imágenes.

$\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{1n}$  representan los potenciales recíprocos de los electrodos reales 2,3,  $\cdots$   $n$  sobre el electrodo 1 y los que tienen apóstrofo corresponden a las respectivas imágenes.

Los potenciales propios quedan en función de su resistencia y de la corriente que circule por ellos; los potenciales recíprocos dependen de su corriente y del inverso de la separación existente entre los electrodos (considerados como un electrodo puntual).

Haciendo las sustituciones:

$$\varphi_{11} = I_1 K_{11} \quad \varphi'_{11} = I'_1 K'_{11} \quad \varphi_{21} = I_1 K_{21}, \text{ etc.}$$

Y como para este tipo de electrodo  $K_{11} = \frac{1}{2\pi\gamma x}$  siendo  $x$  la distancia al punto de interés a partir del centro del electrodo esférico, donde  $K_{11} = K'_{11}$  por lo tanto la contribución parcial del electrodo esférico (real y ficticio) se puede simplemente expresar así:  $\varphi_{11} = 2I_1 K_{11}$  (ya que  $I_1 = I'_1$ ). Siendo válido el anterior razonamiento para los potenciales restantes, entonces el sistema lineal de ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

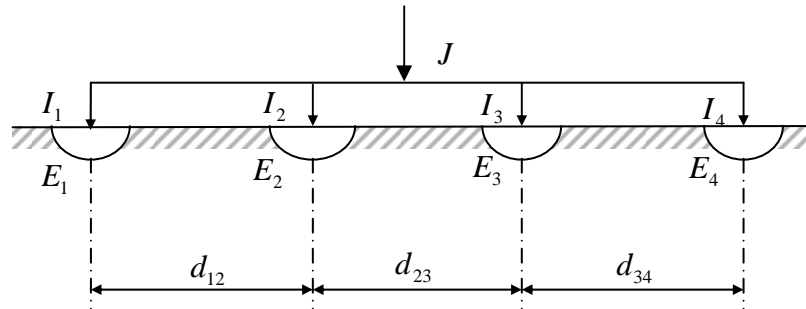
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 2I_1K_{11} + 2I_2K_{12} + 2I_3K_{13} \cdots 2I_{(n-1)}K_{1(n-1)} + 2I_nK_{1n} \\
\varphi_2 &= 2I_1K_{21} + 2I_2K_{22} + 2I_3K_{23} \cdots 2I_{(n-1)}K_{2(n-1)} + 2I_nK_{2n} \\
&\vdots \\
\varphi_n &= 2I_1K_{n1} + 2I_2K_{n2} + 2I_3K_{n3} \cdots 2I_{(n-1)}K_{n(n-1)} + 2I_nK_{nn}
\end{aligned}$$

En tales ecuaciones siguiendo la notación matemática usual para los sistemas lineales de ecuaciones simultáneas, el primer índice es el elemento afectado (o influenciado) ,y el segundo, el elemento que afecta (o influenciador) por ejemplo el término  $2I_1K_{11}$  representa el potencial propio del electrodo 1; en cambio, el término  $2I_2K_{12}$  representa la influencia del electrodo 2 sobre el electrodo 1.

El anterior sistema de ecuaciones se puede simplificar aún más en los casos que existe simetría sólo entre algunos de los electrodos individuales, ya que las corrientes serán iguales en los electrodos simétricos; por ejemplo, en el arreglo de electrodos de la figura 51, por condiciones de blindaje:  $I_1 = I_4$  ;  $I_2 = I_3$ . Por lo tanto, el sistema lineal de ecuaciones se reduce sólo a:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 2I_1(K_{11} + K_{14}) + 2I_2(K_{12} + K_{13}) \\
\varphi_2 &= 2I_1(K_{21} + K_{24}) + 2I_2(K_{22} + K_{23})
\end{aligned} \quad (32)$$

Figura 51. Electrodo múltiple en línea compuesto por cuatro electrodos individuales.



Es decir, en este caso el sistema de ecuaciones simultáneas por resolver se reduce a  $n/2$  simplificándose bastante el planteamiento y la resolución matemática, esto es importante cuando se tiene un número elevado de electrodos individuales, como generalmente es el caso de las subestaciones de alta y extra alta tensión.

Por otra parte, como todos los electrodos están trabajando en paralelo, se tiene que:  $\varphi_1 = \varphi_2 \cdots \varphi_n = \varphi_0$ , y al resolver el sistema de ecuaciones el conjunto solución  $(I_1, I_2 \cdots I_n)$  quedará expresado en función de  $\varphi_0$  y, siendo la corriente total igual a la suma de todas las corrientes parciales, se puede determinar la resistencia del electrodo múltiple, ya que en un campo estacionario  $\varphi = RJ$ , por lo tanto, la resistencia queda

$$\text{expresada así: } R = \frac{\varphi}{J} = \frac{\varphi}{\sum_{k=1}^n I_k(\varphi)} \quad (33)$$

En la cual  $\varphi$  representa el voltaje del electrodo múltiple.

El cálculo de la eficiencia se determina como antes así:  $\eta = \frac{R_\infty}{R} = \frac{R_0/n}{R}$  donde  $R_\infty$ , es la resistencia infinita y  $R_0$  representa la resistencia del electrodo elemental.

La distribución del potencial en la superficie (y en cualquier punto del espacio que se desee) se determina con base en la expresión del potencial del electrodo en cuestión y considerando la corriente que circule por dicho electrodo (el influenciador); en el punto que se desee calcular el potencial, estarán actuando los potenciales reales y ficticios de todos y cada uno de los electrodos individuales que formen el electrodo múltiple.

Debe observarse que este procedimiento es de carácter general y que por lo tanto se extiende en principio a sistemas de electrodos formados por electrodos de diversos tipos (picas, anillos, bandas, etc.), así como a electrodos múltiples enterrados. Sin embargo este procedimiento es válido sólo para los electrodos compuestos distanciados, es decir, cuando los electrodos individuales están bastante separados unos de otros (en relación con sus dimensiones lineales); cuando no es así, los resultados obtenidos no son lo suficientemente exactos.

El método presentado es aplicable, en rigor, en el caso de electrodos superficiales (enterrados en el terreno, pero contra la atmósfera) ya que en el caso de electrodos rasantes,

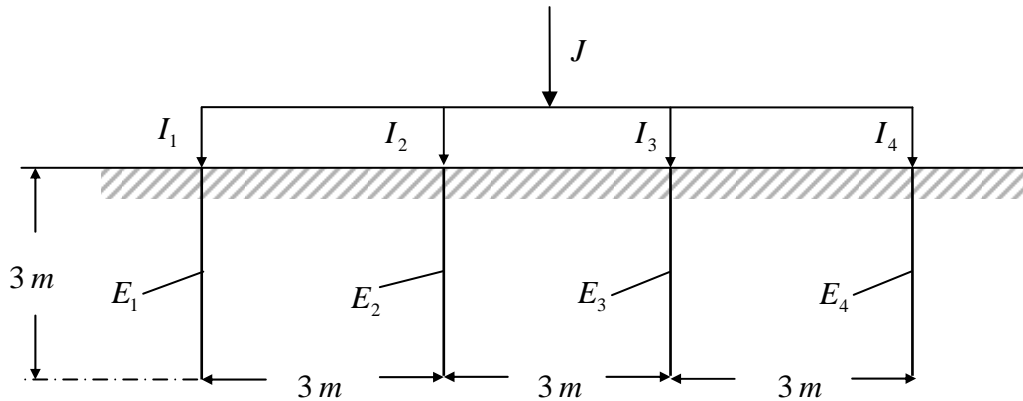
el centro de gravedad de los electrodos real y ficticio ya no coinciden con la superficie del terreno.

Como ejemplo se calculará la resistencia del electrodo múltiple superficial con cuatro electrodos individuales de pica como se muestra en la figura 52 y los siguientes datos:  $l = 3 \text{ m}$ ,  $r_0 = 0,02 \text{ m}$  y  $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$ .

El potencial estará relacionado por medio de un sistema lineal de cuatro ecuaciones simultáneas. La separación interna entre los electrodos impone las siguientes condiciones de blindaje:  $I_1 = I_4$ ;  $I_2 = I_3$ , con la condición  $I_1 > I_2$ . Por lo tanto, el sistema por resolver se reduce al expresado en (32). Así:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 2I_1(K_{11} + K_{14}) + 2I_2(K_{12} + K_{13}) \\ \varphi_2 &= 2I_1(K_{21} + K_{24}) + 2I_2(K_{22} + K_{23})\end{aligned}$$

Figura 52. Electrodo múltiple superficial compuesto por cuatro electrodos de pica.



Con los factores  $K$ :

$$\text{Propios: } K_{11} = K_{22} = \frac{1}{4\pi\gamma l} \ln \frac{2l}{r_0} = \frac{100}{4\pi \cdot 3} \ln \frac{6}{0,02} = 15,1297$$

$$\text{Mutuos: } K_{14} = \frac{1}{8\pi\gamma l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} = \frac{100}{24\pi} \ln K_{14} = 1,3262 * 0,6549 = 0,8685$$

$$\text{Ya que } m = \frac{x}{l} = \frac{9}{3} = 3$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{23} = \frac{1}{8\pi\gamma l} \ln K_{12} = 2,3379 \quad \text{ya que } m = \frac{3}{3} = 1 \therefore \ln K_{12} = 1,7627$$

$$K_{13} = K_{24} = \frac{100}{24\pi} \ln K_{13} = 1,2764 \quad , \text{ pues con } m = \frac{6}{3} = 2 \quad , \ln K_{13} = 0,9624$$

El sistema de ecuaciones queda por lo tanto así:

$$\varphi_1 = 2I_1(15,1297 + 0,8685) + 2I_2(2,3379 + 1,2764)$$

$$\varphi_2 = 2I_1(2,3379 + 1,2764) + 2I_2(15,1297 + 2,3379)$$

O sea:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 31,9964I_1 + 7,2286I_2 \\ \varphi_2 &= 7,2286I_1 + 34,9352I_2 \end{aligned} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$$

De cuya solución se obtiene:  $I_1 = I_4 = 0,026\varphi_0$  ;  $I_2 = I_3 = 0,023\varphi_0$ ; se satisface la condición de blindaje  $I_1 > I_2$ .

$$\text{La resistencia del electrodo múltiple: } R = \frac{\varphi_0}{2(0,026 + 0,023)\varphi_0} = \frac{1}{0,098} = 10,2 \Omega$$

Como la resistencia de cada uno de los electrodos individuales es:

$$R_0 = \frac{100}{2\pi l} \ln \frac{2l}{\rho_0} = \frac{100}{6\pi} \ln \frac{6}{0,02} = 30,26 \Omega$$

$$\text{La eficiencia resulta en } \eta = \frac{R_\infty}{R} = \frac{30,26/4}{10,2} = 0,7416 \text{ es decir } 74,16 \%$$

Como en el caso del arreglo de electrodos dispuestos simétricamente en un círculo; con base en el método general riguroso se pueden deducir expresiones para la determinación de la resistencia, grado de eficiencia, la distribución de la corriente en los electrodos individuales; en el caso particular de un electrodo múltiple en línea compuesto por cuatro electrodos. Las expresiones correspondientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= I_1 R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma} \left[ I_1 \frac{1}{d} + I_2 \frac{1}{d} + I_2 \frac{1}{2d} \right] \\ \varphi_0 &= I_2 R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma} \left[ I_2 \frac{1}{3d} + I_1 \frac{1}{d} + I_1 \frac{1}{2d} \right] \end{aligned}$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones se obtiene:

$$I_1 = \frac{R_0 - \frac{1}{2\pi\gamma d} \frac{7}{6}}{\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma d}\right)\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 3d}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2\pi\gamma d}\right)^2} \cdot \varphi_0$$

$$I_2 = \frac{R_0 - \frac{1}{2\pi\gamma d} \frac{1}{2}}{\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma d}\right)\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 3d}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2\pi\gamma d}\right)^2} \cdot \varphi_0$$

Donde  $\varphi_0$  representa el potencial del electrodo múltiple.

La corriente del electrodo compuesto queda expresada así:

$$I = 2(I_1 + I_2) = \frac{4R_0 - \frac{1}{2\pi\gamma d} \frac{10}{3}}{\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma d}\right)\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 3d}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2\pi\gamma d}\right)^2} \cdot \varphi_0$$

$$\text{Como } R = \frac{\varphi_0}{I}; \quad R_\infty = \frac{R_0}{n}; \quad \eta = \frac{R_\infty}{R}$$

$$\eta = \frac{1 - \frac{1}{2\pi\gamma d R_0} \frac{5}{6}}{\left(1 + \frac{1}{2\pi\gamma d R_0}\right)\left(1 + \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 3d R_0}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2\pi\gamma d R_0}\right)^2}$$

Resolviendo el problema anterior utilizando las últimas expresiones matemáticas tenemos que el grado de eficiencia:

$$\eta = \frac{1 - \frac{100}{2\pi \cdot 3 \cdot 30,26} \cdot \frac{5}{6}}{\left(1 + \frac{100}{2\pi \cdot 3 \cdot 30,26}\right)\left(1 + \frac{100}{2\pi \cdot 3 \cdot 3 \cdot 30,26}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{100}{2\pi \cdot 3 \cdot 30,26}\right)^2} = \frac{1 - 0,146}{(1 + 0,1753)(1 + 0,0584) - 0,06915}$$

$$\eta = 0,727$$

$$\text{Por lo tanto, la resistencia del electrodo múltiple es: } R = \frac{R_\infty}{\eta} = \frac{R_0/4}{\eta} = \frac{30,26/4}{0,727} = 10,4 \Omega$$

*Observaciones*

1. Los resultados obtenidos son prácticamente iguales a los conseguidos en el problema anterior.
2. Este método de solución tiene la ventaja de evitarse el planteamiento y la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas. Su desventaja es que no es general, solo se puede aplicar en arreglos en los que existe simetría interna en los electrodos individuales.

Como puede observarse al tratar problemas de diseño de sistemas de puesta a tierra debe procurarse proponer arreglos con simetría ya que ello ahorra mucho trabajo.

#### 3.1.4 Propiedades generales de los electrodos múltiples enterrados.

##### 3.1.4.1 Generalidades.

Los electrodos múltiples anteriormente estudiados pertenecen al grupo de electrodos superficiales, ello debido a que están embebidos en el terreno pero expuestos a la atmósfera en su superficie superior, la cual tiene propiedades eléctricas diferentes a la de la tierra. En la práctica en ciertas ocasiones los electrodos se instalan de esta forma pero en la mayoría de los casos se colocan totalmente enterrados ya sea casi a flor de tierra o a cierta profundidad; entonces se les denomina de manera general: electrodos rasantes y electrodos profundos. Aún cuando en estos dos casos los electrodos quedan totalmente enterrados, algunas de sus propiedades resultan diferentes por lo tanto es importante conocer sus características esenciales.

##### 3.1.4.2 Electrodo profundo.

La figura 53 presenta un modelo idealizado de un electrodo profundo. En ella puede observarse que el electrodo debe estar a una profundidad tal que el volumen de tierra que lo envuelve evite que el efecto de la superficie altere sus propiedades y por ello se debe

efectuar su unión con el exterior por medio de un conductor que no entre en contacto con la tierra, es decir, con un conductor aislado.

El análisis de esta clase de electrodo se puede hacer con base en un pequeño electrodo esférico enterrado a una profundidad  $t$  (de su centro de gravedad eléctrico) tal que en comparación con su dimensión resulte muy grande ( $t \gg r_0$ ), como se muestra en la figura 54.

Figura 53. Electrodo profundo.

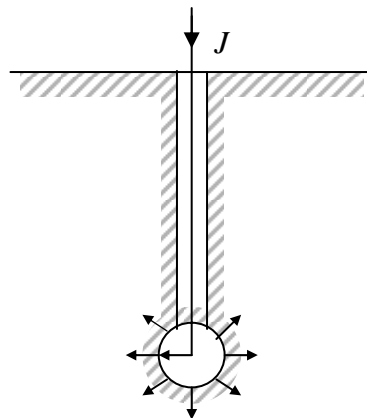
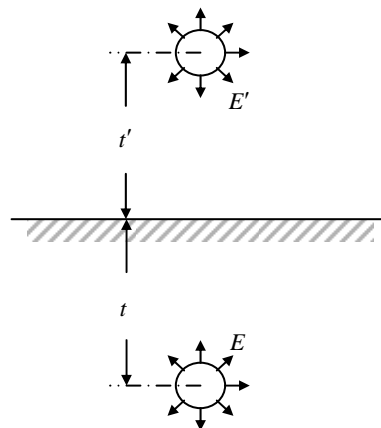


Figura 54. Aplicación del método de imágenes al electrodo profundo.



### 3.1.4.2.1 Resistencia del electrodo.

La resistencia del electrodo puede ser determinada utilizando las reglas derivadas anteriormente para los electrodos múltiples superficiales.

Para un electrodo esférico enterrado a la profundidad  $t$  y radio  $r_0$ , como se muestra en la figura 55, su potencial será igual a la suma de su propio potencial más el potencial de su imagen, es decir  $\varphi = \varphi_p + \varphi'$  así:

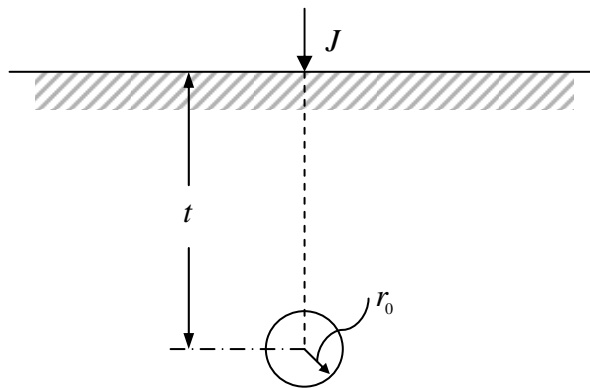
$$\varphi = J \left( \frac{1}{4\pi\gamma r_0} + \frac{1}{4\pi\gamma \cdot 2t} \right) = \frac{J}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2t} \right) \quad \text{luego la resistencia es igual a:}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2t} \right) \quad \text{por lo tanto la ganancia es}$$

$$G = \frac{R_0}{R} = \frac{\frac{1}{2\pi\gamma r_0}}{\frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2t} \right)} = \frac{2}{\left( 1 + \frac{r_0}{2t} \right)}$$

Donde  $R_0$  es la resistencia del electrodo como si estuviese colocado superficialmente.

Figura 55. Electrodo esférico enterrado



Como ejemplo se determinará la resistencia de un electrodo esférico con radio de  $0.5\text{ m}$  enterrado totalmente en un terreno con  $\gamma = 10^{-2}\text{ S/m}$ . Para las profundidades  $t = 1.5, 5, 10, 20, 100$  y  $1000\text{ m}$ ., según la figura 55.

$$\text{Para } t = 1,5\text{ m} \quad R = \frac{100}{4\pi} \left( \frac{1}{0.5} + \frac{1}{2 \cdot 1,5} \right) = 18,568 \Omega$$

$$\text{Y la ganancia es igual a } G = \frac{2}{1 + \frac{0,5}{2 \cdot 1,5}} = 1,7142$$

Procediendo de manera similar se obtienen todos los valores, los cuales se incluyen en la tabla 10.

Tabla 10. Resistencia del electrodo esférico con radio de  $0.5\text{ m}$  a diferentes profundidades.

| $t$ [m] | $R$ [ $\Omega$ ] | $G$   |
|---------|------------------|-------|
| 1,5     | 18,568           | 1,714 |
| 5       | 16,711           | 1,905 |
| 10      | 16,313           | 1,951 |
| 20      | 16,114           | 1,975 |
| 100     | 15,955           | 1,995 |
| 1000    | 15,919           | 2,000 |

*Observaciones*

1. Si el electrodo estuviera colocado superficialmente ( como electrodo semiesférico), su

$$\text{resistencia sería igual a } R_0 = \frac{100}{2\pi \cdot 0,5} = 31,83 \Omega$$

2. La ganancia no aumenta en la misma proporción que lo hace la profundidad, y a partir de cierta profundidad, prácticamente no crece.

Se concluye del análisis del problema anterior, que la disminución de la resistencia de un electrodo al enterrarlo a cierta profundidad  $t$ , tiene un límite práctico que es conveniente conocer para evitar pérdida de tiempo y dinero.

La siguiente ecuación:  $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R_0(t)$

Expresa el valor límite de la resistencia de un electrodo para una supuesta ilimitada profundidad  $t$ . El potencial  $\varphi_0$  del electrodo de profundidad queda expresado como:

$$\varphi_0 = J \left[ R_\infty + \frac{1}{4\pi\gamma \cdot 2t} \right] = JR(t)$$

Por lo tanto la resistencia en función de la profundidad  $t$  queda así:

$$R(t) = R_\infty + \frac{1}{4\pi\gamma \cdot 2t}$$

Para el electrodo de pica que es un tipo de electrodo muy utilizado en la práctica se aplicarán los anteriores conceptos, a partir de la figura 56, que representa un electrodo de pica reflejado de longitud  $l$  y radio  $r_0 \ll l$ , que se encuentra enterrado a la profundidad  $t \gg l$ .

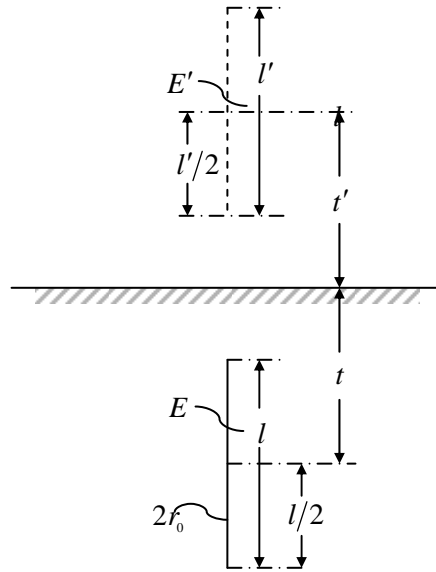
El valor límite de la resistencia ( $R_\infty$ ), la que se puede llegar a conseguir con base en sus propias dimensiones, se calcula por medio de la expresión propia para la determinación de la resistencia del electrodo de pica colocado superficialmente, considerando que ahora se debe sustituir en tal ecuación a  $l$  por  $l/2$  así como dividirla entre dos, debido a la propagación ilimitada por todos lados de la corriente del electrodo gemelo. Por lo tanto, la expresión correspondiente queda así:

$$R_\infty = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi\gamma \cdot l/2} \ln \left( \frac{2 \cdot l/2}{r_0} \right) \right] = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \left( \frac{l}{r_0} \right)$$

Así que, la resistencia del electrodo de pica en función de la profundidad  $R(t)$  resulta en:

$$R(t) = R_\infty + \frac{1}{4\pi\gamma \cdot 2t} = \frac{1}{2\pi\gamma l} \left[ \ln \left( \frac{l}{r_0} \right) + \frac{l}{4t} \right]$$

Figura 56. Electrodo de pica enterrado a la profundidad  $t \gg l$ .



$$G = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{\frac{1}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{r_0}\right)}{\frac{1}{2\pi\gamma l} \left[ \ln\left(\frac{l}{r_0}\right) + \frac{l}{4t} \right]} = \frac{\ln\left(\frac{2l}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{l}{r_0}\right) + \frac{l}{4t}}$$

Como ejemplo se determinará la resistencia del electrodo de pica con base en los siguientes datos:  $l = 3 \text{ m}$ ,  $r_0 = 0,0254 \text{ m}$ ,  $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$  para las profundidades de 2, 10, 20, 100 y 1000 m así como el valor límite de la resistencia.

La resistencia a la profundidad  $t = 2 \text{ m}$  es:

$$R(t) = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \left[ \ln\left(\frac{3}{0,0254}\right) + \frac{3}{4 \cdot 2} \right] = 27,3036 \Omega$$

El valor límite de la resistencia con base en sus propias dimensiones es:

$$R_\infty = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \ln\left(\frac{3}{0,0254}\right) = 25,3142 \Omega$$

El valor de la resistencia para el electrodo superficial es de:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln\left(\frac{2l}{r_0}\right) = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \ln\left(\frac{6}{0,0254}\right) = 28,9914 \Omega$$

La ganancia por enterrar el electrodo a tal profundidad es:

$$G = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{28,9914}{27,3036} = 1,0618$$

De manera similar se calculan las resistencias a las otras profundidades, lo mismo que su ganancia. Los resultados se dan en la tabla 11.

De la tabla 11 puede observarse que la ganancia conseguida por el aumento de profundidad es prácticamente insignificante.

Tabla 11. Ganancia en función de la profundidad para el electrodo de pica.

| $t [m]$ | $R(t) [\Omega]$ | $G$     |
|---------|-----------------|---------|
| 2       | 27,3036         | 1,0618  |
| 10      | 25,7121         | 1,1275  |
| 20      | 25,5131         | 1,1363  |
| 100     | 25,3540         | 1,1434  |
| 1000    | 25,3182         | 1,14508 |

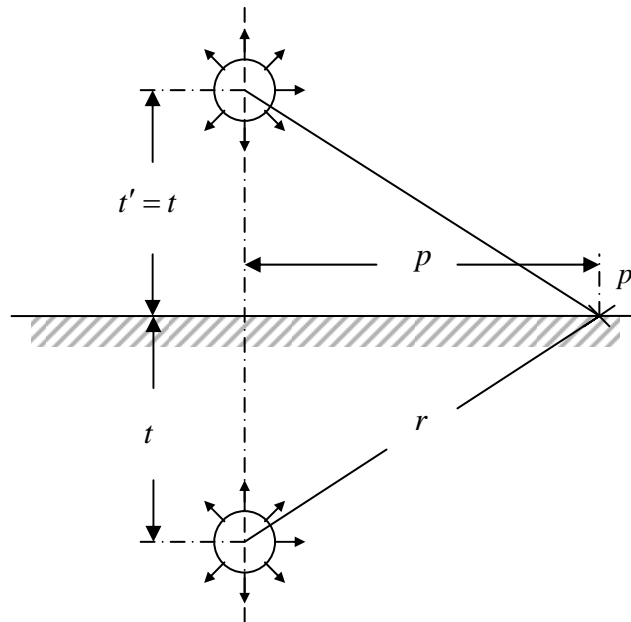
En la práctica el electrodo de pica se coloca enterrado sólo unos pocos centímetros de la superficie del suelo, con el fin de proteger su cabeza contra daños físicos. Por otra parte, la unión con la instalación se hace por medio de cable desnudo de cobre, el cual actúa entonces como electrodo. Por esta razón, en la práctica generalmente se utilizan las expresiones matemáticas correspondientes al caso superficial para su dimensionamiento.

En ocasiones la cabeza del electrodo queda dentro de pequeños registros, donde además de quedar protegido, es posible controlar periódicamente su comportamiento. En estos casos, como sobre su cabeza existe aire, se deben también utilizar las expresiones correspondientes al caso superficial para su dimensionamiento.

La distribución de potencial sobre el suelo se puede indagar a partir de la figura 57 para el electrodo de pica, se observa que la distancia de los centros de gravedad eléctricos de los

electrodos real y ficticio hasta un punto  $p$  de referencia sobre el suelo queda determinada por medio de:  $r = \sqrt{t^2 + p^2}$

Figura 57. Esquema para la determinación de la distribución del potencial sobre el suelo para el electrodo de pica enterrado.



Puesto que las dimensiones lineales del electrodo profundo se supusieron pequeñas en comparación de la magnitud de la profundidad  $t$ , es válido asumir el potencial  $\varphi$  en el punto  $p$ , como la suma de los potenciales excitados por las fuentes puntuales situadas en los centros de gravedad eléctricos.

El embudo de tensión queda entonces representado por medio de la siguiente expresión:

$$\varphi_p = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\gamma r} J = \frac{1}{2\pi\gamma\sqrt{t^2 + p^2}} J$$

Como ejemplo se determinará la distribución de potencial para el electrodo con los siguientes datos:  $l = 3 \text{ m}$ ,  $r_0 = 0,0254 \text{ m}$ ,  $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$  para las profundidades  $t = 10, 100$  y  $1000 \text{ m}$ .

Para  $t = 10 \text{ m}$  y  $p = 1 \text{ m}$ :

$$\varphi_p = \frac{100}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^2 + 1^2}} J = 1,5836J \text{ y como } J = \frac{\varphi_0}{R_0} = \frac{\varphi_0}{28,9914} = 0,03449 \varphi_0 \text{ también}$$

$$\varphi_p = 1,5836 \cdot 0,03449 \varphi_0 = 0,05462 \varphi_0$$

Procediendo de manera similar para las otras profundidades y puntos  $p$ , se obtienen los valores restantes, los cuales se incluyen en la tabla 12. El transcurso del potencial para  $t = 10 \text{ m}$  se bosqueja en la figura 58.

Tabla 12. Potenciales del electrodo de pica enterrado a diferentes profundidades.

| $t \text{ [m]}$ | 10            |                       | 100           |                       | 1000          |                       |
|-----------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|
| p               | $\varphi_p/J$ | $\varphi_p/\varphi_0$ | $\varphi_p/J$ | $\varphi_p/\varphi_0$ | $\varphi_p/J$ | $\varphi_p/\varphi_0$ |
| 1               | 1,584         | 0,061                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 2               | 1,561         | 0,060                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 3               | 1,524         | 0,059                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 4               | 1,478         | 0,057                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 5               | 1,424         | 0,055                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 6               | 1,365         | 0,053                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 7               | 1,304         | 0,050                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 8               | 1,243         | 0,048                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 9               | 1,183         | 0,046                 | 0,159         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |
| 10              | 1,125         | 0,043                 | 0,158         | 0,006                 | 0,016         | 0,001                 |

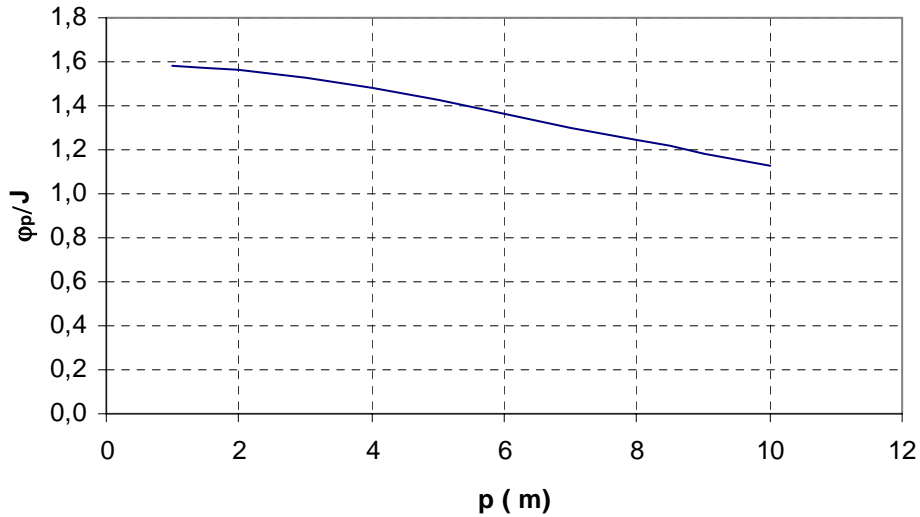
El voltaje de paso se obtiene por el producto de la intensidad del campo radial por el ancho de paso así:

$$V_p = -s \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial p} = -s \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2\pi\gamma\sqrt{t^2 + p^2}} J \right) = \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{sp}{(t^2 + p^2)^{3/2}}$$

El voltaje de paso del electrodo profundo alcanza su valor máximo en la llamada “distancia crítica”, determinada por medio de la relación  $\frac{\partial V_p}{\partial p} = 0$  como sigue:

$$\frac{\partial V_p}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{sp}{(t^2 + p^2)^{3/2}} \right] = \frac{1}{2\pi\gamma} J \left[ \frac{s}{(t^2 + p^2)^{3/2}} - \frac{3sp^2}{(t^2 + p^2)^{5/2}} \right] = 0$$

Figura 58. Transcurso del potencial para el electrodo de pica enterrado a la profundidad de  $t = 10 \text{ m}$ .



$$\frac{\partial V_p}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{sp}{(t^2 + p^2)^{3/2}} \right] = \frac{1}{2\pi\gamma} J \left[ \frac{s}{(t^2 + p^2)^{3/2}} - \frac{3sp^2}{(t^2 + p^2)^{5/2}} \right] = 0$$

$$\frac{s}{(t^2 + p^2)^{3/2}} - \frac{3sp^2}{(t^2 + p^2)^{5/2}} = 0 \rightarrow \frac{s}{(t^2 + p^2)^{3/2}} = \frac{3sp^2}{(t^2 + p^2)^{5/2}} \rightarrow t^2 + p^2 = 3p^2 \rightarrow 2p^2 = t^2 \rightarrow$$

$p_{cr} = \frac{t}{\sqrt{2}}$  medida desde el eje del electrodo; entonces el voltaje de paso máximo queda

definido así:

$$V_{p \max} = V_p \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{s \cdot \frac{t}{\sqrt{2}}}{\left[ t^2 + \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{st}{\sqrt{2} \left( \frac{3}{2} t^2 \right)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{st}{\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} t^3}$$

$$V_{p \max} = \frac{1}{2\pi\gamma} J \frac{2s}{3\sqrt{3}t^2}$$

La corriente de cuerpo que circulará por una persona que se encuentre caminando dentro del embudo, en función de la resistencia que presente su cuerpo, se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$|I_c|_{\max} = \frac{V_p^{\max}}{2r_{pi}} \quad \text{donde } r_{pi} \text{ en el enfoque riguroso representa la resistencia de los dos pies}$$

considerados como placa circular con diámetro  $dep$  con valor promedio de 0.2 m.

$$r_{pi} = \frac{1}{2\gamma dep} \quad \text{luego la corriente máxima de cuerpo es igual a: } |I_c|_{\max} = \frac{1}{\pi} \frac{sdep}{3\sqrt{3}t^2} J$$

Considerando, dentro del enfoque riguroso, que para  $|I_c| \leq |I_{cr}| = 0.05 \text{ A}$  (para tiempos  $\geq 1 \text{ s}$ ) existe ya el peligro de muerte, entonces la corriente peligrosa de electrodo para el caso del electrodo de profundidad, queda expresada por medio de:

$$|J_{pe}| = |I_{cr}| \frac{3\pi\sqrt{3}t^2}{sdep} = \frac{0.05 \cdot 3\pi\sqrt{3}t^2}{sdep} \text{ (A)}$$

Comparando esta ecuación con la correspondiente al electrodo de superficie de dimensiones semejantes, se deduce que la corriente peligrosa de electrodo resulta más intensa en el caso del electrodo de profundidad y crece en relación directa con el cuadrado de la profundidad del centro de gravedad eléctrico.

En relación a la zona de peligro del electrodo de profundidad (para corrientes de tierra  $|J| > |J_{pe}|$ ), el radio de la zona de peligro se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{|J|}{|J_{pe}|} = \frac{\frac{2\pi\gamma\mathcal{N}_p (t^2 + r_{pe}^2)^{3/2}}{sr_{pe}}}{\frac{2\pi\gamma\mathcal{N}_p \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{sp_{cr}}}} = \frac{\frac{(t^2 + r_{pe}^2)^{3/2}}{r_{pe}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{t/\sqrt{2}}}} = \frac{2(t^2 + r_{pe}^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}r_{pe}t^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{[1 + (r_{pe}/t)^2]^{3/2}}{r_{pe}/t}$$

Donde  $p = r_{pe}$ , es el radio peligroso de electrodo.

El radio de la zona de peligro para un electrodo superficial se puede obtener de la anterior expresión tomando el límite cuando  $t \rightarrow 0$ .

Para justificar la utilización del electrodo profundo, es necesario ajustar la profundidad de su centro de gravedad eléctrico  $t$  a la corriente  $|J|$ , con la condición  $|J| < |J_{pe}|$  así; teniendo en cuenta la expresión de la corriente peligrosa de electrodo, resulta la siguiente

$$\text{expresión: } t \geq \sqrt{\frac{|J|}{|I_{cr}|} \cdot \frac{sdep}{3\pi\sqrt{3}}}$$

Del análisis anterior se puede concluir que el electrodo profundo no es práctico desde el punto de vista técnico y económico por el hecho de tener que utilizar un conductor aislado para su conexión con los medios de servicio. Se diferencia de los electrodos de superficie en que la posibilidad de que una persona que esté caminando por el suelo haga contacto con el electrodo (o conductor de tierra) es nula y su capacidad de carga es proporcional al cuadrado de la profundidad.

#### 3.1.4.3 Electrodo rasantes.

Un electrodo es considerado “rasante” cuando la profundidad  $t$  de su centro de gravedad eléctrico es aproximadamente igual a sus dimensiones lineales; ya sea un electrodo individual o múltiple.

##### 3.1.4.3.1 Electrodo esférico.

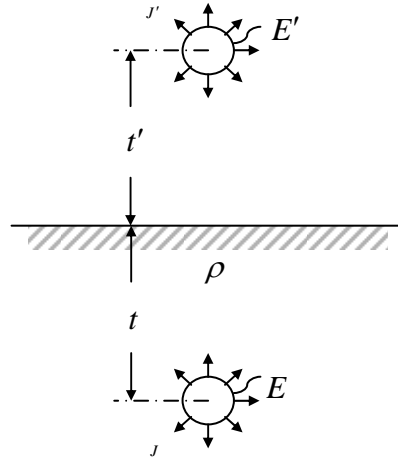
El análisis de este electrodo parte de la figura 53, donde es representado por una fuente puntual. Se utiliza un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  con el origen sobre la superficie del suelo y con el eje  $z$  normal a él y creciendo hacia arriba. Se introduce la relación:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Se localizan las fuentes puntuales en  $O(0, 0, -t)$  y  $O'(0, 0, +t)$  con corriente  $J$  en cada una de ellas, las cuales excitarán sobre un punto  $p(x_p, y_p, z_p)$  el potencial:

$$\varphi(x_p, y_p, z_p) = \frac{1}{4\pi\gamma} J \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_p^2 + (z_p + t)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_p^2 + (z_p - t)^2}} \right]$$

Si un electrodo completamente esférico con radio  $A$  está colocado bajo la superficie del suelo a la profundidad  $t > A$ , se origina el electrodo gemelo mostrado en la figura 59.

Figura 59. Aplicación del principio de reflexión al electrodo esférico enterrado a la profundidad  $t > A$ .



Entonces a su propio potencial  $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\gamma} J \frac{1}{A}$  se le suma el potencial mutuo de la imagen

(o campo extraño) siguiente:  $\varphi' = \frac{1}{4\pi\gamma} J \frac{1}{2t}$

Excitado por el electrodo ficticio en el centro del electrodo real, y por lo tanto en su superficie resulta el potencial total:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\gamma A} \left[ 1 + \frac{A}{2t} \right] J$$

La resistencia resulta entonces en:  $R = \frac{1}{4\pi\gamma A} \left[ 1 + \frac{A}{2t} \right]$

Comparando esta resistencia con la del mismo electrodo, pero colocado de manera superficial, es decir del electrodo semiesférico  $\left( R_0 = \frac{1}{2\pi\gamma A} \right)$ , se determina la ganancia del electrodo al enterrarlo a la profundidad  $t$ :

$$G = \frac{R_0}{R} = \frac{\frac{1}{2\pi\gamma A}}{\frac{1}{4\pi\gamma A} \left[ 1 + \frac{A}{2t} \right]} = \frac{2}{\left[ 1 + \frac{A}{2t} \right]}$$

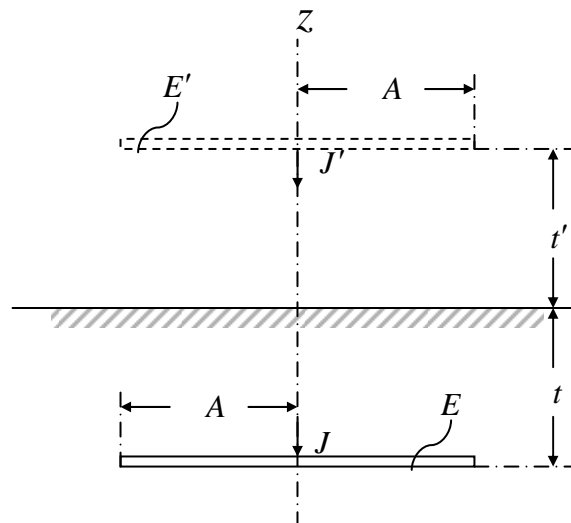
Si  $t = A$  se llega a  $G = \frac{4}{3}$  o  $R = \frac{3}{4} R_0$

La resistencia del electrodo esférico enterrado de manera rasante a una profundidad igual a su radio, es igual a sólo las tres cuartas partes de la correspondiente al mismo electrodo colocado de manera superficial.

#### 3.1.4.3.2 Electrodo de placa circular.

En la figura 60 se presenta al sistema resultante de la reflexión de un electrodo de placa circular con radio  $A$  enterrado de manera rasante a la profundidad  $t$ , el cual está rodeado por todos lados de manera ilimitada de un medio de conductividad  $\gamma$ .

Figura 60. Aplicación del método de imágenes al electrodo de placa circular enterrado de manera rasante a la profundidad  $t$ .



El potencial propio del electrodo es:  $\varphi_0 = \frac{1}{8\gamma A} J$

De la figura, el potencial recíproco de la placa circular ficticia reflejado sobre el centro de gravedad eléctrico de la placa real queda expresado así:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\gamma A} J \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{\xi} \right)$$

En la cual la coordenada elíptica  $\xi$  es igual a:  $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2c}$  donde  $c \approx A$  y  $r_1, r_2$  son las distancias de los focos de el elipsoide de revolución achatado (de semieje menor decreciente) que representa la placa circular ficticia a el centro de gravedad eléctrico del electrodo de placa circular real (ver anexo A, coordenadas esferoidales).

Donde  $r_1 = r_2 = \sqrt{(2t)^2 + A^2}$  siendo  $A$  el radio de la placa circular, luego  $\xi = \frac{\sqrt{(2t)^2 + A^2}}{A}$

Por lo tanto el potencial resultante del electrodo de placa enterrado queda expresado así:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{8\gamma A} J \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \left( \frac{A}{\sqrt{(2t)^2 + A^2}} \right) \right]$$

Y la resistencia del electrodo es igual a:

$$R = \frac{1}{8\gamma A} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \left( \frac{A}{\sqrt{(2t)^2 + A^2}} \right) \right]$$

Por lo tanto la ganancia conseguida por enterrar de manera rasante al electrodo de placa circular es igual a:

$$G = \frac{R_0}{R} = \frac{\frac{1}{4\gamma A}}{\frac{1}{8\gamma A} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \left( \frac{A}{\sqrt{(2t)^2 + A^2}} \right) \right]} = \frac{2}{\left[ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \left( \frac{A}{\sqrt{(2t)^2 + A^2}} \right) \right]}$$

### 3.1.4.3.3 Electrodo de pica.

Se sabe que el potencial propio de un electrodo de pica de radio  $r_0$  rodeado por todos lados por un medio ilimitado y homogéneo de conductividad  $\gamma$  y con longitud  $l \gg r_0$  y con corriente  $J$  es igual a:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\gamma l} J \ln\left(\frac{2l}{r_0}\right)$$

El potencial recíproco  $\varphi'$  reflejado se expresa con base en la coordenada elíptica, referida sobre su centro de gravedad eléctrico, así:

$$\varphi' = \frac{1}{8\pi\gamma l} J \ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right) \text{ donde } \xi = \frac{r_1+r_2}{2c}$$

$$c \approx l, r_1 = 2t+l/2 \text{ y } r_2 = 2t-l/2 \rightarrow \xi = \frac{2t}{l}$$

$$\varphi' = \frac{1}{8\pi\gamma l} J \ln\left(\frac{\frac{2t}{l}+1}{\frac{2t}{l}-1}\right) = \frac{1}{8\pi\gamma l} J \ln\left(\frac{2t+l}{2t-l}\right) \quad 2t > l$$

El potencial  $\varphi$  del electrodo de pica enterrado de manera rasante resulta así:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\gamma l} J \left[ \ln\left(\frac{2l}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2t+l}{2t-l}\right) \right] = RJ$$

Para la comparación del electrodo de pica rasante con uno semejante, pero colocado superficialmente, se debe observar que ahora su longitud de contacto con el terreno es  $2l$ ,

por lo que su resistencia es  $R_0 = \frac{1}{2\pi\gamma \cdot 2l} \ln\left(\frac{2 \times 2l}{r_0}\right) = \frac{1}{4\pi\gamma l} \ln\left(\frac{4l}{r_0}\right)$  así que la ganancia

queda determinada por medio de la siguiente relación:

$$G = \frac{R_0}{R} = \frac{\frac{1}{4\pi\gamma l} \ln\left(\frac{4l}{r_0}\right)}{\frac{1}{4\pi\gamma l} \left[ \ln\left(\frac{2l}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2t+l}{2t-l}\right) \right]} = \frac{\ln\left(\frac{4l}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{2l}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2t+l}{2t-l}\right)}$$

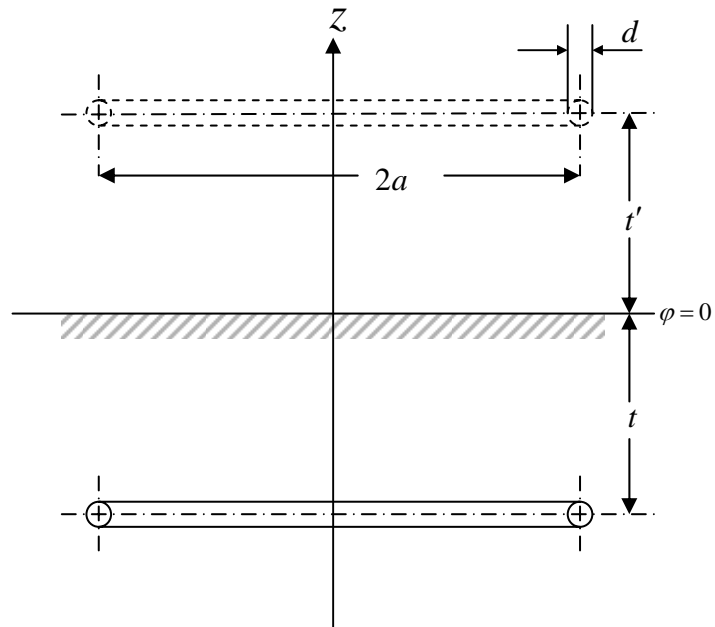
Es interesante saber si la ganancia del electrodo rasante aumentará conforme lo hace la profundidad, o si existe un límite. Si en la anterior ecuación se supone que  $t \rightarrow \infty$ , ella se reduce a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G = \frac{\ln\left(\frac{4l}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{2l}{r_0}\right)} = G_{\max}$$

#### 3.1.4.3.4 Anillo circular.

En el caso que el electrodo en anillo esté localizado a la profundidad  $t$ , como se muestra en la figura 61, su imagen reflejada estará situada a la distancia  $+t$ . El valor del potencial en cualquier parte en el espacio es la suma de dos expresiones: una que corresponde a la contribución del potencial del electrodo real (con  $z$  reemplazada por  $z+t$ ) y la otra del electrodo imagen (con  $z$  reemplazada por  $z-t$ ).

Figura 61. Aplicación del método de imágenes al electrodo en anillo circular enterrado.



La expresión del potencial del electrodo en anillo obtenida por el método riguroso fue:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2\gamma} J \frac{k}{\sqrt{a\rho}} K(k) = \frac{1}{2\pi^2\gamma} J \frac{1}{\sqrt{(\rho+a)^2 + z^2}} K(k) \quad k^2 = \frac{4\rho a}{(\rho+a)^2 + z^2}$$

Donde  $a$  es el radio del electrodo y  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia al eje del mismo.

La expresión del potencial para el electrodo en anillo enterrado a la profundidad  $t$  es:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^2\gamma} J \left\{ \frac{K(k_1)}{\left[ (\rho+a)^2 + (z+t)^2 \right]^{1/2}} + \frac{K(k_2)}{\left[ (\rho+a)^2 + (z-t)^2 \right]^{1/2}} \right\}$$

Donde  $K(k_1)$  y  $K(k_2)$  son de nuevo las integrales elípticas completas del primer tipo con:

$$k_1^2 = \frac{4\rho a}{(\rho+a)^2 + (z+t)^2} \quad y \quad k_2^2 = \frac{4\rho a}{(\rho+a)^2 + (z-t)^2}$$

Si se desea determinar la distribución del potencial a nivel del suelo en la expresión anterior se reemplaza  $z = 0$  reduciéndose a:

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2\gamma} J \frac{K(k)}{\left[ (\rho+a)^2 + t^2 \right]^{1/2}} \quad \text{donde } k^2 = \frac{4\rho a}{(\rho+a)^2 + t^2}$$

El potencial en la superficie del anillo puede ser encontrado si reemplazamos  $\rho = a, z = -t$ , así que:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi^2\gamma} J \left[ \frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right) + \frac{K(k)}{\left[ (2a)^2 + (2t)^2 \right]^{1/2}} \right] \quad k^2 = \frac{4a^2}{(2a)^2 + (2t)^2} = \frac{1}{1 + (t/a)^2}$$

$$R = \frac{\varphi_0}{J} = \frac{1}{2\pi^2\gamma} \left[ \frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right) + \frac{K(k)}{\left[ (2a)^2 + (2t)^2 \right]^{1/2}} \right]$$

La ganancia por enterrar el electrodo en anillo a la profundidad  $t$  resulta en:

$$G = \frac{R_0}{R} = \frac{\frac{1}{2\pi^2\gamma a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right)}{\frac{1}{2\pi^2\gamma} \left[ \frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right) + \frac{K(k)}{\left[ (2a)^2 + (2t)^2 \right]^{1/2}} \right]} = \frac{\frac{1}{a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right)}{\frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right) + \frac{K(k)}{\left[ (2a)^2 + (2t)^2 \right]^{1/2}}}$$

$$G = \frac{\frac{1}{a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right)}{\frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right) + \frac{K(k)}{[(2a)^2 + (2t)^2]^{1/2}}}$$

El límite de la ganancia como  $t \rightarrow \infty$  es igual a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G = G_{\max} = \frac{\frac{1}{a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right)}{\frac{1}{2a} \ln \left( 8 \frac{a}{\rho_0} \right)} = 2$$

## 3.2 TEORÍA TECNOLÓGICA DE LA ACCIÓN DE LOS ELECTRODOS MÚLTIPLES

### 3.2.1 Generalidades.

Con el enfoque tecnológico de la acción o de ingeniería, más orientado hacia los fines prácticos, se analizarán los diferentes sistemas de electrodos aplicados en las diversas instalaciones electrotécnicas resaltando sus cualidades más importantes para la práctica, sus problemas de aplicación tecnológica, la manera de plantear y resolver problemas y por último, señalándose las aplicaciones típicas de cada uno de esos sistemas de electrodos así como sus limitaciones.

Se examinarán, en primer lugar, a los electrodos compuestos exclusivamente con electrodos elementales del mismo tipo para en seguida abordar a los electrodos múltiples mixtos, es decir, los formados con electrodos elementales de diversos tipos.

Se verá que en ciertos arreglos de electrodos (mallas cuadrículadas) el análisis riguroso matemático plantea problemas prácticamente insolubles llamándose la atención sobre la racionalidad al abordar tal clase de sistemas de tierra, es decir, sobre la dificultad, tiempo y medios necesarios para el análisis y los beneficios que se podrían obtener a cambio.

### 3.2.2 Electrodo múltiple con electrodos semiesféricos.

Aún cuando este sistema de electrodos no se construye exclusivamente como sistema de tierra, su análisis es de interés, ya que se presenta como un arreglo natural de electrodos dentro de las diversas instalaciones electrotécnicas, tanto de energía como de comunicaciones eléctricas, en forma de cimientos de medios de servicio y de estructuras metálicas diversas (postes y torres de líneas aéreas, edificios, etc.) y su número puede llegar a ser considerable en algunas instalaciones de energía como en las subestaciones de alta y extra-alta tensión a la intemperie.

Uno de tales arreglos es aquel en el cual los electrodos semiesféricos están situados en las esquinas de un cuadrado, como a veces se encuentra en la práctica en los cimientos de portales de pequeñas subestaciones. El otro caso es aquel en que los electrodos semiesféricos están colocados uno al lado del otro, el cual se presenta en subestaciones que cuentan con bancos de transformadores monofásicos.

Se considera el sistema de electrodos semiesféricos con cuatro electrodos individuales del mismo tipo, localizados simétricamente sobre la circunferencia de un círculo como se muestra en la figura 62.

Debido a que los electrodos individuales trabajan en paralelo, el potencial del electrodo compuesto está relacionado por medio del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

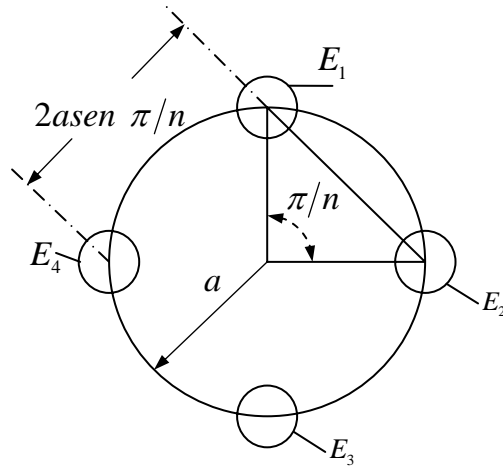
$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{14}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23} + \varphi_{24}$$

$$\varphi_3 = \varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33} + \varphi_{34}$$

$$\varphi_4 = \varphi_{41} + \varphi_{42} + \varphi_{43} + \varphi_{44}$$

Figura 62. Arreglo de cuatro electrodos semiesféricos colocados simétricamente sobre la circunferencia de un círculo.



O bien de manera un poco más explícita:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1 K_{11} + I_2 K_{12} + I_3 K_{13} + I_4 K_{14} \\ \varphi_2 &= I_1 K_{21} + I_2 K_{22} + I_3 K_{23} + I_4 K_{24} \\ \varphi_3 &= I_1 K_{31} + I_2 K_{32} + I_3 K_{33} + I_4 K_{34} \\ \varphi_4 &= I_1 K_{41} + I_2 K_{42} + I_3 K_{43} + I_4 K_{44} \end{aligned}$$

En este sistema los factores  $K$  son expresados así:

$K_{11} = K_{22} = K_{33} = K_{44} = \frac{\rho}{\pi D}$  puesto que los electrodos individuales tiene la misma forma geométrica.

Los factores mutuos  $K_{kl} = \frac{\rho}{2\pi} \frac{1}{d_{kl}}$

Por simetría se tienen las condiciones:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = J/4 \quad ; \quad K_{12} = K_{21} = K_{14} = K_{41} = K_{23} = K_{32} = K_{43} = K_{34}$$

$$\text{Y } K_{13} = K_{31} = K_{24} = K_{42}$$

Sustituyendo estas relaciones en el sistema de ecuaciones simultáneas resulta la siguiente expresión:

$$\varphi_{1/4} = I_1 (K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{14}) = I_1 (K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{12}) = I_1 (K_{11} + 2K_{12} + K_{13})$$

Sustituyendo los factores  $K$ , la anterior ecuación queda finalmente:

$$\varphi_{1/4} = I_1 \left( \frac{\rho}{\pi D} + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi d_{12}} + \frac{\rho}{2\pi} \frac{1}{d_{13}} \right) = I_1 \frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{d_{12}} + \frac{1}{2d_{13}} \right)$$

Resolviendo la anterior ecuación para  $I$ , en función de  $\varphi$  y recordando que la corriente total es igual a  $4I$ , se puede calcular la resistencia del electrodo múltiple por medio de la expresión:

$$R = \frac{\varphi}{\sum_{k=1}^n I_k(\varphi)}$$

Cuando en el arreglo de electrodos no existe simetría, no se puede proceder de esta manera simplificada, se debe seguir el procedimiento largo y formal del planteamiento y resolución del sistema lineal de ecuaciones simultáneas para determinar las expresiones de las corrientes en función de  $\varphi$  para conocer la resistencia del electrodo múltiple.

También es importante determinar en la práctica la distribución del potencial sobre la superficie del suelo alrededor del electrodo, ya sea individual o múltiple, para poder analizar la peligrosidad sobre los seres vivientes, es decir, para el cálculo de los voltajes de contacto y de paso, así como la corriente de cuerpo y en algunos casos, para el trazado de un plano de líneas de nivel de potencial.

La distribución se determina calculando el valor del potencial que actuará en una serie de puntos “  $p$  ” sobre la superficie a lo largo de diferentes ejes del sistema de electrodos, con base en la expresión de la función potencial para este tipo de electrodo:

$$\varphi_p = \frac{\rho}{2\pi x} J$$

Tomando en cuenta que en cada uno de esos puntos  $p$ , el potencial será igual a la suma de las contribuciones de cada uno de los electrodos individuales y de sus imágenes; para este caso particular se tiene:

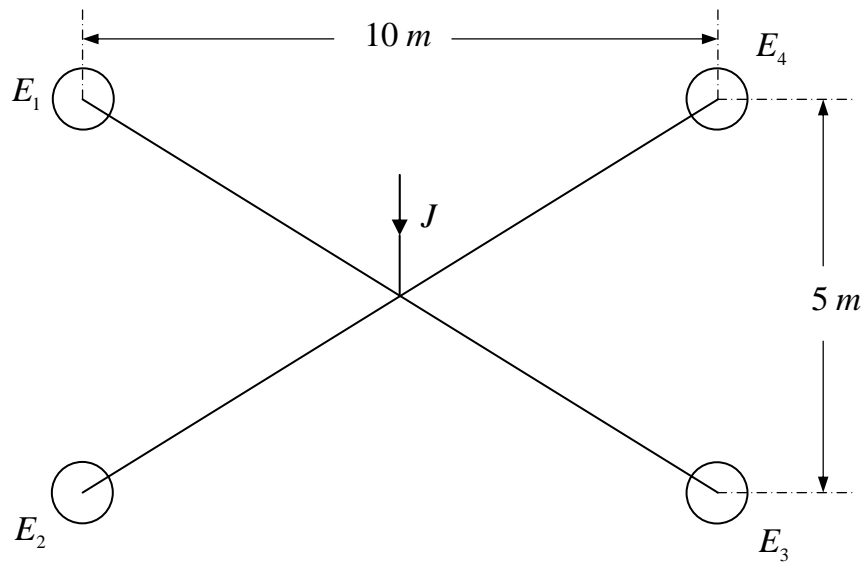
$$\varphi_p = \frac{\rho}{2\pi} \frac{J}{n} \left( \frac{1}{d_{p1}} + \frac{1}{d_{p2}} + \frac{1}{d_{p3}} + \frac{1}{d_{p4}} \right)$$

Cuando las corrientes son iguales. En el caso de que las corrientes en los electrodos individuales sean diferentes, sería:

$$\varphi_p = \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{I_1}{d_{p1}} + \frac{I_2}{d_{p2}} + \frac{I_3}{d_{p3}} + \frac{I_4}{d_{p4}} \right)$$

Como ejemplo se determinarán las magnitudes esenciales del electrodo múltiple compuesto por cuatro electrodos individuales semiesféricos, según la figura 63.

Figura 63. Electrodo múltiple compuesto por cuatro electrodos individuales semiesféricos.



Datos: Diámetro del electrodo: 1 m,  $J = 25 \text{ A}$  ;  $\rho = 100 \text{ } \Omega - m$

Se abordará con el procedimiento general, es decir, ignorando si tiene o no simetría. Por lo tanto, se debe plantear el sistema de ecuaciones completo.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1 K_{11} + I_2 K_{12} + I_3 K_{13} + I_4 K_{14} \\ \varphi_2 &= I_1 K_{21} + I_2 K_{22} + I_3 K_{23} + I_4 K_{24} \\ \varphi_3 &= I_1 K_{31} + I_2 K_{32} + I_3 K_{33} + I_4 K_{34} \\ \varphi_4 &= I_1 K_{41} + I_2 K_{42} + I_3 K_{43} + I_4 K_{44} \end{aligned}$$

Cálculo de las  $K$

Las propias:  $K_{11} = K_{22} = K_{33} = K_{44} = \frac{100}{1\pi} = 31,83098$

Las mutuas

$$K_{12} = K_{21} = K_{34} = K_{43} = \frac{100}{2\pi \times 5} = 3,183098 ; K_{14} = K_{41} = K_{23} = K_{32} = \frac{100}{2\pi \times 10} = 1,591549$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{24} = K_{42} = \frac{100}{2\pi\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{100}{2\pi\sqrt{125}} = \frac{100}{10\pi\sqrt{5}} = 1,423525$$

El sistema de ecuaciones queda entonces así:

$$\varphi_1 = 31,83098I_1 + 3,183098I_2 + 1,423525I_3 + 1,591549I_4$$

$$\varphi_2 = 3,183098I_1 + 31,83098I_2 + 1,591549I_3 + 1,423525I_4$$

$$\varphi_3 = 1,423525I_1 + 1,591549I_2 + 31,83098I_3 + 3,183098I_4$$

$$\varphi_4 = 1,591549I_1 + 1,423525I_2 + 3,183098I_3 + 31,83098I_4$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,02629 \varphi_0 ; I_2 = 0,02629 \varphi_0 ; I_3 = 0,02629 \varphi_0 ; I_4 = 0,02629 \varphi_0$$

$$\text{La resistencia resulta entonces: } R = \frac{\varphi_0}{J} = \frac{\varphi_0}{4 \times 0,02629 \varphi_0} = 9,5093 \Omega$$

$$\text{El grado de eficiencia del arreglo es: } \eta = \frac{R_\infty}{R} = \frac{31,83098 \Omega/4}{9,5093 \Omega} = 0,8368$$

$$\text{El voltaje de electrodo: } \varphi_0 = 9,5093 \Omega \times J = 9,5093 \times 25 A = 237,73 V$$

$$\text{Distribución de la corriente: } I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{J}{4} = \frac{25}{4} = 6,25 A$$

La distribución del potencial; por ejemplo en el punto  $p$  que se encuentra en el centro del electrodo múltiple según la figura anterior, el potencial se determina como sigue:

$$\varphi_0 = I_1 K_{p1} + I_2 K_{p2} + I_3 K_{p3} + I_4 K_{p4}$$

Como las corrientes en los cuatro electrodos individuales son iguales, se tiene:

$$\varphi_p = I(K_{p1} + K_{p2} + K_{p3} + K_{p4})$$

Puesto que las distancias de cada electrodo al punto  $p$  son iguales (5,59 m), las  $K_{ps}$  resultan:

$$K_{p1} = K_{p2} = K_{p3} = K_{p4} = \frac{100}{2\pi \times 5,59} = 2,8471$$

$$\text{Por lo tanto } \varphi_p = 0,02629 \varphi_0 \times (4 \times 2,8471) \approx 0,3\varphi_0$$

De manera similar se pueden calcular el potencial en todos aquellos puntos de interés y, si se desea, trazar la curva del transcurso del potencial o el plano de las curvas de nivel.

### Observaciones

1. Si se analiza el arreglo de electrodos, es fácil deducir que las corrientes en cada uno de los electrodos individuales debe resultar igual, por las siguientes razones. Por una parte, están localizados en un círculo con diámetro de 11,18 m y por otra, al revisar las condiciones de blindaje se concluye que cada uno tiene las mismas condiciones de perturbación de sus líneas de corriente en relación con los otros, así que la corriente en cada uno debe ser la misma.

2. Si se analiza el sistema de ecuaciones planteado, se ve que cada una contiene exactamente los mismos coeficientes y, por lo tanto, basta con resolver solo una; por ejemplo:

$$\varphi_0 = I(31,83098 + 3,183098 + 1,423525 + 1,591549) = 38,0291I \therefore I = \frac{\varphi_0}{38,0291} = 0,02629\varphi_0$$

3. Es evidente la importancia que tiene al diseñar sistemas de puesta a tierra conformar arreglos de electrodos con simetría.

4. Este modelo de electrodo múltiple puede por ejemplo, representar los cimientos de los portales de las barras colectoras en una subestación a la intemperie de media tensión.

### 3.2.3 Electrodo múltiple de picas.

#### 3.2.3.1 Arreglo simétrico.

Cuando los electrodos individuales están colocados de manera simétrica sobre un círculo, la corriente en cada uno de ellos será de igual magnitud, es decir,  $I_n = \frac{J}{n}$  siendo  $n$  el número de electrodos elementales idénticos, esto es, del mismo tipo y dimensiones.

Si se considera que los electrodos del arreglo mostrado en la figura 1 son ahora picas (tubo, varilla, perfil, etc.), las relaciones matemáticas establecidas para aquel caso siguen siendo válidas; sin embargo, debido a la diferente geometría de los electrodos, los factores propios están ahora definidos así:

$$K_{nm} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$$

En la cual  $d$  representa el diámetro del electrodo; y los factores mutuos quedan expresados por medio de:

$$K_{kn} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln K \quad ; \text{ con } m = \frac{x}{l}$$

Donde  $x$  es la distancia entre los electrodos en cuestión y  $l$  representa la longitud de los mismos.

Como para el caso del arreglo de cuatro electrodos semiesféricos colocados simétricamente sobre un círculo, la determinación de la resistencia del electrodo múltiple, se puede resolver de manera directa resolviendo la ecuación:

$$\varphi_{1/0} = I(K_{11} + 2K_{12} + K_{13})$$

Y luego con  $R = \frac{\varphi_0}{\sum_{k=1}^n I_k(\varphi)}$ ; o bien de manera más explícita

$$\varphi_0 = I \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{d} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{n=4} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \right)$$

En general para cualquier número de electrodos

$$\varphi_0 = I \frac{\rho}{2\pi d} \left( \ln \frac{4l}{d} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^n \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \right)$$

Como ejemplo de aplicación se determinará la resistencia, el grado de eficiencia y el voltaje del electrodo múltiple con cuatro electrodos individuales de pica colocados simétricamente sobre un círculo, con base en los datos:

Radio del círculo: 3,91 m, distancia entre electrodos individuales: 5.5 m, longitud del electrodo: 3 m, radio del electrodo: 0.02 m,  $\rho = 100 \Omega - m$

Se tiene que

$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \frac{1}{4} \left( \ln \frac{4l}{d} + 0,5 \ln K_{12} + 0,5 \ln K_{13} + 0,5 \ln K_{14} \right)$$

Pero como  $d_{12} = d_{14}$ , resulta  $m_{12} = m_{14}$  por lo tanto la ecuación se simplifica a:

$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \frac{1}{4} \left( \ln \frac{4l}{d} + \ln K_{12} + 0,5 \ln K_{13} \right)$$

$$\text{Como } d_{12} = 5,5 \text{ m} \rightarrow m_{12} = \frac{5,5}{3} = 1,8333 \therefore \ln K_{12} = 1,0429$$

$$d_{13} = 7,7781 \text{ m} ; m_{13} = \frac{7,7781}{3} = 2,5927 \therefore \ln K_{13} = 0,7534$$

$$R = \frac{100}{2\pi \cdot 3 \cdot 4} \left( \ln \frac{12}{0,04} + 1,0429 + 0,5 \times 0,7534 \right) = 9,4476 \Omega$$

$$\text{Grado de eficiencia del arreglo: } \eta = \frac{R_\infty/n}{R} = \frac{30,2595/4}{9,4476} = 0,8007$$

La determinación de la distribución del potencial sobre la superficie del suelo en un punto  $x$  deseado se calcula a partir de la expresión general del potencial para el electrodo de pica, en la cual al hacer  $y = 0$  y considerando la corriente parcial sobre el electrodo  $J/n$  queda así:

$$\varphi_x = \frac{J}{n} \frac{\rho}{4\pi d} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} ; \text{ con } m = \frac{x}{l}$$

Y para un número  $n$  de electrodos

$$\varphi_{.xm} = \frac{\rho}{4\pi d} \frac{J}{n} \sum_{n=1}^n \ln K$$

### 3.2.3.2 Arreglos asimétricos.

En la práctica en muchas ocasiones los electrodos individuales de los electrodos múltiples están localizados de tal forma que la corriente en ellos ya no resulta igual. En estos casos para determinar la resistencia es indispensable establecer el sistema de ecuaciones lineales simultáneas que relacione el potencial de tal sistema de electrodos, el cual en principio, deberá tener un número de ecuaciones igual al de electrodos individuales que existan. De la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas se obtiene la corriente que circulará por cada uno de los electrodos individuales y como todos ellos están al mismo potencial, por medio de una simple división se determina el valor de la resistencia del electrodo múltiple. Para obtener la distribución del potencial sobre el suelo alrededor del electrodo compuesto se debe determinar el valor del potencial en un cierto número de lugares en el entorno del mismo, utilizando para ello la expresión general del potencial del electrodo en cuestión.

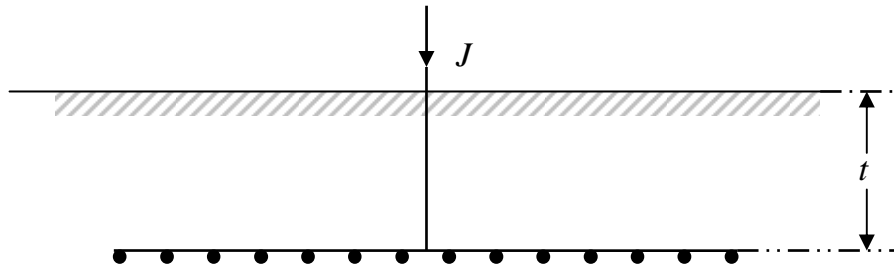
En cada punto por investigar se puede calcular el potencial una vez conocida la corriente de los electrodos individuales, el cual es igual a la suma de las contribuciones de cada uno de los mismos (considerando la influencia del propio y del ficticio) que forman el arreglo. Conocida la distribución del potencial en las direcciones de interés, se puede abordar ya el análisis de peligrosidad sobre las personas y/o animales útiles, con base en los voltajes de cuerpo resultantes, apoyándose para ello, en la electrofisiología y consultando, cuando existan, las normas de seguridad correspondientes.

En el enfoque tecnológico de la acción, en lo relacionado con el dimensionado de los electrodos de pica (tanto individuales como múltiples) no se aplica la distinción entre electrodos superficiales y rasantes (y mucho menos profundos); ellos generalmente se calculan como electrodos superficiales, aún cuando en rigor pudieran no estar instalados así.

### 3.2.4 Electrodo múltiple de bandas.

Esta clase de electrodo múltiple se compone de un número de electrodos de banda (o conductor cilíndrico) elementales trabajando en paralelo, uno al lado del otro en posición horizontal, separados entre sí por una cierta distancia  $a_x$ . Su número puede ir desde dos hasta varias decenas o, en términos matemáticos, hasta  $n$ . Aún cuando esta clase de electrodo múltiple pertenece a la categoría de electrodo rasante, pues se instala a una profundidad de hasta un metro, como se muestra en la figura 64, en general se le trata como si fuese un electrodo superficial (como si estuviese embebido en el terreno y contra la atmósfera). Ello debido a que el análisis demuestra que el resultado de considerarlos de ambas maneras es prácticamente el mismo y por otra parte ello permite simplificar la tarea.

Figura 64. Electrodo múltiple de bandas.



La razón para colocar al electrodo de bandas paralelas de manera rasante, a pesar de la reducida ganancia que se pueda obtener, es básicamente con el fin de reducir el efecto de la superficie del suelo sobre su comportamiento, debido a las condiciones atmosféricas (sequía, lluvia, hielo, etc.); así, entre más próximo esté el electrodo a la superficie del suelo, el efecto de la lluvia mejorará la conductividad del terreno y, por el contrario, en estación seca o helada la reducirá. La pequeña ganancia a favor se le puede aceptar como un factor de seguridad en el diseño del sistema de tierra.

Esta clase de electrodo se aplica principalmente en las subestaciones de alta y extra-alta tensión a la intemperie, en las cuales su equipo está distribuido en una zona de terreno muy amplia y donde además se requiere conseguir una resistencia de reducido valor. También se usa en las instalaciones de telecomunicación para la puesta a tierra de antenas o cuando la

corriente que se desea traspasar a la tierra es demasiado elevada, como es el caso de las instalaciones de energía eléctrica alimentadas por redes con el punto estrella puesto a tierra directa o indirectamente.

En esta clase de electrodo múltiple, en lo relativo a la seguridad de las personas, se deben atender dos situaciones que tienen diferente grado de riesgo:

1. La seguridad de las personas que se encuentren dentro de la zona limitada por las bandas en paralelo.
2. La seguridad de los seres vivos que se encuentren fuera de aquel ámbito, pero en su cercanía.

En principio dentro del ámbito del electrodo sólo deben estar, en un momento dado, personas autorizadas, las cuales deben cumplir con ciertas medidas de seguridad establecidas; en cambio fuera de aquel pueden encontrarse personas comunes y corrientes y, por lo tanto, sin idea de los riesgos ni protección alguna contra los contactos eléctricos. Se pueden distinguir en esencia, dos tipos diferentes de electrodos múltiples de bandas:

- 1) Electrodo múltiple de mallas rectangulares.
- 2) Electrodo múltiple de mallas cuadradas.

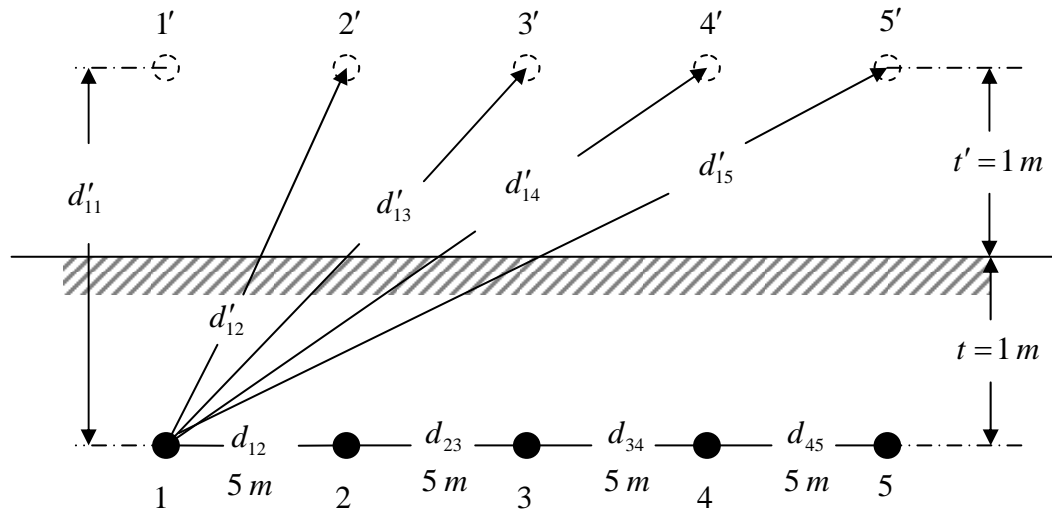
Cada una de estas modalidades tiene su campo específico de aplicación, así como sus desventajas e inconvenientes técnicos, sociales y económicos, los cuales cuando no se conoce la teoría subyacente puede dar lugar a confusión y a proyectos incorrectos desde los puntos de vista técnico, social y económico.

#### 3.2.4.1 Electrodos de bandas formando mallas rectangulares.

El análisis riguroso de esta clase de electrodo múltiple se basa, por supuesto, en el método de las imágenes, el cual si se aplica, por ejemplo, a un electrodo con cinco bandas

trabajando en paralelo, originará un electrodo gemelo como el mostrado en la figura 65. Se trata entonces de un sistema de electrodos de banda en paralelo embebido en un volumen de terreno homogéneo ilimitado por todos lados y conduciendo la corriente  $2J$ , es decir, la correspondiente al electrodo real y la de su imagen. Como antes, el potencial en cada uno de los electrodos individuales es igual a la suma del potencial propio y de la contribución de todos y cada uno de los demás sobre él, considerando tanto a los electrodos reales como a sus correspondientes ficticios.

Figura 65. Aplicación del principio de reflexión a un electrodo múltiple de cinco bandas paralelas.



Para el análisis que nos ocupa basta considerar a uno de los electrodos individuales, por ejemplo, al número uno, cuyo potencial queda expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi'_{11} + \varphi_{12} + \varphi'_{12} + \varphi_{13} + \varphi'_{13} + \varphi_{14} + \varphi'_{14} + \varphi_{15} + \varphi'_{15}$$

O bien, de manera más explícita, así:

$$\varphi_1 = J_1 K_{11} + J'_1 K'_{11} + J_2 K_{12} + J'_2 K'_{12} + J_3 K_{13} + J'_3 K'_{13} + J_4 K_{14} + J'_4 K'_{14} + J_5 K_{15} + J'_5 K'_{15}$$

Antes de tratar de resolver esta ecuación, conviene analizar las relaciones de las distancias entre las bandas. De la figura 4 se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 5 \text{ m} ; a'_{12} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,3851 \text{ m} \approx 5,4 \text{ m} \\
a_{13} &= 10 \text{ m} ; a'_{13} = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10,198 \text{ m} \approx 10,2 \text{ m} \\
a_{14} &= 15 \text{ m} ; a'_{14} = \sqrt{2^2 + 15^2} = 15,1327 \text{ m} \approx 15 \text{ m} \\
a_{15} &= 20 \text{ m} ; a'_{15} = \sqrt{2^2 + 20^2} = 20,099 \text{ m} \approx 20 \text{ m}
\end{aligned}$$

Es decir, que las distancias  $a_x$  y las  $a'_x$ , con excepción de las  $a_{12}$  y  $a'_{12}$ , son prácticamente iguales y además la diferencia entre ellas va disminuyendo al crecer el número de bandas en paralelo y también al disminuir la profundidad  $t$ . Por lo tanto, sus logaritmos  $\ln K_{xn} = \ln K'_{xn}$ . Consecuentemente en la expresión de  $\varphi_1$  se puede tratar a los factores  $k$ , así:  $K_{11} = K'_{11}$ ,  $K_{12} = K'_{12}$ ,  $\dots$  etcétera. Por otra parte, en relación con las corrientes se tiene que  $J = J'$  por lo tanto la anterior ecuación queda como sigue:

$$\varphi_1 = 2J_1K_{11} + 2J_2K_{12} + 2J_3K_{13} + 2J_4K_{14} + 2J_5K_{15}$$

Lo cual simplifica bastante tanto el planteamiento como la resolución del sistema lineal de las  $n$  ecuaciones simultáneas que relacionan el potencial del electrodo múltiple.

Los factores  $K$  de los electrodos individuales de banda quedan definidos así:

$$\text{Los propios } K_{11} = K_m = \frac{\rho}{4\pi l} \cdot 2 \ln\left(\frac{2l}{d}\right)$$

$$\text{Los mutuos; } K_{12} = K_{1n} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{m_{12}^2 + 1} + 1}{\sqrt{m_{12}^2 + 1} - 1} \quad \text{con } m_{12} = \frac{x_{12}}{l/2} = \frac{a_{12}}{l/2}$$

La expresión anterior se puede simplificar con el fin de facilitar su manejo, en la siguiente forma:

$$\varphi_1 = I_1K_{11} + I_2K_{12} + I_3K_{13} + I_4K_{14} + I_5K_{15}$$

Quedando los factores  $K$  expresados así:

$$K_{11} = 2 \cdot \frac{\rho}{4\pi l} \cdot 2 \ln\left(\frac{2l}{d}\right) = \frac{\rho}{\pi l} \ln\left(\frac{2l}{d}\right);$$

$$K_{12} = 2 \cdot \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{m_{12}^2 + 1} + 1}{\sqrt{m_{12}^2 + 1} - 1} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln K_{12}$$

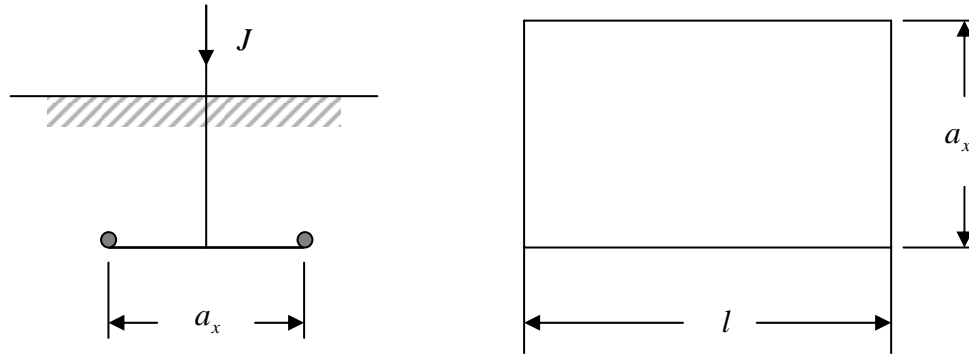
Se debe determinar con buen grado de rigor las características esenciales de un electrodo múltiple de bandas en particular en el caso de instalaciones de energía eléctrica alimentada por redes que tienen el punto estrella puesto a tierra directa o indirectamente, ya que en ellas la corriente a tierra es precisamente la corriente de cortocircuito a tierra, las cuales suelen llegar a valores muy elevados (de varias decenas de kilo amperes), so riesgo de llegar a un sistema de tierra ineficiente, inseguro y antieconómico.

Cuando se habla de un electrodo múltiple de bandas (generalmente conductores desnudos de cobre) paralelas, se sobreentiende que se trata de un electrodo compuesto con cuando menos dos bandas o conductores de longitud  $l$  colocados uno al lado del otro, generalmente al mismo nivel y unidos por medio de una banda de las mismas características, ya sea por su parte media o, como se hace generalmente, por los extremos, según se muestra en la figura 66. En rigor tales bandas transversales de unión también derivan corriente a la tierra, es decir, actúan como electrodos de banda; sin embargo, no vale la pena considerar tal contribución, al considerar que si bien ayudan a la dispersión de la corriente, en las esquinas de unión se origina perturbación de las líneas de corriente dando lugar a un calentamiento adicional del terreno lo que a su vez causa un aumento de la resistividad del mismo. Cuando la distancia  $a_x$  no es muy grande en comparación con su longitud, como es el caso en esta clase de electrodo compuesto, la ganancia por tal hecho es prácticamente despreciable y el análisis, en cambio, se complicaría demasiado.

En aquellos casos en que  $a_x$  ya no es muy pequeña en comparación con su longitud, por ejemplo, si  $a_x = 0,8l$ , el tratamiento más adecuado, en particular en el caso de sólo dos bandas paralelas, es considerarlo como si se tratara de un electrodo de banda en forma de anillo, buscando la equivalencia entre las longitudes de banda.

Estos electrodos se utilizan en instalaciones muy extensas en las que generalmente se manejan relaciones de  $a_x/l$  de 0,1 a 0,2, entonces el electrodo que se conforma cuenta con varias mallas rectangulares (entre 20 y 40 en subestaciones de alta y extra alta tensión).

Figura 66. Modos de conexión de los electrodos individuales en un electrodo múltiple de bandas paralelas.



Generalizando, el sistema lineal de ecuaciones simultáneas que relaciona el potencial de un electrodo múltiple con  $n$  bandas paralelas formando mallas rectangulares, según la figura 67, será de la forma:

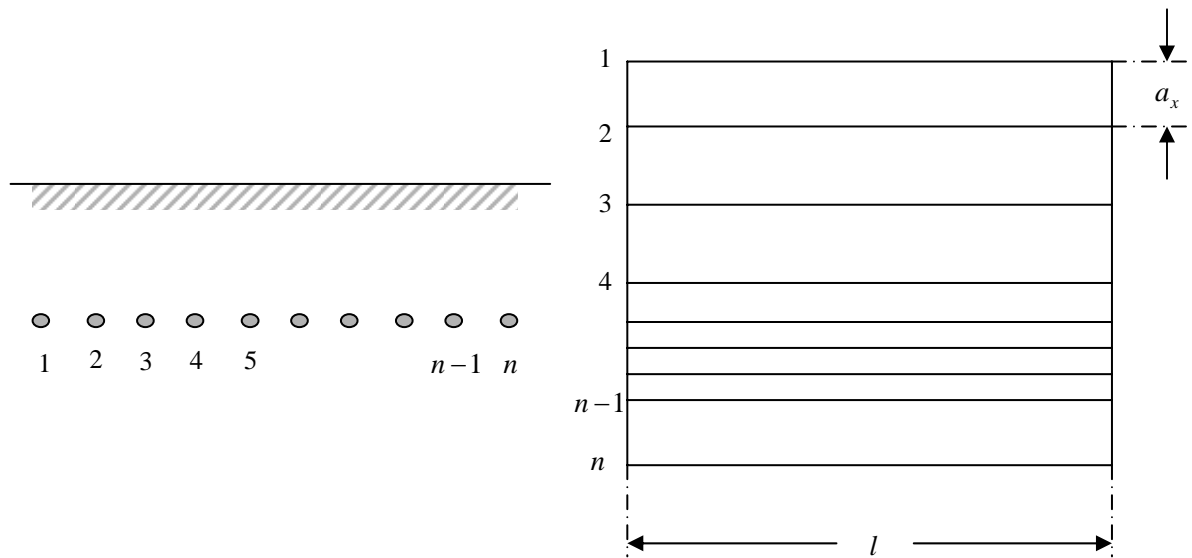
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1 K_{11} + I_2 K_{12} + I_3 K_{13} \cdots I_{n-1} K_{1(n-1)} + I_n K_{1n} \\ \varphi_2 &= I_1 K_{21} + I_2 K_{22} + I_3 K_{23} \cdots I_{n-1} K_{2(n-1)} + I_n K_{2n} \\ &\vdots \\ \varphi_n &= I_1 K_{n1} + I_2 K_{n2} + I_3 K_{n3} \cdots I_{n-1} K_{n(n-1)} + I_n K_{nn} \end{aligned}$$

Cuando el electrodo múltiple está compuesto por un número elevado de bandas paralelas, el planteamiento del sistema lineal de ecuaciones simultáneas puede ser difícil y laborioso. Una forma de reducir este inconveniente es que durante la fase de planeación del sistema de tierra proponer un arreglo de las bandas que guarden simetría, por ejemplo, con un número par de bandas y con distancias  $a_x$  iguales entre ellas, pues en estas condiciones el sistema por plantear y resolver se reduce a la mitad, así:

$$\varphi_1 = I_1 (K_{11} + K_{1n}) + I_2 (K_{12} + K_{1(n-1)}) + \cdots$$

Ya que entonces las corrientes en las bandas tendrán valores iguales de un lado y otro de un eje central.

Figura 67. Electrodo múltiple con  $n$  bandas paralelas formando mallas rectangulares.



El sistema de ecuaciones simultáneas suministra la corriente en cada una de las bandas, con lo cual se puede calcular la resistencia del electrodo múltiple con la relación que existe entre el potencial, la resistencia y la corriente  $J$ .

En esta clase de electrodo múltiple se debe determinar la distribución del potencial tanto dentro del ámbito del mismo como fuera de él, pero en su cercanía, a partir de sus bandas externas, con el fin de proteger a los seres vivos que eventualmente pudieran encontrarse en esas zonas. Ello se hace recordando que el potencial en cualquier lugar sobre el suelo es igual a la suma de las contribuciones de todas y cada una de las bandas, considerando los efectos de los electrodos reales y los ficticios. La expresión relacionada es la siguiente:

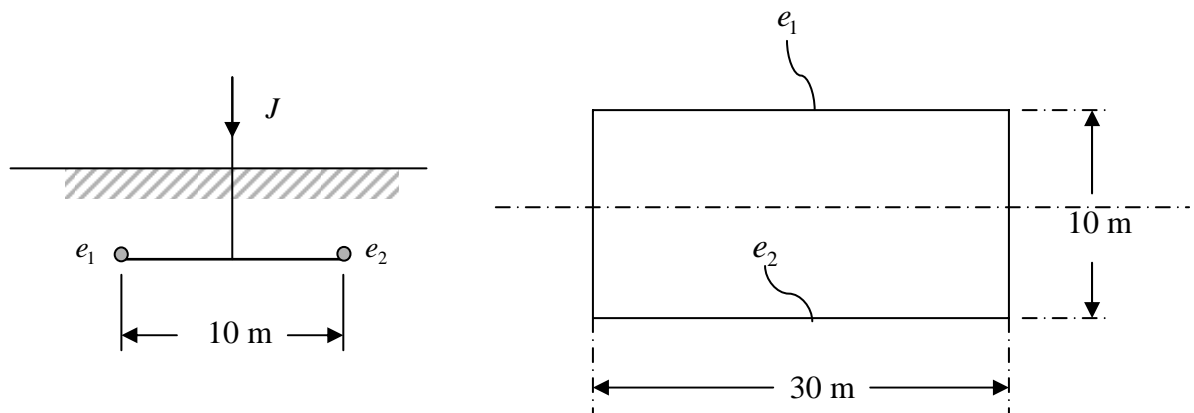
$$\varphi_{xm} = \frac{\rho}{2\pi d} \sum_{n=1}^{n=n} I_n \ln K_{xn}$$

Hay que señalar que en esta clase de electrodo múltiple la separación  $a_x$  influye tanto en los valores de los voltajes de contacto, de paso y de malla como en su espesamiento y por lo tanto en su economía. Entre mayor sea  $a_x$  menores serán los gastos pero mayores serán esos voltajes y, por el contrario, al reducir  $a_x$ , menores serán los voltajes pero mayores los

gastos. En consecuencia, la determinación de la separación  $a_x$  es un asunto importante y trascendente durante la fase de planeación del electrodo. A continuación se abordará un problema que aunque es relativamente sencillo, involucra toda la problemática esencial que se presenta en la resolución de los electrodos de mallas con bandas o conductores cilíndricos por extenso que sea.

Realizar el análisis tecnológico del electrodo múltiple con dos bandas paralelas, que se muestra en la figura 68 y con base en los siguientes datos:  
 $d = 0,009 \text{ m}$ ,  $\rho = 100 \Omega - \text{m}$ ,  $l = 30 \text{ m}$ ,  $a_x = 10 \text{ m}$ ,  $J = 50 \text{ A}$

Figura 68. Electrodo múltiple con dos bandas paralelas.



El sistema de ecuaciones es:

$$\varphi_1 = I_1 K_{11} + I_2 K_{12}$$

$$\varphi_2 = I_1 K_{21} + I_2 K_{22}$$

Como son idénticas las bandas, su corriente debe ser igual, reduciéndose a:

$$\varphi_1 = I_1 (K_{11} + K_{12})$$

Los factores K:

$$\text{Propio: } K_{11} = K_{22} = \frac{100}{30\pi} \ln \frac{2 \times 30}{0,009} = 9,3422$$

$$\text{Mutuo: } K_{12} = \frac{100}{2\pi \cdot 30} \ln \frac{\sqrt{0,67^2 + 1} + 1}{\sqrt{0,67^2 + 1} - 1} = 1,2676$$

$$\text{Pues } m_x = \frac{10}{30/2} = \frac{2}{3} \approx 0,67 \therefore \ln K = 2,3895$$

$$\text{Así que } \varphi_1 = I_1(9,3422 + 1,2676) = 10,6098I_1 = \frac{\varphi_0}{10,6098} = 0,09425\varphi_0, \quad I_1 = I_2$$

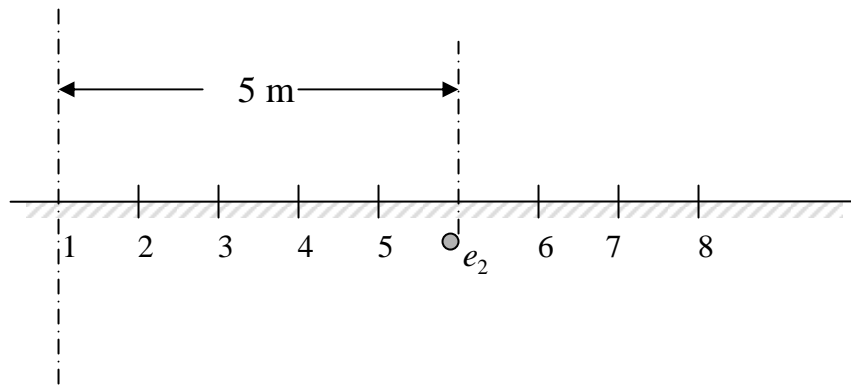
$$\text{Por lo tanto, la resistencia del electrodo múltiple es igual a } R = \frac{\varphi_0}{2 \times 0,09425\varphi_0} = 5,3049 \Omega$$

$$\text{El voltaje de electrodo } \varphi_0 = R \cdot J = 5,3049 \Omega \times 50 A = 265,245 V.$$

La distribución del potencial sobre el suelo:

Se determinará el potencial en puntos situados en dirección normal a partir de la parte media de las bandas, según la figura 69.

Figura 69. Puntos donde se desea determinar el potencial del electrodo múltiple de bandas.



La expresión general para el cálculo es:

$$\varphi_1 = I_1(K_{x1} + K_{x2}) \text{ con los factores } K : K_x = \frac{100}{2\pi \cdot 30} \ln K_x$$

Por ejemplo, para el punto 5, se tiene:  $m_{52} = 1/15 \therefore \ln K_{52} = 6,8046$  ; por lo tanto

$$K_{52} = 0,5305 \times 6,8046 = 3,6099 \text{ y } m_{51} = 9/15 = 0,6 \therefore \ln K_{15} = 2,5675 ; \text{ entonces:}$$

$$K_{51} = 0,5305 \times 2,5675 = 1,3621 . \text{ El potencial en el punto 5 resulta:}$$

$$\varphi_5 = I_1(1,3621 + 3,6099) = 0,09425\varphi_0 \times 4,972 = 0,4686\varphi_0 \text{ o bien } \varphi_5 = 4,972J$$

Procediendo de manera similar se obtienen los valores para los otros puntos, los cuales se incluyen en la tabla 13. Con estos datos es posible trazar la curva del transcurso del potencial, como se muestra en la figura 70.

Tabla 13. Cálculo de los potenciales en los puntos indicados en la figura 69.

| Electrodo número 1 |        |       |         |       |                       | Electrodo número 2 |       |         |       |                       | -----                      |
|--------------------|--------|-------|---------|-------|-----------------------|--------------------|-------|---------|-------|-----------------------|----------------------------|
| punto              | $x(m)$ | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | $x(m)$             | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | $\sum \varphi_x/\varphi_0$ |
| 1                  | 5      | 0,33  | 3,64    | 1,93  | 0,18                  | 5                  | 0,33  | 3,64    | 1,93  | 0,18                  | 0,36                       |
| 2                  | 6      | 0,40  | 3,29    | 1,75  | 0,16                  | 4                  | 0,27  | 4,06    | 2,16  | 0,20                  | 0,37                       |
| 3                  | 7      | 0,47  | 3,01    | 1,60  | 0,15                  | 3                  | 0,20  | 4,62    | 2,45  | 0,23                  | 0,38                       |
| 4                  | 8      | 0,53  | 2,77    | 1,47  | 0,14                  | 2                  | 0,13  | 5,42    | 2,88  | 0,27                  | 0,41                       |
| 5                  | 9      | 0,60  | 2,57    | 1,36  | 0,13                  | 1                  | 0,07  | 6,80    | 3,61  | 0,34                  | 0,47                       |
| 6                  | 11     | 0,73  | 2,23    | 1,18  | 0,11                  | 1                  | 0,07  | 6,80    | 3,61  | 0,34                  | 0,45                       |
| 7                  | 12     | 0,80  | 2,10    | 1,11  | 0,10                  | 2                  | 0,13  | 5,42    | 2,88  | 0,27                  | 0,38                       |
| 8                  | 13     | 0,87  | 1,97    | 1,05  | 0,10                  | 3                  | 0,20  | 4,62    | 2,45  | 0,23                  | 0,33                       |

Análisis de la peligrosidad:

De la tabla anterior se deduce que existen dos voltajes de paso máximo: uno dentro del ámbito del electrodo y el otro fuera de él, así que:

$$\text{Dentro, se tiene: } |V_p|_{mx} = (1 - 0,4686)\varphi_0 = 0,5314\varphi_0$$

$$\text{Y fuera: } |V_p|_{mx} = (1 - 0,4519)\varphi_0 = 0,5481\varphi_0$$

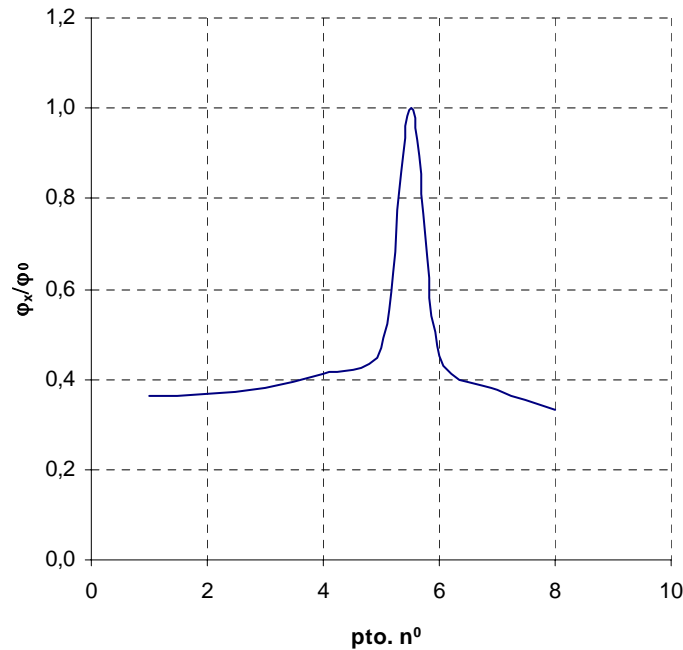
El voltaje de paso en la zona central es:

$$V_p = \varphi_2 - \varphi_1 = (0,3679 - 0,3636)\varphi_0 = 0,0043\varphi_0$$

La corriente de cuerpo máxima se presentará en la persona que se encuentre fuera del electrodo, la cual puede estar sudando y tener o no sus zapatos en buen estado, por lo que debería adoptarse el criterio riguroso para el cálculo de la corriente de cuerpo, es decir, considerando la resistencia de uno de sus pies modelado como placa circular con diámetro de 0,2 m; entonces:

$$|I_c|_{mx} = \frac{265,245 \times 0,5481}{250} = 0,5815 \text{ A} = 581,5 \text{ mA}$$

Figura 70. Distribución del potencial del electrodo múltiple de bandas.



### Observaciones

- 1) Si se adopta un criterio optimista para la resistencia ofrecida por el cuerpo, por ejemplo,

$$3000 \ \Omega, \text{ se tendría: } |I_c|_{mx} = \frac{265,245 \times 0,5481}{3000 \ \Omega} = 0,04686 \text{ A} = 46,86 \text{ mA}$$

Comparando los dos valores de la corriente de cuerpo surge una de las problemáticas importantes en cuanto a la seguridad de las personas; la decisión de cual criterio adoptar, la cual no debe quedar en manos del diseñador del sistema de puesta a tierra, debe ser establecida en normas de seguridad nacionales, considerando las diferentes situaciones que se presentan en la vida real (en el trabajo, en el hogar, en los servicios públicos, etc.).

- 2) El grado de peligrosidad dependerá de la clase de red que alimente la instalación, es decir, si tiene el punto estrella libre o lo tiene conectado directa o indirectamente. En las primeras redes, el contacto a tierra puede durar mucho tiempo y una corriente de 50 mA durante un segundo encierra el peligro de muerte; en cambio; en la segunda clase de redes, el tiempo de permanencia del defecto es muy corto y por ello el cuerpo puede admitir corrientes mayores.
- 3) Por las anteriores razones, algunas normas internacionales, por ejemplo la VDE alemana, para la primera clase de redes, se estipula un valor límite para el voltaje de electrodo de 125 V, con la idea de que el voltaje de paso máximo no sea mayor de 65 V y que asumiendo el valor promedio de  $1300 \Omega$  para la resistencia de cuerpo, no se originará una corriente superior a 50 mA. Para la segunda clase de redes los valores de los voltajes de contacto y de paso en cambio se estipulan en relación con los tiempos de apertura de los interruptores de potencia, así como con el sitio donde se encuentre la persona (si está dentro o fuera del ámbito de la instalación de puesta a tierra).
- 4) El material empleado para la construcción del electrodo es: 80 m de banda o conductor y cuatro conectores de esquina. Debe observarse que con esa misma longitud de banda colocada linealmente se conseguiría una resistencia de  $R = \frac{100}{80\pi} \ln\left(\frac{2 \times 80}{0,009}\right) = 3,8936 \Omega$
- Es decir una diferencia de  $1,4112 \Omega$  (aproximadamente 36%) a favor del arreglo lineal, lo cual se explica por el hecho de que sus líneas de corriente se dispersan libres de toda perturbación, mientras que en el arreglo en paralelo si existe cierto grado de perturbación entre las líneas de corriente de ambas bandas (entre más cercanas estén las bandas, el grado de perturbación será mayor).
- 5) Debe observarse que el voltaje de paso máximo se presenta en los bordes del electrodo de bandas paralelas y precisamente en el exterior. En la práctica esto es muy importante

tenerlo en mente, ya que simplifica el análisis de la seguridad, pues cuando se satisface en tal sitio, estará garantizada en todo el ámbito del electrodo.

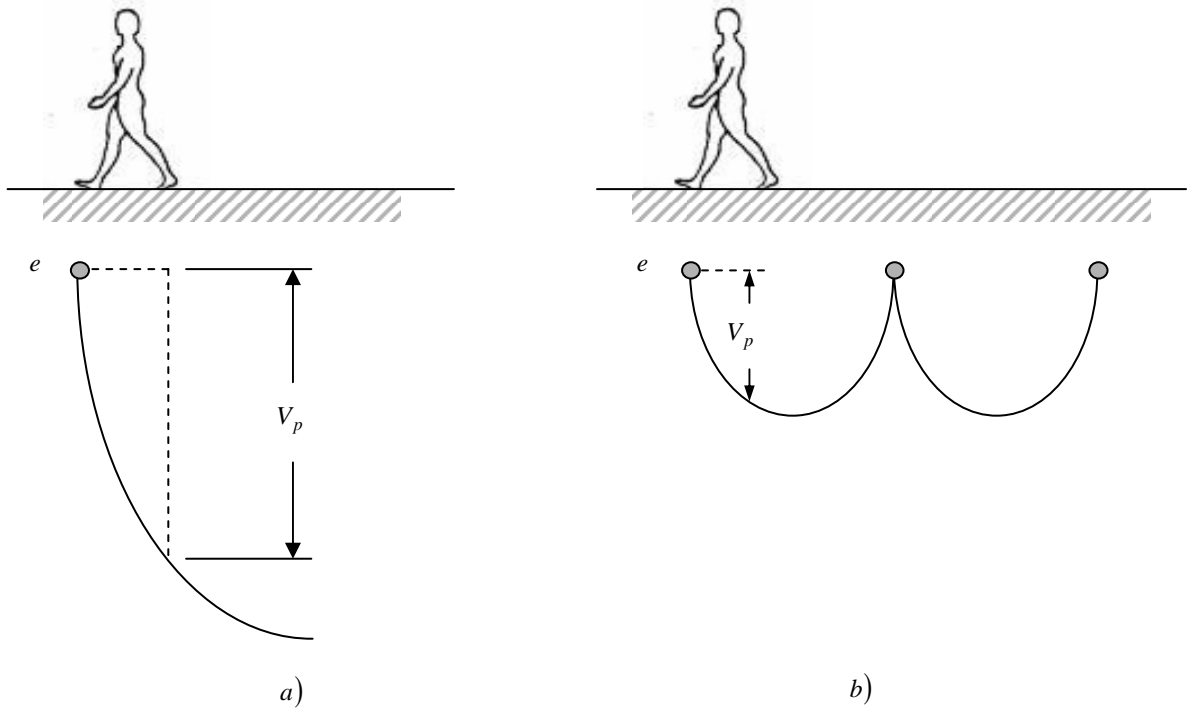
#### 3.2.4.1.1 Electrodo de bandas para el control de la distribución del potencial.

Cuando los electrodos elementales del tipo que sean, que integran un electrodo compuesto están muy próximos entre sí, el grado de eficiencia de su operación en paralelo se ve afectada desfavorablemente, debido a que se presenta perturbación dinámica de sus líneas de corriente lo que resulta en calentamiento del volumen del terreno aumentando, por lo tanto, su resistividad. Esto, en principio, es una desventaja pero se debe analizar tal hecho desde otro punto de vista: el de la seguridad para los seres vivos.

En la figura 71 a) se muestra a una persona que hace contacto con un electrodo de banda con uno de sus pies en el momento que circula por él corriente hacia la tierra y según la distribución del potencial, se ve afectado por el voltaje de paso indicado; en la figura 71 b) se muestra el caso en que existe otro electrodo de banda muy cercano al primero, apreciándose la disminución en el valor del voltaje de paso por tal hecho. Es obvio que entre más se acerquen, menor será el voltaje aplicado a la persona y en el límite, es decir, cuando la distancia  $a_x \rightarrow 0$  dicho voltaje será cero, pues se tendría un electrodo de placa.

Esta circunstancia se aprovecha en la práctica para modificar la distribución del potencial de uno o varios electrodos con el propósito de que sea más favorable. A esa medida en la ingeniería de puesta a tierra se le denomina “*control de potencial*” y se aplica de manera especial en la puesta a tierra de postes y líneas aéreas, pero también en los electrodos de mallas rectangulares con el objetivo específico de reducir el valor del voltaje de paso máximo en los bordes de la malla. También se aplica dentro de la malla en ciertas zonas donde pudieran existir condiciones desfavorables, con el fin de proteger a las personas, por ejemplo en las esquinas.

Figura 71. Electrodo de banda para el control de la distribución de potencial.



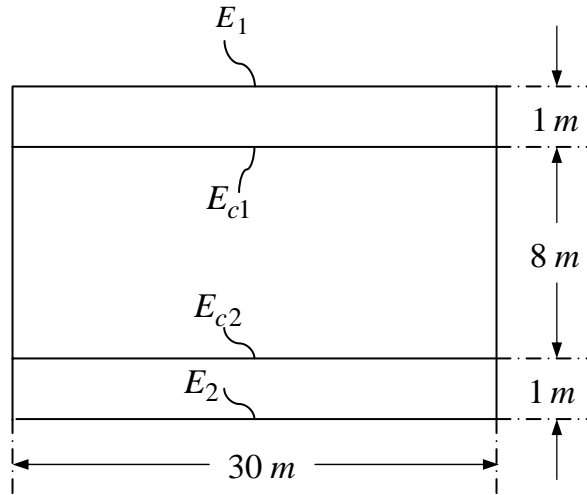
El control del potencial se aplica también con varios electrodos de control para formar las llamadas “*rampas de control*” las cuales se colocan a diferentes distancias y profundidades, por ejemplo, en subestaciones de extra alta tensión con el objetivo de reducir los voltajes de cuerpo en el exterior de los bordes y en particular, en la puesta a tierra de las torres de líneas aéreas.

Como ejemplo de control de potencial se analizará el electrodo del ejemplo anterior cuando se le agregan dos electrodos de control en los bordes, según la figura 72.

Del análisis de la figura se deduce que hay simetría, así que  $I_1 = I_4$  ;  $I_2 = I_3$  y además, por condiciones de blindaje  $I_1 > I_2$ . El sistema de ecuaciones simplificado es:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1(K_{11} + K_{14}) + I_2(K_{12} + K_{13}) \\ \varphi_2 &= I_1(K_{21} + K_{24}) + I_2(K_{22} + K_{23}) \end{aligned}$$

Figura 72. Electrodo múltiple de bandas al que se la han agregado dos electrodos de control en los extremos.



Factores  $K$

$$\text{Los propios: } \frac{100}{30\pi} \ln \left( \frac{2 \times 30}{0,009} \right) = 9,3422$$

Los factores mutuos:

$$K_{14} = \frac{100}{60\pi} \ln K_{14} = \frac{100}{60\pi} \times 2,3895 = 1,2676$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{100}{60\pi} \ln K_{12} = \frac{100}{60\pi} \times 6,8046 = 3,6099$$

$$K_{23} = \frac{100}{60\pi} \ln K_{23} = \frac{100}{60\pi} \times 2,7725 = 1,4709$$

$$K_{24} = K_{42} = K_{13} = K_{31} = \frac{100}{60\pi} \ln K_{13} = \frac{100}{60\pi} \times 2,5675 = 1,3621$$

El sistema de ecuaciones resulta en:

$$10,6098I_1 + 4,972I_2 = \varphi_1$$

$$4,972I_1 + 10,8131I_2 = \varphi_2$$

Resolviendo resulta:  $I_1 = I_4 = 0,06489 \varphi_0$ ,  $I_2 = I_3 = 0,06263 \varphi_0$

$$\text{La resistencia del electrodo } R_0 = \frac{\varphi_0}{2(0,06489 + 0,06263)\varphi_0} = \frac{1}{0,25504} = 3,9209 \Omega$$

El voltaje de electrodo  $\varphi_0 = 3,9209 \Omega \times 50 A = 196,04 V$

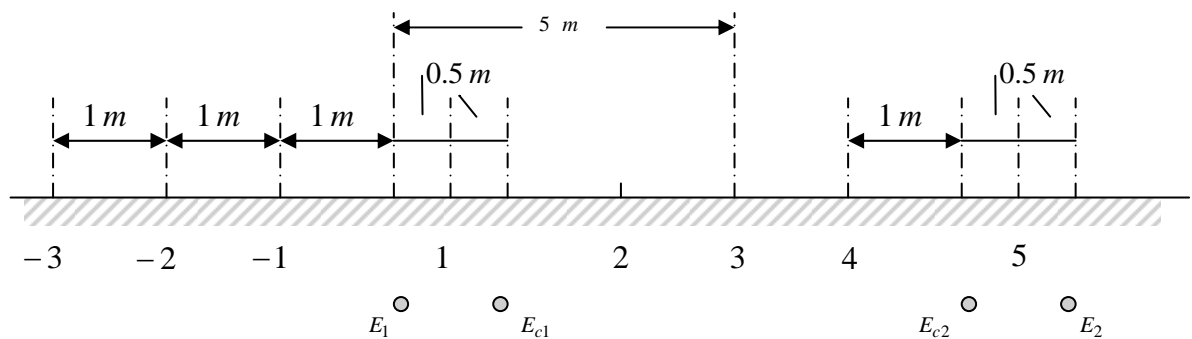
Distribución del potencial sobre las bandas

$$I_1 = I_4 = \frac{0,06489 \varphi_0}{0,25504 \varphi_0} \times 100 = 25,44\% \quad (12,72 A)$$

$$I_2 = I_3 = \frac{0,06263 \varphi_0}{0,25504 \varphi_0} \times 100 = 24,5569\% \quad (12,27 A)$$

La distribución del potencial sobre el suelo se determina en los puntos señalados en la figura 73.

Figura 73. Puntos donde se desea determinar el potencial del electrodo múltiple de bandas con dos electrodos de control en los extremos.



La expresión para el cálculo es:

$$\varphi_x = 0,06489 \varphi_0 (K_{x1} + K_{x4}) + 0,06263 \varphi_0 (K_{x2} + K_{x3})$$

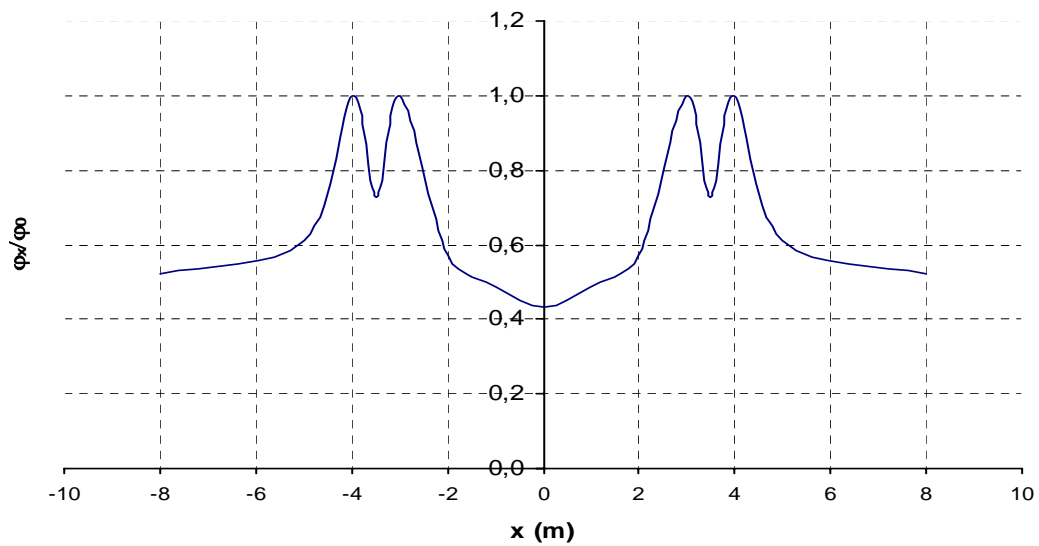
Se sigue el procedimiento ya varias veces aplicado para calcular el potencial en cada uno de los puntos de interés. En la tabla 14 se incluyen todos los valores.

Con los valores de la tabla se puede trazar un bosquejo de la distribución del potencial, como se muestra en la figura 74.

Tabla 14. Cálculo de los potenciales en los puntos indicados en la figura 73.

| Electrodo número 1 |        |       |         |       |                       | Electrodo número 2 |       |         |       |                       | -----                      |
|--------------------|--------|-------|---------|-------|-----------------------|--------------------|-------|---------|-------|-----------------------|----------------------------|
| punto              | $x(m)$ | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | $x(m)$             | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | -----                      |
| 1                  | 0,5    | 0,03  | 8,19    | 4,34  | 0,28                  | 0,5                | 0,03  | 8,19    | 4,34  | 0,27                  | -----                      |
| 2                  | 2      | 0,13  | 5,42    | 2,88  | 0,19                  | 1                  | 0,07  | 6,80    | 3,61  | 0,23                  | -----                      |
| 3                  | 5      | 0,33  | 3,64    | 1,93  | 0,13                  | 4                  | 0,27  | 4,06    | 2,16  | 0,14                  | -----                      |
| -1                 | 1      | 0,07  | 6,80    | 3,61  | 0,23                  | 2                  | 0,13  | 5,42    | 2,88  | 0,18                  | -----                      |
| -2                 | 2      | 0,13  | 5,42    | 2,88  | 0,19                  | 3                  | 0,20  | 4,62    | 2,45  | 0,15                  | -----                      |
| -3                 | 3      | 0,20  | 4,62    | 2,45  | 0,16                  | 4                  | 0,27  | 4,06    | 2,16  | 0,14                  | -----                      |
| Electrodo número 3 |        |       |         |       |                       | Electrodo número 4 |       |         |       |                       | -----                      |
| punto              | $x(m)$ | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | $x(m)$             | $m_x$ | $\ln K$ | $k_x$ | $\varphi_x/\varphi_0$ | $\sum \varphi_x/\varphi_0$ |
| 1                  | 8,5    | 0,57  | 2,67    | 1,41  | 0,09                  | 9,5                | 0,63  | 2,48    | 1,31  | 0,09                  | 0,73                       |
| 2                  | 7      | 0,47  | 3,01    | 1,60  | 0,10                  | 8                  | 0,53  | 2,77    | 1,47  | 0,10                  | 0,61                       |
| 3                  | 4      | 0,27  | 4,06    | 2,16  | 0,14                  | 5                  | 0,33  | 3,64    | 1,93  | 0,13                  | 0,52                       |
| -1                 | 10     | 0,67  | 2,39    | 1,27  | 0,08                  | 11                 | 0,73  | 2,23    | 1,18  | 0,08                  | 0,57                       |
| -2                 | 11     | 0,73  | 2,23    | 1,18  | 0,07                  | 12                 | 0,80  | 2,10    | 1,11  | 0,07                  | 0,49                       |
| -3                 | 12     | 0,80  | 2,10    | 1,11  | 0,07                  | 13                 | 0,87  | 1,97    | 1,05  | 0,07                  | 0,43                       |

Figura 74. Distribución del potencial del electrodo múltiple de bandas con dos electrodos de control en los extremos.



Los voltajes de paso son ahora:

En el borde, en el exterior:

$$|V_p|_{mx} = (1 - 0,5707)\varphi_0 = 0,4293\varphi_0 = 0,4293 \times 196 = 84 \text{ V}$$

Dentro del electrodo

$$|V_p|_{mx} = (1 - 0,6083)\varphi_0 = 0,3917\varphi_0 = 0,3917 \times 196 = 76,77 \text{ V}$$

Como se esperaba

### *Observaciones*

- 1) El aumento de 60 m de banda y de cuatro conectores, resulta en una reducción de la resistencia de 1,384  $\Omega$ , de 69 V en el voltaje de electrodo y de 61 V en el valor del voltaje de paso máximo.
- 2) Las corrientes de cuerpo serían de 336 mA con el criterio riguroso y de 28 mA con el criterio optimista.
- 3) Generalmente las bandas de control se colocan fuera de los bordes con el fin de conseguir una mejor protección de los seres vivos en esa zona.

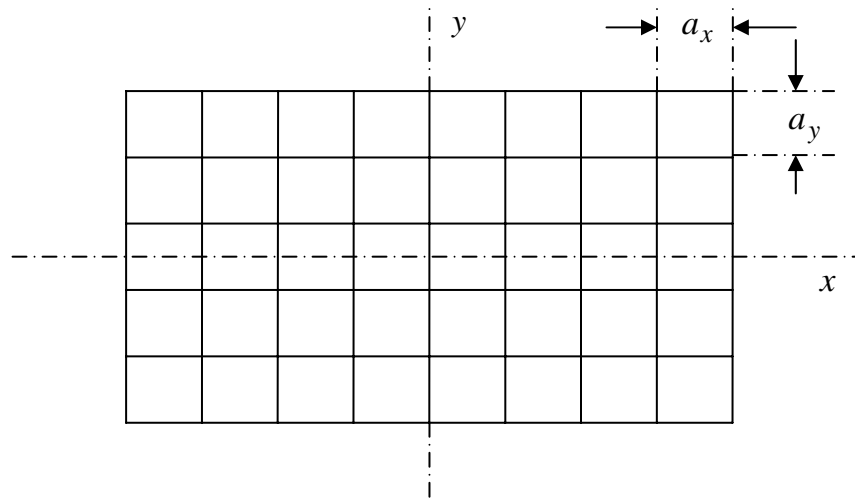
#### 3.2.4.2 Electrodo de banda formando mallas cuadradas.

Con base en los electrodos de banda o conductor cilíndrico también se puede construir un electrodo múltiple con bandas paralelas siguiendo al eje  $x$  y al eje  $y$ , formándose una malla cuadrada, como la mostrada en la figura 75.

En la práctica está muy arraigada la costumbre de aplicar esta clase de electrodo en subestaciones de media y alta tensión aun cuando en muchas ocasiones no se justifique.

El análisis riguroso matemático con base en la imagen reflejada de esta clase de electrodo plantea un problema intratable, aún cuando se le aborde como electrodo superficial. Por eso existen otros métodos para el ataque de tal problema (computacionales, en el tanque electrolítico, etc.) pero en la práctica no siempre puede resultar rentable tratar de aplicar esta clase de electrodo pues puede resultar inasequible, antieconómico y hasta incomprensible su dimensionado si no se cuenta con un conocimiento subyacente.

Figura 75. Electrodo múltiple de bandas formando mallas cuadrículas.



Por una parte, la puesta a tierra de servicio puede exigir un valor pequeño para la resistencia, y por otra, la puesta a tierra de protección requiere comprobar que con dicho valor no se vayan a originar gradientes de potencial peligrosos para personas y animales útiles ello tanto dentro como fuera del ámbito del electrodo de malla cuadrículada. El requisito del valor óhmico se puede satisfacer con alguna de las clases de electrodos pero entre ellos se debe elegir el que cumpla las exigencias de la seguridad de la manera menos difícil y costosa.

Una cuestión que se debe tener en mente para estar en posibilidad de formarse un criterio válido respecto a usar o no un electrodo de malla cuadrículada es tener conciencia de lo máximo que se puede conseguir con este electrodo, en relación con los requisitos

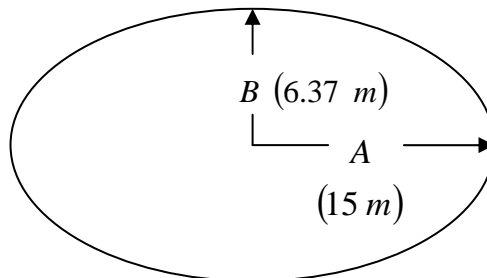
anteriores, al respecto en el siguiente ejemplo se abordará tal asunto en relación con los problemas anteriormente resueltos.

### Ejemplo

Determinar el valor de la resistencia mínima que se puede conseguir en relación con el problema de un electrodo múltiple de dos bandas paralelas.

El valor mínimo que se podrá lograr es el que se consigue al considerar al electrodo de malla cuadrículada como un electrodo de placa. Para los fines prácticos es válido reemplazar este electrodo por una placa elíptica con una superficie equivalente a la del electrodo de malla cuadrículada, según se muestra en la figura 76.

Figura 76. Electrodo de placa elíptica con una superficie equivalente a la del electrodo de malla cuadrículada.



La superficie de la elipse es:  $S_e = \pi ab$ , donde  $a$  es el semieje mayor y  $b$  es el semieje

menor, adoptando  $a = 15 \text{ m}$  resulta  $b = \frac{10 \times 30}{15\pi} = 6,3661 \text{ m}$

La resistencia de la placa elíptica es:

$$R_0 = \frac{K(k)}{2\pi\gamma a} = \frac{100}{2\pi \cdot 15} K(k) \quad k = \sqrt{1 - (b/a)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{6,3661}{15}\right)^2} = 0,905468$$

$$K(0,905468) = 2,3049 \rightarrow R_0 = 1,061K(k) = 1,061 \times 2,3049 = 2,4455 \Omega$$

Observaciones

- Aunque las superficies sean equivalentes, la resistencia de la placa rectangular sería un poco mayor debido a la presencia de perturbación en las esquinas.
- Si se requiriera una resistencia menor por razones de servicio, se deberá adoptar otra medida técnica, como por ejemplo intercalar una impedancia en el neutro para reducir la corriente a tierra.

Hay dos preguntas que deben hacerse en relación con los electrodos de mallas cuadrículadas: ¿hasta cuánto es racional pretender lograr con él? y ¿cuándo se justifica utilizar este electrodo?...

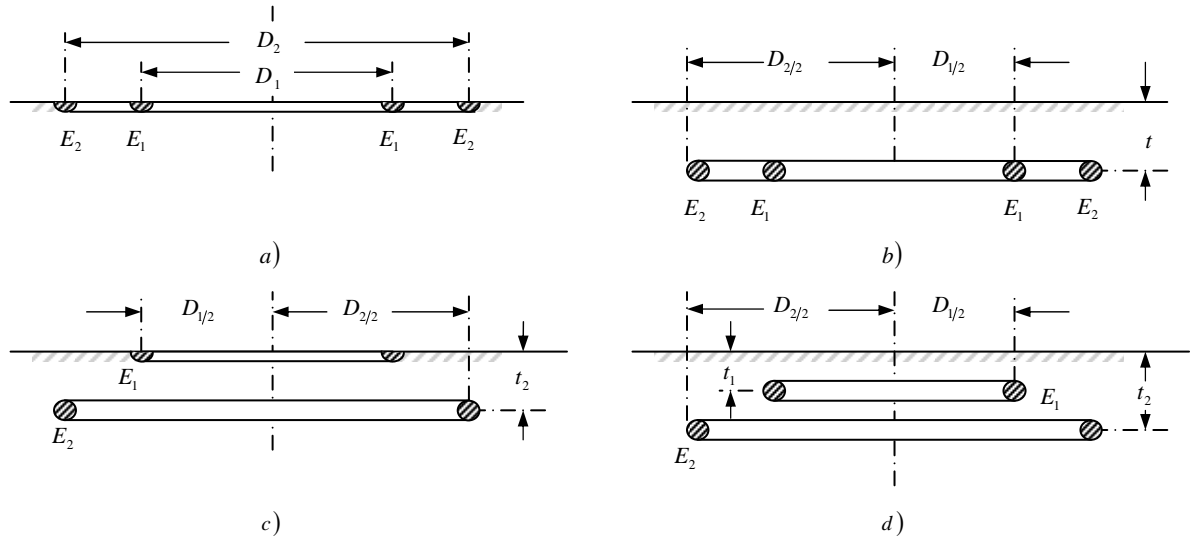
En las subestaciones extensas, generalmente existen numerosos electrodos naturales (cimentaciones de equipos, tuberías metálicas, etc.) que al unirse entre sí y con las bandas en paralelo del electrodo forman en realidad un electrodo cuadrículado; por ello las mediciones de campo han demostrado que en la zona central de la malla los voltajes de cuerpo que resultan son menores de los calculados y del orden de la mitad de los calculados en los bordes, sucediendo en las esquinas lo contrario. En consecuencia en esta clase de instalaciones, en cuanto a la seguridad de los seres vivos, es suficiente comprobar que los voltajes en los bordes, tanto dentro del electrodo (voltaje de malla) como fuera, no son peligrosos.

En las esquinas o alguna otra zona dentro del electrodo en que se puedan originar voltajes de cuerpo peligrosos, se pueden controlar de manera particular a bajo costo con electrodos de control.

### 3.2.5 Electrodo múltiple de anillos circulares concéntricos.

Este sistema de electrodos se realiza conectando dos o más electrodos elementales en forma de anillo, cada uno de diferente diámetro, para que trabajen en paralelo; los posibles arreglos se muestran en la figura 77 *a*, *b*, *c* y *d*.

Figura 77. Posibles arreglos de electrodos en anillos concéntricos.



El análisis de este sistema se basa a su vez del hecho al electrodo elemental en forma de anillo circular, de las propiedades fundamentales de los electrodos compuestos y en el principio de la imagen reflejada.

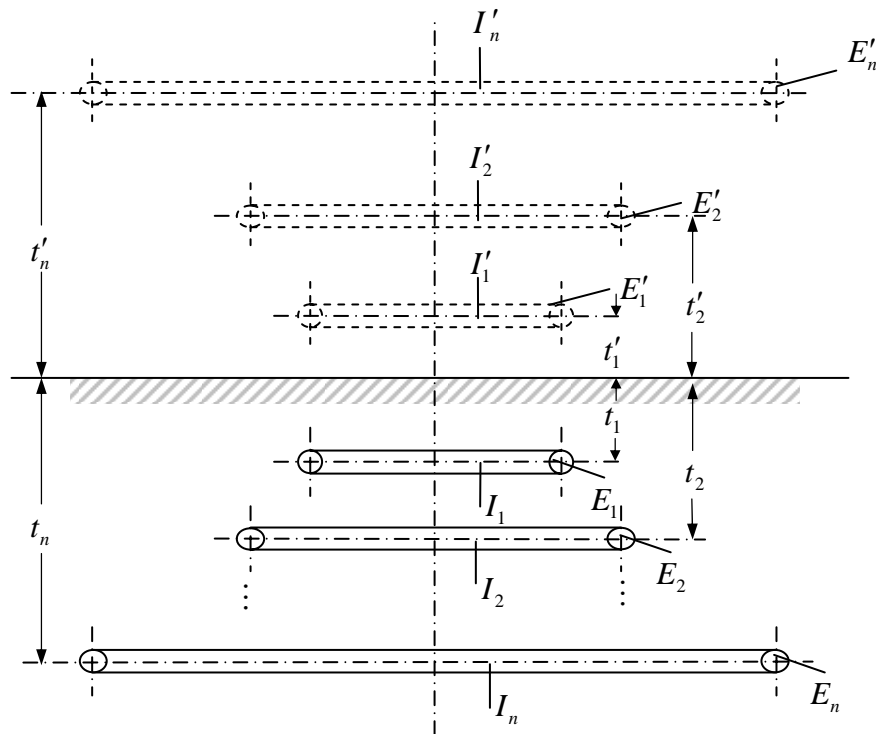
El proceso implica los siguientes pasos:

- 1) Aplicación del método de las imágenes
- 2) El establecimiento del sistema de ecuaciones simultáneas que relacionan el potencial propio del arreglo con las contribuciones de los electrodos reales y ficticios.
- 3) Determinación de la corriente en cada uno de los anillos.
- 4) Cálculo de la resistencia del electrodo múltiple.
- 5) Determinación de la distribución del potencial tanto dentro como fuera del ámbito del arreglo de electrodos.

En la práctica el análisis de esta clase de electrodo compuesto es de sumo interés debido a que se usa para el control de potencial de otros electrodos y de ciertos elementos de los sistemas de energía eléctrica (postes y torres de líneas aéreas) por las elevadas tensiones de cuerpo que presentan. Por ello se deben calcular los valores de potencial en diversos puntos sobre la superficie del suelo e incluso hacer el plano geoelectrico de niveles de potencial alrededor de la puesta a tierra, lo cual es necesario en ciertas clases de instalaciones de energía eléctrica.

Al reflejar un sistema de electrodos con  $n$  anillos, se forma el electrodo gemelo mostrado en la figura 78, en la cual se observa que el suelo queda situado simétricamente entre los electrodos reales y los ficticios. Por lo tanto, el potencial en cualquier punto sobre el suelo se compone de dos contribuciones iguales.

Figura 78. Aplicación del principio de reflexión a un sistema de electrodos en anillos concéntricos.



El sistema de ecuaciones se realiza considerando que el potencial en cada uno de los anillos del arreglo es igual al potencial propio mas las contribuciones de los potenciales recíprocos de los otros electrodos, incluyendo la influencia de los ficticios, los cuales se suman linealmente.

Para llevar a cabo el control del potencial de un electrodo los anillos se pueden disponer al mismo nivel o a diferentes profundidades con el fin de formar las llamadas “*rampas de potencial*” para disminuir las sollicitaciones fisiológicas sobre los seres vivos en los bordes del electrodo, en cuyo caso el análisis debe considerar necesariamente las diferentes profundidades en que están colocados los distintos anillos.

Generalizando, para un arreglo de electrodos como el mostrado en la figura 78, el sistema de ecuaciones lineales simultáneas que relaciona el potencial del electrodo múltiple, será del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1(K_{11} + K'_{11}) + I_2(K_{12} + K'_{12}) + \dots + I_{(n-1)}(K_{1(n-1)} + K'_{1(n-1)}) + I_n(K_{1n} + K'_{1n}) \\ \varphi_2 &= I_1(K_{21} + K'_{21}) + I_2(K_{22} + K'_{22}) + \dots + I_{(n-1)}(K_{2(n-1)} + K'_{2(n-1)}) + I_n(K_{2n} + K'_{2n}) \\ &\quad \vdots \\ \varphi_n &= I_1(K_{n1} + K'_{n1}) + I_2(K_{n2} + K'_{n2}) + \dots + I_{(n-1)}(K_{n(n-1)} + K'_{n(n-1)}) + I_n(K_{nn} + K'_{nn}) \end{aligned}$$

Donde los factores propios:

$$K_{nm} = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \ln\left(8 \frac{D}{d}\right) \quad \text{siendo } D \text{ el diámetro del anillo y } d \text{ ,el diámetro de su sección transversal.}$$

Los factores recíprocos quedan en función de las profundidades relativas de los anillos y de la distancia horizontal del eje del electrodo a el borde del anillo bajo consideración. Estos se determinan por medio de la siguiente expresión:

$$K_{12} = \frac{1}{2\pi^2 \gamma} \frac{K(k)}{\sqrt{(\rho + a_2)^2 + z_{12}^2}} \quad k^2 = \frac{4a_2\rho}{(\rho + a_2)^2 + z_{12}^2}$$

Donde:

$a_2$  es el radio del anillo influenciador.

$z_{12}$  es la profundidad relativa entre los dos anillos.

$\rho$  es la distancia horizontal al eje del anillo influenciador donde se va a evaluar el potencial (el borde del otro anillo, o sea  $a_1$ )

$\gamma$  conductividad del terreno en  $S/m$

Rescribiendo las anteriores ecuaciones en términos de los diámetros de los anillos, se tiene:

$$K_{12} = \frac{1}{2\pi^2\gamma} \frac{K(k)}{\sqrt{(D_1/2 + D_2/2)^2 + z_{12}^2}} = \frac{1}{2\pi^2\gamma} \frac{K(k)}{\sqrt{(D_1 + D_2)^2/4 + z_{12}^2}}$$
$$k = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{(D_1 + D_2)^2/4 + z_{12}^2}}$$

Debe tenerse presente que el factor de influencia mutua  $K'_{12}$  se interpreta como el factor de influencia del electrodo ficticio 2 (influenciador) sobre el electrodo 1 (el influenciado).

Esta clase de electrodo múltiple se aplica principalmente en la puesta a tierra de postes y torres de líneas aéreas, formando rampas de potencial, con el fin de controlar la distribución del potencial del electrodo principal (semiesfera, pica, etc.) contribuyendo de manera importante en la disminución de la resistencia del electrodo compuesto así como de la carga de corriente del electrodo principal.

También encuentra aplicación, en casos especiales, dentro del campo de las subestaciones de energía eléctrica y en el de las comunicaciones eléctricas, cuando se exige una uniforme distribución del potencial sobre el suelo. En la figura 79 se muestran algunos ejemplos de aplicación del electrodo múltiple con anillos.

Como ejemplo se analizará el siguiente caso de electrodo múltiple con anillos circulares concéntricos.

En una sala de cómputo se planea instalar un sistema de puesta a tierra compuesto por cuatro anillos concéntricos en forma de solera de cobre, según se muestra en la figura 80.

Figura 79. Ejemplos de aplicación del electrodo múltiple en anillos.

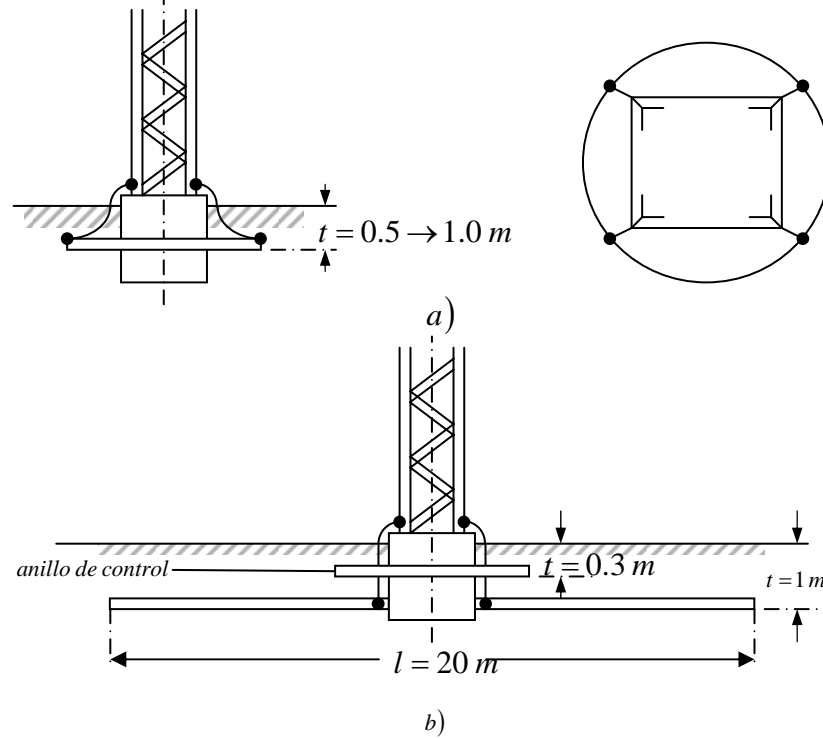
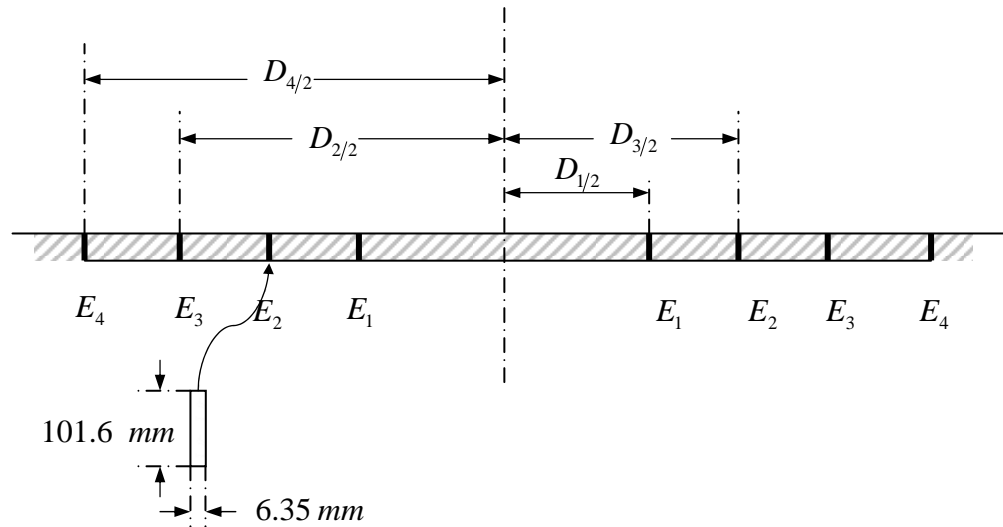


Figura 80. Electrodo múltiple compuesto de cuatro anillos concéntricos.



Determinar la resistencia del electrodo múltiple, el voltaje de electrodo y la distribución de la corriente sobre los electrodos elementales.

Datos adicionales: Resistividad del terreno =  $100 \Omega\text{-m}$ , diámetro equivalente de la solera  $d = 101,6/2 = 51 \text{ mm} = 0,051 \text{ m}$ .

El potencial estará relacionado por medio del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= I_1(K_{11} + K'_{11}) + I_2(K_{12} + K'_{12}) + I_3(K_{13} + K'_{13}) + I_4(K_{14} + K'_{14}) \\ \varphi_2 &= I_1(K_{21} + K'_{21}) + I_2(K_{22} + K'_{22}) + I_3(K_{23} + K'_{23}) + I_4(K_{24} + K'_{24}) \\ \varphi_3 &= I_1(K_{31} + K'_{31}) + I_2(K_{32} + K'_{32}) + I_3(K_{33} + K'_{33}) + I_4(K_{34} + K'_{34}) \\ \varphi_4 &= I_1(K_{41} + K'_{41}) + I_2(K_{42} + K'_{42}) + I_3(K_{43} + K'_{43}) + I_4(K_{44} + K'_{44})\end{aligned}$$

Cálculo de los factores propios: En este caso al reflejar el sistema de electrodos resulta en un electrodo gemelo de la misma forma rectangular, cuyo plano medio coincide con la superficie del suelo, por lo tanto se tiene que  $K_{11} = K'_{11}$ , etcétera. Entonces:

$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{100}{2\pi^2 \cdot 1,5} \ln\left(8 \frac{1,5}{0,051}\right) = 18,4432 \quad , \quad K_{22} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 3} \ln\left(8 \frac{3}{0,051}\right) = 10,3921 \\ K_{33} &= \frac{100}{2\pi^2 \cdot 4,5} \ln\left(8 \frac{4,5}{0,051}\right) = 7,3845 \quad , \quad K_{44} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 6} \ln\left(8 \frac{6}{0,051}\right) = 5,7813\end{aligned}$$

Cálculo de los factores mutuos:

$$K_{12} = K'_{12} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{kK(k)}{\sqrt{D_1 D_2}} \quad k = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{(D_1 + D_2)^2/4 + z_{12}^2}} = \frac{\sqrt{3 \times 1,5}}{\sqrt{(3 + 1,5)^2/4 + 0^2}} = 0,9428$$

$$K_{12} = K'_{12} = 4,5683$$

De la misma forma se calculan los otros factores mutuos:

$$\begin{array}{l|l} K_{13} = K'_{13} = 3,6416 & k = 0,8660 \\ K_{14} = K'_{14} = 2,6955 & k = 0,8 \\ K_{21} = K'_{21} = 5,6934 & k = 0,9428 \\ K_{23} = K'_{23} = 4,0745 & k = 0,9797 \\ K_{24} = K'_{24} = 2,8467 & k = 0,9428 \\ K_{31} = K'_{31} = 3,6416 & k = 0,8660 \\ \hline K_{32} = K'_{32} = 4,0745 & k = 0,9797 \\ K_{34} = K'_{34} = 3,2270 & k = 0,9897 \\ K_{41} = K'_{41} = 2,6955 & k = 0,8 \\ K_{42} = K'_{42} = 2,8467 & k = 0,9428 \\ K_{43} = K'_{43} = 3,2270 & k = 0,9897\end{array}$$

Sustituyendo todos los factores en el sistema de ecuaciones se transforma en:

$$\begin{aligned}36,8864I_1 + 11,3868I_2 + 7,2832I_3 + 5,391I_4 &= \varphi_0 \\ 11,3868I_1 + 20,7842I_2 + 8,149I_3 + 5,6934I_4 &= \varphi_0 \\ 7,2832I_1 + 8,149I_2 + 14,769I_3 + 6,454I_4 &= \varphi_0 \\ 5,391I_1 + 5,6934I_2 + 6,454I_3 + 11,5626I_4 &= \varphi_0\end{aligned}$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,007722 \varphi_0 \quad I_2 = 0,016373 \varphi_0 \quad I_3 = 0,029321 \varphi_0 \quad I_4 = 0,058456 \varphi_0$$

Tales valores satisfacen las condiciones de blindaje.

La resistencia del electrodo múltiple resulta en:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,007722 + 0,016373 + 0,029321 + 0,058456)\varphi_0} = \frac{1}{0,111873} = 8,93 \Omega$$

El voltaje de electrodo  $V_0 = 8,93 \Omega \times J(A)$

La distribución de la corriente del electrodo múltiple sobre los anillos:

$$\begin{array}{l} I_1 = \frac{0,007722}{0,111873} \times 100 = 6,9 \% \\ I_2 = \frac{0,0163733}{0,111873} \times 100 = 14,63 \% \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} I_3 = \frac{0,029321}{0,111873} \times 100 = 26,2 \% \\ I_4 = \frac{0,058456}{0,111873} \times 100 = 52,25 \% \end{array} \right.$$

*Observaciones*

- 1) Si el sistema estuviera instalado de manera rasante (entre 0,5 y 1 m) las condiciones mejorarían. Como se ha visto, en el caso de una banda enterrada se puede conseguir una reducción de hasta un 30% de su resistencia con relación a la superficial, pero en el arreglo de anillos la eficiencia se reduce y en el caso de varios anillos más aún.
- 2) En la realidad los valores calculados no son exactos ya que los conductores de unión entre los diferentes anillos actúan como electrodos originando disturbios entre sus líneas de corriente. Resultados más aproximados se pueden conseguir por medio de modelos en un tanque electrolítico o mediante técnicas digitales.

Se analizará el mismo sistema de electrodos para la sala de cómputo del ejemplo anterior pero instalados de manera rasante a la profundidad de 0,75 m como se muestra en la figura 81.

Al reflejar a tal sistema de electrodos resulta el electrodo gemelo mostrado en la figura 82.

El potencial estará relacionado por medio del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{array}{l} I_1(K_{11} + K'_{11}) + I_2(K_{12} + K'_{12}) + I_3(K_{13} + K'_{13}) + I_4(K_{14} + K'_{14}) = \varphi_0 \\ I_1(K_{21} + K'_{21}) + I_2(K_{22} + K'_{22}) + I_3(K_{23} + K'_{23}) + I_4(K_{24} + K'_{24}) = \varphi_0 \\ I_1(K_{31} + K'_{31}) + I_2(K_{32} + K'_{32}) + I_3(K_{33} + K'_{33}) + I_4(K_{34} + K'_{34}) = \varphi_0 \\ I_1(K_{41} + K'_{41}) + I_2(K_{42} + K'_{42}) + I_3(K_{43} + K'_{43}) + I_4(K_{44} + K'_{44}) = \varphi_0 \end{array}$$

Figura 81. Electrodo múltiple compuesto por cuatro anillos concéntricos colocados de manera rasante a una profundidad de  $0,75\text{ m}$ .

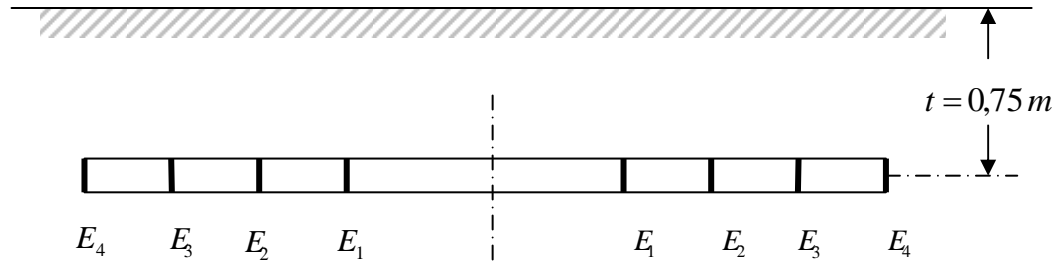
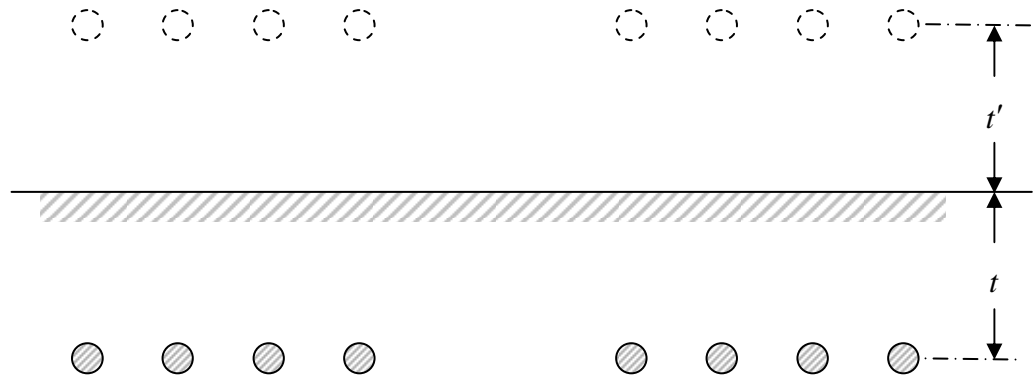


Figura 82. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo de la figura 81.



Cálculo de los factores propios  $K_m$  :

Como en este caso los electrodos reales y los ficticios están separados por la distancia  $2t$ , ahora  $K_m \neq K'_m$ . Así se tiene que:

$$K_{11} = 18,4432 \quad K_{22} = 10,3921 \quad K_{33} = 7,3845 \quad K_{44} = 5,7813$$

$$K'_{11} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{kK(k)}{\sqrt{D_1 D_1}} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{kK(k)}{D_1} \quad k = \frac{\sqrt{D_1 D_1}}{\sqrt{(D_1 + D_1)^2/4 + z'_{11}{}^2}} = \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + z'_{11}{}^2}}$$

Donde  $D_1 = 1,5\text{ m}$  y  $z'_{11}$  es la distancia relativa entre el electrodo ficticio 1 y el electrodo 1.

$$z'_{11} = 1,5\text{ m}$$

$$\begin{array}{cccc}
K'_{11} = 4,4277 & K'_{22} = 3,4093 & K'_{33} = 2,7534 & K'_{44} = 2,3183 \\
K_{12} = K_{21} = 5,6934 & K'_{12} = K'_{21} = 3,6841 & K_{13} = K_{31} = 3,6416 & K'_{13} = K'_{31} = 2,9446 \\
K_{14} = K_{41} = 2,6955 & K'_{14} = K'_{41} = 2,3838 & K_{23} = K_{32} = 4,0745 & K'_{23} = K'_{32} = 2,9162 \\
K_{24} = K_{42} = 2,8467 & K'_{24} = K'_{42} = 2,4107 & K_{34} = K_{43} = 3,2270 & K'_{34} = K'_{43} = 2,4175
\end{array}$$

Sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones resulta:

$$\begin{array}{l}
22,8709 I_1 + 9,3775 I_2 + 6,5862 I_3 + 5,0793 I_4 = \varphi_0 \\
9,3775 I_1 + 13,8014 I_2 + 6,9907 I_3 + 5,2574 I_4 = \varphi_0 \\
6,5862 I_1 + 6,9907 I_2 + 10,1379 I_3 + 5,6445 I_4 = \varphi_0 \\
5,0793 I_1 + 5,2574 I_2 + 5,6445 I_3 + 8,0996 I_4 = \varphi_0
\end{array}$$

De cuya resolución resultan las corrientes:

$$I_1 = 0,007973 \varphi_0 \quad I_2 = 0,017770 \varphi_0 \quad I_3 = 0,035411 \varphi_0 \quad I_4 = 0,082250 \varphi_0$$

Valores que satisfacen las condiciones de blindaje.

La resistencia del sistema de electrodos resulta entonces:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,007973 + 0,017770 + 0,035411 + 0,082250)\varphi_0} = \frac{1}{0,143404} = 6,97 \Omega$$

Valor 22 % menor que cuando el sistema de electrodos está colocado de manera superficial contra la atmósfera.

El voltaje de electrodo es:  $V_0 = 6,97 \Omega \times J(A)$

Distribución de la corriente de electrodo sobre los anillos

$$\begin{array}{ll}
I_1 = \frac{0,007973}{0,143404} \times 100 = 5,55 \% & I_2 = \frac{0,017770}{0,143404} \times 100 = 12,39 \% \\
I_3 = \frac{0,035411}{0,143404} \times 100 = 24,69 \% & I_4 = \frac{0,082250}{0,143404} \times 100 = 57,35 \%
\end{array}$$

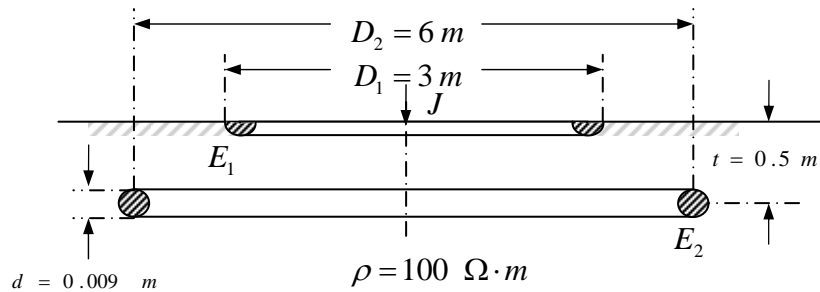
### *Observación*

En esta clase de instalación no se requiere determinar la distribución del potencial sobre el suelo en el entorno del electrodo, ello en virtud, de que el pavimento generalmente no es natural sino que tiene algún tipo de recubrimiento; así que la seguridad de las personas se

debe abordar como se hace en las instalaciones industriales con base en la teoría de circuitos y considerando la resistencia de paso que pueda tener o no el piso.

Se analizará el electrodo múltiple integrado por dos electrodos en anillos circulares, según la figura 83 y los datos: diámetro equivalente de la sección transversal de los anillos 0,009 m; diámetro del anillo 1: 3 m; diámetro del anillo 2: 6 m ; profundidad del anillo 1: 0 m; profundidad del anillo 2: 0,5 m;  $\rho = 100 \Omega \cdot m$  ;  $J = 50 A$  .

Figura 83. Electrodo múltiple compuesto por dos anillos circulares.



Reflejando al electrodo múltiple de la figura 83 resulta el electrodo gemelo mostrado en la figura 84, cuyo potencial se relaciona por medio del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$I_1(K_{11} + K'_{11}) + I_2(K_{12} + K'_{12}) = \varphi_0$$

$$I_1(K_{21} + K'_{21}) + I_2(K_{22} + K'_{22}) = \varphi_0$$

Los factores propios

$$K_{11} = K'_{11} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 3} \ln\left(8 \frac{3}{0,009}\right) = 13,3213 \quad (\text{por estar colocados superficialmente})$$

$$K_{22} \neq K'_{22} \quad K_{22} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 6} \ln\left(8 \frac{6}{0,009}\right) = 7,2459$$

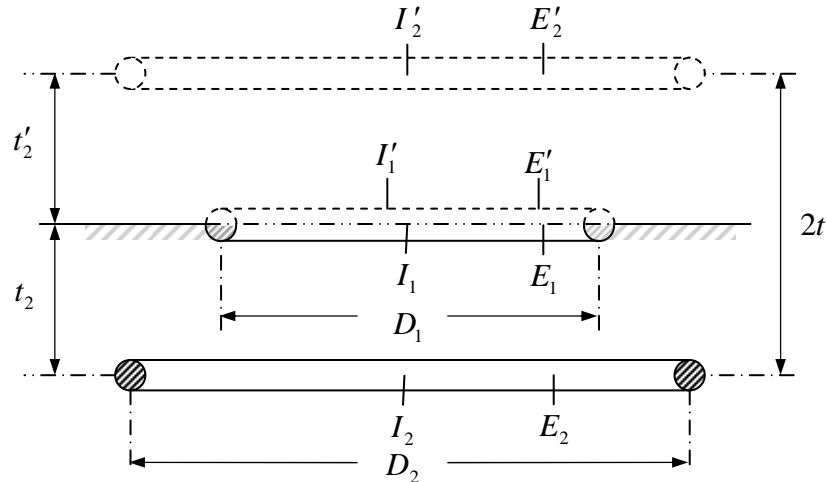
$$K'_{22} = \frac{100}{2\pi^2} \frac{kK(k)}{6} \quad k = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = 0,9863 \quad z'_{22} = 1 m \quad K'_{22} = 2,6707$$

Factores mutuos

$$K_{12} = \frac{100}{2\pi^2} \frac{kK(k)}{\sqrt{3 \times 6}} \quad k = \frac{\sqrt{3 \times 6}}{\sqrt{(3+6)^2/4 + 0,5^2}} = 0,9370 \quad z_{12} = 0,5 \text{ m}$$

$$K_{12} = K'_{12} = K_{21} = K'_{21} = 2,7806$$

Figura 84. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple compuesto por dos anillos.



El sistema por resolver es:

$$26,6426I_1 + 5,5612I_2 = \varphi_0$$

$$5,5612 I_1 + 9,9166I_2 = \varphi_0$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,018670 \varphi_0 ; I_2 = 0,090370 \varphi_0$$

Valores lógicos considerando las condiciones de blindaje y las dimensiones de los anillos.

La resistencia del electrodo múltiple:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,018670 + 0,090370)\varphi_0} = \frac{1}{0,109041} = 9,17 \Omega$$

$$\text{El voltaje de electrodo: } V_0 = 9,17 \Omega \times J(A) = 9,17 \Omega \times 50 A = 458,54 V$$

Distribución de la corriente:

$$I_1 = \frac{0,018670}{0,109041} \times 100 = 17,12 \% (8,56 A) \quad I_2 = \frac{0,090370}{0,109041} \times 100 = 82,87 \% (41,43 A)$$

Distribución del potencial sobre el suelo

La expresión general para el cálculo es:

$$\varphi_x = \frac{1}{2\pi^2\gamma} I \frac{K(k)}{\sqrt{(\rho+a)^2 + z^2}} \quad k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(\rho+a)^2 + z^2}}$$

Donde  $\rho$  es la distancia horizontal al eje del electrodo,  $a$  el radio del anillo bajo consideración y  $z$  la profundidad del anillo.

Para este caso la distribución del potencial es igual a:

$$\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} = \frac{1}{\pi^2\gamma} I_1 \frac{K(k_1)}{(\rho+a_1)} + \frac{1}{\pi^2\gamma} I_2 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(\rho+a_2)^2 + 0,5^2}}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{\pi^2\gamma} \left[ I_1 \frac{K(k_1)}{(\rho+a_1)} + I_2 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(\rho+a_2)^2 + 0,25}} \right] \quad \text{donde} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = D_1/2 = 1,5 \text{ m} \\ a_2 = D_2/2 = 3 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\text{E } I_1 = 0,018670 \varphi_0, \quad I_2 = 0,090370 \varphi_0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación resulta:

$$\varphi_x = \frac{100}{\pi^2} \left[ 0,018670 \varphi_0 \frac{K(k_1)}{(\rho+1,5)} + 0,090370 \varphi_0 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(\rho+3)^2 + 0,25}} \right]$$

$$\text{Donde } k_1 = \frac{2\sqrt{1,5\rho}}{(\rho+1,5)} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{2\sqrt{3\rho}}{\sqrt{(\rho+3)^2 + 0,25}}$$

Para obtener curvas que resulten fieles conviene investigar puntos muy cercanos entre sí en la cercanía del eje del electrodo, aumentando después progresivamente la separación entre ellos. Se determinará el potencial en los puntos:

$$\rho = 0, 0,75, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 6, 8, 10 \quad \text{y} \quad 15 \text{ m}$$

$$\text{Para } \rho = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \varphi_{x1} = 10,6103 \times 0,018670 \varphi_0 = 0,1981 \varphi_0 \\ \varphi_{x2} = 2,6164 \times 0,090370 \varphi_0 = 0,4729 \varphi_0 \end{array} \right.$$

$$\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} = 0,671 \varphi_0$$

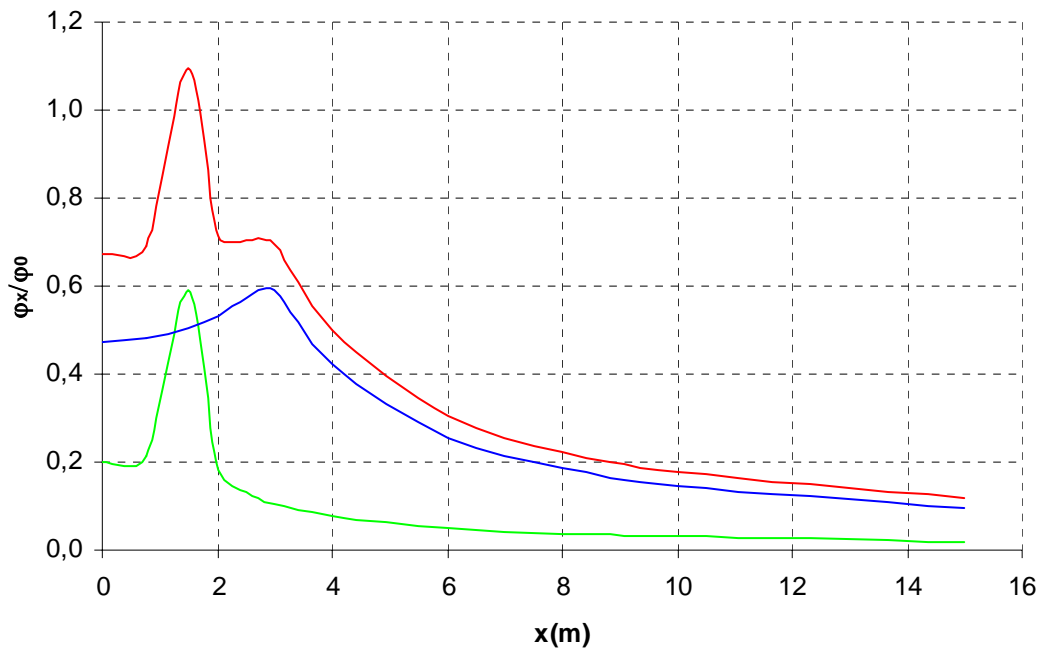
Es decir, que en el punto  $\rho = 0$  el potencial es el 67 % del voltaje de electrodo.

Procediendo de manera similar se obtienen los demás valores los cuales se incluyen en la tabla 15. Con base en tales valores se puede trazar un bosquejo del transcurso del potencial tanto de los anillos individuales como del electrodo múltiple, como se muestra en la figura 85.

Tabla 15 Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple compuesto por dos anillos.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0      | 0,1981         | 0,4729         | 0,6710                        |
| 0,75   | 0,2126         | 0,4797         | 0,6923                        |
| 1,501  | 0,5921         | 0,5026         | 1,0947                        |
| 2      | 0,1807         | 0,5308         | 0,7116                        |
| 2,5    | 0,1325         | 0,5723         | 0,7048                        |
| 3      | 0,1063         | 0,5900         | 0,6963                        |
| 4      | 0,0771         | 0,4224         | 0,4995                        |
| 6      | 0,0503         | 0,2557         | 0,3060                        |
| 8      | 0,0375         | 0,1862         | 0,2236                        |
| 10     | 0,0299         | 0,1470         | 0,1769                        |
| 15     | 0,0199         | 0,0968         | 0,1167                        |

Figura 85. Distribución de potencial del electrodo múltiple compuesto por dos anillos.



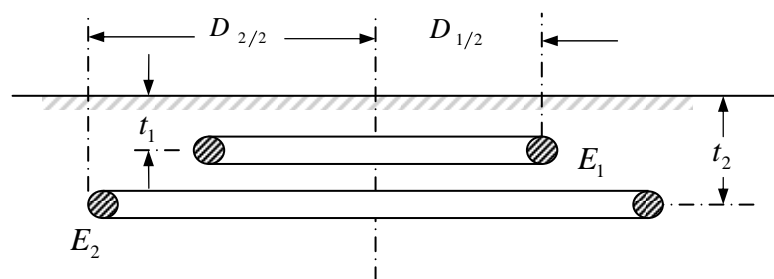
### Observaciones

- 1) Si solo existiera el anillo 1, siguiendo el mismo camino se encuentra que  $R = 26,64 \Omega$  y la distribución del potencial sería como se bosqueja en la figura anterior con línea verde. Es evidente el beneficio que se consigue al agregar el electrodo 2 (línea azul).
- 2) La curva de color rojo corresponde a los anillos 1 y 2 trabajando en paralelo.

Siguiendo un procedimiento similar se pueden dimensionar algunos electrodos múltiples con anillos que se utilizan en casos especiales, por ejemplo cuando se desea una distribución uniforme en toda la zona del electrodo (sin tener que recurrir a una placa), en ciertas clases de subestaciones y centros de cómputo.

Como último ejemplo de arreglo de electrodos en anillo se analizará el electrodo múltiple formado por dos electrodos en anillo enterrados de manera rasante, según se muestra en la figura 86.

Figura 86. Electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.



Datos adicionales:

Anillos de cable de cobre desnudo con diámetro de 0,013 m.

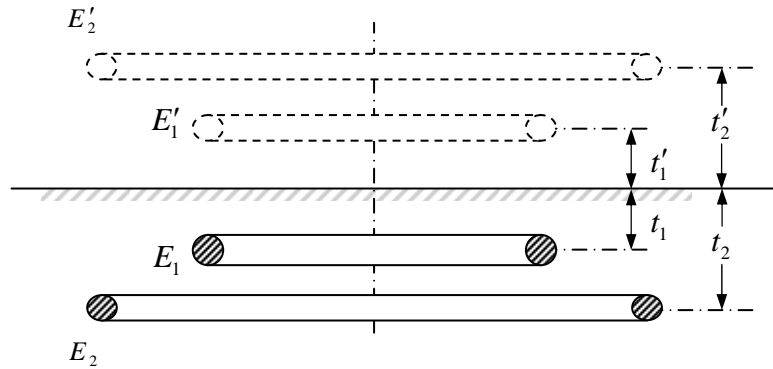
Anillo 1:  $D = 20 \text{ m}$  ; profundidad de enterramiento  $t = 0,75 \text{ m}$

Anillo 2:  $D = 22 \text{ m}$  ; profundidad de enterramiento  $t = 1,5 \text{ m}$

Resistividad del terreno:  $100 \Omega \cdot \text{m}$

Al reflejar al sistema de electrodos resulta el electrodo gemelo mostrado en la figura 87.

Figura 87. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.



El potencial del electrodo múltiple está relacionado por medio del sistema de ecuaciones:

$$I_1(K_{11} + K'_{11}) + I_2(K_{12} + K'_{12}) = \varphi_0$$

$$I_1(K_{21} + K'_{21}) + I_2(K_{22} + K'_{22}) = \varphi_0$$

Cálculo de los factores propios:

$$K_{11} = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \ln\left(8 \frac{D}{d}\right) = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 20} \ln\left(8 \frac{20}{0,013}\right) = 2,3856$$

$$K_{22} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 22} \ln\left(8 \frac{22}{0,013}\right) = 2,1906$$

En este caso por estar colocados los anillos de manera rasante  $K_{11} \neq K'_{11}$  y  $K_{22} \neq K'_{22}$ .

$$z'_{11} = 1,5$$

$$K'_{11} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{D_1^2 + z'_{11}{}^2}} \quad k = \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + z'_{11}{}^2}} \rightarrow K'_{11} = 1,0062$$

$$K_{12} = 1,0152 \quad K'_{12} = 0,8501 \quad K'_{22} = 0,7755$$

$$K_{21} = K_{12} \quad K'_{21} = K'_{12} = 0,8501$$

Sustituyendo los valores en el sistema de ecuaciones se tiene:

$$3,3918I_1 + 1,8653I_2 = \varphi_0$$

$$1,8653 I_1 + 2,9661I_2 = \varphi_0$$

De cuya resolución resulta:  $I_1 = 0,167268 \varphi_0$  ;  $I_2 = 0,231953 \varphi_0$

Valores que satisfacen las condiciones de blindaje y de sus dimensiones.

La resistencia del electrodo múltiple resulta:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,167268 + 0,231953)\varphi_0} = \frac{1}{0,399221} = 2,5 \Omega$$

Distribución de la corriente de electrodo sobre los anillos:

$$I_1 = \frac{0,167268}{0,399221} \times 100 = 41,89 \% \quad ; \quad I_2 = \frac{0,231953}{0,399221} \times 100 = 58,1 \%$$

Distribución del potencial sobre el suelo. Se determinará el potencial en los puntos  $\rho = 0, 5, 9, 10, 10.5, 11, 12, 13, 14, 15$  y  $16 m$  del eje de los electrodos.

En cada punto se ejercerá el potencial inducido por cada uno de los anillos incluyendo a sus imágenes, el cual se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^2\gamma} I \frac{K(k)}{\sqrt{(\rho+a)^2 + z^2}} \quad k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(\rho+a)^2 + z^2}}$$

En este caso  $a_1 = D_1/2 = 10 m$  ;  $a_2 = D_2/2 = 11 m$

El potencial para cualquier punto se calcula así:  $\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2}$

$$\varphi_{x1} = \frac{100}{\pi^2} I_1 \frac{K(k_1)}{\sqrt{(\rho+10)^2 + 0,75^2}} \quad k_1 = \frac{\sqrt{40\rho}}{\sqrt{(\rho+10)^2 + 0,75^2}} \quad I_1 = 0,167268 \varphi_0$$

$$\varphi_{x2} = \frac{100}{\pi^2} I_2 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(\rho+11)^2 + 1,5^2}} \quad k_2 = \frac{\sqrt{44\rho}}{\sqrt{(\rho+11)^2 + 1,5^2}} \quad I_2 = 0,231953 \varphi_0$$

$$\varphi_x = \frac{100}{\pi^2} \left[ 0,167268 \varphi_0 \frac{K(k_1)}{\sqrt{(\rho+10)^2 + 0,75^2}} + 0,231953 \varphi_0 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(\rho+11)^2 + 1,5^2}} \right]$$

Para  $\rho = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{x1} = 0,2654\varphi_0 \\ \varphi_{x2} = 0,3325\varphi_0 \end{array} \right\} \varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} = 0,5979\varphi_0$$

Procediendo de manera similar se obtienen los demás valores, los cuales se presentan en la tabla 16. Con base en tales valores se puede trazar un bosquejo del transcurso del potencial sobre el suelo como se presenta en la figura 88.

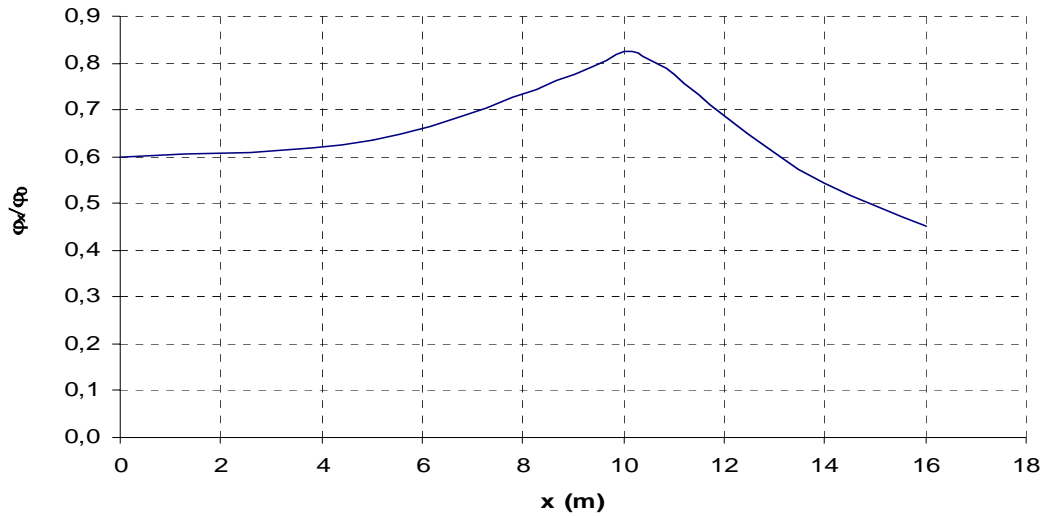
Tabla 16. Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0      | 0,2655         | 0,3325         | 0,5980                        |
| 5      | 0,2843         | 0,3502         | 0,6345                        |
| 9      | 0,3665         | 0,4076         | 0,7740                        |
| 10     | 0,3956         | 0,4297         | 0,8253                        |
| 10,5   | 0,3728         | 0,4365         | 0,8093                        |
| 11     | 0,3396         | 0,4346         | 0,7742                        |
| 12     | 0,2868         | 0,4016         | 0,6885                        |
| 13     | 0,2507         | 0,3574         | 0,6081                        |
| 14     | 0,2242         | 0,3198         | 0,5440                        |
| 15     | 0,2037         | 0,2896         | 0,4932                        |
| 16     | 0,1871         | 0,2651         | 0,4522                        |

*Observaciones*

- 1) Este sistema de electrodos puede ser una de las opciones lógicas para el electrodo de puesta a tierra de una pequeña subestación industrial.
- 2) Este modelo se aplica con (diámetros menores) como electrodo de puesta a tierra de corriente estacionaria (c.a. de 50/60 Hz) en postes, estructuras y/o torres de líneas aéreas, ya que ofrece un buen control de potencial de los electrodos principales (por ejemplo de pica o semiesfera).

Figura 88. Distribución de potencial del electrodo múltiple compuesto por dos anillos colocados de manera rasante.



### 3.2.6 Electrodo Múltiple con Semiesfera y Anillo.

En esta clase de electrodo compuesto como los demás, se debe considerar la influencia propia y la recíproca de los electrodos elementales que hacen parte del arreglo para el establecimiento del sistema de ecuaciones lineales que relaciona su potencial. En la figura 89 se muestra la disposición física de esta clase de electrodo, que al aplicarle el principio de la imagen reflejada origina el electrodo gemelo que se muestra en la figura 90.

Figura 89. Electrodo múltiple con semiesfera y anillo.

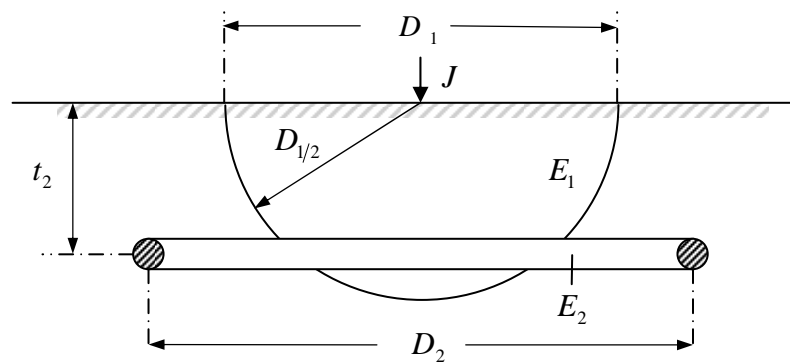
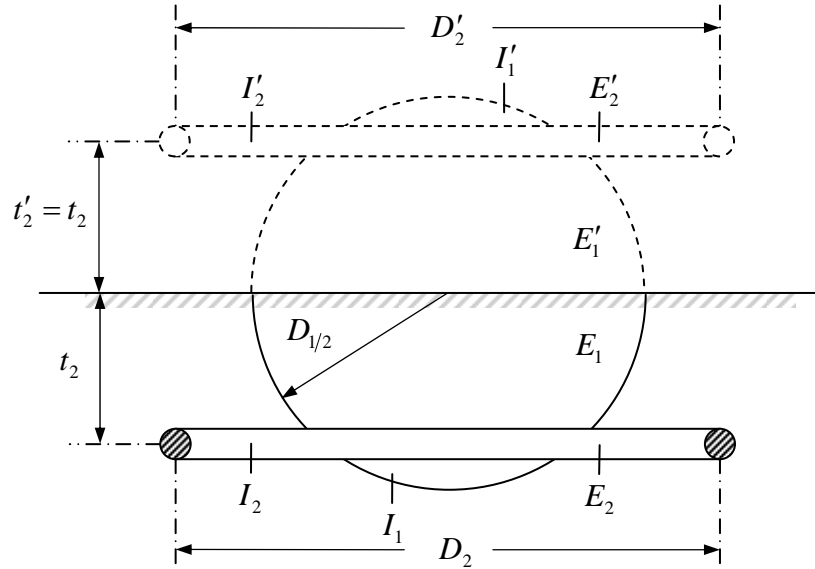


Figura 90. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple con semiesfera y anillo.



El sistema de ecuaciones simultáneas que relaciona el potencial del electrodo múltiple es entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_{11} + \varphi'_{11} + \varphi_{12} + \varphi'_{12} = I_1 K_{11} + I'_1 K'_{11} + I_2 K_{12} + I'_2 K'_{12} \\ \varphi_2 &= \varphi_{21} + \varphi'_{21} + \varphi_{22} + \varphi'_{22} = I_1 K_{21} + I'_1 K'_{21} + I_2 K_{22} + I'_2 K'_{22}\end{aligned}$$

Simplificada por razones de simetría, queda así:

$$\begin{aligned}2I_1 K_{11} + 2I_2 K_{12} &= \varphi_0 \\ 2I_1 K_{21} + I_2 (K_{22} + K'_{22}) &= \varphi_0\end{aligned}$$

Considerando que  $K_{11} = K'_{11}$ ;  $K_{12} = K'_{12}$ ;  $K_{21} = K'_{21}$ ; pero  $K_{22} \neq K'_{22}$

Donde  $K_{11}$  se obtiene de la expresión del potencial del electrodo esférico, esto es

$$K_{11} = \frac{\rho}{2\pi D_1} \text{ siendo } D_1 \text{ el diámetro de la esfera.}$$

El potencial ejercido por la esfera en un punto  $s$  cualquiera es  $\varphi_{s1} = I_1 \frac{\rho}{2\pi D_1 \cdot r}$  siendo  $r$  la

distancia del punto al centro de la esfera, luego  $\varphi_{21}$  es igual a:

$$\varphi_{21} = 2I_1 \frac{\rho}{4\pi \sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}} \quad \text{luego} \quad K_{21} = \frac{\rho}{4\pi \sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}}$$

La contribución de potencial del anillo sobre la esfera, es decir  $\varphi_{12}$ , se determina evaluando el potencial del anillo en el centro de la esfera. Por simetría la contribución del anillo real y del ficticio son iguales luego  $K_{12} = K'_{12}$ .  $\varphi_{12}$  es por lo tanto:

$$\varphi_{12} = \frac{\rho}{2\pi^2} I_2 \frac{K(k)}{\sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}} \quad k=0 \rightarrow K(k) = \pi/2$$

$$\varphi_{12} = \frac{\rho}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{I_2}{\sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{I_2}{\sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}}$$

$$\text{Luego } K_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + t^2}} \quad K_{12} = K'_{12}$$

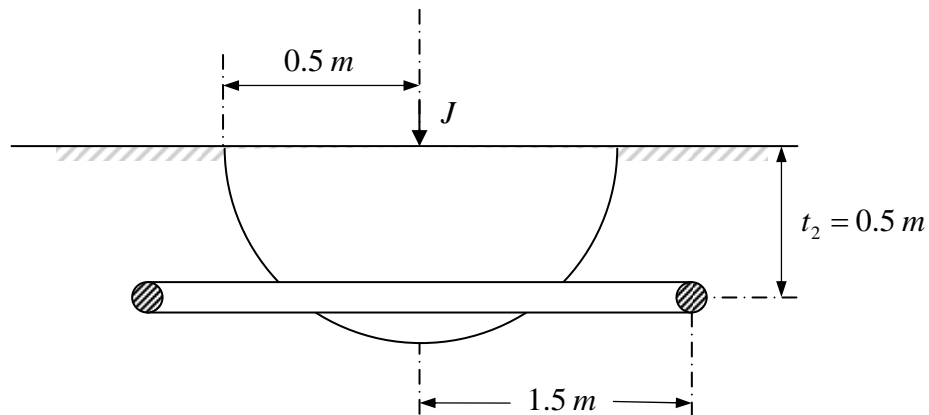
$$K_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2 D_2} \ln\left(8 \frac{D_2}{d}\right) \quad K'_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{D_2^2 + (2t)^2}} \quad k = \frac{D_2}{\sqrt{D_2^2 + (2t)^2}}$$

Determinado el conjunto solución del sistema lineal de ecuaciones, se calcula como siempre la resistencia del electrodo múltiple, la distribución de la corriente, el voltaje de electrodo y la distribución del potencial en la vecindad del electrodo compuesto.

Como ejemplo se realizará el análisis del electrodo múltiple integrado por un electrodo semiesférico y un electrodo en anillo como se muestra en la figura 91 y los datos:

$$D_1 = 1 \text{ m}, D_2 = 3 \text{ m}; d = 0.015 \text{ m}, \rho = 100 \Omega\text{-m}, J = 50 \text{ A}$$

Figura 91. Ejemplo de electrodo múltiple con semiesfera y anillo



El sistema de ecuaciones que relaciona el potencial es:

$$2I_1K_{11} + 2I_2K_{12} = \varphi_0$$

$$2I_1K_{21} + I_2(K_{22} + K'_{22}) = \varphi_0$$

Al aplicar el principio de reflexión resulta el electrodo gemelo mostrado en la figura 90.

Factores propios:

$$K_{11} = \frac{\rho}{2\pi D_1} = \frac{100}{2\pi \cdot 1} = 15,9154 \quad K_{22} = 12,4587$$

Factores mutuos:

$$K_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1,5^2 + 0,5^2}} = 5,0329 \quad K_{21} = \frac{100}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1,5^2 + 0,5^2}} = 5,0329$$

$$K'_{22} = \frac{100}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \quad k = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 0,9486 \rightarrow K'_{22} = 4,1302$$

El sistema de ecuaciones por resolver es:

$$31,8309I_1 + 10,0658I_2 = \varphi_0$$

$$10,0658I_1 + 16,5889I_2 = \varphi_0$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,015286 \varphi_0 ; I_2 = 0,051 \varphi_0 \quad I_2 > I_1 \quad \text{lo cual está de acuerdo con las condiciones de blindaje y la geometría.}$$

La resistencia del electrodo múltiple:

$$R_0 = \frac{\varphi_0}{(0,015286 + 0,051)\varphi_0} = \frac{1}{0,066286} = 15,08 \Omega$$

Distribución de la corriente en los electrodos individuales

$$I_1 = \frac{0,015286}{0,066286} \times 100 = 23,06 \% (11,53 A); I_2 = \frac{0,051}{0,066286} \times 100 = 76,93 \% (38,46 A)$$

$$\text{Voltaje de electrodo: } V_0 = 15,08 \Omega \times 50 A = 754 V$$

La distribución del potencial sobre el suelo:

Se calculará el valor del potencial en los puntos  $x = 0,5, 1, 1,2, 1,4, 1,5, 1,6, 1,8, 2, 3, 4, 8$  y  $10 m$  a partir del eje vertical que pasa por el centro del electrodo esférico (sistema reflejado).

$$\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2}$$

La expresión general de cálculo, en el caso del electrodo esférico es:

$$\varphi_{x1} = 2I_1 \frac{\rho}{4\pi x} \text{ así que } \varphi_{x1} = 2 \times 0,015286 \varphi_0 \frac{100}{4\pi x} = 0,2432 \varphi_0 \frac{1}{x} \text{ o bien } \frac{\varphi_{x1}}{\varphi_0} = 0,2432 \cdot \frac{1}{x}$$

La expresión de cálculo para el electrodo en anillo es:

$$\varphi_{x2} = \frac{\rho}{\pi^2} I_2 \frac{K(k)}{\sqrt{(x + D_2/2)^2 + t^2}} \quad k = \frac{\sqrt{4 \cdot \frac{D_2}{2} \cdot x}}{\sqrt{(x + D_2/2)^2 + t^2}} \quad I_2 = 0,051 \varphi_0$$

$$\varphi_{x2} = \frac{100}{\pi^2} \times 0,051 \varphi_0 \frac{K(k)}{\sqrt{(x + 1,5)^2 + 0,5^2}} = 0,5167 \varphi_0 \frac{K(k)}{\sqrt{(x + 1,5)^2 + 0,25}}$$

$$k = \frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{(x + 1,5)^2 + 0,25}}$$

Por ejemplo, para el punto  $x = 0,5$ , la contribución del electrodo 1 sería:  $\frac{\varphi_{x1}}{\varphi_0} = 0,4864$

Y la contribución del electrodo 2:

$$\frac{\varphi_{x2}}{\varphi_0} = 0,5167 \frac{K(k)}{\sqrt{(0,5 + 1,5)^2 + 0,25}} \quad k = \frac{\sqrt{6 \times 0,5}}{\sqrt{(0,5 + 1,5)^2 + 0,25}} = 0,8401$$

$$\frac{\varphi_{x2}}{\varphi_0} = 0,5223 \quad \varphi_x = 0,4864 + 0,5223 = 1,0087 \varphi_0$$

Como era de esperarse ya que ese punto está en el borde del electrodo semiesférico.

Procediendo de manera similar para los demás puntos de interés se obtienen los demás valores, los cuales se incluyen en la tabla 17. Con estos valores se puede trazar un bosquejo del transcurso del potencial como se muestra en la figura 92.

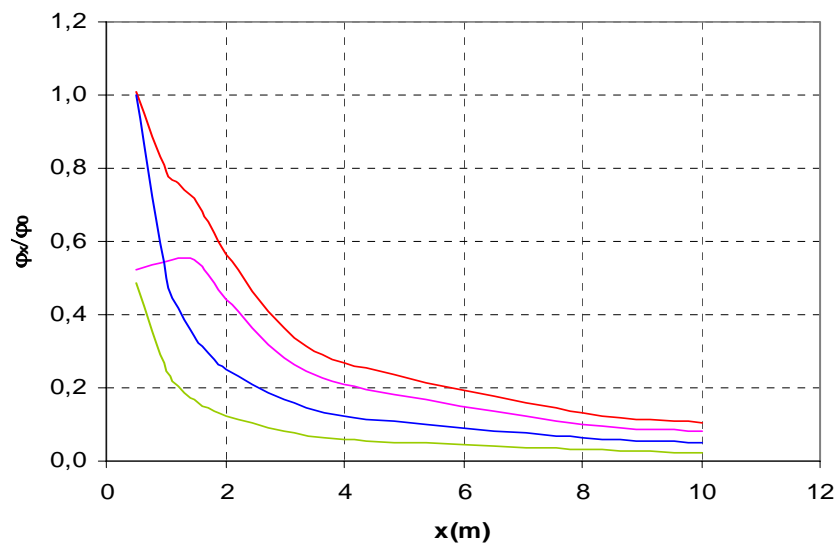
En la gráfica se puede ver el efecto benéfico del anillo de control; la curva de color azul representa la distribución del potencial del electrodo 1 si no existiera el anillo; la curva de color verde muestra la distribución del potencial del electrodo 1 trabajando en paralelo; la curva de color violeta corresponde a la distribución del potencial del electrodo 2 trabajando en paralelo; y la curva roja representa la distribución del potencial resultante del electrodo

múltiple. Se observa claramente como han disminuido los voltajes de cuerpo en la cercanía del electrodo 1.

Tabla 17. Cálculo del potencial a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple con semiesfera y anillo.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0,5    | 0,4864         | 0,5224         | 1,0088                        |
| 1      | 0,2432         | 0,5476         | 0,7908                        |
| 1,2    | 0,2027         | 0,5566         | 0,7593                        |
| 1,4    | 0,1737         | 0,5540         | 0,7278                        |
| 1,5    | 0,1621         | 0,5448         | 0,7069                        |
| 1,6    | 0,1520         | 0,5297         | 0,6817                        |
| 1,8    | 0,1351         | 0,4873         | 0,6224                        |
| 2      | 0,1216         | 0,4408         | 0,5624                        |
| 3      | 0,0811         | 0,2836         | 0,3647                        |
| 4      | 0,0608         | 0,2085         | 0,2693                        |
| 8      | 0,0304         | 0,1021         | 0,1325                        |
| 10     | 0,0243         | 0,0815         | 0,1058                        |

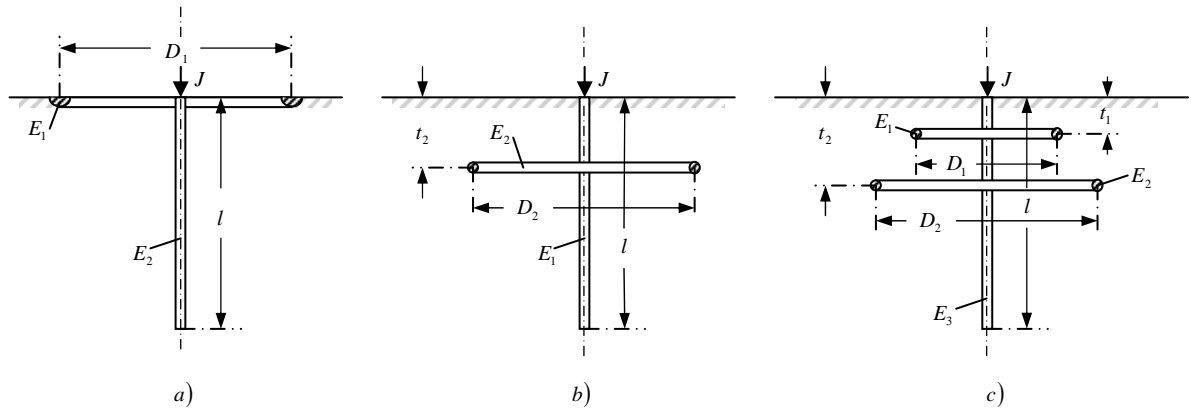
Figura 92. Distribución de potencial del electrodo compuesto de semiesfera y anillo.



### 3.2.7 Electrodo Compuesto de Pica y Anillo(s)

Este electrodo puede adoptar varias configuraciones como por ejemplo, las que se muestran en la figura 93, según las necesidades particulares de control de la distribución del potencial que se requieran. Esta clase de arreglo de electrodos se utiliza en postes de líneas aéreas de tensión media ubicadas en zonas pobladas y en ciertas torres de líneas de alta y extra-alta tensión que pasan sobre zonas agrícolas y en algunos casos especiales.

Figura 93. Posibles configuraciones del electrodo múltiple de pica y anillo.



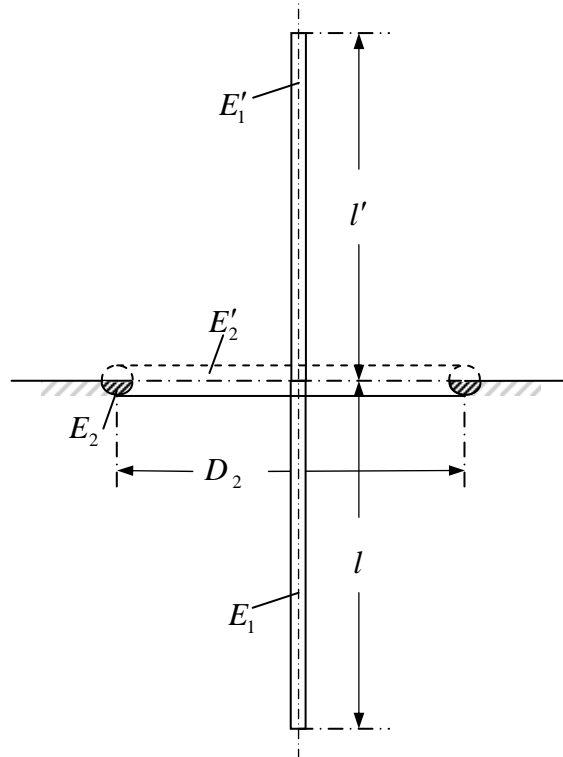
Se trata de un electrodo principal de pica que aunque por si solo puede satisfacer los requisitos de la puesta a tierra de servicio, en muchos casos requiere un control de la distribución del potencial en su vecindad, con el fin de poder garantizar la seguridad de los seres vivos (contra elevados voltajes de cuerpo). Como se ha visto en otros arreglos de electrodos esta medida puede también conseguir una importante reducción de la resistencia del sistema de tierra, así como de la carga de corriente del electrodo principal.

El análisis se hará primero para el modelo más sencillo, esto es, un electrodo de pica con sólo un anillo de control colocado de manera superficial, como el mostrado en la figura 93 a).

Cuando se refleja este arreglo de electrodos se obtiene un electrodo gemelo como el mostrado en la figura 94, sumergido en un terreno homogéneo e ilimitado por todos lados,

emitiendo la corriente  $2J$ . Tales electrodos, aún sin estar unidos físicamente entre sí, trabajan en paralelo, ya que el anillo al quedar ubicado en una línea equipotencial de forma circular del electrodo de pica toma entonces su potencial.

Figura 94. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo de pica con sólo un anillo de control colocado de manera superficial.



El potencial del electrodo múltiple está relacionado por medio del siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\varphi_{11} + \varphi'_{11} + \varphi_{12} + \varphi'_{12} = \varphi_0$$

$$\varphi_{21} + \varphi'_{21} + \varphi_{22} + \varphi'_{22} = \varphi_0$$

En este caso particular se reduce a:

$$2I_1 K_{11} + 2I_2 K_{12} = \varphi_0$$

$$2I_1 K_{21} + 2I_2 K_{22} = \varphi_0$$

En cuanto al electrodo de pica, el potencial propio del electrodo gemelo, con longitud  $l + l' = 2l$  es expresado, como se sabe, por medio de:

$$\varphi_{11} = 2I_1 \frac{\rho}{4\pi l} \ln \frac{4l}{d}$$

Y la contribución de potencial del electrodo de pica sobre el electrodo en anillo, se calcula por medio de expresión:

$$\varphi_{21} = 2I_1 \frac{\rho}{8\pi l} \ln K_{21} \quad ; \quad \text{con } \ln K_{21} = \ln \frac{\sqrt{m_{21}^2 + 1} + 1}{\sqrt{m_{21}^2 + 1} - 1} \quad \text{y } m_{21} = D_2/2l$$

Para el electrodo en anillo, el potencial propio se calcula por medio de:

$$\varphi_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2 D_2} 2I_2 \ln \left( 8 \frac{D_2}{d_2} \right)$$

La contribución del potencial del electrodo de anillo con sección transversal circular sobre el electrodo de pica con longitud con longitud  $2l$ , se determina, en relación con la figura 95. Al pasar el electrodo de pica por el eje central  $z-z$  del anillo, una sección cualquiera  $dz$  localizada sobre el electrodo de pica a la distancia  $z$ , a partir de su punto medio, tiene la misma distancia  $S$  a todos los puntos del electrodo en anillo, la cual según la figura anterior es:  $S = \sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}$

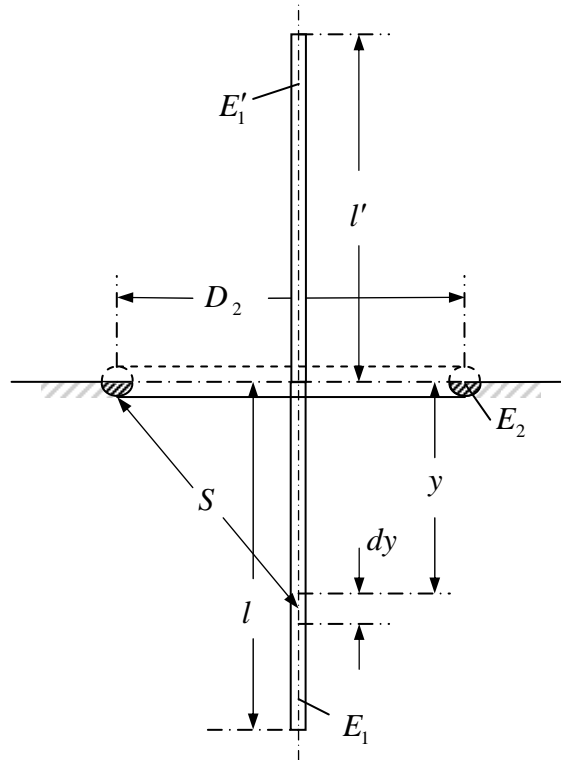
Por lo tanto, la influencia total del anillo sobre uno de tales puntos, esto es, el potencial del punto en cuestión es:

$$\varphi_{z2} = \frac{\rho}{2\pi^2} 2I_2 \frac{K(k)}{\sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}} \quad k = \frac{4az}{\sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}} \quad \rho = 0 \rightarrow k = 0$$

$$K(0) = \pi/2 \rightarrow \varphi = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{\pi}{2} \cdot 2I_2 \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}} = \frac{\rho}{4\pi} \cdot 2I_2 \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}}$$

Puesto que  $z$  toma todos los valores desde  $-l$  hasta  $+l$ , todos los puntos sobre el eje central en el cual está situado el electrodo de pica adquieren potencial diferente. Si se asume ahora que el anillo conduzca corriente, sin que esté unido al electrodo de pica y sin que este se cargue con corriente, entonces la pica tomará un potencial medio resultante de todas las contribuciones de potencial calculadas con base en la expresión anterior. A causa de ello también varía la forma de la configuración de las corrientes que el anillo antes produjo ya que, sin duda, la pica establece una unión conductora entre los puntos que están en su ámbito, los cuales tendrían un potencial diferente sin el electrodo de pica.

Figura 95. Esquema para la determinación de la contribución de potencial del electrodo en anillo sobre el electrodo de pica.



La magnitud del potencial medio se obtiene integrando la ecuación anterior sobre toda la longitud, es decir:

$$\bar{\varphi} = (2I_2) \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{(D_2/2)^2 + z^2}} = (2I_2) \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + l^2} + l}{\sqrt{(D_2/2)^2 + l^2} - l}$$

Que con  $m = D_2/2l$  queda:

$$\varphi_{12} = \frac{\rho}{8\pi l} 2I_2 \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1^2} + 1}{\sqrt{m^2 + 1^2} - 1} = 2I_2 \frac{\rho}{8\pi l} \ln K_{12}$$

Cuya forma es semejante a la de un electrodo de pica. Por lo tanto el sistema de ecuaciones simultáneas que relaciona el potencial del electrodo múltiple queda expresado como sigue:

$$\frac{\rho}{4\pi l} 2I_1 \ln \left( \frac{4l}{d_1} \right) + \frac{\rho}{8\pi l} 2I_2 \ln K_{12} = \varphi_0$$

$$\frac{\rho}{8\pi l} 2I_1 \ln K_{21} + \frac{\rho}{2\pi^2 D_2} 2I_2 \ln \left( 8 \frac{D_2}{d_2} \right) = \varphi_0$$

A partir del sistema de ecuaciones se determinan las corrientes en cada uno de los electrodos individuales, con lo cual se puede calcular la resistencia del electrodo múltiple por medio de la relación:  $R = \varphi_0 / J$

La distribución del potencial sobre el suelo se determina con base en las expresiones ya conocidas para cada tipo de electrodo individual y su correspondiente corriente. Por

ejemplo para el electrodo de pica se conoce ya la expresión  $\varphi_{x1} = I_1 \frac{\rho}{4\pi l} \ln K_{x1}$  con

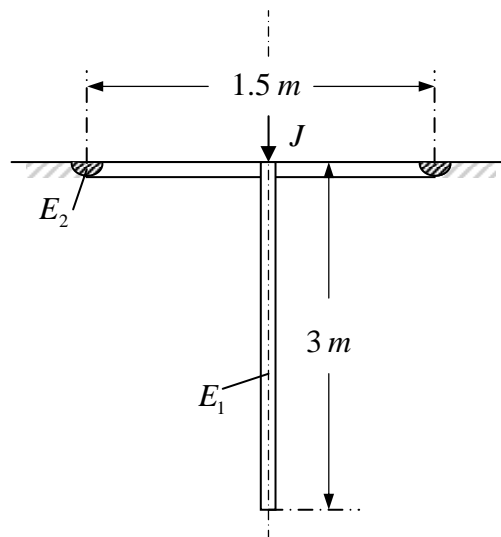
$m_{x1} = x/l$  e  $I_1$  en función de  $\varphi_0$

Para el caso del anillo

$$\varphi_{x2} = \frac{\rho}{2\pi^2} 2I_2 \frac{K(k)}{(x + D_2/2)} \quad k = \frac{\sqrt{2D_2 \cdot x}}{(x + D_2/2)}$$

Como ejemplo se analizará el electrodo múltiple integrado por un electrodo de pica y un electrodo en anillo, según la figura 96 y los datos: De la pica, longitud 3 m diámetro 0.05 m; del anillo, diámetro 1,5 m y diámetro de su sección transversal 0.0116 m;  $\rho = 100 \Omega \cdot m$ ;  $J = 10 A$

Figura 96. Ejemplo de electrodo múltiple de pica y anillo



El potencial de electrodo está relacionado por medio del sistema de ecuaciones:

Factores propios

$$K_{11} = \frac{100}{4\pi \cdot 3} \ln \frac{4 \times 3}{0,05} = 14,5378 ; K_{22} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 1,5} \ln \left( 8 \frac{1,5}{0,0116} \right) = 23,4445$$

Factores mutuos

$$K_{12} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(1,5/6)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(1,5/6)^2 + 1} - 1} = 5,5563 \quad \text{con } m = D_2/2l = 1,5/6 = 0,25$$

$$K_{21} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(1,5/6)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(1,5/6)^2 + 1} - 1} = 5,5563 \quad \text{con } m = D_2/2l = 1,5/6 = 0,25$$

El sistema por resolver es entonces:

$$29,0756I_1 + 11,1126I_2 = \varphi_0$$

$$11,1126I_1 + 46,889I_2 = \varphi_0$$

De cuya resolución se obtiene:  $I_1 = 0,028855\varphi_0$  ;  $I_2 = 0,014488 \varphi_0$

Resistencia del electrodo múltiple:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,028855 + 0,014488)\varphi_0} = \frac{1}{0,043343} = 23,07 \Omega$$

El voltaje de electrodo:  $V_0 = 23,07 \Omega \times 10 A = 230,7 V$

La distribución de la corriente en los electrodos individuales:

$$I_1 = \frac{0,028855}{0,043343} \times 100 = 66,57 \% \quad (6,65 A) ; \quad I_2 = \frac{0,014488}{0,043343} \times 100 = 33,42 \% \quad (3,34 A)$$

Distribución del potencial sobre el suelo. Se determinará el potencial en los puntos  $x = 0, 0,5, 0,75, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 5, 6, 7$  y  $8 m$  a partir del eje central del electrodo.

La contribución del electrodo de pica:

$$\varphi_{x1} = 2 \times 0,028855 \varphi_0 \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad \text{con } m = x/3$$

$$\varphi_{x1} = 0,0765 \varphi_0 \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1}$$

La contribución del anillo

$$\varphi_{x2} = \frac{\rho}{2\pi^2} 2I_2 \frac{K(k)}{(x + D_2/2)} \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{2D_2 \cdot x}}{(x + D_2/2)}$$

$$D_2 = 1.5 \text{ m} \quad I_2 = 0,014488 \varphi_0$$

$$\varphi_{x2} = \frac{100}{2\pi^2} \times 2 \times 0,014488 \varphi_0 \frac{K(k)}{(x+0,75)} \quad k = \frac{\sqrt{3x}}{x+0,75}$$

$$\varphi_{x2} = 0,1467 \varphi_0 \frac{K(k)}{(x+0,75)} \quad k = \frac{\sqrt{3x}}{x+0,75}$$

Por ejemplo, para el punto  $x = 0$ , se tiene:

$\varphi_{x1}$  es el potencial propio del electrodo de pica, esto es:

$$\varphi_{x1} = 0,0765 \ln \frac{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} - 1} = 0,7324 \varphi_0$$

$$\text{La contribuci3n del anillo: } \varphi_{x2} = 0,1467 \varphi_0 \times \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{0,75} = 0,3072 \varphi_0$$

$$\text{Por lo tanto } \varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} = (0,7324 + 0,3072)\varphi_0 = 1,0396 \varphi_0 \approx \varphi_0$$

En la tabla 18 se incluyen todos los valores relacionados. Con base en estos datos es posible bosquejar el transcurso de la distribuci3n del potencial, como se muestra en la figura 97. La curva de color azul representa la del electrodo de pica cuando est1 solo y la curva verde cuando trabaja en paralelo; la curva de color violeta la del anillo trabajando solo y la curva roja la del electrodo m1ltiple.

Del an1lisis de los valores obtenidos de  $R$  y de las curvas de la distribuci3n de potencial, se deduce que los beneficios no son muy importantes; en la pr1ctica, para obtener una mejora en ambas cuestiones, el anillo (o anillos) son de di1metro mayor y se colocan enterrados (entre 0,5 y 1 m) como se ver1 en el siguiente ejemplo.

Analizar el mismo sistema de electrodos excepto que el anillo est1 colocado a una profundidad de 0,5 m como se muestra en la figura 98.

Al aplicar el principio de reflexi3n resulta el electrodo gemelo como se observa en la figura 99.

El sistema de ecuaciones por resolver es en este caso:

$$2I_1 K_{11} + I_2 (K_{12} + K'_{12}) = \varphi_0$$

$$2I_1 K_{21} + I_2 (K_{22} + K'_{22}) = \varphi_0$$

Tabla 18. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y anillo.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0,05   | 0,7329         | 0,3078         | 1,0407                        |
| 0,5    | 0,3814         | 0,3542         | 0,7356                        |
| 0,756  | 0,3195         | 0,6737         | 0,9932                        |
| 1      | 0,2784         | 0,2805         | 0,5589                        |
| 1,5    | 0,2210         | 0,1650         | 0,3860                        |
| 2      | 0,1829         | 0,1197         | 0,3026                        |
| 2,5    | 0,1555         | 0,0944         | 0,2499                        |
| 3      | 0,1349         | 0,0781         | 0,2130                        |
| 4      | 0,1061         | 0,0582         | 0,1643                        |
| 5      | 0,0871         | 0,0464         | 0,1335                        |
| 6      | 0,0737         | 0,0386         | 0,1122                        |
| 7      | 0,0637         | 0,0330         | 0,0968                        |

Figura 97. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y anillo

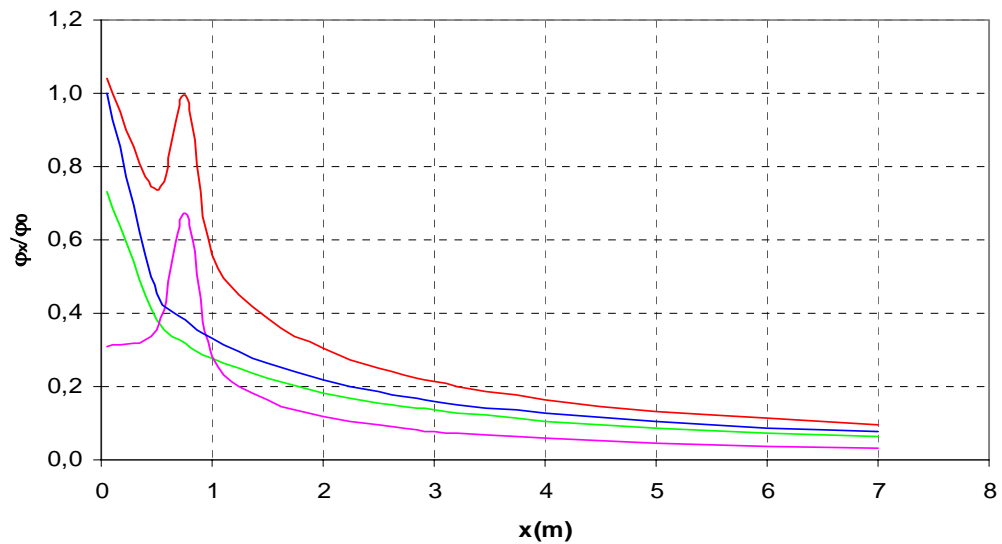


Figura 98. Ejemplo de electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante.

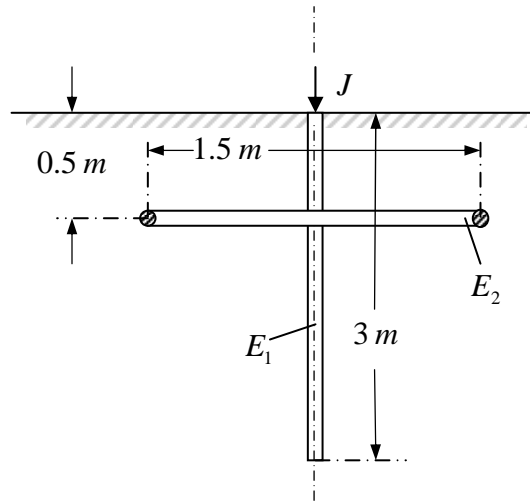
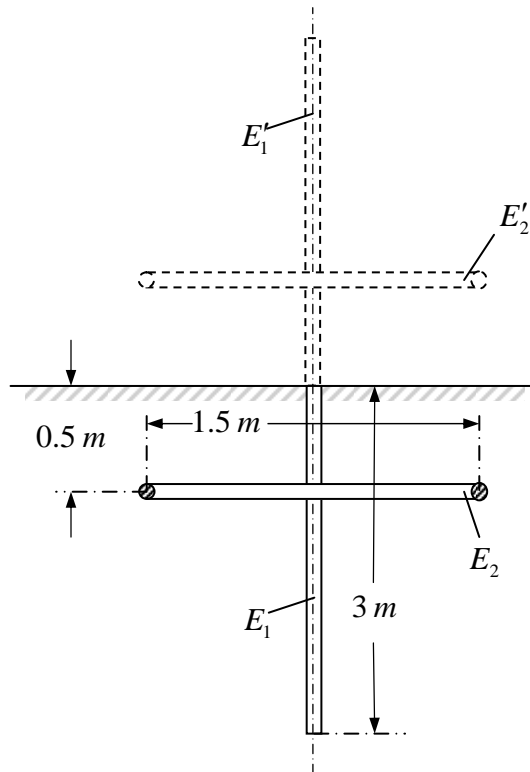


Figura 99. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de pica y anillo de control colocado de manera rasante.



Los factores propios:

$$K_{11} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln \left( \frac{4l}{d_1} \right) \quad K_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2 D_2} \ln \left( 8 \frac{D_2}{d_2} \right)$$

$$K'_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{(D_2/2 + D_2/2)^2 + (2t)^2}} \quad k = \frac{D_2}{\sqrt{(D_2/2 + D_2/2)^2 + (2t)^2}}$$

$$K'_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{D_2^2 + 4t^2}} \quad k = \frac{D_2}{\sqrt{D_2^2 + 4t^2}}$$

Los factores recíprocos: De la figura 99.

$$\varphi_{z2} = I_2 \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(0)}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z+t)^2}} \quad \text{en este caso } k=0 \text{ ya que } \rho=0 \text{ y } K(0)=\pi/2$$

$$\varphi_{z2} = I_2 \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z+t)^2}} = \frac{\rho}{4\pi} I_2 \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z+t)^2}}$$

Dependiendo del valor de  $z$  los diferentes puntos del electrodo de pica tendrán un potencial diferente. El potencial promedio será:

$$\overline{\varphi}_{z2} = \frac{\rho}{4\pi} I_2 \cdot \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z+t)^2}} = \frac{\rho}{8\pi l} I_2 \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} + l+t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (-l+t)^2} - l+t}$$

$$K_{12} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} + l+t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (-l+t)^2} - l+t}$$

De la misma forma

$$\varphi'_{z2} = I_2 \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z-t)^2}} \quad \overline{\varphi}'_{z2} = I_2 \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (z-t)^2}}$$

$$\overline{\varphi}'_{z2} = \frac{\rho}{8\pi l} I_2 \cdot \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l-t)^2} + l-t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (-l-t)^2} - l-t} = \frac{\rho}{8\pi l} I_2 \cdot \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l-t)^2} + l-t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} - l-t}$$

Luego

$$K'_{12} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l-t)^2} + l-t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} - l-t}$$

$$\varphi_{21} = 2I_1 \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (y+l)^2} + y+l}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2} + y-l} \quad \text{en este caso } x = D_2/2 \quad y \quad y = -t$$

$$\varphi_{21} = 2I_1 \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l-t)^2} + l-t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} - l-t}$$

$$\text{Por lo tanto } K_{21} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l-t)^2} + l-t}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t)^2} - l-t}$$

Para este ejemplo los factores son:

Factores propios

$$K_{11} = \frac{100}{4\pi \cdot 3} \ln \left( \frac{4 \times 3}{0,05} \right) = 14,5378 \quad K_{22} = \frac{100}{2\pi^2 \cdot 1,5} \ln \left( 8 \frac{1,5}{0,0116} \right) = 23,4445$$

Factores mutuos

$$K'_{22} = \frac{100}{4\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{1,5^2 + 1^2}} = 5,8006 \quad K_{12} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(1,5/2)^2 + (3+0,5)^2} + 3+0,5}{\sqrt{(1,5/2)^2 + (-3+0,5)^2} - 3+0,5} = 5,5223$$

$$K'_{12} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(1,5/2)^2 + (3-0,5)^2} + 3-0,5}{\sqrt{(1,5/2)^2 + (3+0,5)^2} - 3-0,5} = 5,5223$$

$$K_{21} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(1,5/2)^2 + (3-0,5)^2} + 3-0,5}{\sqrt{(1,5/2)^2 + (3+0,5)^2} - 3-0,5} = 5,5223$$

El sistema de ecuaciones por resolver es:

$$29,0756I_1 + 11,0446I_2 = \varphi_0$$

$$11,0446I_1 + 26,3445I_2 = \varphi_0$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,024989\varphi_0 \quad ; \quad I_2 = 0,024756 \varphi_0$$

La resistencia del electrodo múltiple

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,024989 + 0,024756)\varphi_0} = \frac{1}{0,049745} = 20,1 \Omega$$

El voltaje de electrodo

$$V_0 = 20,1 \Omega \times 10 A = 201 V$$

La distribución de la corriente en los electrodos individuales

$$I_1 = \frac{0,024989}{0,049745} \times 100 = 50,23 \% \quad (5,023 \text{ A})$$

$$I_2 = \frac{0,024756}{0,049745} \times 100 = 49,76 \% \quad (4,97 \text{ A})$$

La distribución del potencial sobre el suelo: como antes se determinará el potencial para los puntos  $x = 0, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 7$  y  $8 \text{ m}$  a partir del eje central del electrodo.

La contribución del electrodo de pica:

$$\varphi_{x1} = 2 \times 0,024989 \varphi_0 \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad \text{con } m = x/l = x/3$$

$$\varphi_{x1} = 0,066285 \varphi_0 \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1}$$

La contribución del anillo

$$\varphi_{x2} = 2 \times 0,024756 \varphi_0 \frac{100}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{(x+0,75)^2 + 0,5^2}} \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{(x+0,75)^2 + 0,25}}$$

$$\varphi_{x2} = 0,2508 \varphi_0 \frac{K(k)}{\sqrt{(x+0,75)^2 + 0,25}} \quad k = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{(x+0,75)^2 + 0,25}}$$

Por ejemplo, para el punto  $x = 0$  ( en el eje del electrodo 1), se tiene:

$\varphi_{x1}$  es el potencial propio del electrodo de pica  $\varphi_0$

$$\varphi_{x1} = 0,066285 \varphi_0 \ln \frac{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} - 1} = 0,6346 \varphi_0$$

$$\varphi_{x2} = 0,2508 \varphi_0 \frac{K(k)}{\sqrt{0,75^2 + 0,25}} \quad k = 0 \quad K(0) = \pi/2$$

$$\varphi_{x2} = 0,4371 \varphi_0$$

Luego el potencial en el punto  $x = 0$  es:

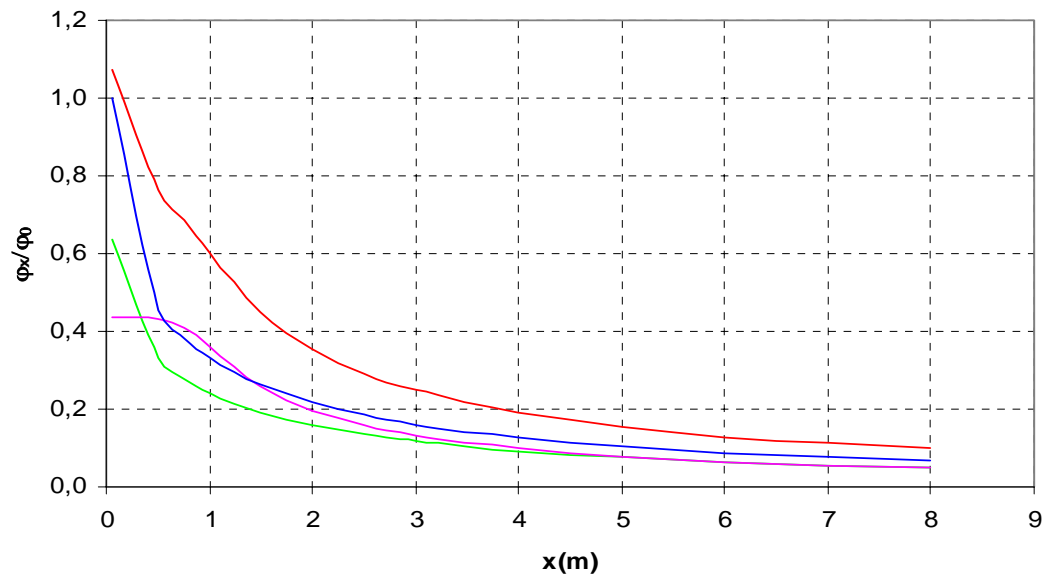
$$\varphi_x = (0,6346 + 0,4371) \varphi_0 = 1,0717 \varphi_0 \approx \varphi_0$$

En la tabla 19 se incluyen todos los valores relacionados. Con ellos es posible trazar el transcurso del potencial, como se muestra en la figura 100.

Tabla 19. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 0,05   | 0,6347         | 0,4371         | 1,0718                        |
| 0,5    | 0,3303         | 0,4331         | 0,7635                        |
| 0,75   | 0,2777         | 0,4089         | 0,6866                        |
| 1      | 0,2411         | 0,3590         | 0,6001                        |
| 1,5    | 0,1914         | 0,2590         | 0,4504                        |
| 2      | 0,1584         | 0,1965         | 0,3549                        |
| 2,5    | 0,1347         | 0,1576         | 0,2923                        |
| 3      | 0,1168         | 0,1314         | 0,2482                        |
| 4      | 0,0919         | 0,0985         | 0,1904                        |
| 5      | 0,0754         | 0,0788         | 0,1542                        |
| 6      | 0,0638         | 0,0657         | 0,1295                        |
| 7      | 0,0552         | 0,0563         | 0,1115                        |
| 8      | 0,0486         | 0,0493         | 0,0979                        |

Figura 100. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y anillo colocado de manera rasante a una profundidad de 0.5 m .



Del análisis de los valores obtenidos de  $R$  y de las curvas de la distribución de potencial de los dos ejemplos anteriores se observa que la magnitud de la resistencia y la distribución del potencial del electrodo múltiple son más favorables en el caso del anillo enterrado a una profundidad de 0,5 m.

A continuación se analizará el caso de un electrodo múltiple compuesto por un electrodo de pica y dos anillos, según se muestra en la figura 101.

Datos adicionales:

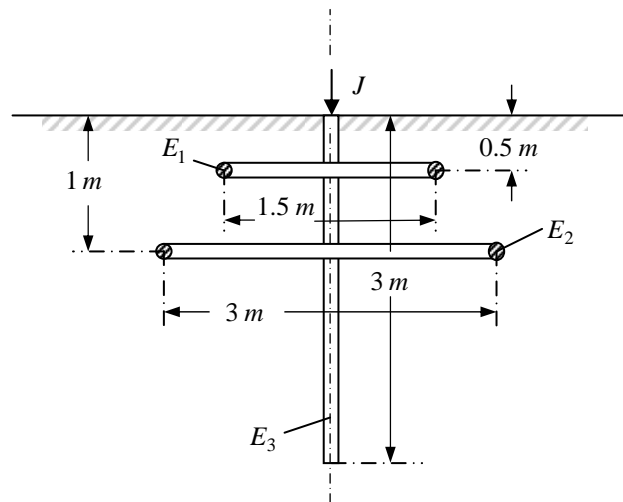
Longitud de la pica: 3 m, diámetro de la sección transversal: 0,05 m

Diámetro anillo 1: 1,5 m, diámetro sección transversal: 0,0116 m, profundidad: 0,5 m

Diámetro anillo 2: 3 m, diámetro de la sección transversal 0,0116 m, profundidad: 1 m

Al aplicar el principio de reflexión resulta el electrodo gemelo como se observa en la figura 102.

Figura 101. Electrodo múltiple de pica y dos anillos de control colocados de manera rasante.



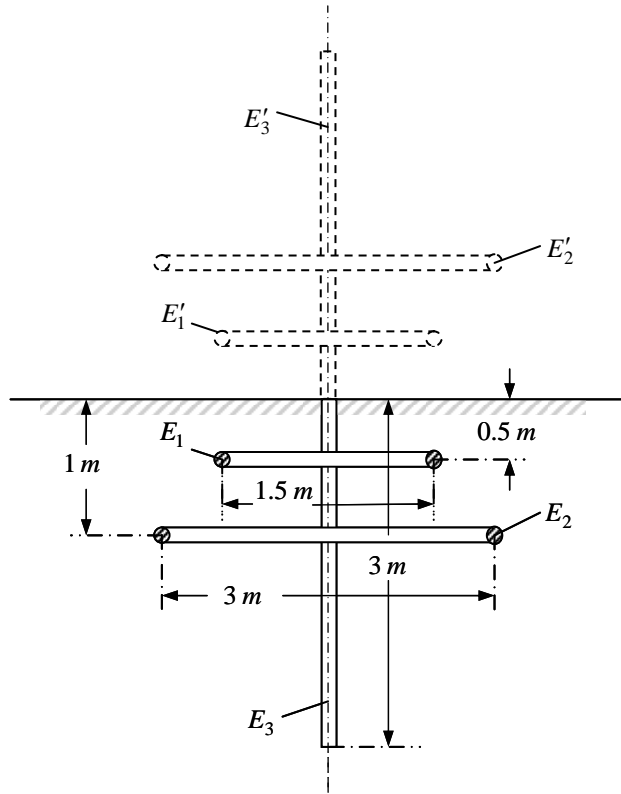
En este caso el sistema de ecuaciones por resolver es igual a:

$$2I_1K_{11} + I_2(K_{12} + K'_{12}) + I_3(K_{13} + K'_{13}) = \varphi_0$$

$$2I_1K_{21} + I_2(K_{22} + K'_{22}) + I_3(K_{23} + K'_{23}) = \varphi_0$$

$$2I_1K_{31} + I_2(K_{32} + K'_{32}) + I_3(K_{33} + K'_{33}) = \varphi_0$$

Figura 102. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de la figura 101.



Cálculo de los factores propios:

$$K_{11} = \frac{\rho}{4\pi d} \ln\left(\frac{4l}{d}\right) \quad K_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2 D_1} \ln\left(8\frac{D_1}{d}\right) \quad K_{33} = \frac{\rho}{2\pi^2 D_2} \ln\left(8\frac{D_2}{d}\right)$$

Como los anillos están enterrados  $K'_{22} \neq K_{22}$  ;  $K_{33} \neq K'_{33}$

$$K'_{22} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k_2)}{\sqrt{D_1^2 + (2t_1)^2}} \quad k_2 = \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + (2t_1)^2}}$$

$$K'_{33} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k_3)}{\sqrt{D_2^2 + (2t_2)^2}} \quad k_3 = \frac{D_2}{\sqrt{D_2^2 + (2t_2)^2}}$$

Factores mutuos

Por simetría se tiene:  $K_{12} = K'_{12}$  ;  $K_{13} = K'_{13}$  ;  $K_{23} = K'_{32}$  ;  $K'_{23} = K'_{32}$

$$K_{12} = \frac{\rho}{8\pi d} \ln \frac{\sqrt{(D_1/2)^2 + (l+t_1)^2} + l+t_1}{\sqrt{(D_1/2)^2 + (-l+t_1)^2} - l+t_1} \quad K_{13} = \frac{\rho}{8\pi d} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l+t_2)^2} + l+t_2}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (-l+t_2)^2} - l+t_2}$$

$$K_{23} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{(D_2 + D_1)^2/4 + (t_2 - t_1)^2}} \quad k = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{(D_2 + D_1)^2/4 + (t_2 - t_1)^2}}$$

$$K'_{23} = \frac{\rho}{2\pi^2} \frac{K(k)}{\sqrt{(D_1 + D_2)^2/4 + (t_1 + t_2)^2}} \quad k = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{(D_1 + D_2)^2/4 + (t_1 + t_2)^2}}$$

$$K_{21} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_1/2)^2 + (l - t_1)^2} + l - t_1}{\sqrt{(D_1/2)^2 + (l + t_1)^2} - l - t_1} \quad K_{31} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l - t_2)^2} + l - t_2}{\sqrt{(D_2/2)^2 + (l + t_2)^2} - l - t_2}$$

Para el ejemplo se tienen los siguientes factores:

$$K_{11} = 14,5378 \quad K_{22} = 23,4445 \quad K'_{33} = 2,9003 \quad K_{12} = 5,5223 \quad K'_{23} = 3,6841 \quad K_{21} = 5,5223$$

$$K_{33} = 12,8927 \quad K'_{22} = 5,8006 \quad K_{13} = 3,7216 \quad K_{23} = 5,2313 \quad K_{31} = 3,7216$$

Con estos factores el sistema de ecuaciones por resolver es igual a:

$$29,0756I_1 + 11,0446I_2 + 7,4432I_3 = \varphi_0$$

$$11,0446I_1 + 29,2451I_2 + 8,9154I_3 = \varphi_0$$

$$7,4432I_1 + 8,9154I_2 + 15,793I_3 = \varphi_0$$

De cuya resolución se obtiene:

$$I_1 = 0,017163 \varphi_0 ; I_2 = 0,013135 \varphi_0 ; I_3 = 0,047815 \varphi_0$$

Resistencia del electrodo múltiple

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,017163 + 0,013135 + 0,047815)\varphi_0} = \frac{1}{0,078113} = 12,8 \Omega$$

$$\text{Voltaje de electrodo: } V_0 = 12,8 \Omega \times 10 A = 128 V$$

La distribución de la corriente en los electrodos individuales:

$$I_1 = \frac{0,017163}{0,078113} \times 100 = 21,97 \% \quad (2,197 A)$$

$$I_2 = \frac{0,013135}{0,078113} \times 100 = 16,81 \% \quad (1,68 A)$$

$$I_3 = \frac{0,047815}{0,078113} \times 100 = 61,21 \% \quad (6,12 A)$$

La distribución del potencial sobre el suelo:

Se determinará el potencial en los puntos  $x = 0, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6,$

$7$  y  $8 m$  a partir del eje central del electrodo.

Contribución del electrodo de pica:

$$\varphi_{x1} = 2I_1 \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad m = x/3$$

$$\varphi_{x1} = 2 \times 0,017163 \varphi_0 \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} = 0,0455 \varphi_0 \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1}$$

Contribución de los anillos:

$$\varphi_{x2} = \frac{\rho}{\pi^2} I_2 \frac{K(k_1)}{\sqrt{(x + D_1/2)^2 + t_1^2}} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2D_1 \cdot x}}{\sqrt{(x + D_1/2)^2 + t_1^2}}$$

$$\varphi_{x2} = \frac{100}{\pi^2} \times 0,013135 \varphi_0 \frac{K(k_1)}{\sqrt{(x + 1,5/2)^2 + 0,5^2}} = 0,1330 \varphi_0 \frac{K(k_1)}{\sqrt{(x + 0,75)^2 + 0,25}}$$

$$\varphi_{x3} = \frac{\rho}{\pi^2} I_3 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(x + D_2/2)^2 + t_2^2}} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2D_2 \cdot x}}{\sqrt{(x + D_2/2)^2 + t_2^2}} \quad I_3 = 0,047815 \varphi_0$$

$$\varphi_{x3} = \frac{100}{\pi^2} \times 0,047815 \varphi_0 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(x + 3/2)^2 + 1^2}} = 0,4844 \varphi_0 \frac{K(k_2)}{\sqrt{(x + 1,5)^2 + 1}}$$

Por ejemplo para el punto  $x = 0$  (en el eje del electrodo de pica), se tiene:

$\varphi_{x1}$  es igual al potencial propio del electrodo de pica.

$$\varphi_{x1} = 2 \times 0,017163 \varphi_0 \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(0,05/3)^2 + 1} - 1} = 0,4359 \varphi_0$$

$$\varphi_{x2} = 0,1330 \varphi_0 \frac{K(k_1)}{\sqrt{0,75^2 + 0,25}} \quad k_1 = 0 \rightarrow K(k_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{x2} = 0,1330 \varphi_0 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{0,75^2 + 0,25}} = 0,2317 \varphi_0$$

$$\varphi_{x3} = 0,4844 \varphi_0 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1,5^2 + 1}} = 0,4220 \varphi_0$$

$$\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} + \varphi_{x3} = 1,0896 \varphi_0 \approx \varphi_0$$

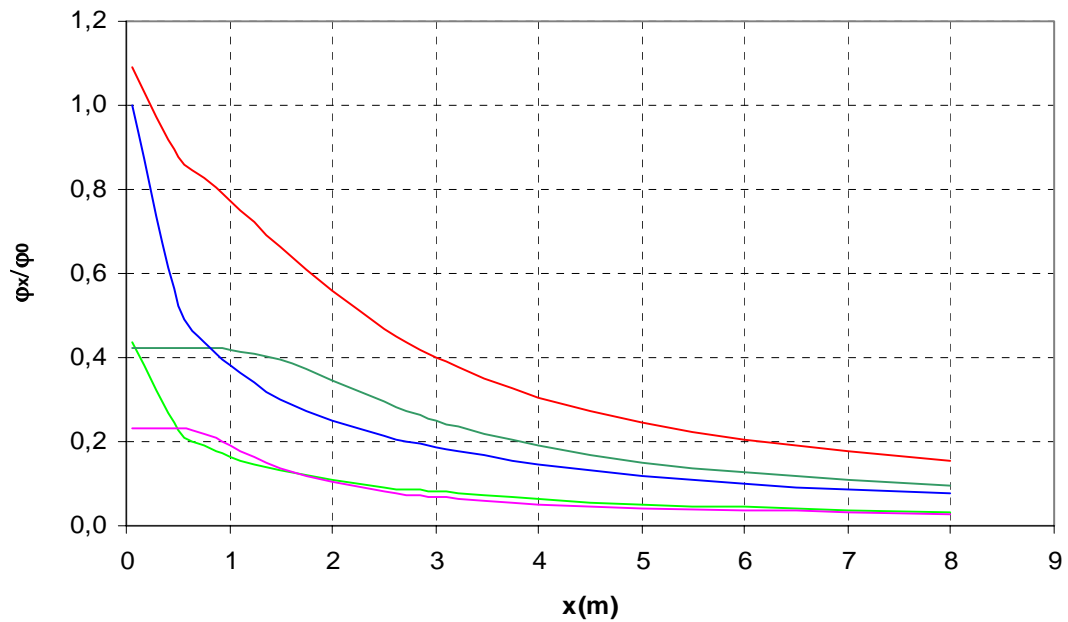
Como era de esperarse ya que está sobre el electrodo de pica.

Procediendo de manera similar, se calculan los demás potenciales en los puntos restantes, los cuales se incluyen en la tabla 20. Con estos datos se traza la gráfica del transcurso del potencial alrededor del electrodo compuesto como se muestra en la figura 103.

Tabla 20. Cálculo de potenciales a diferentes distancias del eje del electrodo múltiple de pica y dos anillos de control.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x3}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2} + \varphi_{x3}$ |
|--------|----------------|----------------|----------------|--|
| 0,05   | 0,4357         | 0,2318         | 0,4221         | 1,0895                                       |
| 0,5    | 0,2268         | 0,2297         | 0,4223         | 0,8788                                       |
| 0,75   | 0,1906         | 0,2169         | 0,4216         | 0,8291                                       |
| 1      | 0,1655         | 0,1904         | 0,4183         | 0,7741                                       |
| 1,5    | 0,1314         | 0,1373         | 0,3949         | 0,6636                                       |
| 2      | 0,1087         | 0,1042         | 0,3467         | 0,5597                                       |
| 2,5    | 0,0925         | 0,0836         | 0,2939         | 0,4700                                       |
| 3      | 0,0802         | 0,0697         | 0,2501         | 0,4000                                       |
| 4      | 0,0631         | 0,0523         | 0,1898         | 0,3051                                       |
| 5      | 0,0518         | 0,0418         | 0,1522         | 0,2457                                       |
| 6      | 0,0438         | 0,0348         | 0,1269         | 0,2055                                       |
| 7      | 0,0379         | 0,0299         | 0,1088         | 0,1765                                       |
| 8      | 0,0334         | 0,0261         | 0,0952         | 0,1547                                       |

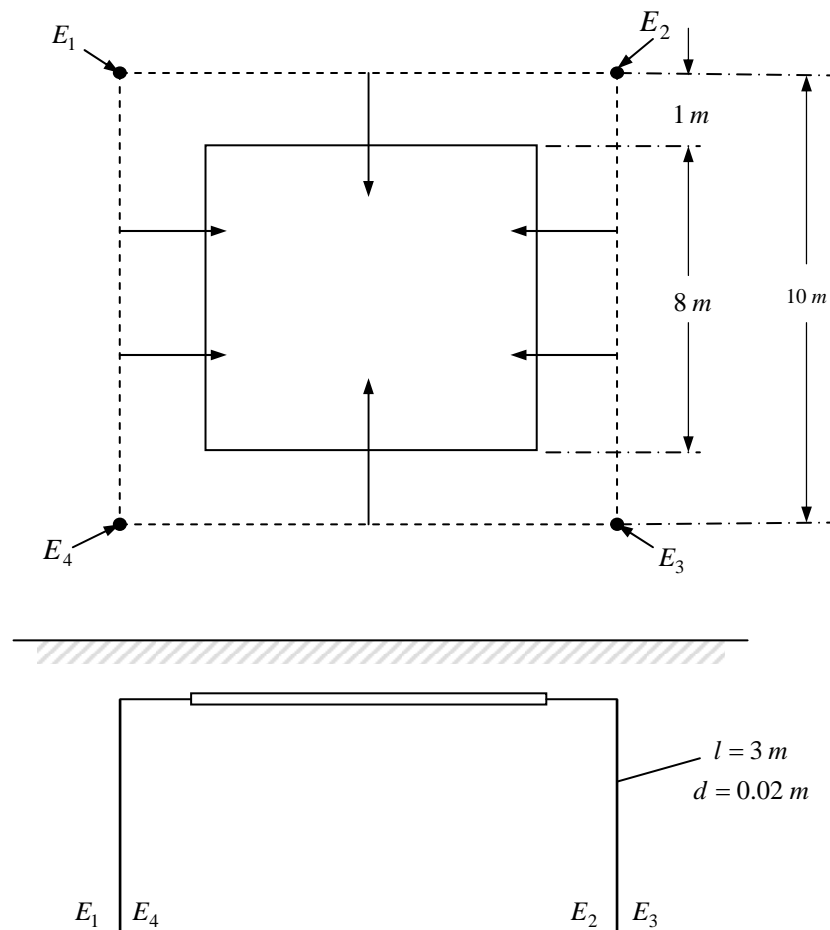
Figura 103. Distribución de potencial del electrodo múltiple de pica y dos anillos de control.



Como puede observarse de los resultados obtenidos de resistencia, distribución de corriente y la curva de transcurso de potencial para este electrodo múltiple compuesto por un electrodo de pica y dos anillos de control son más favorables que los del ejemplo anterior pero debe tenerse en mente la relación costo beneficio de usar este tipo de arreglo ya que necesita más materiales y obra civil, por lo que resulta más costosa su instalación.

Un tipo de arreglo de electrodos muy usado en subestaciones, es aquel formado por un electrodo de banda que rodea la misma y cuatro electrodos de pica como se muestra en la figura 104. Este tipo de problema plantea un análisis riguroso intratable y como en el caso de las mallas cuadriculadas puede no ser económico tratar de resolverlo con rigor.

Figura 104. Arreglo de electrodos comúnmente usado en subestaciones.



En la práctica en este caso se calcula, por un lado, las condiciones del electrodo en anillo que une a los electrodos de pica, y por otro, las del arreglo de electrodos de pica en paralelo, sumándole la resistencia óhmica de las conexiones externas a la tierra de menor valor.

Como ejemplo se determinará la resistencia del electrodo múltiple formado por un electrodo de banda que rodea a una subestación blindada y cuatro electrodos de pica según la figura 104.

La resistencia del electrodo de pica individual es:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right) = \frac{100}{2\pi \cdot 2,5} \ln\left(\frac{4 \times 2,5}{0,02}\right) = 39,5634 \Omega$$

(con una longitud efectiva de 2,5 m)

La resistencia infinita del arreglo de los cuatro electrodos de pica sería:

$$R_{\infty} = 39,5634/4 = 9,89 \Omega$$

Los electrodos están ubicados sobre un círculo de radio  $r = \frac{40}{2\pi} = 6,3661 \text{ m}$

Así que con  $f(4) = 0,9571$  el grado de eficiencia de este sistema es:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{100}{2\pi \cdot 2 \cdot 6,3661 \cdot 9,89} \cdot 0,9571} = 0,8920 \quad R = \frac{R_{\infty}}{\eta} = 11,0863 \Omega$$

Si la unión de los electrodos de pica se hace por medio de un conductor de cobre desnudo, con una longitud de 40 m y  $d = 0,014 \text{ m}$ , actuaría como un electrodo de banda que se puede calcular con bastante aproximación como si fuese un anillo y hasta como un electrodo lineal, es decir:

$$R_0 = \frac{\rho}{\pi l_r} \ln\left(\frac{4 l_r}{\pi \rho_0}\right) = \frac{100}{\pi \times 40} \ln\left(\frac{4 \cdot 40}{\pi \cdot 0,007}\right) = 7,0762 \Omega$$

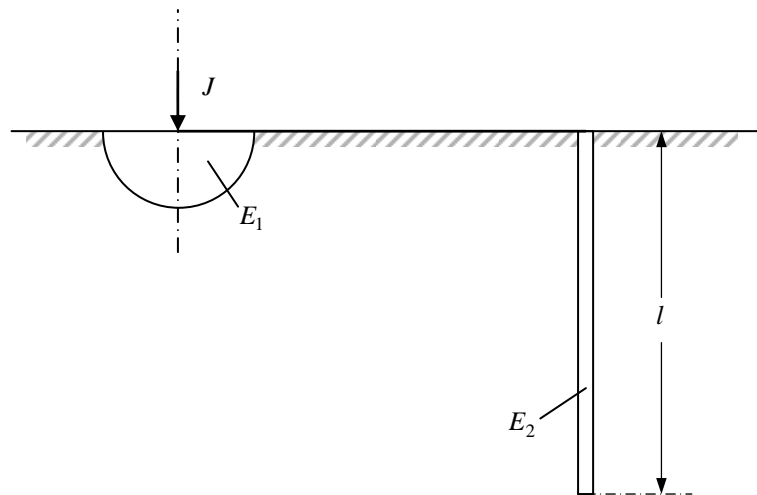
Sumándole al electrodo de banda la resistencia aproximada de  $0,2 \Omega$  por concepto de las conexiones externas al equipo, la resistencia total sería de  $7,27 \Omega$ ; así que en este caso la

resistencia menor se consigue aplicando sólo el electrodo de banda, pero la decisión de si se adopta una u otra o las dos depende de los requisitos, es decir, del valor de la resistencia y de los voltajes de cuerpo.

### 3.2.8 Electrodo múltiple de semiesfera y pica.

El arreglo físico básico de este sistema de electrodos se muestra en la figura 105 considerado en principio como electrodo superficial, aún cuando en la práctica el electrodo de pica se entierra a cierta profundidad.

Figura 105. Electrodo múltiple de semiesfera y pica.



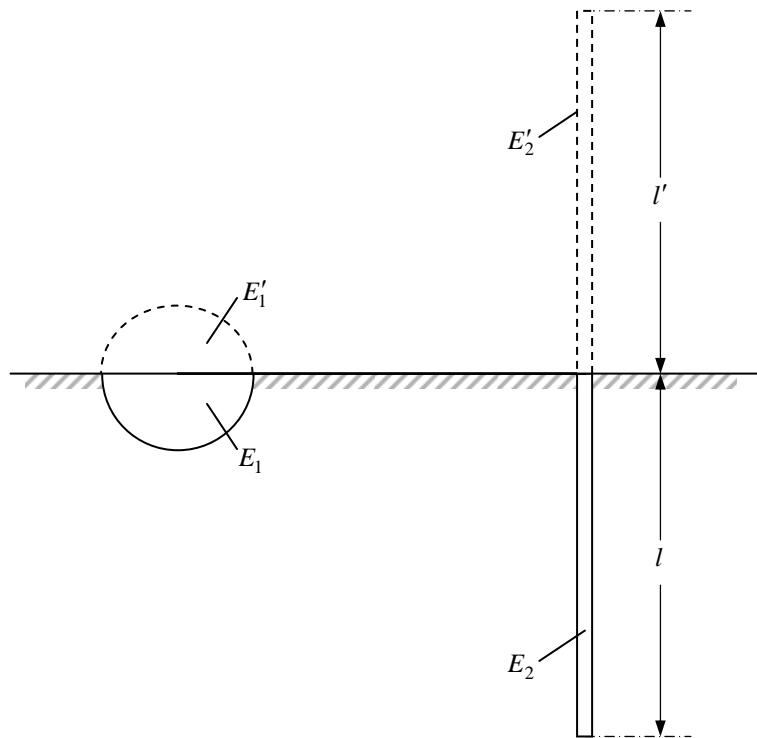
Este electrodo múltiple se puede aplicar en todos los casos para mejorar las condiciones de la puesta a tierra que se conseguiría con un electrodo natural de cemento y/o satisfacer requisitos especiales de seguridad, como sucede en las torres de líneas de alta y extra-alta tensión; sin embargo, si no se cumplen ciertos requisitos para lograr una eficiente conexión en paralelo de los electrodos, ni se investigan correctamente las condiciones del subsuelo, para saber si es mejor o peor conductor que la capa superficial de terreno, puede resultar no justificable el gasto adicional de los electrodos de pica.

Uno de los propósitos de la adición de un electrodo de pica es el de reducir el valor de la resistencia ofrecida por el electrodo natural, la cual puede llegar a ser muy favorable cuando el subsuelo es mucho mejor conductor que las capas superiores de terreno y/o contiene vías de agua (esto se investiga apoyándose en ciertas técnicas de la exploración eléctrica del subsuelo). Y el otro, el de mejorar la distribución del potencial alrededor del electrodo natural.

El análisis de esta clase de electrodo múltiple se apoya en el principio de la imagen reflejada, siguiendo un proceso similar al aplicado en todos los casos anteriores.

Se analizará el arreglo más simple de esta clase el cual es aquel formado por un electrodo principal esférico y un electrodo adicional de pica, según se muestra en la figura 105, el cual, cuando se le aplica el principio de reflexión resulta el electrodo gemelo mostrado en la figura 106.

Figura 106. Electrodo gemelo obtenido al aplicar el principio de reflexión al electrodo múltiple de semiesfera y pica.



El potencial del electrodo múltiple está relacionado por medio del siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}\varphi_{11} + \varphi'_{11} + \varphi_{12} + \varphi'_{12} &= 2I_1 K_{11} + 2I_2 K_{12} = \varphi_0 \\ \varphi_{21} + \varphi'_{21} + \varphi_{22} + \varphi'_{22} &= 2I_1 K_{21} + 2I_2 K_{22} = \varphi_0\end{aligned}$$

Con los factores propios

$$\text{Para el electrodo esférico: } K_{11} = \frac{\rho}{2\pi D_1}$$

$$\text{Para el electrodo de pica: } K_{22} = \frac{\rho}{4\pi l} \ln\left(\frac{4l}{d}\right)$$

Factores mutuos:

$$K_{12} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad m_{12} = \frac{x}{l} \quad \text{para el efecto recíproco del electrodo de pica sobre el centro de la esfera.}$$

$$\varphi_{21} = \frac{\rho}{4\pi} 2I_1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{con } -l \leq y \leq l$$

Dependiendo del valor que tome  $y$ , cada punto de la pica tendrá un voltaje diferente. El potencial promedio será igual a:

$$\overline{\varphi_{21}} = \frac{\rho}{4\pi} 2I_1 \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho}{8\pi l} 2I_1 \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad \text{con } m = \frac{x}{l}$$

$$\text{Por lo tanto } K_{21} = \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad \text{y} \quad K_{21} = K_{12}$$

Para determinar la distribución del potencial sobre el suelo alrededor del electrodo múltiple, como en todos los casos, se debe considerar la contribución de los dos electrodos en el punto de interés. Las expresiones generales para el cálculo son:

$$\varphi_{x1} = 2I_1 \frac{\rho}{4\pi x} \quad \text{para el electrodo de esfera.}$$

$$\varphi_{x2} = 2I_2 \frac{\rho}{8\pi l} \ln \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} - 1} \quad m = \frac{x}{l} \quad \text{para el electrodo de pica.}$$

Como ejemplo se analizará el electrodo múltiple formado por un electrodo semiesférico y un electrodo de pica, según la figura 107 y los siguientes datos:

Electrodo de pica:  $l = 3 \text{ m}$ ,  $d = 0.025 \text{ m}$

Diámetro de la esfera:  $2 \text{ m}$ ,  $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ ,  $J = 20 \text{ A}$

El sistema de ecuaciones que relaciona el potencial es:

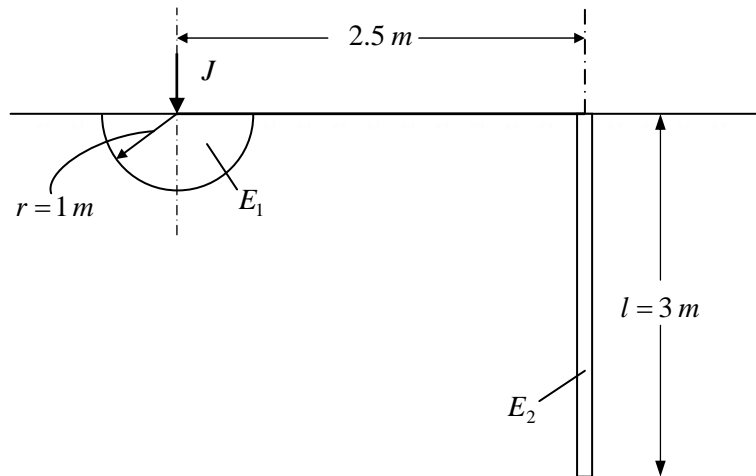
$$2I_1K_{11} + 2I_2K_{12} = \varphi_0$$

$$2I_1K_{21} + 2I_2K_{22} = \varphi_0$$

Cálculo de los factores propios

$$K_{11} = \frac{100}{2\pi \cdot 2} = 7,9577 ; K_{22} = \frac{100}{4\pi \cdot 3} \ln \left( \frac{4 \times 3}{0,025} \right) = 16,3764$$

Figura 107. Ejemplo de electrodo múltiple de semiesfera y pica.



Factores mutuos

$$K_{12} = \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln \frac{\sqrt{(2,5/3)^2 + 1} + 1}{\sqrt{(2,5/3)^2 + 1} - 1} = 2,6949 ; K_{21} = K_{12}$$

El sistema de ecuaciones por resolver es:

$$15,9154I_1 + 5,3898I_2 = \varphi_0$$

$$5,3898I_1 + 32,7528I_2 = \varphi_0$$

De cuya solución se obtiene:  $I_1 = 0,055590 \varphi_0$  ;  $I_2 = 0,021383 \varphi_0$

La resistencia del electrodo múltiple:

$$R = \frac{\varphi_0}{(0,055590 + 0,021383) \varphi_0} = \frac{1}{0,076973} = 12,99 \Omega$$

El voltaje de electrodo:  $V_0 = 12,99 \Omega \times 20 A = 259,8 V$

La distribución de la corriente en los electrodos individuales:

$$I_1 = \frac{0,055590}{0,076973} \times 100 = 72,22\% \quad (14,44 A)$$

$$I_2 = \frac{0,021383}{0,076973} \times 100 = 27,77\% \quad (5,55 A)$$

Distribución del potencial sobre el suelo

Se determinará el valor del potencial en los puntos  $x = 1, 2, 2.51, 3, 4, 5, 6, 7$  y  $8 m$  en la dirección de la recta que une a los dos electrodos y contados a partir del eje del electrodo semiesférico.

Contribución del electrodo semiesférico:

$$\varphi_{x1} = 2 \times 0,055590 \varphi_0 \frac{100}{4\pi x} = 0,8847 \varphi_0 \frac{1}{x} \therefore \frac{\varphi_{x1}}{\varphi_0} = \frac{0,8847}{x}$$

La contribución del electrodo de pica:

$$\varphi_{x2} = 2 \times 0,021383 \varphi_0 \frac{100}{8\pi \cdot 3} \ln K_{x2} = 0,05672 \varphi_0 \ln K_{x2} \therefore \frac{\varphi_{x2}}{\varphi_0} = 0,05672 \ln K_{x2}$$

Con  $m_{x2} = x/l$

En la tabla 21 se incluyen los valores de los potenciales en dichos puntos. Con base en ellos es posible trazar un bosquejo del transcurso del potencial alrededor del electrodo múltiple, como se muestra en la figura 108.

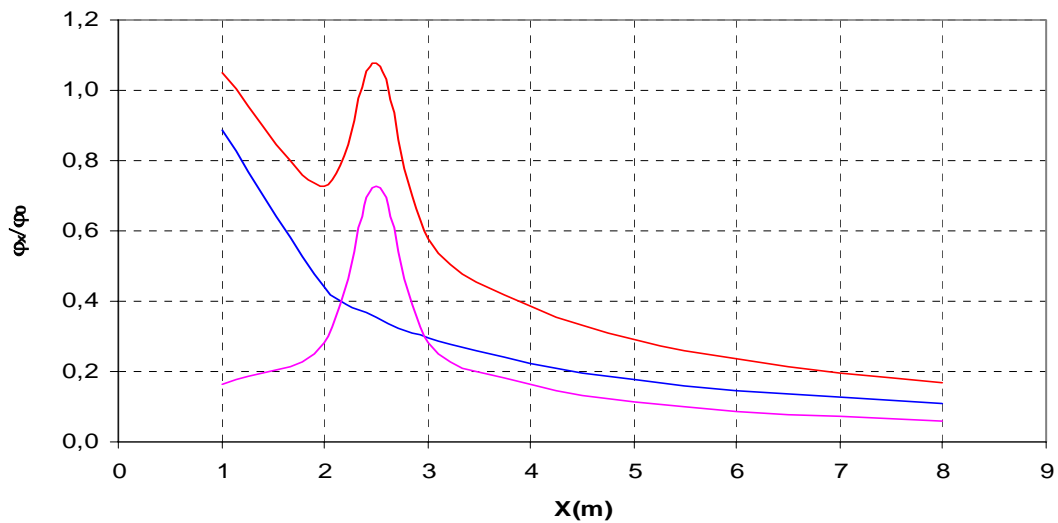
Observaciones

1) Con el uso del electrodo de pica se consigue reducir la resistencia y el voltaje de electrodo del electrodo principal operando solo de  $15,91 \Omega$  a  $13 \Omega$  y de  $318,2 V$  a  $259,8 V$  respectivamente.

Tabla 21. Cálculo de potenciales a lo largo de la línea recta que une a los electrodos de semiesfera y pica.

| $x(m)$ | $\varphi_{x1}$ | $\varphi_{x2}$ | $\varphi_{x1} + \varphi_{x2}$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 1      | 0,8847         | 0,1638         | 1,0485                        |
| 2      | 0,4424         | 0,2827         | 0,7250                        |
| 2,51   | 0,3525         | 0,7257         | 1,0781                        |
| 3      | 0,2949         | 0,2827         | 0,5776                        |
| 4      | 0,2212         | 0,1638         | 0,3849                        |
| 5      | 0,1769         | 0,1153         | 0,2922                        |
| 6      | 0,1475         | 0,0881         | 0,2356                        |
| 7      | 0,1264         | 0,0709         | 0,1973                        |
| 8      | 0,1106         | 0,0592         | 0,1697                        |

Figura 108. Distribución de potencial del electrodo múltiple de semiesfera y pica



### 3.2.9 Cálculo de la resistencia combinada de electrodos por el método del potencial promedio.

El método del potencial promedio también puede ser usado para el cálculo de la resistencia combinada de un arreglo de electrodos. Para ello, como en los otros métodos, lo primero

que debe determinarse es como se distribuye la corriente del electrodo compuesto entre los diferentes electrodos individuales por medio del establecimiento y resolución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas que relaciona el potencial de tal sistema de electrodos.

A diferencia de los anteriores métodos, donde los coeficientes del sistema de ecuaciones son los potenciales propios y recíprocos de los electrodos individuales, en el método del potencial promedio representan las resistencias propias y mutuas de los electrodos individuales que conforman el arreglo.

La resistencia propia de un electrodo se designará por  $R_1(a)$  donde  $a$  es el radio del electrodo. La resistencia mutua de dos electrodos paralelos de igual longitud se simbolizará por  $R_1(a_{12})$ , obsérvese que en ésta última la separación  $a_{12}$  entre electrodos es usada en lugar del radio  $a$ .

A continuación se calculará la resistencia combinada de los arreglos de electrodos que más se usan en la práctica.

### 3.2.9.1 Arreglos de electrodos de pica.

Siendo el electrodo de pica el más usado en la construcción de una puesta a tierra, se analizarán con más detalle los diferentes arreglos que se pueden presentar con este tipo de electrodo.

Las conexiones eléctricas entre los diferentes electrodos individuales que hacen parte del electrodo compuesto se suponen hechas con conductor aislado ya que si se hace con alambre desnudo, este contribuiría también a la dispersión de la corriente en el terreno y por lo tanto influiría en el valor de la resistencia del electrodo múltiple.

Por simplicidad se analizarán arreglos de electrodos del mismo tipo, donde exista simetría y cuyas dimensiones de los electrodos individuales sean las mismas.

### 3.2.9.1.1 Arreglo Circular

Cuando  $n$  electrodos de pica “paralelos” de la misma longitud son arreglados en un círculo de diámetro  $D$ , de modo que todos los electrodos individuales llevan igual corriente, la resistencia combinada del arreglo incluyendo todos los efectos mutuos es:

$$R_n = \frac{1}{n} \left[ R_1(a) + \sum_{m=1}^{n-1} R_1(a_{1m}) \right]$$

Donde  $a_{1m} = D \sin m\pi/n$  es la distancia entre el electrodo 1 y  $m$ .

Siendo  $R_1(a)$  la resistencia propia del electrodo de pica y  $R_1(a_{1m})$  la resistencia mutua entre los electrodos individuales 1 y  $m$ .

$R_1(a)$  y  $R_1(a_{1m})$  son obtenidas por el uso de la ecuación de cálculo de la resistencia del electrodo de pica por el método del potencial promedio.

Ejemplos de la anterior ecuación son:

$$R_2 = \frac{1}{2} [R_1(a) + R_1(D)]$$

$$R_3 = \frac{1}{3} [R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/3)]$$

$$R_4 = \frac{1}{4} [R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/4) + R_1(D)]$$

$$R_5 = \frac{1}{5} [R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/5) + 2R_1(D \sin 2\pi/5)]$$

$$R_6 = \frac{1}{6} [R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/6) + 2R_1(D \sin \pi/3) + R_1(D)]$$

La resistencia combinada de  $n$  iguales electrodos de pica arreglados a igual espaciamiento en un círculo de diámetro  $D$  pequeño con la longitud del electrodo puede ser calculada por la más simple fórmula para el cálculo de la resistencia del electrodo de pica, esto es:

$$R_1 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right)$$

Así, con el uso de la anterior fórmula, la resistencia combinada para los anteriores ejemplos es igual a:

$$R_2 = \frac{1}{2}[R_1(a) + R_1(D)]$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{\sqrt{aD}} \right)^2 - 2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 2 \ln \left( \frac{4l}{\sqrt{aD}} \right) - 2 \right]$$

$$R_2 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{\sqrt{aD}} - 1 \right) \quad R_2 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a'_2} - 1 \right) \quad a'_2 = \sqrt{aD}$$

$$R_3 = \frac{1}{3}[R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/3)] \quad \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D \cdot \sqrt{3}/2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + 2 \ln \frac{4l}{D \cdot \sqrt{3}/2} - 2 \right]$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} + \ln \left( \frac{4l}{D \cdot \sqrt{3}/2} \right)^2 - 3 \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a'_3} \right)^3 - 3 \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 3 \ln \left( \frac{4l}{a'_3} \right) - 3 \right]$$

$$R_3 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a'_3} \right) - 1 \right] \quad a'_3 = \left( \frac{3}{4} a D^2 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$R_4 = \frac{1}{4}[R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/4) + R_1(D)] \quad \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

$$R_4 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{D \cdot \sqrt{2}/2} \right) - 1 \right] + \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D} - 1 \right) \right\}$$

$$R_4 = \frac{1}{4} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + 2 \ln \left( \frac{4l}{D \cdot \sqrt{2}/2} \right) - 2 + \ln \frac{4l}{D} - 1 \right]$$

$$R_4 = \frac{1}{4} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} + \ln \left( \frac{4l}{D \cdot \sqrt{2}/2} \right)^2 + \ln \frac{4l}{D} - 4 \right] = \frac{1}{4} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a'_4} \right)^4 - 4 \right] = \frac{1}{4} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 4 \ln \left( \frac{4l}{a'_4} \right) - 4 \right]$$

$$R_4 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a'_4} - 1 \right) \quad a'_4 = \left( \frac{1}{2} a D^3 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$R_5 = \frac{1}{5}[R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/5) + 2R_1(D \sin 2\pi/5)]$$

$$R_5 = \frac{1}{5} \left[ \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D \sin \pi/5} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D \sin 2\pi/5} - 1 \right) \right]$$

$$R_5 = \frac{1}{5} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left( \frac{4l}{D \sin \pi/5} \right)^2 - 2 + \ln \left( \frac{4l}{D \sin 2\pi/5} \right)^2 - 2 \right]$$

$$R_5 = \frac{1}{5} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a'_5} \right)^5 - 5 \right] = \frac{1}{5} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 5 \ln \left( \frac{4l}{a'_5} \right) - 5 \right]$$

$$R_5 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a'_5} - 1 \right)$$

$$a'_5 = \left( aD^4 \sin^2 \pi/5 \cdot \sin^2 2\pi/5 \right)^{\frac{1}{5}} = \left( 0.3125aD^4 \right)^{\frac{1}{5}} = \left( \frac{5}{16} aD^4 \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$R_6 = \frac{1}{6} [R_1(a) + 2R_1(D \sin \pi/6) + 2R_1(D \sin \pi/3) + R_1(D)]$$

$$\sin \pi/6 = 1/2; \quad \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$R_6 = \frac{1}{6} \left[ \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D \sin \pi/6} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D \sin \pi/3} - 1 \right) + \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{D} - 1 \right) \right]$$

$$R_6 = \frac{1}{6} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left( \frac{4l}{D/2} \right)^2 - 2 + \ln \left( \frac{4l}{D \cdot \sqrt{3}/2} \right)^2 - 2 + \ln \frac{4l}{D} - 1 \right]$$

$$R_6 = \frac{1}{6} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{a'_6} \right)^6 - 6 \right] = \frac{1}{6} \frac{\rho}{2\pi l} \left( 6 \ln \frac{4l}{a'_6} - 6 \right)$$

$$R_6 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a'_6} - 1 \right) \quad a'_6 = \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} aD^5 \right)^{\frac{1}{6}} = \left( \frac{3}{16} aD^5 \right)^{\frac{1}{6}}$$

Los radios equivalentes para los seis primeros arreglos son dados en la tabla 22.

De la tabla 22 puede deducirse una expresión general para el cálculo del radio equivalente  $a'_n$  del arreglo circular. Puede observarse que  $a'_n$  tiene la siguiente fórmula general:

$$a'_n = \left( cnaD^{n-1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Donde debemos determinar el valor de la constante  $c$  que concuerde con los valores de la tabla 22. En la tabla 23 se dan los valores de  $c$  que concuerdan con las constantes dadas en la tabla 22.

Tabla 22. Cálculo del radio equivalente de un electrodo múltiple en arreglo circular compuesto por distinto número de electrodos de pica.

| $n$ | $a'_n$  |
|-----|---|
| 2   | $(aD)^{\frac{1}{2}}$                          |
| 3   | $\left(\frac{3}{4}aD^2\right)^{\frac{1}{3}}$  |
| 4   | $\left(\frac{1}{2}aD^3\right)^{\frac{1}{4}}$  |
| 5   | $\left(\frac{5}{16}aD^4\right)^{\frac{1}{5}}$ |
| 6   | $\left(\frac{3}{16}aD^5\right)^{\frac{1}{6}}$ |

Tabla 23. Cálculo de las constantes  $c$ .

| $n$ | $cn$ | $c$  |
|-----|------|------|
| 2   | 1    | 1/2  |
| 3   | 3/4  | 1/4  |
| 4   | 1/2  | 1/8  |
| 5   | 5/16 | 1/16 |
| 6   | 3/16 | 1/32 |

De la tabla 23 puede deducirse que  $c$  varía de la forma  $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

En general, la resistencia combinada de  $n$  iguales electrodos de pica arreglados a igual espaciamento en un círculo de diámetro  $D$  pequeño con la longitud del electrodo puede ser calculada por el uso de un radio equivalente dado por:

$$a'_n = \left[ na \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} D^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ na \left(\frac{D}{2}\right)^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad D \ll l$$

Cuando las  $n$  de puesta a tierra son arregladas en un círculo de diámetro  $D$  y el espaciamento entre picas adyacentes es igual o más grande que la longitud de una pica, como puede ser el caso más probable, la resistencia mutua puede ser tomada como

$R(a_{1m}) = \frac{\rho}{2\pi \cdot a_{1m}}$  y la resistencia combinada es entonces:

$$R_n = \frac{1}{n} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{l}{D} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin m\pi/n} \right)$$

Así, para los cinco primeros arreglos:

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{l}{D} \right)$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{2l}{D \sin \pi/3} \right)$$

$$R_4 = \frac{1}{4} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{2l}{D \sin \pi/4} + \frac{l}{D} \right)$$

$$R_5 = \frac{1}{5} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{2l}{D \sin \pi/5} + \frac{2l}{D \sin 2\pi/5} \right)$$

$$R_6 = \frac{1}{6} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{2l}{D \sin \pi/6} + \frac{2l}{D \sin \pi/3} + \frac{l}{D} \right)$$

O se puede usar la expresión aproximada para el cálculo de la sumatoria en la cual se obtuvo en el análisis del arreglo circular por la teoría tecnológica sustantiva, esto es

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin m\pi/n}, \text{ se puede aproximar a } f(n) \approx 0,0629 + 0,6431 \ln n.$$

Reemplazando  $f(n)$  en la ecuación de cálculo de la resistencia combinada, tenemos:

$$R_n = \frac{1}{n} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{nl}{D} f(n) \right]$$

$$R_n = \frac{1}{n} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{nl}{D} (0,0629 + 0,6431 \ln n) \right]$$

Cuando el espaciamiento entre picas es igual o menor que la longitud de la pica, y esta es pequeña comparada con el diámetro del círculo, los primeros términos de la resistencia mutua deben ser calculados por la fórmula más exacta para la determinación de la resistencia del electrodo de pica hasta que  $a_{1m} > l$ , después los términos que quedan son obtenidos por la expresión aproximada.

### 3.2.9.1.2 Electrodo Múltiple en Línea.

El arreglo más sencillo que puede construirse es el de dos electrodos de pica paralelos separados por la distancia  $a_{12}$ . Su resistencia combinada puede ser obtenida por el uso de la ecuación de cálculo de la resistencia combinada para un arreglo circular, cuando  $n = 2$ , esto es:

$$R_n = \frac{1}{n} \left[ R_1(a) + \sum_{m=1}^{n-1} R_1(D \sin m\pi/n) \right]$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[ R_1(a) + \sum_{m=1}^1 R_1(a_{12} \sin \pi/2) \right] = \frac{1}{2} [R_1(a) + R_1(a_{12})]$$

Se pueden presentar dos casos:

1.  $a_{12} \ll l$

Para este caso  $R_2$  puede ser determinada por la expresión más sencilla para el cálculo de la resistencia del electrodo de pica, así:

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \frac{4l}{a_{12}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{\sqrt{aa_{12}}} \right)^2 - 2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 2 \ln \left( \frac{4l}{\sqrt{aa_{12}}} \right) - 2 \right]$$

Introduciendo el concepto de radio equivalente  $a' = \sqrt{aa_{12}}$   $R_2$  queda expresada:

$$R_2 = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a'} - 1 \right)$$

$$2. \quad a \ll l \quad \wedge \quad a_{12} \gg l$$

En este caso debemos hacer uso de la expresión más exacta para el cálculo de la resistencia del electrodo de pica, esto es:

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left[ \frac{2l}{a_{12}} \left( 1 + \frac{a_{12}}{2l} \sqrt{1 + \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2} \right) \right] + \frac{a_{12}}{2l} - \frac{a_{12}}{2l} \sqrt{1 + \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2} \right\}$$

Por teorema del binomio  $\sqrt{1 + \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2$  cuando  $a_{12} \gg l$ ; por lo tanto la

ecuación se convierte en:

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left\{ \frac{2l}{a_{12}} \left[ 1 + \frac{a_{12}}{2l} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right] \right] \right\} + \frac{a_{12}}{2l} - \frac{a_{12}}{2l} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right] \right\}$$

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left\{ \frac{2l}{a_{12}} \left[ 1 + \frac{a_{12}}{2l} + \frac{a_{12}}{2l} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right] \right\} + \frac{a_{12}}{2l} - \frac{a_{12}}{2l} - \frac{a_{12}}{2l} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right\}$$

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left[ \frac{2l}{a_{12}} + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{12}}{2l} \cdot \frac{2l}{a_{12}} \cdot \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right] - \frac{l}{a_{12}} \right\}$$

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \ln \left[ \frac{2l}{a_{12}} + 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2l}{a_{12}} \right)^2 \right] - \frac{l}{a_{12}} \right\}$$

Ya que  $a_{12} \gg l$   $\frac{2l}{a_{12}}$  y  $\left(\frac{2l}{a_{12}}\right)^2$  tienden a cero, luego el segundo término logarítmico de la ecuación se convierte en  $\ln 1 = 0$ . Por lo tanto  $R_2$  se reduce a:

$$R_2 = \frac{\rho}{4\pi l} \left( \ln \frac{4l}{a} - 1 - \frac{l}{a_{12}} \right) \quad a_{12} \gg l$$

Cuando más de dos electrodos de pica son colocados a igual espaciamiento a lo largo de una línea recta, la corriente no se distribuye uniformemente en los electrodos individuales del arreglo. Para obtener la resistencia combinada puede ser necesario resolver un número de ecuaciones simultáneas para las corrientes. Sin embargo, como todos los electrodos de pica son de la misma longitud y el espaciamiento entre ellos es uniforme, es usualmente permitido asumir corrientes iguales en todos los electrodos individuales de pica al calcular la resistencia combinada. Así, la resistencia  $R_n$  de  $n$  electrodos de pica paralelos en el mismo plano a igual espaciamiento  $s$  puede ser obtenida al calcular la resistencia con respecto a cada electrodo y tomar el valor promedio, esto es, para los cuatro primeros arreglos:

Para  $n = 2$ :

| Conductor | Resistencia                    |
|-----------|--------------------------------|
| 1         | $R_1(a) + R_1(s)$              |
| 2         | $R_1(a) + R_1(s)$              |
| Total     | $2R_1(a) + 2R_1(s)$            |
| Promedio  | $R_1(a) + R_1(s)$              |
| $R_2$     | $\frac{1}{2}[R_1(a) + R_1(s)]$ |

Para  $n = 3$ :

| Conductor | Resistencia  |
|-----------|--|
| 1         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s)$  |
| 2         | $R_1(a) + 2R_1(s)$   |
| 3         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s)$  |
| Total     | $3R_1(a) + 4R_1(s) + 2R_1(2s)$   |
| Promedio  | $R_1(a) + \frac{4}{3}R_1(s) + \frac{2}{3}R_1(2s)$                            |
| $R_3$     | $\frac{1}{3} \left[ R_1(a) + \frac{4}{3}R_1(s) + \frac{2}{3}R_1(2s) \right]$ |

Para  $n = 4$ :

| Conductor | Resistencia  |
|-----------|--|
| 1         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s)$  |
| 2         | $R_1(a) + 2R_1(s) + R_1(2s)$   |
| 3         | $R_1(a) + 2R_1(s) + R_1(2s)$   |
| 4         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s)$  |
| Total     | $4R_1(a) + 6R_1(s) + 4R_1(2s) + 2R_1(3s)$  |
| Promedio  | $R_1(a) + \frac{6}{4}R_1(s) + R_1(2s) + \frac{2}{4}R_1(3s)$                            |
| $R_4$     | $\frac{1}{4} \left[ R_1(a) + \frac{6}{4}R_1(s) + R_1(2s) + \frac{2}{4}R_1(3s) \right]$ |

Para  $n = 5$ :

| Conductor | Resistencia  |
|-----------|--|
| 1         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s) + R_1(4s)$  |
| 2         | $R_1(a) + 2R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s)$   |
| 3         | $R_1(a) + 2R_1(s) + 2R_1(2s)$  |
| 4         | $R_1(a) + 2R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s)$   |
| 5         | $R_1(a) + R_1(s) + R_1(2s) + R_1(3s) + R_1(4s)$  |
| Total     | $5R_1(a) + 8R_1(s) + 6R_1(2s) + 4R_1(3s) + 2R_1(4s)$   |
| Promedio  | $R_1(a) + \frac{8}{5}R_1(s) + \frac{6}{5}R_1(2s) + \frac{4}{5}R_1(3s) + \frac{2}{5}R_1(4s)$                            |
| $R_5$     | $\frac{1}{5} \left[ R_1(a) + \frac{8}{5}R_1(s) + \frac{6}{5}R_1(2s) + \frac{4}{5}R_1(3s) + \frac{2}{5}R_1(4s) \right]$ |

En resumen, la resistencia combinada para los cuatro primeros arreglos es dada en la tabla 24. Con ella puede deducirse la siguiente expresión general para el cálculo de la resistencia combinada  $R_n$ .

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{2}{n} \left[ (n-1)R_1(s) + (n-2)R_1(2s) + (n-3)R_1(3s) + \dots + R_1(ns-s) \right] \right\}$$

Cuando  $s \geq l$  y  $a_{1m} = ms$  (con  $m = 1$  hasta  $n$ )

$$R_1(a_{1m}) = R_1(ms) \approx \frac{\rho}{2\pi ms}$$

La expresión para el cálculo de la resistencia combinada de un electrodo múltiple en línea llega a ser:

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{2}{n} \frac{\rho}{2\pi s} \left[ (n-1) + \frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-3)}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right] \right\}$$

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{\rho}{n\pi s} \left[ n-1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \dots + \frac{1}{n-1} \right] \right\}$$

Tabla 24. Resistencia combinada para diferente número de electrodos individuales en un electrodo múltiple en línea.

| $n$ | $R_n$  |
|-----|--|
| 2   | $\frac{1}{2}[R_1(a) + R_1(s)]$   |
| 3   | $\frac{1}{3}\left[R_1(a) + \frac{4}{3}R_1(s) + \frac{2}{3}R_1(2s)\right] = \frac{1}{3}\left\{R_1(a) + \frac{2}{3}[2R_1(s) + R_1(2s)]\right\}$  |
| 4   | $\frac{1}{4}\left[R_1(a) + \frac{6}{4}R_1(s) + R_1(2s) + \frac{2}{4}R_1(3s)\right] = \frac{1}{4}\left\{R_1(a) + \frac{2}{4}[3R_1(s) + 2R_1(2s) + R_1(3s)]\right\}$   |
| 5   | $\frac{1}{5}\left[R_1(a) + \frac{8}{5}R_1(s) + \frac{6}{5}R_1(2s) + \frac{4}{5}R_1(3s) + \frac{2}{5}R_1(4s)\right] =$<br>$\frac{1}{5}\left\{R_1(a) + \frac{2}{5}[4R_1(s) + 3R_1(2s) + 2R_1(3s) + R_1(4s)]\right\}$ |

Como  $n \rightarrow \infty \quad \frac{1}{n-1} \rightarrow 0$  por lo tanto:

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{\rho}{n\pi s} \left[ n-1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \dots + \right] \right\} = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{\rho}{n\pi s} \left[ n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + -n \right] \right\}$$

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{\rho}{\pi s} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - 1 \right] \right\} = \frac{1}{n} \left\{ R_1(a) + \frac{\rho}{\pi s} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - 1 \right] \right\}$$

$$R_n = \frac{1}{n} \left[ R_1(a) + \frac{\rho}{\pi s} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right]$$

Par un gran número de electrodos de pica la sumatoria  $\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$  puede ser

aproximada de la siguiente forma:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Donde  $\gamma = 0,5772157\dots$  es la constante de Euler.

Por lo tanto  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \gamma + \ln n - 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \ln e^\gamma + \ln n - \ln e = \ln \frac{e^\gamma n}{e} = \ln e^{\gamma-1} n$$

Por lo tanto la resistencia combinada resulta en:

$$R_n = \frac{1}{n} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{2l}{s} \ln e^{\gamma-1} n \right] \quad e^{\gamma-1} = e^{0.5772157\dots-1} = 0,655219948\dots$$

Cuando la separación entre las picas es menor que la longitud de las picas, los primeros términos de resistencia mutua son calculados más precisamente de la fórmula más exacta para el cálculo de la resistencia del electrodo de pica hasta que la separación sea más grande que la longitud de las picas.

### 3.2.9.2 Electrodo de banda enterrado.

En muchas situaciones donde es deseable obtener una puesta a tierra de baja resistencia, puede ser conveniente el instalar un electrodo de banda enterrado, o por arado o por medio de la construcción de una trinchera o zanja.

Cuando el conductor está enterrado a la profundidad  $d$ , la resistencia es obtenida al asumir dos conductores apartados por la distancia  $2d$  en un medio de infinita extensión en todas direcciones. Por un razonamiento similar al de la sección anterior se sigue que la resistencia de un electrodo de banda enterrado es igual a:

$$R_1 = R_1(a) + R_1(2d) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{2d} - 1 \right) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a} + \ln \frac{2l}{2d} - 2 \right)$$

$$R_1 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{\sqrt{2ad}} \right)^2 - 2 \right] = \frac{\rho}{2\pi l} \left( 2 \ln \frac{2l}{a'} - 2 \right) \quad a' = \sqrt{2ad}$$

$$R_1 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'} - 1 \right) \quad \text{cuando } d \ll l$$

Así, cuando un electrodo de banda está enterrado a una profundidad  $d$ , su resistencia es la misma como para una banda en la superficie teniendo un radio equivalente de  $a' = (2ad)^{\frac{1}{2}}$ .

### 3.2.9.2.1 Electrodo múltiple de bandas paralelas.

La resistencia combinada de dos bandas paralelas a una profundidad  $d$  separadas por la distancia  $a_{12}$  pequeña comparada con la longitud de los electrodos es igual a:

$$R_2 = \frac{1}{2} [R_1(a) + R_1(a_{12})]$$

La mutua resistencia  $R_1(a_{12})$  de las dos bandas es dada por:

$$R_1(a_{12}) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a_{12}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{12}} - 1 \right) = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{\sqrt{a_{12}a'_{12}}} \right)^2 - 2 \right] = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ 2 \ln \left( \frac{2l}{\sqrt{a_{12}a'_{12}}} \right) - 2 \right]$$

$$R_1(a_{12}) = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{\sqrt{a_{12}a'_{12}}} - 1 \right)$$

Donde  $a_{12}$  es la separación entre bandas,  $a'_{12} = (a_{12} + 4d^2)^{\frac{1}{2}}$  es la distancia de una banda con la imagen de la otra, y  $(a_{12}a'_{12})^{\frac{1}{2}}$  es la separación efectiva.

La resistencia propia de la banda  $R_1(a)$  es igual a:

$$R_1(a) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{2d} - 1 \right) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 + \ln \frac{2l}{2d} - 1 \right) = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{\sqrt{2ad}} \right)^2 - 2 \right]$$

$$R_1(a) = \frac{\rho}{2\pi l} \left( 2 \ln \frac{2l}{\sqrt{2ad}} - 2 \right) = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{\sqrt{2ad}} - 1 \right)$$

La resistencia combinada de dos bandas paralelas es por lo tanto:

$$R_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{\sqrt{2ad}} - 1 \right) + \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{\sqrt{a_{12}a'_{12}}} - 1 \right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{\sqrt{2ad}} - 1 + \ln \frac{2l}{\sqrt{a_{12}a'_{12}}} - 1 \right)$$

$$R_2 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a'} \right)^2 - 2 \right] = \frac{\rho}{2\pi l} \left( 2 \ln \frac{2l}{a'} - 2 \right) = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'} - 1 \right)$$

$$R_2 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'} - 1 \right) \quad a_{12} \ll l \ ; \ d \ll l$$

Donde el radio equivalente de una banda en la superficie es igual a:

$$a' = \left[ (2ad)^{\frac{1}{2}} (a_{12}a'_{12})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para calcular la resistencia combinada de un arreglo de electrodos de banda de más de dos electrodos individuales se sigue el mismo proceso que se hizo para obtener la resistencia combinada de un electrodo múltiple en línea, esto es, suponer iguales corrientes en los electrodos individuales, calcular la resistencia combinada del arreglo respecto a cada electrodo individual y tomar el valor promedio.

Así, para tres bandas de radio  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  a diferentes profundidades, su resistencia combinada se calcula de la siguiente forma:

La resistencia combinada del arreglo respecto del conductor 1:

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a_1} - 1 + \ln \frac{2l}{2d_1} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{12}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{12}} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{13}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{13}} - 1 \right)$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a'_1} \right)^6 - 6 \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( 6 \ln \frac{2l}{a'_1} - 6 \right)$$

$$R_3 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_1} - 1 \right) \quad \text{donde} \quad a'_1 = \left[ (2a_1d_1)^{\frac{1}{2}} (a_{12}a'_{12})^{\frac{1}{2}} (a_{13}a'_{13})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La resistencia combinada del arreglo respecto del conductor 2:

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a_2} - 1 + \ln \frac{2l}{2d_2} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{12}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{12}} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{23}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{23}} - 1 \right)$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a'_2} \right)^6 - 6 \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( 6 \ln \frac{2l}{a'_2} - 6 \right)$$

$$R_3 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_2} - 1 \right) \quad \text{donde} \quad a'_2 = \left[ (2a_2d_2)^{\frac{1}{2}} (a_{12}a'_{12})^{\frac{1}{2}} (a_{23}a'_{23})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La resistencia combinada del arreglo respecto del conductor 3:

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a_3} - 1 + \ln \frac{2l}{2d_3} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{13}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{13}} - 1 + \ln \frac{2l}{a_{23}} - 1 + \ln \frac{2l}{a'_{23}} - 1 \right)$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a'_3} \right)^6 - 6 \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2\pi l} \left( 6 \ln \frac{2l}{a'_3} - 6 \right)$$

$$R_3 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_3} - 1 \right) \quad \text{donde} \quad a'_3 = \left[ (2a_3 d_3)^{\frac{1}{2}} (a_{13} a'_{13})^{\frac{1}{2}} (a_{23} a'_{23})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La resistencia combinada del arreglo es igual a:

$$R_3 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_1} - 1 \right) + \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_2} - 1 \right) + \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'_3} - 1 \right) \right] = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\pi l} \left[ \ln \left( \frac{2l}{a'} \right)^3 - 3 \right]$$

$$R_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\pi l} \left[ 3 \ln \left( \frac{2l}{a'} \right) - 3 \right]$$

$$R_3 = \frac{\rho}{\pi l} \left( \ln \frac{2l}{a'} - 1 \right) \quad \text{donde} \quad a' = (a'_1 a'_2 a'_3)^{\frac{1}{3}}$$

En general, cuando varios electrodos de banda son enterrados próximos entre sí, un radio equivalente puede ser empleado. Para un número más grande de bandas el radio equivalente puede ser obtenido por una obvia extensión del anterior análisis.

### 3.2.9.3 Electrodo en anillo enterrado.

Anteriormente se dedujo una expresión para el cálculo de la resistencia del electrodo en

anillo de la forma  $R = \frac{\rho}{2\pi^2 r} \ln \left( 8 \frac{r}{a} \right)$  la cual podía también expresarse en términos de la

longitud del conductor  $l = 2\pi r$ , así:

$$R = \frac{\rho}{\pi l} \ln \left( \frac{4l}{\pi a} \right) = \frac{\rho}{\pi l} \ln \left( \frac{1.2732l}{a} \right)$$

Cuando el electrodo en anillo es enterrado a la profundidad  $d$ , el radio  $a$  en la anterior

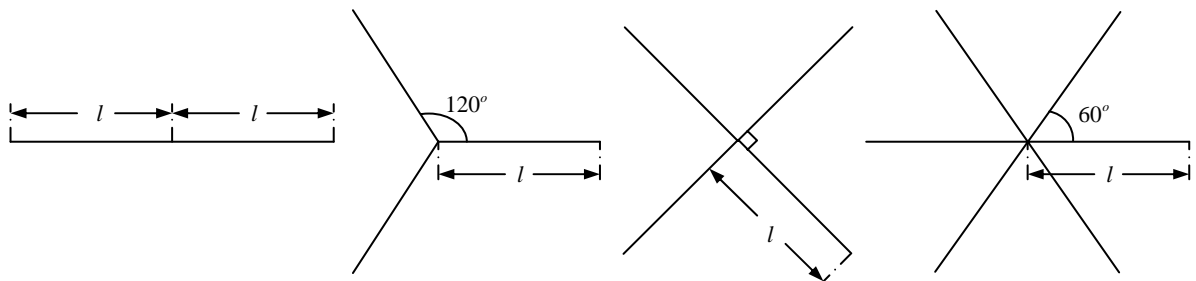
fórmula es reemplazado por el radio equivalente  $a' = (2ad)^{\frac{1}{2}}$ .

La expresión para el cálculo de la resistencia de un electrodo en anillo es similar a la de un electrodo de banda, excepto que el factor 1.27 reemplaza a  $2/e = 0.7357 \dots$ . La resistencia de un electrodo en anillo es por lo tanto ligeramente más grande que un electrodo de banda de la misma longitud.

#### 3.2.9.4 Electrodo múltiple en estrella.

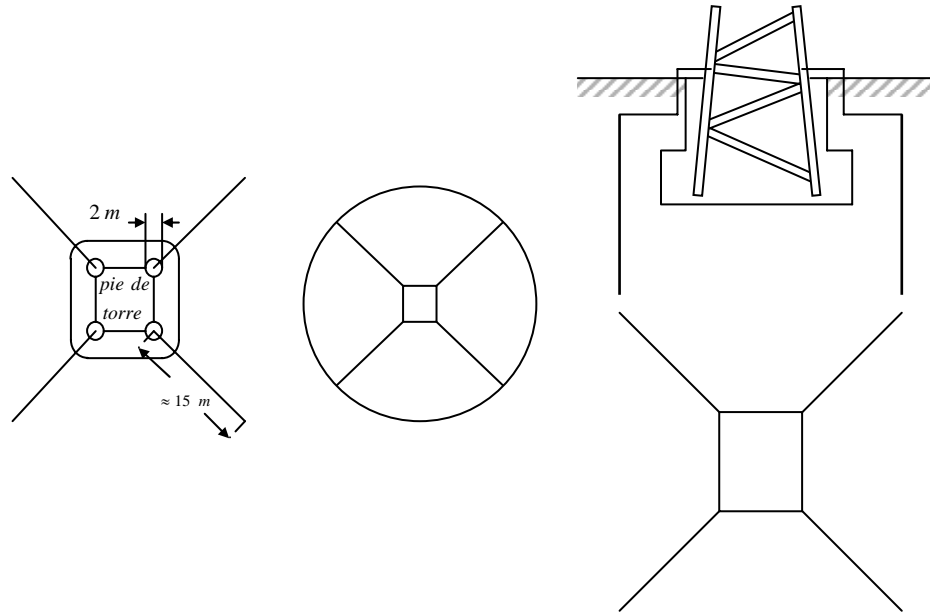
Con electrodos elementales de banda unidos en un punto central, formando figuras en estrella con diferente número de rayos, se construyen los electrodos múltiples conocidos como “electrodos en estrella”, como los mostrados en la figura 109, de los cuales el más común y usado es el que tiene cuatro rayos de igual longitud y con un ángulo de  $90^\circ$  entre ellos.

Figura 109. Electrodos múltiples en estrella.



Este tipo de electrodo es de interés, no tanto por la resistencia que se consigue, en relación a la longitud del conductor utilizado, sino en particular por la eficiente dispersión de corriente de rayo (ondas de impulso) debido a que su impedancia de onda inicial es más baja. Por ello encuentra especial utilización en la puesta a tierra de torres de líneas aéreas de alta tensión, en antenas de transmisión de radio y en toda instalación de protección contra caída de rayos, como por ejemplo, los casos mostrados en la figura 110.

Figura 110. Ejemplos de aplicación de un electrodo múltiple en estrella.



La resistencia mutua entre dos conductores de igual longitud empezando en un punto común y haciendo uno con otro un ángulo  $\theta$  se requiere con el fin de obtener la resistencia combinada de este tipo de arreglo de electrodos. Usando el método del potencial promedio, esta resistencia mutua es obtenida al integrar la expresión del potencial de un electrodo de banda (obtenida en el análisis por el método del potencial promedio) a lo largo de una línea recta  $y = kx = x \sin \theta$ , con  $x$  tomada de un extremo de la banda más bien que del punto medio. La mutua resistencia así obtenida es:

$$R_0(\theta) = \frac{\rho}{\pi l} \ln \frac{1 + \sin \theta/2}{\sin \theta/2}$$

Esta fórmula es deducida de la misma forma como la inductancia mutua entre conductores, excepto que en ésta el factor  $\cos \theta \nu l / 2\pi$  reemplaza a  $\rho / 2\pi l$ , siendo  $\nu$  la inductividad en  $[H/m]$ .

Con esta modificación, las fórmulas dadas por Campbell[15] para el cálculo de las inductancias propias y mutuas de conductores rectos para las condiciones dadas arriba y para otras condiciones, como por ejemplo para conductores de diferente longitud no

empezando en un punto común, también aplican para el cálculo de la resistencia propia y mutua.

Cuando  $n$  conductores de igual longitud irradian en el mismo plano desde un punto común, con iguales ángulos  $\theta = 2\pi/n$  entre conductores adyacentes de modo que todos llevan la misma corriente, la resistencia combinada es igual a:

$$R_n = \frac{1}{n} \left[ R_1(a) + \sum_{m=1}^{n-1} R_0(2\pi m/n) \right]$$

Donde  $R_0$  es la mutua resistencia entre los conductores 1 y  $m$ , los ángulos entre los cuales son  $\theta = 2\pi m/n$ . Así que:

$$R_2 = \frac{1}{2} [R_1(a) + R_0(\pi)]$$

$$R_3 = \frac{1}{3} [R_1(a) + 2R_0(2\pi/3)]$$

$$R_4 = \frac{1}{4} [R_1(a) + 2R_0(\pi/2) + R_0(\pi)]$$

$$R_5 = \frac{1}{5} [R_1(a) + 2R_0(2\pi/5) + 2R_0(4\pi/5)]$$

$$R_6 = \frac{1}{6} [R_1(a) + 2R_0(\pi/3) + 2R_0(2\pi/3) + R_0(\pi)]$$

Para  $n$  conductores radiales la siguiente fórmula es obtenida por el uso de  $R_n$ :

$$R_n = \frac{\rho}{n\pi l} \left[ \ln \frac{2l}{a} - 1 + N(n) \right] \quad \text{donde } N(n) = \sum_{m=1}^{n-1} \ln \frac{1 + \sin m\pi/n}{\sin m\pi/n}$$

Cuando los conductores están enterrados a una profundidad  $d$ , el radio  $a$  es reemplazado por el radio equivalente  $a' = (2ad)^{1/2}$ . En la anterior fórmula se asume que el ángulo entre dos conductores adyacentes cualquiera es el mismo así que en el caso de  $n=2$  los conductores se extienden en dirección opuesta desde un punto común. La fórmula dada arriba es entonces la misma como aquella para un electrodo de banda de longitud  $2l$ . Si los dos conductores estuvieran en ángulos rectos unos con otros podría haber sido 0,88 en lugar de 0,693...

### 3.2.9.5 Electrodo de banda enterrado combinado con picas.

Cuando un número de electrodos de pica son interconectados por un conductor desnudo de cobre enterrado, este último ayudará a dispersar la corriente en el terreno circundante, actuando como un electrodo más en el arreglo (como un electrodo de banda). A simple vista parece ventajoso interconectar los electrodos de esta forma pero no debe olvidarse que la eficiencia del arreglo se reduce debido a que el conductor desnudo de cobre perturbará los campos de corriente de los electrodos de pica.

La fórmula de Schwarz establece que la resistencia de un arreglo de electrodos que consiste de una combinación de electrodos horizontales (bandas) y electrodos verticales (picas) es más baja que la resistencia de cualquiera de sus componentes en solitario, pero más alta que su combinación en paralelo. Esto es expresado matemáticamente de la siguiente forma:

$$R = \frac{R_w R_r - R_{wr}^2}{R_w + R_r - 2R_{wr}}$$

Donde

$R_w$  = resistencia a tierra del conductor desnudo de cobre (banda) solo.

$R_r$  = resistencia combinada de los electrodos de pica cuando se interconectan por un conductor aislado.

$R_{wr}$  = la resistencia mutua del conductor y las picas.

Esta última puede ser obtenida al tomar el potencial promedio a lo largo de la longitud de las picas debido a la corriente en el conductor.

Se asume que la longitud del conductor  $l_w$  es mucho más grande que la longitud de las picas  $l_r$ , de modo que el potencial varía logarítmicamente con la separación. El potencial promedio a lo largo de las picas es entonces obtenido al usar la separación equivalente  $y = l_r/e$ . Para picas en línea recta, la resistencia mutua de la expresión de cálculo de la resistencia del electrodo de banda con  $a = y$  y es igual a:

$$R_{wr} = \frac{\rho}{\pi l_w} \left( \ln \frac{2el_w}{l_r} - 1 \right) = \frac{\rho}{\pi l_w} \left( \ln \frac{2el_w}{l_r} - \ln e \right) = \frac{\rho}{\pi l_w} \left( \ln \frac{2l_w}{l_r} \right)$$

Para picas en un círculo la resistencia mutua es obtenida de manera similar con  $a = y$  en la expresión de cálculo de la resistencia de un anillo circular, así:

$$R_{wr} = \frac{\rho}{2\pi^2 r} \ln\left(\frac{8r}{l_r/e}\right) = \frac{\rho}{2\pi^2 r} \ln\left(\frac{8er}{l_r}\right)$$

### 3.2.9.6 Radio equivalente de conductores planos.

Si una cinta es usada en lugar de un conductor de sección circular, una resistencia un poco más baja puede ser obtenida con la misma cantidad de cobre.

El radio equivalente de una cinta delgada de ancho  $a_0$  es obtenido por el método del potencial promedio, asumiendo que la cinta consiste de un número de conductores infinitesimales y que son lo suficientemente largos de modo que el potencial varía logarítmicamente con la distancia. La razón del potencial promedio a la corriente es entonces proporcional a:

$$\frac{\bar{V}}{I} \cong \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} \int_0^{a_0} \ln(x-u) dx du = \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} \left[ \int_0^{a_0} \ln(x-u) du \right] dx = \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} [-(x-u)\ln(x-u) + (x-u)]_0^{a_0} dx$$

$$\frac{\bar{V}}{I} \cong \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} [-(x-a_0)\ln(x-a_0) + (x-a_0) + x \ln x - x] dx$$

$$\frac{\bar{V}}{I} \cong \frac{1}{a_0^2} \left[ -\frac{(x-a_0)^2}{2} \ln(x-a_0) + \frac{(x-a_0)^2}{4} + \frac{x^2}{2} - a_0 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{a_0}$$

$$\frac{\bar{V}}{I} \cong \frac{1}{a_0^2} \left[ -a_0^2 + \frac{a_0^2}{2} \ln a_0 - \frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0^2}{2} \ln a_0 - \frac{a_0^2}{4} \right] = \frac{1}{a_0^2} \left[ a_0^2 \ln a_0 - \frac{3}{2} a_0^2 \right] = \ln a_0 - \frac{3}{2} = \ln a_0 - \ln e^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\bar{V}}{I} = \ln\left(\frac{a_0}{e^{3/2}}\right)$$

El radio equivalente de la cinta de ancho  $a_0$  es por lo tanto igual a:

$$a = a_0 / e^{3/2} \cong 0,2231 a_0.$$

Por comparación, si la cinta es curvada en la forma de un cilindro hueco, el radio equivalente será igual a:  $2\pi a = a_0 \rightarrow a = a_0 / 2\pi \cong 0,1591 a_0$

### 3.2.10 Puesta a tierra de placa.

En algunos casos se usan electrodos de banda formando mallas cuadriculadas para obtener una puesta a tierra de baja resistencia. Cuando las mallas de esas redes no son demasiado grandes, la resistencia a tierra será prácticamente la misma como para una placa sólida, esto es, su resistencia se puede calcular como se hizo para un electrodo de placa circular, haciendo la equivalencia de áreas.

La resistencia de un electrodo de placa circular de radio  $a$  en la superficie de la tierra se calculó por medio de la expresión  $R = \frac{\rho}{4a}$ . Cuando la placa está enterrada a una profundidad,  $d$ , más grande que el radio de la misma, de modo que la distancia efectiva a la imagen puede ser tomada como  $2d$ , su resistencia llega a ser:

$$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{8\pi d}$$

En otras palabras, como la profundidad a la cual está enterrada la placa es mucho mayor que su radio, se puede calcular el efecto de su imagen por medio de la expresión de cálculo del potencial de un electrodo puntual o esférico.

Para obtener la resistencia de una placa circular a una profundidad pequeña comparada con su diámetro, se considera primero la resistencia serie en un medio homogéneo de infinita extensión en todas direcciones de dos electrodos de placa circulares separados por la distancia  $2d \ll a$ . Para calcular esta resistencia, únicamente el medio entre las placas necesita ser considerado, y es por ley de ohm igual a  $\frac{2\rho d}{\pi a^2}$ . Esta resistencia es igual a dos veces la diferencia entre las resistencias propia y mutua de las placas, de modo que la resistencia mutua es  $\frac{\rho}{8a} - \frac{\rho d}{\pi a^2}$ . La resistencia de una placa enterrada a la profundidad  $d \ll a$  es entonces:



El voltaje en cada uno de los electrodos es dado por la suma de todos los potenciales producidos por la pica considerada y todas las otras picas. Para la pica 1, por ejemplo, el voltaje es:

$$E_1 = \frac{\rho}{2\pi l} \left[ I_1 \ln \left( \cot \frac{\beta_1}{2} \right) + I_2 \ln \left( \cot \frac{\beta_2}{2} \right) + \dots \right]$$

Las corrientes de las picas no han sido aún determinadas, pero por cuestiones de simplicidad la resistividad del suelo y la longitud de todas las picas han sido tomadas uniformes. El número de ecuaciones de este tipo que pueden desarrollarse depende del número de picas que componen el electrodo múltiple; los ángulos  $\beta$  significan siempre los ángulos de visión desde el fondo de cada pica hacia la superficie de la pica considerada, como es visto en la figura 111. Por lo tanto, para cualquier arreglo de picas un suficiente número de ecuaciones es obtenido para determinar como se distribuye la corriente del electrodo entre los electrodos individuales del arreglo.

La primera cotangente de la anterior ecuación, se refiere al potencial propio del electrodo y puede ser evaluada por la ecuación:  $\cot \frac{\beta}{2} \cong \frac{2l}{a}$

Las cotangentes adicionales, las cuales se refieren a la influencia mutua de las otras picas, pueden ser expresadas, como es mostrado en la figura 111, por la razón de la longitud  $l$  de la pica con la distancia  $a_n$ , que resulta del corte del ángulo  $\beta/2$  con la distancia  $A_n$  entre las picas. Así que:

$$\cot \frac{\beta_1}{2} = \frac{l}{a/2} ; \quad \cot \frac{\beta_n}{2} = \frac{l}{a_n}$$

Si los electrodos de pica están colocados simétricamente unos con otros, los voltajes y las corrientes son:

$$E_1 = E_2 = E_3 \dots = E \quad ; \quad I_1 = I_2 = I_3 \dots = \frac{I}{n}$$

Por lo tanto, todas las expresiones para el cálculo del potencial de los electrodos individuales de pica toman la forma:

$$E = \frac{\rho}{2\pi l} \frac{I}{n} \left[ \ln \left( \frac{l}{a/2} \cdot \frac{l}{a_2} \cdot \frac{l}{a_3} \dots \right) \right]$$

Para cada caso la anterior ecuación puede ser evaluada fácilmente, pero tres ejemplos significativos pueden ser considerados en detalle.

1) Para grandes razones  $A_n/l$ , con las picas distantes unas de otras, evidentemente

$$\beta_n/2 = 45^\circ \rightarrow \cot 45^\circ = 1 = \frac{l}{a_n} \rightarrow a_n = l. \text{ Así que todos los cocientes son } \frac{l}{a_n} = 1 \text{ y la}$$

$$\text{resistencia combinada es } R = \frac{E}{I} = \frac{1}{n} \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{a} \right)$$

En este caso, el valor óhmico es reducido en proporción inversa con el número de picas en paralelo.

2) Para pequeñas proporciones  $A_n/l$ , con las picas próximas entre sí, los ángulos  $\beta$  son

$$\text{pequeños de modo que } \cot(\beta/2) = \frac{\cos(\beta/2)}{\sin(\beta/2)} \approx \frac{1}{\sin(\beta/2)} = \frac{l}{a_n}$$

$$\text{Pero } \sin(\beta/2) \approx \frac{A_n/2}{l} \rightarrow \frac{2l}{A_n} = \frac{l}{a_n} \rightarrow a_n = A_n/2$$

Por lo tanto, si el número de picas  $n$  es colocado bajo el logaritmo, la resistencia llega a ser:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{\sqrt[n]{aA_2A_3A_4 \dots}} \right) = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{A} \right)$$

En el término de la derecha se ha expresado la raíz enésima del producto de las distancias entre todos los electrodos y el primer electrodo, incluyendo el radio del primer electrodo, por la distancia media geométrica.

$$A = \sqrt[n]{aA_2A_3A_4 \dots}$$

Comparando la ecuación de cálculo de la resistencia combinada de un arreglo de electrodos de pica colocados próximos entre sí con la de un electrodo individual de pica puede concluirse que este arreglo se comporta como si allí sólo existiera un electrodo de

pica de radio  $A$ . En la tabla 25,  $A$  es evaluada para tres ejemplos simples. Como  $A$  está en el denominador dentro del logaritmo, la resistencia total a tierra de tal arreglo de electrodos llega a ser disminuida solo ligeramente con un incremento en el número de picas.

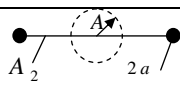
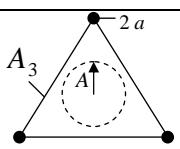
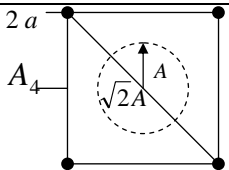
- 3) Para razones medias  $A_n/l = 1$ , donde las picas son colocadas a distancias iguales a su longitud, evidentemente  $\beta_n = 45^\circ$ , de modo que  $\cot \beta_n/2 = 2,4142$ . Por ejemplo, para  $n = 3$  picas, la parte característica de la ecuación de cálculo de la resistencia combinada del arreglo resulta:

$$\frac{1}{3} \ln \left( \frac{l}{a/2} \cdot 2,4142 \cdot 2,4142 \right)$$

Y para valores de  $l = 3 \text{ m}$ ,  $a = 2,5 \text{ cm}$  y  $\rho = 100 \text{ ohm-m}$ , la resistencia combinada

es igual a:  $R = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \frac{1}{3} \ln \left( \frac{3}{0,025/2} \cdot 2,4142^2 \right) = 12,8 \Omega$

Tabla 25. Distancia media geométrica de picas paralelas.

| $n$ | Arreglo   | $A$                        |
|-----|---|----------------------------|
| 2   |  | $\sqrt{aA_2}$              |
| 3   |  | $\sqrt[3]{aA_3^2}$         |
| 4   |  | $\sqrt[4]{\sqrt{2}aA_4^3}$ |

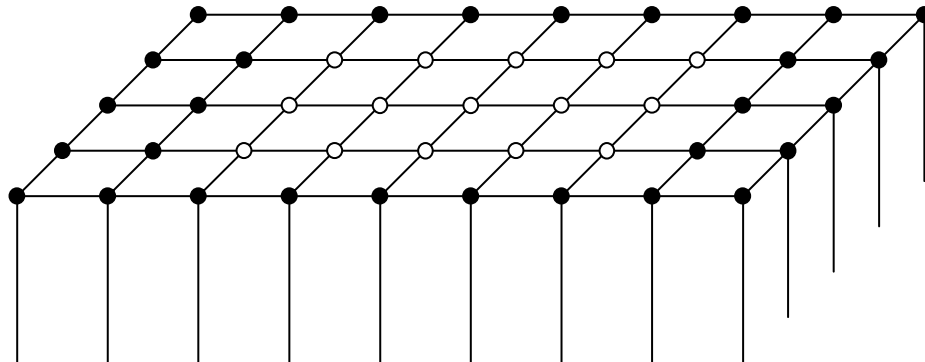
Si las picas están colocadas lejos unas de otras  $A_n = \infty$  y la resistencia es igual a:

$$R = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2 \cdot 3}{0,025}\right) = 9,69 \Omega$$

De modo que las tres picas con una separación igual a su longitud experimentan una influencia mutua la cual incrementa su resistencia en un 24 % .

Con el fin de obtener una baja resistencia a tierra en suelo malo de alta resistividad, es a menudo necesario un arreglo con bastante número de picas enterradas colocadas en líneas o sobre un área extensa. En tales mallas a tierra, como en la figura 112, las picas interiores llevan más baja corriente que las picas exteriores debido a la influencia mutua de las picas circundantes. En cada caso la aplicación del apropiado número de ecuaciones da la solución correcta para la distribución de corriente y el valor óhmico total de la resistencia de tierra.

Figura 112. Malla a tierra.



## 4. PUESTA A TIERRA EN UN TERRENO ESTRATIFICADO

### 4.1 GENERALIDADES

Las ecuaciones usualmente usadas en cálculos de seguridad para electrodos de puesta a tierra han sido derivadas partiendo de las siguientes suposiciones:

1. Terreno de naturaleza homogénea (que presenta la misma resistividad en todo su volumen).
2. Uniforme densidad de corriente en la superficie del electrodo.

En realidad el subsuelo presenta variaciones en su resistividad tanto en la dirección horizontal como en la vertical. En general, la variación de la resistividad en la dirección horizontal es gradual comparada con el tamaño del electrodo, y puede por lo tanto ser despreciada al calcular los potenciales en la cercanía del electrodo. En la dirección vertical, sin embargo, la tierra puede estar estratificada en dos o más capas distintas teniendo diferentes resistividades. Es también posible que esas capas no sean muy distintas, dando aparición a una casi continua variación de la resistividad del terreno con la profundidad.

En la mayoría de los casos, la variación de la resistencia de la tierra puede ser razonablemente caracterizada por un modelo (más realista) de tierra de dos capas, que comprende una capa superior de profundidad finita seguida por una capa de diferente resistividad que se extiende abajo prácticamente en el infinito.

Los principales factores que afectan el diseño de los electrodos de puesta a tierra, a saber resistencia, distribución de la corriente a través de la frontera electrodo suelo, distribución del potencial en la cercanía del electrodo, resistencia de contacto del pie con el suelo, pueden ser afectados significativamente por las características de resistividad de las dos capas.

La suposición de densidad de corriente constante en la superficie del electrodo sólo es válida para la configuración del electrodo en anillo circular debido a su simetría inherente. En el caso general, sin embargo, la densidad de corriente no es uniforme en la superficie del electrodo.

Para el diseño de aplicaciones que involucran puestas a tierra relativamente simples de arreglos de electrodos enterrados en un suelo razonablemente uniforme, los métodos aproximados serán adecuados para obtener un diseño realista con márgenes de seguridad adecuados. No obstante, para diseños que involucran un área grande de la puesta a tierra (como las requeridas en las centrales de generación y subestaciones) resulta imposible admitir la hipótesis de la disipación uniforme de corriente. En estos casos, pueden obtenerse resultados bastante rigurosos siguiendo cualquiera de los procedimientos que se enuncian a continuación:

- Admitir en principio, la disipación uniforme y aplicar posteriormente, coeficientes correctores obtenidos de estudios experimentales sobre modelos en cubas electrolíticas (método de la IEEE.)

- Hacer uso de cálculo numérico por ordenador, subdividiendo el electrodo (generalmente una malla) en un número de pequeños segmentos elementales rectilíneos, tanto más elevado como compleja sea la geometría de la toma de tierra, a los que se le asignan intensidades de disipación diferente, que pueden determinarse mediante el establecimiento de tantas ecuaciones como subdivisiones se hagan del electrodo, de forma que se cumpla la equipotencialidad del mismo.

- Utilizar un método iterativo, basado también, en la citada equipotencialidad.

Para el presente proyecto se supondrá siempre uniforme densidad de corriente del electrodo ya que las puestas a tierra de las instalaciones de tercera categoría no son de gran extensión.

Es práctica común el tener una capa delgada de grava cubriendo el área de la subestación. Podría parecer que tal capa de alta resistividad, teniendo la capa la altura  $h$ , mucho menor que la profundidad del sistema de puesta a tierra, podría empeorar tanto el voltaje de paso y de contacto. Este no es el caso puesto que la superficie de grava es usada para aumentar la resistencia de contacto entre los pies de una persona y la superficie del suelo. Así, para una corriente de cuerpo máxima permitida, voltajes de contacto y de paso considerablemente más altos son necesarios, si una superficie de grava está presente.

#### 4.2 ELECTRODO PUNTUAL EN UN TERRENO DE DOS CAPAS

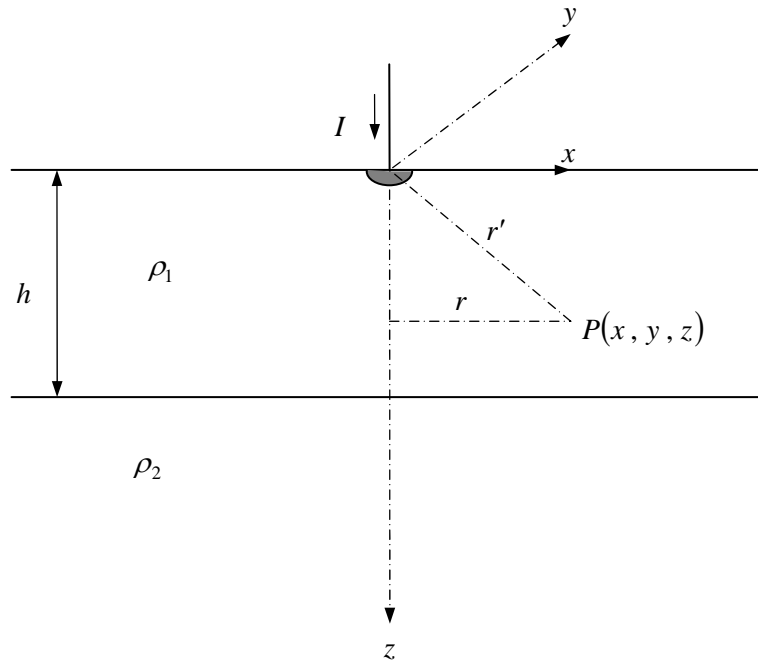
Las ecuaciones que gobiernan el desempeño de un sistema de puesta a tierra enterrado en un suelo multicapa pueden ser obtenidas al resolver la ecuación de Laplace para una fuente de corriente puntual, o por el método de imágenes, el cual da idénticos resultados. El uso de uno u otro método para determinar el potencial de tierra resulta en una serie infinita de términos que representan las contribuciones de cada imagen de la fuente de corriente puntual.

El problema consiste en hallar el potencial a nivel del suelo de un electrodo puntual que se encuentra en la superficie de un terreno compuesto de una capa superior de resistividad  $\rho_1$  y espesor  $h$ , cubriendo una segunda capa de resistividad  $\rho_2$ , que se extiende a infinita profundidad como se muestra en la figura 113.

En el método convencional de solución de este y otros problemas similares, el campo resultante se asume de consistir de dos componentes, un campo principal algunas veces también llamado como el campo impreso y un campo secundario.

El campo principal es usualmente el campo para un caso simple conocido, aquel de la tierra uniforme, mientras el campo secundario es debido a corrientes o cargas inducidas en cuerpos colocados en el campo principal. Los potenciales resultantes  $\phi_1$  y  $\phi_2$  dentro de las capas superiores e inferiores pueden ser escritos así:

Figura 113. Electrodo puntual en un terreno de dos capas.



$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi' + \varphi_1'' \\ \varphi_2 &= \varphi' + \varphi_2'' \end{aligned} \quad (34)$$

Donde  $\varphi'$  es el campo principal,  $\varphi_1''$  el campo secundario en la capa superior, y  $\varphi_2''$  aquel en la capa más baja. Cada uno de ellos en función de las coordenadas,  $\varphi'$  siendo una función que aplica tanto en la capa superior como en las capas más bajas.

Si un electrodo puntual es considerado, y el eje  $z$  es asumido con extenderse en la tierra a través del electrodo, es evidente que para una tierra uniforme o una tierra horizontalmente estratificada hay simetría circular alrededor del eje  $z$ .

El potencial en un punto en la tierra entonces depende de  $z$  y la distancia radial, paralela a la superficie de la tierra, a el punto  $P$ . Así, en el caso de una tierra de resistividad  $\rho_1$  igual a aquella de la capa superior,  $\varphi' = \frac{I\rho_1}{2\pi} (z^2 + r^2)^{-1/2}$

Por medio de una transformación de Fourier, el término  $(z^2 + r^2)^{-1/2}$  en esta expresión puede ser escrito en la forma:

$$(z^2 + r^2)^{-1/2} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma \cdot z} f(\sigma r) d\sigma$$

$$\text{Donde } f(\sigma r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda \cdot z} (z^2 + r^2)^{-1/2} dz = J_0(\sigma r)$$

Por lo tanto

$$\varphi' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma \cdot z} J_0(\sigma r) d\sigma$$

Por la anterior transformación, el potencial principal ha sido llevado a una forma que involucra  $z$  y  $r$  en funciones separadas. También esta forma de solución puede ser generalizada a otros casos que involucran el mismo tipo de simetría, al multiplicar el integrando por una función arbitraria de  $\sigma$ .

Los potenciales secundarios  $\varphi_1''$  y  $\varphi_2''$  se obtienen al resolver la ecuación de Laplace con las condiciones de frontera de este problema particular, así:

El potencial  $\varphi$  en un punto  $P$  debe satisfacer la ecuación de Laplace. Como existe simetría cilíndrica, la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Para resolver esta ecuación, se asume que la solución puede ser escrita como el producto de dos funciones, cada una involucrando sólo una de las variables, así:

$$\varphi'' = \theta(r) \cdot \Psi(z)$$

Sustituyendo  $\varphi''$  en la ecuación de Laplace y reorganizando, conduce a:

$$\frac{1}{\theta(r)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r\theta(r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{\Psi(z)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

Donde los dos primeros términos y el lado de la mano derecha son independientes de  $z$ , el tercer término debe ser igual a alguna constante independiente de  $z$  que será designada como  $\sigma^2$ , en aquel caso la ecuación para  $\psi$  y su solución es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \sigma^2 ; \Psi(z) = A(\sigma) e^{-\sigma \cdot z} + B(\sigma) e^{\sigma \cdot z}$$

Sustituyendo  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \sigma^2$  en la ecuación diferencial resulta:

$$\frac{1}{\theta(r)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r\theta(r)} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \sigma^2 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \sigma^2 \theta = 0$$

La solución de esta ecuación contiene términos de la función de Bessel tanto del primer como del segundo tipo

$$\theta(r) = C(\sigma) \cdot J_0(\sigma \cdot r) + D(\sigma) \cdot Y_0(\sigma \cdot r)$$

La función  $Y_0(\sigma \cdot r)$  no puede ser retenida en este caso, donde esta tiende al infinito cuando  $r$  es pequeña. Por lo tanto, su coeficiente  $D$  debe ser idéntico a cero. La solución de la ecuación de Laplace es por lo tanto:

$$\varphi'' = \theta(r) \cdot \Psi(z) = \sum_1^m [\beta(\sigma) \cdot J_0(\sigma) \cdot e^{\sigma \cdot z} + \theta(\sigma) \cdot J_0(\sigma) \cdot e^{-\sigma \cdot z}] = \sum_1^m [\beta(\sigma) \cdot e^{\sigma \cdot z} + \theta(\sigma) \cdot e^{-\sigma \cdot z}] \cdot J_0(\sigma)$$

Donde

$$\beta(\sigma) = A(\sigma) \cdot C(\sigma) \quad \text{y} \quad \theta(\sigma) = B(\sigma) \cdot C(\sigma)$$

Como cualquier combinación lineal de términos en la anterior ecuación es aceptable, la solución general de la ecuación de Laplace puede contener un número infinito de términos con diferentes valores de  $\sigma$ . Donde  $\sigma$  es arbitraria y así, puede variar continuamente, la solución general debe ser dada por:

$$\varphi'' = \int_0^{\infty} [\beta(\sigma) \cdot e^{\sigma \cdot z} + \theta(\sigma) \cdot e^{-\sigma \cdot z}] \cdot J_0(\sigma) d\sigma \quad (35)$$

Los valores de las constantes  $\beta$  y  $\theta$  son determinadas de las siguientes condiciones de frontera:

1) Los potenciales en las capas inferior y superior deben ser iguales en la frontera entre las dos capas.

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) ; z = h$$

2) En la interfase entre las dos capas ( $z = h$ ), la componente normal del flujo de corriente debe ser continua.

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} ; z = h$$

3) Ninguna corriente puede fluir a través de la capa superior y la frontera de aire.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 ; (z = 0)$$

4) Como  $z$  tiende a infinito, el potencial tiende a cero.

$$\varphi_2(z) = 0 ; z \rightarrow \infty$$

Los potenciales secundarios de la capa superior y la del fondo  $\varphi_1''$  y  $\varphi_2''$  son dados por la ecuación (35) donde  $\beta$  y  $\theta$  son reemplazadas por  $\beta_1, \theta_1$  y  $\beta_2, \theta_2$  respectivamente, esto es:

$$\varphi_1'' = \int_0^{\infty} [\beta_1(\sigma) \cdot e^{\sigma z} + \theta_1(\sigma) \cdot e^{-\sigma z}] \cdot J_0(\sigma) d\sigma$$

$$\varphi_2'' = \int_0^{\infty} [\beta_2(\sigma) \cdot e^{\sigma z} + \theta_2(\sigma) \cdot e^{-\sigma z}] \cdot J_0(\sigma) d\sigma$$

De las condiciones de frontera y de la ecuación (35) con  $\varphi' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma z} J_0(\sigma) d\sigma$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta_1(\sigma) [e^{\sigma h} + e^{-\sigma h}] - \theta_2(\sigma) \cdot e^{-\sigma h} = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1} \beta_1(\sigma) [e^{\sigma h} + e^{-\sigma h}] + \frac{1}{\rho_2} \theta_2(\sigma) \cdot e^{-\sigma h} = \frac{I}{2\pi} e^{-\sigma h} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

De cuya solución se obtiene:

$$\beta_1(\sigma) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{ke^{-2\sigma h}}{1 - ke^{-2\sigma h}}$$

$$\beta_1(\sigma) = \frac{I\rho_1}{2\pi} [ke^{-2\sigma h} + k^2 e^{-4\sigma h} + k^3 e^{-6\sigma h} \dots] = \sum_{n=1}^{\infty} k^n e^{-2n\sigma h}$$

Donde  $k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$

El potencial en la superficie de la tierra  $\varphi_1(z=0)$  para un electrodo semiesférico es por lo tanto:

$$\varphi_1 = \varphi' + \varphi_1'' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\sigma \cdot z} J_0(\sigma r) d\sigma + 2 \int_0^\infty \beta_1(\sigma) J_0(\sigma r) d\sigma \right\}$$

$$\varphi_1 = \varphi' + \varphi_1'' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\sigma \cdot z} J_0(\sigma r) d\sigma + 2 \int_0^\infty \frac{ke^{-2\sigma \cdot h}}{1 - ke^{-2\sigma \cdot h}} J_0(\sigma r) d\sigma \right\}$$

$$\varphi_1 = \varphi' + \varphi_1'' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\sigma \cdot z} J_0(\sigma r) d\sigma + 2 \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty k^n e^{-2n\sigma \cdot h} \right) \cdot J_0(\sigma r) d\sigma \right\}$$

$$\varphi_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{k^n}{[1 + (2nh/r)^2]^{1/2}} \right\}$$

Por lo tanto el potencial consiste de dos partes:

- Un potencial normal  $\frac{I\rho_1}{2\pi r}$  que existe si el suelo fuera uniforme (capa infinita de resistividad  $\rho_1$ ).
- Una perturbación de potencial causada por la presencia de una capa de profundidad finita teniendo una resistividad diferente  $\rho_2$  que la capa superior. Esta perturbación es calculada al añadir los potenciales debidos a un infinito número de imágenes  $k, k^2, k^3 \dots$  debajo de la superficie de la tierra, a distancias  $z = 2h, 4h, 6h \dots$

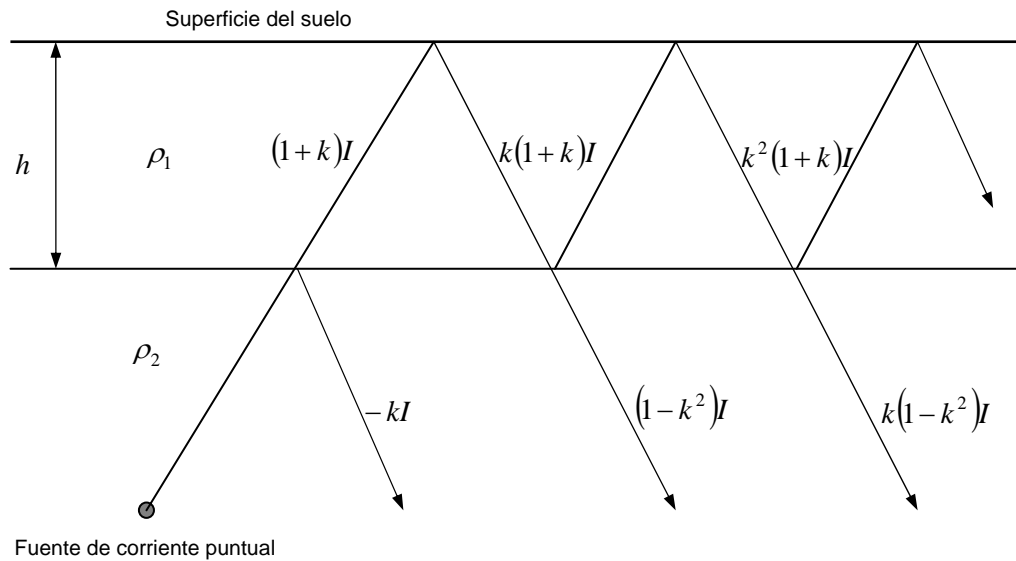
Si la fuente de corriente puntual se encuentra a cierta profundidad, el potencial en un punto en la superficie se calcula de diferente forma dependiendo de en cual capa se encuentra la fuente de corriente.

Como puede observarse en la anterior ecuación, los cambios abruptos en la resistividad en las fronteras de cada capa de suelo pueden ser descritos por medio de un factor de reflexión.  $k$ . En la figura 114, un observador en la capa más baja de suelo podría mirar una fuente de corriente de magnitud  $I$ , una imagen reflejada de la interfase de subsuelo de magnitud  $-kI$ , y una infinita serie de imágenes reflejadas de la superficie de suelo de magnitudes  $k^n(1-k^2)I$ , donde  $n$  va desde cero al infinito. Un observador en la capa

superior podría mirar una fuente y su reflexión encima de la superficie del suelo, con magnitud aparente  $(1+k)I$ , y una infinita serie de pares de reflexiones teniendo magnitud  $k^n(1+k)I$ , donde  $n$  va de uno al infinito.

Estas reflexiones estarán a sucesivamente más grandes profundidades. Una figura similar puede ser dibujada para representar el caso de una fuente de corriente en la capa de suelo superior.

Figura 114. Reflexiones de corriente en un suelo de dos capas con una fuente de corriente en el suelo más bajo

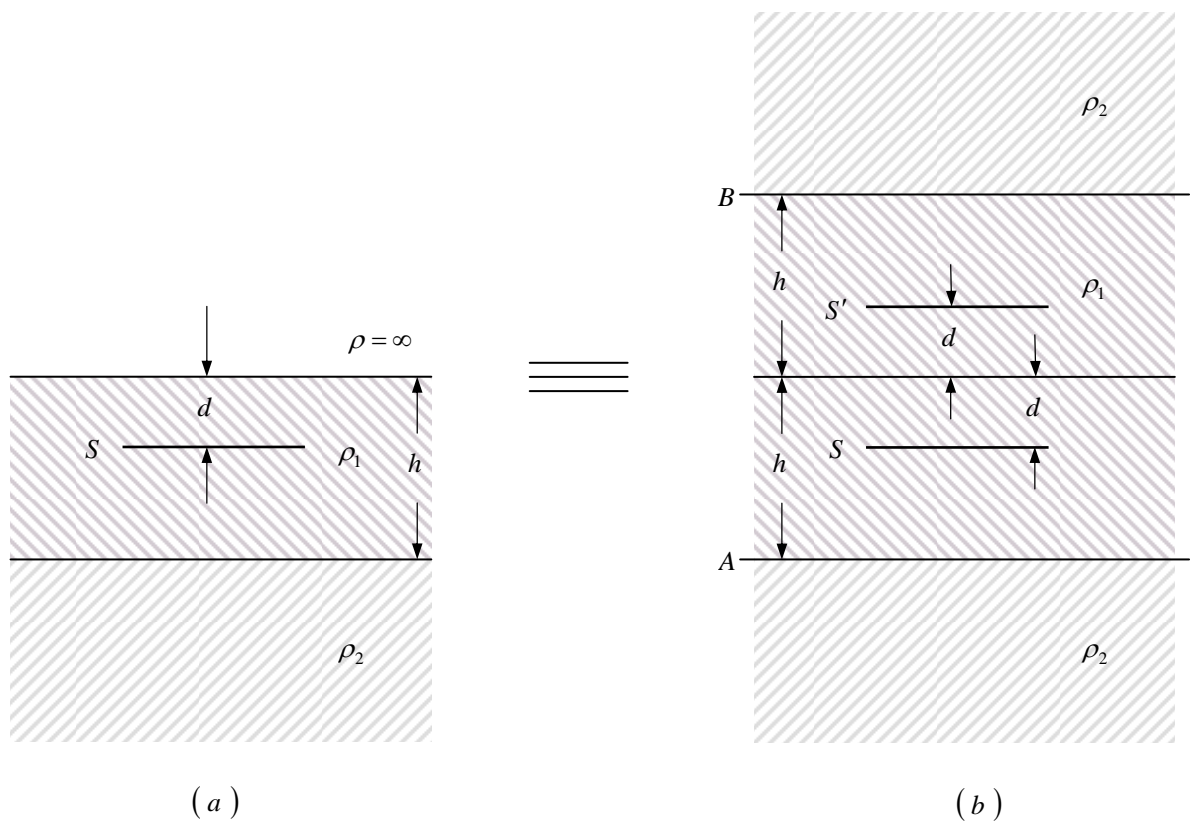


#### 4.2.1 Efecto de una fuente puntual en la capa superior en un punto en la capa superior.

Considerando un elemento de corriente infinitesimal  $S$  teniendo uniforme distribución de corriente a una profundidad  $d$  debajo de la superficie en la capa superior de una tierra de dos capas, como es mostrado en la figura 115 (a). La capa superior, teniendo una resistividad  $\rho_1$ , se extiende hasta una profundidad de  $h$ , mientras la capa del fondo, teniendo una resistividad  $\rho_2$ , es asumida con extenderse hasta el infinito.

El efecto de la discontinuidad en la superficie de la tierra puede ser tomado en cuenta al considerar un sistema de imágenes mostrado en la figura 115 ( b ) . Para satisfacer la condición de frontera en esa discontinuidad. Así, el problema original es transformado en aquel de dos fuentes de corriente idénticas  $S$  y  $S'$  colocadas simétricamente en una capa de resistividad  $\rho_1$  y espesor  $2h$ , la capa en sí misma siendo limitada en ambos lados por capas semi-infinitas de resistividad  $\rho_2$ . Debe observarse que este sistema de imágenes es válido sólo para cálculos de potencial debajo o en la superficie de la tierra.

Figura 115. a) Electrodo puntual en la capa superior de un terreno de dos capas b) Sistema de imágenes equivalente que considera el límite tierra aire.



El potencial para la configuración mostrada en la figura 115 ( b ) puede ser obtenido al tomar múltiples imágenes de las dos fuentes de corriente  $S$  y  $S'$  en las dos interfaces  $A$  y  $B$ .

El sistema de imágenes resultante para el cálculo del potencial en la capa superiores mostrado en la figura 116. El sistema de imágenes equivalente mostrado es colocado en un medio homogéneo ilimitado de resistividad  $\rho_1$ . Si la corriente inyectada en el elemento original  $S$  es  $I$ , las magnitudes de las corrientes en el sistema imagen mostrado en la figura 116 son dadas por:

Corrientes en los elementos  $S$  y  $S' = I$

Corrientes en los elementos  $S_{na}$ ,  $S'_{na}$ ,  $S_{nb}$ ,  $S'_{nb} = k^n I$

El potencial  $\varphi_p$  en cualquier punto  $p$  situado en la superficie del suelo es igual a:

$$\varphi_p = \varphi_p(S) + \varphi_p(S') + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [\varphi_p(S_{na}) + \varphi_p(S'_{na}) + \varphi_p(S_{nb}) + \varphi_p(S'_{nb})]$$

En este caso, el voltaje total en el punto  $p$  será dado por:

$$\varphi_p = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 + (2nh + d)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 + (2nh - d)^2}} \right\}$$

#### 4.2.2 Efecto de una fuente puntual en una capa del fondo en un punto en la capa superior

Si la fuente puntual  $S$  está en la capa del fondo ( $d > h$ ) de un terreno de dos capas como es mostrado en la figura 117 ( a ), el efecto de la discontinuidad en la superficie de la tierra es tomado en cuenta al considerar el sistema de imágenes mostrado en la figura 117 ( b ).

El potencial para la configuración mostrada en la figura 117 ( b ), como antes, es obtenido al tomar múltiples imágenes de las dos fuentes de corriente  $S$  y  $S'$  en las dos interfaces  $A$  y  $B$ . El sistema de imágenes resultante es mostrado en la figura 118.

Figura 116. Sistema equivalente de múltiples imágenes en un terreno homogéneo ilimitado ( $\rho_1$ ) para la evaluación del potencial en la primera capa, de una fuente puntual en la capa superior.

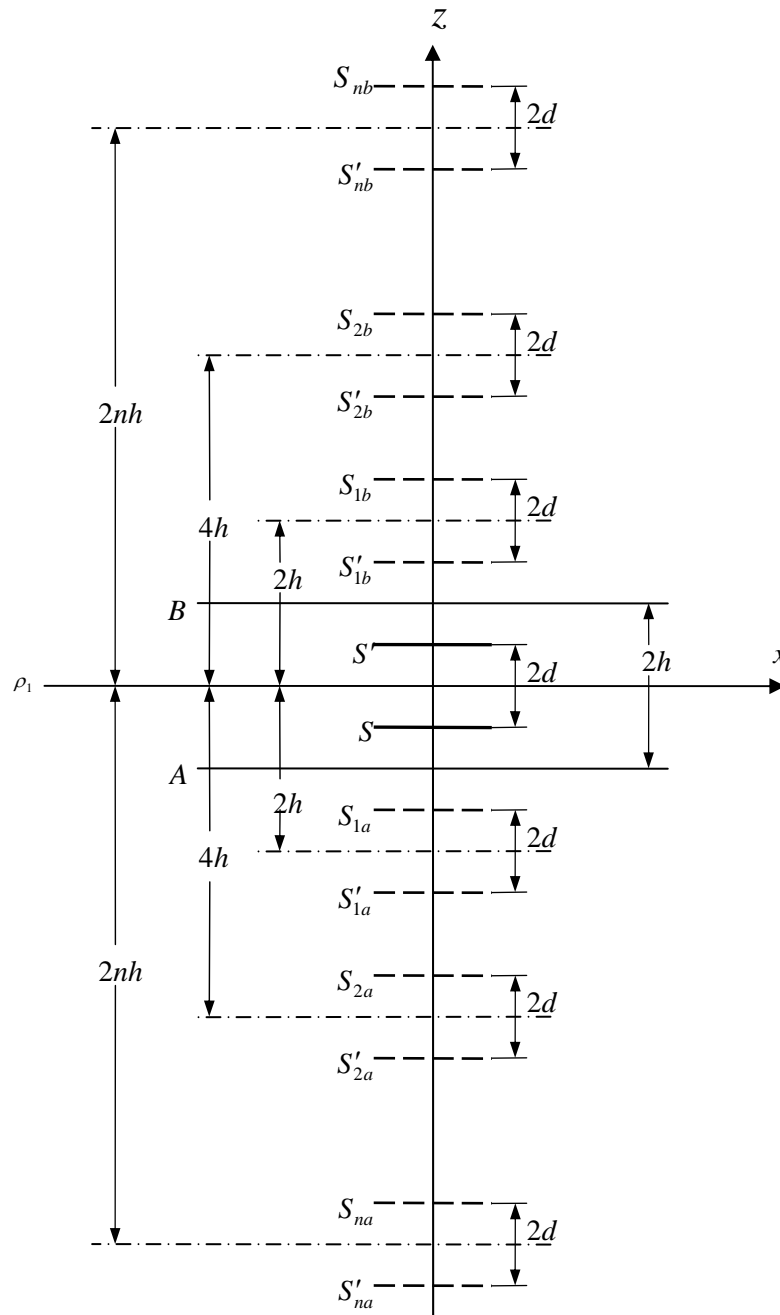
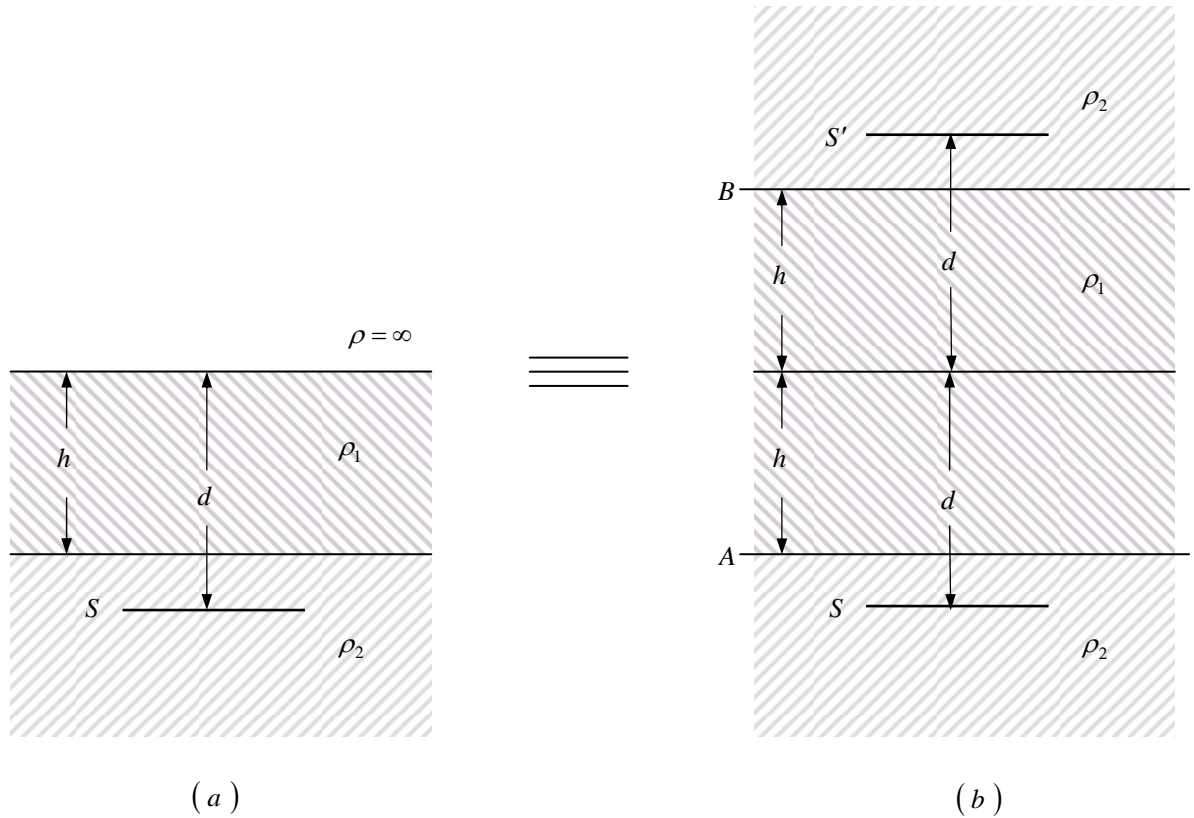


Figura 117. a) Electrodo puntual en la capa del fondo de un terreno de dos capas b) Sistema de imágenes equivalente que considera el límite tierra aire.



Si la corriente en el elemento  $S$  es  $I$ , las magnitudes de las corrientes en el sistema imagen mostrado en la figura 118 son dadas por:

Corrientes en los elementos  $S$  y  $S' = (1+k)I$

Corrientes en los elementos  $S'_{na}$ ,  $S'_{nb} = (1+k)k^n I$

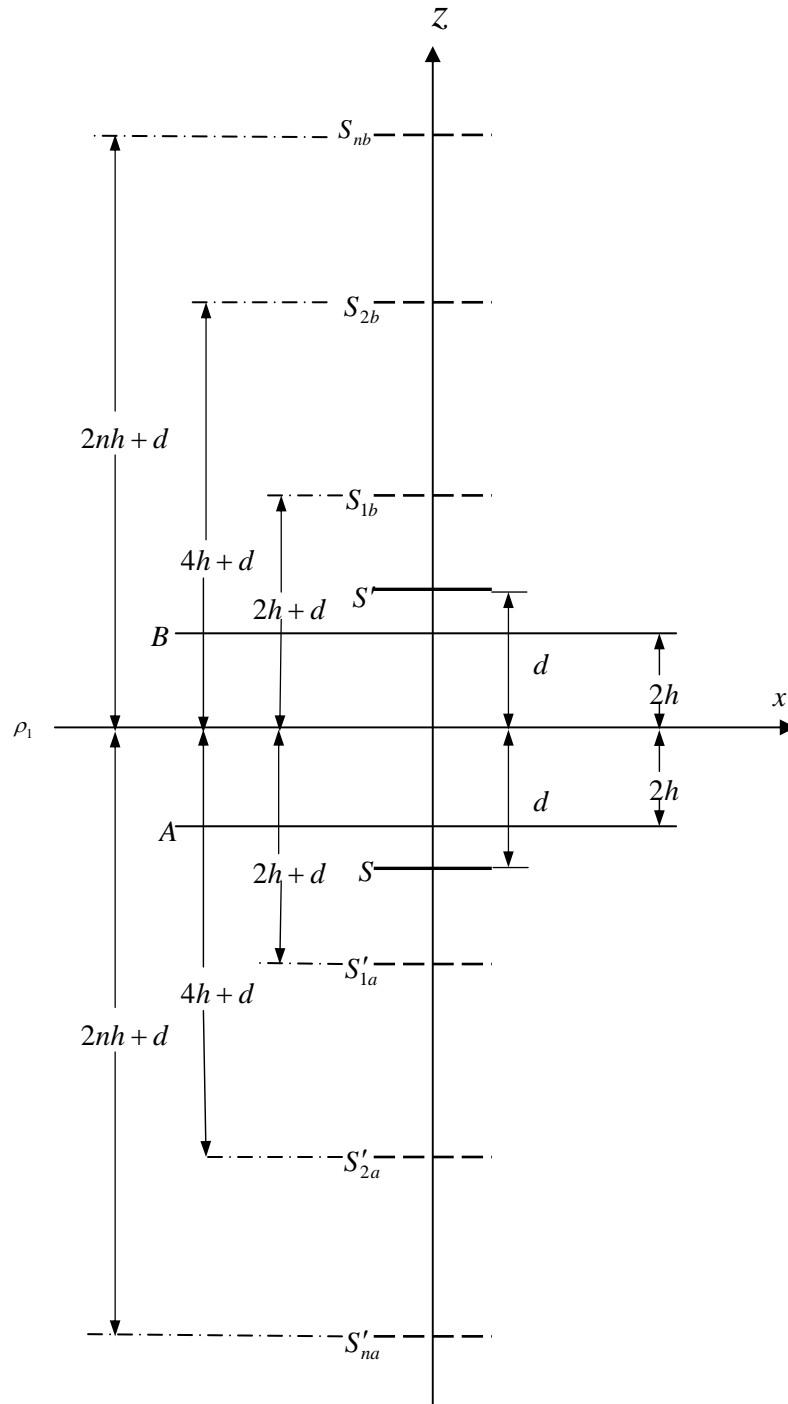
El potencial en un punto  $p$  situado en la superficie del suelo es igual a:

$$\varphi_p = \varphi_p(S) + \varphi_p(S') + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [\varphi_p(S'_{na}) + \varphi_p(S'_{nb})]$$

De acuerdo con el método de imágenes de Maxwell [16], el voltaje en un punto  $p$  debido directamente a una fuente  $S$  inyectando una corriente  $I$  es igual a:

$$\varphi_p(S) = \frac{I\rho_1\rho_2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)} \frac{1}{\sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 + (z_s - z_p)^2}}$$

Figura 118. Sistema equivalente de múltiples imágenes en un terreno homogéneo ilimitado ( $\rho_1$ ) para la evaluación del potencial en la primera capa, de una fuente puntual en la capa del fondo.



En este caso la distancia vertical  $z_s - z_p = d$

La contribución de la imagen  $S'$  al voltaje en el punto  $p$  será la misma como la fuente  $S$ .

Por lo tanto  $\varphi_p(S) = \varphi_p(S')$

Obsérvese que  $\frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 1 + k$ , y el voltaje total en el punto  $p$  es dado por:

$$\varphi_p(S) = \frac{I\rho_1}{2\pi} (1+k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 + (2nh + d)^2}}$$

### 4.3 ELECTRODO DE BANDA EN UN TERRENO DE DOS CAPAS

#### 4.3.1. Voltaje producido en un punto $p$ por una fuente lineal.

Con las expresiones del potencial de una fuente puntual es posible derivar expresiones para determinar el voltaje producido en un punto  $p$  en la superficie del suelo por una fuente lineal, así:

Como las ecuaciones para calcular el potencial por una fuente puntual consisten de una suma de términos de la forma:

$$\frac{c}{\sqrt{(x_p - x_s)^2 + d^2}} \quad \text{donde } c \text{ y } d \text{ son constantes.}$$

Si en cambio de una fuente puntual tenemos una fuente lineal de longitud  $l$  que se extiende en la dirección  $x$  desde  $-l/2$  a  $l/2$ , cada uno de esos términos cambiarán a:

$$\frac{c}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx_s}{\sqrt{(x_p - x_s)^2 + d^2}}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = x_p - x_s$ , los términos anteriores llegan a ser

$$-\frac{c}{l} \int_{x_p+l/2}^{x_p-l/2} \frac{dx_s}{\sqrt{u^2 + d^2}}$$

Desarrollando la integración, cada uno de los términos se convierten en:

$$\frac{c}{l} \ln \frac{x_p + l/2 + \sqrt{(x_p + l/2)^2 + d^2}}{x_p - l/2 + \sqrt{(x_p - l/2)^2 + d^2}}$$

Aplicando el anterior resultado a las expresiones para el cálculo del potencial en la superficie del suelo debido a una fuente puntual, obtenemos las expresiones para el cálculo del potencial debido a una fuente lineal.

Así, si el cable de puesta a tierra está en la capa superior de suelo la siguiente ecuación debe ser usada:

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho_1}{2\pi d} \left\{ A + \sum_{n=1}^{\infty} k^n (B + C) \right\} \quad (d < h)$$

Donde

$$A = \ln \frac{x + l/2 + \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2 + d^2}}{x - l/2 + \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2 + d^2}}$$

$$B = \ln \frac{x + l/2 + \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2 + (2nh + d)^2}}{x - l/2 + \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2 + (2nh + d)^2}}$$

$$C = \ln \frac{x + l/2 + \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2 + (2nh - d)^2}}{x - l/2 + \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2 + (2nh - d)^2}}$$

En el caso de terreno homogéneo  $k = 0$ , y el término de la sumatoria es por lo tanto cero.

Si el cable de puesta a tierra está enterrado en la capa del fondo ( $d > h$ ), la expresión para el cálculo de potencial en un punto en la superficie del suelo es:

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho_1}{2\pi d} (1 + k) \left\{ A + \sum_{n=1}^{\infty} k^n B \right\} \quad (d > h)$$

#### 4.3.2 Efecto de la estratificación en la resistencia de puesta a tierra del electrodo de banda.

Las siguientes ecuaciones dan la resistencia entre la tierra y el electrodo de puesta a tierra en la forma de un cable largo para los casos donde el electrodo está en la capa superior y en la capa del fondo, respectivamente:

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi d} \left[ \ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1 + U_1 + W_1 \right] \quad (d < h)$$

Donde

$a$  = Radio del cable de puesta a tierra en metros

$$U_1 = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4d^2/l^2}}{2d/l} \right] + \frac{2d}{l} - \sqrt{1 + 4d^2/l^2}$$

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n (U_2 + 2U_3 + U_4)$$

$$U_2 = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4(2nh-d)^2/l^2}}{2(2nh-d)/l} \right] + \frac{2(2nh-d)}{l} - \sqrt{1 + 4(2nh-d)^2/l^2}$$

$$U_3 = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4(nh)^2/l^2}}{2nh/l} \right] + \frac{2nh}{l} - \sqrt{1 + 4(nh)^2/l^2}$$

$$U_4 = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4(2nh+d)^2/l^2}}{2(2nh+d)/l} \right] + \frac{2(2nh+d)}{l} - \sqrt{1 + 4(2nh+d)^2/l^2}$$

$$R = \frac{\rho_2}{2\pi d} \left[ \ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1 - kU_5 + (1-k^2)(U_1 + W_2) \right] \quad (d > h)$$

Donde

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n U_4$$

$$U_5 = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4(d-h)^2/l^2}}{2(d-h)/l} \right] + \frac{2(d-h)}{l} - \sqrt{1 + 4(d-h)^2/l^2}$$

Las anteriores ecuaciones son obtenidas al calcular la resistencia propia del cable y las resistencias mutuas del sistema de imágenes de las figuras 116 o 118 según sea el caso y teniendo en cuenta los factores de reflexión de la figura 114.

#### 4.4 ELECTRODO EN ANILLO CIRCULAR EN UN TERRENO DE DOS CAPAS

##### 4.4.1 Voltaje producido en un punto p por un electrodo en anillo circular.

Aplicando el anterior procedimiento es posible obtener expresiones para el cálculo del potencial en un punto  $p$  en la superficie del suelo y la resistencia para un electrodo de puesta a tierra en la forma de un anillo circular.

Las ecuaciones para el cálculo del potencial en la superficie del suelo son:

Si el anillo se encuentra en la capa superior de suelo ( $d < h$ ), la siguiente ecuación debe ser usada:

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho_1}{2\pi^2} \left\{ A + \sum_{n=1}^{\infty} k^n (B + C) \right\} \quad (d < h)$$

Donde

$$A = \frac{K(k_1)}{\sqrt{(r + D/2)^2 + d^2}} \quad k_1^2 = \frac{2Dr}{(r + D/2)^2 + d^2}$$

$$B = \frac{K(k_2)}{\sqrt{(r + D/2)^2 + 4(2nh + d)^2}} \quad k_2^2 = \frac{2Dr}{(r + D/2)^2 + 4(2nh + d)^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$C = \frac{K(k_3)}{\sqrt{(r + D/2)^2 + 4(2nh - d)^2}} \quad k_3^2 = \frac{2Dr}{(r + D/2)^2 + 4(2nh - d)^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{Si } d = 0 \text{ y } r = D/2 \rightarrow A = \frac{2}{D} \ln \left( 8 \frac{D}{d_1} \right)$$

Donde

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia horizontal al eje del anillo en m.

$D$  = diámetro del anillo en m.

$d$  = profundidad del anillo en m.

$d_1$  = diámetro de la sección transversal del anillo en m.

$K(k_1)$ ,  $K(k_2)$  y  $K(k_3)$  son las integrales elípticas normales de primer tipo con módulos  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  respectivamente. Debe tenerse precaución de no confundir esta integral con el factor de reflexión  $k$ .

En el caso de un terreno homogéneo  $k=0$ , y el término de la sumatoria es igual a cero y la expresión se hace equivalente a las obtenidas para un electrodo en anillo rasante en terreno homogéneo.

Si el electrodo en anillo está enterrado en la capa del fondo ( $d > h$ ), la expresión para el cálculo del potencial en un punto  $p$  en la superficie del suelo es:

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho_1}{2\pi^2} (1+k) \left\{ A + \sum_{n=1}^{\infty} k^n B \right\}$$

Donde  $A$  y  $B$  se han definido previamente para el caso del anillo enterrado en la capa superior.

#### 4.4.2 Efecto de la estratificación en la resistencia de puesta a tierra del electrodo en anillo.

Las siguientes ecuaciones dan la resistencia entre la tierra y el electrodo en anillo para los casos donde el anillo se encuentra enterrado en la capa superior y en la capa del fondo, respectivamente.

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi^2 D} [U_1 + W_1] \quad (d < h)$$

Donde

$$U_1 = \ln\left(4 \frac{D}{a'_1}\right) \quad a'_1 = \sqrt{d_1 d}$$

$$\text{Si } d=0 \rightarrow U_1 = 2 \ln\left(8 \frac{D}{d_1}\right)$$

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n (U_2 + 2U_3 + U_4)$$

$$U_2 = \ln\left(4 \frac{D}{a'_2}\right) \quad a'_2 = \sqrt{d_1(2nh - d)} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$U_3 = \ln\left(4 \frac{D}{a'_3}\right) \quad a'_3 = \sqrt{2d_1 nh} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$U_4 = \ln\left(4 \frac{D}{a'_4}\right) \quad a'_4 = \sqrt{d_1(2nh + d)} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$d_1$  = diámetro de la sección transversal del anillo en m.

$$R = \frac{\rho_2}{2\pi^2 D} \left[ \ln \left( 4 \frac{D}{a'_1} \right) - kU_5 + (1 - k^2)(U_1 + W_2) \right] \quad (d > h)$$

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n U_4$$

$$U_5 = \ln \left( 4 \frac{D}{a'_5} \right) \quad a'_5 = \sqrt{d_1(d - h)}$$

Estas ecuaciones son obtenidas al calcular la resistencia propia del anillo y las resistencias mutuas del sistema de imágenes de la figura 116 o 118 según sea el caso, usando el concepto de radio equivalente visto en el método del potencial promedio y teniendo en cuenta los factores de reflexión de la figura 114.

La resistencia del electrodo en anillo en un terreno de dos capas también puede hallarse con las expresiones obtenidas del potencial de un electrodo en anillo colocado de manera rasante en un terreno homogéneo, dando por resultado:

Si el anillo se encuentra enterrado en la capa superior

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{D} \ln \left( 8 \frac{D}{d_1} \right) + U_1 + W_1 \right\} \quad (d < h)$$

$$U_1 = \frac{K(k_1)}{\sqrt{D^2 + 4d^2}} \quad k_1^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4d^2}$$

$$\text{Si } d = 0 \rightarrow U_1 = \frac{1}{D} \ln \left( 8 \frac{D}{d_1} \right)$$

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n (U_2 + 2U_3 + U_4)$$

$$U_2 = \frac{K(k_2)}{\sqrt{D^2 + 4(2nh - d)^2}} \quad k_2^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4(2nh - d)^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$U_3 = \frac{K(k_3)}{\sqrt{D^2 + 4(nh)^2}} \quad k_3^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4(nh)^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$U_4 = \frac{K(k_4)}{\sqrt{D^2 + 4(2nh + d)^2}} \quad k_4^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4(2nh + d)^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Siendo  $d_1$  el radio de la sección transversal del anillo.

Si el anillo se encuentra enterrado en la capa del fondo, la resistencia es igual a:

$$R = \frac{\rho_2}{2\pi^2 D} \left[ \ln \left( 8 \frac{D}{d_1} \right) - kU_5 + (1 - k^2)(U_1 + W_2) \right] \quad (d > h)$$

$$U_5 = \frac{K(k_5)}{\sqrt{D^2 + (d - h)^2}} \quad k_5^2 = \frac{D^2}{D^2 + (d - h)^2}$$

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n U_4$$

#### 4.5 EFECTO DE LA ESTRATIFICACIÓN EN LA RESISTENCIA DE CONTACTO DEL PIE

Las ecuaciones usadas para la determinación de la corriente de cuerpo dependiendo del tipo de contacto, dadas en el primer capítulo, fueron halladas bajo la suposición de suelo de uniforme resistividad y despreciando los efectos mutuos entre los pies. Sin embargo, si una capa delgada de grava es esparcida en la superficie del suelo arriba de la puesta a tierra para incrementar la resistencia de contacto entre el suelo y los pies de la gente en la subestación, esta suposición ya no es válida.

El área cubierta por esta capa de grava es generalmente de suficiente tamaño para validar la suposición del pie estando en contacto con un material de resistividad uniforme en la dirección lateral. Sin embargo, la poca profundidad de la grava comparada con el radio equivalente de los dos pies (8 cm) impide la suposición de resistividad uniforme en la dirección vertical cuando calculamos las resistencias propias y mutuas de los pies.

Si el suelo del fondo tiene una resistividad más baja que la capa de grava, solo una fracción de la corriente del electrodo de puesta a tierra irá hacia arriba a la delgada capa superior de

grava y el voltaje de superficie será aproximadamente el mismo como aquel sin la capa de roca.

La corriente a través del cuerpo será considerablemente disminuida con la adición de la superficie de grava debido de la más grande resistencia de contacto entre el suelo y el pie. No obstante, esta resistencia puede ser considerablemente menor que aquella de una capa de grava de gran espesor (esto es, suficientemente gruesa para asumir uniforme resistividad en todas direcciones). Cuanto menor, depende de los valores relativos de las resistividades de la grava y el terreno y del espesor de la capa de roca.

Un caso típico descrito en la literatura muestra que la resistencia efectiva de una capa de 0.25 m de piedra caliza teniendo una resistividad de  $5000 \Omega - m$  es aproximadamente equivalente al 75 por ciento de su valor nominal si la resistividad del terreno es de  $250 \Omega - m$ .

La resistencia de contacto entre el suelo y el pie por lo tanto puede afectar apreciablemente el valor de la corriente de cuerpo, un hecho que puede ser de ayuda en el diseño de una puesta a tierra.

Para determinar la corriente de cuerpo por un contacto de paso, teniendo en cuenta los efectos mutuos entre los dos pies, se observa que de la figura 119 que la resistencia del circuito equivalente para el circuito del potencial de paso es dada por:

$$R = R_b + 2(R_f - R_{mf})$$

Donde

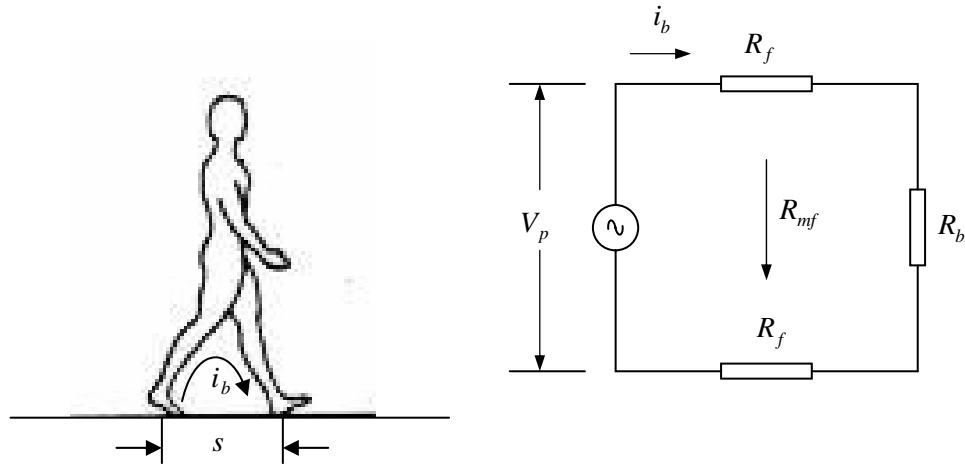
$R_b$  = resistencia del cuerpo en  $\Omega$

$R_f$  = resistencia propia de cada pie con una tierra remota en  $\Omega$ .

$R_{mf}$  = resistencia mutua entre los pies en  $\Omega$

$i_b$  = corriente de cuerpo en A

Figura 119. Circuito de voltaje de paso.



Por lo tanto la corriente de cuerpo para un contacto de paso es igual a:

$$i_b = \frac{V_p}{R_b + 2(R_f - R_{mf})} = \frac{V_p}{R_b + R_c}$$

$R_c$  = resistencia de contacto entre el suelo y los pies en  $\Omega$

$$R_c = 2(R_f - R_{mf})$$

La resistencia de contacto considerando estratificación y los efectos mutuos, para un contacto de paso, es dada por:

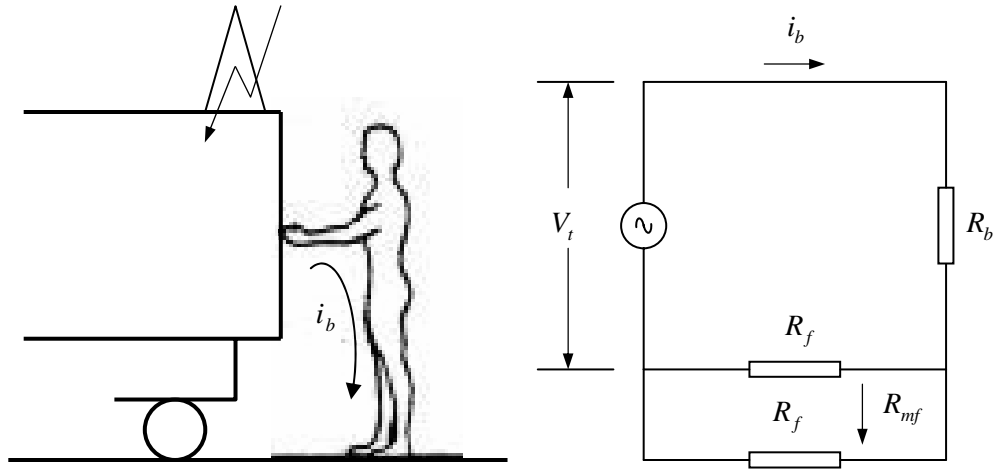
$$R_c = \frac{\rho_1}{2} \left[ \frac{1}{b} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(2nh)^2 + b^2}} \right] - \frac{\rho_1}{\pi} \left[ \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(2nh)^2 + s^2}} \right] \quad (b = 8 \text{ cm})$$

Donde  $b$  es el radio del disco conductor que representa el pie y  $s$  es la separación entre los centros de los discos que representan los dos pies.

La primera expresión da la resistencia de contacto de los dos discos en serie, y la segunda expresión da el término de corrección para admitir los efectos de la resistencia mutua entre los dos discos. El término de resistencia mutua tiende a reducir la resistencia de contacto total ligeramente cuando los dos pies están en serie.

El circuito equivalente para un contacto mano a dos pies es ilustrado en la figura 120.

Figura 120 Circuito de voltaje de toque.



De la figura 120 la resistencia del circuito equivalente para un contacto de toque es igual a:

$$R = R_b + (R_f + R_{mf})/2$$

Por lo tanto la corriente de cuerpo es igual a:

$$i_b = \frac{V_p}{R_b + (R_f + R_{mf})/2} = \frac{V_t}{R_b + R_c}$$

$$R_c = (R_f + R_{mf})/2$$

Y la ecuación para la resistencia de contacto considerando estratificación y los efectos mutuos para un contacto mano a dos pies (contacto de toque) es dada por:

$$R_c = \frac{\rho_1}{8} \left[ \frac{1}{b} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(2nh)^2 + b^2}} \right] + \frac{\rho_1}{4\pi} \left[ \frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{(2nh)^2 + s^2}} \right]$$

A fin de simplificar el cálculo de la resistencia de contacto, el término de la resistencia mutua puede ser despreciado y  $b$  siempre asumido igual a 0.08 m. De esta forma las ecuaciones para la resistencia de contacto pueden ser expresadas alternativamente en una forma análoga a aquellas expresiones usadas para suelo uniforme:

$$R_c = 6C_s(h, k)\rho_s \text{ para un contacto de paso.}$$

$$R_c = 1.5C_s(h, k)\rho_s \text{ para un contacto de toque.}$$

Donde  $C_s$  es un factor de reducción del valor nominal de la resistividad de la capa superficial determinado como sigue:

$C_s = 1$  para resistividad de la grava igual a la resistividad del suelo.

De otro modo

$$C_s = \frac{1}{0.96} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{1 + (2nh/0.08)^2}} \right]$$

Si el suelo tiene una resistividad más alta que la grava, una sustancial porción de la corriente del electrodo de puesta a tierra irá hacia arriba a la delgada capa de grava. A diferencia del anterior caso, los potenciales de superficie serán alterados sustancialmente, debido a esta concentración de corriente cerca de la superficie. Si bien las ecuaciones para determinar la resistencia de contacto siguen siendo válidas, no ocurre lo mismo con las ecuaciones para determinar la corriente de cuerpo dependiendo del tipo de contacto, debido a esta alteración de los potenciales de superficie.

#### 4.6 EVALUACIÓN DE LAS EXPRESIONES

Las anteriores ecuaciones contienen sumatorias de  $n=1$  al infinito. Para evaluarlas debe truncarse la sumatoria en algún lugar. La cuestión es cuantos términos son suficientes.

Una respuesta a esta pregunta puede ser obtenida al notar que los términos en la serie infinita consisten del producto de dos factores los cuales disminuyen como aumenta el valor de  $n$ .

El primer factor es  $k^n$  que disminuye muy rápidamente con  $n$  si  $k$  es cercana a cero, una condición que ocurre si las conductividades de las dos capas son aproximadamente iguales. El segundo término si bien disminuye con  $n$ , la manera en la cual lo hace es bastante complicada de evaluar, pero un límite en el error puede ser obtenido al asumir que el segundo factor no disminuye en todo con  $n$ . El problema entonces se convierte en el cálculo de la suma de los términos de  $n$  al infinito de una serie geométrica. Esto puede hacerse por medio de la siguiente expresión:

$$S_{\infty} = \frac{k}{1-k}$$

Y la fórmula para evaluar la suma de los términos de uno hasta  $n$  de la serie geométrica es igual a:

$$S_n = \frac{k(k^n - 1)}{k - 1}$$

En la evaluación de las expresiones la sumatoria es terminada si el cálculo muestra que  $S_n \geq 0.99S_{\infty}$ .

$A$ ,  $B$  y  $C$  para la fuente lineal están sujetas a errores de redondeo si  $l/2 - x$  es grande comparada con las otras cantidades. En aquel caso, si  $x = 0$ , se usa la siguiente identidad:

$$\ln \frac{\sqrt{(l/2)^2 + m^2 + l/2}}{\sqrt{(l/2)^2 + m^2 - l/2}} = 2 \ln \left( \frac{l/2}{m} + \sqrt{1 + \left(\frac{l/2}{m}\right)^2} \right)$$

Si  $x \neq 0$  y  $l/2 - x \gg m$ , se usa la siguiente aproximación para los denominadores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$\sqrt{(x - l/2)^2 + m^2} + x - l/2 \cong m^2/2 \cdot (l/2 - x)$$

Si  $x \neq 0$  y  $-(l/2 + x) \gg m$ , se usa la siguiente aproximación para los numeradores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$\sqrt{(x + l/2)^2 + m^2} + x + l/2 \cong -m^2/2 \cdot (l/2 + x)$$

## CONCLUSIONES

- El diseño de una puesta tierra no es un asunto trivial puesto que la teoría subyacente contiene elementos de varias ciencias como son la geología, la geofísica, la electricidad (electrodinámica), las matemáticas y la medicina (electrofisiología).
- Con el uso de las diferentes metodologías para el modelado de una puesta a tierra es posible tener un mayor número de alternativas de solución en el diseño de la misma lo que resulta en la elaboración de proyectos más adecuados desde el punto de vista técnico y económico.
- El diseño cuidadoso de una puesta a tierra puede reducir el riesgo de electrocución pero no anularlo completamente debido a que las ecuaciones de electrocución contienen implícitamente un margen de riesgo.
- Mediante el programa de cálculo de puestas a tierra se comprobó que las diferentes metodologías empleadas para determinar la resistencia de una toma de tierra dan resultados aproximadamente iguales, demostrando su validez.
- La práctica de colocar una delgada capa de suelo aislante (no necesariamente grava) en la superficie de una puesta a tierra es una medida adicional de protección que es de utilidad en el diseño de puestas a tierra en condiciones difíciles, ya que aumenta la resistencia de contacto entre el suelo y los pies de la persona ayudando a limitar la corriente de cuerpo.

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] LEE, W.R. Lightning. New York En : Academia Press Vol. 2 (1977) ; p. 521-543
  
- [ 2 ] LOUCKS, W.W. A New Approach to Substation Grounding. En : Electrical News and Engineering. (May. 1954)
  
- [ 3 ] SCHAEPPERS, Hans Gerard. Sicherheits-Technik (Técnica de la Seguridad). Essen : Girardet, 1979
  
- [ 4 ] FREIBERGER, H. Der elektrische Widerstand des menlischen Koerpers gegen technischen Gleich u. Wechselstrom (La resistencia del cuerpo humano contra corrientes continua y alterna). En : Elektrizitaets Wirtsch. Vol. 32 No. 373 (1933)
  
- [ 5 ] INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS. IEEE Guide for Safety in AC. Substation Grounding. New York : IEEE. , 1986 . p. 31-42
  
- [ 6 ] DALZIEL, Charles F. Electric Shock Hazard. En : IEEE. Spectrum. (Feb. 1972) ; p. 41-50
  
- [ 7 ] SPITTA, A.F. Intalaciones Eléctricas. Madrid : Siemens A.G./DOSSAT , 1975 2v.
  
- [ 8 ] *GARCIA MARQUEZ*, Rogelio. La puesta a Tierra de Instalaciones Eléctricas. Barcelona : Alfaomega, 1999. p. 15-26, 92-100
  
- [ 9 ] DE LA VEGA ORTEGA, Miguel. Ingeniería de Puesta a Tierra. México : Limusa, 1998. 410p.

- [10] ABRAMOWITZ, Milton y STEGUN, Irene. Handbook of Mathematical Functions with formulas, Graphs and Mathematical Tables. Washington : National Bureau of Standard, 1964. p. 589-615
- [11] JAHNKE, Eugene y ENDE, Fritz. Tables of Functions with Formulas and curves. 4ed. New York : Dover Publications, 1945 p. 73
- [12] POTTHOFF, K. Das aritmetisch-geometrische Mittel in der Elektrotechnik (El medio aritmético-geométrico en la Electrotecnia) En : VDE-Facher. Vol 16 No 1/42 (1952)
- [13] SUNDE, Erling D. Earth Conduction Effects in Transmission Systems. New York : D. VAN NOSTRAND, 1949 p. 66-91
- [14] RÜDENBERG, Reinhold. Transient Performance of Electric Power Systems: Phenomena in Lumped Networks. New York : McGraw Hill, 1950 p. 310-339
- [15] CAMPBELL, G.A. Mutual Inductances of Circuits Composed of Straight Wires. En : Physics Review No. 5 (1915)
- [16] MAXWELL, James Clerk. Treatise on Electricity and Magnetism. 3 ed. New York : Dover Publications, 1954 p. 441-445

## ANEXO A: Coordenadas Curvilíneas

### Introducción

En la solución de problemas de potencial en el espacio tridimensional es deseable escoger el sistema coordenado que permita la más simple formulación de las condiciones de frontera. Es por ello que se recurre al uso de sistemas coordenados ortogonales ya que conducen a una simplificación considerable en las expresiones establecidas para la determinación del potencial. Sin embargo el sistema coordenado influye en la forma de estas expresiones.

En los sistemas coordenados ortogonales los vectores unitarios en las tres direcciones coordenadas en cualquier punto son mutuamente perpendiculares. Se acostumbra seleccionar el sistema cartesiano como fundamental donde las tres coordenadas juegan exactamente igual papel.

### Transformación de Coordenadas

Asumiendo un sistema ortogonal general  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Las mutuas relaciones entre esas coordenadas y el sistema cartesiano pueden ser expresadas en términos de las relaciones funcionales:

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z) \quad (1)$$

O de forma compacta

$$u_\alpha = u_\alpha(x, y, z) \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

*E* inversamente

$$x = f_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = f_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = f_3(u_1, u_2, u_3) \quad (2)$$

Las funciones en (1) y (2) se suponen uno a uno (unívocas) y tendrán derivadas continuas así que la correspondencia entre  $(x, y, z)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$  es única.

Dado un punto P en coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  podemos de (1) asociar un único juego de coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$  llamadas coordenadas curvilíneas de P. Ese juego de ecuaciones definen una *transformación de coordenadas*.

Las superficies  $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$ , donde  $c_1, c_2, c_3$  son constantes, son llamadas *superficies coordenadas* y cada par de esas superficies interceptan en curvas llamadas *curvas o líneas coordenadas*. La intersección de las tres superficies coordenadas determinan un punto.

Si las superficies coordenadas interceptan en ángulos rectos el sistema coordinado curvilíneo es llamado ortogonal. Las curvas coordenadas  $u_1, u_2$  y  $u_3$  de un sistema curvilíneo son análogas a los ejes coordinados  $x, y, z$  del sistema rectangular.

Para que el sistema sea ortogonal las siguientes condiciones de perpendicularidad deben cumplirse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

#### *Vectores Unitarios en sistemas Curvilíneos*

Dada  $r = xi + yj + zk$  sea la posición vectorial de un punto P. Entonces de (1) r puede ser escrita como  $r = r(u_1, u_2, u_3)$ . Un vector tangente a la curva  $u_1$  en P (para la cual  $u_2$  y  $u_3$  son constantes) es  $\frac{\partial r}{\partial u_1}$ . Entonces un vector tangente unitario en esta dirección es

$e_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right|$  así que  $\frac{\partial r}{\partial u_1} = h_1 e_1$  donde  $h_1 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right|$ . Similarmente, si  $e_2$  y  $e_3$

son vectores unitarios tangentes a las curvas  $u_2$  y  $u_3$  en P respectivamente, entonces

$$\frac{\partial r}{\partial u_2} = h_2 e_2 \quad y$$

$$\frac{\partial r}{\partial u_3} = h_3 e_3 \quad \text{donde } h_2 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_2} \right| \quad y \quad h_3 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_3} \right|. \text{ Entonces las cantidades } h_1, h_2, h_3 \text{ son}$$

llamadas los *factores de escala*.

Los vectores unitarios  $e_1, e_2, e_3$  están en las direcciones de incremento de  $u_1, u_2, u_3$  respectivamente. Estos vectores son análogos a  $i, j, k$  en coordenadas rectangulares pero son diferentes de ellos en que pueden cambiar de dirección de punto a punto.

### *Longitud de Arco y Elemento de Volumen*

El elemento de longitud de arco puede deducirse del siguiente razonamiento:

De  $r = r(u_1, u_2, u_3)$  tenemos

$$\partial r = \frac{\partial r}{\partial u_1} \partial u_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2} \partial u_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3} \partial u_3 = h_1 \partial u_1 + h_2 \partial u_2 + h_3 \partial u_3 \quad (4)$$

Entonces el diferencial de longitud de arco  $\partial s$  es determinado de  $\partial s^2 = \partial r \cdot \partial r$ . Para sistemas ortogonales,  $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0$  y

$$\partial s^2 = h_1^2 \partial u_1^2 + h_2^2 \partial u_2^2 + h_3^2 \partial u_3^2 \quad (5)$$

Otra forma de obtener esta expresión es la siguiente:

El elemento general de línea en coordenadas cartesianas es expresado en forma vectorial como:

$$\partial s = i \partial x + j \partial y + k \partial z \quad (6)$$

Resultando para su valor absoluto

$$\partial s^2 = \partial s \cdot \partial s = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

Para la transformación de las relaciones diferenciales de un sistema a otro, uno toma de (1):

$$u_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \partial z \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (7)$$

E inversamente

$$\partial x = \sum_\alpha \frac{\partial f_1}{\partial u_\alpha} \partial u_\alpha, \quad \partial y = \sum_\alpha \frac{\partial f_2}{\partial u_\alpha} \partial u_\alpha, \quad \partial z = \sum_\alpha \frac{\partial f_3}{\partial u_\alpha} \partial u_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Introduciendo en (6) la representación vectorial, por ejemplo:

$$\partial x = i \partial x = i \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \partial u_1 + i \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \partial u_2 + i \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \partial u_3 \quad (9)$$

Y similarmente para las otras dos direcciones coordenadas. Se puede de nuevo formar el producto escalar  $\partial s \cdot \partial s$  y teniendo en cuenta la presumible ortogonalidad de los vectores unitarios (ver condiciones de ortogonalidad, ecuación (3)) obteniéndose de nuevo la ecuación (5).

$$\partial s^2 = h_1^2 \partial u_1^2 + h_2^2 \partial u_2^2 + h_3^2 \partial u_3^2$$

Donde

$$h_\alpha^2 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial u_\alpha} \right)^2 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (10)$$

De (10) se observa que  $h_\alpha = [grad \ u_\alpha]$ . Esta última expresión es útil para hallar los factores de escala de los distintos sistemas coordenados, aunque en raras ocasiones se usa debido a que los factores de escala pueden hallarse más fácilmente por inspección.

A través de una curva  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Constantes así que  $\partial r = h_1 \partial u_1 e_1$ . Entonces el diferencial de longitud de arco a través de  $u_1$  en P es  $h_1 \partial u_1 e_1$ . Similarmente el diferencial de longitudes de arco  $u_2$  y  $u_3$  en P son respectivamente  $\partial s_2 = h_2 \partial u_2$  y  $\partial s_3 = h_3 \partial u_3$ .

El elemento de volumen para un sistema coordenado curvilíneo ortogonal es dado por:

$$\partial V = |(h_1 \partial u_1 e_1) \cdot (h_2 \partial u_2 e_2) \times (h_3 \partial u_3 e_3)| = h_1 h_2 h_3 \partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \quad (11)$$

Donde  $|e_1 \cdot e_2 \times e_3| = 1$

*El Gradiente, la Divergencia y el Rotacional*

Todas las operaciones vectoriales pueden ser fácilmente expresadas en cualquier sistema ortogonal con la ayuda de los factores de escala.

Si  $\Phi$  es una función escalar y  $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$  una función vectorial de coordenadas curvilíneas ortogonales  $u_1, u_2, u_3$ , entonces los siguientes resultados son válidos:

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} e_3 \quad (12)$$

$$\nabla \cdot A = \text{div } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (13)$$

$$\nabla \times A = \text{rot } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \text{Laplaciano de } \Phi$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (15)$$

Si  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$  y  $e_1, e_2, e_3$  son reemplazados por  $i, j, k$ , las últimas cuatro expresiones se reducen a las expresiones usuales en coordenadas rectangulares donde  $(u_1, u_2, u_3)$  es reemplazado por  $(x, y, z)$ .

### *Sistemas Coordenados Especiales*

Debido a la constante mención de los sistemas coordenados cilíndrico, esférico y elipsoidal se presentaran a continuación sus respectivos factores de escala y las expresiones de sus distintas operaciones vectoriales.

#### *1. Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \phi, z)$*

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

$$\text{Donde } \rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1$$

$$\nabla \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (16)$$

$$\nabla \times A = \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right), \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho A_\phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \right) \right]$$

## 2. Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \phi)$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

Donde

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta$$

$$\nabla \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (17)$$

$$\nabla \times A = \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta A_\phi - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right], \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right], \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \right\}$$

## 2. Coordenadas Elipsoidales (Elípticas)

Un tercer conjunto de coordenadas ortogonales importantes son las así llamadas coordenadas elípticas o elipsoidales.

La ecuación 
$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} = 1$$

En la cual  $\rho$  es un parámetro, representa una superficie central de segundo orden cuyos semiejes son:

$$\sqrt{a^2 + \rho}, \quad \sqrt{b^2 + \rho}, \quad \sqrt{c^2 + \rho}$$

Dada la suposición  $a^2 > b^2 > c^2$

Los focos de las secciones principales yacen a las distancias al centro:

$$\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{en el eje } x$$

$$\sqrt{b^2 - c^2} \quad \text{en el eje } y$$

En otras palabras los focos son los mismos para todos los valores de  $\rho$ , por lo tanto la familia de superficies obtenidas al dar a  $\rho$  todos los valores reales son confocales. Para que ellas sean reales  $\rho$  debe ser mayor que  $-a^2$ .

Si  $-c^2 < \rho < \infty$  todos los términos son positivos, tenemos un elipsoide.

Si  $-b^2 < \rho < -c^2$  los primeros dos términos son positivos, el tercero negativo, la sección  $z = a$  es una elipse,  $y = 0$  es una hipérbola,  $x = 0$  una hipérbola, tenemos un hiperboloide de una hoja.

Si  $-a^2 < \rho < -b^2$  solo el primer término es positivo, las secciones  $y = 0, z = 0$  son ambas hipérbolas,  $x = 0$  es imaginaria, tenemos un hiperboloide de dos hojas.

A través de cualquier punto  $x, y, z$ , podemos dibujar una superficie de cada tipo.

La anterior ecuación es una cúbica en  $\rho$ , la cual tiene tres raíces reales. Las llamaremos  $\xi > \eta > \zeta$ . Ellas determinan la posición de el punto y son llamadas coordenadas elípticas.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} &= 1 \quad , \quad \infty > \xi > -c^2 \\
\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} &= 1 \quad , \quad -c^2 > \eta > -b^2 \\
\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} &= 1 \quad , \quad -b^2 > \zeta > -a^2
\end{aligned} \tag{18}$$

Para expresar  $x, y, z$  en términos de  $\xi, \eta, \zeta$  observe que la expresión:

$$F(\rho) = \frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} - 1 \quad \text{es nula para } \rho = \xi, \eta, \zeta \text{ y que si reducimos el}$$

denominador  $(a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho) = f(\rho)$  para  $\rho = \xi, \eta, \zeta$ , el numerador es de tercer grado.

Por lo tanto:

$$F(\rho) = -\frac{(\rho - \xi)(\rho - \eta)(\rho - \zeta)}{(a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho)} = \frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} - 1$$

Multiplicando por  $\rho + a^2$  y entonces colocando  $\rho = -a^2$ , tenemos:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

Y de forma similar (19)

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\
z^2 &= \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}
\end{aligned}$$

Diferenciando  $F(\rho)$  con respecto a  $\rho$  tenemos

$$\frac{x^2}{(a^2 + \rho)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \rho)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \rho)^2} = \frac{(\rho - \xi)(\rho - \eta)(\rho - \zeta)}{(a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho)} \left\{ \frac{1}{\rho - \xi} - \frac{1}{\rho + a^2} + \frac{1}{\rho - \eta} - \frac{1}{\rho + b^2} + \frac{1}{\rho - \zeta} - \frac{1}{\rho + c^2} \right\}$$

Colocando  $\rho = \xi$ , todos los términos en la derecha se anulan, excepto el primero, así que

$$\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} = \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{f(\xi)} \tag{20}$$

Y similarmente

$$\frac{x^2}{(a^2 + \eta)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \eta)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \eta)^2} = \frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{f(\eta)} \quad (21)$$

Formando las diferencias de las tres ecuaciones de (18):

$$\begin{aligned} (\eta - \zeta) \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)} + \frac{y^2}{(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)} + \frac{z^2}{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)} \right\} &= 0 \\ (\zeta - \xi) \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \zeta)(a^2 + \xi)} + \frac{y^2}{(b^2 + \zeta)(b^2 + \xi)} + \frac{z^2}{(c^2 + \zeta)(c^2 + \xi)} \right\} &= 0 \\ (\xi - \eta) \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Diferenciando logarítmicamente por  $\xi, \eta, \zeta$

$$2x \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{x^2}{a^2 + \xi} \quad \text{etc. así que:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \frac{z}{c^2 + \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{z}{c^2 + \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{z}{c^2 + \zeta} \end{aligned} \quad (23)$$

De esto tenemos de (3)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{a no ser que } \xi = \eta, \text{ etc.}$$

Así que las superficies  $\xi = \text{constante}, \eta = \text{constante}, \zeta = \text{constante}$  son ortogonales por (3).

Similarmente para las otras parejas. Consecuentemente tenemos un sistema ortogonal.

Tenemos por (10) y (20):

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} \right] = \frac{1}{4} \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{f(\xi)}$$

Así que

$$\begin{aligned}
h_{\xi}^2 &= \frac{4f(\xi)}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)} \\
h_{\eta}^2 &= \frac{4f(\eta)}{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)} \\
h_{\zeta}^2 &= \frac{4f(\zeta)}{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}
\end{aligned} \tag{24}$$

Y de (15) la ecuación de Laplace resulta en la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \Phi = (\eta - \zeta)R_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi)R_{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R_{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)R_{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( R_{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) = 0 \tag{25}$$

$$\text{Donde } R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \quad (s = \xi, \eta, \zeta)$$

#### 4. Coordenadas Esferoidales

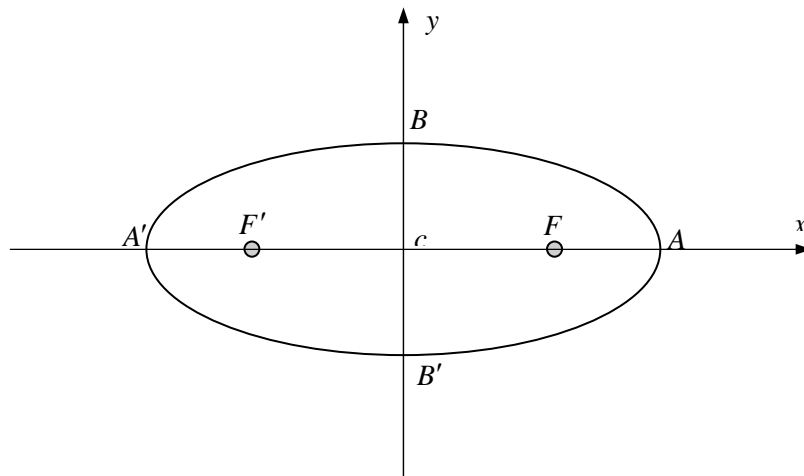
Si dos de los semiejes  $a, b$  o  $c$  del sistema elipsoidal son iguales, se presenta simetría alrededor de un eje y el sistema elipsoidal degenera en el sistema coordenado esferoidal. En este sistema las superficies coordenadas utilizadas, son en este caso, superficies de revolución. Debido a la simetría axial sólo necesitamos dos de las tres superficies coordenadas que se utilizan en el sistema coordenado elipsoidal para determinar un punto en el espacio. La tercera coordenada es el ángulo azimutal.

Las coordenadas esferoidales son obtenidas por rotación de una familia de elipses e hipérbolas confocales alrededor de un eje de simetría. Se distinguen dos casos, según la rotación tenga lugar alrededor de un gran eje o de un eje pequeño. Estableciendo que el eje mayor se orienta a lo largo del eje de las  $x$  y el menor a lo largo del eje de las  $y$ , si la rotación tiene lugar alrededor del eje de las  $x$ , tenemos en este caso el sistema coordenado esferoidal alargado. Si en cambio la rotación ocurre alrededor del eje menor (eje  $y$ ) el sistema esferoidal es achatado.

Antes de definir las diferentes ecuaciones de los dos sistemas coordenados esferoidales es conveniente hacer un breve recuento de las propiedades de la elipse y de la hipérbola.

Elipse: se define como el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya *suma* de distancias a dos puntos llamados focos es una cantidad constante. Tomando sus ejes de simetría como ejes cartesianos, la ecuación de la cónica, en coordenadas cartesianas, es  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Donde  $a$  y  $b$  son respectivamente el semieje mayor y el menor. La excentricidad de la elipse es  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , siempre menor que la unidad. A continuación se hace un recuento de las propiedades de la elipse (ver figura 121).

Figura 121. Elipse



Longitud del eje mayor:  $A'A = 2a$

Longitud del eje menor:  $B'B = 2b$

Distancia del centro  $c$  al foco  $F$  o  $F'$ :  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  (26)

Excentricidad:  $e = c/a = \sqrt{1 - (b/a)^2}$

Hipérbola: es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya *diferencia* de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. La ecuación en coordenadas rectangulares

de una hipérbola cuyos ejes de simetría son los ejes coordenados es, es  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . La

distancia focal es  $2c$  donde  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  y la excentricidad es igual a  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ .

A continuación se presenta un resumen de las propiedades de la hipérbola (ver figura 122).

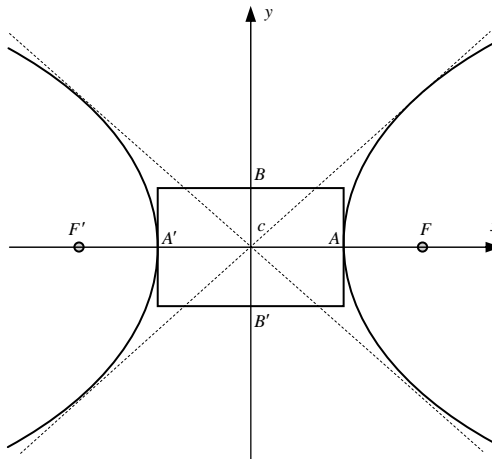
Longitud del eje mayor:  $A'A = 2a$

Longitud del eje menor:  $B'B = 2b$

Distancia del centro  $c$  al foco  $F$  o  $F'$ :  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  (27)

Excentricidad:  $e = c/a = \sqrt{1 + (b/a)^2}$

Figura 122. Hipérbola.



#### Definición de coordenadas esferoidales

Sea  $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2c}$  ;  $\eta = \frac{r_1 - r_2}{2c}$

Donde  $r_1, r_2$  son las distancias de los focos a un punto  $p$  en el plano  $xy$  de una familia de elipses e hipérbolas confocales,  $2c$  es la distancia entre focos.

$a = c\xi$  donde  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  de (26), luego  $b = c\sqrt{\xi^2 - 1}$

*Ecuación de una familia de elipses confocales*

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2 \quad (1 < \xi < \infty)$$

*Ecuación de una familia de hipérbolas confocales*

$$\frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2 \quad (-1 < \eta < 1)$$

#### 4.1 Definición de Coordenadas Esferoidales Alargadas.

Si el sistema de elipses e hipérbolas confocales gira alrededor del eje mayor, entonces:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{r^2}{\xi^2 - 1} = c^2 ; \quad \frac{x^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{1 - \eta^2} = c^2 \quad (28)$$

$$y = r \cos \phi ; \quad z = r \sin \phi ; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Donde  $\xi, \eta$  y  $\phi$  son las coordenadas esferoidales alargadas.

Se obtiene una familia de elipsoides alargados confocales donde las superficies ortogonales son los hiperboloides de revolución de dos hojas.

Relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas esferoidales alargadas:

Resolviendo el sistema de ecuaciones (28) tomando como variables las coordenadas  $x$  y  $r$ , resulta:

$$x = c\xi\eta \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi \quad z = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi$$

El cálculo de los coeficientes métricos da:

$$h_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} ; \quad h_\eta = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} ; \quad h_\phi = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$$

Con estos factores el Laplaciano resulta en:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^3(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ c(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ c(1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] \right\}$$

Y la ecuación de Laplace es igual a:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ c(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ c(1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] = 0 \quad (29)$$

#### 4.2 Definición de Coordenadas Esferoidales Achatadas.

Si el sistema de elipses e hipérbolas confocales gira alrededor del eje menor, entonces:

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2 ; \quad \frac{r^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2$$

$$z = r \cos \phi ; \quad x = r \sin \phi ; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

En ejes coordenados rectangulares:

$$x = c\xi\eta \sin \phi \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad z = c\xi\eta \cos \phi$$

Las superficies  $\xi = \text{constante}$  son los elipsoides achatados, mientras que las superficies  $\eta = \text{constante}$  son los hiperboloides de revolución de una hoja.

Los coeficientes métricos son:

$$h_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} ; \quad h_\eta = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} ; \quad h_\phi = c\xi\eta$$

Con los anteriores factores de escala el Laplaciano y la ecuación de Laplace son respectivamente:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{c^3(\xi^2 - \eta^2)\xi\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ c\xi\eta\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ c\xi\eta\sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{\xi\eta\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] \right\}$$

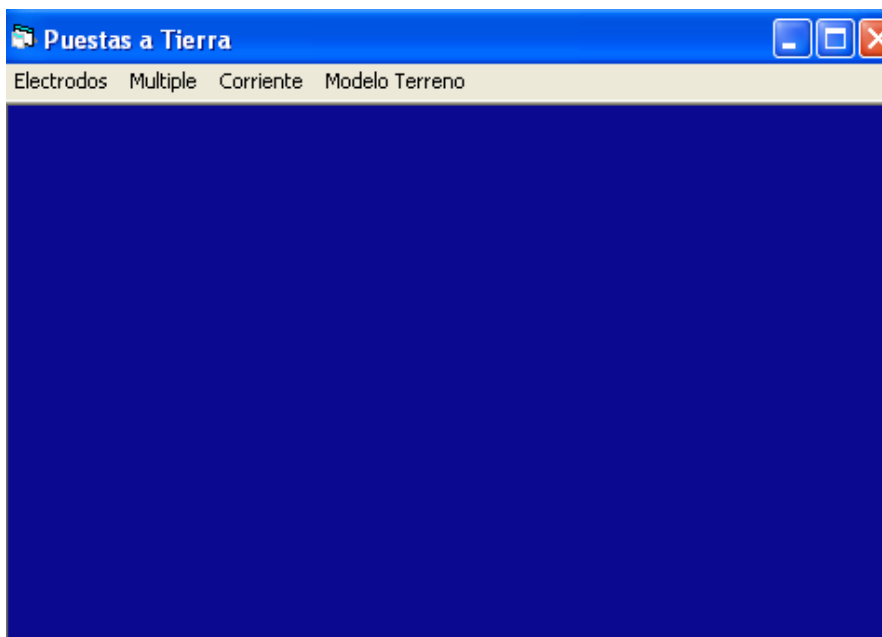
$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ c\xi\eta\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ c\xi\eta\sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{\xi\eta\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] = 0 \quad (30)$$

## Anexo B: Descripción del programa

El programa de diseño de puestas a tierra consta de una ventana principal (Ver figura 123) con los siguientes menús desplegables:

1. Electrodo.
2. Múltiple.
3. Corriente.
4. Modelo terreno.

Figura 123 Ventana principal programa de puestas a tierra.



En el menú Electrodo se pueden llamar los programas de cálculo de resistencia de los electrodos elementales (pica, banda, anillo, placa, semiesférico) haciendo clic en el icono correspondiente a cada electrodo.

En el menú desplegable Múltiple se acceden a los programas de cálculo de la resistencia de los electrodos compuestos como son los electrodos múltiple en estrella, en arreglo circular, en línea, bandas (paralelas), ángulo (bandas en ángulo), anillos (concentricos), etc.

En el menú corriente se accede al programa de cálculo de la corriente de falla a tierra para instalaciones de tercera categoría con neutro unido a tierra directamente o a través de impedancia.

Por último, en el menú Modelo terreno se accede a los programas de cálculo de la resistencia de los electrodos de banda y anillo en un terreno estratificado.

Los programas de cálculo de la resistencia de puesta a tierra de los diferentes electrodos tienen a su vez un icono con nombre Seguridad por medio del cual se accede al subprograma para el análisis de seguridad del electrodo en cuestión.

Por ejemplo, si se accede al programa de análisis de seguridad del electrodo de pica veremos la siguiente ventana (figura 124)

Figura 124 Ventana para el análisis de seguridad del electrodo de pica

The screenshot shows a software window titled "Análisis Seguridad Electrodo de Pica". The window contains several input fields and control elements. On the left side, there are input boxes for "Resistividad Terreno (Ohms-m)", "Longitud Pica (m)", "Diámetro Pica (cm)", "Corriente Electrodo (A)", "Tiempo de Despeje Falla (Seg)", and "Resistencia de Cuerpo (Ohms)". In the center, there are sections for "Ecuacion de Electrocuacion" with radio buttons for "Dalziel" and "UNIPEDA", "Tipo de Contacto" with radio buttons for "Toque" and "Paso", and "Capa Superficial" with radio buttons for "Si" and "No". Below these are input boxes for "Resistividad (Ohms-m)" and "Espesor (cm)". On the right side, there are input boxes for "Voltaje de Paso Máximo (V)", "Voltaje de Electrodo (V)", "Corriente de Cuerpo Admisible (mA)", and "Corriente de Cuerpo Calculada (A)". At the bottom, there are "Calcular" and "Salir" buttons.

Además de los parámetros del electrodo el programa pide la corriente de electrodo, el tiempo de despeje de la falla y la resistencia del cuerpo humano asumida en los cálculos de seguridad.

En la parte central de la ventana hay unos botones de opción para seleccionar el tipo de ecuación de electrocución a usarse en los criterios de seguridad, el tipo de contacto y si se añade o no una capa superficial aislante para aumentar la resistencia de contacto del pie con el suelo.

Si se añade una capa superficial aislante el programa pide los datos de su resistividad y su espesor en centímetros.

En el lado derecho de la ventana aparecen los valores que calcula el programa como son el voltaje de paso máximo, el voltaje de electrodo, la corriente de cuerpo admisible (obtenida de la ecuación de electrocución) y la corriente de cuerpo calculada.

Si el diseño de la puesta a tierra es peligroso aparece en el lado derecho de la ventana el mensaje PELIGRO, indicando que la corriente de cuerpo calculada por el programa es mayor que la corriente de cuerpo admisible.

Algunos de los íconos del menú desplegable Múltiple tienen una flecha en su lado derecho indicando que existe un submenú. Al posicionarse en dichos iconos se despliega el submenú.

Por ejemplo, si nos posicionamos en el icono Anillos del menú desplegable múltiple aparece el submenú:

- Dos
- Tres
- Cuatro

Indicando que se puede escoger entre estas tres opciones:

- Electrodo múltiple de dos anillos circulares concéntricos.
- Electrodo múltiple de tres anillos circulares concéntricos.
- Electrodo múltiple de cuatro anillos circulares concéntricos.

Si nos situamos en el icono semiesférico del menú desplegable Múltiple aparece el submenú:

- Anillo
- Pica

Indicando que se puede escoger entre estas dos opciones de electrodo múltiple:

- Electrodo múltiple de electrodos semiesférico y anillo
- Electrodo múltiple de electrodos semiesférico y pica.

Si nos situamos en el icono pica del menú desplegable Múltiple aparece el submenú:

- Anillo
- Anillos

Significa que se puede escoger entre un electrodo compuesto de pica con un anillo de control o dos anillos de control.

Los iconos del menú desplegable Múltiple de nombres línea y circular tienen el submenú:

- Picas.
- Semiesféricos.

Indicando que en esta clase de electrodos compuestos se puede escoger el tipo de electrodo individual que los constituyen.

Los programas de análisis de seguridad de los electrodos múltiples en arreglo circular y en línea compuestos por electrodos individuales de pica tienen un botón de opción adicional el cual me permite seleccionar si el arreglo de electrodos está unido por un conductor de unión aislado o desnudo (sin aislamiento) por defecto el programa esta en la opción aislado. Si seleccionamos la opción de desnudo el programa pide el diámetro del conductor de unión de los electrodos individuales y la profundidad en que está enterrado.

En el menú desplegable Electrodos en el icono placa hay un submenú con las opciones:

- Circular.
- Elíptica.

Mediante este submenú se puede seleccionar el tipo de placa.