Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación.

Cristian Leonardo Echeverría Ballesteros

Trabajo de Grado para Optar el Título de Magister en Educación Matemática.

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A mi madre Hermelinda, por ser la persona más importante e influyente en mi vida.

Agradecimientos

A la Universidad Industrial de Santander y la Escuela de Matemáticas, por acogerme como miembro de esta importante institución y permitir la culminación de esta meta.

A mi directora de tesis Sandra Evely Parada Rico, por sus valiosos consejos y orientaciones que me ayudaron a crecer tanto profesional como personalmente. Agradezco en gran medida su confianza, paciencia y amistad.

A mis profesores Johanna Mendoza y Luis Ángel Pérez, por sus enseñanzas.

A mis evaluadores, Jorge Enrique Fiallo, María Teresa Castellanos y Pablo Flores, por sus aportes para el enriquecimiento de la investigación.

A mis padres, Hermelinda Ballesteros y Jorge Echeverria, por su apoyo incondicional.

A Johana Toloza, Yeimy Guerrero y Fabián Camacho, por su gran amistad, motivación, consejos y apoyo en los buenos momentos al igual que en los difíciles.

A mis amigos y compañeros de la escuela de matemáticas, por los momentos compartidos.

A mis hermanos, sobrinos y demás familiares, por su apoyo y palabras de aliento.

A kirara, por traerme paz y felicidad.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

Resumen

Título: Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación.

Autor: Cristian Leonardo Echeverria Ballesteros

Palabras Clave: Formación de profesores, cálculo diferencial, características diferenciadas.

Descripción:

El objetivo de esta investigación es el de describir aprendizajes construidos por profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas en la educación superior. La investigación se sustenta en el modelo teórico-metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011) que se enmarca en la teoría social de Wenger (1998). La investigación se llevó a cabo en seis fases: i) caracterización de la comunidad de práctica (CoP) y del contexto de estudio; ii) Primer acercamiento de la CoP a la reflexión sobre la atención a la diversidad; iii) análisis de los resultados del primer acercamiento; iv) segundo acercamiento de la CoP a la reflexión sobre la atención a la diversidad; v) selección de los casos representativos en cada implementación; vi) caracterización de los significados negociados por la comunidad. Para el análisis de los resultados se utilizaron las tres dimensiones del pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas que ofrece el modelo R-y-A: pensamiento matemático, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal. A través del estudio, se pudo evidenciar que los procesos de reflexión y discusión en la CoP han posibilitado que los profesores en formación reflexionaran sobre los objetos matemáticos del cálculo diferencial, que valoraran la necesidad de realizar adaptaciones curriculares ajustadas a las necesidades de los estudiantes, así como la previsión de recursos para favorecer la enseñanza del cálculo a los estudiantes con características diferenciadas.

Abstract

Title: Teaching calculus to people with differentiated characteristics: reflections of a community of practice of mathematics teachers in training.

Author: Cristian Leonardo Echeverria Ballesteros.

Key Words: Teacher in training, differential calculus, differentiated characteristics.

Description:

The objective of this research is to describe learning constructed by teachers in training who reflect on the teaching of calculus to people with differentiated characteristics in higher education. The research is based on the theoretical-methodological model of Reflection and Action (R-and-A) of Parada (2011) that is framed in the social theory of Wenger (1998). The research was carried out in six phases: i) characterization of the community of practice (CoP) and the study context; ii) First approach of the CoP to the reflection on attention to diversity; iii) analysis of the results of the first approach; iv) second approach of the CoP to the reflection on attention to diversity; v) selection of representative cases in each implementation; vi) characterization of the meanings negotiated by the community. For the analysis of the results, the three dimensions of the reflective thinking of the mathematics teacher offered by the R-and-A model were used: mathematical thinking, didactic thinking and orchestral thinking. Through the study, it was possible to show that the processes of reflection and discussion in the CoP have made it possible for teachers in training to reflect on the mathematical objects of differential calculus, to assess the need to make curricular adaptations adjusted to the needs of the students, as well as the provision of resources to favor the teaching of calculus to students with differentiated characteristics.

INTRODUCCIÓN

Desde 1960 se ha venido hablando a nivel mundial sobre educación inclusiva, que se han reflejado en diferentes pronunciamientos emitidos por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) y la Organización de la Naciones Unidas (ONU). Producto de los lineamientos internacionales que han promovido estas organizaciones, surgen políticas educativas inclusivas en varios países, entre ellos Colombia. Las principales políticas en donde se habla de inclusión en Colombia son: la constitución política de 1991 y la ley General de Educación de 1994.

Las políticas ofrecidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se han venido implementando paulatinamente durante las últimas décadas en varios niveles de la educación empezando por la educación preescolar, seguido por la educación básica, después en la educación secundaria y en menor medida en las Instituciones de Educación Superior (IES).

Debido a que las políticas para las instituciones de educación superior no eran muy precisas, el Consejo Nacional de Educación Superior (CESU), en el acuerdo por lo superior 2034, establece un marco normativo en donde se mencionan normas generales que regulan la educación superior. En este acuerdo se establecen los programas de formación para el aseguramiento de la calidad afirmando que, en parte, para lograr la calidad en las IES es necesario asegurar el ingreso, la permanencia y la graduación de los estudiantes con ciertas características diferenciadas (las cuales serán mencionadas posteriormente). Una de las estrategias que plantea el CESU para garantizar la permanencia de estos estudiantes, y por lo tanto para garantizar la calidad de las IES, es la de contar con docentes inclusivos.

A raíz de estas normativas nacionales (decretos, leyes…) han surgido Acuerdos internos en las IES, que favorecen la admisión, permanencia y graduación de algunos estudiantes con características diferenciadas. En particular, la Universidad Nacional de Colombia (UNAL) cuenta con un Programa Especial de Admisión y Movilidad Académica (PEAMA) y un Programa de Admisión Especial (PAES) cuyo objetivo es el de brindar opciones de inclusión y participación de los grupos vulnerables en la educación superior.

A nivel local, la Universidad Industrial de Santander (UIS) ha cristalizado estas leyes y decretos, en su Acuerdo No. 282 del 7 de noviembre del 2017, el cual habla sobre admisiones especiales. Estas admisiones están dirigida a los estudiantes con características diferenciadas que desean ingresar a la UIS y en ellas se establecen los requisitos que estos estudiantes deben cumplir para ingresar a la universidad por este medio.

A través de los registros llevados por la UIS entre el primer periodo del 2014 y el primer periodo del 2021, se han registrado un total de 479 estudiantes que ingresaron por medio de las admisiones especiales, de los cuales 299 estudiantes ingresaron a carreras como ingenierías, ciencias y otras (Economía, Microbiología y Bioanálisis) las cuales tienen en su plan de estudio materias relacionadas con matemáticas, en particular con Cálculo diferencial.

A través de los programas con los que cuenta la UIS, uno de ellos específicamente orientado a la Atención, Seguimiento y Acompañamiento a estudiantes que cursan asignaturas del área de matemáticas (SEA-ASAE) en el que dentro de sus actividades cuenta con el acompañamiento de tutores (pares académicos los cuales son estudiantes de últimos semestres de Licenciatura en Matemáticas), quienes se han percatado de que los estudiantes con características diferenciadas presentan mayores dificultades, en relación a los estudiantes promedio de la universidad. Por otro lado, estos tutores, profesores de Matemáticas en formación, además de notar dificultades en sus estudiantes perciben que ellos mismos presentan limitaciones para abordar didácticamente esas dificultades; cuestión que podría asociarse con el hecho de que en los cursos de didáctica no se reflexiona a profundidad sobre la atención a la diversidad en asignaturas de matemáticas del nivel superior.

Por todo lo anterior surge la pregunta ¿Qué atención se les está brindado a los estudiantes admitidos a la universidad que tienen alguna característica diferenciada en las asignaturas de Matemáticas? Una posible respuesta, es que es necesario que los profesores cuenten con una formación para favorecer la educación inclusiva en las asignaturas de matemáticas del nivel superior, formación que puede darse en dos momentos: i) la formación inicial y, ii) la formación continuada.

Centrando la atención en el contexto educativo de la UIS, se pudo encontrar que la planta profesoral de la escuela de matemáticas de la UIS cuenta con 31 profesores, de los cuales, en la formación inicial, 16 son licenciados en matemáticas y 15 son matemáticos. De los 16 licenciados, 4 de ellos cuentan con estudios de doctorado en educación matemática (didáctica de la matemática, matemática educativa). Por otro lado, los profesores con formación inicial en matemáticas no cuentan con formación complementaria que pueda dar cuenta de alguna preparación alrededor de la atención a la diversidad. Este contexto, nos invita a pensar que unos escenarios viables, en este momento, para la formación de profesores de matemáticas alrededor de la inclusión educativa pueden ser los cursos de didáctica del programa de Licenciatura en Matemáticas, pues posiblemente estos serán los profesores del futuro en la Universidad.

Literatura relacionada con la formación de profesores, como la de Álsina, Planas y Calabuig (2009) nos habla de la necesidad de mejorar la formación, tanto didáctica como disciplinar, de los profesores. Además, que podrían asumirse para ello, modelos de formación “activa” que están basados en el aprendizaje cooperativo, colaborativo, basado en proyectos, basado en la resolución de problemas, holístico, heurístico y el reflexivo.

A lo largo de las últimas décadas varios han sido los modelos de formación centrados en el aprendizaje reflexivo, los cuales han necesitado de aportes como los realizados por Schön, 1983; Kilpatrick, 1988; Korthagen, 2001; Brockbank y McGill, 2002; Perrenound, 2004; entre otros. Por ejemplo, Flores (2007) habla acerca de los profesores reflexivos, tanto en profesores en ejercicio como los profesores en formación. Menciona que en educación se considera a Dewey (1989) como el precursor del uso del término *reflexión* para referirse a una cualidad del profesor. También afirma que para Schön (1992) los profesionales, entre ellos los profesores, generan su conocimiento a través de la reflexión, *para, en* y *sobre* su acción, para la resolución de situaciones prácticas.

Uno de los modelos de reflexión existentes en la actualidad, basado en los aportes de autores como Thompson, 1992; Llinares, 1997; Wenger, 1998; Ponte & Serrazina, 2004; Trouche, 2004; entre otros, es el creado por Parada (2011) llamado modelo de reflexión y acción (R-y-A). El modelo sirve como una guía teórica-metodológica, y es basado bajo la hipótesis de que los procesos de reflexión de los profesores sobre las acciones llevadas a cabo *antes, durante y después* de clase pueden favorecer las prácticas profesionales. Este modelo se toma como guía teórica y metodológica para efectos de la investigación que aquí se reporta.

Es debido a la importancia de promover la formación inicial de los profesores alrededor de la enseñanza del cálculo y la educación inclusiva que se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aprendizajes consolidan los profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas en la educación superior, al interior de una comunidad de práctica? pregunta que se responde bajo el objetivo “describir aprendizajes construidos por profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas en la educación superior”.

1. ANTECEDENTES

Este capítulo está organizado en tres apartados. Primero se mostrarán algunos aspectos sobre Educación Inclusiva a nivel internacional y nacional. Luego, se hablará sobre las dificultades que se reportan en la comprensión de los objetos matemáticos del cálculo diferencial. Y finalmente, se mencionará la bibliografía relacionada con la formación de profesores de matemáticas para la inclusión.

1.1 Aspectos sobre Educación Inclusiva.

Este apartado se divide en tres subapartados en donde se presentan: una mirada sobre el contexto de la educación Inclusiva a nivel internacional, una mirada a la educación inclusiva a nivel nacional, y una mirada al contexto local. Esto con el fin de dar a conocer el panorama que se ha venido desarrollando sobre educación inclusiva en gran parte del mundo, en Colombia y finalmente en la UIS que es donde se ubica el contexto de este estudio.

1.1.1 *Una mirada al contexto internacional.*

En la actualidad se habla ampliamente sobre la inclusión escolar, lo que se ha evidenciado en los pronunciamientos de organizaciones mundiales, como la ONU y la UNESCO. Sus menciones promueven la igualdad de oportunidades para todos, bajo la hipótesis que la igualdad y la inclusión son los cimientos para una educación de calidad.

Guerrero (2003) establece que la UNESCO ha procurado establecer ciertos principios orientadores en cada una de sus conferencias sobre educación. Al respecto la autora menciona que la UNESCO organizó en Montreal (Canadá) del 21 al 31 de agosto de 1960 la II Conferencia Mundial sobre la Educación de Adultos. Esta Conferencia tenía como tema fundamental *"la educación de los adultos en un mundo en evolución".* En cuanto a las personas con discapacidad, aún no se hace explicita una referencia a los mismos, pero, existen ideas sobre los valores de igualdad, tolerancia, respeto por la diversidad cultural y la participación. De esta conferencia surgieron una serie de resoluciones en donde se reconoce el papel y la importancia de la educación de los adultos, y entre sus principios se indica la no discriminación.

La UNICEF (2018), evoca el compromiso de la ONU, quien, en 1859, aprobó una *Declaración de los Derechos del niño,* en la que se incluían 10 principios alrededor de la no discriminación. En 1978, el Gobierno de Polonia presentó a la ONU una versión provisional de una *Convención sobre los Derechos del Niño*, y fue después de 10 años de negociación con los gobiernos del mundo, que se aprobó el texto de la *Convención sobre los Derechos del Niño* en 1989, de tal modo que los principios que allí se proponían fueran de carácter obligatorio para los países que la ratificaran. Las leyes que se plantearon en esta Convención protegían a la infancia, permitiendo que no hubiese un acceso desigual a la educación (UNICEF, 2006). Expone Camargo (2018) que, en 1993 la ONU presenta unas normas, *Normas uniformes sobre la igualdad de oportunidades para las personas con discapacidad,* en donde se promueve la idea de integración de las personas con discapacidad en el campo de la educación.

En la *Declaración de Salamanca y el marco de acción para las necesidades educativas especiales,* documento presentado por la UNESCO y el Ministerio de Educación y Ciencia de España en 1994, se establece que las escuelas deben acoger a todos los niños, sin importar sus condiciones físicas, sociales, intelectuales, emocionales, entre otras. En otras palabras, que las escuelas deben acoger a los estudiantes que presentan tanto discapacidad como talentos excepcionales, además a estudiantes que pertenecen a alguna minoría étnica, cultural o que se encuentren en zonas desfavorecidas y/o marginales.

La UNESCO (2000) establece que el foro Mundial sobre la Educación fue llevado a cabo del 26 al 28 de abril del 2000 y se adoptó el *Marco de Acción de Dakar*. En este marco se establece que los países se deben comprometer a formular "políticas educativas de inclusión, que den lugar a la definición de metas y prioridades de acuerdo con las diferentes categorías de población excluida en cada país" (UNESCO, 2000, p. 39). Dentro de la población excluida se encuentran los niños con Necesidades Educativas Especiales (NEE), pertenecientes a minorías étnicas desfavorecidas, entre otros.

En 2006, la Asamblea General de la Naciones Unidas en su documento, *Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad*, propone 50 artículos. El artículo 24, de este documento, habla sobre educación inclusiva. En ese artículo, se menciona que debe haber una ausencia de discriminación en las aulas e igualdad de oportunidades, un sistema de educación inclusiva a todos los niveles; enseñanzas con miras a desarrollar el potencial humano y el sentido de la dignidad y la autoestima, reforzar el respeto por los derechos humanos y la diversidad humana, desarrollar los talentos y la creatividad de las personas en condición de discapacidad, hacer posible una inclusión en la sociedad de las personas en condición de discapacidad (Camargo, 2018).

Camargo también indica que, en la conferencia del 2008, *La educación inclusiva: el camino hacia el futuro*, la UNESCO pone de relieve la estrecha relación que existe entre una educación inclusiva, el cumplimiento de los objetivos y del propósito de las Naciones de una Educación para Todos. Afirmando que el logro de los objetivos de la Educación para Todos supone llegar a los niños, jóvenes y adultos que aún siguen siendo excluidos de las posibilidades de la educación básica. En la conferencia, además se menciona que una educación de calidad es una educación inclusiva, ya que se propone velar por la participación plena de todos sus educandos, independientemente de su sexo, condición socioeconómica, origen étnico o racial, situación geográfica, necesidad especial de aprendizaje, edad o creencias religiosas.

Producto de algunos de estos principios y lineamientos orientadores, surgen en países como Colombia, políticas educativas inclusivas, como las que mencionaremos a continuación.

1.1.2 Una mirada al contexto nacional

En el Artículo 67 de la constitución política de Colombia 1991 se establece que la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social. El artículo, menciona que la educación forma al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la democracia y a la paz, con miras al mejoramiento cultural, científico, tecnológico y la protección del medio ambiente. En este artículo, también se establece que los principales responsables de la educación son el estado, la sociedad y la familia. Además, la educación será obligatoria entre los cinco y los quince años y que comprenda como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica.

La ley General de Educación de 1994 reclama la necesidad de que todos los colombianos se sientan incluidos desde la diversidad, sin diferenciación de raza, sexo, religión, creencias políticas, y demás elementos constitutivos del multiculturalismo colombiano.

Estas leyes que surgen en el país sobre inclusión son el fruto de múltiples desarrollos socioculturales que se generaron internacionalmente. Especialmente con la *Declaración Universal de Derechos Humanos* por parte de la ONU en 1948. Y aunque en otros países los avances sean más sustanciales en cuanto a materia de inclusión social, no se puede negar que en Colombia se han presentado avances paulatinos.

En cuanto a las políticas en la educación superior, el Consejo Nacional de Educación Superior (CESU), en el acuerdo por lo superior 2034, menciona un marco normativo en el cual se establecen normas generales que regulan la educación superior, relacionados con los programas de formación y el aseguramiento de la calidad, lo cual se estableció en la Ley 115 de 1994, donde se definen las normas generales para el servicio público de la educación, acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad.

En el Acuerdo No. 282 del 7 de noviembre del 2017[1] de la Universidad Industrial de Santander (contexto de la investigación que aquí se plantea), se mencionan algunos aspectos legales los cuales se rigen a nivel nacional:

a) "(…) Que el inciso segundo del artículo 13 de la Constitución Política, establece que *"El estado promoverá las condiciones para que la igualdad sea real y efectiva y adoptará medidas a favor de grupos discriminados o marginados"*.
b) Que la ley 1084 de agosto 4 de 2006 establece que las IES de carácter público y privado deben otorgar el 1% de sus cupos a los bachilleres de los Departamentos donde no haya IES y otro 1% a los aspirantes que provengan de municipios de difícil acceso o con problemas de orden público.
c) Que la Ley 70 de 1993 y el Decreto 1745 de 1995, reconocen el principio de diversidad étnica y cultural de la nación y consagran derechos territoriales, culturales, políticos y sociales a favor de los integrantes de comunidades afrocolombianas del país.
d) Que el artículo 62 de la Ley 915 de octubre 21 de 2004, establece que las IES de carácter público deben otorgar un cupo mínimo por programa académico para dar facilidad de ingreso a los bachilleres del departamento Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina.
e) Que la ley 1448 de junio 10 de 2011, por la cual se dictan medidas de atención, asistencia y reparación a las víctimas del conflicto armado interno, contempla que las

[1] Acuerdo en el que se dictan disposiciones sobre el ingreso a la UIS a estudiantes por la modalidad de Admisiones Especiales.

Universidades de naturaleza pública, en el marco de la autonomía universitaria, establezcan procesos de selección, admisión y matricula que posibiliten que las víctimas en los términos de la mencionada ley puedan acceder a sus programas académicos.

f) Que el artículo 26 de la ley 21 de 1991, por el cual se aprueba el Convenio número 169 sobre pueblos indígenas y tribales en países independientes, adoptado por la 76a. reunión de la Conferencia General de la O.I.T., Ginebra 1989, establece que se deben optar medidas para garantizar a los miembros de pueblos indígena y tribales la posibilidad de adquirir una educación a todos los niveles, por lo menos en pie de igualdad con el resto de la comunidad nacional.

g) Que en el cumplimiento de los anteriores mandatos constitucionales y legales, el Consejo Académico viene otorgando un tratamiento especial en el punto de la admisión a programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander a favor de poblaciones vulnerables, como: indígenas, afrodescendientes, palenqueros y raizales, víctimas del conflicto armado interno, entre otros, mediante un sistema de cupos especiales aprobado mediante el Acuerdo No. 134 de 2011 y demás disposiciones complementarias; bajo el entendido que la igualdad real y efectiva de los integrantes de estas comunidades se puede lograr a través de su formación profesional. (p.1)

Por otra parte, en Colombia, en una publicación de la Fundación Empresarios por la Educación (ExE) se expone que:

- A través de un informe de Save the Children del MEN 2013, se menciona que todos los departamentos en Colombia tienen indígenas, de los cuales 40% de esta población son niños, niñas y adolescentes, de los cuales 86% no recibe educación acorde a su cultura y cosmovisión.

- En 2015, el país contaba con 15.446.381 menores de edad, de los cuales más de 5 millones de niñas, niños y adolescentes estuvieron por fuera del sistema educativo.
- El 40% del total de niñas, niños y adolescentes que no asisten al colegio en el país son de zonas afectadas por el conflicto armado.
- Según el Registro Único de Víctimas, a enero de 2017 en Colombia, son 8.091 los niños, niñas y adolescentes que se han registrado como víctimas de vinculación al conflicto armado por uso y/o reclutamiento.

La Organización de la sociedad civil Niñez Ya, señala que el 40% de los niños que no asisten al colegio están en zonas de conflicto armado y que el 62% de los jóvenes que terminaron el bachillerato no lograron acceder a la educación superior.

En lo que concierne a la educación superior en el país, en la sección de *Educación inclusiva: acceso, permanencia y graduación,* dentro del documento titulado Acuerdo por lo superior 2034 del MEN (2013), se expone que al interior de Colombia se encuentran una serie de grupos los cuales difícilmente acceden al sistema educativo por circunstancias económicas, sociales, políticas, culturales, entre otras. Dentro de este documento se menciona que el Centro de Investigaciones para el Desarrollo (CID), de la Universidad Nacional de Colombia con apoyo del MEN, realizó un estudio en 2007 en donde se identificaron principalmente cinco grupos que mostraban dificultades tanto para el acceso, como para la permanencia y graduación en la educación superior:

- Personas en condición de discapacidad y con capacidades o talentos excepcionales (personas con Necesidades Educativas Especiales).

- Grupos étnicos: comunidades negras, afrocolombianos, raizales y palenqueros, indígenas y Rom.
- Población víctima, según lo estipulado en el artículo tercero de la ley 1448 de 2011.
- Población desmovilizada en proceso de reintegración.
- Población habitante de frontera y/o población rural ubicada en zonas de difícil acceso.

A los estudiantes que pertenecen a estas poblaciones los llamaremos *estudiantes con características diferenciadas*, para efectos prácticos de la tesis.

El MEN (2016) en su documento *Hacia una educación superior inclusiva en Colombia*, menciona que el MEN en el año 2013 propuso unos *lineamientos de la política de la educación superior inclusiva* para promover la Educación Inclusiva en el contexto universitario. Entre esos lineamientos establece cinco retos:

- Generar procesos académicos inclusivos.
- Contar con docentes inclusivos, es decir formados en educación inclusiva.
- Promover espacios de investigación, innovación social, de creación artística y cultural con enfoque de educación inclusiva.
- Construir y consolidar una estructura administrativa y financiera que sustente las estrategias y acciones de la educación superior inclusiva.
- Diseñar e implementar una política de educación superior inclusiva institucional.

Un comentario que establece el MEN (2016) es que los docentes inclusivos, no solo participan de forma activa en el desarrollo de los currículos, sino también transforman las prácticas pedagógicas, valoran la diversidad de sus estudiantes y la potencian como parte del proceso educativo.

En la educación superior, se cuenta con un documento del MEN (2018) llamado Índice de Inclusión para la Educación Superior[2] (INES), con el que se busca orientar la educación inclusiva en las IES, buscando potenciar y valorar la diversidad desde el reconocimiento y visibilización de la diferencia, como condición inherente al ser humano.

En ese sentido, en el contexto de la educación superior colombiana, la atención a la diversidad se enfatiza en la educación para todos, independientemente de su procedencia social, económica, lingüística, cultural y de género de los estudiantes, bajo la mira de alcanzar los objetivos de equidad, pertinencia y calidad.

La Educación Inclusiva se define como un "principio rector general" que busca el potenciar y darle valor a la diversidad (entendiéndola y protegiéndola, a través de garantizar las identidades y particularidades de los estudiantes), promover el respeto a ser diferente y facilitar la participación de la comunidad dentro de una estructura intercultural, favoreciendo la cohesión social, la cual es una de las finalidades de la educación.

En la Figura 1, se esquematizan las características de la educación inclusiva. A continuación, se describen brevemente cada una de las características, en términos del MEN (2018).

[2] El INES es una herramienta que permite a las IES identificar las condiciones en que se encuentran con respecto a la atención a la diversidad, analizar sus fortalezas y oportunidades de mejoramiento y tomar decisiones que cualifiquen el aprendizaje, la participación y la convivencia de la comunidad.

Figura 1.

Características de la educación inclusiva.

Nota. El gráfico representa las características que posee la educación inclusiva. Tomado del MEN (2018, p. 19)

- La *participación* "hace referencia a la importancia de tener voz y ser aceptado por lo que uno es" y se relaciona con "experiencias compartidas y negociaciones que resultan de la interacción social al interior de una comunidad que tiene un objetivo común".
- La *diversidad* es entendida como una característica "inherente al ser humano" que hace que sus diferencias sean "consustanciales" a su naturaleza. Debido al contexto colombiano y con miras a la atención y promoción de la diversidad se debe enfatizar en poblaciones específicas, ya sean por razones económicas, políticas, sociales, culturales, geográficas, entre otras, requieren especial protección. El índice desea promover en las IES la visibilidad y el respeto por la diversidad, en este sentido se busca que se potencie la diversidad sin la necesidad de afectar la identidad y particularidad de cada persona.

- La *interculturalidad* se refiere a “conjunto de relaciones entre diferentes grupos culturales que conduce a un proceso dialéctico de constante transformación, interacción, diálogo y aprendizaje de los diferentes saberes culturales en el marco del respeto” (MEN, 2018, p. 21).
- La *equidad* significa pensar en términos de reconocimiento de la diversidad estudiantil. Un sistema educativo con equidad se adapta a la diversidad y da a cada estudiante lo que necesita en el marco de un enfoque diferencial; en educar acorde a las diferencias y las necesidades individuales. La equidad incluye generar condiciones de accesibilidad, entendida como una estrategia que permite a cada una de las personas utilizar los mismos entornos, productos y servicios sin algún problema.
- La *pertinencia* está relacionada con “la capacidad que posee el sistema de educación, de dar respuestas a las necesidades concretas de un entorno y de su incidencia en la comunidad”.
- La *calidad* hace referencia a las condiciones óptimas que permiten el mejoramiento continuo de la educación en todos los niveles.

Las características antes descritas, se tuvieron en cuenta en el diseño y desarrollo de actividades de la comunidad de práctica con la que se trabajó en esta investigación.

1.1.3 Una mirada al contexto local

La UIS en su Acuerdo No. 282 del 7 de noviembre del 2017, afirma que “el Estatuto General de la Universidad en el artículo 5, literal b, establece dentro de sus objetivos, estudiar y promover el patrimonio cultural de la humanidad, atendiendo a su diversidad étnica, histórica, regional e ideológica, para contribuir a su conservación y enriquecimiento, en el marco de la unidad nacional.” (p.1)

En las disposiciones especiales del Acuerdo mencionado anteriormente, se establecen las admisiones especiales para el ingreso por carrera:

- ✓ Por cada carrera se garantizan dos (2) cupos para los bachilleres pertenecientes a una comunidad o resguardo indígena.
- ✓ Un (1) cupo por carrera para los bachilleres que procedan de población negra, afrocolombiana, palenquera y raizal.
- ✓ Un (1) cupo por carrera para bachilleres que procedan de departamentos donde no existen instituciones de educación superior.
- ✓ Un (1) cupo por carrera para bachilleres que procedan de los municipios de difícil acceso o con problemas de orden público.
- ✓ Un (1) cupo por carrera para bachilleres producto del conflicto armado interno colombiano que se cataloguen como víctimas.
- ✓ Un (1) cupo por carrera para bachilleres desmovilizados de manera individual o en forma colectiva en procesos de paz.

Aunque existen admisiones especiales en la UIS aún falta garantizar el acceso, por medio de esta modalidad, a personas que presentan Necesidades Educativas Especiales (NEE), es decir, las personas que presentan desde discapacidades hasta talentos excepcionales.

A continuación, se muestra una tabla (Tabla 1) con algunos datos relacionados a las admisiones especiales, desde el semestre 2014-I hasta el 2019-II, con las que cuenta la Universidad Industrial de Santander (UIS).

Tabla 1

Estudiantes Admitidos por medio de las admisiones especiales.

Periodo Académico	Tipo de admisión especial.	Cantidad de estudiantes admitidos a través de la admisión especial.	Cantidad de estudiantes admitidos a carreras con asignaturas de matemáticas.
Desde el 2014-1 hasta el 2021-1	Aspirantes provenientes de municipios de difícil acceso o problemas orden público.	169	109
	Aspirantes víctimas del conflicto armado	206	132
	Aspirantes que pertenecen a población negra, afrocolombiana, palenquera y raizal	40	24
	Aspirantes que pertenecen a comunidades o resguardo indígena	60	32
	Aspirantes que provienen de departamentos donde no existen Instituciones de Educación Superior.	3	2
	Desmovilizados en proceso de paz	1	0
Total		479	299

Nota. Esta tabla se presenta la cantidad de estudiantes admitidos a la UIS desde el primer semestre del 2014 hasta el primer semestre del 2021, los datos fueron tomados de los registrados en las oficinas de admisiones de la UIS.

Como se puede inferir de la Tabla 1, más del 62% de los estudiantes que ingresan por medio de las admisiones especiales que ofrece la UIS, ingresan a carreras las cuales tienen en su plan de estudio asignaturas como cálculo diferencial o asignaturas de matemáticas con contenidos similares.

1.2 Dificultades en la comprensión de los objetos matemáticos del cálculo diferencial.

Los estudiantes de admisión especial afrontan los mismos obstáculos que cualquier alumno de Cálculo Diferencial puede encontrar desde el componente cognitivo, pero estos pueden acentuarse por sus características individuales, como por ejemplo no hablar español como primera lengua y no tener las mismas costumbres sociales o culturales de la mayoría de la población con la que construye su aprendizaje, lo que le impide comunicar lo que no comprende o pedir ayuda a sus compañeros o profesores.

Son numerosas las investigaciones que hablan acerca de las dificultades en la comprensión de los objetos matemáticos del cálculo; entre ellas se resaltan a nivel internacional las investigaciones realizadas por Artigue (1995), Hitt (2003), y Tall (2009). A nivel nacional, se encuentran los trabajos de Villa y Ruiz (2010), Neira (2013), Moreno (2015), Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017), Guarín, Parada y Fiallo (2018).

En lo concerniente a las dificultades de los estudiantes sobre el concepto función, Artigue (1995) señala que se han realizado investigaciones con enfoques conjuntistas de la noción de función, las cuales evidenciaron la brecha que existe entre las definiciones dadas por los estudiantes y los criterios utilizados en el reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes.

Artigue menciona que se han identificado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función; dificultades que surgen debido a los hábitos de enseñanza tradicional. Además, menciona la autora que el predominio que se le otorga al registro algebraico y el estatus “infra matemático” que se le da al registro gráfico impiden que se maneje adecuadamente este tipo de dificultades.

Respecto a las dificultades asociadas a la noción de límite, Artigue (1995) señala que uno de los obstáculos epistemológicos que pueden encontrar los estudiantes respecto a este término es que, el sentido común que evoca el termino límite ayuda a una concepción del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable. Además, la investigadora plantea que las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de los objetos del cálculo radican en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Y es debido a que el enfoque de la evaluación se centra en este tipo práctica, los estudiantes la consideran como “lo esencial” del cálculo.

Sobre los problemas alrededor del aprendizaje del concepto de función, menciona Hitt (2003) que tanto alumnos como profesores presentan dificultades al momento de desarrollar un entendimiento profundo del concepto, ya que estos se restringen a una manipulación netamente algebraica, la cual produce una limitación en la comprensión del concepto de función. El investigador establece que las tareas de conversión (conectar diferentes representaciones, como la gráfica y la algebraica) promueve un mejor entendimiento de las funciones y promueve los procesos de visualización. Según Hitt (2003) es de la falta de las habilidades ligadas a la visualización matemática que se derivan problemas de aprendizaje, tanto en estudiantes como en profesores, de los conceptos relacionados al cálculo diferencial, como lo son: función, límite, continuidad y derivada.

De los métodos tradicionales de enseñanza, afirma Tall (2009) que surgen dificultades en el aprendizaje del cálculo, ya que se evidencia una predominancia por las prácticas algorítmicas y algebraicas, las cuales terminan siendo rutinarias.

A nivel nacional, Villa y Ruiz (2010) proponen el uso del software GeoGebra para el diseño de estrategias que potencien el desarrollo del pensamiento variacional en el alumnado. A través del desarrollo del pensamiento variacional se desea disminuir las dificultades en la comprensión de los objetos matemáticos, esto debido a que el pensamiento variacional guarda una estrecha relación con los conceptos matemáticos del cálculo como lo son: la función, la derivada, entre otros.

Neira (2013) menciona que en el escenario usual del trabajo en cálculo se ve: gran deserción escolar, incomprensión de conceptos, manejo inadecuado de razonamientos, escasa competencia algebraica, cursos desarrollados mecánicamente en los cuales se evidencian prácticas puramente algébricas y algorítmicas que no logran promover la comprensión de los conceptos del cálculo.

Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017) realizan una investigación sobre la identificación de dificultades en el aprendizaje de la derivada, en donde señalan que los estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de la derivada a partir del concepto de límite, ya que no comprenden este último concepto. Señalan los autores que los estudiantes presentan dificultades tanto cognitivas como procedimentales ante estos conceptos, ya que algunos alumnos no logran identificar las reglas de derivación o no las aplican y presentan manejos deficientes en la representación simbólica de los límites. Además, los investigadores exponen que algunos estudiantes desarrollan procesos mecánicos en el cálculo de las derivadas, pero existe gran dificultad para abordar la derivada como una razón de cambio. Por último, se establece que algunos alumnos, aunque logran identificar las reglas de derivación presentan dificultades de tipo algebraico y aritmético al aplicarlas, además de que se les dificulta establecer la jerarquía que demanda las reglas de derivación.

Respecto al concepto de límite, Guarín, Parada y Fiallo (2018, citando a Blázquez y Ortega, 2000) mencionan que para los estudiantes es un concepto poco atractivo y muy abstracto, el cual los alumnos olvidan con facilidad, siendo este uno de los conceptos más difíciles de aprender y enseñar. Para abordar la enseñanza y el aprendizaje del concepto límite, los investigadores diseñan, implementan y evalúan una secuencia de actividades en donde los estudiantes tengan que explorar las nociones de aproximación y tendencia las cuales favorecen la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

Moreno (2015), Barajas (2015), Santamaría (2016), entre otros, discuten sobre las problemáticas que presentan los estudiantes de primer nivel universitario cuando se enfrentan a comprender los objetos matemáticos del cálculo. Dificultades que se ven reflejadas en el alto índice de reprobación del cálculo diferencial.

De acuerdo con la idea anterior y tomando las ideas del MEN (2013), en su Acuerdo por lo superior 2034; se puede afirmar que entre los estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo se encuentran los estudiantes con características diferenciadas, ya que estos tal y como lo establece el MEN (2013) son los más propensos a desertar de la IES.

Además de presentar las dificultades mencionadas en este apartado, los estudiantes con NEE también presentan otras dificultades asociadas a su condición que afectan su aprendizaje de manera general. Al respecto, el MEN (2006) suministra algunas guías, las cuales contienen orientaciones pedagógicas para la atención educativa de estudiantes con autismo, limitación auditiva, limitación visual, discapacidad cognitiva, discapacidad motora, talentos excepcionales, entre otros. En estas guías se encuentran inmersas las dificultades asociadas a cada una de las condiciones descritas anteriormente y ciertas recomendaciones para poder abordarlas en el aula de clase.

Estas orientaciones pedagógicas ofrecidas por el MEN (2006) se tuvieron en cuenta para la formación de los futuros profesores con los cuales se llevó a cabo la investigación, aunque no aparezcan de forma explícita en este documento debido a lo extenso de las mismas.

Para abordar estas dificultades es imperante que los docentes se formen de manera, disciplinar, didáctica y en educación inclusiva, ya que no basta sólo con saber matemáticas para enseñarlas, ni sólo con tener conocimiento sobre educación inclusiva, para acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes con características diferenciadas.

1.3 Formación de Profesores de matemáticas para la inclusión

Debido a que es el profesor quien dirige la clase y la enseñanza de los objetos matemáticos del cálculo en el aula, es imperante que el docente cuente con conocimientos tanto disciplinares, como didácticos y en educación inclusiva, con miras a favorecer el aprendizaje de los estudiantes con características diferenciadas sobre los objetos matemáticos del cálculo diferencial. Este apartado se divide en tres subapartados en donde en el primero se citan algunos trabajos revisados sobre la formación de profesores en el ámbito disciplinar, en el segundo sobre la formación de profesores reflexivos, y finalmente en el último sobre la formación de profesores alrededor de la educación inclusiva.

1.3.1 *Formación de profesores en el ámbito disciplinar*

Respecto a la formación disciplinar han surgido algunos trabajos como el de Ball (2008) quien establece que en la enseñanza de algún tema el conocimiento matemático de los profesores juega un papel importante. En su trabajo la autora se enfoca en el conocimiento matemático de los maestros para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)), que incluye el conocimiento matemático que es común en las personas que trabajan en diversas profesiones y el conocimiento matemático especializado en la enseñanza; tomando casos de estudio para detallar como el MKT está asociado con la calidad matemática de la instrucción.

Silverman y Thompson (2008) mencionan que es ampliamente aceptado que los profesores de matemáticas necesariamente tengan una comprensión profunda de las matemáticas; afirman que entre los autores que están acorde a esta idea, se encuentran, Grossman, Wilson y Shulman, 1989; Ball, 1993; Schifter, 1995; y Ma, 1999. Sin embargo, los autores exponen que no sólo el conocimiento del profesor es suficiente para apoyar su enseñanza.

Para Ponte (2012) el conocimiento del profesor debe implicar, además del conocimiento relacionado con las disciplinas de enseñanza, el conocimiento didáctico, el conocimiento del currículo y el conocimiento de los procesos de aprendizaje. Al respecto, autores como Llinares (2011) y Flores (2007, 2009), exponen que además del conocimiento didáctico el profesor debe ser reflexivo, lo que también implica un proceso de formación desde el pregrado. En este último aspecto se centró la revisión, dado que es desde esa perspectiva que se orientó la investigación que aquí se muestra.

1.3.2 *Formación de profesores reflexivos.*

Sobre los procesos de reflexión, se resalta el trabajo de Flores (2007), quien menciona la necesidad de trabajar en este aspecto tanto en profesores en ejercicio como los profesores en formación. Menciona que en educación se considera a Dewey (1989) como el precursor del uso del término *reflexión* para referirse a una cualidad del profesor. También afirma que para Schön (1992) el profesional reflexivo reflexiona *para*, *en* y *sobre* su acción, para la resolución de las situaciones prácticas.

Flores (2009) plantea que, en la formación inicial de profesores, se debe tratar de que los estudiantes para profesor se pongan en contacto con la problemática profesional de la tarea docente, se debe procurar que los problemas profesorales, que aún no han vivido los estudiantes para profesor, logren ser significativos para él. Todo lo anterior partiendo de considerar al docente como un profesional reflexivo.

Ponte (2012) plantea que el profesor aprende a partir de su actividad y de la reflexión que surge en torno a ella, participando en prácticas sociales en función del apoyo colectivo y del desarrollo profesional.

Llinares (2011) establece que las reflexiones de profesores realizadas desde ciertos ámbitos señalan que no se puede esperar que los recién graduados de los programas de formación docente, salgan como expertos, por lo que se debe enfatizar en lograr que los futuros profesores tengan aproximaciones que los orienten a aprender a lo largo de su vida profesional. Además, menciona la importancia de que los estudiantes para profesor desarrollen conocimientos y destrezas para analizar la enseñanza de las matemáticas, y en particular de desarrollar la competencia docente denominada "mirar con sentido" los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta última competencia permite al profesor de matemáticas ver los procesos de enseñanza-aprendizaje de una forma profesional, integrando tres destrezas:

…*identificar* los aspectos que son relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto razonando sobre las interacciones en el aula; y realizar *conexiones* entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Llinares, 2011, p. 54).

Parada (2011) habla en términos del pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas, desglosando este pensamiento en tres: el pensamiento matemático, el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal (el cual está asociado al manejo y utilización de los recursos que utiliza el profesor). Este pensamiento reflexivo se da antes, durante y después de la clase (procesos que la autora denominada reflexión -*para, en* y *sobre*- la acción). Para ello, la autora crea un modelo teórico-metodológico llamado modelo de reflexión y acción (R-y-A) el cual está diseñado para coadyuvar u orientar la reflexión sobre las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas.

Entre los trabajos de investigación en educación matemática que se han llevado a cabo bajo la luz de este modelo (R-y-A) se destaca el realizado por Pineda (2018) ya que la autora gira su trabajo en torno a la formación inicial de profesores de matemáticas y la atención a la diversidad; que es un motivo coincidente de interés para la investigación que aquí se reporta, aunque difieren en cuanto a que esta investigación se enfocada en los objetos matemáticos del cálculo diferencial y no en el pensamiento numérico como lo hace la investigadora.

1.3.3 *Formación de profesores de matemáticas en educación inclusiva.*

Cuando se exponen las dificultades para atender la Necesidades Educativas Especiales en clase de Matemáticas y así promover la inclusión, se requiere que los profesores de matemáticas no sólo tengan la formación disciplinar, sino que tengan conocimientos sobre las posibles características diferenciadas de sus estudiantes. Así mismo, se demanda la permanente reflexión que los profesores necesitan hacer sobre su práctica docente.

Autores como Villalba (2006), Bruno y Noda (2010); exponen que los docentes, de manera general, manifiestan la falta de preparación y el poco apoyo sobre la atención a la diversidad, además, del poco apoyo institucional. También los autores afirman que la mayoría de las investigaciones alrededor de la inclusión se realizan desde el campo de la pedagogía, manejando de forma superflua o dejando de lado los conocimientos matemáticos.

Aké (2015) establece que la enseñanza de las matemáticas representa un reto para los profesores de todos los niveles educativos, especialmente cuando se enfrentan a un contexto inclusivo, ya que sus aprendices por lo general no logran las competencias esperadas. Es por esto que la autora plantea la necesidad de promover la reflexión en los profesores de matemáticas, además de que se promueva y se desarrolle en estos una educación inclusiva basada en las NEE.

Bruno y Noda (2010) mencionan que una realidad en la educación matemática es la falta de estudios sobre cómo tratar la formación de profesores de matemáticas inclusivos. Aké (2015) menciona, que existen dos clases de profesores que enseñan matemáticas a personas con NEE: los profesores de matemáticas y los profesores de educación especial. Los primeros cuentan con bases en matemáticas, pero no están familiarizados con las NEE, y los segundos cuentan con conocimientos psicológicos y pedagógicos, pero no poseen el conocimiento en matemáticas ni en didáctica de las matemáticas; y de esta forma no se puede abordar adecuadamente la enseñanza de la matemática a estudiantes con características diferenciadas.

Respecto a la formación de profesores alrededor de la atención a la diversidad; López-Mojica y Cruz (2015) establecen que no basta sólo con el hecho de saber matemáticas para poder enseñarlas, pues estas requieren de un tratamiento didáctico, además, tampoco es suficiente con tener una formación disciplinar sobre la educación especial. Se requiere de un equilibrio entre la formación disciplinar, didáctica y en educación especial para poder promover una educación inclusiva en las aulas de matemáticas.

Una investigación sobre formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad es la de Pineda (2018), quien vio la necesidad de formar inicialmente a los futuros licenciados de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad, ya que, al revisar el plan de estudio de 159 licenciaturas de 25 universidades del país (Colombia), notó que 104 licenciaturas no tenían por lo menos una materia relacionada a la atención a la diversidad en su plan de estudios. De estas 159 licenciaturas, 18 eran en matemáticas o afín, y de estas sólo 5 contaban con alguna materia relacionada con atención a la diversidad.

Con el objetivo de buscar el equilibrio mencionado por López-Mojica y Cruz (2015), Pineda (2018) define la práctica pedagógica de los profesores en formación como un proceso integrador, continuo y sistemático del saber didáctico y disciplinar en el contexto de la educación, en el cual el practicante puede confrontar y ampliar sus conocimientos, poner a prueba su sentido de responsabilidad y compromiso, además de poder expresar su creatividad y potencial humano en el aula como en la comunidad educativa.

La investigación que reporta Pineda (2018) establece que, aunque en su trabajo no se dé cuenta de saberes matemáticos logrados por los profesores en formación, si se evidenció que los "aprendizajes disciplinares construidos a lo largo de la formación, les permitió construir saberes didácticos y del manejo de recursos que les permitieron crear posibilidades y estrategias de atención a la diversidad que puedan encontrar en la clase de matemáticas" (Pineda, 2018, p. 143).

La metodología de investigación de este estudio se llevó a cabo basada en el Modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011); modelo el cual fue usado como guía teórica-metodológica de esta investigación.

2 ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Para efectos de la investigación se usa una interpretación del modelo teórico-metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011), el cual está orientado al desarrollo profesional de los educadores matemáticos. Este Modelo fundamenta teórica y metodológicamente la investigación que aquí se reporta.

El modelo tiene como objetivo principal el promover los procesos de reflexión en comunidades de práctica (CoP) de educadores matemáticos, como complemento o alternativa a su desarrollo profesional. En el caso de esta investigación la CoP es conformada por profesores de matemáticas en formación.

Debido a que el objetivo del modelo gira en torno a los procesos de reflexión que se dan al interior de las comunidades de práctica se hace necesario definir este término.

2.1 Comunidad de Práctica (CoP).

La autora del modelo adopta la definición de Wenger (1998) el cual establece que una comunidad de práctica (CoP) es

> "un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundiza su conocimiento en esta área a través de una estructura social basada en la construcción colaborativa de conocimientos a beneficio de todos sus miembros" (Parada, 2011, p. 20).

Es decir, que una CoP la conforma un grupo de personas que trabaja en conjunto construyendo un aprendizaje colaborativo con el objetivo de abordar sus intereses y/o preocupaciones en común respecto a un determinado tema. En el caso de esta investigación, la CoP está conformada por profesores en formación que profundizan sobre la enseñanza de algún objeto matemático del cálculo, dirigido a estudiantes que presentan características diferenciadas, con miras de favorecer el desarrollo profesional de cada uno de sus integrantes.

El aprendizaje que se da al interior de las CoP no es un aprendizaje que se evoque del pensamiento de uno solo de los miembros, sino que surge de una construcción colaborativa de conocimientos para el beneficio de sus integrantes.

Parada (2011, citando a Barab y Duffy, 2000) menciona que las CoP se distinguen de otras asociaciones debido a los esfuerzos de las prácticas de investigación y su desarrollo mediante la participación en la comunidad. El termino *participación* se adopta como uno de los elementos principales del modelo y será definido en la sección “2.2.1” de este capítulo.

Wenger (1998) menciona tres características principales que las comunidades de práctica deben tener:

a) Compromiso mutuo: El conocimiento parcial prima sobre el conocimiento individual de los individuos de la CoP; se busca que cada uno de los miembros de la CoP comparta sus conocimientos y pueda recibir los conocimientos de los otros, y no buscar un agente del conocimiento que imparta sus conocimientos sobre los demás integrantes de la CoP.
b) Empresa Conjunta: Dentro de las CoP existe la necesidad de plantearse unos objetivos y necesidades comunes, aunque estos no sean homogéneos; los objetivos pueden ser distintos, y por tanto, negociados, pero deben ser una fuente para la coordinación de la CoP, al igual que un estímulo para sus integrantes.
c) Repertorio Compartido: este se refiere “al conjunto de rutinas, palabras, gestos, instrumentos, maneras de hacer y hablar, símbolos, relatos, conceptos, etc., que la comunidad produce o adopta en el curso de su existencia” (Parada, 2011, p. 36). Siendo esta una característica que le da coherencia a las CoP.

Según Parada (2011) otro aspecto importante de las CoP es el hecho de que se desarrollan a través del aprendizaje colaborativo en donde surge un sistema de interacciones que organizan e inducen la influencia recíproca entre los integrantes de un grupo.

En las CoP debe haber un moderador al interior del grupo quien sea el que logre conducir a los integrantes a reconocer fortalezas y aspectos para mejorar en su práctica, además de ser quien busque alternativas para el desarrollo profesional colectivo. En nuestro caso son dos, la profesora encargada de la formación de los futuros profesores pertenecientes a la CoP y el autor que reporta esta investigación.

Menciona Moreno (2015) que la CoP motiva el desarrollo de dos aspectos en particular: la *negociación de significados* y la *cosificación.*

2.1.1 Negociación de Significados.

El significado para Wenger (1998) es el producto de las experiencias vividas las cuales influyen en la identidad y en las acciones individuales. El significado surge de la participación activa al interior de las CoP y en la forma como la interacción, el intercambio de saberes y experiencias se condensan en acciones.

A partir de la definición de significado, Wenger (1998) define la negociación de significados como un proceso motivado por las reacciones de los miembros de la CoP. Esta negociación se logra a través de interacciones continuas y del proceso de dar y recibir. Parada (2011) considera que el significado es modificable y depende del contexto, definiéndolo como "el proceso mediante el cual se construyen interpretaciones de un saber propio permeado por los saberes de los demás" (Parada, 2011, p. 39).

2.1.2 Cosificación (Reification)

Es el proceso que se refiere a diseñar, hacer, representar, codificar, nombrar, describir, utilizar, percibir o adaptar diferentes recursos. De esta forma la cosificación puede ser tanto un proceso, como un producto. Estos no sólo son objetos concretos sino pueden ser reflejos de la práctica y de los significados propios de los integrantes de una CoP.

2.2 Elementos Fundamentales del Modelo R-y-A

Tal y como lo expone Parada (2011) los elementos fundamentales del modelo son: la participación en las comunidades de práctica (CoP), en el sentido de Wenger (1998); la reflexión y la acción.

2.2.1 Participación.

La autora, basada en la teoría de las comunidades de práctica de Wenger (1998) menciona que se define la ***Participación*** como un proceso el cual combina hacer, pensar, hablar, sentir y pertenecer; destacando que el participar en una CoP no sólo consiste en asistir a una serie de actividades o estar registrado en un grupo en línea, sino contribuir con lo que se conoce y se desconoce para lograr construir un aprendizaje colectivo.

La *Participación* se puede ver de dos formas: la participación periférica y la participación plena.

La *Participación Periférica* se da cuando un miembro de una comunidad participa periféricamente en las actividades, es decir, cuando no se inmiscuye en las actividades de la comunidad.

Lave y Wenger (1991) mencionan que inicialmente los miembros de una CoP participan periféricamente, luego al establecer acercamientos con los demás participantes, van accediendo a la cultura del grupo.

A medida que se va accediendo a la cultura del grupo y se participa activamente, realizando contribuciones con miras a construir un aprendizaje colectivo, se podría hablar de una *Participación Plena*

Wenger (1998) señala algunos aspectos importantes sobre la participación y la cosificación; plantea que no pueden ser considerados por separado, además, que la cosificación siempre va a estar apoyada en la participación.

2.2.2 Reflexión.

Respecto a la ***Reflexión*** se define como un proceso en el cual está fundamentado el modelo. El modelo parte de la idea de que los educadores matemáticos cuentan con ciertos experienciales valiosos y saberes conceptuales, y al reflexionar sobre estos saberes se logran mejorar, corregir y potenciar a favor de la educación matemática. Siguiendo las ideas de Dewey (1989), Parada (2011) entiende la ***Reflexión*** como un proceso de resolución de dudas, de conflictos, y de disposición para revisar su actuación.

2.2.3 Acción

La ***Acción*** es el principal recurso sobre el que se reflexiona, entendida como la actuación del profesor de matemáticas en sus propias prácticas profesionales. En el modelo se reflexiona *para, en y sobre* la acción, ya que se pretende que los profesores no sólo construyan discursos consistentes, sino que también sean coherentes con sus prácticas reales en el aula.

2.3 Elementos que componen el bosquejo del modelo.

En la siguiente figura (*Figura 2*) se muestra un bosquejo del modelo, al cual se le da una lectura del interior al exterior.

Figura 2.

Bosquejo del modelo R-y-A de Parada (2011).

Nota. Adaptación del modelo de reflexión y acción de Parada (2011).

En el centro del modelo se encuentra la actividad matemática que es donde se centran los esfuerzos de desarrollo profesional.

2.3.1 Actividad Matemática.

Para caracterizar la *actividad matemática,* Parada (2011) toma las ideas de Chevallard, Bosh y Gascón, 1997; y afirma que, hacer matemáticas, es un trabajo del pensamiento que construye conceptos para resolver problemas.

Estos autores consideran tres tipos de actividades matemáticas:

a) Utilizar matemáticas ya conocidas: consiste en resolver problemas a partir de herramientas matemáticas que ya conoce y sabe cómo utilizar.

b) Aprender y enseñar matemáticas, frente a un problema que no se sabe resolver.

c) Crear matemáticas nuevas: se podría pensar que sólo los matemáticos pueden avanzar paulatinamente en la construcción de una matemática nueva, pero "a nivel de los alumnos se puede afirmar que todo aquel que aprende matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador" (Parada, 2011; p. 64).

Dentro del modelo la actividad matemática se encuentra al interior del triángulo pedagógico de Sanit-Onge, 1997; en donde existen relaciones entre el profesor, el alumno y la matemática escolar.

- La relación entre la matemática escolar y el profesor es una relación didáctica.
- La relación entre el profesor y el estudiante es una relación de mediación
- La relación entre el estudiante y la matemática escolar es una relación de estudio.

Las relaciones anteriormente mencionadas son las posibilitan la actividad matemática de los estudiantes *durante* la clase y la actividad matemática del profesor *antes, durante y después* de la clase.

Con el modelo se pretende que sea inicialmente el profesor quien despliegue una actividad matemática con el objetivo de que se tenga una claridad sobre la actividad matemática que se quiere promover en los estudiantes durante la clase.

Siguiendo con el bosquejo del modelo, respecto a los procesos de reflexión se representan en un recorrido en forma de espiral, que surge alrededor del triángulo pedagógico el cual tiene en su centro la actividad matemática.

2.3.2 Procesos de reflexión.

Estos procesos de reflexión se ven como procesos de participación-reflexión-acción, los cuales son: la reflexión *para* la acción, la reflexión *en* la acción y la reflexión *sobre* la acción.

A. Reflexión-para-la acción.

Siguiendo las ideas de Dewey (1989), Parada (2011) menciona que la reflexión *para* la acción se da por parte del profesor cuando planea la clase que va a desarrollar; cuando prepara la ruta cognitiva de los contenidos y objetos matemáticos que van a aprender sus estudiantes. También cuando tiene en cuenta las posibles dificultades que podrán presentar sus estudiantes y establece unas posibles alternativas.

Además, el profesor debe seleccionar los recursos que utilizará en clase para acercar los contenidos matemáticos a sus estudiantes, favoreciendo el aprendizaje de los estos y su actividad matemática.

En el modelo se promueve la participación entre los educadores matemáticos, en donde la negociación de significados se cosifica en productos del proceso de *reflexión para la acción*, tales como: Las planeaciones de clase, el diseño de las hojas de trabajo, entre otros recursos.

Entre las negociaciones de significado se espera que los profesores lo hagan en torno a los contenidos matemáticos, las formas de estudiarlos y de evaluarlos.

Parada (2011) considera que la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en la clase, depende, en gran medida, de la actividad matemática que realice previamente el profesor en sus procesos de reflexión *para* la acción.

B. Reflexión-en-la acción

La autora sigue las ideas de Schön, 1983; en las que plantea que las situaciones de reflexión en la acción son las que surgen de forma espontánea y rutinaria, cuando el profesor se encuentra con un evento o situación inesperada, que lo lleva a una reflexión para abórdala.

Se dice que la reflexión-en-la acción del profesor de matemáticas, se da cuando el profesor interactúa con el estudiante durante la clase; estas reflexiones surgen en la forma en que el profesor actúa o reacciona ante situaciones inesperadas en las que pone a prueba sus conocimientos o desconocimientos y la manera en que utiliza los recursos que seleccionó previamente para la clase.

Se establece que después del proceso de negociación de significados construidos en colectivo, se cosifican estos significados de manera individual; y es allí donde emergen prácticas propias del maestro para resolver las situaciones, esperadas e inesperadas, en el aula.

C. Reflexión-sobre-la acción.

Este tipo de reflexiones se realizan sobre un hecho que ha ocurrido con anterioridad. La función principal de este tipo de reflexión es crítica y evaluativa. Estas reflexiones le permiten al profesor tomar conciencia de los conocimientos utilizados en su actuación, y compararlos con los propuestos en las teorías didácticas.

Es la reflexión que hace el profesor después de la clase, cuando analiza si los objetivos matemáticos propuestos para la case fueron alcanzados por los estudiantes. En este momento el profesor se da cuenta si las respuestas espontaneas que dio a sus estudiantes llevaron o no a la actividad matemática que esperaba promover en el aula.

Las actividades propuestas en el proceso de reflexión sobre la acción son: La socialización de videos, el análisis individual y colectivo de episodios de la clase, la lectura de rutas cognitivas y la revisión de las hojas de trabajo o de tareas de los estudiantes.

Existen algunas herramientas para apoyar los procesos de reflexión en las CoP, entre las más relevantes se encuentran: Las rutas cognitivas, las videograbaciones de clase y las planeaciones de clase.

2.3.3 Pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas.

En el bosquejo, las tres flechas que se encuentran alrededor de la espiral representan los tres pensamientos en los que se descompone el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas:

El pensamiento matemático; el pensamiento didáctico de la matemática escolar y el pensamiento orquestal.

i. Pensamiento Matemático (Pensamiento variacional):

Este pensamiento comprende los conocimientos matemáticos que el profesor emplea para desarrollar la actividad matemática en el aula. El pensamiento matemático del profesor surge cuando éste requiere del uso de sus conocimientos sobre ciertos contenidos matemáticos para desarrollar su práctica profesional, es decir, al proponer tareas, diseñar, seleccionar y usar recursos, comunicarse en aula, hacer adaptaciones curriculares, evaluar, entre otros.

Parada (2011) menciona que es necesario que los profesores tengan dominio sobre los contenidos matemáticos que enseña; y al momento del profesor pertenecer a la comunidad de práctica esté puede fortalecer sus dominios conceptuales.

Al igual que Moreno (2015), en esta investigación se habla en términos del pensamiento variacional, ya que los conocimientos matemáticos sobre los cuales reflexionarán los profesores en formación están ligados al cálculo diferencial. Según el MEN (2006) este pensamiento se puede desarrollar desde la básica primaria, pero se desarrolla principalmente en los estudiantes que se encuentran cursando estudios de matemáticas a nivel de bachillerato y de educación superior, debido al currículo que en estos niveles se maneja.

El MEN (1998) establece que el pensamiento variacional cumple un papel preponderante en la resolución de problemas que están sustentados en la variación y el cambio, y en la modelación de los procesos de la vida cotidiana.

El MEN (2006) menciona que las nociones y conceptos que están ligados a este pensamiento variacional son: *constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia* de una variable con respecto a otra. Las nociones y conceptos anteriormente mencionados están inmersos en algunos objetos matemáticos del cálculo diferencial, como: la función, el límite, la derivada, entre otros; objetos matemáticos los cuales hacen parte de la formación disciplinar de los profesores en formación con los que se llevó a cabo esta investigación.

A partir del pensamiento reflexivo, los profesores en formación logran obtener un dominio parcial sobre los objetos matemáticos del cálculo diferencial para que de esta forma logren enseñarlos a sus estudiantes, en particular a los estudiantes que presentan características diferenciadas.

Afirma Moreno (2015) que, para desarrollar el pensamiento variacional en los profesores, estos últimos deben comprender los procesos matemáticos asociados a la variación. Los cuales según Fiallo y Parada (2018) son: comunicar ideas sobre la variación, representar la variación, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar la variación, y razonar sobre fenómenos de variación.

Es importante que los profesores en formación tengan en cuenta estos procesos matemáticos en pro de su desarrollo profesional. Para que de esta forma logren, tanto ellos como sus estudiantes, superar las dificultades alrededor de la comprensión de los objetos matemáticos del cálculo diferencial y sus prácticas no sean netamente algebraicas y algorítmicas.

Fiallo y Parada (2018) mencionan que la resolución de problemas de variación implica contar con la capacidad de identificar los variantes e invariantes de una situación, establecer correctamente la interdependencia de las magnitudes variables, modelar situaciones de cambio por medio de funciones, gráficas y tablas. Por lo que en los problemas a los que se enfrentaban los profesores en formación estos debían modelar la situación a través de una función que representara la interdependencia entre las variables inmersas en los problemas, identificando las variantes e invariantes.

Respecto a las diferentes representaciones de la función, Hitt (2003) establece que es necesario que tanto profesores como estudiantes logren articularlas y representarlas para lograr una mayor comprensión del concepto de función. Teniendo en cuenta lo anterior, a lo largo de los diferentes talleres se motivó a los profesores a modelar situaciones problema a través de diferentes funciones (función lineal, exponencial, por partes, parte entera…) y articular su representación algebraica, gráfica y tabular.

Además de lo anteriormente descrito, con el fin de promover el desarrollo del pensamiento variacional de los profesores en formación pertenecientes a la CoP, se realizaron lecturas, exposiciones, talleres y debates los cuales se enfocaron en los diferentes objetos matemáticos del cálculo diferencial.

ii. Pensamiento didáctico, para la inclusión en clase de matemáticas

Señala Parada (2011) que el pensamiento didáctico surge cuando el profesor se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los contenidos matemáticos a sus estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante ilustraciones, analogías, explicaciones, ejemplos y demostraciones que les permitan a los alumnos comprenderlos.

La autora del modelo afirma que este pensamiento está presente en los tres procesos de reflexión:

a) para la acción (cuando cosifica las adaptaciones curriculares en la planeación de la clase).
b) en la acción (cuando el profesor conduce la actividad matemática prevista durante la clase).
c) sobre la acción (cuando el profesor evalúa los aprendizajes de los estudiantes y nuevamente realiza las adaptaciones curriculares para una nueva acción).

En los tres procesos de reflexión surgen algunos aspectos relevantes en los cuales se enfatiza el modelo, las adaptaciones curriculares y los procesos de evaluación. Estos dos aspectos tienen gran relevancia en la investigación que aquí se propone, ya que fue relevante que los profesores de matemática en formación realizaran las adaptaciones curriculares pertinentes para enseñar un objeto matemático del cálculo diferencial a una persona con alguna característica diferenciada.

Luque y Romero, 2002; citados por Parada (2011) mencionan que las adaptaciones curriculares son los procesos y resultados de los ajustes hechos al currículo en respuesta a las necesidades educativas de los educandos (entre ellas las NEE). Acorde a las necesidades educativas especiales, Parada (2011, citando a Bautista, Mantilla y Parada, 2010) menciona que las adaptaciones curriculares:

> "buscan brindar condiciones necesarias para que los educandos con algún tipo de discapacidad (física, psíquica, sensorial y/o cognitiva) tengan oportunidades iguales de aprendizaje en el ámbito escolar, y es en su elaboración en donde es importante la actuación del profesor, quien cumple el papel de profesor-tutor (quien debe conocer al alumnado y concretar la planificación y programación de actividades a realizarse como respuesta a la diversidad)". (Parada, 2011, p. 57).

Plantea la autora del modelo que el trabajo colaborativo que surge al interior de las CoP, puede llegar a cosificarse en alternativas alrededor de la atención a la diversidad. Siguiendo esta idea, los profesores en formación pertenecientes a la CoP lograron cosificar el trabajo colaborativo en proyectos que sirven como alternativa para la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas.

Respecto a la evaluación, se considera como parte esencial al interior de la comunidad de práctica, ya que posibilita las negociaciones de las diferentes aceptaciones de los participantes con relación a esta temática (Parada, 2011), promoviéndose la reflexión sobre la evaluación formativa.

En el caso de esta investigación, los profesores en formación pertenecientes a la CoP seleccionaron y construyeron instrumentos de evaluación para favorecer el aprendizaje del cálculo a personas con características diferenciadas, centrándose en comprender la actividad de los estudiantes frente a las tareas que se le proponen, viendo los errores como un objeto de estudio para diagnosticar sus dificultades y así poder generar mecanismos para ayudarles a superarlos.

Pineda (2018) ve las adaptaciones curriculares como una manera de atender la diversidad en el aula de clase, repensando el currículo de tal forma que se tenga en cuenta la diversidad del alumnado. También menciona la investigadora, que la labor de realizar las adaptaciones curriculares no solo requiere de la intervención del profesor, sino también es necesario el apoyo de la comunidad educativa para lograrlo.

Parada (2019) menciona que, al momento de pensar en realizar adaptaciones curriculares, los futuros profesores de matemáticas deben tener la necesidad de conocer a sus estudiantes, para así poder planear las actividades ajustadas a sus particularidades.

En esta investigación se buscó que el profesor de matemáticas en formación se cuestionara sobre las diferentes formas de acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes con características diferenciadas, buscando formas útiles y pertinentes que lo llevaran al cumplimiento de su objetivo.

Para promover el pensamiento didáctico en los profesores en formación pertenecientes a la CoP, se propusieron realizar lecturas, exposiciones y debates los cuales se centraron en la enseñanza de los diferentes objetos matemáticos del cálculo diferencial. Además, se les propusieron talleres en donde los profesores de matemáticas en formación tenían que reflexionar sobre las adaptaciones curriculares y la forma de evaluar a los estudiantes con características diferenciadas cuando se les enseña algún objeto matemático del cálculo diferencial.

iii. Pensamiento Orquestal

La autora del modelo caracteriza este pensamiento alrededor de la conducción de la clase y la forma como el profesor usa los recursos para favorecer la actividad matemática que tiene prevista según las condiciones socioculturales que enmarquen su práctica.

Este pensamiento está inmerso en los tres procesos de reflexión y en el pensamiento matemático y didáctico, ya que este pasa a ser un recurso más de la clase. En este pensamiento el profesor debe discernir y pensar sobre el cómo, el cuándo y el dónde usar tal o cual recurso (Pineda, 2018), dependiendo de los objetivos de aprendizaje que se quieran lograr.

Menciona Pineda (2018) que este pensamiento es relevante al momento de hablar de la atención a la diversidad, ya que, en ocasiones, más que necesitar adaptar los contenidos al nivel del estudiante, debe reflexionarse en los recursos o herramientas didácticas acordes a las necesidades educativas de cada uno de los estudiantes.

López y Ojeda (2011) en su investigación sobre el *pensamiento probabilístico en educación especial* plantean que frente a ausencias o limitaciones existen esquemas compensatorios que permiten el desarrollo cognitivo de la persona con alguna discapacidad. Esto lleva a pensar que frente a las falencias que presentan los estudiantes con NEE, el educador debe compensarlas diseñando y/o creando nuevos recursos que les permitan abordar esas NEE.

Para afianzar el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas en formación, se realizaron talleres los cuales constaron de una parte disciplinar, en la cual negociaron significados acerca de los objetos matemáticos del cálculo; y otra parte didáctica e inclusiva, en la cual hubo una negociación de significados alrededor de la enseñanza de los objetos matemáticos del cálculo diferencial a personas con características diferenciadas, en donde se discutieron aspectos tales como: la forma en la que se les enseña a estos estudiantes, los recursos que utilizarían y la forma en la que los evaluarían.

Con el fin de cosificar los significados negociados, a través del pensamiento reflexivo, por los profesores en formación, se opta por realizar proyectos los cuales están pensados como una alternativa para la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas.

En concordancia con Parada (2019) se trató que los profesores en formación se sensibilizaran sobre la responsabilidad de una formación continua alrededor de las diferentes características que presentan los estudiantes, entre ellas las necesidades educativas especiales; además, partiendo de la idea de que todos los estudiantes pueden llegar a aprender matemáticas, se orientó a los profesores en formación para que lograran diseñar y/o seleccionar recursos apropiados para posibilitar la actividad matemática en sus estudiantes, teniendo en cuenta sus características.

Para efectos de la investigación que aquí se reporta, los aprendizajes consolidados por los profesores de matemáticas en formación se categorizaron a través de los componentes del pensamiento reflexivo. Se toma como categorías los significados negociados por los profesores en formación respecto al pensamiento variacional, pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal. El modelo R-y-A de Parada (2011) se usó para guiar el proceso de reflexión de los profesores en formación (que de ahora en adelante llamaremos profesores) en los cursos de Didáctica del Cálculo con los que se llevó a cabo esta investigación.

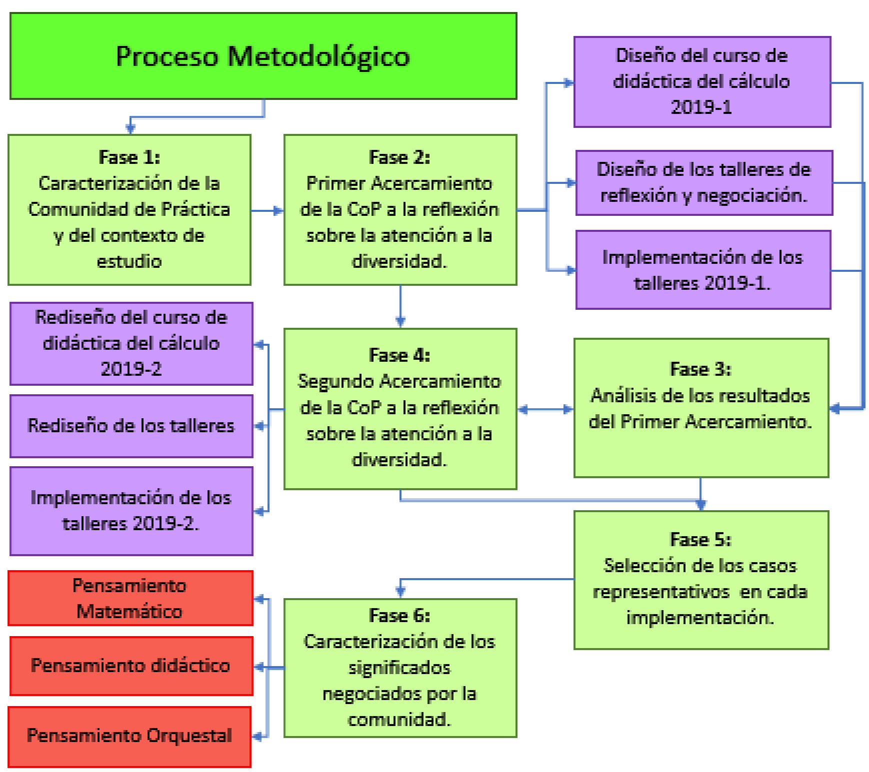
3 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.

Para esta investigación se adoptó una metodología de investigación acción-colaborativa, desde la perspectiva de Elliot (1993), el autor establece que el tipo de investigación acción-colaborativa se encarga de estudios de situaciones sociales para desarrollar acciones que permitan atender esas situaciones. Es colaborativa porque los investigadores (autor y asesora) asumen el rol de moderadores en la comunidad de práctica contexto del estudio.

Wenger (1998), menciona que el papel de los moderadores es imperante, ya que son los encargados de planificar y facilitar las actividades, con miras de potenciar el enriquecimiento mutuo y el intercambio de experiencias al interior de la comunidad. En la Figura 3, se muestra un bosquejo del proceso metodológico llevado a cabo en la investigación.

Figura 3.

Bosquejo del proceso metodológico de la investigación.



En el esquema del proceso metodológico aparece una flecha de la fase 2 a la fase 4 y una flecha que relaciona la fase 3 con la fase 4, esto debido a que, al poco tiempo de finalizar el primer acercamiento a la CoP, empezó el segundo acercamiento y algunos de los análisis realizados del primer acercamiento se dieron de forma simultánea a la intervención realizada en el segundo acercamiento.

A continuación, se describen cada una de las fases establecidas en el bosquejo del proceso metodológico.

3.1 Fase 1: Caracterización de la Comunidad de Práctica y del contexto de estudio.

La comunidad de práctica (CoP), contexto del estudio, se ha venido consolidando desde el 2012, gracias al trabajo mancomunado que han venido realizando sus integrantes: los directivos del programa SEA-ASAE, los profesores del curso de Precálculo, algunos profesores de Cálculo, los profesores encargados del curso de Didáctica del Cálculo , los estudiantes (tutores practicantes) y algunos egresados (tutores auxiliares y/o monitores) del curso de Didáctica del Cálculo que ejercen el rol de tutores al interior de SEA-ASAE (Moreno, 2017).

Se considera que el grupo conformado por los integrantes de la CoP constituye una comunidad de práctica en el sentido de Wenger (1998), puesto que:

I. Los participantes están *comprometidos* a mejorar sus prácticas profesionales, a mejorar su formación académica para poder abordar la enseñanza del cálculo a cada uno de sus alumnos, sin distinción alguna. Las actividades que se proponen al interior del grupo posibilitan en ellos una autoevaluación permanente, que les permita identificar tanto el desarrollo sobre su conocimiento disciplinar, como didáctico y producto de esta investigación sobre la atención a la diversidad.

II. El curso se consolida como una *empresa conjunta,* debido a que las actividades llevadas a cabo de manera individual beneficiaron las reflexiones de todos los integrantes.

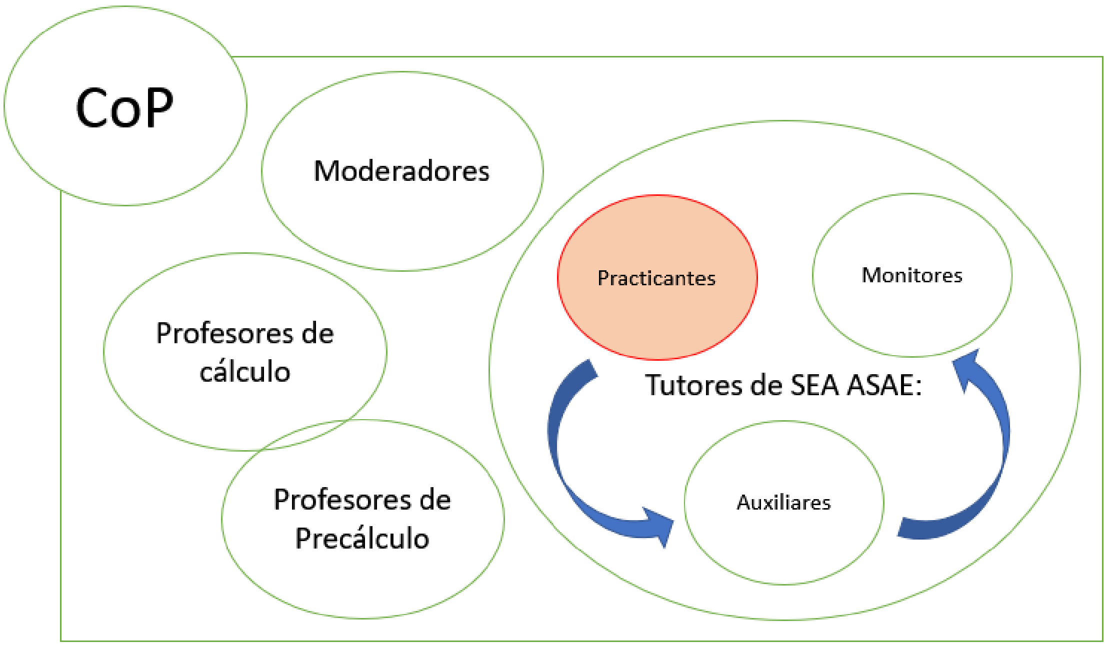
III. Se genera un *repertorio compartido*, a través del lenguaje, los procesos de comunicación y los intereses que se generaron a través de las dinámicas al interior de la comunidad. Este repertorio se da en términos de los saberes epistemológicos y didácticos sobre los objetos matemáticos del cálculo, además del uso adecuado de los diferentes recursos usados para su enseñanza a personas con características diferenciadas.

Tanto el programa SEA-ASAE como el curso de Didáctica del Cálculo, han sido escenarios para algunas investigaciones que promueven la reflexión, tales como: Botello (2013) quien promueve la reflexión sobre las prácticas tempranas, Amaya (2018) quien promueve la reflexión sobre los procesos de demostración, y Quintero (2019) sobre el significado de la función, entre otros. Debido a las necesidades de los estudiantes con características diferenciadas beneficiarios del programa SEA-ASEA, se hizo necesario al interior de la CoP no solo reflexionar sobre los aspectos conceptuales y didácticos del cálculo sino también alrededor de la educación inclusiva.

Para abordar la reflexión sobre la educación inclusiva al interior de la CoP se intervinieron principalmente los cursos de Didáctica del Cálculo llevados a cabo en el primer semestre del 2019 (2019-1) y el segundo semestre del 2019 (2019-2), en donde el foco de la investigación se centró en que los profesores (estudiantes de didáctica del cálculo-tutores practicantes) que adelantaban sus estudios de Licenciatura en Matemáticas y cursaban Didáctica del Cálculo en los semestres 2019-1 y 2019-2 en la UIS, reflexionaran sobre como acercar los objetos matemáticos de estudio a los estudiantes con algún tipo de dificultad. La conformación de la CoP, se representa en la Figura 4.

Figura 4.

Integrantes de la CoP.



Los moderadores que también hacen parte de los integrantes de la CoP son: la directora de esta investigación quien fue la profesora titular de los cursos de didáctica del cálculo en el 2019-1 y 2019-2; y el investigador principal de la tesis que aquí se presenta, quien hacía las veces de profesor auxiliar en estos cursos.

3.2 Fase 2: Primer acercamiento a la CoP a la reflexión.

Para la programación del curso de Didáctica del Cálculo, cada semestre se elabora un cronograma que sirve de guía para llevar a cabo las actividades al interior del curso. Estas actividades se pensaron con miras de favorecer la reflexión, la negociación y la cosificación de significados acerca de la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas.

En la Tabla 2

Cronograma guía para el desarrollo del curso, se muestra el cronograma llevado a cabo en el curso de didáctica del cálculo en el semestre 2019-1.

Tabla 2

Cronograma guía para el desarrollo del curso

Sección	Actividad	Encargado
1	Presentación del curso y discusión sobre las formas de trabajo	Moderadores
2	Socialización de las experiencias que han tenido los profesores en formación sobre el aprendizaje del cálculo	Todos
3	Taller 0. diagnóstico Inicial	Todos
4	Socialización de experiencias de aprendizaje de enseñanza y aprendizaje de algún objeto matemático del Cálculo a personas con alguna NEE	Todos
5	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos del concepto de función.	Profesor en formación
6	Discusión y reflexión sobre aspectos didácticos del concepto de función.	Profesor en formación
7	Problematización sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial (posible tema para perfilar el proyecto)	Todos
8	Aspectos epistemológicos de la Variación	Profesor en formación
9	Aspectos didácticos de la Variación	Profesor en formación
10	Taller 1. Variación	Todos
11	Avance 1 del proyecto (planteamiento del problema).	Todos
12	Socialización de experiencia en SEA-ASAE. (tutorías)	Todos
13	Epistemología de las funciones	Profesor en formación
14	Didáctica de las Funciones	Investigador Invitado
15	Avance 2 del proyecto (revisión bibliográfica)	Todos
16	Taller 2. Noción de función	Todos
17	Epistemología del límite	Profesor en formación
18	Didáctica del Limites	Investigador Invitado
19	Taller 3. Noción de función en límites	Todos
20	Avance 3 del proyecto (aspectos teóricos y conceptuales)	Todos
21	Socialización de experiencia de práctica en ASAE	Todos
22	Avance 4 del proyecto de diseño curricular (metodología)	Todos
23	Epistemología de la derivada	Profesor en formación
24	Didáctica de las Derivadas	Investigador Invitado

25	Taller 4. Noción de función en derivada	Todos
26	Avance 5 del proyecto (diseño didáctico)	Todos
27	Epistemología de las integrales	Profesor en Formación
28	Didáctica de las integrales	Investigador Invitado
29	Conferencia: Enseñanza del cálculo: una mirada internacional	Investigador Invitado
30	Taller 5. Diagnostico final.	Todos
31	Avance 6 del proyecto de diseño curricular (primer análisis de resultados)	Todos
32	Presentación resultados del proyecto e Informe final de la práctica en ASAE	Todos
33	Minicoloquio del curso.	Todos

Como se puede apreciar en el cronograma, las actividades están organizadas en cuatro categorías:

- Exposiciones sobre la epistemología y la didáctica de los objetos matemáticos del cálculo: el objetivo principal de etas actividades fue generar discusiones al interior de la CoP para promover el desarrollo del pensamiento variacional, el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal.

  Los profesores en formación debían reunirse con quince días de anticipación con la profesora, con el fin de discutir sobre los temas (lecturas y actividades) a desarrollar en la clase y asegurar dominio conceptual del tema. Se solicitaba que todos los estudiantes del grupo leyeran un material de base para la exposición, con el fin de provocar discusiones en comunidad.

- Talleres: su objetivo fue el de suscitar el pensamiento reflexivo de los profesores en formación alrededor de la enseñanza de los objetos matemáticos del cálculo a estudiantes con características diferenciadas.

Fueron seis los talleres y estuvieron enlazados con las exposiciones mencionadas anteriormente, los talleres resultaron esenciales para promover la reflexión y la negociación sobre la enseñanza de los objetos matemáticos del cálculo a personas con características diferenciadas, estos son: taller prueba diagnóstico inicial, taller de variación, taller de función, taller de límites, taller de derivada y taller prueba diagnóstica final.

- Prácticas individuales como tutores de Cálculo 1: los estudiantes de Didáctica de Cálculo realizan tutorías entre pares, refuerzan los contenidos de Cálculo diferencial con estudiantes de primer nivel, los cuales fueron caracterizados anteriormente como estudiantes en riesgo de deserción a través de una prueba realizada por el programa SEA-ASAE (programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes que cursan asignaturas del área de matemáticas). Aunque las tutorías se realizan en horario extra-clase, en el cronograma se abren espacios para que los profesores puedan compartir sus experiencias como tutores.
- Proyecto: se orientó a lo largo del curso el diseño de un plan de clase de cálculo dirigido a una persona con características diferenciadas. Inicialmente se indica a los profesores en formación que realicen una lectura inicial sobre la enseñanza del cálculo a personas con NEE, con el objetivo de ir comprendiendo la problemática. Luego, ellos iban presentando avances en los que poco a poco mostraban las lecturas que hacían en relación al objeto matemático seleccionado para la clase y sobre las NEE seleccionada. También compartían propuestas de actividades que incorporarían para el desarrollo de la clase. En el “avance 4” del cronograma (ver Tabla 2

- Cronograma guía para el desarrollo del curso) los profesores debían mostrar las adaptaciones curriculares que harían, los recursos que seleccionaron y la forma en la cual guiarían el aprendizaje del objeto matemático de estudio.

El primer acercamiento se realizó en el primer periodo académico del 2019, el cual siguió el cronograma mostrado en la Tabla 2

Cronograma guía para el desarrollo del curso y estuvo conformado por siete profesores de la licenciatura en matemáticas de la UIS que cursaban didáctica del cálculo en ese momento.

De ese curso implementado, se recolectaron videograbaciones de las secciones, resultados de los talleres y los proyectos llevados a cabo durante este periodo académico; cabe mencionar que de los siete estudiantes surgieron tres proyectos, debido a que los profesores en formación optaron por trabajar en parejas. Este material constituye parte de los datos que se analizaron para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada.

Como se mencionó anteriormente, fueron seis los talleres aplicados a los profesores. A continuación, se presenta el respectivo análisis a priori de cada una de las actividades que se encuentran en los talleres trabajados con los profesores, el análisis será presentado de acuerdo con las tres categorías de análisis que ofrece el modelo “R-y-A” (pensamiento matemático, didáctico y orquestal):

3.2.1 Prueba Diagnóstico Inicial.

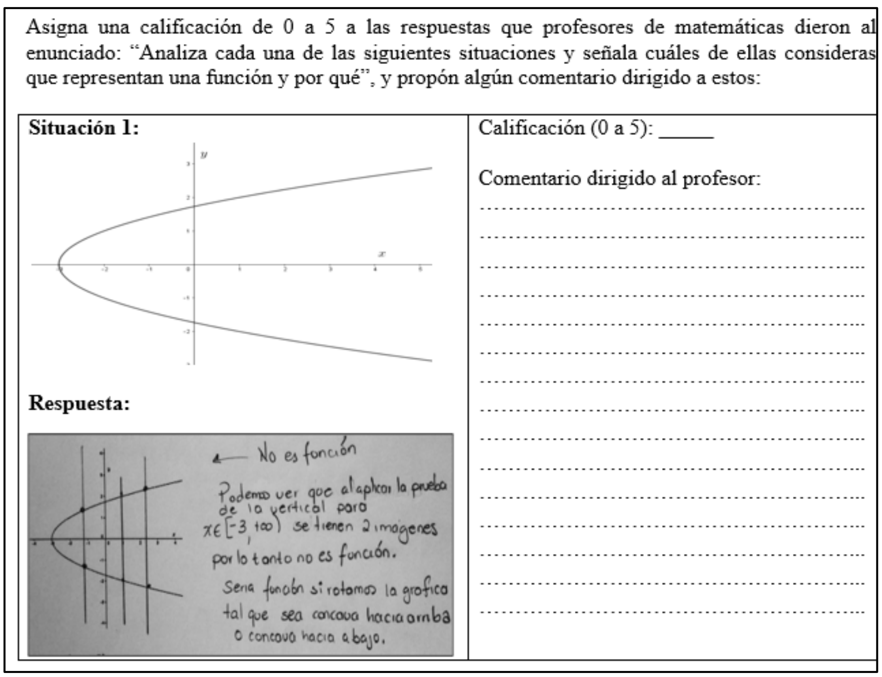
Para esta prueba se tomó como base el taller de la prueba diagnóstico inicial aplicado por Quintero (2019) quien basó sus actividades en las realizadas por Olvera, 2015; en su tesis doctoral. El taller tiene una duración de 120 minutos, en donde se abren espacios para que los profesores puedan debatir sobre sus respuestas y llegar a algunas conclusiones (puesta en común).

Este taller busca identificar las concepciones que tienen los profesores sobre el concepto de función, ya que este concepto guarda una estrecha relación con los objetos matemáticos del cálculo diferencial como lo son: la variación, el límite y la derivada.

En el primer inciso del taller se presentan cuatro situaciones en donde se da una respuesta en cada situación, los profesores deben asignarle una calificación de 0 a 5 a la respuesta dada y justificar el porqué de esa nota.

Figura 5.

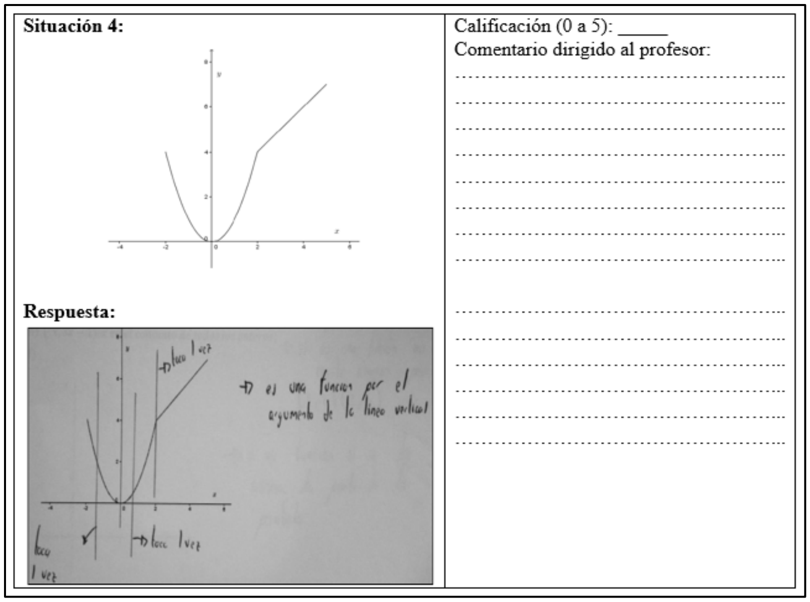
Prueba diagnóstico inicial situación 1.


Asigna una calificación de 0 a 5 a las respuestas que profesores de matemáticas dieron al enunciado: "Analiza cada una de las siguientes situaciones y señala cuáles de ellas consideras que representan una función y por qué", y propón algún comentario dirigido a estos:

Situación 1:	Calificación (0 a 5): _____
Respuesta:	Comentario dirigido al profesor: ....

Figura 6.

Prueba diagnóstico Inicial Situación 4.



Tanto en la primera situación (ver Figura 5) como en la cuarta situación (ver Figura 6) se espera que los profesores tengan en cuenta que no basta solo con la prueba de la recta vertical para establecer si una función es función, ya que hay que tener en cuenta cual es el dominio de la función, cual variable es la independiente y cual la dependiente. Ya que la variable *y* puede ser la variable independiente y de esta forma la gráfica dada en la primera situación puede ser una función y en la segunda situación ya no sería función.

La segunda situación (ver Figura 7) tiene como fin que el profesor identifique el conjunto de pares ordenados como una función.

Figura 7.

Prueba diagnóstico inicial situación 2.

Situación 2: $\{(1,2-x): x \in R\}$

Respuesta: Si es una función porque para cada valor de x existe el valor 1 correspondiente.

Calificación (0 a 5):_____

Comentario dirigido al profesor:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

En esta situación se espera que los profesores asuman los valores de *x* como el conjunto de salida y el conjunto de parejas ordenadas (1, 2-x) como conjunto de llegada, por ende, se puede considerar como una función a través de la definición conjuntista de función. Se debe tener en cuenta que el valor de x del dominio de la función no es el mismo que el valor 1 de la coordenada de la pareja ordenada (1, 2-x).

En la situación tres (ver Figura 8), se dan dos respuestas a las cuales los profesores deben asignar una calificación y realizar un comentario por cada respuesta.

Figura 8.

Prueba diagnóstico inicial situación 3.

Situación 3:

Deuda total de los miembros de un club deportivo:

Nombre	Adeudo ($)
Ana	1030
Juan	740
Raúl	210
Isis	420
Luis	740
Sara	1030
José	375
Karla	560
Pedro	740

Respuesta 1:

No es una función.
No puede convertirse en función.
No hay manera de asociar un nombre con una deuda mediante una expresión.

Respuesta 2:

No es función, porque el dominio no son números reales.
Si lo cambio por un conjunto de números reales sí sería.

Calificación 1 (0 a 5): _____
Comentario dirigido al profesor 1:
....

Calificación 2 (0 a 5): _____
Comentario dirigido al profesor 2:
....

En la primera respuesta se espera que el profesor tenga en cuenta la idea errónea que se muestra, la cual es que para que haya una función necesariamente debe existir una expresión algebraica que relacione los elementos del conjunto de salida con los elementos del conjunto de llegada. En la segunda respuesta, se espera que los profesores identifiquen que no solo el dominio de una función son subconjuntos de los números reales, sino que hay funciones que admiten otra clase de conjuntos no numéricos como su dominio.

En la segunda parte del taller (ver Figura 9) se muestra a los profesores la respuesta de cuatro profesores de matemáticas alrededor de lo que consideran como función. Allí se les pide a los profesores que representen con un ejemplo cada una de las definiciones dadas por los profesores (Sandra, Gabriela, Paola y Andrés), esto con el fin de que realicen una interpretación de las definiciones dadas y de esta forma puedan evidenciar las falencias en que incurren cada una de ellas.

Figura 9.

Prueba diagnóstico inicial parte 2.

2. Se presentan las respuestas a la pregunta "¿Qué es una función?" de cuatro profesores de matemáticas:

Sandra	Es una relación entre dos conjuntos en que a cada elemento de un conjunto pertenece uno y sólo un elemento del otro conjunto.
Gabriela	Una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.
Paola	Una función es una relación de un conjunto llamado dominio que se relaciona con el contradominio, la condición es que para un valor del dominio no puede ir a dos elementos del contradominio.
Andrés	Es una relación que existe entre dos variables, una de ellas cambiará en relación a la otra.

a. Representa con un ejemplo cada una de las definiciones dadas por los profesores.
b. ¿Estás o no de acuerdo con cada una de las definiciones? Justifica tu respuesta.

En la tercera parte del taller (ver Figura 10) se le presenta a los profesores una pregunta relacionada con la enseñanza del tema de función a algún estudiante que presente alguna de las siguientes Necesidades Educativas Especiales: Asperger, Limitación visual, déficit de atención, talento excepcional o limitación auditiva. Esto con el fin de que ellos evidencien los recursos que utilizarían, la definición de función que usarían y el tipo de acercamiento que tendrían para la enseñanza de este tema a un estudiante con NEE.

Figura 10.

Prueba diagnóstico inicial parte 3.

3. Pensemos en las personas con Necesidades Educativas Especiales.
- ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con Asperger el tema de función?
- ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con Limitación Visual el tema de función?
- ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con síndrome déficit de atención el tema de función?
- ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con talentos excepcionales el tema de función?
- ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con Limitación Auditiva el tema de función?

3.2.2 Taller de Variación.

Los tres primeros incisos de este taller se tomaron de la tesis de Quintero (2019) quien se basó a su vez en las ideas de Olvera, 2015. Este taller cuenta con 4 incisos y una duración de 120 minutos.

Con las preguntas que aparecen en los tres primeros incisos del taller (ver Figura 11) se pretende confrontar el pensamiento matemático de los profesores de matemáticas en formación al momento de evaluar las diferentes respuestas que involucran acercamientos a la noción de variación.

Se les pide que califiquen con su respectiva justificación las respuestas de cuatro profesores de matemáticas acerca del problema que se les presenta inicialmente.

Figura 11.

Taller variación parte 1.

ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de $6.5cm$, $\overline{BC}$ mide $4cm$. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga la mínima área posible?

Teniendo en cuenta las respuestas, a la situación planteada, que se presentan a continuación:

1. Asigna una calificación de 0 a 5 a cada una de las respuestas y explica el porqué de tu calificación.
2. ¿Qué noción de correspondencia crees que tenía cada uno? ¿por qué?
3. ¿En alguna respuesta se usó el concepto de función? ¿por qué?

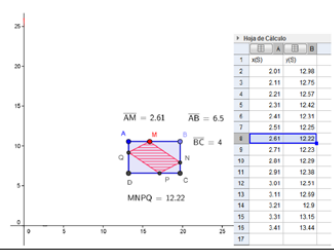
En la primera respuesta (Ver Figura 12) se espera que los profesores identifiquen que "Laura" se basó en aproximaciones empíricas por medio del uso de GeoGebra para dar solución al problema. Además, se espera que estos reflexionen sobre el papel que juega el software interactivo GeoGebra para el entendimiento del problema y que lograren identificar la variación que se encuentra inmersa en la situación, que cuando se mueve el punto M, el segmento AM varia al igual que los valores que representan el área del cuadrilátero MNPQ.

Figura 12.

Respuesta de Laura.

Respuesta de Laura.

Observé los valores de la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ que se obtenían cuando el punto M se movía sobre el segmento $\overline{AB}$. En la representación geométrica en GeoGebra observé que cuando la longitud del segmento AM crece, el área del cuadrilátero MNPQ disminuye hasta llegar a un punto (mínimo) en el que él área comienza a aumentar. Ubiqué de manera aproximada el punto mínimo en la representación geométrica y encontré que la longitud del segmento $\overline{AM}$ está entre $2.61, 2.62\ y\ 2.63cm$ y el área aproximada de MNPQ es $12{,}22cm^2$. Adicional, en la hoja de cálculo registré valores de la relación entre la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ y comprobé sus valores mínimos.



	A	B
1	x(S)	y(S)
2	2.01	12.98
3	2.11	12.75
4	2.21	12.57
5	2.31	12.42
6	2.41	12.31
7	2.51	12.25
8	2.61	12.22
9	2.71	12.23
10	2.81	12.29
11	2.91	12.38
12	3.01	12.51
13	3.11	12.69
14	3.21	12.9
15	3.31	13.15
16	3.41	13.44
17		

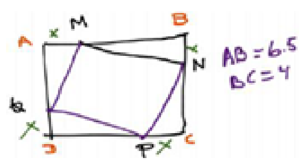
Calificación:

En la segunda respuesta (ver Figura 13) se espera que los profesores identifiquen que la justificación de “Paola” se centra en procedimientos algebraicos, al igual que noten que está considerando el cuadrilátero MNPQ como un rectángulo y que al final no llega a una conclusión.

Figura 13.

Respuesta de Paola.

Respuesta de Paola.



Vamos a sacar las expresiones algebraicas de los lados del cuadrilátero QMPN.

Sea QP=MN=$\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}$; utilizando el teorema de Pitágoras ya que son triángulos rectángulos por construcción.

$PN = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = QM$.

$\rightarrow$ el área del cuadrilátero $MNPQ = PN.MN$

$$\rightarrow \square MNPQ = \left(\sqrt{x^2+(4-x)^2}\right)\left(\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{(x^2+16-2x+x^2)(42.25-(3x+x^2+x^2)}$$

$$= \sqrt{(2x^2-2x+14)(2x^2-13x+42.25)}$$

Calificación:

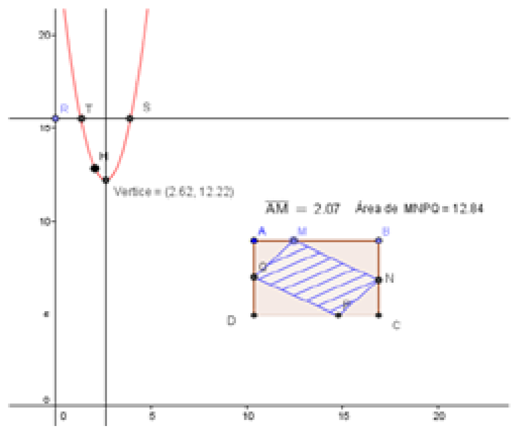
En la tercera respuesta (ver Figura 14), dada por “Gerardo”, se espera que los profesores identifiquen que la relación que encontró el profesor de matemáticas entre AM y el área del cuadrilátero MNPQ, fue a través de la representación geométrica, gráfica y tabular de la situación.

Figura 14.

Respuesta de Gerardo.

Respuesta de Gerardo.

En GeoGebra realicé la representación geométrica y en una hoja de cálculo registré los valores del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ a medida que se movía el punto M. Al realizar el gráfico de estos valores identifiqué que se trataba de una parábola. Posteriormente, tracé una perpendicular al eje vertical que intersecaba la parábola en dos puntos, luego tracé la mediatriz de esos dos puntos y en su intersección con la parábola ubiqué el vértice con coordenadas (2.66,12.22).



Calificación:

En la respuesta dada por "Isabel" (ver Figura 15) se espera que los profesores noten que inicialmente la profesora de matemáticas encontró una representación algebraica de la situación, para posteriormente realizarle un trato algebraico, encontrando que la expresión algebraica representa una parábola que abre hacia arriba, para finalmente hallar el vértice que representa el punto en el cual el área del cuadrilátero MNPQ es mínima.

Figura 15.

Respuesta de Isabel.

Respuesta de Isabel.

Área de los 4 triángulos rectángulo

$$= x(4-x)+(6.5-x)(x)$$
$$= 4x - x^2 + 6.5x - x^2$$
$$= 10.5 - 2x^2$$

Ahora el área del rectángulo $ABCD = 4(6.5) = 26cm^2$

$\therefore$ El área del cuadrilátero $= 26 - (10.5x - 2x^2)$

$= 26 - 10.5x + 2x^2$(restamos el área de los 4triangulos rectángulos al área total)

$= 2x^2 - 10.5x + 26$(Expresión para el área del cuadrilátero MNPQ

$$f(x) = 2x^2 - 10.5x + 26$$

Dado que es una parábola que abre hacia arriba, el vértice es el punto mínimo.

$$\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10.5)}{2(2)} = \frac{10.5}{4} = 2.625$$
$$\rightarrow f\left(\frac{10.5}{4}\right) = 2(2.625)^2 - 10.5(2.625) + 26$$
$$\rightarrow f(2.625) = 12.21875$$

$\therefore$Por lo tanto el área mínima de MNPQ es 12.21875 cuando $AM = 2.625$

Calificación:

En el cuarto inciso de este taller (ver Figura 16) se les pregunta a los profesores acerca de cómo le enseñarían este problema a un estudiante con alguna característica diferenciada. Lo anterior con el fin de evidenciar la importancia que les dan los profesores a algunos recursos como el software dinámico GeoGebra, además de ver hacia qué tipo de representación de la función se inclinan o si las trabajan en conjunto para darle solución al problema.

Figura 16.

Cuarto Inciso del taller de variación.

4. Piensa en un estudiante con una de las siguientes características diferenciadas: pertenecer a una comunidad indígena, ser un estudiante que producto del conflicto armado interno colombiano es catalogada como víctima, provenir de un municipio con problemas de orden público, ser una persona palenquera (Afrocolombiana). ¿Qué harías para explicarle este problema?

3.2.3 Taller de Funciones.

Este taller cuenta con dos partes, la primera parte consta de dos problemas relacionados con la comunidad indígena y el tema de función, y la segunda parte consta de un inciso en donde los profesores deberán tener en cuenta las reflexiones realizadas durante la primera parte del taller para diseñar un plan de clase con el objetivo de introducir el concepto de función a un curso de cálculo diferencial en donde se encuentran incluidos estudiantes provenientes de comunidades indígenas. El taller tiene una duración de 120 minutos, en donde por cada parte del taller se abre un espacio para debatir acerca de las respuestas de los profesores.

En la primera parte del taller se espera promover el **pensamiento matemático** del profesor alrededor del tema de función en donde a través de su representación numérica y algebraica deberán representar las dos situaciones problemas que se les presentan.

En el primer problema que se encuentra en el taller (ver Figura 17) se presenta una tabla en donde aparecen algunos años, junto con su respectivo Índice de Precios al Consumidor (IPC) y el precio del maíz, ya que este es un producto el cual cultivan artesanalmente y lo venden algunos habitantes de las comunidades indígenas para sustentar su economía. El objetivo de la tabla es que ellos logren establecer una relación entre el IPC (anual) y el precio de maíz por kilogramo con el fin de encontrar una función que relacione estas variables, favoreciendo la representación aritmética y algebraica de la función.

Figura 17.

Parte 1 taller funciones.

PARTE I:

1. Para sustentar su economía, los indígenas realizan tejidos artesanales; además de dedicarse a cultivos tales como el maíz.

   En Colombia el aumento del costo de los productos de la canasta familiar, incluido el maíz, está relacionado con el índice de precios al consumidor (IPC), el cual es un porcentaje que determina el aumento o disminución de estos productos.
   A continuación, se muestra una tabla con la variación anual del IPC en los últimos años, según el DANE.

AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	$725.9
2019	3,31%	

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál será el precio del Maíz en el 2020 si el IPC es de 3,62%?
c) Halle una expresión algebraica que relacione el IPC (%) y el Precio de Maíz (kg) en el 2020.
d) ¿Cómo crees que pueda ayudar a las comunidades indígenas conocer el IPC anualmente?

En el inciso a) los profesores en formación tendrán que completar la tabla de tal forma que puedan relacionar el precio del IPC (Anual) y el precio del maíz (kg), encontrando el precio del maíz en el 2016 y el 2019 dados los precios del 2017 y del 2018, como se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3.

Respuesta esperada taller funciones parte 1, inciso a

AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	$672.49
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	$725.9
2019	3,31%	$749.93

Debido al gran número de cifras decimales que arroja el precio del maíz en el 2016 y el 2019 se espera que los profesores en formación redondeen la cifra hasta las primeras dos cifras decimales.

En el inciso b) se les pide a los profesores que hallen el precio del maíz en el 2020 sabiendo que el IPC es de 3,62%, para ello deben utilizar la relación que hallaron en el inciso anterior.

La expresión algebraica que se espera por parte de los profesores es la siguiente:

$$P(x) = 749.93\left(\frac{x}{100}\right) + 749.93$$

$$donde\ P(x)\text{: } el\ precio\ del\ maíz\ por\ kilogramo\ y\ \boldsymbol{x}\ es\ el\ IPC\ (\%)\ en\ el\ 2020.$$

En el inciso d) se esperan algunas respuestas como la siguiente: al saber calcular el precio del maíz teniendo en cuenta el IPC, los habitantes de las comunidades indígenas que trabajen con este producto podrán saber cuánto dinero deberán subirle al precio del maíz para que no cobren menos de lo que deberían cobrar por este.

El segundo problema del taller (ver Figura 18) está relacionado con la disminución de las poblaciones indígenas en Colombia y sus causas.

Figura 18.

Segundo problema taller funciones.

2. Según datos suministrados por el DANE en 2005, de los 42'090,502 colombianos, 1'378.884 pertenecen a distintas comunidades indígenas, con presencia en 27 departamentos del país. La organización Nacional Indígena de Colombia (ONIC) asevera que cientos de pueblos indígenas están en riesgo de desaparecer, no sólo por el conflicto armado en el país, sino, además, porque sus habitantes mueren de hambre, enfermedades y la indiferencia. Se estima que el promedio de decrecimiento de la población es del 1.2% anual aproximadamente.

a) ¿Cuántos habitantes de las comunidades indígenas existirán finalizando el presente año? ¿En 2021? ¿En 2050? Explica tus respuestas.
b) Halla la función que representa la interdependencia entre el año y la población indígena. Justifica tu respuesta.

El inciso a) del problema se plantea con el fin de que los profesores den cuenta de que la función no es una función lineal y por ende no se podría utilizar la regla de tres simple inversa para hallar los datos de la población en el 2021 y el 2050, además de dar cuenta de que los cálculos aritméticos funcionan para hallar la cantidad de habitantes de años cercanos al 2005 y quizás hasta el 2021, pero luego se vuelve muy poco práctico para hallar la cantidad de habitantes de las comunidades indígenas en el 2050. Por ende, deben recurrir a una expresión algebraica que les permita ver la interdependencia entre el año y la cantidad de habitantes pertenecientes a la población indígena en ese año.

Se espera que los profesores puedan notar la relación que se muestra en la Tabla 4:

Tabla 4.

Año y cantidad de habitantes: segundo problema del taller de funciones.

Año	Cantidad de habitantes perteneciente a la población indígena.
2005	**1’378.884**
2006	1’378.884-1’378.884(0.012) = **1’378.884(1-0.012)**
2007	1’378.884(1-0.012)- 1’378.884(1-0.012) (1-0.012) = 1’378.884(1-0.012) (1-0.012) = **1’378.884 $(\mathbf{1-0.012})^{\mathbf{2}}$**
2008	1’378.884 $(1-0.012)^2$-1’378.884 $(1-0.012)^2$(0.012) = 1’378.884 $(1-0.012)^2$(1-0.012) = **1’378.884 $(\mathbf{1-0.012})^{\mathbf{3}}$**
2009	1’378.884 $(1-0.012)^3$-1’378.884 $(1-0.012)^3$(0.012) = 1’378.884 $(1-0.012)^3$(1-0.012) = **1’378.884 $(\mathbf{1-0.012})^{\mathbf{4}}$**
…	…
2021	**1’378.884 $(\mathbf{1-0.012})^{\mathbf{16}}$**
…	…
2050	**1’378.884 $(\mathbf{1-0.012})^{\mathbf{45}}$**

Una vez hallen esa relación se espera que puedan plantear la siguiente expresión algebraica que modela la situación:

$$\boldsymbol{P(x) = 1'378.884\ (1 - 0.012)^{x-2005}}$$

$$donde\ P(x)\ es\ la\ cantidad\ de\ población\ indigena\ por\ \text{año}\ y\ \boldsymbol{x}\ el\ año\ con\ \boldsymbol{x} \geq 2005.$$

Con el fin de promover el **pensamiento didáctico** y el **pensamiento orquestal**, en la segunda parte del taller de funciones (ver Figura 19) se les pide a los profesores en formación que diseñen un plan de clase para introducir el concepto de función en un curso de cálculo diferencial en donde se encuentren incluidos estudiantes provenientes de comunidades indígenas del país. Para dicho diseño se les pide que tengan en cuenta: las reflexiones realizadas en la primera parte del taller, el objetivo que se espera alcanzar con el diseño del plan de clase, la forma en la que llevará a cabo la clase para cumplir con el objetivo, los recursos didácticos que utilizará, la forma en que los evaluará y las adaptaciones curriculares que haría para los estudiantes incluidos.

Figura 19.

Segunda parte taller de funciones.

PARTE II:

Diseñar un plan de clase para introducir el concepto de función un curso de Cálculo Diferencial. Considerar que en ese curso se encuentran incluidos estudiantes provenientes de comunidades indígenas del país.
Para el diseño del plan de clase tener en cuenta lo siguiente:

- Considerar las reflexiones realizadas en la **PARTE I** de este taller.
- Objetivos de la clase
- Desarrollo de la clase (de qué manera llevará a cabo la clase para cumplir con los objetivos de enseñanza propuestos)
- Recursos didácticos.
- Evaluación.
- Adaptaciones curriculares, para los estudiantes incluidos.

3.2.4 Taller de Límites.

Este taller cuenta con tres partes, en la primera parte se les presenta a los profesores un problema relacionado al contexto de los habitantes de San Basilio de Palenque en donde tendrán que trabajar de manera individual, en la segunda parte se les presenta otro problema relacionado con esta comunidad. La actividad la trabajarán en parejas, y finalmente se les preguntará acerca de la importancia de enseñar y aprender el tema de límites, además de pedirles que diseñen un problema que pueda ser resuelto a través de límites y que esté relacionado con una comunidad étnica que ellos elijan. Este taller al igual que los otros tiene una duración de 120 minutos en donde se abren espacios para reflexionar acerca de cada una de las repuestas que surjan por parte de los profesores.

Tanto la primera parte como la segunda parte del taller están diseñadas para promover el **pensamiento matemático** de los profesores, de tal forma que se discutan aspectos sobre la función y límites laterales que den solución a los problemas planteados.

En la primera parte del taller (ver Figura 20) se les presenta a los profesores un problema relacionado con la venta de leche por litro, el cual se modela por medio de una función por partes compuesta por dos rectas y cuyo objetivo es trabajar los límites laterales.

Figura 20.

Primera parte taller límites.

PARTE I: Trabajo individual

Según el ministerio de cultura de la república de Colombia, las mujeres palenqueras se dedican a la venta de dulces en ciudades turísticas, principalmente en Cartagena, con el fin de obtener ingresos monetarios para comprar bienes y servicios que no pueden autoproducir, tales como: los servicios de comunicación, transporte, educación de sus hijos y algunos víveres.

Los hombres palenqueros se dedican a actividades agrícolas como la siembra de ñame, yuca, arroz, patilla, melón, frijol y maní. Además de actividades agropecuarias como la cría de cerdos, aves de corral y ganado vacuno lechero.

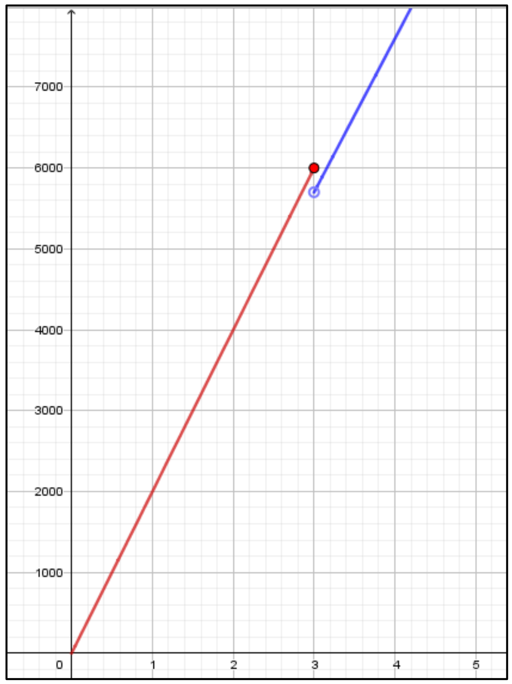
1. Supongamos que los palenqueros venden la leche de vaca a 2000 pesos por litro y si la compra es superior a 3 litros la venden a 1900 pesos el litro.
   a) Realice una función, que modele la situación, y grafíquela.
   b) Si tengo 5800 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
   c) Si tengo entre 5000 y 6000 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
   d) ¿A qué valor tiende el precio de la leche si deseo comprar una cantidad, en litros, que se aproxime a los 3 litros, pero sea menor a 3 litros? ¿Y si la cantidad que deseo comprar se aproxima a los 3 litros, pero es mayor que los 3 litros?
   e) ¿Cómo crees que las respuestas anteriores le ayudarían a las personas pertenecientes a la comunidad palenquera?

En el inciso a) se espera que las respuestas sean las siguientes (ver Figura 21):

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2000x & si & 0 \leq x \leq 3 \\ 1900x & si & 3 < x \end{Bmatrix}$$

Figura 21.

Respuesta esperada en la primera parte, inciso a, del taller de límites.

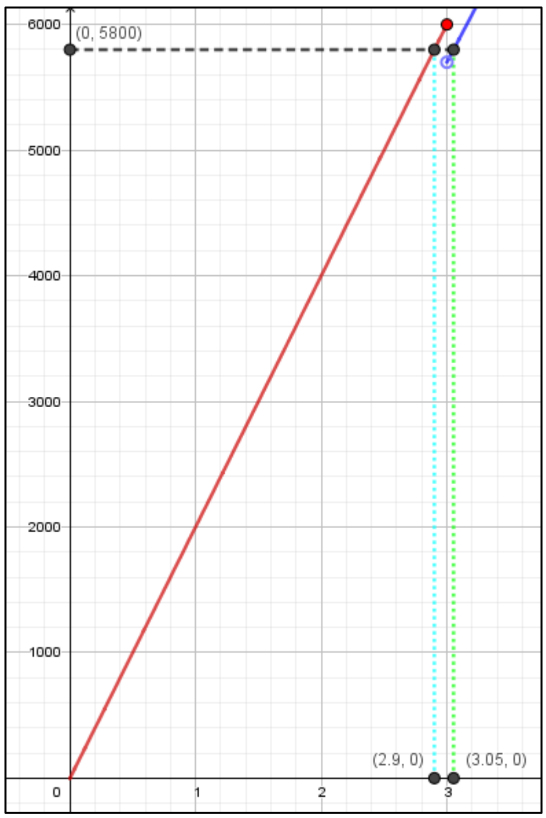


Donde ***f(x)*** representa el costo de la leche y ***x*** representa la cantidad de litros de leche.

En el inciso b) se espera que los profesores puedan notar que con 5800 pesos se pueden comprar dos cantidades diferentes de leche, ya sean 2,9 litros de leche o 3,05 litros de leche (ver Figura 22).

Figura 22.

Respuesta esperada en la primera parte, inciso b, del taller de límites.



En el inciso c) la respuesta esperada es: entre 2,5 litros de leche y 3,16 litros de leche.

El inciso d) se planteó de tal modo que los profesores tengan que utilizar límites laterales para dar solución a las preguntas allí planteadas, se espera que establezcan que cuando la cantidad de litros de leche se aproxima a tres por izquierda el precio de la leche tiende a 6000 pesos y que cuando la cantidad de litros de leche se aproxima a tres por derecha el precio de la leche tiende a 5700 pesos.

El inciso e) se plantea de tal forma que los profesores den cuenta de la utilidad que pueda llegar a tener el tema de límites al interior de una comunidad afrodescendiente.

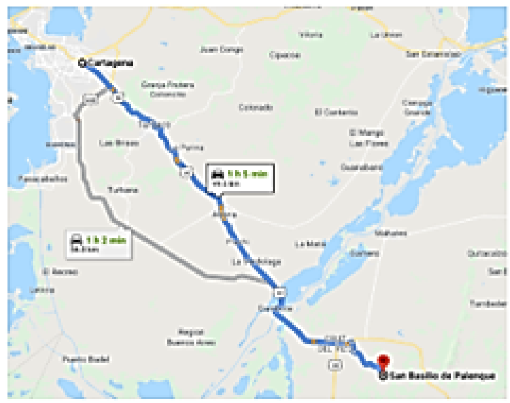
Al igual que en la primera parte, en la segunda parte del taller (ver Figura 23) se les propone a los profesores un problema relacionado con el contexto de las personas palenquearas, el cual deben abordar en parejas.

Figura 23.

Segunda parte taller límites.

Parte II: Trabaja en parejas

Algunos palenqueros1 trabajan en "moto taxi" para obtener algunos ingresos; principalmente transportan a las personas desde San Basilio de palenque al centro de Cartagena, al igual que a sus zonas aledañas; o viceversa.



Tenga en cuenta los siguientes datos:

- Cada 2000 kilómetros a las motos se les debe cambiar el aceite de motor para evitar daños en este. El aceite tiene un valor aproximado de 18000 pesos.
- Un galón de gasolina en una moto alcanza para recorrer 100 km, aproximadamente, y cuesta alrededor de 9000 pesos.
- Desde Cartagena hasta san Basilio de Palenque hay aproximadamente 49,7 kilómetros. Desde Arjona a san Basilio de palenque hay aproximadamente 27,3 kilómetros. Desde Turbaco a san Basilio de Palenque hay aproximadamente 39,6 kilómetros.

[1] Características de los palenqueros: Población que se ubica principalmente en San Basilio de Palenque, en Colombia, departamento de Bolívar, a 50 kilómetros de Cartagena de Indias. Esta población es descendiente de los cimarrones, quienes se liberaron de la esclavitud al final del siglo XVI.

Si en una semana de trabajo el palenquero "moto taxista" realiza 10 viajes, desde san Basilio de palenque hasta Cartagena, y viceversa. 5 viajes desde san Basilio de palenque hasta Arjona, y viceversa. Y 11 viajes desde san Basilio de palenque hasta Turbaco, y viceversa.

a) ¿A partir de cuánto dinero tendrá que cobrar el palenquero, por kilómetro, para que al final de la semana logre obtener ganancias?
b) Realice una función que modele los gastos vs kilómetros recorridos. Y grafíquela.
c) Al acercarse a los 2000 kilómetros ¿Cuánto dinero aproximadamente ha gastado el palenquero?
d) Si por mes el palenquero recorre 4276.4 kilómetros, transportando a sus pasajeros ¿Cuánto dinero, por kilómetro, tendrá que cobrar el palenquero para que al final del mes logre ganar 800000 pesos?
e) Teniendo en cuenta la respuesta del inciso anterior realice una función que modele las ganancias versus los kilómetros recorridos. ¿Cuánto dinero aproximadamente habrá ganado al acercarse a los 4000 kilómetros?
f) ¿Cómo podría ayudarle a los palenqueros el hecho de saber estos resultados?

En el inciso a) se espera que los profesores mencionen el cobro mínimo por kilómetro para que el palenquero no tenga perdidas, teniendo en cuenta el costo de la gasolina por galón y el costo del aceite. En este caso tendría que cobrar 99 pesos por kilómetro como mínimo para que no se generen perdidas, que surge del siguiente cálculo:

$$[(10 * 49{,}7) + (5 * 27{,}3) + (11 * 39{,}6)] * 2$$

$$(1069{,}1) * 2 = 2138{,}2$$

2138,2 los kilómetros que recorrería el palenquero en la semana, por lo que debe hacer como mínimo un cambio de aceite a la moto y además comprar en gasolina lo equivalente a estos kilómetros, de donde se tiene qué

$$18000 + \left(9000 * \frac{2138{,}2}{100}\right) = 210438$$

210438 pesos serían los gastos que tendría el palenquero en la semana, por lo que tendría que cobrar

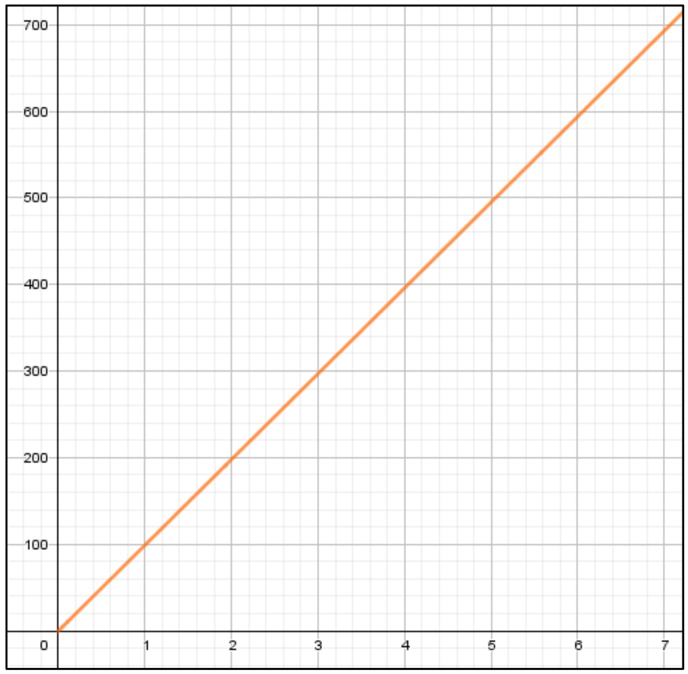
$$\frac{210438}{2138{,}2} \approx 98{,}41$$

A partir de aproximadamente 99 pesos por kilómetro para que al final de la semana logre obtener ganancias.

En el inciso b) la función esperada es una recta con pendiente 99 cuya representación analítica es $f(x) = 99x$, donde *f(x)* representa los gastos y *x* representa los kilómetros recorridos (ver Figura 24).

Figura 24.

Respuesta esperada en el inciso b de la segunda parte del taller de límites.



En la pregunta del inciso c) se espera que los profesores tengan en cuenta los límites laterales para afirmar que el palenquero ha gastado aproximadamente 198000 pesos al acercarse a los 2000 kilómetros.

En el inciso d) se espera que la respuesta sea la siguiente: debe cobrar aproximadamente 286 pesos por kilómetro para que al final del mes logre ganar alrededor de 800000 pesos.

La función que modela las ganancias versus los kilómetros recorridos sería:

$$\mathrm{f(x)} = (286 - 99)\mathrm{x} = 187x$$

Y al cabo de 4000 kilómetros las ganancias serian de 748000 pesos.

El inciso f) se plantea para que los profesores den cuenta de la utilidad de algunos conceptos y nociones del cálculo diferencial en algunos aspectos de la vida cotidiana.

La tercera parte del taller (ver Figura 25) está diseñada para promover el **pensamiento didáctico** y el **pensamiento orquestal** de los profesores, en donde se les pregunta a los profesores en formación sobre la importancia de aprender y enseñar el tema de límites, además se le pide reflexionar acerca de cómo enseñar el tema de límites a un estudiante proveniente de una comunidad indígena, y finalmente se les pide que diseñen un problema que se resuelva por medio de límites y esté relacionado con el contexto de una comunidad étnica. Esto con el fin de promover reflexiones sobre la enseñanza del límite junto con sus aspectos didácticos con miras a favorecer el aprendizaje de los estudiantes provenientes de diferentes etnias.

Figura 25.

Tercera parte taller límites.

Parte III: Aspectos didácticos

1. ¿Por qué crees que es importante enseñar y aprender el tema de límites?
2. ¿Cómo enseñarías límites (como objeto matemático) a un estudiante proveniente de una comunidad palenquera?
3. Diseña un problema, pensando en una comunidad étnica, que se resuelva por medio de límites.

3.2.5 Taller de derivadas.

Este taller consta de tres partes, en las dos primeras partes se trabaja la aplicación de la derivada a través de dos problemas, el primero lo trabajan de forma individual y el segundo de forma grupal. La tercera parte del taller se plantea de tal forma que se logren reflexionar aspectos didácticos y orquestales alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. Este taller tiene una duración de 120 minutos.

Inicialmente se les presenta información a los profesores sobre las zonas de difícil acceso del país (ver Figura 26).

Figura 26.

Información sobre las zonas de difícil acceso del país.

PARTE I: **Trabajo Individual**

Según el Ministerio de Vivienda, Ciudad y Territorio de Colombia en el decreto número 1272 del 28 de Julio del 2017, Artículo 2.3.7.2.2.2.1.

> *Las zonas de difícil acceso. "Corresponde a los municipios en el cual la persona presentadora en su área de prestación en suelo urbano no puede alcanzar los estándares de eficiencia, cobertura o calidad en los plazos establecidos en la regulación expedida por la Comisión de Regulación de Agua Potable y Saneamiento Básico, y cuenta con una población urbana menor a 25.000 habitantes según la información censal del DANE y está ubicado en Zonas No Interconectadas (ZNI) del sistema eléctrico nacional de la Unidad de Planeación Minero Energética (UPME).*

- Parte del dinero que reciben algunos de los habitantes de estas comunidades provienen la venta de sus cultivos.
- Deben almacenar agua en recipientes debido a la poca cobertura de agua que se suministra a estos municipios.
- Deben intentar minimizar gastos, lo más que puedan, debido a las pocas ganancias que reciben, producto de algunas dificultades que conlleva vivir en las zonas de difícil acceso.

Después se les presenta un problema en el cual a un cultivo de área A, se desea cercarlo de forma rectangular, para ello se les pide a los profesores que encuentren las medidas de los lados del rectángulo el cual haga que el perímetro sea mínimo (ver Figura 27).

Figura 27.

Primer problema taller de derivadas.

1. Resuelve el siguiente problema:

Un habitante de un municipio de difícil acceso en Colombia posee un cultivo de área (A) el cual requiere cercar. Decide cercar su cultivo en forma rectangular ¿Qué medidas deben tener los lados del rectángulo para que al cercar el área (A), el perímetro sea mínimo?

a) ¿Existe alguna relación entre los lados del rectángulo?
b) ¿Qué beneficios se obtendrían al cercar el cultivo con un perímetro mínimo?
c) ¿Cómo podría ayudar, el saber este hecho, a los habitantes de municipios de difícil acceso?

Se espera que los profesores utilicen la derivada para encontrar las medidas de los lados que hagan que el perímetro del rectángulo sea mínimo, y logren encontrar que las medidas tienen que ser iguales para que esto ocurra, es decir, cuando el rectángulo sea un cuadrado. Además, se espera que logren identificar la utilidad que podría tener la derivada en el contexto de los habitantes de zonas de difícil acceso, en este caso el ahorrar dinero al conseguir que el material usado para cercar el área sea mínimo.

En la segunda parte del taller (ver Figura 28) se les pide a los profesores trabajar en parejas para resolver un problema en el cual se les pide hallar las medidas de una cisterna cilíndrica que hagan que la superficie de la cisterna cilíndrica sea mínima.

Figura 28.

Segunda parte taller de derivadas.

Parte II: Trabaja en parejas.

Habitantes de un municipio de difícil acceso en Colombia desean almacenar agua en cisternas cilíndricas. Si cada cisterna cilíndrica almacena un volumen V ¿Qué medidas debe tener una cisterna cilíndrica para que tenga una superficie mínima?

a) ¿Existe alguna relación entre la altura y el radio?
b) ¿Qué beneficios se obtendrían al realizar las cisternas cilíndricas de volumen V con una superficie mínima?
c) ¿Cómo podría este hecho el ayudar a los habitantes del municipio de difícil acceso?

Al igual que en el primer problema se espera que los profesores hagan uso de sus conocimientos alrededor de la derivada para dar solución al problema. Se espera que logren encontrar que las medidas que hacen que el área superficial de la cisterna cilíndrica que almacena un volumen V sea mínima, se dan cuando la altura es el doble del radio del cilindro. Además, de que la solución de este problema beneficiaría a un habitante de un municipio de difícil acceso ya que le ahorraría gastos innecesarios en la compra del material usado para la construcción de las cisternas cilíndricas.

En la tercera parte del taller (ver Figura 29) se les pregunta a los profesores acerca de la importancia de enseñar y aprender el tema de derivadas, además de preguntarles sobre la forma en que le enseñaría el tema a un estudiante proveniente de un municipio de difícil acceso y como influiría el saber este tema en ellos. También se les pide diseñar un problema que se resuelva por medio de las derivadas teniendo en cuenta la información que se les proporcionó en la primera parte del taller.

Figura 29.

Tercera parte taller de derivadas.

Parte III. Aspectos didácticos.

1. ¿Por qué crees que es importante enseñar y aprender el tema de derivadas?
2. ¿Cómo le enseñarías el tema de derivadas a estudiantes que provienen de municipios de difícil acceso?
3. ¿Cómo crees que influiría el saber el tema de derivadas en las personas provenientes de municipios de difícil acceso?
4. Diseña un problema que se resuelva por medio de derivadas, teniendo en cuenta la información suministrada en la Parte I.

3.2.6 Prueba diagnóstico final.

El último taller se tomó de la tesis de Quintero (2019) en donde se retoman aspectos del taller prueba diagnóstico inicial y un plan de clase tomado de Hitt (2003). Este taller tiene una duración de 120 minutos.

El primer ítem del taller es el mismo que el de la prueba diagnóstico inicial y se espera que las respuestas de los profesores sean más concretas que las que dieron en la prueba diagnóstica inicial. En el segundo ítem del taller se les presenta a los estudiantes un plan de clase tomado de Hitt (2003), en donde un profesor diseña un plan de clase sin poder usas apuntes o libros de texto (ver Figura 30 y Figura 31).

Figura 30.

Segundo ítem Prueba Diagnostico Final parte 1.

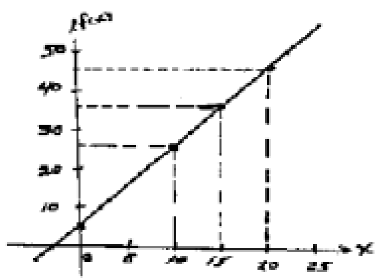
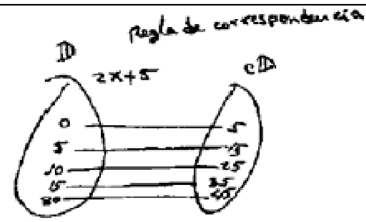
Propuesta del profesor (transcripción fiel)
Que el alumno determine la representación algebraica del siguiente problema: "La edad del padre de Juan es el doble de la edad de esté dentro de cinco años" y = edad del padre de Juan: (Variable dependiente). x = edad de Juan: (Variable Independiente) Modelo algebraico. Y=2x+5 logrando que el alumno Indique esto; tan solo una de sus compañeros enuncio dicho problema. con lo que ellos mismos determinaron que la edad del Padre estaba en función de la edad del Hijo. Estableciendo la Representación Algebraica del Problema; podremos asignarle a Juan una Serie de edades de la siguiente forma: Si Juan no ha nacido ¿cual es la edad de su padre? y= f(x) f(x)=2x+5 f(0)=2(0)+5=5 años Así que para cuando Juan tiene, 10, 15 y 20 años ¿cual será la edad del Padre? para cuando Juan tiene 10 años, la edad de su padre es de 25 Años. f(10)=2(10)+5=20+5=25 -para cuando Juan tiene 15 años la edad de su padre será de 35 años. f (15) =2(15) +5=30+5=35 - para cuando Juan cumpla 20 años mayor de edad la edad de su padre Será de: 45 años Por medio del ejemplo anterior lo podremos interpretar gráficamente por medio de parejas ordenadas (x, f(x)) donde: x=edad de Juan. f(x)= edad del Padre. Obteniendo los siguientes puntos y, denotándolos por: F(x)= {(0,5) (10,25) (15,35) (20,45)} Elaborando una gráfica en el sistema cartesiano. de la forma:  Obteniendo el siguiente Diagrama Sagital:

Figura 31.

Segundo ítem Prueba Diagnostico Final parte 2.



De tal forma que la gráfica obtenida corresponde a una gráfica de una línea Recta a la cual Se le llamara "función lineal"

De la misma forma observará que para cada valor de x le corresponde al menos una de f(x), con lo que se le puede inducir que corresponde a una función Inyectiva; los valores del D (Dominio) van de uno menor a uno mayor de tal forma que decimos que la función es Creciente, y como para cada valor que el asignemos a x, existe un valor para f(x), con lo cual la definimos como Continua para $\forall x \exists f(x)$
-continua.
Podremos dejar que el alumno encuentre y grafique
-la analogía de grados Centígrados a grados Farenhai.
Graficándola y enunciando una serie de Características de esté ejemplo.
-"Un móvil desarrolla una velocidad de cinco veces su distancia recorrida, menos cuatro metros en un tiempo determinado" etcétera.

Las preguntas que se plantearon alrededor del diseño de clase (ver Figura 32) se hicieron con el objetivo de que los profesores en formación pudieran identificar si en el plan de clase se ve reflejado el pensamiento reflexivo del profesor y se tiene en cuenta cada uno de pensamientos (matemático, didáctico y orquestal) del profesor de matemáticas.

Figura 32.

Preguntas segundo ítem Prueba diagnostico final.

a) ¿Cuál es el objetivo del profesor?
b) ¿Qué conceptos matemáticos quiere trabajar el profesor?
c) ¿Qué debilidades y fortalezas identificas que el profesor tuvo en la planeación de la clase?
d) ¿Qué estrategias didácticas usó el profesor en su preparación? ¿Crees que las usó de la manera adecuada?
e) ¿Qué recursos tuvo en cuenta el profesor al momento de preparar la clase? ¿Qué otro recurso didáctico se podría incorporar? **Justifica**
f) Si tuvieras que implementar este diseño de clase con estudiantes que cursan cálculo diferencial ¿Le cambiarias algo? ¿Qué? ¿Por qué?

3.3 Fase 3: Análisis de los resultados del primer acercamiento.

El análisis de los datos del primer acercamiento tuvo como objetivo identificar las fortalezas que conlleva la implementación de los talleres, los cuales efectivamente como se previó favorecieron el pensamiento reflexivo de los profesores en formación. Sin embargo, la revisión y evaluación del curso permitió identificar algunas oportunidades de mejora, para así lograr una mejor orientación a los profesores.

El análisis de los resultados del primer acercamiento sugirió hacer cambios en el cronograma del segundo acercamiento, con el fin de darles un enfoque más centrado en atender las características diferenciadas de los estudiantes.

Los significados negociados a lo largo de las actividades guiadas por el cronograma del diseño del curso se cosificaron en tres proyectos sobre la enseñanza del cálculo. Los cuales consistieron en:

i. Contextualización de problemas de optimización para estudiantes pertenecientes a la comunidad indígena Misak[3].

ii. Proceso de representación espacial de una persona invidente cuando explora la función senoidal por medio de un geoplano.

iii. Habilidad interpretativa lograda por un estudiante con Síndrome de Asperger cuando resuelve problemas relacionados a las funciones.

Del análisis de los datos del primer acercamiento surge un caso representativo cuyos aprendizajes y reflexiones serán descritos en el capítulo 4.

3.4 Fase 4: Segundo acercamiento de la CoP a la reflexión sobre la educación inclusiva.

Tanto los talleres, como los proyectos realizados en el 2019-1, se tuvieron en cuenta para el segundo acercamiento. Al interior del cronograma, se organizó una sesión de trabajo donde los profesores en formación del curso 2019-1 socializaron los resultados de sus proyectos a los profesores en formación de la siguiente cohorte (2019-2), invitándolos a dar continuidad a estos o estableciendo vínculos para trabajar de forma colaborativa con ellos.

En este acercamiento se manejó una estructura similar a la fase 2, las variaciones al cronograma se muestran en la Tabla 5.

---

[3] Comunidad indígena establecida al interior de Colombia. Según la ONIC (Organización Nacional Indígena de Colombia) El pueblo Misak “gente del agua” se concentra principalmente en el departamento de Cauca, en el Valle del Cauca y en el Huila. Actualmente la mayoría hablan español y Nam trik, perteneciente a la familia lingüística chibcha.

Tabla 5.

Cronograma de la segunda implementación.

Sección	Actividad	Encargado
1	Presentación del curso y discusión sobre las formas de trabajo	Moderadores
2	Socialización de las experiencias que han tenido los profesores en formación sobre el aprendizaje del cálculo	Todos
3	Taller 0. diagnóstico Inicial	Todos
4	Socialización de experiencias de aprendizaje de enseñanza y aprendizaje de algún objeto matemático del Cálculo a estudiantes con características diferenciadas	Profesores en formación 2019-1
5	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos del concepto de función.	Profesor en formación
6	Discusión y reflexión sobre aspectos didácticos del concepto de función.	Profesor en formación
7	Problematización sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial (posible tema para perfilar el proyecto)	Todos
8	Aspectos epistemológicos de la Variación	Profesor en formación
9	Aspectos didácticos de la Variación	Profesor en formación
10	Taller 1. Variación	Todos
11	Avance 1 del proyecto (planteamiento del problema) y Socialización de experiencia en SEA-ASAE. (Tutorías).	Todos
12	Epistemología de las funciones	Profesor en formación
13	Didáctica de las Funciones	Profesor en Formación
14	Taller 2. Noción de función	Todos
15	Avance 2 del proyecto (revisión bibliográfica)	Todos
16	Epistemología y Didáctica del límite	Moderador
17	Taller 3. Noción de límites	Todos
18	Avance 3 del proyecto (aspectos teóricos y conceptuales)	Todos
19	Socialización de experiencia de práctica en ASAE	Todos
20	Epistemología de la derivada	Profesor en formación
21	Didáctica de las Derivadas	Profesor en Formación
22	Taller 4. Noción de derivada	Todos
23	Avance 4 del proyecto (metodología y diseño didáctico)	Todos
24	Epistemología de las integrales	Profesor en Formación
25	Didáctica de las integrales	Profesor en Formación

26	Avance 5 del proyecto de diseño curricular (primer análisis de resultados)	Todos
27	Taller 5. Diagnostico final.	Todos
28	Entrega del artículo con resultados del proyecto Presentación del Informe final de la práctica en ASAE	Todos
29	Minicoloquio del curso.	Todos

A partir de la evaluación del primer acercamiento, fue necesario rediseñar los talleres de tal modo que se lograra una mayor profundización del pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal. Se pudo ver en el desarrollo del curso, que es necesario ofrecer herramientas de apoyo que les permita, a los profesores en formación, reflexionar sobre la forma de realizar adaptaciones curriculares. Además, sobre cómo diseñar o seleccionar recursos que favorezcan el acercamiento de los conocimientos matemáticos del cálculo diferencial a los estudiantes que presentan ciertas características diferenciadas. Así mismo, se hizo necesario implementar actividades que les permitan reflexionar sobre las formas de evaluar los aprendizajes constituidos por sus estudiantes.

A continuación, se presenta el análisis a priori de cada una de las actividades que se encuentran en los talleres trabajados con los profesores pertenecientes al 2019-2. El análisis será presentado de acuerdo con las tres categorías de análisis que ofrece el modelo “R-y-A” (pensamiento matemático, didáctico y orquestal):

3.4.1 Prueba Diagnóstico Inicial.

La primera parte de este taller se tomó tal cual como se establece en la sección 3.2.1 del análisis a priori del primer acercamiento. Pero hubo un cambio en la segunda parte del taller (ver Figura 33) en cuanto al **pensamiento didáctico** y el **pensamiento orquestal,** ya que se les pide a los profesores que elijan a algún estudiante hipotético con características diferenciadas (con la que hayan tenido o no algún acercamiento) y que planteen una posible actividad de clase de Cálculo

Diferencial, además de que reflexionen sobre los recursos, los procesos matemáticos, la forma de evaluar y la importancia de las adaptaciones curriculares.

Figura 33.

Segunda parte Prueba Diagnóstico Inicial.

2. Pensemos en las personas con Necesidades Educativas Especiales.
Algunas investigaciones han permitido evidenciar que algunos de los estudiantes que ingresan a instituciones de educación superior tienen ciertas características diferenciadas. Entre las características deiferenciadas, se podrían encontrar estudiantes con Asperger, discapacidad cognitiva leve, limitación visual (discapacidad visual), limitación auditiva (discapacidad auditiva) y algunos estudiantes que pertenecen a comunidades indígenas, entre otros.

Elige un tema y una Necesidad Educativa Especial, para plantear uma posible actividad de clase de Cálculo Diferencial.

Tema:____
Necesidad Educativa Especial: ______________________________

No olvides considerar en tu plamteamiento:

- Los recursos didácticos que incorporarías
- Los procesos matemáticos:
  - Representación (con y sin mediación de las tecnologías.
  - Comunicación (uso del lenguaje matemático y natural).
  - Demostración y argumentación.
  - Uso de procedimientos
- La forma de evaluar.

a) La relevancia de la comprensión y profundización del tema, en personas con la Necesidad identificada.

Con esta actividad se espera valorar conocimientos matemáticos de los profesores sobre el tema seleccionado y sus conocimientos didácticos, que permitan articular esos conocimientos para favorecer el aprendizaje en una persona con características diferenciadas.

3.4.2 Taller de Variación

Este taller se cambió completamente en comparación con el taller de variación aplicado en el 2019-1, con el fin de que los problemas planteados promuevan en los profesores la reflexión sobre la importancia de la contextualización de los problemas al momento de enseñarle a una persona con características diferenciadas. Cuenta con cuatro incisos y una duración de 120 minutos.

En el **pensamiento matemático** este taller busca favorecer las reflexiones acerca de la noción de variación, en donde los profesores tendrán que identificar, en tres problemas, las magnitudes que varían y como varían para poder encontrar las funciones que modelen cada una de las situaciones respectivamente y así poder resolver cada una de las preguntas que se les plantean.

En el primer inciso del taller (ver Figura 34) se presenta un problema en el cual se espera que los profesores trabajen con una función por partes compuesta por transformaciones de la función parte entera "techo"; en donde se favorezca su representación numérica, algebraica y gráfica.

Figura 34.

Primer inciso del taller de variación.

1. Un habitante de San Basilio de Palenque decide poner una venta de minutos, con el fin de que los habitantes del corregimiento se puedan comunicar con sus familiares, amigos y/o conocidos. El habitante decide cobrar por minuto o fracción de minuto 100 pesos y después de los 10 minutos los cobra a 50 pesos el minuto o la fracción de minuto.

a. ¿Cuánto cuesta una llamada de 6 minutos 47 segundos, 22 minutos 40 segundos, 2 horas 18 minutos 20 segundos?
b. Halla la función que representa la relación entre el costo de la llamada y el tiempo.
c. Realiza un gráfico que represente la situación.

En la parte a) del primer inciso las respuestas esperadas son las que aparecen en la Tabla 6:

Tabla 6.

Respuesta esperada a la parte "a" del inciso 1 del taller de variación

Minutos	Costo de la llamada
6 minutos 47 segundos	700 pesos
22 minutos 40 segundos	1650 pesos
2 horas 18 minutos y 20 segundos	7450 pesos

Se espera que los profesores realicen la conversión de los segundos a minutos y de las horas a minutos para poder hallar el costo de la llamada.

En la parte b) del inciso 1, la respuesta esperada por parte de los profesores es:

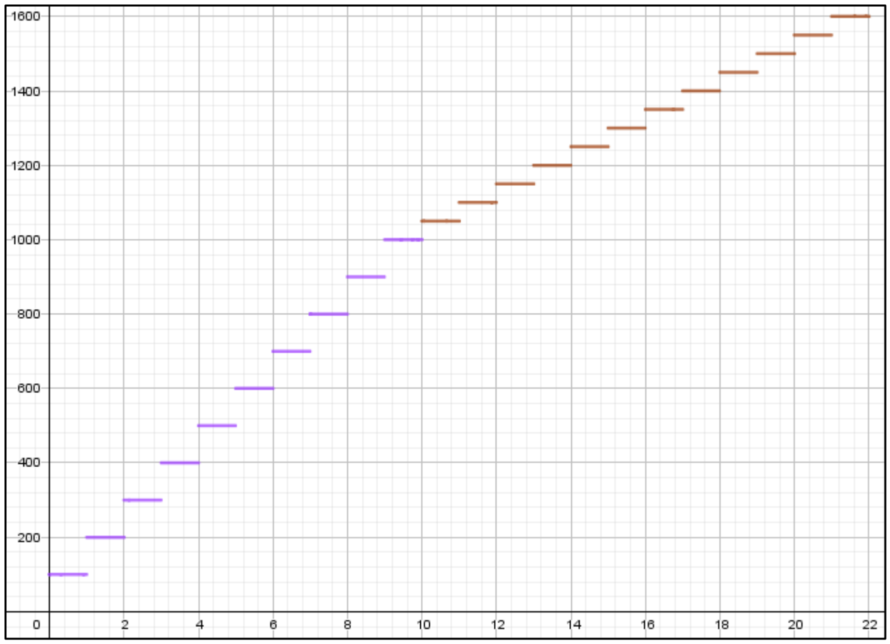
$$f(x) = \begin{cases} 100\lceil x \rceil & si\ \ 0 \leq x \leq 10 \\ 50\lceil x-10 \rceil + 1000 & si\ x > 10 \end{cases}$$

Para llegar a una representación algebraica que represente la situación, los profesores deberán caer en cuenta que la función no se puede representar a través de una sola expresión algebraica ya que en las condiciones del problema se establece que a partir de los primeros 10 minutos de la llamada el costo por minuto o fracción cambia.

En la parte c) del inciso 1 la representación gráfica que se espera por parte de los profesores es la siguiente (ver Figura 35):

Figura 35.

Parte "c" del inciso 1 del taller de variación.



En el segundo problema del taller de variación se les presenta a los profesores un problema donde deberán decidir la solución de este a partir de resultados matemáticos (ver Figura 36).

Figura 36.

Segundo problema taller de variación.

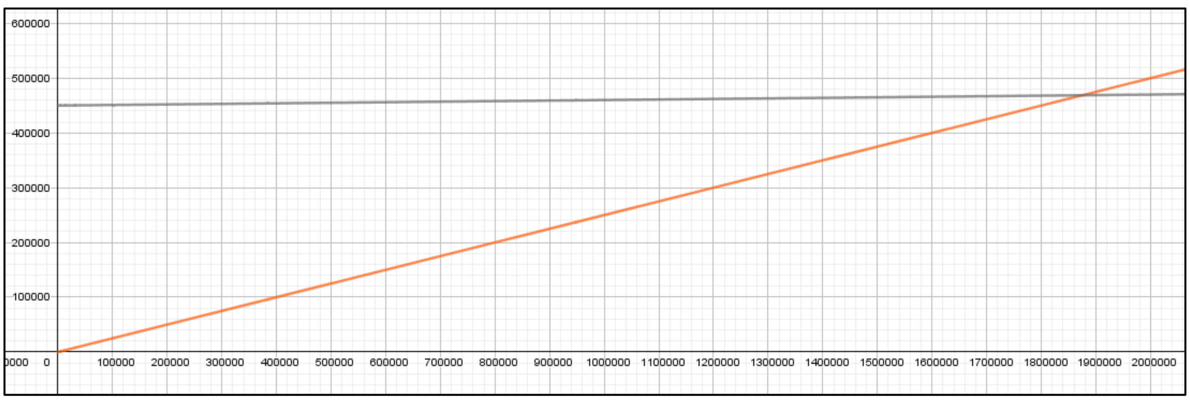
2. Una estudiante proveniente de una zona de difícil acceso ha ingresado a la Universidad Industrial de Santander. Para sustentar algunos de sus gastos mensuales, la estudiante decide buscar un empleo. Un amigo le recomienda trabajar en la venta de productos por catálogos, en donde recibirá como pago el 25% del total de las ventas que realice. Otro amigo le recomienda trabajar vendiendo prendas de vestir en un almacén en donde deberá cumplir un horario de 4 horas por día, recibiendo diariamente una base de 15000 pesos más el 1% de cada venta.

a. Realiza un gráfico que represente las situaciones.
b. ¿En qué situación el estudiante ganaría la misma cantidad mensual de dinero independientemente del trabajo que escoja?
c. ¿Cuál trabajo le recomendarías al estudiante? ¿Por qué?

Inicialmente los profesores deberán caer en cuenta que las dos situaciones que se les presentan en el problema se pueden representar gráficamente a partir de dos rectas que se intersecan en un punto en donde se relacionan las ganancias con las ventas. Se espera que los profesores lleguen a deducir que la representación gráfica del problema varía según si las ventas se realizan en un día, dos, un mes, un año, etc. Por lo que a partir de esta deducción se les pedirá a los profesores que representen gráficamente las ventas vs las ganancias en 30 días. La gráfica que representa el problema es la siguiente (Figura 37):

Figura 37

Inciso "a", del segundo problema del taller de variación.



En cuanto al inciso b) los profesores tendrán que notar que el punto de intersección de las rectas representa el momento en que para la misma venta en las dos situaciones la ganancia será la misma, la cual sucede cuando las ventas son de 1’875.000 pesos y las ganancias de 468.750 pesos.

En cuanto al inciso c) los profesores deberán extraer información a partir de los datos suministrados y encontrados anteriormente, se espera que los profesores mencionen aspectos como la pendiente o inclinación de las gráficas, además de la variación de las ganancias a medida que cambian las ventas. Se esperan respuestas como la siguiente:

- Si la estudiante de la zona de difícil acceso vende menos de 1’875.000 pesos al mes lo recomendable seria que trabajara en el almacén, si vende 1’875.000 pesos al mes ganará lo mismo en los dos trabajos, y si vende más de 1’875.000 pesos al mes lo más recomendable sería que trabajara en la venta por catálogos ya que de esta forma obtendría mayores ingresos.

En el tercer problema del taller de variaciones (ver Figura 38) se les presentó un problema a los profesores relacionado con las comunidades indígenas en donde tendrán que notar las magnitudes que varían y cómo varían para dar solución al problema o para notar que el problema tiene o no solución en el estudio del cálculo diferencial.

Figura 38.

Tercer problema del taller de variación.

3. Algunos habitantes de comunidades indígenas construyen sus viviendas producto de tradiciones acumuladas históricamente que incluyen procedimientos artesanales, procesos ceremoniales de alto valor cultural para la comunidad, y la utilización de materiales naturales de la región.
Algunas de las viviendas que se pueden encontrar al interior de las comunidades indígenas son las siguientes:

La forma cilíndrica de la base de la vivienda opone menos resistencia a los vientos ciclónicos, por lo que tienden a resistir a los fuertes vientos.

La forma del techo está relacionada con el hecho de prevenir que el agua no penetre en la casa. Ya que entre menos inclinación haya es más probable que se filtre el agua en las viviendas. Además, la altura del techo permite acumular mayor volumen de aire caliente creando mayor frescura.

Estas viviendas no tienen ventanas, y por tanto su ventilación e iluminación se dan por medio de las puertas encontradas. En zonas donde las temperaturas son altas, se trata de crear un ambiente de frescura y confort en el interior de la vivienda.

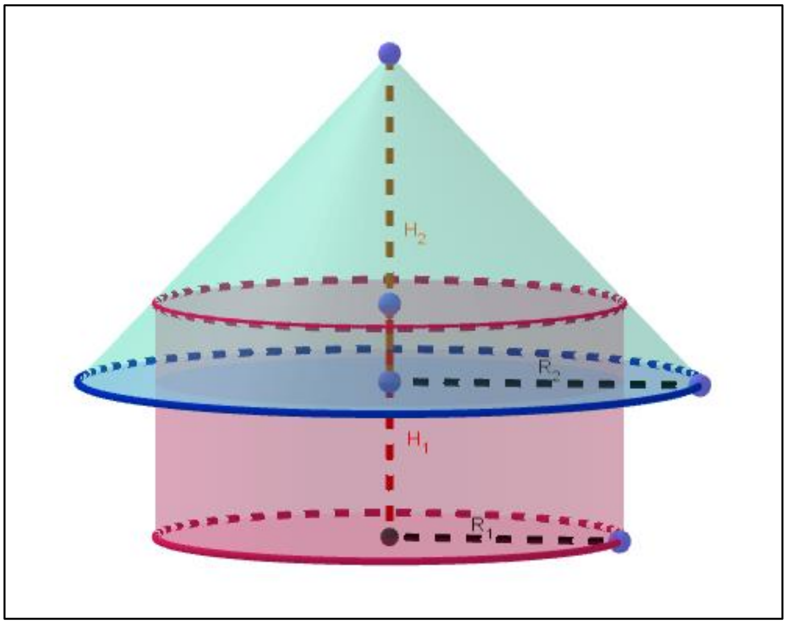
Supongamos que se tiene cierta cantidad de material fijo para la construcción de una de estas viviendas, es decir, cierta área superficial ($A_S = 90m^2$).

a. ¿Qué medidas le asignarías a la casa de tal forma que se utilice el total del material? ¿qué volumen interior tendría esa casa?
b. Si se cambian las medidas de la casa, utilizando la misma área superficial ¿Qué pasaría con el volumen interior de la vivienda?
c. ¿Qué medidas debe tener la vivienda para obtener el mayor volumen interior utilizando una cantidad de material fijo A_S?¿Cómo crees que ayudaría a los habitantes de la comunidad indígena conocer esas medidas?

Inicialmente se espera que los profesores realicen un bosquejo que les ayude a interpretar y ver las magnitudes que se encuentran inmersas en el problema, como la altura y el radio del cono, la altura y el radio del cilindro y el volumen de la figura (ver Figura 39).

Figura 39.

Bosquejo del tercer problema del taller de variación.



Se espera que los profesores establezcan que para que el problema tenga solución es necesario restringir ciertas magnitudes como las alturas (de la figura cilíndrica que corresponde a la base de la casa, de la figura cónica que corresponde al techo de la casa y, de la casa en general). De caso contrario la situación se vuelve un problema de varias variables que tendría solución por medio de los multiplicadores de Lagrange.

Luego de fijar la altura del cono (H3) y la de la casa en general (H), se espera que ellos realicen algunas ecuaciones que les permitan relacionar las magnitudes que se encuentran inmersas en el problema. Ecuaciones como: la ecuación del área superficial y el volumen del cono, la del área superficial y el volumen del cilindro, teniendo en cuenta que en las áreas superficiales no se tienen en cuenta las “tapas”. Además, de encontrar una relación entre el radio del cono y el radio de cilindro, relacionando las alturas y utilizando el teorema de tales.

En el inciso a) se espera que los profesores tomen valores aleatorios para las variables independientes del sistema de ecuaciones que formen, de tal forma que el área superficial de toda la casa sea de $90m^2$ y de paso hallar el valor del volumen de la casa dado esos valores.

El inciso b) se plantea para que los profesores den cuenta que para diferentes valores de las variables que se encuentran inmersas en el problema el área superficial puede ser la misma, pero los valores del volumen cambian a medida que los valores de las variables cambian.

En el inciso c) se espera que los profesores utilicen la optimización (aplicación de la derivada) para resolver el problema en donde tengan que usar los conocimientos que tengan respecto a la derivada. Además, se espera que los profesores establezcan cómo el encontrar el mayor volumen de una casa dada una cantidad de material fijo para su construcción les pueda ayudar a un habitante de una comunidad indígena.

En cuanto al **pensamiento didáctico**, como se pudo ver en los tres primeros puntos del taller se presentaron problemas relacionados al contexto de personas palenqueras, provenientes de zonas de difícil acceso y de habitantes de comunidades indígenas; esto con fin de que los profesores vayan familiarizándose con los diferentes contextos. Además, en el cuarto punto del taller (ver Figura 40) se les pide a los profesores que mencionen cuál de los problemas que se trabajaron en el taller trabajaría con estudiantes con características diferenciadas y por qué, esto con el fin de establecer la importancia que estos les dan a los problemas contextualizados.

Figura 40.

Cuarto inciso del taller de variación.

4. Teniendo en cuenta los problemas antes resueltos.
   a. ¿Cuál o cuáles de los problemas resueltos usarías para trabajar el tema de variación con personas con características diferenciadas? Justifica tu respuesta.
   b. ¿Consideras necesario agregar algún elemento didáctico para trabajar el (los) problema (s) mencionado(s) en el inciso anterior?
   c. Para resolver el (los) problemas(s) ¿consideras pertinente usar algún recurso didáctico (calculadora, hojas de cálculo, software, entre otros.)? ¿Cuál? ¿Por qué?

En cuanto al **pensamiento orquestal,** se quiere que los profesores reflexionen acerca de los recursos didácticos con el fin de que puedan enriquecer los problemas contextualizados y de esta forma acercar el contenido matemático del cálculo diferencial trabajado en el taller a los estudiantes con características diferenciadas.

3.4.3 Taller de funciones.

Este taller no contó con variaciones sustanciales en comparación con el taller de funciones aplicado en el curso de didáctica del cálculo del 2019-1, cuyo análisis se encuentra la sección 3.2.3.

3.4.4 Taller de Límites.

Al igual que el taller de funciones, en este taller no hubo cambios sustanciales en comparación con el taller aplicado en el 2019-1. El análisis de este taller se encuentra en la sección 3.2.4.

3.4.5 Taller de Derivadas.

Aunque el taller de derivadas aplicado en el 2019-1 tenía problemas relacionados con el contexto de los habitantes de las zonas de difícil acceso, este se cambió en su totalidad, ya que se encontró en este taller la oportunidad de añadir recursos digitales para promover el desarrollo del pensamiento reflexivo de los profesores de la segunda implementación (2019-2).

Este taller a diferencia de los otros talleres se divide en dos talleres llamados taller 4.1 y 4.2. Los dos talleres tienen una duración aproximada de 90 minutos cada uno.

En cuanto al taller 4.1 se divide en dos partes, la primera parte se planteó de tal forma que se logre una discusión sobre algunos de los aspectos matemáticos relacionados con la derivada, y la segunda parte para discutir aspectos didácticos de este tema.

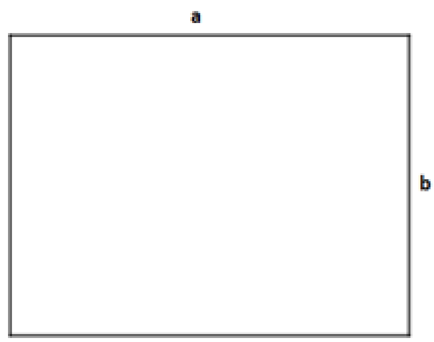
La primera parte del taller 4.1 está diseñada de tal forma que se favorezca el **pensamiento matemático** del profesor alrededor de la derivada vista como la pendiente de una recta tangente a una función.

En la primera parte se presenta información acerca de los habitantes de zonas de difícil acceso, tal y como se presentó en el taller de derivadas del primer acercamiento, y un problema de su contexto en donde los profesores tendrán que encontrar las medidas de una lámina rectangular que hagan que, al momento de construir la caja, a partir de la lámina, la caja pueda tener el mayor volumen (ver Figura 41).

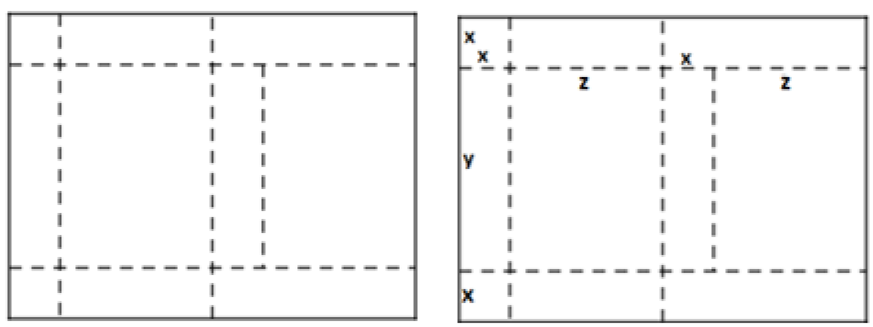
Figura 41.

Primera parte del taller de derivadas.

Problema: Un habitante de un municipio de difícil acceso en el eje cafetero de Colombia necesita construir cajas en las cuales pueda almacenar sus cosechas (granos de café), para esto decide conseguir láminas de cartón de forma rectangular, con lados a y b como se muestra en la siguiente figura.



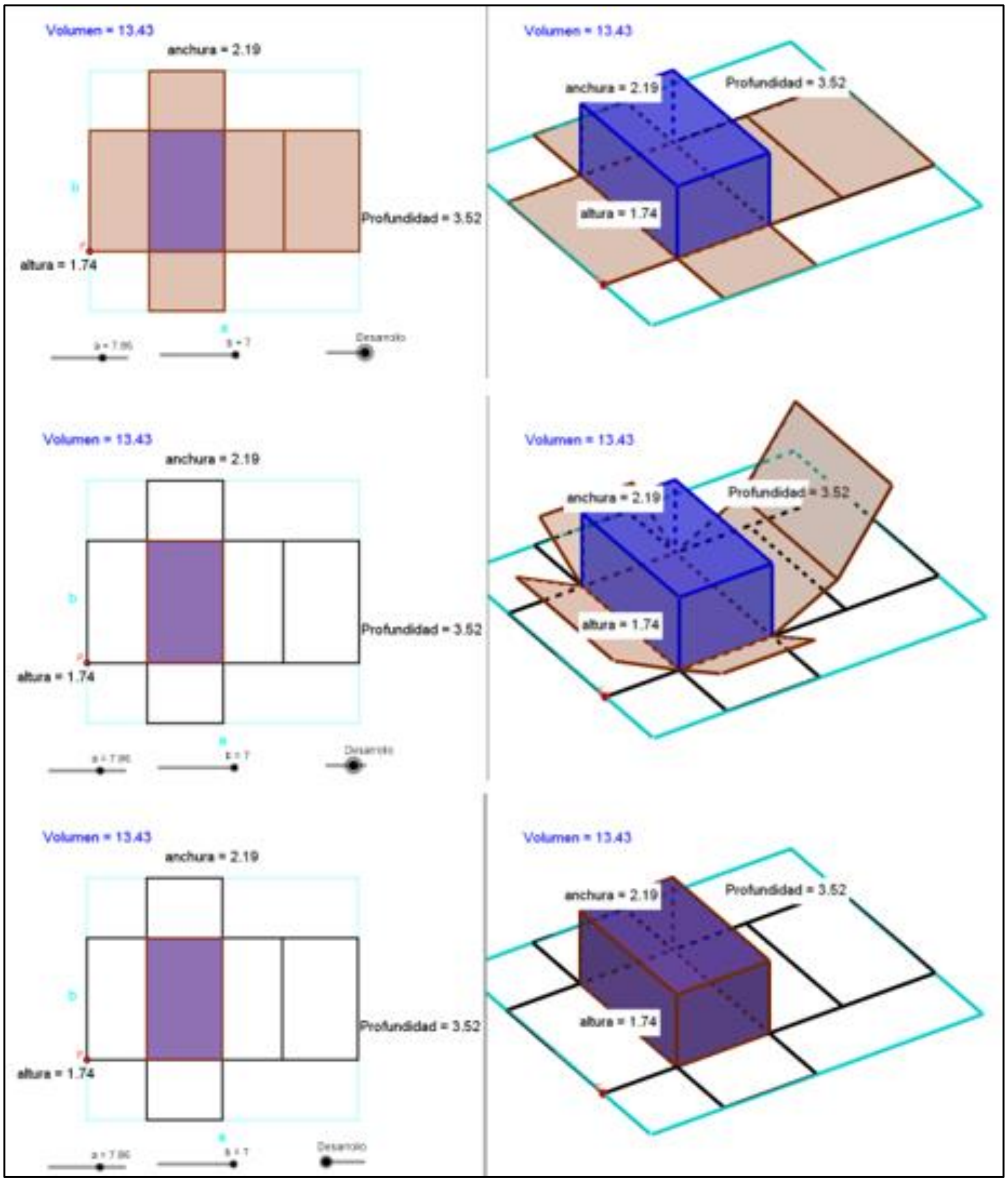
Para construir las cajas (con tapa) este habitante decide utilizar una plantilla, como la que se muestra a continuación. ¿Qué valores deben tener las magnitudes señaladas en la plantilla, para que la caja que se construya a partir de ella tenga el mayor volumen?



Se les da una hoja de papel a los profesores y estos deben trazar las medidas de la plantilla de tal forma que la caja que se construya a partir de ella tenga el mayor volumen. Luego se les pide que abran un archivo de Geogebra que se llama Caja_Tapa en el cual podrán manipular las medidas de la plantilla para la construcción de la caja, como: la anchura, la altura y la profundidad. Además, de poder visualizar como a partir de la plantilla se puede construir la caja con tapa (ver Figura 42).

Figura 42.

Visualización de la construcción de la caja a través del uso de GeoGebra.



Luego, se les pide a ellos que sigan algunas indicaciones y que respondan algunas preguntas (ver Figura 43) con el fin de que logren visualizar a través del archivo en GeoGebra las magnitudes de las cuales depende el volumen de la caja, de igual forma que logren ver las restricciones y relaciones que hay entre estas magnitudes. Al final se les pide que representen algebraicamente el volumen de la caja en función de su altura, y finalmente encontrar los valores de las magnitudes que hacen que la caja tenga el mayor volumen.

Figura 43.

Preguntas de la primera parte del taller de derivadas.

1.1. Abre el archivo de GeoGebra Caja_Tapa.ggb y mueve el deslizador llamado “desarrollo”. Luego mueve los deslizadores de a y b de tal forma que a = 7 y b=5; y por último anima el punto F.

a) ¿De qué magnitud o magnitudes depende el volumen de la caja?
b) ¿Qué valores puede tomar la altura?
c) ¿Qué valores puede tomar la profundidad?
d) ¿Qué valores puede tomar la anchura?
e) ¿Qué valores puede tomar el volumen?
f) ¿Qué relación hay entre la altura y la anchura?
g) ¿Qué relación hay entre la profundidad y la altura?
h) Representa algebraicamente el volumen en función de la altura.
i) ¿Cuáles son las dimensiones de la altura (x), la anchura (y) y profundidad (z) de la caja de mayor volumen?

1.2. Comparte tus resultados con tus compañeros y profesor.

Después se les pide que abran el archivo de GeoGebra llamado Función_Volumen_Caja y que animen el punto F (ver Figura 44), y que posteriormente respondan algunas preguntas (ver Figura 45).

Figura 44.

Representación gráfica del volumen de la caja en función de la altura.

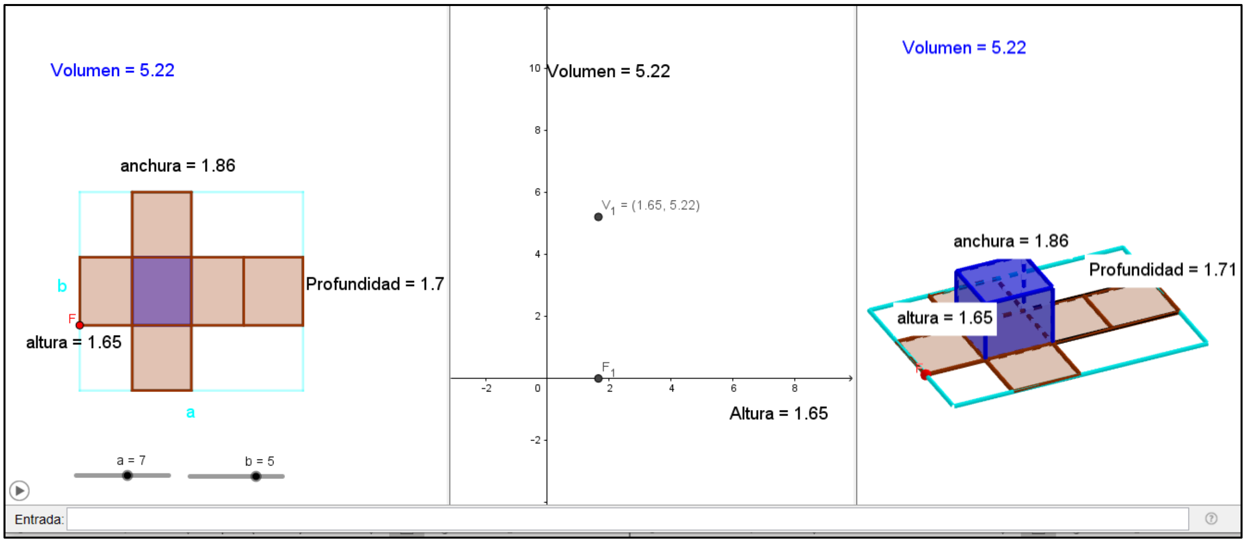


Figura 45.

Preguntas de la sección 1.3 del taller de derivadas.

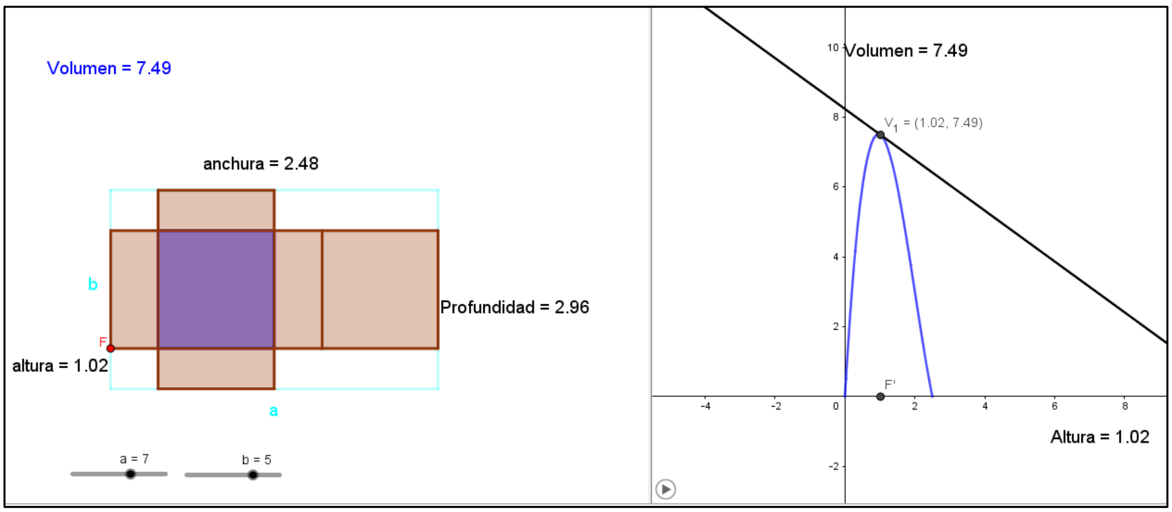
1.3. Abre el archivo Función_Volumen_Caja.ggb. Anima el punto F.

a) ¿Qué representa el punto V_1?
b) Escribe en la barra de entrada la formula que representa el volumen en función de la altura.
c) Traza la recta tangente por el punto V_1 a la gráfica que representa el volumen en función de la altura. Halla la pendiente de esta recta. ¿Qué representa la pendiente?
d) ¿Cómo es el comportamiento de la recta tangente y de su pendiente antes y después del valor de la altura que genera el mayor volumen?
e) Registra en la Hoja de Calculo 30 valores cercanos a la pendiente por la derecha y por la izquierda del valor de la altura que genera el mayor volumen.
f) ¿A que valor tiende la pendiente de la recta tangente cuando aproximas al valor de la altura que genera el mayor volumen?
g) ¿Cuál es el volumen máximo?
j) El saber el volumen máximo ¿En qué podría ayudar al habitante del municipio de difícil acceso?

En esta parte se les pide a los profesores que escriban en la barra de entrada la expresión algebraica que representa el volumen de la caja en función de la altura y posteriormente que tracen una recta tangente a un punto predeterminado que se mueve a lo largo de la gráfica, a medida que se cambia la altura de la caja. Esto con el fin de introducir la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente (ver Figura 46).

Figura 46.

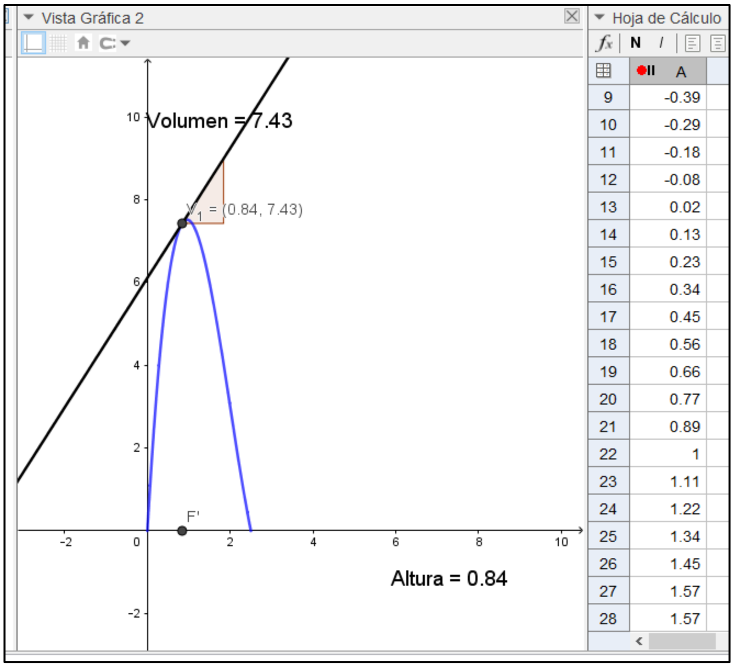
Respuesta esperada en el inciso b y c de la sección 1.3 del taller de derivadas.



Posteriormente se les pide que registren el valor de la pendiente de la recta tangente en la hoja de cálculo y observen cuál es su valor a medida que el punto se aproxima al valor máximo que puede tomar el volumen (ver Figura 47), esto con el objetivo de significar la derivada cómo pendiente de la recta tangente.

Figura 47.

Valores de la pendiente de la recta tangente registrados en la hoja de cálculo.

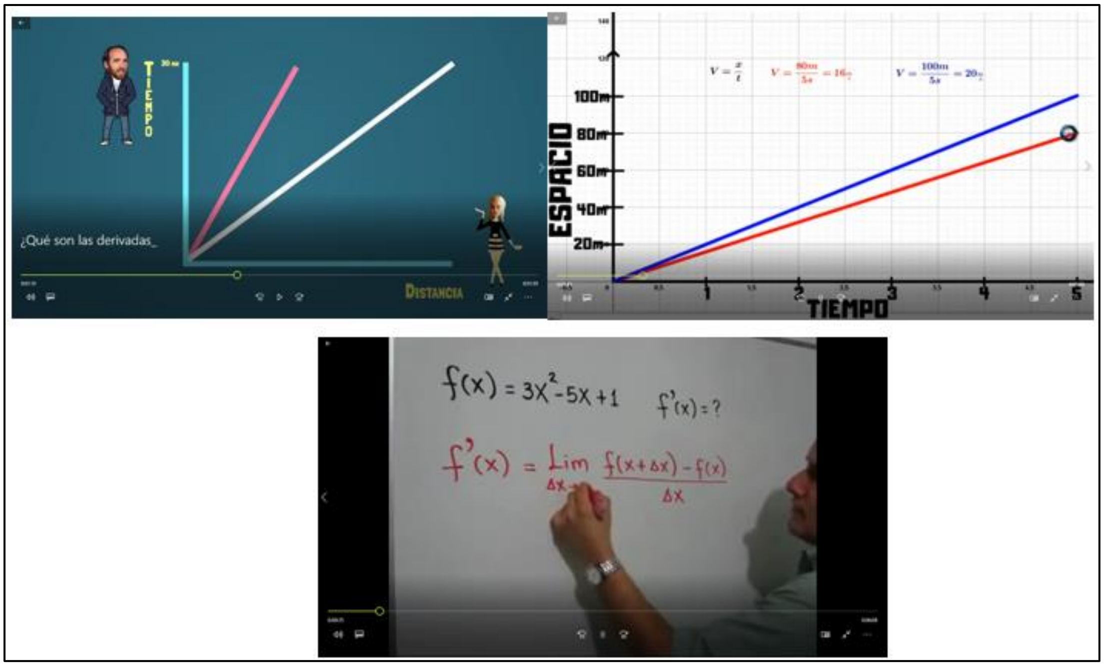


La última pregunta se plantea para que los profesores den cuenta del uso que puede tener la derivada en la vida cotidiana.

La segunda parte del taller 4.1 está diseñada para promover el **pensamiento didáctico** y el **pensamiento orquestal** de los profesores, en donde se les pregunta acerca de la importancia de enseñar y aprender el tema de derivada. Además, se les pide, con anterioridad al desarrollo del taller, que observen tres videos en donde los profesores Alex, Julio y Eduardo explican el tema de derivada (ver Figura 48).

Figura 48.

Videos de los profesores Julio, Alex y Eduardo sobre la derivada.



Y a partir de la visualización de estos videos se les pregunta acerca de cómo los profesores introducen el tema de derivada, los objetos matemáticos que utilizan para introducir el tema de derivada, los recursos que utilizan los profesores y los posibles errores que pudieran haber tenido los profesores en los videos. También, se les pregunta a los profesores en formación sobre cómo le enseñarían el tema de derivadas a una persona con características diferenciadas (ver Figura 49).

Figura 49.

Parte II del taller de derivadas.

Parte II. Aspectos didácticos.

1. ¿Por qué crees que es importante enseñar y aprender el tema de derivadas?

2. Analiza los videos de los profesores Alex, Julio y Eduardo; y responde:

a) ¿Cómo introducen los profesores el tema de la derivada?
b) ¿Qué otros objetos matemáticos del cálculo utilizan los profesores para introducir el tema de derivadas en sus videos?
c) ¿Qué recursos utilizan los profesores para introducir el tema de derivadas?
d) ¿Notaste algún error o dificultades por parte de los profesores? ¿Cuales?
e) Teniendo en cuenta los ítems anteriores ¿Cómo le enseñarías el tema de derivadas a una persona con características diferenciadas?

El taller 4.2 tiene una dinámica similar a la 4.1. Este taller se divide en dos partes, en la primera parte se presenta un problema relacionado al almacenamiento de agua en contenedores en lugares de difícil acceso y además se discuten aspectos matemáticos relacionados con la derivada esto con el fin de desarrollar el **pensamiento matemático** de los profesores alrededor de la derivada (ver Figura 50).

En la segunda parte del taller 4.2 se presentan algunas preguntas con el fin de generar una discusión acerca de aspectos didácticos alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las derivadas, con el objetivo de favorecer el **pensamiento didáctico** y **pensamiento orquestal** de los profesores.

Figura 50.

Parte I del taller 4.2 de derivadas

Parte I: Trabaja en parejas.

En el municipio de la Mesa de los Santos hay dificultades en el suministro de agua, la junta comunal de este municipio está averiguando como recolectar agua lluvia. Para responder a las inquietudes de la comunidad, el personero estuvo documentándose y encontró que en Paraguay se están llevando a cabo proyectos cuyo objetivo *es obtener el recurso hídrico a menos costo en las comunidades que tienen difícil acceso de agua para el consumo humano*. En este proyecto de Sistema de Captación de Agua Lluvia se construyen tanques (con base cilíndrica y forma cónica en la parte superior) de almacenamiento en donde se utilizan materiales básicos de construcción, como lo son varillas de acero, cemento, arena y piedra; como se muestra en la siguiente figura.

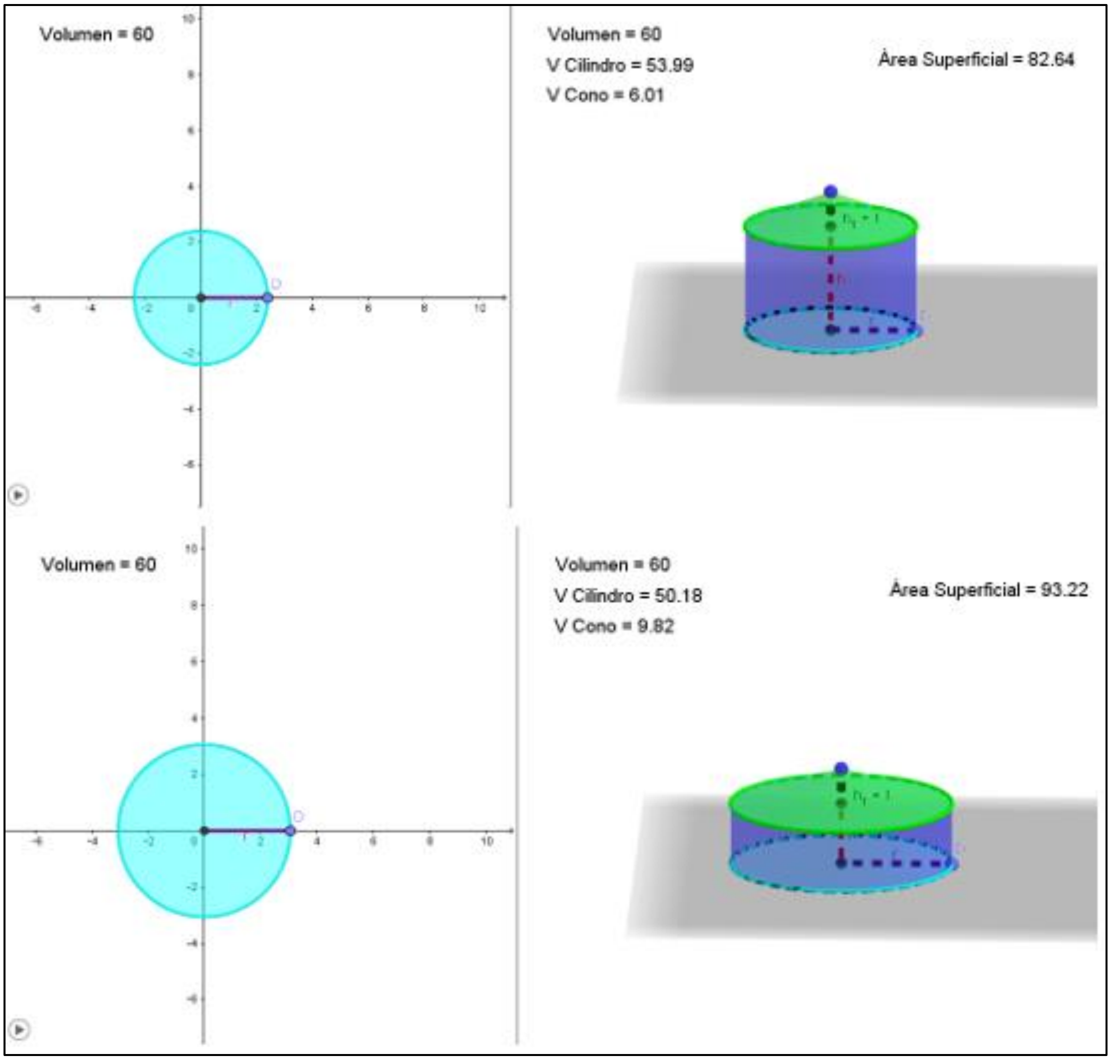
Si se desea que el tanque almacene un volumen $V = 60000\ litros$ y que la altura del cono sea de un metro. ¿Qué medidas debe tener el tanque de agua (como el que se muestran en la figura) para que tenga una superficie mínima?

El primer problema consiste en hallar las medidas que debe tener un tanque como el que se muestra en la Figura 50 (con base cilíndrica y forma cónica en la parte superior) para que el volumen sea de 60000 litros y el área superficial sea mínima.

Se les pedirá a los profesores que abran el archivo de GeoGebra llamado Área Superficial Tanque en donde se les pide que animen el punto D (ver Figura 51), y respondan algunas preguntas.

Figura 51.

Área superficial tanque.



Al animar el punto D se espera que los profesores noten que a medida que cambia el radio, el volumen del cono, del cilindro y el área superficial varían, pero el volumen de la figura sigue siendo el mismo. Se espera que los profesores tengan en cuenta que hay que pasar los litros a metros cúbicos para abordar adecuadamente el problema. Las preguntas relacionadas con esta parte del taller se ven en la Figura 52.

Figura 52.

Preguntas parte I del taller 4.2 de derivadas.

Abre el archivo de GeoGebra Área Superficial Tanque.ggb y anima el punto D.

a) ¿De qué magnitudes depende el Área Superficial del tanque?
b) ¿Qué relación hay entre el volumen del cono, el volumen del cilindro y el volumen del tanque?
c) ¿Qué relación hay entre la altura del cilindro, el radio del cono y el volumen del tanque?
d) ¿Qué relación hay entre el área superficial del cono, el área superficial del cilindro y el área superficial del tanque?
e) Represente algebraicamente el área superficial del tanque en función del radio del cilindro.
f) ¿Cuáles es la dimensión del radio (r) del tanque con menor área superficial?

Comparte las ideas con tus compañeros y profesor.

Se espera que los profesores puedan representar algebraicamente el área superficial del tanque en función del radio del cilindro, la cual sería:

$$As(r) = \pi r\sqrt{r^2+1} + \left(\frac{60}{\pi r^2} - \frac{1}{3}\right) * 2\pi r + \pi r^2$$

Donde As representa el área superficial del tanque y r el radio del cilindro que es el mismo que el radio del cono.

Se les pide hallar el radio el cual hace que el área superficial sea mínima, al realizar el tratamiento algebraico y realizar las derivadas correspondientes la ecuación de la derivada de As seria la siguiente:

$$As'(r) = \pi\sqrt{r^2+1} + \pi\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}} - \frac{120}{r^2} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi r$$

En donde al igualar As’(r) a cero el tratamiento algebraico para hallar el valor o los valores de r que hacen que esa igualdad se cumpla, se vuelve complicado. Por lo que se les pide a los profesores en formación que abran el archivo de GeoGebra Rastro A_s (ver Figura 53) en donde tendrán que animar el punto D y responder algunas preguntas (ver Figura 54).

Figura 53.

Archivo de GeoGebra Rastro A_s.

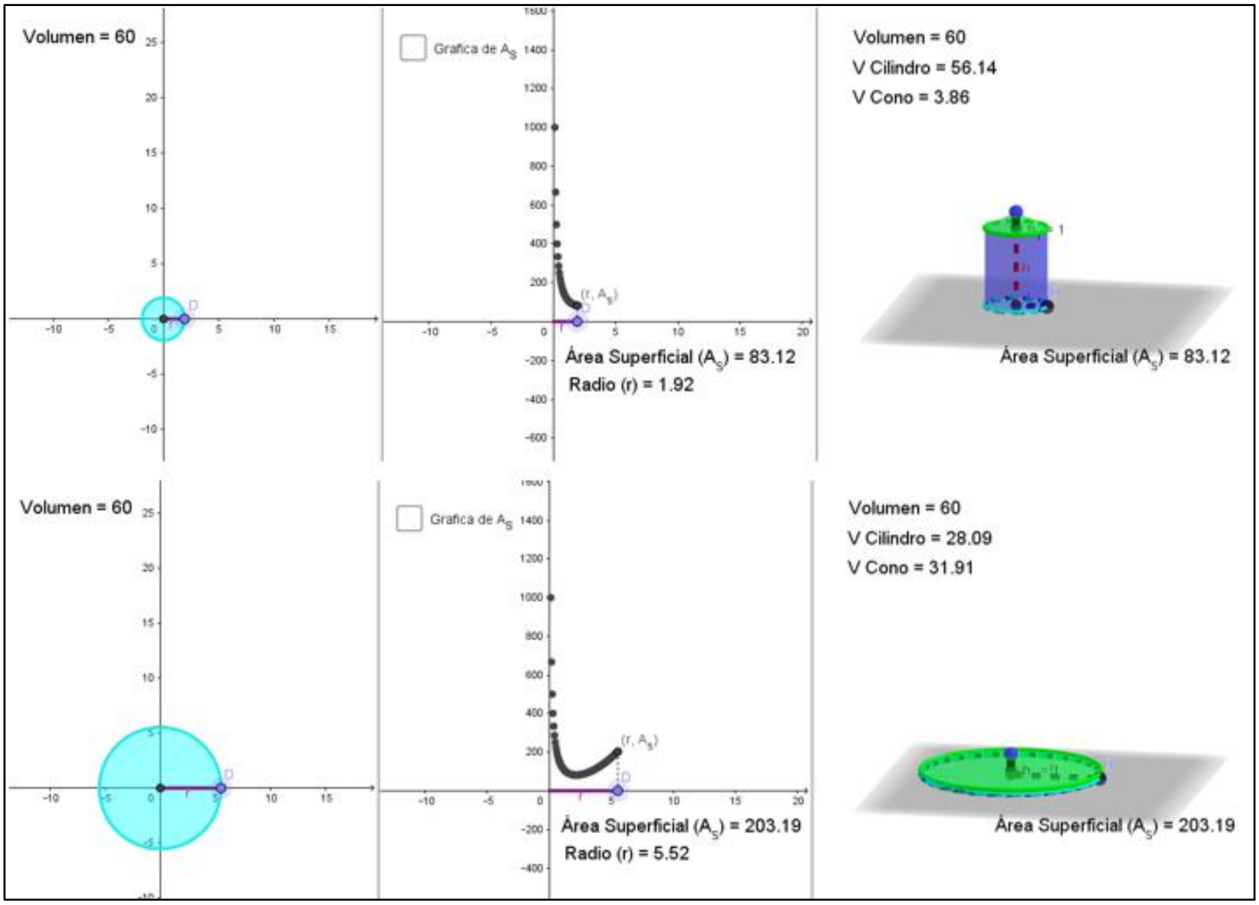


Figura 54.

Preguntas sobre el archivo Rastro A_s.

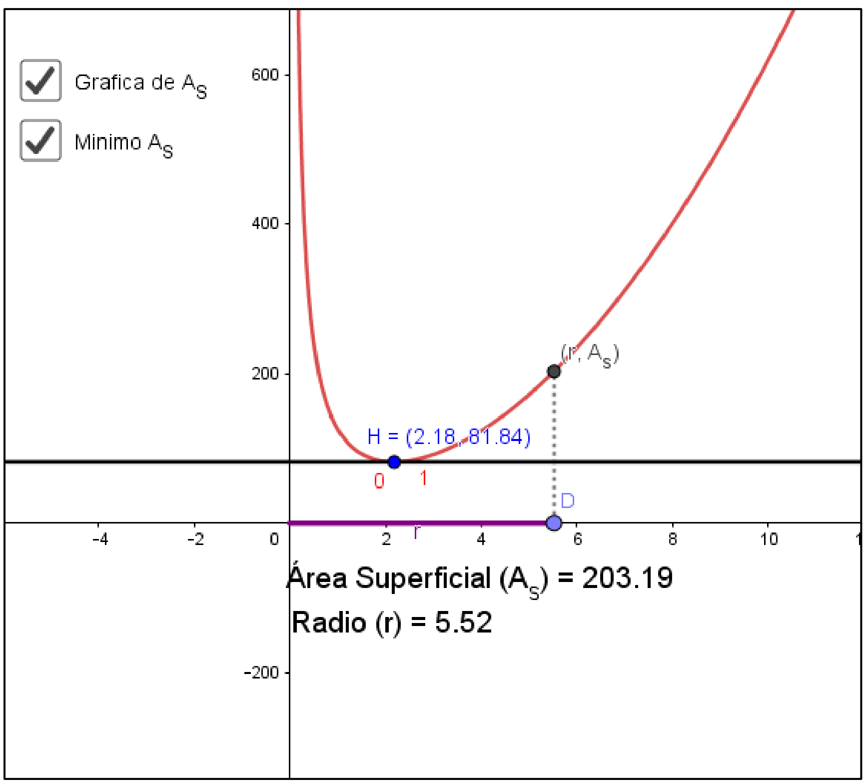
Abre el archivo Rastro A_s.ggb y anima el punto D.

a) ¿Qué representa el rastro del punto (r, As)?
b) Muestra la gráfica de As.
c) Da clic en el recuadro min As. ¿Qué representa el punto H?
d) Traza la recta tangente a la gráfica de As en el punto H.
e) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Por qué?
g) ¿Qué beneficios se obtendrían al realizar las cisternas cilíndricas de volumen *V* con una superficie mínima?
h) ¿Cómo podría este hecho el ayudar a los habitantes del municipio de difícil acceso?

En esta parte del taller se espera que los profesores noten que el rastro del punto (r, As) representa el lugar geométrico de la función As. Después de ello se les pide que muestren la gráfica de As y luego se les pide que muestren el mínimo de As, además de que tracen la recta tangente a la función As en ese punto y miren cual es la pendiente de esa recta, con el fin de que noten que la pendiente de la recta tangente a la función As en el punto mínimo es igual a cero, es decir que la derivada en el punto mínimo que alcanza la función As es cero (ver Figura 55).

Figura 55.

Representación gráfica de la recta tangente a la función A_s en el mínimo de A_s.



En el inciso g) y h) se espera que los profesores den respuestas como la siguiente: Al hallar el valor de r el cual hace que el área superficial sea mínima, ayudaría a las personas que habitan en zonas de difícil acceso a construir los tanques de tal forma que se almacenen 60000 litros de agua y se gaste la menor cantidad de material posible en su construcción, reduciendo los gastos que se tengan en la construcción de estos.

En la segunda parte del taller (ver Figura 56) se les pide a los profesores dar su opinión acerca de los recursos que se incluyeron en la actividad, además se les pregunta si utilizarían los problemas y las actividades realizadas en los talleres 4.1 y 4.2 en sus estudiantes de tutorías o si le cambiarían algo para aplicarlos. De esta parte del taller se espera que los profesores reflexionen sobre los aspectos didácticos y orquestales alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las derivadas.

Figura 56.

Parte II taller 4.2 de derivadas.

Parte II: Aspectos Didácticos

Responde las siguientes preguntas:

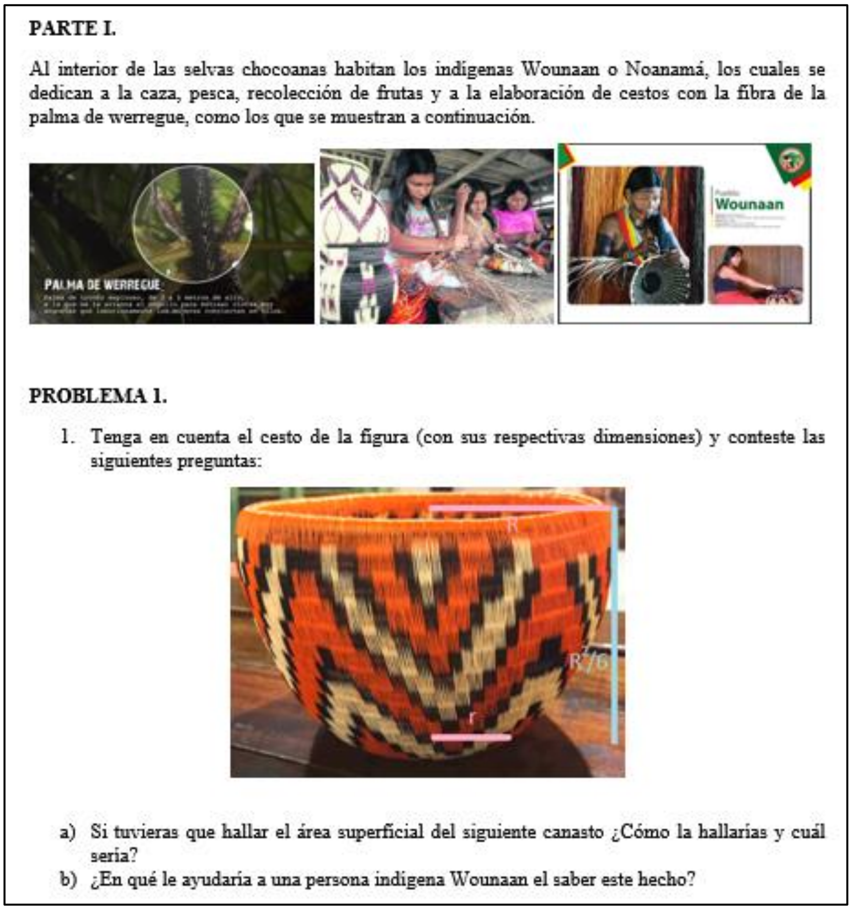
1. ¿Cuál es tu opinión sobre los recursos que se incluyeron en la actividad resuelta?
2. ¿Si quisieras implementar las actividades desarrolladas con tus estudiantes beneficiarios de las tutorías, qué ajustes le harías al planteamiento de los problemas del taller 4.1 y 4.2 de derivadas?
3. ¿En qué crees que contribuyó el uso de los recursos didácticos incluidos en la construcción del conocimiento matemático alrededor de la derivada?

3.4.6 Taller diagnóstico final.

Este taller cuenta con dos partes, en la primera parte del taller se presentan dos problemas relacionados con algunas comunidades indígenas, el primero se resuelve a través del uso de la integral (ver Figura 57) y el segundo usando derivadas, esto con el fin de que surjan reflexiones en cuanto al **pensamiento matemático** de los profesores. La segunda parte del taller es acerca de los aspectos didácticos de los objetos del cálculo diferencial, que se planteó igual que en la prueba diagnóstico inicial con el fin de evidenciar los aprendizajes obtenidos por parte de los profesores a lo largo del curso de didáctica del cálculo en tanto al **pensamiento didáctico** y al **pensamiento orquestal**. Este taller cuenta con una duración de 120 minutos.

Figura 57.

Primer problema del taller prueba diagnostico final.


PARTE I.

Al interior de las selvas chocoanas habitan los indígenas Wounaan o Noanamá, los cuales se dedican a la caza, pesca, recolección de frutas y a la elaboración de cestos con la fibra de la palma de werregue, como los que se muestran a continuación.

PROBLEMA 1.

1. Tenga en cuenta el cesto de la figura (con sus respectivas dimensiones) y conteste las siguientes preguntas:

a) Si tuvieras que hallar el área superficial del siguiente canasto ¿Cómo la hallarías y cuál sería?
b) ¿En qué le ayudaría a una persona indígena Wounaan el saber este hecho?

En el primer problema se espera que los profesores logren plantear la integral que representa el área superficial del canasto la cual sería:

$$As = 2\pi \int_0^{\frac{R^2}{6}} (\sqrt{6y} + r)\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{6y}}}\,dy$$

Esto con el fin de que logren usar sus conocimientos alrededor de la integral para dar solución al problema.

El segundo problema del taller (ver Figura 58) está relacionado con la construcción de jarrones a través de métodos artesanales en donde se pretende encontrar las medidas de un jarrón cuya área superficial es As y que tenga el mayor volumen, para esto los profesores deberán usar sus conocimientos acerca de la aplicación de la derivada (optimización).

Figura 58.

Segundo problema del taller prueba diagnostico final.

PROBLEMA 2.

La construcción de cerámica indigena es elaborada por las comunidades indigenas que han heredado saberes, tradiciones y técnicas a partir de legados de miles de años. En cuanto al proceso de fabricación en las comunidades indigenas de Colombia, se da gracias a la transformación de la arcilla que se consigue en el entorno; antiguamente solo los sabios y ancianos sabían dónde encontrarla y como tratarla.

Los hornos con los que los indigenas realizaban las quemas de sus objetos eran huecos construidos en el suelo, y "se hacian las ollas a mano, las metian en un hueco con leña y piedras y le prendian fuego, (como haciendo una fogata). Hoy en dia hay muchas comunidades que siguen trabajando con estas técnicas, entre ellas la comunidad indigena Muisca.

1. Un miembro de la comunidad indigena Muisca utiliza cierta cantidad de arcilla (tratada) para la construcción de un jarrón como se muestra en la siguiente figura. Con la cantidad de material que posee, puede construir un jarrón con área superficial A_s.

a) ¿Cómo podría obtener el mayor volumen del jarrón utilizando la misma área superficial?
b) ¿Cómo le ayudaria a una persona indigena el saber este hecho?

El primer paso que deberán realizar los profesores es encontrar una función para el volumen del jarrón de tal forma que quede en función de una variable, para ello deberán plantear la ecuación del área superficial, la cual es:

$$As = 2\pi rh + 2\pi r \qquad de\ donde \qquad h = \frac{As}{2\pi r} - 1$$

Luego reemplazamos h en la ecuación del volumen del jarrón y tenemos:

$$V = \pi r^2 h \quad \textit{de donde} \quad V = \pi r^2\left(\frac{As}{2\pi r} - 1\right) = \frac{As}{2}r - \pi r^2$$

Derivando tenemos:

$$V'(r) = \frac{As}{2} - 2\,\pi r \quad \textit{de donde} \;\; 0 = \frac{As}{2} - 2\,\pi r \quad \textit{y por ende} \;\; r = \frac{As}{4\pi}$$

Y reemplazando $r = \frac{As}{4\pi}$ $\;en\;\; h = \frac{As}{2\pi r} - 1 \;\; obtenemos\ que\;\; h = 1$

Por lo tanto, las magnitudes que hacen que el jarrón tenga el mayor volumen posible es $r = \frac{As}{4\pi}$, $h = 1$.

Este hecho les ayudaría a las personas provenientes de las comunidades indígenas ya que con la misma cantidad de material usado para la construcción de los jarrones se podrían hacer jarrones de tal modo que tengan el mayor volumen posible con esa cantidad de material, jarrones los cuales pueden ser usados para transportar agua o almacenarla, entre otras utilidades.

En la última parte del taller se espera que los profesores puedan dar a conocer los aprendizajes que han tenido a lo largo del curso en cuanto lo matemático (**pensamiento matemático**) de un tema de cálculo diferencial que ellos decidan, en lo didáctico (**pensamiento didáctico**) y en lo orquestal (**pensamiento orquestal**), ya que en esta parte los profesores tendrán que plantear una actividad de clase de cálculo diferencial, en donde tengan que enseñarle a un estudiante con características diferenciadas un tema del cálculo diferencial y para ello tendrán que tener en cuenta los recursos didácticos que utilizarían, los procesos matemáticos, la forma de evaluar y las adaptaciones curriculares que les parezcan pertinentes (ver Figura 59).

Figura 59.

Parte II prueba diagnostico final.

Parte II. Aspectos didácticos.

1. Pensemos en las personas con Necesidades Educativas Especiales.
Algunas investigaciones han permitido evidenciar que algunos de los estudiantes que ingresan a instituciones de educación superior tienen ciertas características diferenciadas. Entre las características diferenciadas, se podrían encontrar estudiantes con Asperger, discapacidad cognitiva leve, limitación visual (discapacidad visual), limitación auditiva (discapacidad auditiva) y algunos estudiantes que pertenecen a comunidades indígenas, entre otros.

Elige un tema y una Necesidad Educativa Especial, para plantear una posible actividad de clase de Cálculo Diferencial.

Tema: ____
Necesidad Educativa Especial o característica diferenciada:
____

No olvides considerar en tu planteamiento:
- Los recursos didácticos que incorporarías
- Los procesos matemáticos:
  - Representación (con y sin mediación de las tecnologías.
  - Comunicación (uso del lenguaje matemático y natural).
  - Demostración y argumentación.
  - Uso de procedimientos
- La forma de evaluar.

a) La relevancia de la comprensión y profundización del tema, en personas con la Necesidad identificada.

Este segundo acercamiento se llevó a cabo con 15 profesores que se encontraban en el segundo semestre del 2019 (2019-2), con los cuales se lograron cosificar 8 proyectos.

i. Habilidad interpretativa de un estudiante con deficiencia auditiva: una exploración al resolver ecuaciones lineales.
ii. Representaciones de un estudiante con limitación visual de tercer grado de primaria cuando resuelve problemas de variación.
iii. Problemas para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes con trastorno de déficit de atención e hiperactividad.
iv. Proceso comunicativo en matemáticas en estudiantes sordos: una experiencia de refuerzo académico sobre funciones.

v. Resolución de problemas de optimización contextualizados a la comunidad indígena Misak: posibilitando la habilidad explicativa.

vi. Comprensión del concepto de razón de cambio a partir de la contextualización de problemas para un estudiante perteneciente a la comunidad indígena Wayuú[4].

vii. Construcción del pensamiento variacional en un estudiante de cuarto primaria con síndrome de asperger.

viii. Noción de funciones lineales basadas en problemas contextualizados para estudiantes de la comunidad de san Basilio de Palenque.

Debido a las medidas tomadas por la emergencia del Covid-19, los profesores no pudieron implementar sus diseños con los estudiantes con características diferenciadas, por lo que solo dejaron el proyecto hasta su diseño. Cabe resaltar que antes de este evento la moderadora (profesora principal del curso) logró contactar algunos estudiantes admitidos por medio de las admisiones especiales ofrecidas por la UIS y les realizó algunas preguntas relacionadas con la comunidad a la que pertenecían, a lo que se encontró que algunos de esos estudiantes no están del todo inmersos en las culturas sino que son sus familiares, como sus abuelos, los que pertenecen a estas comunidades desde temprana edad y no ellos, algunos de estos siempre han vivido en zonas urbanas del país, aunque manifestaron tener dificultades para comprender los temas vistos en la clase de cálculo diferencial.

---

[4] Comunidad indígena establecida al interior de Colombia. Según la ONIC se encuentran ubicados en la guajira al norte de Colombia y al noroeste de Venezuela en el estado de Zulia. La mayoría de los Wayúu son bilingües, su idioma autóctono cuenta con dos formas: el wayuunaiki “arribero” y el “abajero”.

Un trabajo representativo en el segundo acercamiento fue el realizado por los profesores en formación que realizaron el proyecto pensando en enseñarle el tema de derivada como razón de cambio a un estudiante proveniente de la comunidad indígena Wayuu, el proceso llevado a cabo por uno de estos profesores a lo largo del curso se hará explícito al interior del capítulo 5, en donde se describirán sus aprendizajes en cuanto a la composición de su pensamiento reflexivo.

3.5 Fase 5: Selección de los casos representativos en cada implementación.

En esta fase se escogieron dos casos representativos entre los profesores que participaron en cada una de las implementaciones, un caso tomado en la primera implementación y otro tomado de la segunda implementación.

En cada implementación los profesores vivieron experiencias enriquecedoras, pero para efectos de esta investigación se tomó un caso representativo por cada implementación. Al profesor escogido en la primera implementación lo llamamos Ignacio y al profesor escogido en la segunda implementación lo llamamos Brandon.

Los criterios para la selección del primer sujeto de estudio (Ignacio), para el análisis de resultados, fueron los siguientes:

- Mostró gran interés por aprender sobre la educación inclusiva desde la primera sección del curso, enfocándose más adelante en las comunidades indígenas.
- El profesor en el primer periodo del 2019 se encontraba cursando Didáctica del Cálculo y Seminario de Práctica Pedagógica, asignaturas las cuales estaba dirigiendo la directora de esta investigación simultáneamente, lo que le permitió consolidar un buen producto.
- El profesor logró cosificar algunos de los significados negociados, en cuanto a pensamiento reflexivo, a lo largo del curso en su proyecto.

- Ignacio fue reflexivo cuando se le mencionaban algunos aspectos por mejorar al presentar los avances de su proyecto.
- El profesor logró relacionar un objeto matemático del cálculo diferencial (derivada) con la educación inclusiva realizando adaptaciones curriculares pertinentes.
- Ignacio participó en cada una de las actividades que se realizaron al interior del curso, incluyendo la realización de los talleres.
- El profesor se encontraba en sexto nivel de la licenciatura en matemáticas, con 22 años de edad y había cursado anteriormente fundamentación didáctica, didáctica de la geometría y la trigonometría, cálculo I, cálculo II, cálculo III y ecuaciones diferenciales.

Los criterios para la selección del segundo sujeto de estudio (Brandon) fueron los siguientes:

- El profesor se mostró reflexivo en cada una de las actividades realizadas al interior de curso.
- Brandon mostró gran interés en cada una de las exposiciones alrededor de los objetos matemáticos del cálculo diferencial.
- El profesor participó en cada uno de los talleres que se aplicaron en la segunda intervención.
- El profesor logró cosificar algunos significados negociados, en cuanto a su pensamiento reflexivo, al interior de la CoP en su proyecto.
- Brandon se encontraba sexto semestre de la licenciatura en matemáticas con 21 años de edad al momento de cursar didáctica del cálculo, anteriormente había cursado fundamentación didáctica, didáctica de la geometría y la trigonometría, cálculo I, cálculo II, cálculo III y ecuaciones diferenciales; y se encontraba viendo análisis matemático 1, estadística II, evaluación del aprendizaje y epistemología e historia de las matemáticas.

3.6 Fase 6: Caracterización de los significados negociados por la comunidad.

Dado que el objetivo de investigación es: *describir los aprendizajes construidos por profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas en la educación superior*, se responde teniendo en cuenta los tres componentes del pensamiento reflexivo (pensamiento variacional, el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal) del profesor, tal como lo propone el modelo “R-y-A”, mismos que se usan como categorías de análisis.

Para el análisis del proceso de negociación se recogieron datos por medio de hojas de trabajo, videograbaciones y los proyectos realizados a lo largo del curso que se consolidaron como escritos a modo de artículo. Las negociaciones que se dieron a lo largo de las sesiones de clase donde se discutían los aspectos epistemológicos y didácticos de los objetos matemáticos del cálculo diferencial consideramos que pueden verse reflejadas en el desarrollo de los talleres al igual que en las actividades realizadas en los proyectos, por lo que los significados negociados en estas sesiones no se hacen explícitos en este documento.

La negociación de significados alcanzado por los casos representativos de cada implementación será descritos en los capítulos 4 y 5. La Negociación de significados alcanzados por Ignacio serán descritos en el capítulo 4 y los significados negociados por Brandon serán descritos en el capítulo 5. Los aprendizajes alcanzados por los dos casos representativos serán descritos en el capítulo 6 a modo de conclusión para responder al objetivo de la investigación.

4 Resultados del primer acercamiento.

En este apartado se discuten los significados negociados por Ignacio, el caso representativo del primer acercamiento en términos de su pensamiento reflexivo: pensamiento variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal.

4.1 Proceso de Negociación de significados de Ignacio a través de los talleres.

En la primera implementación se tomó como caso representativo al profesor Ignacio, quien se destacó por lograr una participación plena al interior de la CoP. El profesor fue muy receptivo y participativo en cada una de las actividades que se realizaron en la CoP. Además, logró cosificar en su proyecto algunos de los significados negociados en los talleres.

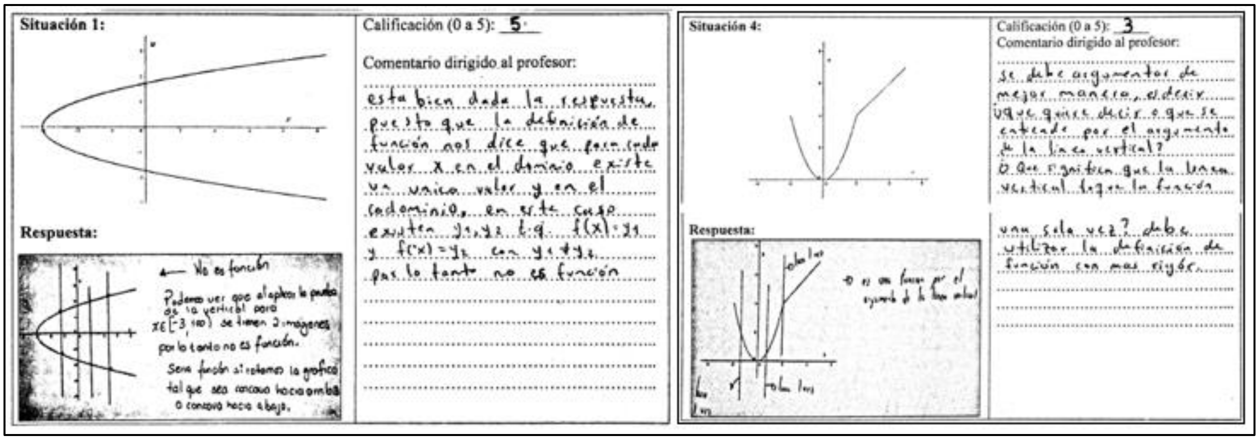
En este apartado mostraremos los significados negociados por Ignacio en cada uno de los talleres implementados en el primer acercamiento (2019-1) que se muestran en el apartado 3.2.

4.1.1 Negociación de significados alcanzados en el taller prueba diagnóstico inicial.

En cuanto al taller de la prueba diagnóstica inicial 3.2.1, Ignacio asignó mayor calificación a la respuesta de la situación 1 cuya argumentación estaba centrada en la prueba de la recta vertical para determinar si la gráfica representa una función. Él justificó la nota que asignó de acuerdo con la definición que él tenía de función (ver Figura 60). Cabe resaltar que el profesor en su justificación asume que las abscisas de la gráfica corresponden al dominio de la función y, las ordenadas representan el codominio (imagen o rango) de esa función. Esa idea está reportada por Even (1993) quien menciona que, al presentar una gráfica del plano cartesiano a los profesores de matemáticas, ellos tienden a asumir los valores que toma la gráfica en el eje x como el dominio de la función y los valores que toma la gráfica en el eje y como el rango de una función.

Figura 60.

Calificación asignada por Ignacio a la situación 1 y 4 de la prueba diagnóstica inicial.

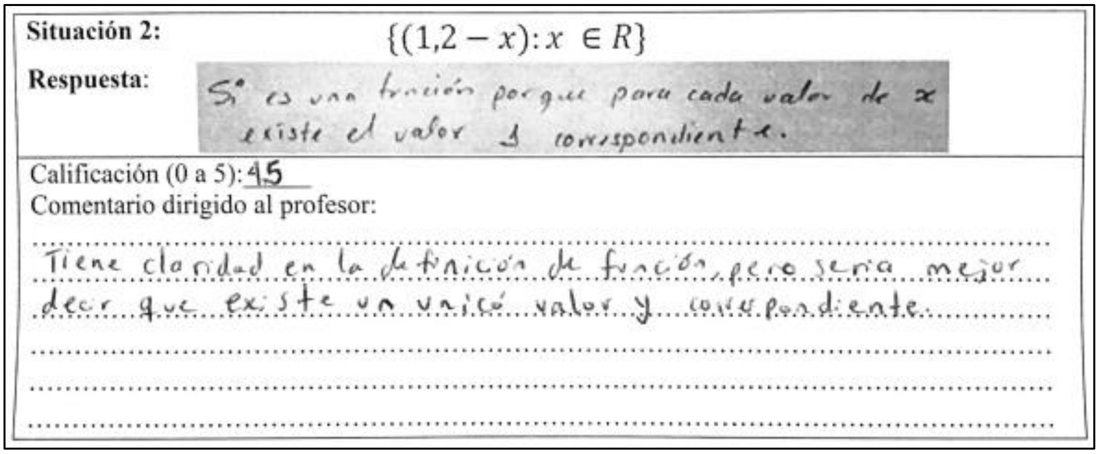


En la situación 4, Ignacio asigna una menor nota y menciona que no es suficiente el uso de la recta vertical para determinar si una gráfica corresponde a la de una función. Él afirma que para ello se debe recurrir a la definición formal de función para garantizar que la gráfica efectivamente representa una función (ver Figura 60). Al respecto, Quintero (2019) de quien se retomó el instrumento diagnóstico, menciona que los profesores no se cuestionan si las gráficas de la situación 1 y 4 podrían ser funciones, asumiendo el dominio como los valores que toman las gráficas en el eje ye (y) y como rango los valores que toman las funciones en el eje equis (x).

En la situación 2, Ignacio asigna una calificación alta y menciona que tiene claridad sobre la definición de función, por lo que con esta respuesta Ignacio está de acuerdo en que el conjunto de parejas ordenadas descritas en la situación 2 es una función (ver Figura 61).

Figura 61.

Respuesta de Ignacio a la situación 2.



Situación 2: $\{(1,2-x): x \in R\}$

Respuesta: Si es una función porque para cada valor de x existe el valor y correspondiente.

Calificación (0 a 5): 4,5

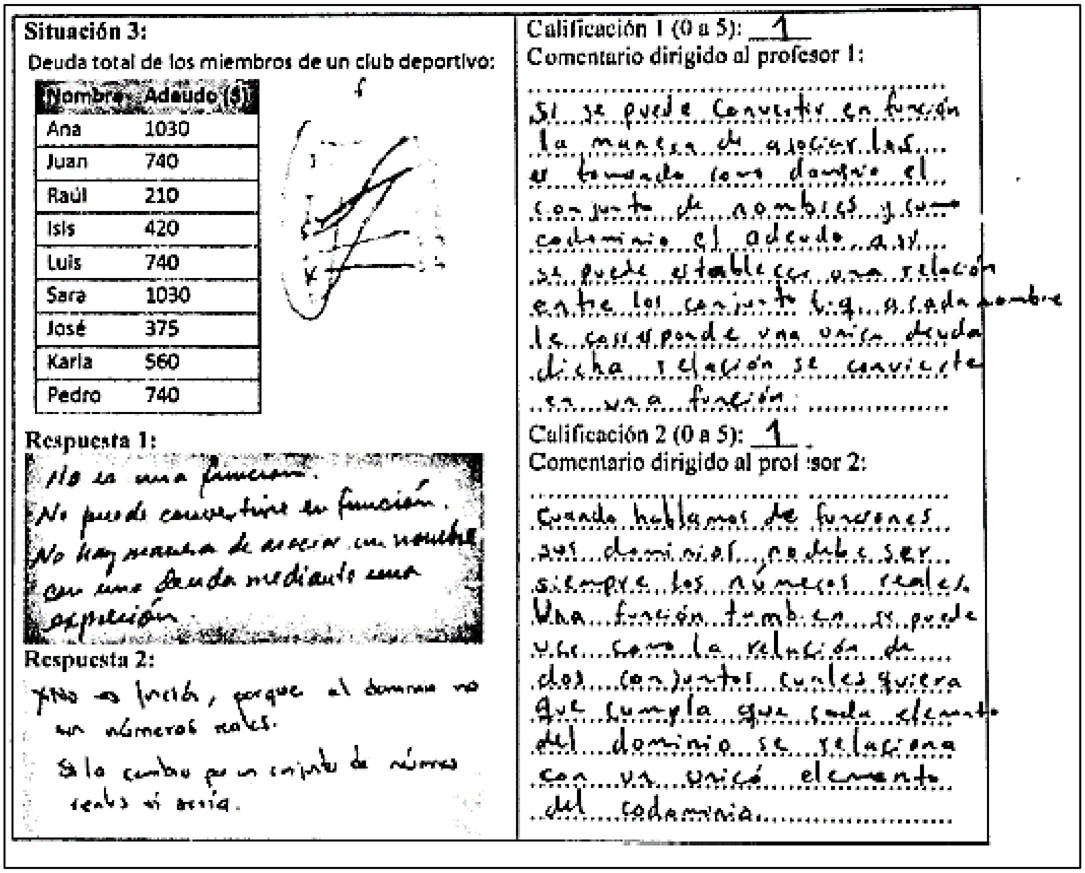
Comentario dirigido al profesor:

Tiene claridad en la definición de función, pero sería mejor decir que existe un unicó valor y correspondiente.

Respecto a las respuestas ofrecidas en la situación 3, Ignacio les asigna una calificación baja (ver Figura 62), en relación a la respuesta 1, él expone que la relación de la situación 3 podría ser función si se toma el conjunto de los nombres como el dominio de la función y como codominio el adeudo, de esta forma no contradeciría la definición de función. Respecto a la respuesta 2, Ignacio hace referencia a que una función no necesariamente debe tener como dominio o rango un subconjunto de los números reales, es decir, que una relación para ser función no necesariamente tenga que ir de los reales a los reales.

Figura 62.

Calificación asignada por Ignacio a la situación 3 de la prueba diagnóstico inicial.



Situación 3:

Deuda total de los miembros de un club deportivo:

Nombre	Adeudo ($)
Ana	1030
Juan	740
Raúl	210
Isis	420
Luis	740
Sara	1030
José	375
Karla	560
Pedro	740

Respuesta 1:

No es una funcion.
No puede convertirse en función.
No hay manera de asociar un nombre con una deuda mediante una expresión.

Respuesta 2:

No es función, porque el dominio no son números reales.
Si lo cambio por un conjunto de números reales sí sería.

Calificación 1 (0 a 5): 1

Comentario dirigido al profesor 1:

Si se puede convertir en función la manera de asociar las es tomando como dominio el conjunto de nombres y como codominio el adeudo así se puede establecer una relación entre los conjuntos t.q. a cada nombre le corresponde una única deuda dicha relación se convierte en una función.

Calificación 2 (0 a 5): 1

Comentario dirigido al profesor 2:

Cuando hablamos de funciones sus dominios no deben ser siempre los números reales. Una función también se puede ver como la relación de dos conjuntos cualesquiera que cumpla que cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento del codominio.

En la segunda parte del taller los profesores en formación tenían que representar la definición de función dada por Sandra, Gabriela, Paola y Andrés, además de manifestar si estaban o no de acuerdo con estas (ver Figura 63).

Figura 63.

Segunda parte del taller prueba diagnóstico inicial.

2. Se presentan las respuestas a la pregunta "¿Qué es una función?" de cuatro profesores de matemáticas:

Sandra	Es una relación entre dos conjuntos en que a cada elemento de un conjunto pertenece uno y sólo un elemento del otro conjunto.
Gabriela	Una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.
Paola	Una función es una relación de un conjunto llamado dominio que se relaciona con el contradominio, la condición es que para un valor del dominio no puede ir a dos elementos del contradominio.
Andrés	Es una relación que existe entre dos variables, una de ellas cambiará en relación a la otra.

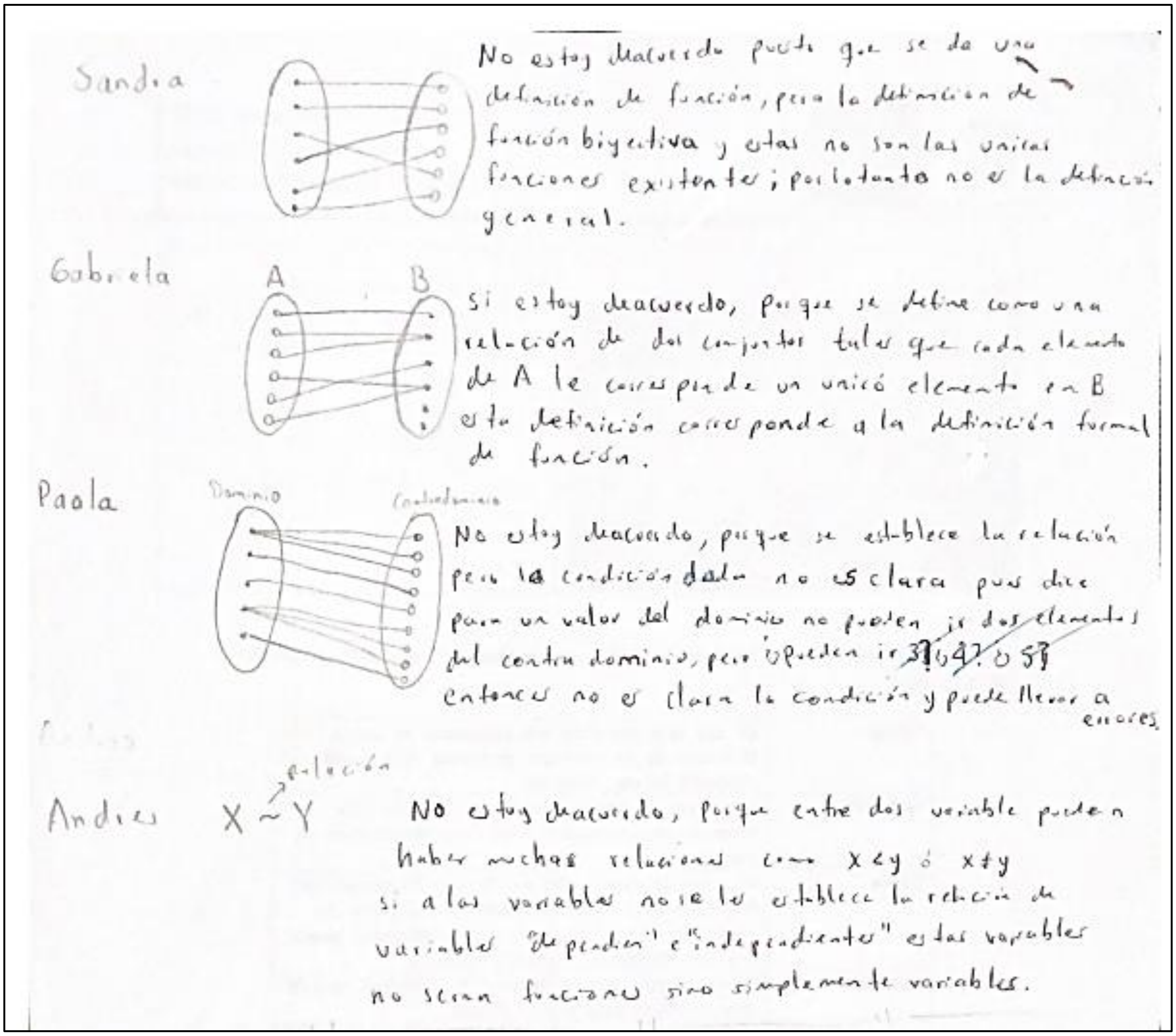
a. Representa con un ejemplo cada una de las definiciones dadas por los profesores.
b. ¿Estás o no de acuerdo con cada una de las definiciones? Justifica tu respuesta.

En esta parte del taller Ignacio ilustró gráficamente mediante relaciones entre conjuntos las definiciones de función dadas por los profesores: Sandra, Gabriela, Paola y Andrés, (ver Figura 64).

Respecto a la definición ofrecida por Sandra, Ignacio manifiesta no estar de acuerdo debido a que menciona la definición de función biyectiva pero no abarca los demás tipos de funciones, así que no podría ser una definición general de función. Al igual que con Sandra, Ignacio manifiesta no estar de acuerdo con la definición de función ofrecida por Paola ya que no es clara y puede llevar a errores. Ignacio tampoco estuvo de acuerdo con la definición ofrecida por Andrés ya que al no aclarar el tipo de relación entre las variables y al no establecer cuál es la variable independiente y dependiente, la relación entre estas no podría llegar a ser una función. Con la respuesta que sí estuvo de acuerdo Ignacio fue con la de Gabriela ya que para él esta respuesta representa la definición formal de función tal y como se puede evidenciar en la Figura 64

Figura 64.

Respuesta de Ignacio al segundo ítem del taller PDI.

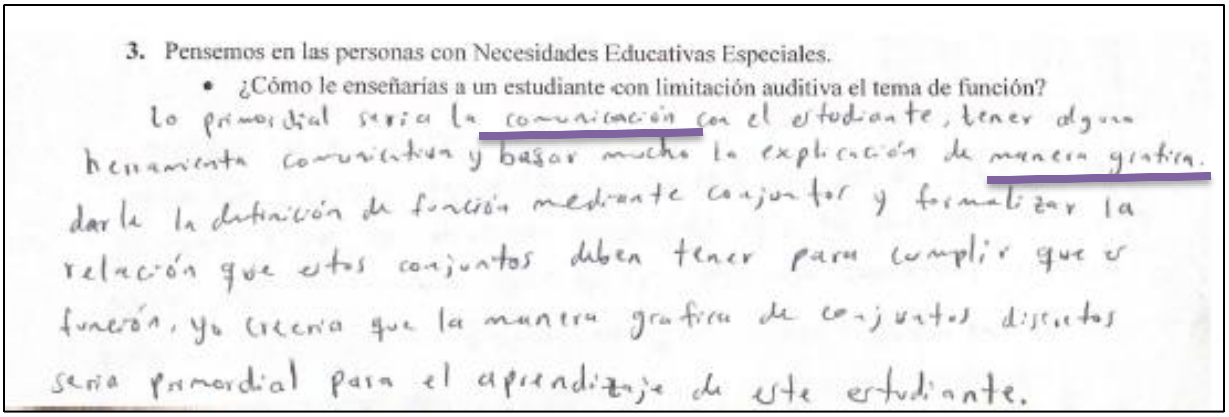


Las respuestas dadas por Ignacio en el primer y segundo ítem del taller nos permiten evidenciar que el profesor posee una afinidad por la definición conjuntista de función la cual Zill y Wright (2011, p.2), la definen así “una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en X exactamente un elemento y en Y”.

En cuanto al tercer ítem del taller, Ignacio menciona la importancia de la representación gráfica de la función (ver Figura 65) que de acuerdo con Hitt (2003) entre mayor cantidad de representaciones posea un estudiante alrededor de la función mayor será su comprensión. Además, Ignacio menciona que al momento de enseñarle a un estudiante con limitación auditiva el tema de función debe de existir un uso adecuado de la comunicación, la cual según el MEN (1998) es un proceso general de aprendizaje que conlleva y hace parte de la actividad matemática.

Figura 65.

Respuesta de Ignacio al inciso 3 de la prueba diagnóstico inicial.



3. Pensemos en las personas con Necesidades Educativas Especiales.
   - ¿Cómo le enseñarías a un estudiante con limitación auditiva el tema de función?

Lo primordial sería la comunicación con el estudiante, tener alguna herramienta comunicativa y basar mucho la explicación de manera grafica. darle la definición de función mediante conjuntos y formalizar la relación que estos conjuntos deben tener para cumplir que es función, yo creería que la manera grafica de conjuntos discretos sería primordial para el aprendizaje de este estudiante.

Además, en esta parte del taller el profesor Ignacio también resalta la importancia del uso de ejemplos de función a través de la relación entre conjuntos, al igual que del uso de herramientas comunicativas (ver Figura 66).

Figura 66.

Respuesta de Ignacio a la última parte de la prueba diagnóstico inicial.

lo primordial seria la comunicación con el estudiante, tener alguna herramienta comunicativa y basar mucho la explicación de manera grafica. darle la definición de función mediante conjuntos y formalizar la relación que estos conjuntos deben tener para cumplir que es función, yo creeria que la manera grafica de conjuntos discretos seria primordial para el aprendizaje de este estudiante.

4.1.2 Negociación de significados alcanzados en el taller de variación.

En el taller de variación presentado en el apartado 3.2.2 al igual que en el taller de la prueba diagnóstico inicial se les indicó a los profesores que debían calificar las respuestas a un problema por parte de unos profesores de matemáticas (Laura, Paola, Gerardo e Isabel).

El problema presentado en el taller a los profesores es el que se muestra en la Figura 67.

Figura 67.

Situación y preguntas de la primera parte del taller de variación.

ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de $6.5cm$, $\overline{BC}$ mide $4cm$. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga la mínima área posible?

Teniendo en cuenta las respuestas, a la situación planteada, que se presentan a continuación:

1. Asigna una calificación de 0 a 5 a cada una de las respuestas y explica el porqué de tu calificación.
2. ¿Qué noción de correspondencia crees que tenía cada uno? ¿por qué?
3. ¿En alguna respuesta se usó el concepto de función? ¿por qué?

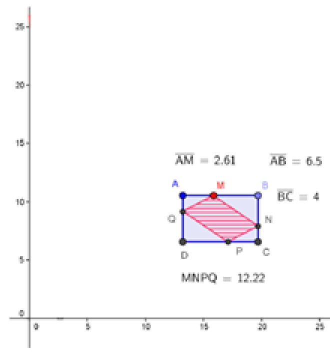
En la Figura 68 se presenta la respuesta de Laura:

Figura 68.

Respuesta de Laura.

Respuesta de Laura.

Observé los valores de la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ que se obtenían cuando el punto M se movía sobre el segmento $\overline{AB}$. En la representación geométrica en GeoGebra observé que cuando la longitud del segmento AM crece, el área del cuadrilátero MNPQ disminuye hasta llegar a un punto (mínimo) en el que él área comienza a aumentar. Ubiqué de manera aproximada el punto mínimo en la representación geométrica y encontré que la longitud del segmento $\overline{AM}$ está entre $2.61, 2.62\ y\ 2.63cm$ y el área aproximada de MNPQ es $12{,}22cm^2$. Adicional, en la hoja de cálculo registré valores de la relación entre la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ y comprobé sus valores mínimos.



Hoja de Cálculo

	A	B
1	x(S)	y(S)
2	2.01	12.98
3	2.11	12.75
4	2.21	12.57
5	2.31	12.42
6	2.41	12.31
7	2.51	12.25
8	2.61	12.22
9	2.71	12.23
10	2.81	12.29
11	2.91	12.38
12	3.01	12.51
13	3.11	12.69
14	3.21	12.9
15	3.31	13.15
16	3.41	13.44
17		

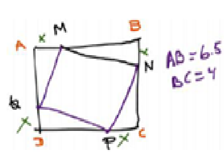
Calificación:

En la Figura 69 se presenta la respuesta de Paola:

Figura 69.

Respuesta de Paola.

Respuesta de Paola.



Vamos a sacar las expresiones algebraicas de los lados del cuadrilátero QMPN.

Sea QP=MN=$\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}$; utilizando el teorema de Pitágoras ya que son triángulos rectángulos por construcción.

$PN = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = QM.$

$$\rightarrow \text{el área del cuadrilátero } MNPQ = PN.MN$$

$$\rightarrow \square MNPQ = \left(\sqrt{x^2+(4-x)^2}\right)\left(\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{(x^2+16-2x+x^2)(42.25-(3x+x^2+x^2)}$$

$$= \sqrt{(2x^2-2x+14)(2x^2-13x+42.25)}$$

Calificación:

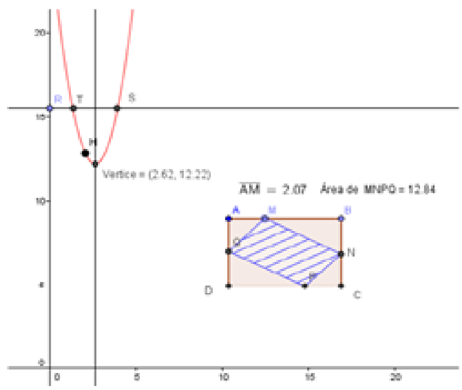
En la Figura 70 se muestra la respuesta de Gerardo:

Figura 70.

Respuesta de Gerardo.

Respuesta de Gerardo.

En GeoGebra realicé la representación geométrica y en una hoja de cálculo registré los valores del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ a medida que se movía el punto M. Al realizar el gráfico de estos valores identifiqué que se trataba de una parábola. Posteriormente, tracé una perpendicular al eje vertical que intersecaba la parábola en dos puntos, luego tracé la mediatriz de esos dos puntos y en su intersección con la parábola ubiqué el vértice con coordenadas (2.66,12.22).



Calificación:

En la Figura 71 se muestra la respuesta de Isabela:

Figura 71.

Respuesta de Isabela.

Respuesta de Isabel.

Área de los 4 triángulos rectángulo

$$= x(4-x)+(6.5-x)(x)$$
$$= 4x - x^2 + 6.5x - x^2$$
$$= 10.5 - 2x^2$$

Ahora el área del rectángulo $ABCD = 4(6.5) = 26cm^2$

∴ El área del cuadrilátero $= 26 - (10.5x - 2x^2)$

$= 26 - 10.5x + 2x^2$(restamos el área de los 4triangulos rectángulos al área total)

$= 2x^2 - 10.5x + 26$(Expresión para el área del cuadrilátero MNPQ

$$f(x) = 2x^2 - 10.5x + 26$$

Dado que es una parábola que abre hacia arriba, el vértice es el punto mínimo.

$$\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10.5)}{2(2)} = \frac{10.5}{4} = 2.625$$
$$\rightarrow f\left(\frac{10.5}{4}\right) = 2(2.625)^2 - 10.5(2.625) + 26$$
$$\rightarrow f(2.625) = 12.21875$$

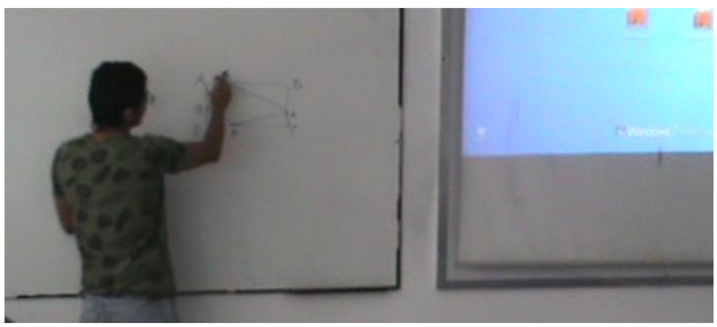
∴Por lo tanto el área mínima de MNPQ es 12.21875 cuando $AM = 2.625$

Calificación:

Inicialmente los profesores se enfrentaron individualmente al problema. Luego al momento de socializar un profesor de la CoP (a quien llamaremos P1), intentó representar gráficamente en el tablero la situación problema presentada en este taller, como se ve en la Figura 72. Este actuar esta reportado por Meléndez (2021) quien establece que al momento de aproximarse a los fenómenos donde están inmersos los conceptos de cambio y variación, los profesores en formación optan por realizar inicialmente un análisis cuantitativo para más adelante determinar las magnitudes variantes e invariantes del problema y así poder determinar la dependencia entre ellas para modelar el fenómeno por medio de una función.

Figura 72.

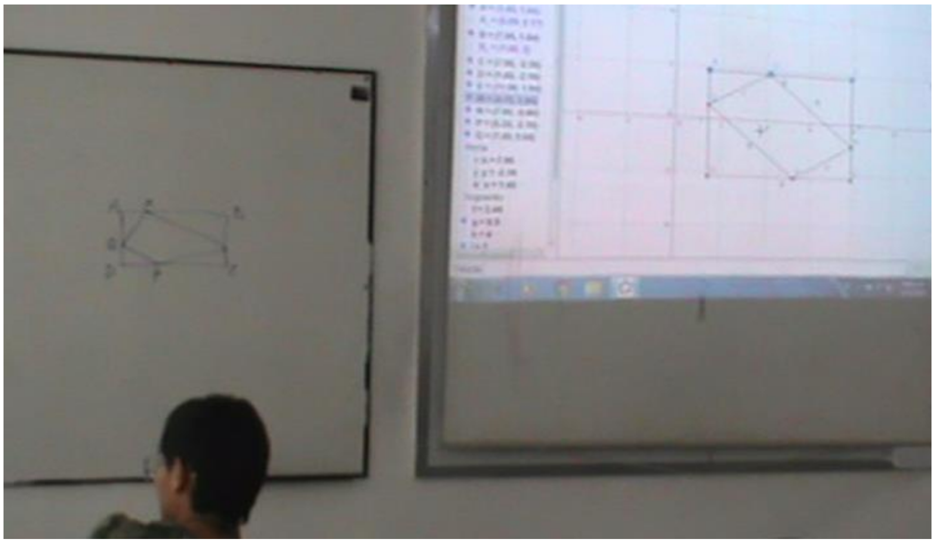
Representación del problema del taller de variación por parte del profesor P1.



Al momento de pasar al tablero, el moderador le mencionó al profesor P1 que podía usar GeoGebra, pero él no quiso usar el software debido a las limitantes que tenía en el manejo de esa herramienta. Ignacio al ver que P1 se sentía inseguro de usar el software decidió pasar y ser él quien recreara el problema en GeoGebra (ver Figura 73).

Figura 73.

Problema del taller de variación representado en GeoGebra por Ignacio.



En este ejercicio Ignacio usó el software Geogebra como auxiliar para obtener información, y así modelar el problema por medio de una función. Al respecto, Meléndez (2021) categoriza este actuar como una de las actuaciones que realizan los estudiantes (profesores en formación) al resolver problemas relacionados con la variación y el uso de variables en diversos ámbitos.

A la respuesta de Laura la mayoría de los profesores le asignaron una nota mayor a 4.5, esto debido a que valoraron positivamente el uso del software dinámico GeoGebra para llegar a la respuesta del problema; como se evidencia en el Episodio 1.

> **P1**: A Laura yo le puse 4.5 porque ella a través del programa [se refería al software] usó la herramienta para saber dónde debería ir M y pues me parece bastante acertada entre 6.1 y 6.3; y no le coloque el 5.0 porque sería para una respuesta más exacta.
>
> **Moderadora**: ¿Quién no está de acuerdo con lo que dice P1? ¿A todos les pareció correcta?
>
> **P2**: Si

Ignacio: yo no le puse una nota así muy alta, yo le puse 3.5 porque en realidad lo que ella hizo fue solo mover el punto y ver donde era que se veía más pequeña el área, más no pudo asimilar que fuera el punto medio o alguna otra cosa más exacta.

P2: Ella tuvo que utilizar la hoja de cálculo para analizar el problema.

Ignacio: Pero la hoja de cálculo la hace GeoGebra no ella.

P3: Pero igual ella tiene que saber hacer ciertas cosas para que cumpla las propiedades (refiriéndose a la construcción en GeoGebra del problema). Por ejemplo, nosotros haciéndolo estábamos enredados y a ella le quedó bien al hacerlo, pues yo valoré eso, que usó eso y allí demostró lo que quería.

P2: Además sabía lo que le estaban preguntando a diferencia de la chica 2 (refiriéndose a la respuesta de Paola) que se fue por medio de los triángulos rectángulos y no llegó a nada.

Ignacio: ahí en la hoja no decía que ellos lo construyeron.

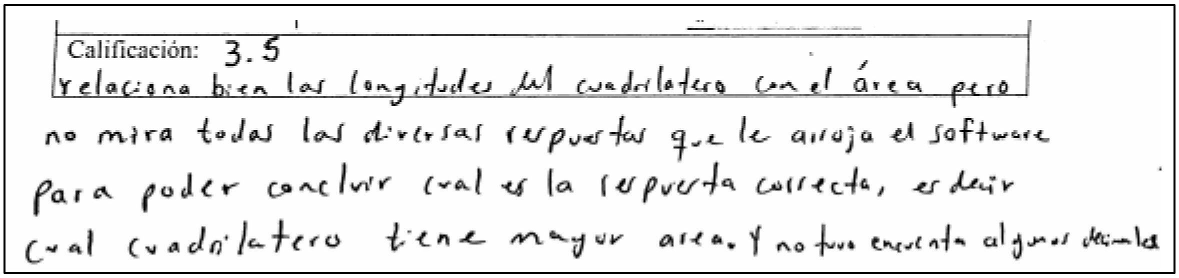
P3: No, pero si se los hubieran dado (refiriéndose a la construcción del problema en GeoGebra) todos lo hubieran respondido eso (refiriéndose a la respuesta de Laura).

Episodio 1

A diferencia de los demás profesores Ignacio le asignó una nota no tan alta debido a que asumió que la construcción realizada en GeoGebra que se mostraba en la respuesta de Laura no la había realizado ella. Él escribió en su hoja de trabajo lo expuesto en el Episodio 1, afirmando que Laura no tuvo en cuenta algunos decimales (ver Figura 74) y que debió usar más decimales en la hoja de cálculo para darle mayor fundamento a su respuesta.

Figura 74.

Calificación asignada por Ignacio a la respuesta de Laura.


Calificación: 3.5
relaciona bien las longitudes del cuadrilatero con el área pero no mira todas las diversas respuestas que le arroja el software para poder concluir cual es la respuesta correcta, es decir cual cuadrilatero tiene mayor area. Y no tuvo encuenta algunos decimales

En cuanto a la respuesta de Paola la mayoría de los profesores le asignaron notas bajas debido a que no llegó a una respuesta concisa, y aunque utilizó herramientas matemáticas no tuvo un entendimiento del problema, cómo se ve en el Episodio 2.

Moderadora: ¿Qué pensó P4 de lo que dijo Paola?

P4: yo le puse 2.0, por qué me parece que no llegó a ninguna respuesta, y el procedimiento que usó no le ayudó.

P2: yo le puse 3.0, por qué ella quiso sacar el área de los triangulo rectángulos, pasó de las letras a la expresión algebraica, pero a la vez no tuvo en cuenta lo que le estaban preguntando.

Moderadora: ¿Qué opina P3 de la evaluación de P2?

P3: Yo estoy de acuerdo con P2, porque Paola no llegó a nada.

Moderadora: ¿Y si no llegó a nada por qué 3.0? ¿Cómo les pareció el ejercicio de ponernos a evaluar?

Ignacio: Yo me sentí como muy drástico porque creo todos le ponen 3.0 y yo le puse 1.0.

P5: por mi parte yo valoro el hecho de que trate de buscar una expresión para el área, yo califiqué 3.0.

Episodio 2

Este escenario permitió un espacio de reflexión sobre la forma de evaluar, ya que al ser profesores en formación pocas veces se habían enfrentado a una situación hipotética en donde tuvieran que hacerlo. En este caso se enfocó la discusión en la evaluación formativa y la evaluación sumativa, evidencia de esto se muestra en el Episodio 3.

Moderadora: ¿P1 A ti como te pareció evaluar? ¿Fácil? ¿Difícil?

P1: yo pienso que uno no debería ir colocando notas sino más bien ir viendo como la base, ir evaluando de diferentes maneras. En la clase le puedo hacer una pregunta e ir mirando si sabe o no… puedo ir haciendo exámenes y ya se tienen evidencias del que sabe, e ir mirando si progresa, sin nota.

Moderadora: Que interesante esa propuesta ¿Qué dice P3?

P3: Pues para mí sería complicado porque no me acordaría de todos los estudiantes, y pues para ir valorando sería muy complicado.

P1: Quizás por los nervios muchos estudiantes no responden en un examen, y pues uno cómo va a sacar una nota sí ellos estaban llenos de nervios, ¿cómo sé si realmente no saben?, puede que si sepan, entonces uno podría ir mirando de diferentes maneras: una pregunta, una entrevista.

Moderadora: Que propuesta tan interesante, pero ¿qué tal si nos toca evaluar cinco grupos de décimo grado y en cada hay cuarenta estudiantes?

Ignacio: yo lo viví en geometría euclidiana, el profesor nos daba un trabajo para los exámenes, pero al momento de sustentarlo lo hacía por medio de preguntas, en lo personal me sentía mejor que estando bajo la presión de un parcial.

Moderadora: Interesante, esas propuestas ya están documentadas, están clasificadas dentro de lo que los teóricos llaman evaluación formativa, el tipo de evaluación que se basa en poner una nota se llama sumativa, se basa en ir colocando una serie de notas y al final ver si lo que acumuló es suficiente para que apruebe o no. Ambas evaluaciones tienen unos pros y unos contras, la sumativa es viable cuando hay grupos grandes y la formativa aunque es la ideal no es posible que se haga con grupos muy grandes, ya que habría que ir viendo los progresos de cada alumno clase por clase.

Episodio 3

En cuanto a la respuesta de Gerardo los profesores le asignaron una calificación de tres en adelante, debido a que les pareció interesante, pues presentó una representación gráfica del problema a través de una parábola. Lo que se puede evidenciar en el Episodio 4.

Moderadora: ¿Qué opinaron de la respuesta de Gerardo?

P3: yo le puse 3.0 porque al igual que Laura usó GeoGebra y vió que en el vértice de la parábola iba a estar el área mínima, y pues yo no lo había pensado así, y le puse esa nota porque no llegó a la respuesta (refiriéndose a que no dio un valor numérico más aproximado para M).

Moderadora: ¿A ver Ignacio tu qué pusiste?

Ignacio: Gerardo interpreta la tabla de datos que está acá y digamos que él usando GeoGebra pudo graficar la función cuadrática que describía el comportamiento del área del cuadrilátero, y más aún pudo encontrar el vértice que en este caso es el menor valor, la menor área que toma el cuadrilátero. Yo le puse 4.5 debido a que es una aproximación cercana, pero faltaron algunos decimales.

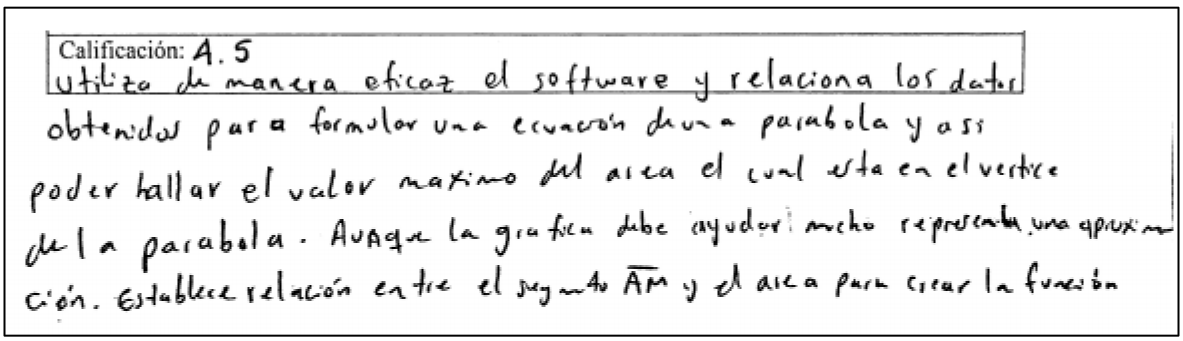
Episodio 4

Tanto en el Episodio 4 como en lo escrito por Ignacio en su hoja de trabajo (ver Figura 75) se puede apreciar que él le da importancia a la representación gráfica de la función para abordar el problema; que en concordancia con Ronau et al. (2014), la representación gráfica de la función es clave para evidenciar propiedades de está.

Sin embargo, no le da importancia a la falta de un procedimiento algebraico para llegar a la solución, sino que hace una inferencia de los datos que le aportó la gráfica, logrando identificar que el área mínima se encuentra en el vértice de la parábola. Además, en este caso a diferencia de la respuesta de Laura, Ignacio le da importancia al uso de GeoGebra para apoyar y sustentar las respuestas.

Figura 75.

Calificación de Ignacio a la respuesta de Gerardo.


Calificación: 4.5
utiliza de manera eficaz el software y relaciona los datos
obtenidos para formular una ecuación de una parabola y asi
poder hallar el valor maximo del area el cual esta en el vertice
de la parabola. Aunque la grafica debe ayudar mucho representa una aproxima
ción. Establece relación entre el segmento $\overline{AM}$ y el area para crear la función

En cuanto a la pregunta 4, sobre ¿cómo le enseñarías este problema a un estudiante con características diferenciadas? Los profesores respondieron lo descrito en el Episodio 5.

Ignacio: trataría de comprender que el entorno de ellos es diferente que el de los estudiantes de la ciudad, trataría de conocer sus dificultades y poder ayudarlo en su conocimiento, que pueda desarrollar herramientas para que puedan desarrollar el problema.

P1: independiente de donde vengan, los estudiantes tienen dificultades, trataría de ayudarlos desde lo matemático, pero no habría ninguna distinción. Como una persona que tiene dificultades en el cálculo, no noto la diferencia que venga de un lado o de otro.

Moderadora: Distinto fuera para ti ¿si fuera invidente, no oyente?

P1: pues yo creo que sí, sí habría que tratar ese tema…

Moderadora: ¿tú crees que allí no habría que tratar las adaptaciones curriculares sino más bien lo socioafectivo?

P1: sí, sí.

P2: Recuerda P1, el ejemplo de la profesora de seminario sobre el estudiante que proviene de municipio de difícil acceso, que al momento de evaluar era necesario conocer las condiciones del estudiante.

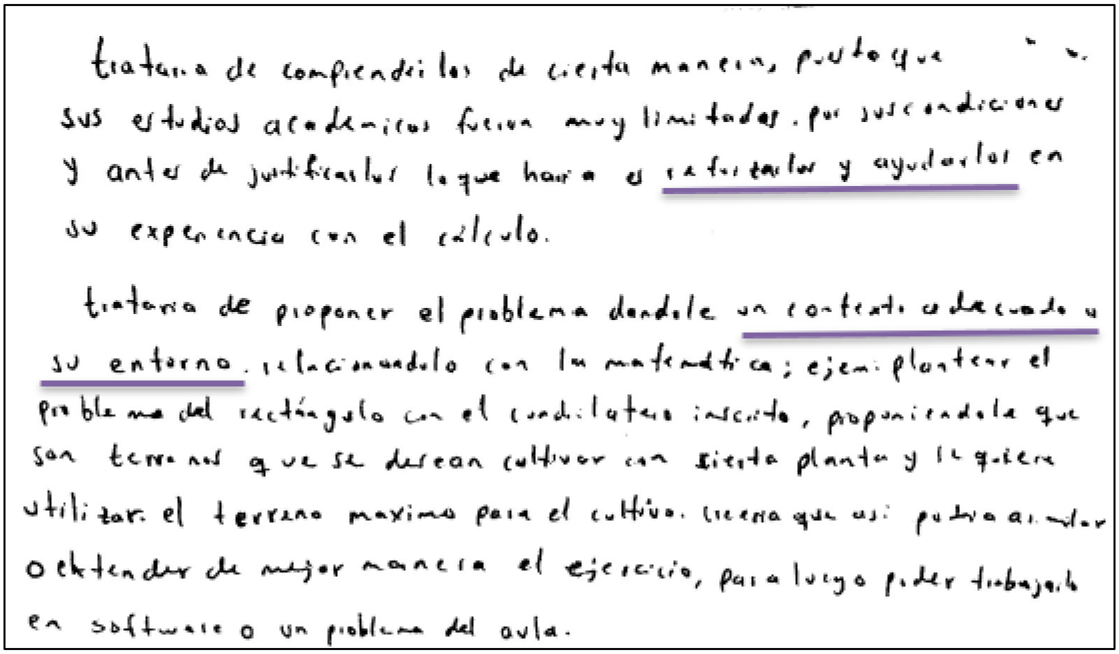
Episodio 5

En el Episodio 5, se puede apreciar que tanto Ignacio como la profesora P2 tienen en cuenta tanto el entorno como las condiciones de los estudiantes para abordar tanto la enseñanza como la evaluación de los estudiantes con características diferenciadas. Esta idea está en concordancia con lo que plantea Thales (2003) quien resalta la necesidad de que los profesores comprendan a sus alumnos, confíen en ellos y sean cautelosos al momento de elegir y usar estrategias pedagógicas y de evaluación.

Evidencia de lo anteriormente mencionado se encuentra también plasmado en la hoja de trabajo de Ignacio, quien menciona que para enseñar el problema del taller a un estudiante con características diferenciadas lo primero que haría sería reforzar sus conocimientos previos y posteriormente darle un contexto al problema relacionado con el entorno del estudiante (ver Figura 76).

Figura 76.

Respuesta de Ignacio al cuarto inciso del taller de variación.


trataria de comprenderlos de cierta manera, puesto que
sus estudios academicos fueron muy limitados. por sus condiciones
y antes de justificarlos lo que haria es reforzarlos y ayudarlos en
su experiencia con el cálculo.

trataria de proponer el problema dandole un contexto adecuado a
su entorno. relacionandolo con la matemática; ejem: plantear el
problema del rectángulo con el cuadrilatero inscrito, proponiendole que
son terrenos que se desean cultivar con cierta planta y se quiere
utilizar el terreno maximo para el cultivo. creeria que así podria ayudar
o entender de mejor manera el ejercicio, para luego poder trabajarlo
en software o un problema del aula.

De lo anterior podemos evidenciar que Ignacio valora positivamente el reforzar las bases de sus estudiantes para enseñar en consecuencia; esta idea está reportada por Pineda (2018) quien menciona que al momento de trabajar con estudiantes con necesidades educativas especiales hay que realizar actividades para reforzar, ejercitar y/o recordar un concepto.

Además, también se pudo notar que Ignacio valora positivamente el uso del contexto para favorecer la enseñanza de la variación en estudiantes con características diferenciadas, idea que concuerda con lo que establece el MEN (1998, p.18) quien menciona que “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista”.

Además de dar importancia al uso de problemas del contexto, Ignacio también menciona la utilidad del uso de software de geometría dinámica para enseñar la noción de variación a un estudiante con características diferenciadas (Ver Figura 77).

Figura 77.

Respuesta de Ignacio a la última parte del taller de variación.

> trataría de proponer el problema dandole un contexto adecuado a su entorno. relacionandolo con la matemática; ejem: plantear el problema del rectángulo con el cuadrilatero inscrito, proponiendole que son terrenos que se desean cultivar con cierta planta y se quiere utilizar el terreno maximo para el cultivo. creería que así podría asimilar o entender de mejor manera el ejercicio, para luego poder trabajarlo en software o un problema del aula.

Al respecto, Dick y Hollebrands (2011) resaltan la importancia de promover el uso de tecnologías digitales como recursos que permitan a los estudiantes analizar las condiciones del problema para posteriormente generar una estrategia que conlleve a la solución de este.

4.1.3 Negociación de significados alcanzados en el taller de función.

En el taller de funciones 3.2.3, se les presentó inicialmente el problema que se muestra en la Figura 78.

Figura 78.

Problema I taller Función.

PARTE I:

1. Para sustentar su economía, los indígenas realizan tejidos artesanales; además de dedicarse a cultivos tales como el maíz.

   En Colombia el aumento del costo de los productos de la canasta familiar, incluido el maíz, está relacionado con el índice de precios al consumidor (IPC), el cual es un porcentaje que determina el aumento o disminución de estos productos.
   A continuación, se muestra una tabla con la variación anual del IPC en los últimos años, según el DANE.

AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	$725.9
2019	3,31%	

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál será el precio del Maíz en el 2020 si el IPC es de 3,62%?
c) Halle una expresión algebraica que relacione el IPC (%) y el Precio de Maíz (kg) en el 2020.
d) ¿Cómo crees que pueda ayudar a las comunidades indígenas conocer el IPC anualmente?

Los profesores inicialmente abordaron el primer problema del taller de forma individual y luego se abrió un espacio para discutir sobre el problema. A continuación, se muestran sus respuestas en el Episodio 6.

P1: al principio yo estaba perdido, lo primero que hice fue buscar esa relación lineal, por más que leía el enunciado no encontraba la relación allí, no fue hasta cuando el moderador nos preguntó el valor del maíz cuando el IPC era cero, ahí le encontré el sentido lo que hice fue: 725.9 lo multiplique por 3,31, y lo dividí en 100 y a este valor le sume 725.9 esto me iba a dar el precio del maíz en el 2019.

Moderador: ¿Alguien lo hizo de otra forma? ¿O llegó a un resultado diferente?

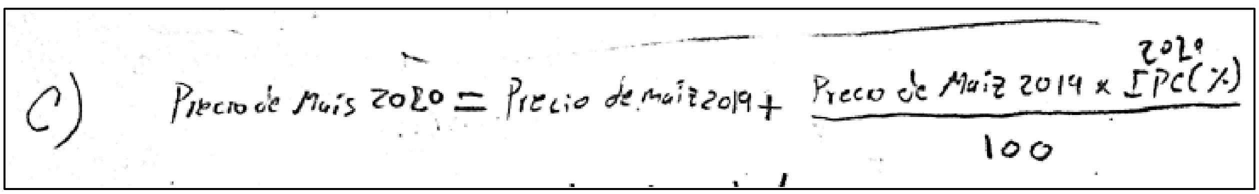
P6: Para llegar al precio del maíz en 2016, yo hice lo siguiente: ya teníamos dos datos, el IPC en el 2016 que era 5.57% y el precio del maíz en el año 2017 que era 700, para hallar el precio del maíz en el 2016 multiplique x por 5.57%, le sume x y eso lo igualé a 700, luego despejé y me dio 663,06.

Episodio 6

En el Episodio 6 se puede evidenciar que el profesor P1 logró encontrar el valor de IPC en el año 2019, y usó este resultado para encontrar una expresión que representara la interdependencia entre el precio del maíz en el 2020 y el IPC de ese año, tal y como se ve en la Figura 79.

Figura 79.

Respuesta del profesor P1 al inciso c del taller de funciones.

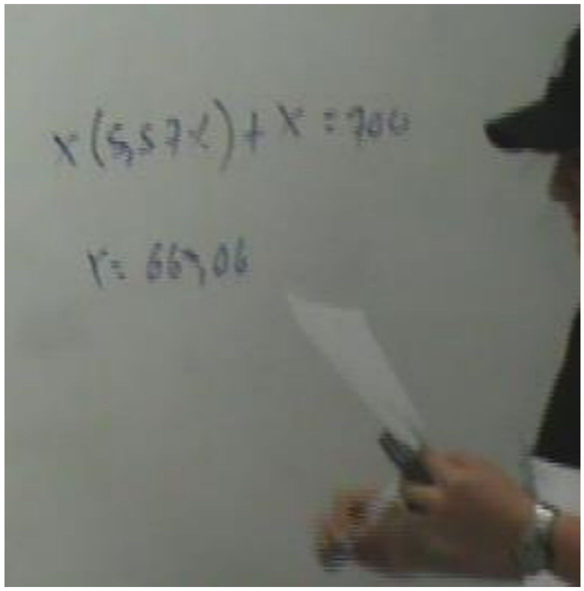

c) Precio de Maís 2020 = Precio de maíz 2019 + $\dfrac{\text{Precio de Maíz 2019} \times \text{IPC}(\%)^{2020}}{100}$

En esta parte se pudo evidenciar que tal y como lo señala Meléndez (2021), el profesor mediante la generalización de los procesos aritméticos empleados, logró representar las relaciones por medio del uso de la variable algebraica; es decir, logró el planteamiento de una expresión algebraica de la función que representara la interdependencia entre el precio del maíz y el IPC a través de la generalización de cálculos aritméticos.

En cuanto al profesor P6, no tuvo en cuenta que el IPC que debía usar para encontrar el precio del maíz en el 2016 era el del año 2017 y no el del 2016 como se ve en la Figura 80.

Figura 80.

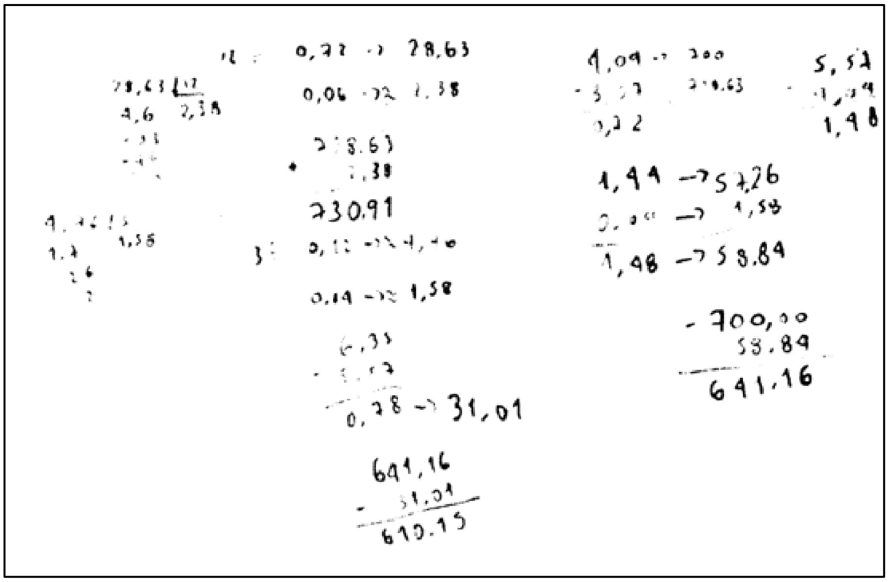
Respuesta del profesor P6 a la primera parte del taller de funciones.



Con el desarrollo de la primera parte del taller de funciones (3.2.3), se esperaba que los profesores lograran modelar la situación por medio de una función lineal. Al respecto, Ignacio presentó dificultades para encontrar la función que representaba la interdependencia entre el IPC (anual) y el precio del maíz (kg). Él intentó llegar a la solución a partir de cálculos aritméticos, pero no logró hacerlo (ver Figura 81) a diferencia del profesor P1 quien sí logró modelar esta situación problema.

Figura 81.

Respuesta de Ignacio al primer problema del taller de funciones.



Como lo señala Meléndez (2021) entre las dificultades que se presentan al trabajar con fenómenos físicos y resolver problemas relacionados con la variación y el concepto de función, se encuentra el hecho de que los estudiantes (profesores en formación) no lograban determinar el tipo de comportamiento de las variables implicadas en los fenómenos de cambio; en otras palabras, no lograban identificar la dependencia entre la variable dependiente e independiente en la situación problema.

Además de lo mencionado por Meléndez, La dificultad que enfrentó Ignacio pudo estar relacionada con la forma en que se abordaban los problemas de funciones cuando él era estudiante del curso de Cálculo Diferencial, que estuvo centrado en procedimientos algebraicos en los que no se usó la modelación de situaciones problema; tal y cómo lo expresó Ignacio en la segunda sección del curso (ver Tabla 2) que se ve reflejado en el Episodio 7.

Ignacio: Cuando ingresé a la universidad fue un poco duro ya que el profesor pedía mucha autonomía de nosotros los estudiantes para estudiar los temas de la clase y todo, entonces fue duro cambiar del colegio a las clases de universidad donde se debía estudiar antes de entrar a las clases y la idea de las clases era llegar y preguntar las dudas, entonces muchas veces quedaban vacíos sobre los temas y más sin embargo el cálculo diferencial lo estudié mucho, me gustó, lo intenté hasta el final pero no me alcanzó la nota para aprobar este curso, al siguiente semestre me tocó con el mismo profesor así que la experiencia del curso anterior me ayudó para aprobar el curso.

Moderador: ¿consideras que los cursos de cálculo diferencial que tuviste estuvieron centrados en los procedimientos algebraicos?

Ignacio: En realidad sí

Episodio 7

Cómo lo menciona Ignacio los cursos de cálculo diferencial que cursó estuvieron centrados en lo algebraico, y tal y como lo señala Artigue (1995) en estos cursos se le da predominio al registro algebraico; por lo que al enfrentarse a problemas en donde no se trabaja de entrada con expresiones algebraicas algunos estudiantes presentan dificultades para modelar situaciones problema y por ende llegar a la solución de estos.

En el segundo problema del taller (ver Figura 82) los profesores trabajaron en grupos y se esperaba que lograran modelar la situación por medio de una transformación de una función exponencial.

Figura 82.

Segundo problema del taller de función.

2. Según datos suministrados por el DANE en 2005, de los 42'090,502 colombianos, 1'378.884 pertenecen a distintas comunidades indígenas, con presencia en 27 departamentos del país. La organización Nacional Indígena de Colombia (ONIC) asevera que cientos de pueblos indígenas están en riesgo de desaparecer, no sólo por el conflicto armado en el país, sino, además, porque sus habitantes mueren de hambre, enfermedades y la indiferencia. Se estima que el promedio de decrecimiento de la población es del 1.2% anual aproximadamente.

a) ¿Cuántos habitantes de las comunidades indígenas existirán finalizando el presente año? ¿En 2021? ¿En 2050? Explica tus respuestas.
b) Halla la función que representa la interdependencia entre el año y la población indígena. Justifica tu respuesta.

Para el segundo problema del taller, el moderador pidió a los profesores que pasaran al tablero a mostrar lo que habían hecho en sus hojas de trabajo. A lo que la profesora P5 accedió a pasar al tablero y mencionó lo descrito en el Episodio 8.

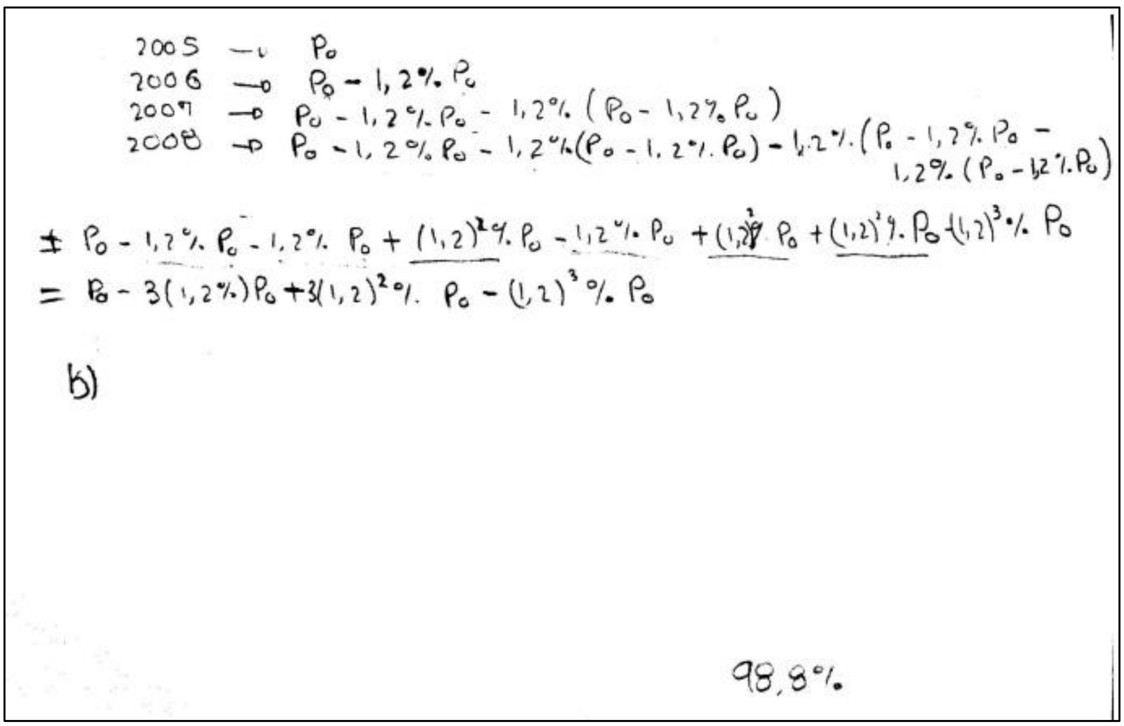
> **P5**: Voy a tomar la población inicial (Po) sin tomar la cifra (refiriéndose a 1'378.884), nosotros iniciamos sacando la función, porque o sino para hallar la población en 2021 y en 2050, como se necesitaba la población del año anterior tendríamos que sacar la población en los años anteriores. Hicimos la prueba para algunos casos para ver cómo se relacionaban. Para el 2005 había una población inicial (Po), para el 2006 quedaría el 98,8% de la población inicial (Po) para el siguiente año quedaría 0,988 de la población anterior. Entonces en conclusión hallamos que para el año n, la relación sería 0,988 a la n-2005 de Po. Listo, ahí está la función y reemplazando los años que nos pedían al principio (2021 y 2050) encontramos la población en esos años.
>
> **Ignacio**: Nosotros llegamos a lo mismo, pero dimos más vueltas, si encontramos la relación, pero nosotros la escribimos como un polinomio.

Episodio 8

Dado lo descrito en el Episodio 8, se puede evidenciar que la profesora P5 logró identificar las variantes e invariantes de la situación y la dependencia entre ellas, encontrando la función que representaba la interdependencia entre la población y el año. En la hoja de trabajo la profesora realizó el proceso para los cuatro primeros años (ver Figura 83) y a partir de su proceso logró cosificar en el tablero la expresión algebraica que modelaba la situación.

Figura 83.

Respuesta de la profesora P5 al segundo problema del taller de función.



$2005 \rightarrow P_o$

$2006 \rightarrow P_o - 1{,}2\%\, P_o$

$2007 \rightarrow P_o - 1{,}2\%\, P_o - 1{,}2\% \,(P_o - 1{,}2\%\, P_o)$

$2008 \rightarrow P_o - 1{,}2\%\, P_o - 1{,}2\%(P_o - 1{,}2\%\, P_o) - 1{,}2\%\,(P_o - 1{,}2\%\, P_o - 1{,}2\%\,(P_o - 1{,}2\%\, P_o))$

$= P_o - 1{,}2\%\, P_o - 1{,}2\%\, P_o + \underline{(1{,}2)^2\%\, P_o} - 1{,}2\%\, P_o + \underline{(1{,}2)^2 P_o} + \underline{(1{,}2)^2\%\, P_o} - (1{,}2)^3\%\, P_o$

$= P_o - 3(1{,}2\%) P_o + 3(1{,}2)^2\%\, P_o - (1{,}2)^3\%\, P_o$

b)

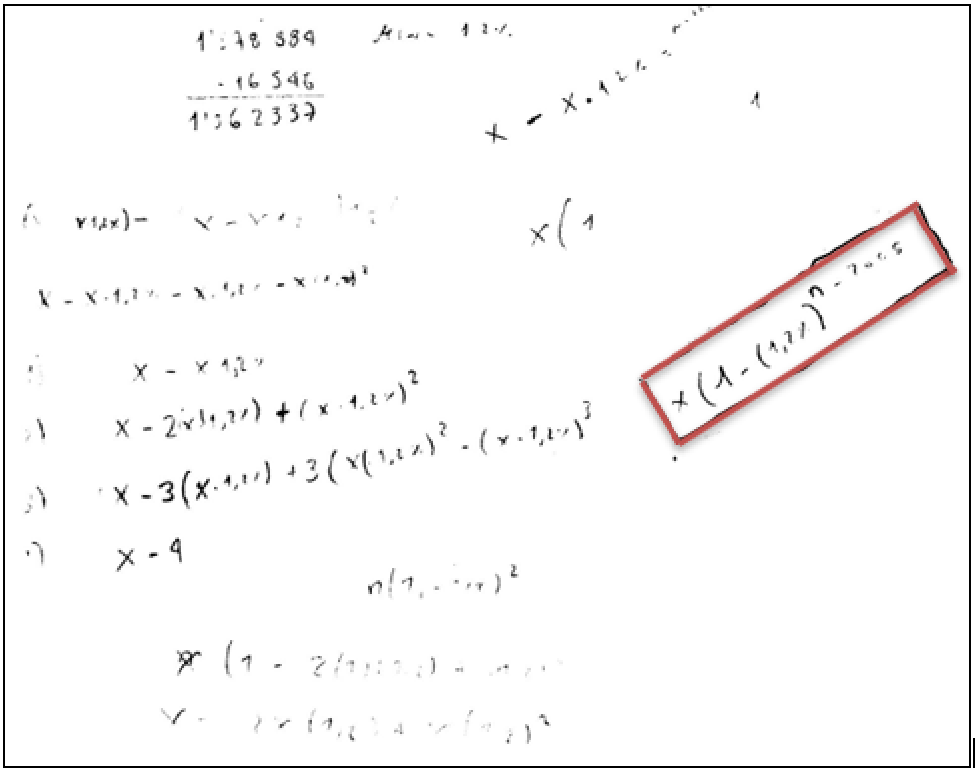
98,8%

En este problema Ignacio presentó inicialmente dificultades (como lo menciona en el Episodio 8) para encontrar la función que representaba la interdependencia entre el año y la población indígena, al final logró encontrarla (ver Figura 84) en donde la “X” representa la población indígena en el año 2005 y la “n” representa el año. La respuesta dada por el profesor

Ignacio ($X(1-1.2)^{n-2005}$) deja ver que él logró modelar la situación por medio de una transformación de una función exponencial.

Figura 84.

Respuesta dada por Ignacio al segundo problema del taller de funciones.



Cómo lo menciona Meléndez (2021), el modelar una función relacionada con la variación exponencial representa para los estudiantes mayor dificultad, ya que existe una tendencia a la linealidad por parte de ellos, que en ocasiones no les permite encontrar una generalización que lleve a modelar el fenómeno adecuadamente.

A pesar de que en este taller el profesor Ignacio modeló la situación de la segunda parte del taller por medio de una transformación de una función exponencial, no logró encontrar la función lineal que modelaba la primera situación problema del taller, debido a la forma poco habitual en la que se le presentó el problema relacionado con la función lineal, ya que anteriormente no había tenido acercamientos a estos tipos de problemas.

El profesor Ignacio menciona que, para enseñarles el tema de función a un estudiante proveniente de una comunidad indígena tendría en cuenta los siguientes aspectos: los conocimientos previos de los estudiantes, construir el concepto de función y contextualizar los problemas alrededor del entorno de los estudiantes indígenas. Además, para evaluar el conocimiento de sus estudiantes lo haría por medio de clasificar cuales ejemplos son funciones y cuales no (ver Figura 85).

Figura 85.

Respuesta de Ignacio a la segunda parte del taller de funciones.

Objetivo: Introducir el concepto de función

Desarrollo: Se empezara la clase con un saludo muy cordial y una sonrisa grande para empezar con alegria la clase primeramente se preguntara si conocen algo sobre que es una función para saber que concepciones manejan y teniendolas en cuenta formalizar el concepto; tambien se realizaran unas preguntas que tengan en cuenta el concepto de función por ejemplo si en el salon tenemos n sillas. ¿Cuanto es el maximo de alumnos que pueden haber sentados en el salon? ¿porqué ese número? para afianzar la asignacion unívoca de los elementos de una función. Este mismo ejemplo se puede contextualizar teniendo en cuenta la población, es decir si los estudiantes son de alguna comunidad indigena se podria contextualizar para que sea mas familiar para ellos.

Luego de las reflexiones que puedan surgir con las respuestas a las preguntas planteadas, se formalizara el concepto dando la definición formal y contextualizandola para una mayor comprensión.

Como adaptación curricular dejaria a un lado tanta formalidad de definiciones e intentaria con ellos construir estos conceptos y luego decirles, esto que acabamos de construir o hacer es la definición de lo que es una función.

Como recursos se podria usar juegos de figuras u objetos en los cuales ellos vean la relación unívoca de dos conjuntos y así obtener la definición de función.

Por ultimo como evaluación se pondrian diversos ejemplos de funciones y se les preguntaria si podrian clasificarlos como las que son función y las que no lo son.

En esta parte se evidencia que el profesor en formación reflexionó sobre las adaptaciones curriculares y la forma de evaluar el concepto de función a un estudiante indígena. Estas ideas concuerdan con las de Parada (2019) quien establece que es imperante realizar adaptaciones curriculares y pensar en la forma de evaluar al momento de enseñar a estudiantes con necesidades educativas especiales.

En afinidad con lo mencionado por Ignacio acerca de la contextualización de los problemas, el MEN (1998) menciona que para propiciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, se requiere hacer uso de la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, así como el uso de la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, hacer uso de la función y sus diferentes formas de representación, entre otros.

Además de lo mencionado anteriormente, en la última parte de este taller Ignacio también resalta la importancia de tener en cuenta el contexto al momento de diseñar problemas para acerca el concepto de función a los estudiantes con características diferenciadas (ver Figura 86).

Figura 86.

Respuesta de Ignacio a la última parte del taller de funciones.

si en el salon tenemos n sillas. ¿Cuanto es el maximo de alumnos que pueden haber sentados en el salon? ¿porqué ese número? para afianzar la asignacion unívoca de los elementos de una función. Este mismo ejemplo se puede contextualizar teniendo en cuenta la población, es decir si los estudiantes son de alguna comunida indigena se podra contextualizar para que sea mas familiar para ellos.

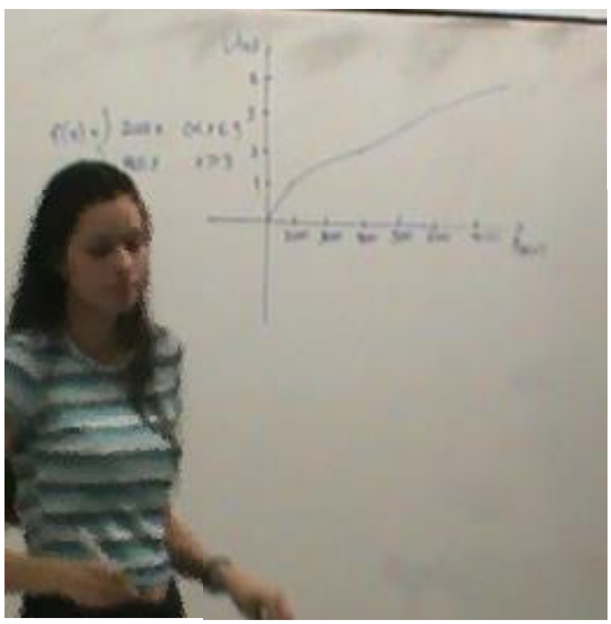
La idea expresada en la Figura 86, posee afinidad con lo que menciona Meléndez (2021) quien establece que la incorporación de fenómenos físicos es adecuada ya que permite una aproximación a los conceptos matemáticos desde cuestiones familiares para los estudiantes.

4.1.4 Negociación de significados alcanzados en el taller de límites.

Al socializar la primera parte del taller de límites, la profesora P3 optó por pasar al tablero a mostrar la representación gráfica y algebraica de la función que para ella modelaba la primera situación problema expuesta en este taller (3.2.4). A pesar de que la representación algebraica que ella había hecho era correcta no coincidía con la representación gráfica, ya que al momento de graficar la función ella tomó la variable independiente como si fuera la variable dependiente (ver Figura 87). Es decir, ella no logró articular la representación gráfica y analítica de la función, en términos de Hitt (2003).

Figura 87.

Representación de P3 al primer problema del taller de límites.



Evidencia de lo anterior se puede ver en el Episodio 9.

Moderador: P3 mira la gráfica de la función ¿cuál es tu variable independiente?

P3: ¡ay sí! Me equivoqué lo puse al revés.

Moderador: ¿Alguien lo hizo de otra forma?

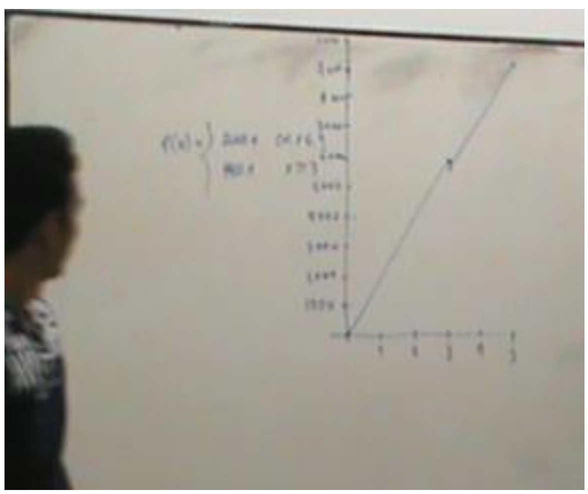
Ignacio: yo definí la función primero (refiriéndose a la representación algebraica) y luego la grafiqué como dos rectas y me di cuenta que en el eje x si iba aumentando de a 1, en el eje y iba aumentando 2000.

Episodio 9

A lo que el profesor Ignacio pasó al tablero y cambió la gráfica de la función realizada por P3 e hizo una representación gráfica adecuada de la función que representaba la interdependencia entre las dos variables inmersas en el problema (ver Figura 88).

Figura 88.

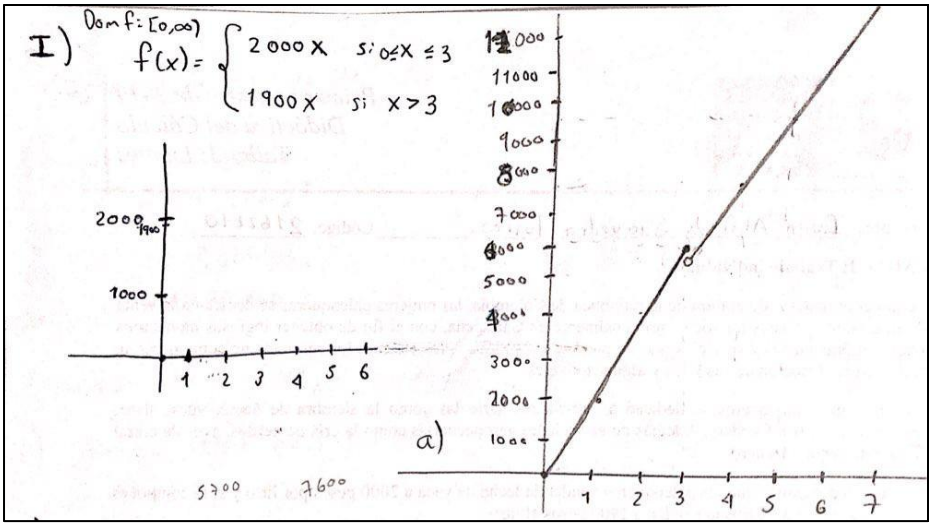
Respuesta de Ignacio al primer problema del taller de límites.



Al igual que en el tablero, en su hoja de trabajo el profesor Ignacio logró representar y articular adecuadamente la representación gráfica y algebraica de la interdependencia entre el precio de la leche y la cantidad en litros a través de una función por partes (ver Figura 89). Allí se evidenció que el profesor logró identificar las variantes e invariantes y la dependencia entre ellas para modelar la situación por medio de una función por partes compuestas de funciones lineales, contrario a lo evidenciado en el taller de funciones.

Figura 89.

Gráfica realizada por Ignacio para representar el primer problema del taller de límites.



Al respecto, Hitt (2003) menciona la importancia de lograr representar y articular las diferentes representaciones (registros) de los objetos matemáticos para lograr una mayor comprensión de este. Y Fiallo y Parada (2018) mencionan la importancia que los profesores logren identificar las variantes e invariantes de una situación, establecer correctamente la interdependencia de las magnitudes variables y finalmente modelar las situaciones de cambio por medio de funciones, gráficas y tablas.

Siguiendo las ideas de Meléndez (2021) se puede afirmar que en este caso Ignacio logró evolucionar su grado de abstracción de la idea de cambio para dar significado al concepto de función, ya que siguió el conjunto de actuaciones que este autor menciona que se deben seguir para dicho fin, entre estas actuaciones se encuentran: el análisis cualitativo con el cual identifica características del fenómeno de cambio, detección de magnitudes variantes e invariantes, la relación de dependencia entre ellas y la generalización de la variable aritmética para el planteamiento de una función que modele el fenómeno.

En el inciso “d” de la primera parte de este taller los profesores en formación reflexionaron sobre los conceptos de aproximación y tendencia, tal y como se evidencia en el Episodio 10.

Moderador: ¿Qué respondieron en el inciso d?

P6: sí se aproxima a tres litros, pero es menor el valor de la leche tiende a 5800.

Moderador: ¿Qué conceptos están inmersos en este problema?

Ignacio: límites laterales, proximidad y tendencia.

Moderador: ¿te refieres a la aproximación?

Ignacio: Si, profe.

Episodio 10

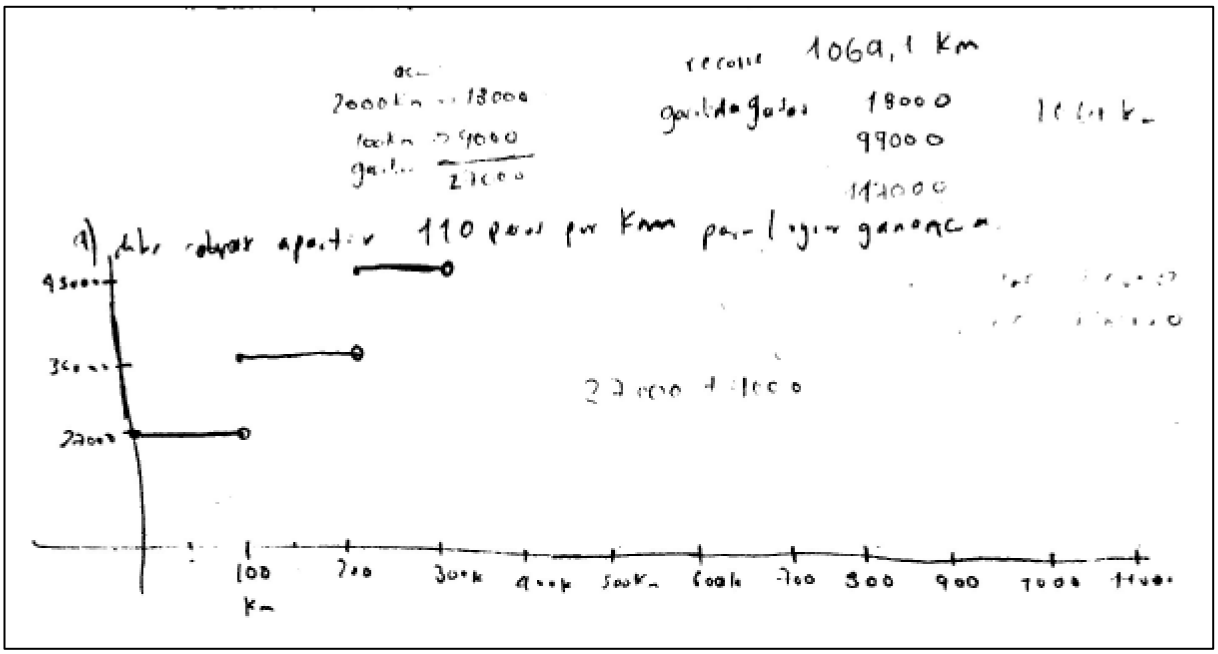
En el Episodio 10 se puede notar que Ignacio identifica conceptos como aproximación y tendencia inmersos en las situaciones problema relacionadas con el concepto de límites. Conceptos que según Fiallo y Parada (2018) son importantes ya que al trabajar con problemas relacionados con estos conceptos se llega a los conceptos de límite y derivadas. Blazques y Ortega (2002) los definen de la siguiente manera:

> **Aproximación**: Una variable que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores.
>
> **Tendencia**: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable.

A diferencia del primer problema, en el segundo problema el profesor Ignacio tuvo dificultades para encontrar la función que modelaba la interdependencia entre los gastos vs los kilómetros recorridos, aunque intentó representar la situación por medio de la gráfica de una función parte entera con ayuda de cálculos aritméticos, cometió algunos errores tanto en el dominio como en el rango por lo que no logró encontrar una función que modelara la situación (ver Figura 90).

Figura 90.

Gráfica realizada por Ignacio para representar el segundo problema del taller de límites.



Respecto a la dificultad presentada por Ignacio al no encontrar una función que modelara la situación, según Meléndez (2021) radica en el hecho de que los alumnos no entienden correctamente dicho fenómeno al no encontrar los conceptos matemáticos que le ayudarán a modelar el fenómeno.

A diferencia de Ignacio, la profesora P5 si logró encontrar la respuesta a este problema tal y como se evidencia en el Episodio 11.

Moderador: ¿Cuál fue su respuesta?

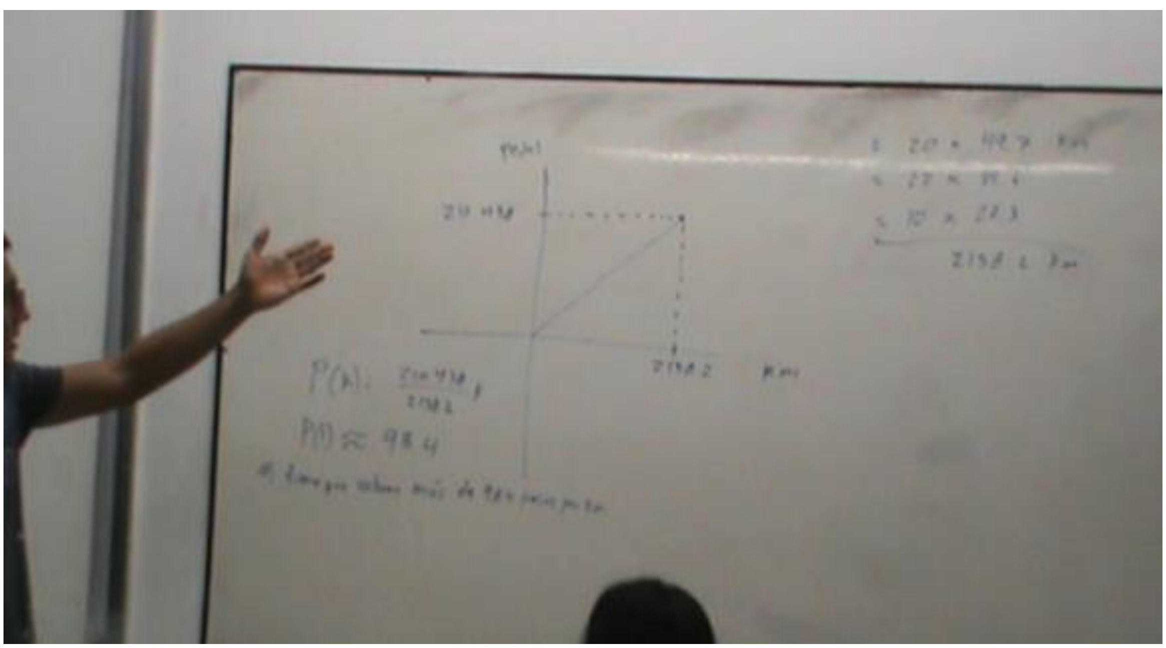
P5: Lo que hicimos fue sumar la cantidad de todos los kilómetros que gastaba en la semana y hallar el valor de la gasolina por kilómetro, sumarle eso, y además por semana le sumamos los 18 mil del aceite y entonces todo ese valor lo dividimos por kilómetros y así obtuvimos que el gasto por kilómetro era de 98,4 pesos. Así para que tuviera ganancias tendría que cobrar más de eso.

Episodio 11

El profesor P1 (quien trabajó en esta parte del taller con la profesora P5) pasó y representó en el tablero la función que modelaba la situación de manera gráfica y algebraica, respondiendo al inciso a y b de la segunda parte del taller (ver Figura 91).

Figura 91.

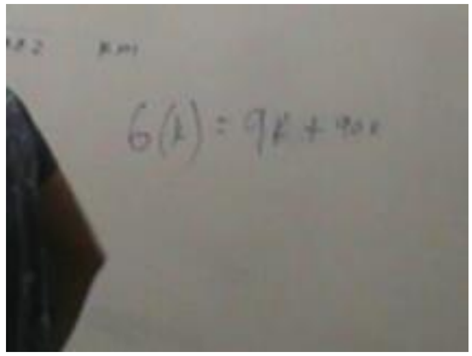
Respuesta de P1 al segundo problema del taller de límites.



Además, el profesor P1 también logró encontrar de forma algebraica la respuesta al inciso d (ver Figura 92).

Figura 92.

Respuesta de P1 al inciso d del segundo problema del taller de límites.



Esto evidencia que el profesor P1 logró identificar las variantes e invariantes en el problema y articular los diferentes registros de la función para encontrar la solución a la situación problema.

Respecto al concepto de límite, el profesor en formación comprende que es un concepto fundamental para la comprensión de otros objetos matemáticos del cálculo diferencial como la derivada y la integral, tal y como lo mencionan Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017); quienes afirman que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada debido a que no comprenden el concepto de límites que es esencial para abordar el concepto de derivada. Además, Ignacio menciona la importancia de enseñar el concepto de límites a través de los conceptos de aproximación y la tendencia (ver en la Figura 93) en concordancia con lo establecido por Guarín, Parada y Fiallo (2018); quienes mencionan que las nociones de aproximación y tendencia permiten la creación intuitiva del concepto de límite.

Figura 93.

Tercera parte del taller de límites primera implementación.

1) ¿Por qué crees que es importante enseñar y aprender el tema de limites?

La importancia del límite recae en que el limite es un concepto fundamente en cuanto al desarrollo del cálculo diferencial e integral. Es por esto que la enseñanza y aprendizaje de este concepto se hace crucial en todo curso de cálculo y ayuda a comprender de donde vienen conceptos como derivada e integral que son muy importantes en cálculo.

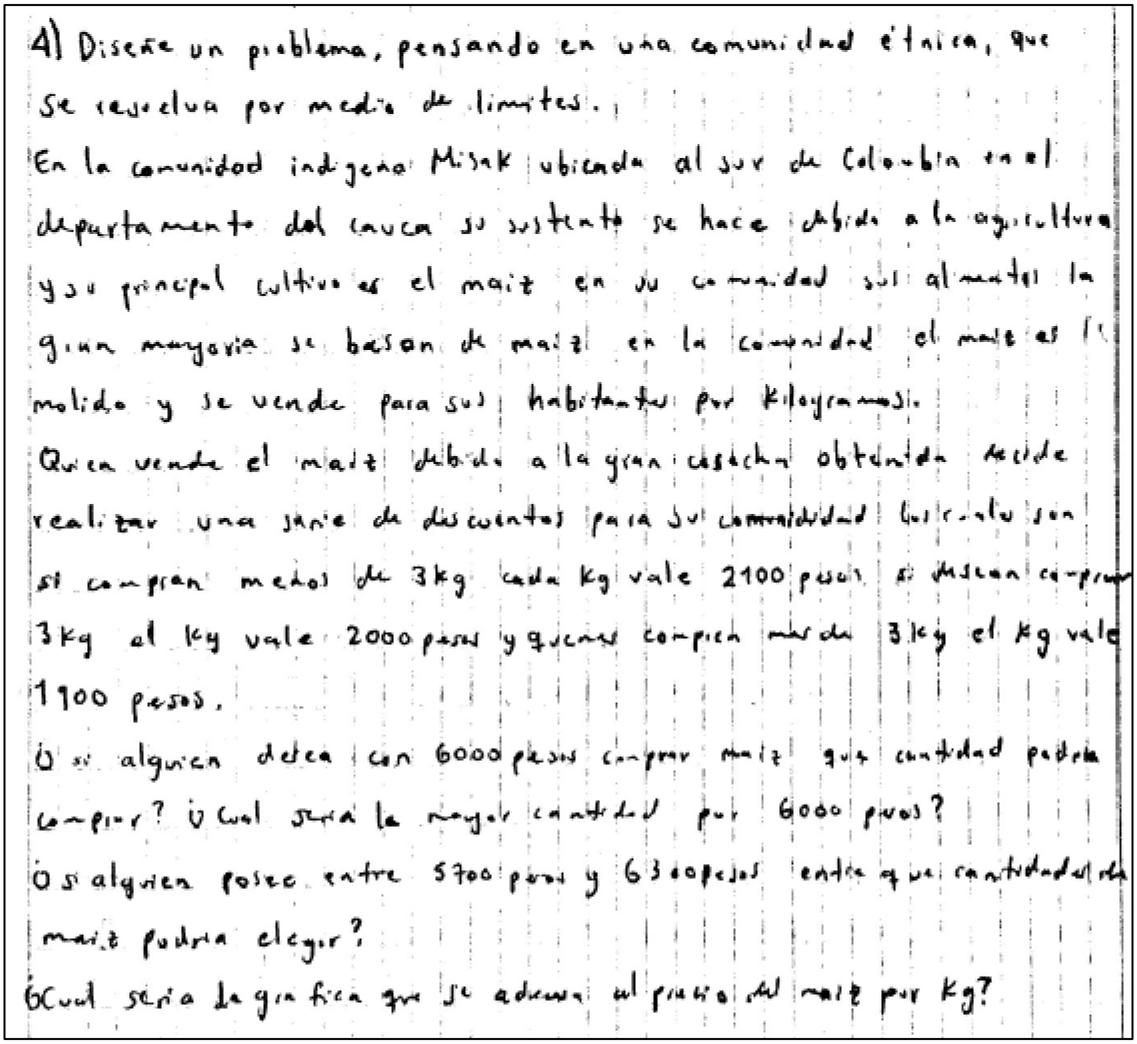
2) ¿Como enseñarias limites (como objeto matemático) en una comunidad palenquera?

yo en primera parte con ejemplos explicaría las aproximaciones para ir iniciandolos al concepto de limite luego con funciones sencillas y contextualizadas como las vistas en el taller se pregunta por proximidad y tendencia y que asi puedan ver comportamientos de funciones con el limite sin aun llamarlo limite y por ultimo decirles que todos los ejercicios hechos nos guiaron al concepto de limite y dar la formalidad y que puedan primeramente con calculadora aproximar limites en funciones.

Además de resaltar la importancia del uso de problemas contextualizados como los aplicados en el taller de límites, Ignacio diseña un problema contextualizado alrededor del entorno de un estudiante indígena (ver Figura 94). Para ello se basó en la información que encontró en documentos del MEN sobre el contexto de los indígenas Misak y su conocimiento sobre límites para favorecer la enseñanza de este concepto a estudiantes indígenas.

Figura 94.

Respuesta de Ignacio al inciso 4 de la última parte del taller de límites.


4) Diseñe un problema, pensando en una comunidad étnica, que
se resuelva por medio de límites.
En la comunidad indígena Misak ubicada al sur de Colombia en el
departamento del cauca su sustento se hace debido a la agricultura
y su principal cultivo es el maíz en su comunidad sus alimentos la
gran mayoría se basan de maíz en la comunidad el maíz es
molido y se vende para sus habitantes por Kilogramos.
Quien vende el maíz debido a la gran cosecha obtenida decide
realizar una serie de descuentos para su comunidad los cuales son
si compran menos de 3kg cada kg vale 2100 pesos, si desean comprar
3kg el kg vale 2000 pesos y quienes compren más de 3kg el kg vale
1900 pesos.
O si alguien desea con 6000 pesos comprar maíz qué cantidad podría
comprar? ¿Cual sería la mayor cantidad por 6000 pesos?
O si alguien posee entre 5700 pesos y 6300 pesos entre qué cantidad de
maíz podría elegir?
¿Cual sería la gráfica que se adecua al precio del maíz por kg?

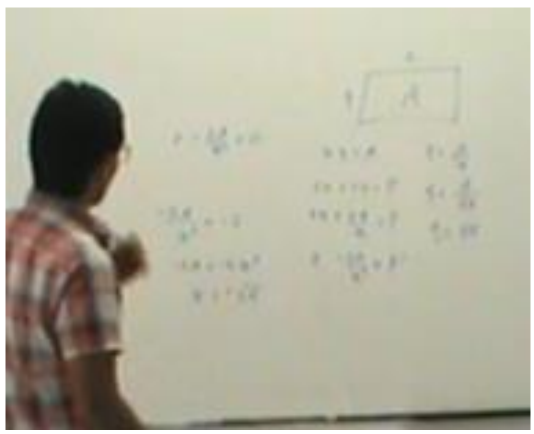
Al respecto del problema diseñado por Ignacio, este optó por incorporar en la situación problema el contexto del estudiante indígena Misak el cual permite una aproximación a los conceptos matemáticos (en este caso el de límites), desde cuestiones familiares para el estudiante (Meléndez, 2021). Además, Piug (2015) resalta como fortaleza que al trabajar con problemas de modelización las transformaciones algebraicas no aparecen como un juego de transformaciones entre expresiones, que podrían carecer de sentido para el estudiante, sino que las transformaciones algebraicas tienen sentido porque se hacen para llevar una expresión algebraica inicial que describe el fenómeno hasta una forma canónica, que está elegida de manera que sus parámetros representen propiedades de los fenómenos modelados.

4.1.5 Negociación de significados alcanzados en el taller de derivadas.

En la primera parte del taller de derivadas (3.2.5) el profesor P1 pasó al tablero y representó algebraicamente la situación problema partiendo de un bosquejo del problema (ver Figura 95).

Figura 95.

Respuesta de P1 al primer problema.



Mencionó el hecho de derivar e igualar la derivada a cero, significando la derivada como máximo o mínimo, y como pendiente de la recta tangente. Tal y como se evidencia en el Episodio 12.

Moderador: Cuéntanos ¿Qué hiciste?

P1: lo que hice fue derivar e igualar la derivada a cero ya que sería un máximo o un mínimo, en la curva la pendiente es cero…

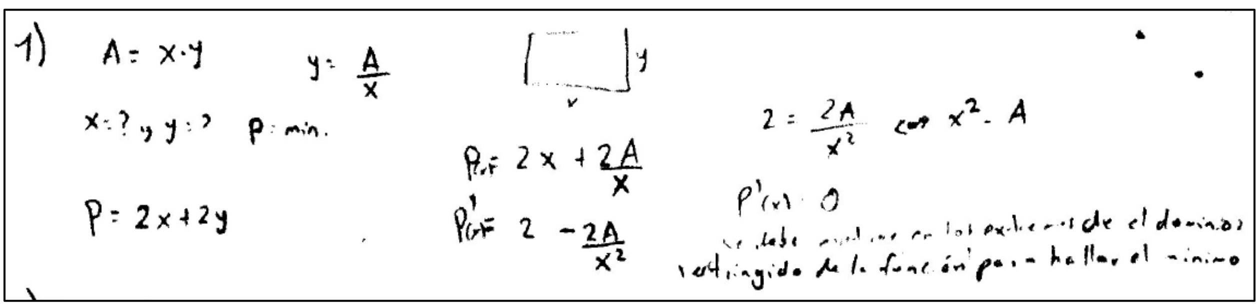
Ignacio: estaríamos llegando a que x es igual a y, por lo que el rectángulo sería un cuadrado.

Episodio 12

En su hoja de trabajo Ignacio logró representar la interdependencia entre el perímetro del rectángulo en función de uno de sus lados. Esta expresión analítica la obtuvo al encontrar anteriormente la forma en que variaba uno de los lados del rectángulo en función del otro a través del área fija (A). Derivando la expresión analítica logró encontrar que el cuadrado de uno de sus lados iba a ser igual al área (A), pero no logró concluir en su hoja de trabajo que el rectángulo tenía perímetro mínimo cuando fuese un cuadrado, es decir, cuando sus lados fuesen iguales (ver Figura 96). Contrario a lo que se evidenció en el Episodio 12, en la puesta en común, que a través de lo realizado y dicho por el profesor P1 Ignacio mencionó que la solución sería un cuadrado.

Figura 96.

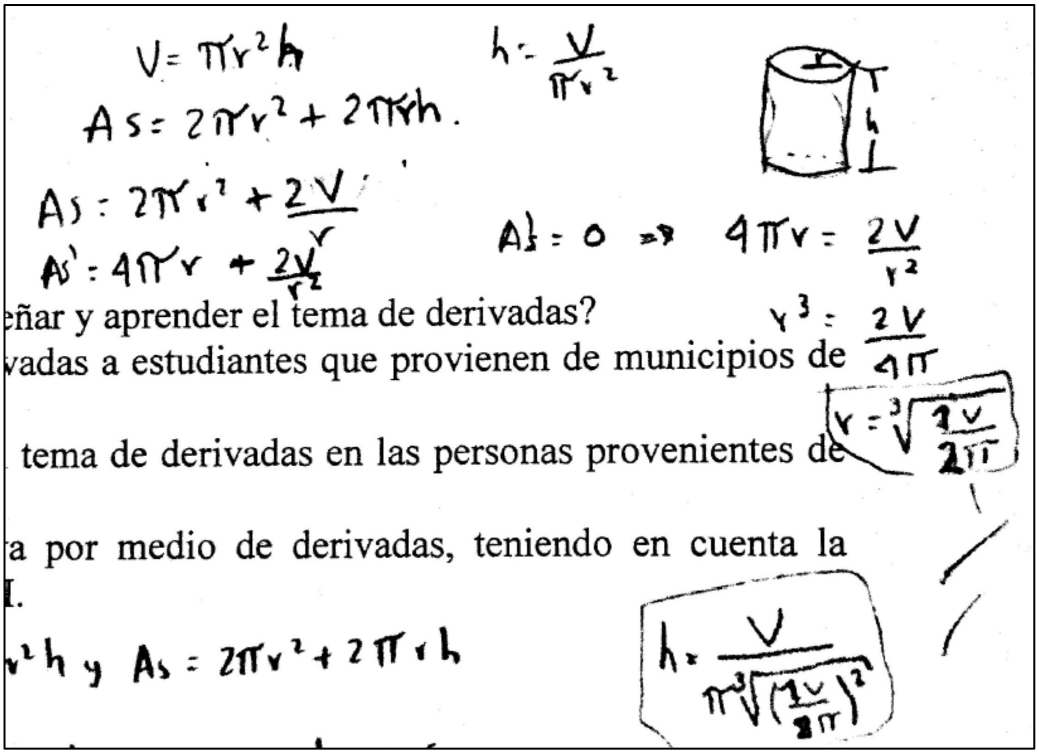
Respuesta de Ignacio al primer problema del taller de derivadas.



En el segundo problema del taller de derivadas, Ignacio logró hallar la relación entre la altura y el radio de un cilindro con volumen fijo V, para posteriormente encontrar la interdependencia entre el área superficial del cilindro y su radio. Además, a través del uso de las reglas de derivación pudo encontrar las medidas del radio y la altura del cilindro con menor área superficial (ver Figura 97).

Figura 97.

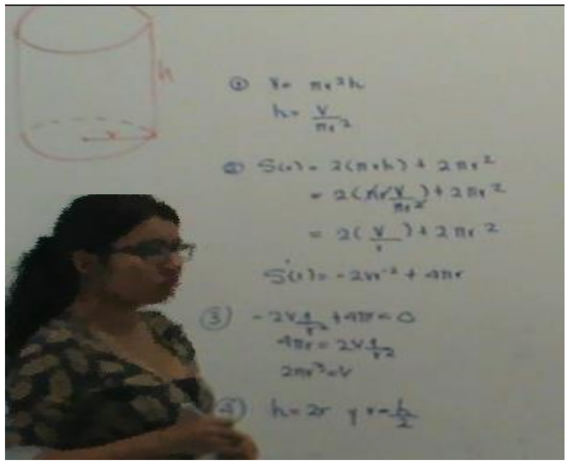
Respuesta de Ignacio al segundo problema del taller de derivadas.



En la puesta en común Ignacio mencionó el procedimiento algebraico que usó para llegar a la solución del problema, acto seguido la profesora P2 pasó al tablero a mostrar lo que hizo en su hoja de trabajo, partiendo de un bosquejo del cilindro del problema. Aunque la respuesta de Ignacio estuviera correcta, a diferencia de esté la profesora P2 logró llegar a que la solución se encontraba cuando la altura del cilindro fuese el doble de la del radio (ver Figura 98).

Figura 98.

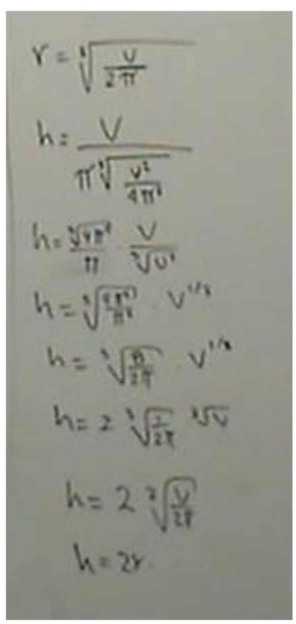
Respuesta de P2 al segundo problema del taller de derivadas.



Luego a través de lo que la profesora P2 hizo en el tablero, Ignacio logró ver que a partir de su respuesta podría llegar a la misma de su compañera, como se ve en la Figura 99.

Figura 99.

Procedimiento algebraico de Ignacio.



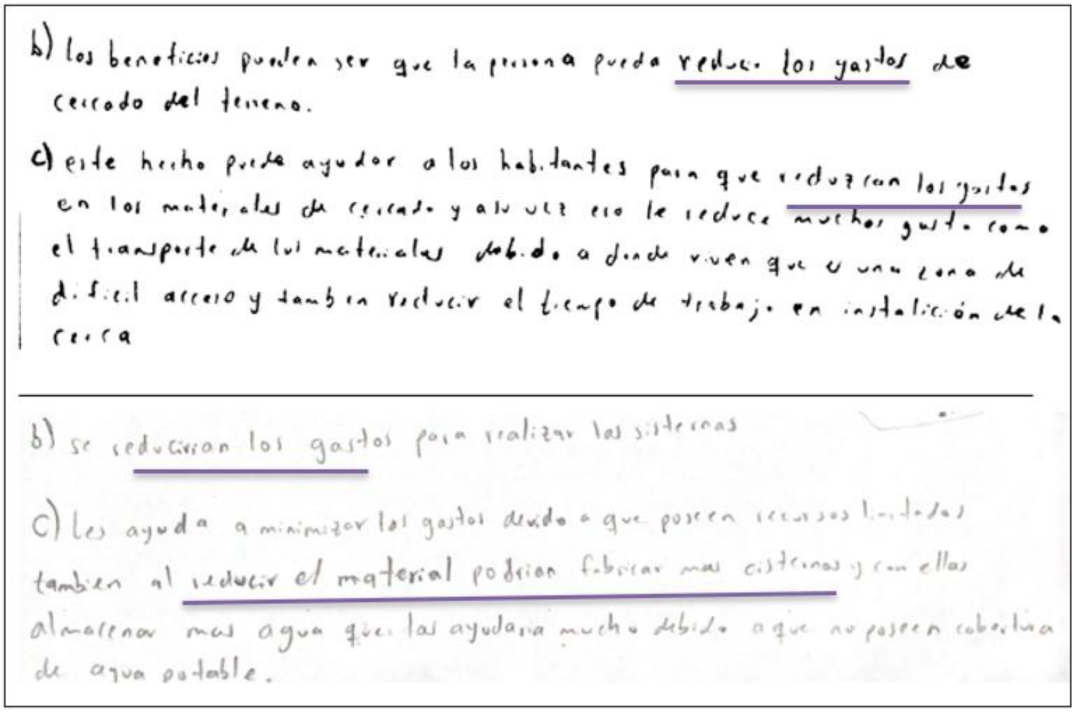
En cuanto al pensamiento variacional de Ignacio en este taller, el profesor en formación logró identificar variantes e invariantes, la dependencia entre ellas y así encontrar las funciones que representaban la interdependencia las variables inmersas en cada uno de los problemas, además realizó tratos algebraicos adecuados usando reglas de derivación para lograr encontrar las soluciones a estos problemas.

En este taller se pudo evidenciar que Ignacio logró modelar efectivamente las situaciones problema ya que en palabras de Meléndez (2021, citando a Piug y Monzó, 2013) menciona que para la obtención de un modelo matemático que se ajuste a un fenómeno físico, se debe entender correctamente dicho fenómeno, experimentar y, finalmente, hallar cuales son los conceptos matemáticos que le ayudarán a modelar el fenómeno. Así mismo, Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017) afirman que al momento de abordar problemas relacionados con la derivada los estudiantes deben identificar y usar adecuadamente las reglas de derivación pertinentes para llegar a la solución de este.

Además, en este taller Ignacio mencionó los beneficios que podría tener la solución de los problemas implementados en el taller de derivadas (ver Figura 100). Entre estos beneficios se mencionó: la reducción de gastos y de material. Estas ideas son importantes ya que como lo afirma Pineda (2018, citando a García y Álvarez, 2005) el profesor debe preocuparse por captar el interés y la atención de los alumnos, despertando la curiosidad por el tema o por el problema al presentarles problemas relevantes o información sorprendente y novedosa.

Figura 100.

Utilidades encontradas por Ignacio a los problemas del taller de derivadas.


b) los beneficios pueden ser que la persona pueda reducir los gastos de cercado del terreno.

c) este hecho puede ayudar a los habitantes para que reduzcan los gastos en los materiales de cercado y a su vez eso le reduce muchos gasto como el transporte de los materiales debido a donde viven que es una zona de dificil acceso y tamben reducir el tiempo de trabajo en instalación de la cerca

b) se reducirian los gastos para realizar las sisternas

c) les ayuda a minimizar los gastos debido a que poseen recursos limitados tambien al reducir el material podrian fabricar mas cisternas y con ellas almacenar mas agua que les ayudaria mucho debido a que no poseen cobertura de agua potable.

En la puesta en común de la última parte del taller los profesores mencionaron la importancia de enseñar y aprender el concepto de derivadas, tal y como se evidencia en el Episodio 13.

P3: yo creo que es importante enseñar y aprender el tema de derivadas porque se usa para problemas en la agricultura, almacenamiento, construcción, maquinaria, etc. Y es uno de los conceptos más usados y aplicados.

P4: para dar solución a problemas del día a día.

P5: Es importante porque la derivada es uno de los temas que tiene aplicaciones en muchos contextos, principalmente la parte de optimización para aprovechar todos sus recursos.

Moderador: pasamos al siguiente inciso

P1: teniendo en cuenta los problemas de la primera parte y la segunda parte se podría hacer una actividad que consista en hacer un recipiente cilíndrico trayendo el material para su construcción, que traigan un vaso de agua que sería un volumen fijo, y les digo: vamos a construir un cilindro con la menor cantidad de material que me quepa la cantidad de agua en el vaso. Con eso la idea es introducir el tema de derivadas y luego formalizar.

Ignacio: yo tenía pensado lo mismo, pero lo primero sería contextualizar, y se podría explicar la derivada más de manera gráfica que algebraica.

P5: Al igual que Ignacio, lo más importante en los problemas es contextualizar, poner problemas que sean interesantes para el estudiante y que les sean útiles para así despertar el interés por aprender el tema.

P3: yo estoy de acuerdo, si una persona proviene del campo o de una comunidad indígena propondría los problemas relacionadas con su contexto y su utilidad.

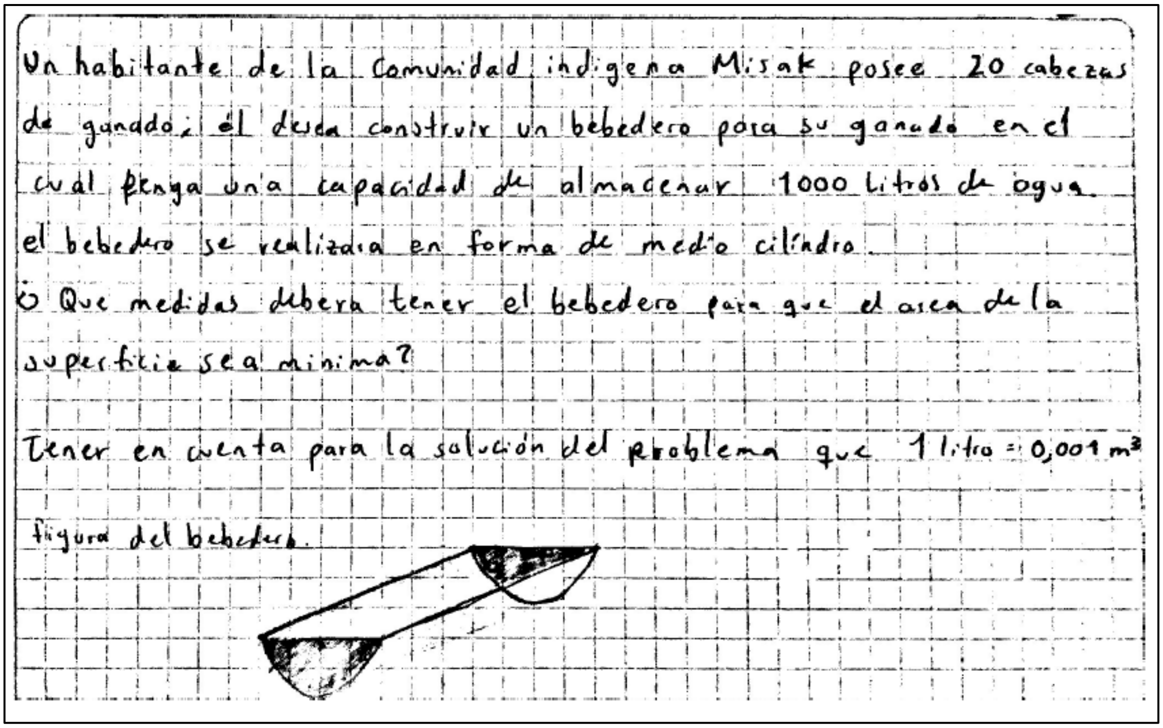
Episodio 13

En el Episodio 13 se puede evidenciar que en esta parte del taller se negociaron significados alrededor de la contextualización de problemas para abordar la enseñanza del concepto de derivadas a estudiantes con características diferenciadas.

Al igual que en los anteriores talleres el profesor en formación destaca la importancia de la contextualización de los problemas para favorecer el aprendizaje, en este caso de la derivada, de los estudiantes con características diferencias; y diseña un problema contextualizado al entorno de un estudiante indígena Misak (ver Figura 101).

Figura 101.

Problema diseñado por Ignacio en el taller de derivadas.



Un habitante de la Comunidad indígena Misak posee 20 cabezas de ganado; él desea construir un bebedero para su ganado en el cual tenga una capacidad de almacenar 1000 litros de agua el bebedero se realizaría en forma de medio cilindro. ¿Que medidas debería tener el bebedero para que el area de la superficie sea mínima?

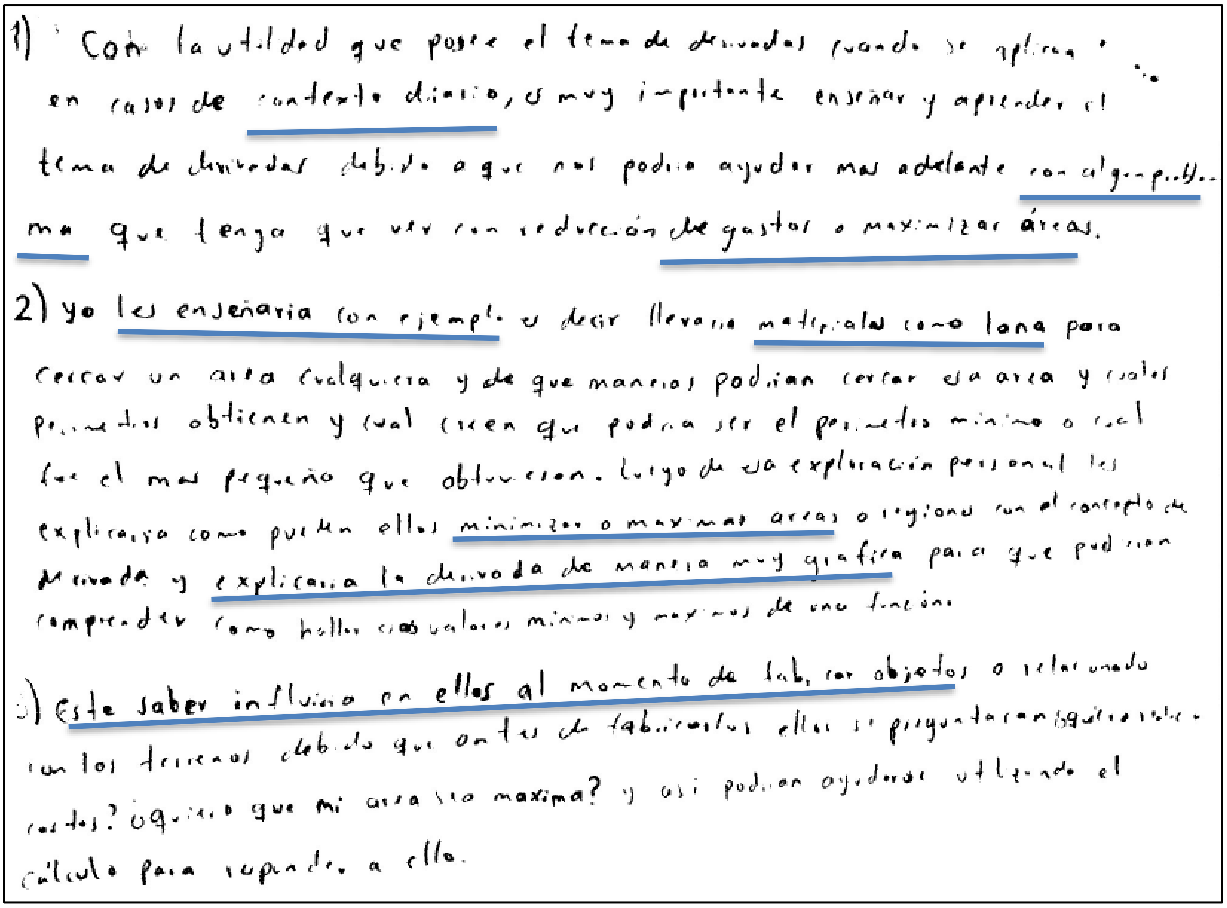
Tener en cuenta para la solución del problema que 1 litro = 0,001 m³

figura del bebedero.

En la Figura 102 se puede evidenciar que Ignacio menciona la importancia del contexto, al igual que el uso de material concreto en el diseño de problemas de optimización para acercar el tema de derivadas a los estudiantes con características diferenciadas. Además, de mostrarles la utilidad que conlleva en su comunidad la aplicación de este concepto en problemas de su comunidad.

Figura 102.

Respuesta de Ignacio a la última parte del taller de derivadas.


1) Con la utilidad que posee el tema de derivadas cuando se aplican en casos de contexto diario, es muy importante enseñar y aprender el tema de derivadas debido a que nos podría ayudar más adelante con algún problema que tenga que ver con reducción de gastos o maximizar áreas.

2) yo les enseñaría con ejemplo es decir llevaría materiales como lona para cercar un área cualquiera y de qué maneras podrían cercar esa área y cuales perímetros obtienen y cual creen que podría ser el perímetro mínimo o cual fue el más pequeño que obtuvieron. Luego de esa exploración personal les explicaría como pueden ellos minimizar o maximizar áreas o regiones con el concepto de derivada y explicaría la derivada de manera muy gráfica para que pudieran comprender como hallar esos valores mínimos y máximos de una función.

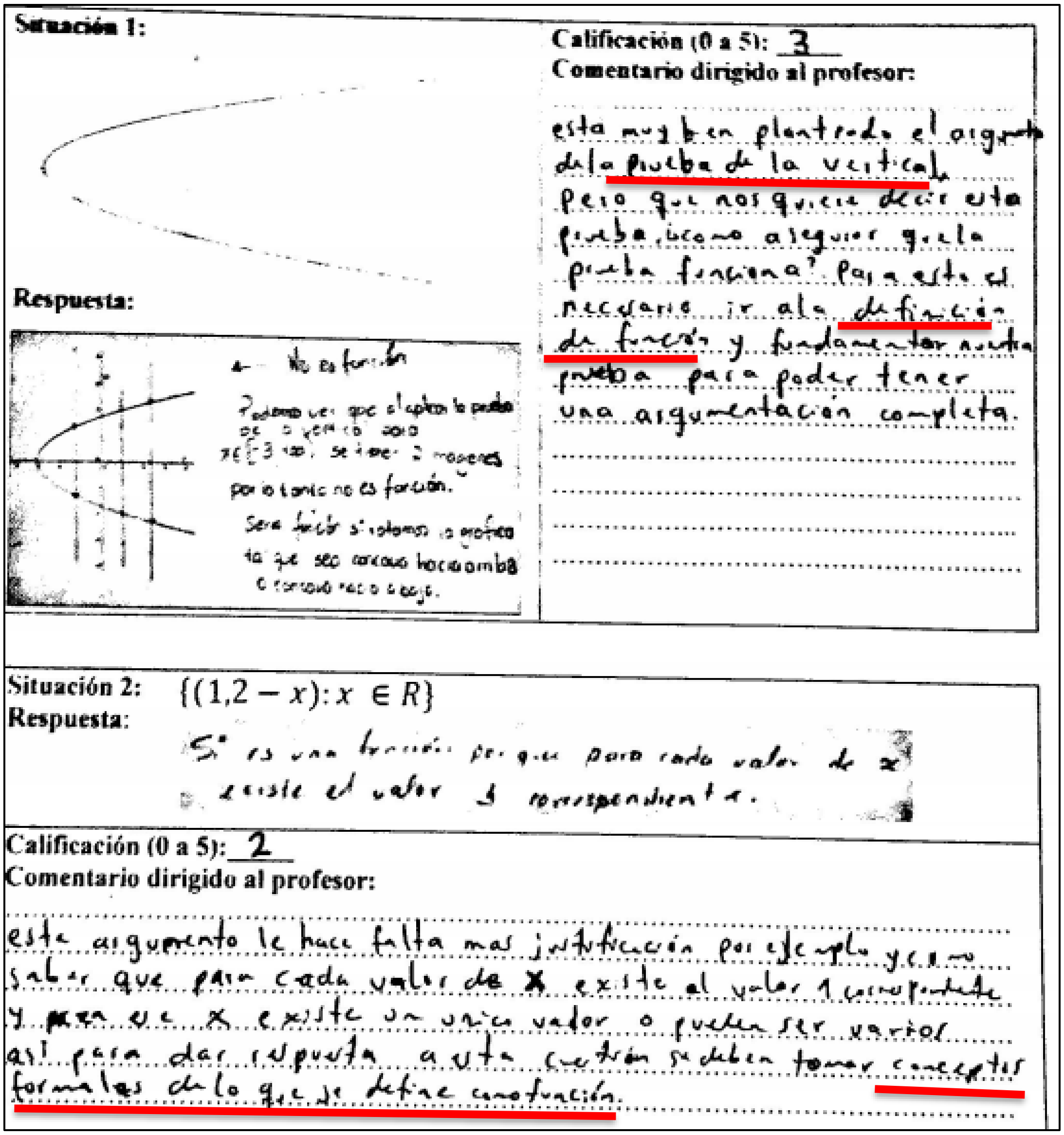
3) Este saber influiría en ellos al momento de fabricar objetos o relacionado con los terrenos debido que antes de fabricarlos ellos se preguntarían ¿qué tan costos? ¿o quiero que mi área sea máxima? y así podrían ayudarse utilizando el cálculo para responder a ello.

4.1.6 *Negociación de significados alcanzados en el taller prueba diagnóstico final.*

Al igual que en la prueba diagnóstico inicial, en la prueba diagnostico final (3.2.6) Ignacio da importancia a la definición de función para determinar si una gráfica o un conjunto de pares ordenados representa una función (ver Figura 103).

Figura 103.

Respuesta de Ignacio a la primera parte de la prueba diagnostico final.


Situación 1:

Respuesta:

← No es función

Podemos ver que si aplicamos la prueba de la vertical para $x \in [-3, \infty)$, se tienen 2 imágenes por lo tanto no es función.

Sería función si tomamos la gráfica que sea cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Calificación (0 a 5): 3

Comentario dirigido al profesor:

esta muy bien planteado el argumento de la prueba de la vertical, pero que nos quiere decir esta prueba, ¿como asegurar que la prueba funciona? Para esto es necesario ir a la definición de función y fundamentar esta prueba para poder tener una argumentación completa.

Situación 2: $\{(1, 2-x) : x \in R\}$

Respuesta:

Sí es una función porque para cada valor de x existe el valor y correspondiente.

Calificación (0 a 5): 2

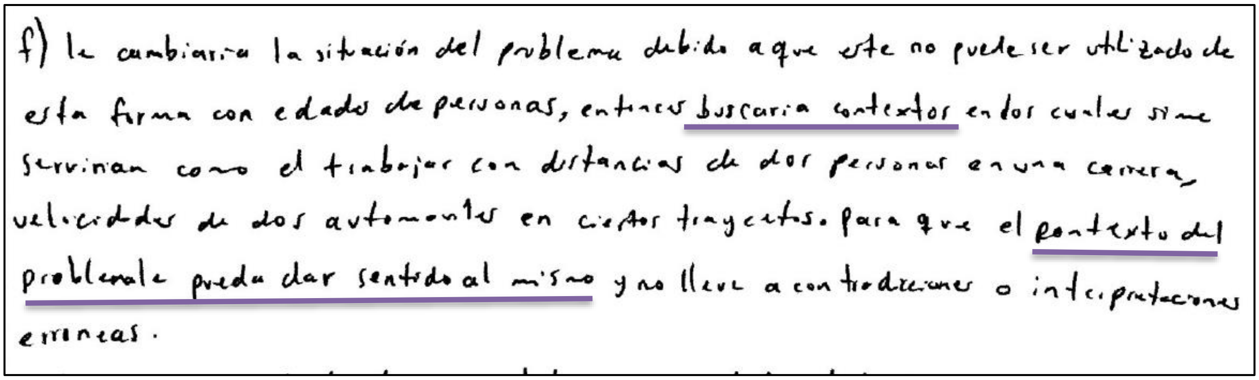
Comentario dirigido al profesor:

este argumento le hace falta mas justificación por ejemplo ¿como saber que para cada valor de x existe el valor y correspondiente y para ese x existe un unico valor o pueden ser varios? así para dar respuesta a esta cuestión se deben tomar conceptos formales de lo que se define como función.

Además, Ignacio nuevamente hace referencia a la importancia del contexto para acercar el contenido matemático a los estudiantes (ver Figura 104), que para el MEN (1998) el contexto tiene que ver con los ambientes que rodea al estudiante y que le dan sentido a la matemática que aprende.

Figura 104.

Respuesta de Ignacio al último inciso de la prueba diagnostico final.

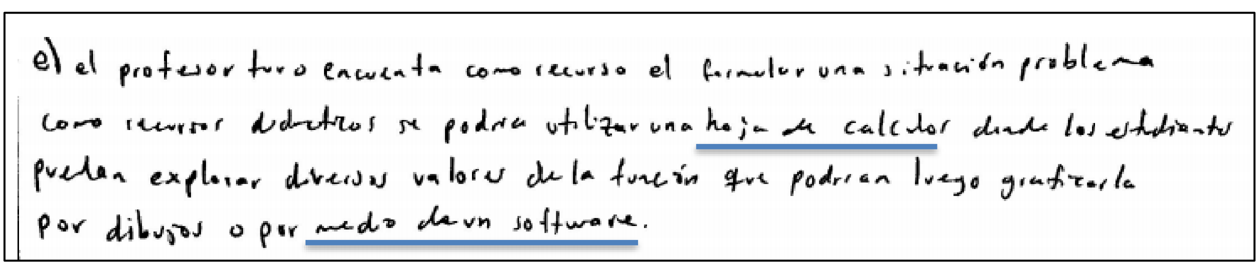


f) le cambiaria la situación del problema debido a que este no puede ser utilizado de esta forma con edades de personas, entonces buscaria contextos en los cuales si me servirian como el trabajar con distancias de dos personas en una carrera, velocidades de dos automoviles en ciertos trayectos. para que el contexto del problema le pueda dar sentido al mismo y no lleve a contradicciones o interpretaciones erroneas.

En la prueba diagnostico final, Ignacio también menciona la importancia de usar GeoGebra al momento de resolver un problema y el uso que tiene la hoja de cálculo del software para un mayor entendimiento del problema (ver Figura 105). Al respecto Villa y Ruiz (2010) señalan la importancia del uso de software como GeoGebra para el diseño de estrategias que potencien el desarrollo del pensamiento variacional en el alumnado.

Figura 105.

Respuesta de Ignacio al inciso e de la prueba diagnostico final.



e) el profesor tuvo encuenta como recurso el formular una situación problema como recursos didacticos se podria utilizar una hoja de calculos donde los estudiantes puedan explorar diversos valores de la función que podrian luego graficarla por dibujos o por medio de un software.

A lo largo de los talleres y las discusiones que se dieron en las actividades programadas en el cronograma al interior de la CoP, se dio un proceso el cual Pineda (2018) señala como un proceso de sensibilización el cual aportó a los profesores en formación herramientas para reconocer, aceptar y atender a los estudiantes con características diferenciadas.

4.2 Proceso de Negociación de significados de Ignacio en los avances de su proyecto.

Ignacio logró aterrizar en su proyecto, algunos de los significados negociados en los diferentes talleres. Como se pudo evidenciar el profesor en formación desde el taller de variación hasta la prueba diagnostico final, dio importancia al contexto de los estudiantes con características diferenciadas (para efectos de su proyecto estudiantes provenientes de comunidades indígenas) con el fin de poder contextualizar los problemas ajustados a sus necesidades y en consecuencia poder enseñarles el tema de derivadas haciendo uso de sus aplicaciones (optimización) plasmando la utilidad que conlleva la solución de estos.

Inicialmente Ignacio realizó un estudio documental en donde encontró información sobre los aspectos que él consideró como los más importantes en relación con la comunidad indígena Misak, esto con fin de conocer parcialmente las características de su cultura y a partir de esta información crear una entrevista que posteriormente le haría a un estudiante de esta comunidad.

La entrevista semiestructurada se la realizó a un estudiante indígena Misak que se encontraba cursando la asignatura de cálculo diferencial en la UIS, en donde Ignacio pudo familiarizarse un poco más con el contexto del estudiante, en cuanto a su economía y algunas problemáticas al interior de la comunidad; además encontró que entre los principales productos agrícolas que producen está el maíz, la caña y el café, información la cual usó para rediseñar una situación problema que se resolviera por medio de optimización, aplicación de la derivada (ver Figura 106).

Figura 106.

Primer problema diseñado por Ignacio en su proyecto.

3.4.1. Problema 1 Agricultura

Utilizando la información recolectada en la entrevista sobre la base económica de la cultura Misak la cual está centrada en la agricultura y los diversos productos que siembran y cosechan para su sustento. Es por esto que fue importante realizar un problema en el cual se pudiera aplicar a la agricultura de la comunidad, por otro lado, puesto que es importante separar algunos cultivos para obtener una cosecha buena y que no se afecten unos cultivos a los otros como, por ejemplo, el café, el maíz y la caña; debido a que la caña y el café maltrata la tierra cada vez que es abonado, caso contrario al maíz el cual fortalece la tierra cuando es abonado. El problema se planteó de la siguiente manera:

Una familia perteneciente a la comunidad indígena Misak desea cercar su terreno rectangular para cultivar caña, maíz y café; debido a la importancia de que estos cultivos se siembren de manera separada, se dividirá el terreno en tres sectores iguales (ver figura) y se sembrará café, maíz y caña respectivamente para no poseer dificultades en los terrenos. Si el área que posee esta familia para el cultivo es de 5000 m^2 ¿Cuáles serían las dimensiones del terreno de tal forma que se requiera gastar la mínima cerca posible?

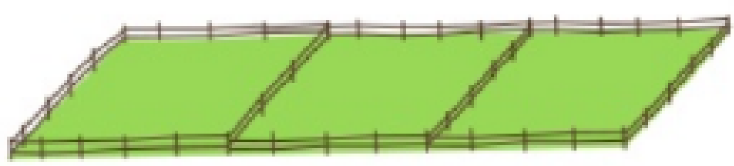


Figura 2: Terreno

En la entrevista que realizó Ignacio al estudiante indígena Misak, también encontró que al interior de la comunidad indígena Misak la ganadería es una de las principales actividades que realizan para sustentar su economía, por lo que implementó con el estudiante un problema ya diseñado con anterioridad en la tercera parte del taller de derivadas, el cual a su vez fue basado en el segundo problema propuesto en el taller de derivadas (ver Figura 107).

Figura 107.

Segundo problema diseñado por Ignacio en su proyecto.

3.4.2. Problema 2 Ganadería

Debido a que los datos recolectados en la entrevista, nos da a conocer que la comunidad Misak también utiliza la ganadería con fines económicos para su sustento, es por esto que se quiso realizar un problema centrado en este aspecto importante de la comunidad y fue formulado de la siguiente manera:

Un habitante de la comunidad Misak posee 20 cabezas de ganado y desea construir un bebedero para sus animales, el cual tenga una forma de cilindro dividido a la mitad (ver figura); dicho bebedero debe tener una capacidad de 1000 litros de agua. ¿Cuáles serían las dimensiones del bebedero de modo que para hacerlo se use la menor cantidad de material?

Para el problema se debe tener en cuenta que 1 litro = 0,001 m^3

¿Ayuda en algo el fabricar el bebedero de esta manera? ¿Por qué?

¿Crees tú que lo realizado en el problema es de utilidad para tu comunidad?

Figura 3: Bebedero

El tercer y último problema que rediseñó Ignacio fue basado en el problema de la caja sin tapa, en donde se debe encontrar las dimensiones de la caja que hagan que la caja tenga volumen máximo; el profesor en formación lo contextualizó alrededor de la construcción de cajas de madera para el transporte de maíz, café u otro producto agrícola (ver Figura 108).

Figura 108.

Tercer problema diseñado por Ignacio en su proyecto.

3.4.3. Problema 3 Recipientes

Teniendo en cuenta los diversos tipos de productos que son producidos en la comunidad y algunas de las herramientas para la recolección y clasificación, se propone utilizar como herramienta para el almacenamiento de los productos (p. ej. maíz y café) una caja de madera abierta en la parte superior, la cual les ayude en el almacenamiento y movilidad de los productos.

Se quiere construir una caja, abierta por la parte superior, de una pieza cuadrada de madera cortando un cuadrado de cada esquina y uniendo sus lados. En la figura los cuadrados blancos se han cortado y la madera se ha unido a lo largo de las líneas discontinuas. Teniendo en cuenta que la pieza de madera mide 70 cm por lado, ¿cuáles serían las dimensiones de la caja con las cuales el volumen se hace máximo? ¿Cuál es el volumen máximo?

¿En que se podría beneficiar el agricultor utilizar las cajas realizadas con volumen máximo?

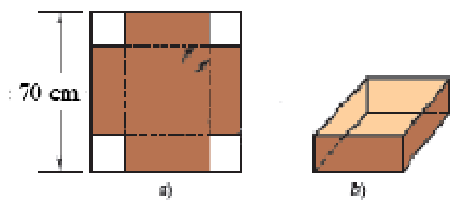


Figura 4: Caja sin tapa

En este problema al igual que en el problema relacionado con la ganadería, Ignacio pregunta acerca de la utilidad que puede surgir, en la comunidad indígena, al darle solución a estos problemas, cuestión que surge producto de la interacción del profesor en formación con los talleres en donde se preguntaba por la utilidad de los problemas que allí se proponían. Esto evidencia que Ignacio da importancia a la utilidad que pueda surgir de la solución de los problemas contextualizados a las necesidades de los habitantes de las comunidades indígenas.

Estas ideas concuerdan con las de Ponte (2000) cuando menciona que es labor de un docente el identificar las características de sus estudiantes e interactuar de manera cercana con ellos, además de guiar sus procesos de aprendizaje atendiendo a sus necesidades individuales.

5 Resultados del segundo acercamiento.

En este apartado se presentan resultados del proceso de negociación de significados realizado por Brandon, el caso representativo del segundo acercamiento en términos de su pensamiento reflexivo: pensamiento variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal.

5.1 Proceso de Negociación de significados de Brandon a través de los talleres.

En la segunda implementación se tomó como caso representativo al profesor Brandon, quien se destacó por lograr una participación plena al interior de la CoP. El profesor fue muy receptivo y participativo en cada una de las actividades que se realizaron en la CoP. Además, logró cosificar en su proyecto algunos de los significados negociados en los talleres.

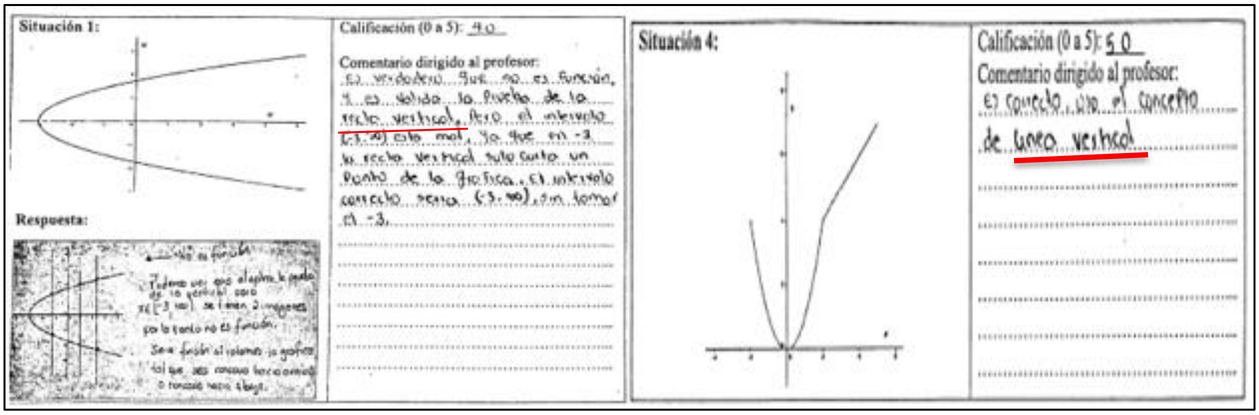
En este apartado mostraremos la negociación de significados realizado por Brandon en cada uno de los talleres que se implementaron en el segundo acercamiento (2019-2) que se muestran en el apartado 3.4.

5.1.1 Negociación de significados alcanzados en el taller prueba diagnóstico inicial.

En cuanto al taller de la prueba diagnóstica inicial 3.4.1, Brandon tanto en la situación 1 como en la situación 4 asigna calificaciones altas a las respuestas predeterminadas cuyos argumentos se centran en la prueba de la recta vertical para determinar si una gráfica es función o no. Esto evidencia que Brandon da gran importancia a la prueba de la recta vertical para determinar si una gráfica representa una función o no, pero no tiene en cuenta la definición de función ni tampoco el hecho de determinar el dominio y el rango de la función (ver Figura 109), esto concuerda con lo que mencionan Ronau et al. (2014) al manifestar que los profesores les dan poca importancia al papel que tiene el dominio en la caracterización de una función.

Figura 109.

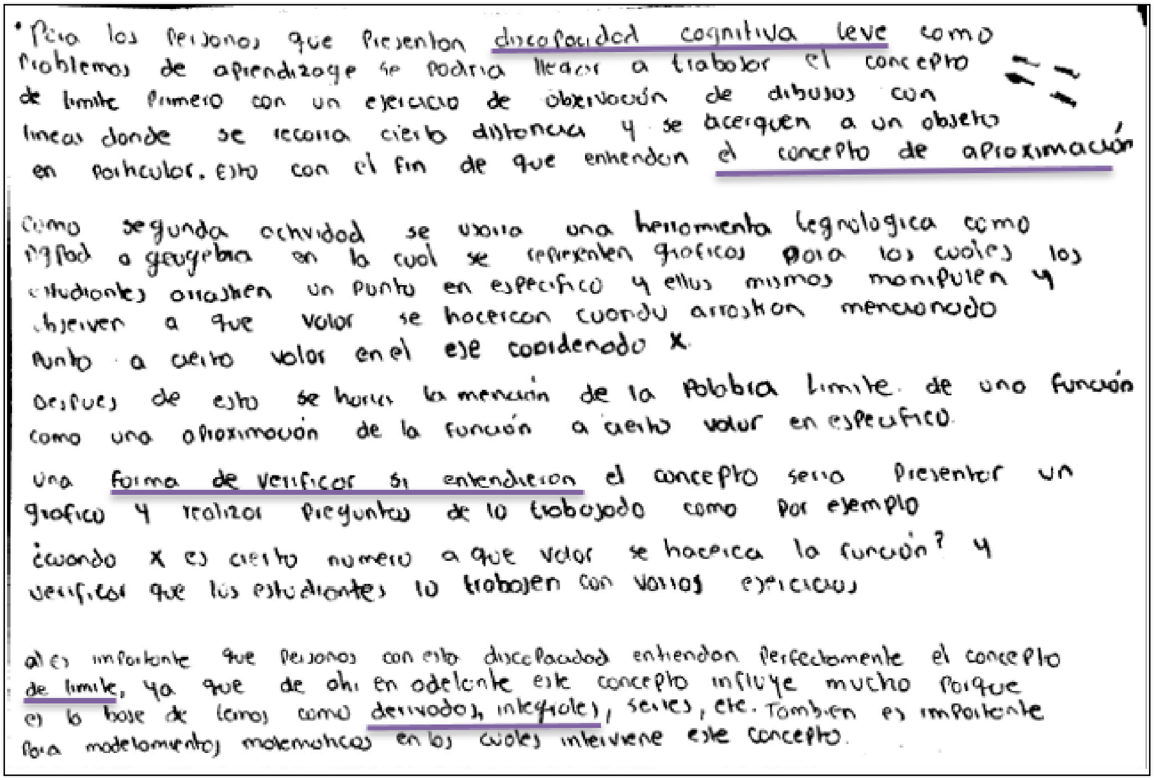
Calificación de Brandon a la situación 1 y 4 de la prueba diagnóstica inicial.



En cuanto a la enseñanza del tema de límites a un estudiante con discapacidad cognitiva leve, Brandon menciona la importancia de trabajar inicialmente con situaciones relacionadas con la noción de aproximación para posteriormente poder construir el concepto de límite con los estudiantes (ver Figura 110) pero no tiene en cuenta aún la noción de tendencia para este fin. Además de mencionar algunas adaptaciones curriculares para enseñar el tema de límites de forma dinámica, también establece una forma de evaluar a estos estudiantes, pero aún no tiene en cuenta sus características para realizar las adaptaciones curriculares y una evaluación pertinente.

Figura 110.

Respuesta de Brandon a los aspectos didácticos de la prueba diagnóstico inicial.



• Para las personas que presentan discapacidad cognitiva leve como problemas de aprendizaje se podría llegar a trabajar el concepto de límite primero con un ejercicio de observación de dibujos con líneas donde se recorra cierta distancia y se acerquen a un objeto en particular. esto con el fin de que entiendan el concepto de aproximación

Como segunda actividad se usaría una herramienta tegnologica como DGPad o geogebra en la cual se representen graficos para los cuales los estudiantes arrastren un punto en especifico y ellos mismos manipulen y observen a que valor se hacercan cuando arrastran mencionado punto a cierto valor en el eje coordenado x.

Despues de esto se haría la mención de la palabra límite de una función como una aproximación de la función a cierto valor en especifico.

Una forma de verificar si entendieron el concepto sería presentar un grafico y realizar preguntas de lo trabajado como por ejemplo ¿cuando x es cierto numero a que valor se hacerca la función? y verificar que los estudiantes lo trabajen con varios ejercicios

a) es importante que personas con esta discapacidad entiendan perfectamente el concepto de límite, ya que de ahí en adelante este concepto influye mucho porque es la base de temas como derivadas, integrales, series, etc. Tambien es importante para modelamientos matematicos en los cuales interviene este concepto.

Aunque el profesor en formación tenga en cuenta la importancia del límite como base para el concepto de derivada e integral, en ningún momento tiene en cuenta las características del estudiante con discapacidad cognitiva leve para enseñarle el tema de límite, esto se debe principalmente a que en los cursos que el profesor en formación ha aprobado hasta el momento en la licenciatura en matemáticas no ha tenido algún tipo de acercamiento a las necesidades educativas especiales y de allí su desconocimiento sobre las características de estos estudiantes.

En la última parte de este taller, Brandon menciona que, para acercar el concepto de límite a un estudiante con discapacidad cognitiva leve, es importante el uso de representaciones gráficas de algunas situaciones problema, al igual que el uso de software dinámicos como DGPad o GeoGebra (ver Figura 111).

Figura 111.

Respuesta de Brandon a la última parte de la prueba diagnóstico inicial.

• Para las personas que presentan discapacidad cognitiva leve como problemas de aprendizaje se podria llegar a trabajar el concepto de limite primero con un ejercicio de observación de dibujos con lineas donde se recorra cierta distancia y se acerquen a un objeto en particular. Esto con el fin de que entiendan el concepto de aproximación

Como segunda actividad se usaria una herramienta tecnologica como ipad o geogebra en la cual se representen graficos para los cuales los estudiantes arrastren un punto en especifico y ellos mismos manipulen y observen a que valor se hacercan cuando arrastran mencionado punto a cierto valor en el eje coordenado x.

Las ideas expresadas por Brandon alrededor del uso de tecnologías digitales para favorecer la enseñanza del tema de límites concuerdan con las de Moreno-Armella (2002) al mencionar que las tecnologías son un complemento al pensamiento o razonamiento del estudiante.

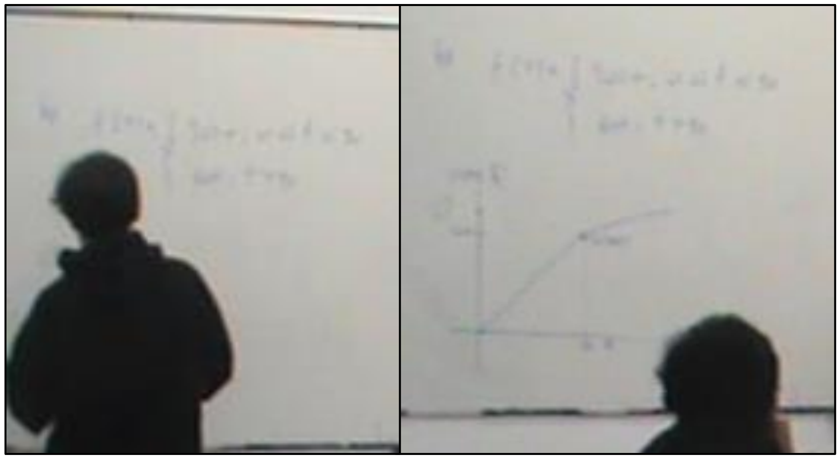
5.1.2 Negociación de significados alcanzados en el taller de variación.

En la primera parte de este taller (3.4.2) los profesores debían resolver un problema el cual estaba relacionado con la función parte entera techo.

En el momento de la puesta en común (socialización) a esta primera parte, un profesor en formación a quien llamaremos P1 pasó al tablero e intentó modelar la función por medio de una función por partes que se componía de dos funciones lineales como se ve en la Figura 112.

Figura 112.

Respuesta de P1 al primer problema del taller de variación.



Lo que evidencia que el profesor P1 no logró modelar adecuadamente la situación a diferencia de Ignacio (ver (Episodio 14), esta dificultad radica principalmente en la tendencia a la linealidad como lo establece Meléndez (2021).

Moderador: ¿Alguien más hizo algo similar a lo que hizo P1?

P2: yo lo que hice fue ponerle la parte entera techo.

Moderador: ¿Ese problema se puede modelar mediante una función lineal?

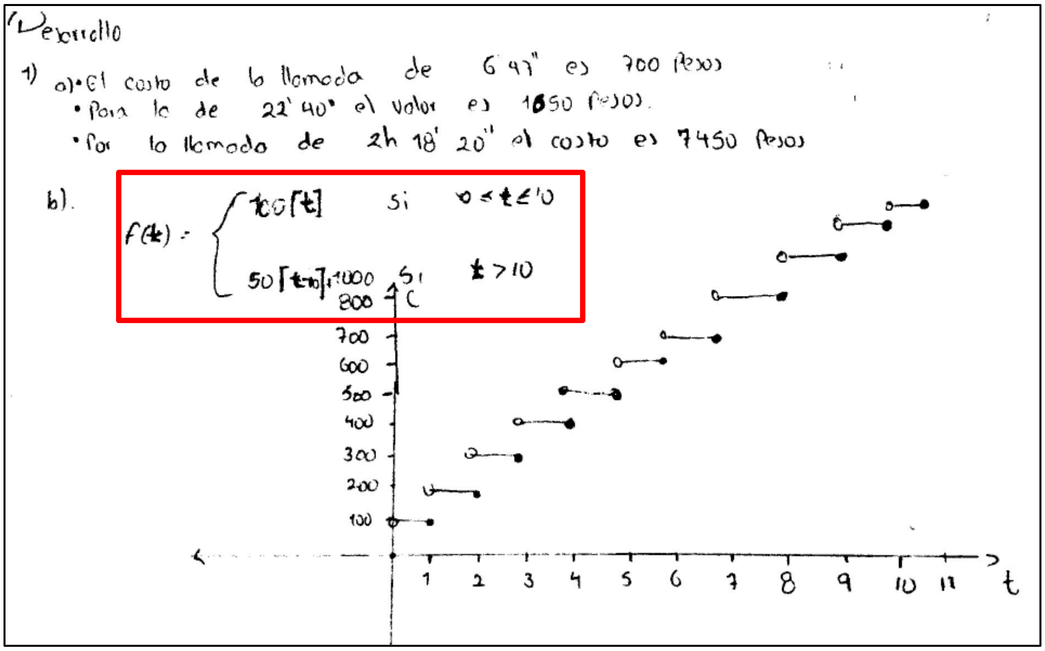
Brandon: No, se modela por medio de la función parte entera techo.

(Episodio 14)

En esta primera parte del taller de variación 3.4.2, Brandon logró representar adecuadamente la interdependencia entre el tiempo y el costo de la llamada de forma numérica, analítica y gráfica en su hoja de trabajo (ver Figura 113). Logrando representar y conectar diferentes representaciones de esta función, en términos de Hitt (2003).

Figura 113.

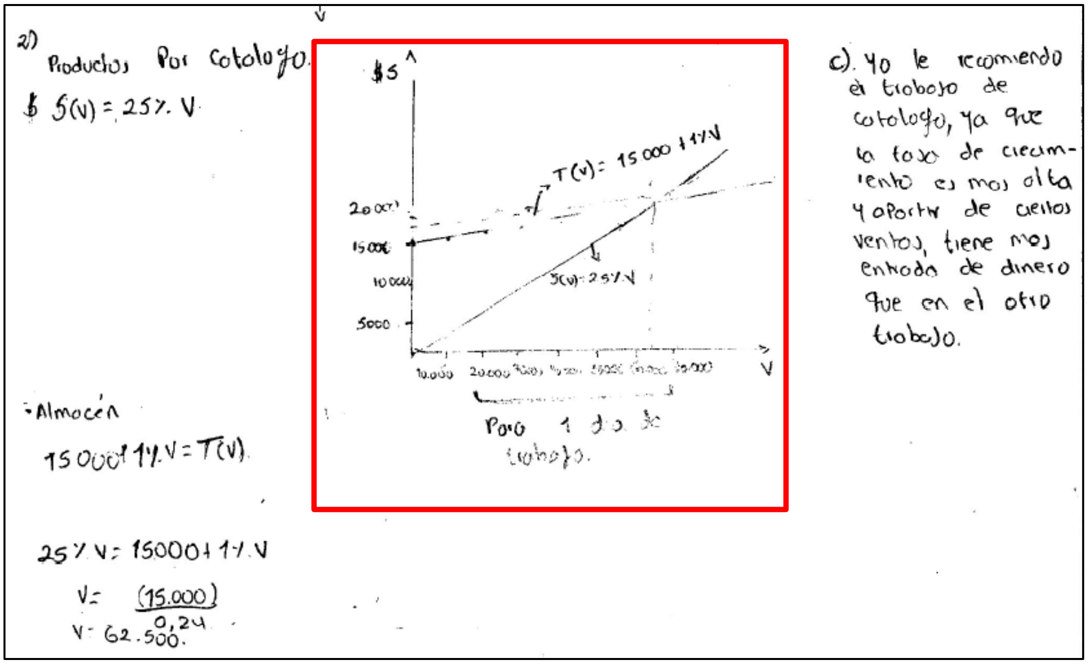
Respuesta de Ignacio al primer problema del taller de variación.



En el segundo problema Brandon logró representar gráfica y algebraicamente la situación problema propuesta (ver Figura 114) e inferir la información necesaria para sustentar su respuesta al inciso “c”. En este problema el profesor en formación logró identificar las variantes e invariantes, la dependencia entre esta para así modelar la situación a través de funciones lineales, además usó adecuadamente los diferentes registros de las funciones.

Figura 114.

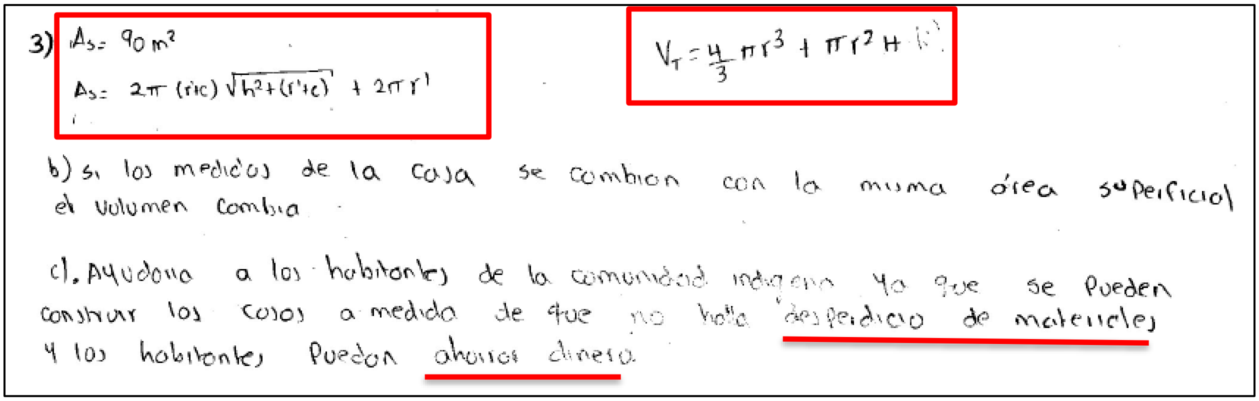
Respuesta de Brandon al segundo problema del taller de variación.



Debido a la complejidad del tercer problema, Brandon presentó dificultades al momento de representar la interdependencia entre las variables inmersas al interior de la situación problema (ver Figura 115). Aunque cabe mencionar que el profesor en formación logró identificar las magnitudes variantes e invariantes del problema y mencionar la utilidad que conlleva la solución de este problema al interior de una comunidad indígena.

Figura 115.

Respuesta de Brandon al tercer problema del taller de variación.


3) $A_S = 90\,m^2$

$A_S = 2\pi (r_1 c)\sqrt{h^2+(r_1 c)^2} + 2\pi r^2$

$V_T = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 H$

b) si las medidas de la caja se cambian con la misma área superficial el volumen cambia.

c) Ayudaría a los habitantes de la comunidad indígena ya que se pueden construir las casas a medida de que no halla desperdicio de materiales y los habitantes puedan ahorrar dinero.

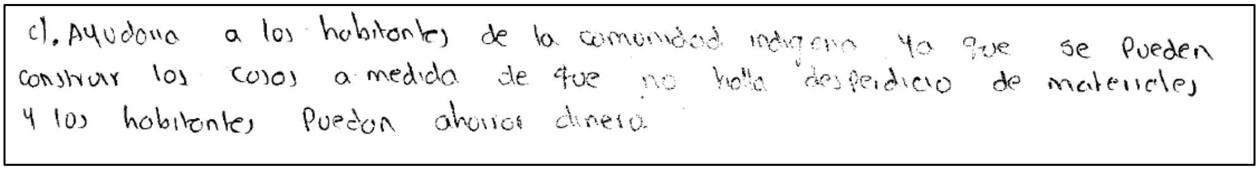
Según la caracterización de Meléndez (2021) sobre las actuaciones y dificultades de los estudiantes al momento de abordar fenómenos en donde se encuentra presente el cambio, Brandon logró realizar un análisis cuantitativo del problema, detectó las magnitudes presentes en el problema, detectó las variables y constantes, y logró parcialmente determinar las relaciones de dependencia pero no lo logró llegar a lo que Meléndez (2021) menciona como la comprobación del texto obtenido, que es cuando el estudiante logra pasar de la variable algebraica al fenómeno físico nuevamente, es decir, a dar una solución cualitativa al problema.

En cuanto al pensamiento variacional de Brandon en este taller, Brandon logró modelar las situaciones por medio de diferentes funciones (parte entera techo, función lineal y funciones compuestas), además pudo representar y articular diferentes representaciones (numérica, analítica y gráfica) que representaban la interdependencia entre las variables que se encontraban inmersas en los problemas, en términos de Fiallo y Parada (2018).

En el cuarto inciso del taller de variación, Brandon en su hoja de trabajo menciona la utilidad que conlleva la solución de los problemas propuestos en el taller al interior de una comunidad indígena (ver Figura 116).

Figura 116.

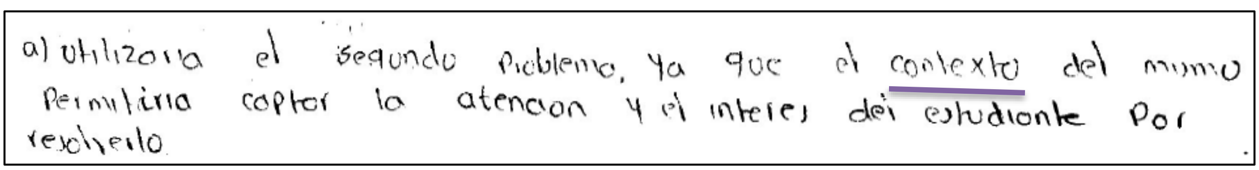
Respuesta de Brandon al inciso "c" del problema 3 del taller de variación.


c). Ayudaria a los habitantes de la comunidad indigena ya que se pueden construir las casas a medida de que no halla desperdicio de materiales y los habitantes puedan ahorrar dinero.

Además, el profesor en formación da importancia al contexto para acercar el contenido matemático a un estudiante con características diferenciadas, con el fin de captar su atención (ver Figura 117). Idea que concuerda con la de Garcia y Alvarez (2005) quienes mencionan que el profesor debe despertar la curiosidad, el interés y la atención de sus alumnos por el tema o el problema que se va a tratar presentándoles información sorprendente, planteándoles problemas relevantes o definiendo los objetivos generales y específicos que se desean alcanzar.

Figura 117.

Respuesta de Brandon al inciso "a" de la última parte del taller de variación.


a) utilizaria el segundo problema, ya que el contexto del mismo permitiria captar la atencion y el interes del estudiante por resolverlo.

También Brandon menciona la importancia del uso de GeoGebra para favorecer el acercamiento de la noción de variación a los estudiantes con características diferenciadas (ver Figura 118).

Figura 118.

Respuesta de Brandon al cuarto inciso del taller de variación.

b) utilizar un software graficador para observar en los ejercicios, lo que describen las ecuaciones matemáticas, que de allí se abordan y se permita ver y entender el proceso observado.

c) se utilizaron geogebra para graficar las ecuaciones y permito entender un poco más lo trabajado.

Las ideas de Brandon presentadas en la Figura 118, están acorde con las que plantea Meléndez (2021) quien establece que los recursos tecnológicos generan intervenciones enriquecedoras, ya que posibilitan a los estudiantes el observar el cambio y la variación en fenómenos físicos y a modelar estos últimos; propiciando que los conceptos matemáticos incorporados en las explicaciones adquieran significado.

5.1.3 Negociación de significados alcanzados en el taller de función.

En la primera parte del taller (3.4.3) un profesor al que llamaremos P3 pasó al tablero y representó lo que hizo en su hoja de trabajo (ver Figura 119), a lo que el profesor Brandon resaltó un error que estaba cometiendo el profesor P3 como se evidencia en el Episodio 15.

Figura 119.

Respuesta de P3 a la primera parte del taller de función.

Brandon: El error que está teniendo P3 es que está asumiendo que el IPC va a crecer constantemente y ahí no va a crecer constantemente (refiriéndose a la expresión algebraica), va cambiando.

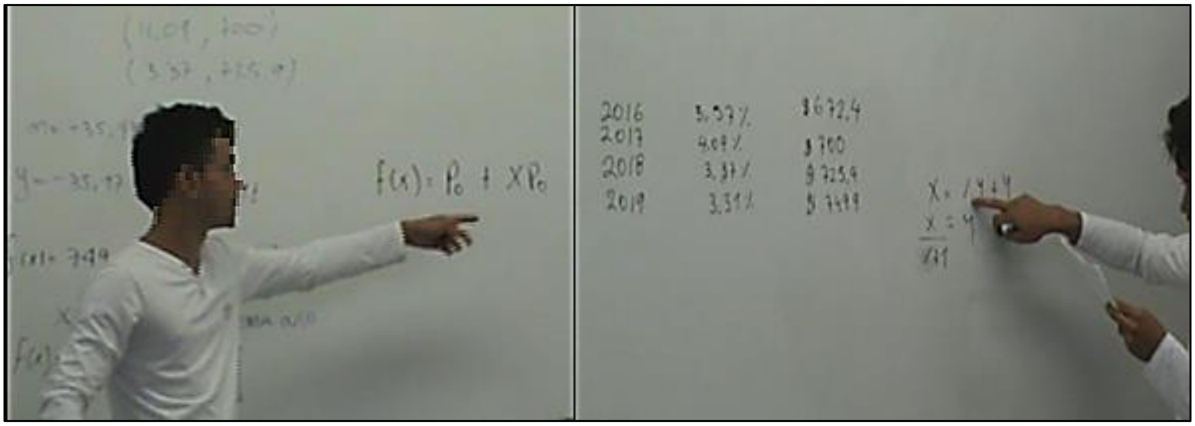
P4: Ahí el error es que pareciera que el IPC tiende a disminuir, pero es falso ya que tiende a crecer, es lo contrario.

Episodio 15

Lo anterior dio paso a que Brandon pasara al tablero y escribiera la expresión algebraica que modelaba la interdependencia entre el IPC anual y el precio del maíz, como se ve en la Figura 120.

Figura 120.

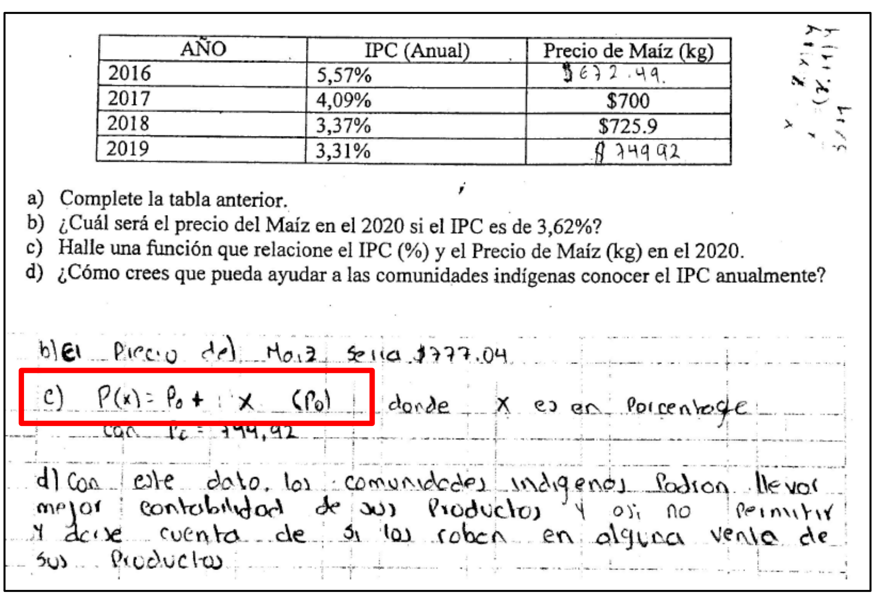
Respuesta de Brandon al primer problema del taller de función.



Al igual que en la ilustración anterior, en su hoja de trabajo se puede evidenciar que Brandon logró completar la tabla a través de cálculos aritméticos y posteriormente expresó analíticamente la función que representaba la independencia entre el IPC (anual) y el precio del maíz (kg), además de mencionar la utilidad que conlleva la solución del problema (ver Figura 121).

Figura 121.

Respuesta de Brandon al primer problema del taller de funciones.



AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	$672.49.
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	$725.9
2019	3,31%	$749.92

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál será el precio del Maíz en el 2020 si el IPC es de 3,62%?
c) Halle una función que relacione el IPC (%) y el Precio de Maíz (kg) en el 2020.
d) ¿Cómo crees que pueda ayudar a las comunidades indígenas conocer el IPC anualmente?

b) El Precio del Maiz seria $777.04

c) $\boxed{P(x) = P_0 + x\ (P_0)}$ donde x es en Porcentaje con $P_0 = 749{,}92$

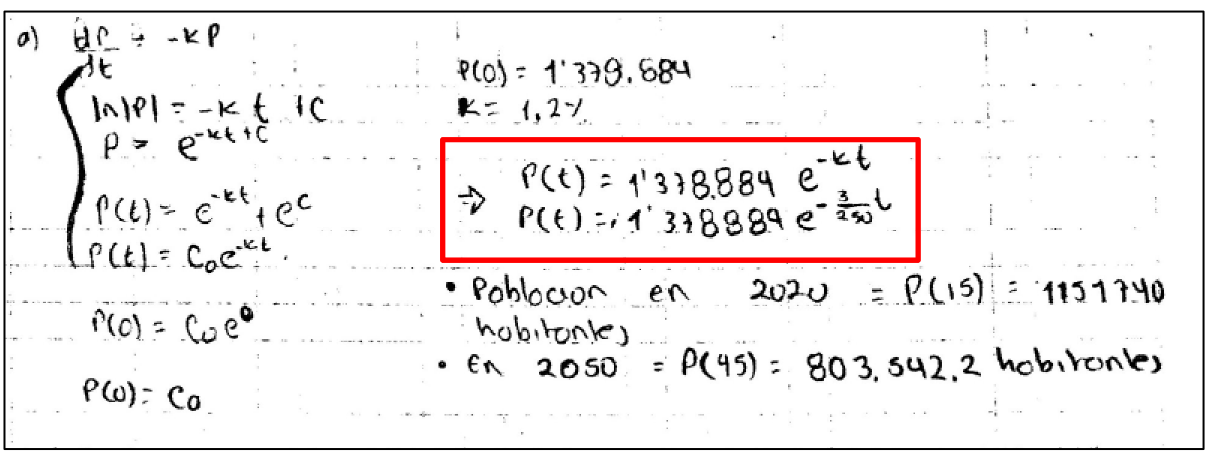
d) Con este dato, los comunidades indigenas Podrian llevar mejor contabilidad de sus Productos y asi no Permitir y darse cuenta de si los roben en alguna venta de sus Productos

En términos de Meléndez (2021) el profesor en formación (Brandon) logró evolucionar su grado de abstracción de la idea de cambio para dar significado al concepto de función, ya que siguió el conjunto de actuaciones que este autor menciona que se deben seguir para dicho fin, entre estas actuaciones se encuentra: el análisis cualitativo con el cual identifica características del fenómeno de cambio, detección de magnitudes variantes e invariantes, la relación de dependencia entre ellas y la generalización de la variable aritmética dando paso a la variable algebraica, para finalmente alcanzar el planteamiento de una función que modele el fenómeno.

En el segundo problema, Brandon planteó una ecuación diferencial para a partir de su solución intentar llegar a plantear la función que representara la interdependencia entre el año y la población indígena, al final encontró una expresión analítica pero no correspondía con la expresión que modelaba la situación (ver Figura 122).

Figura 122.

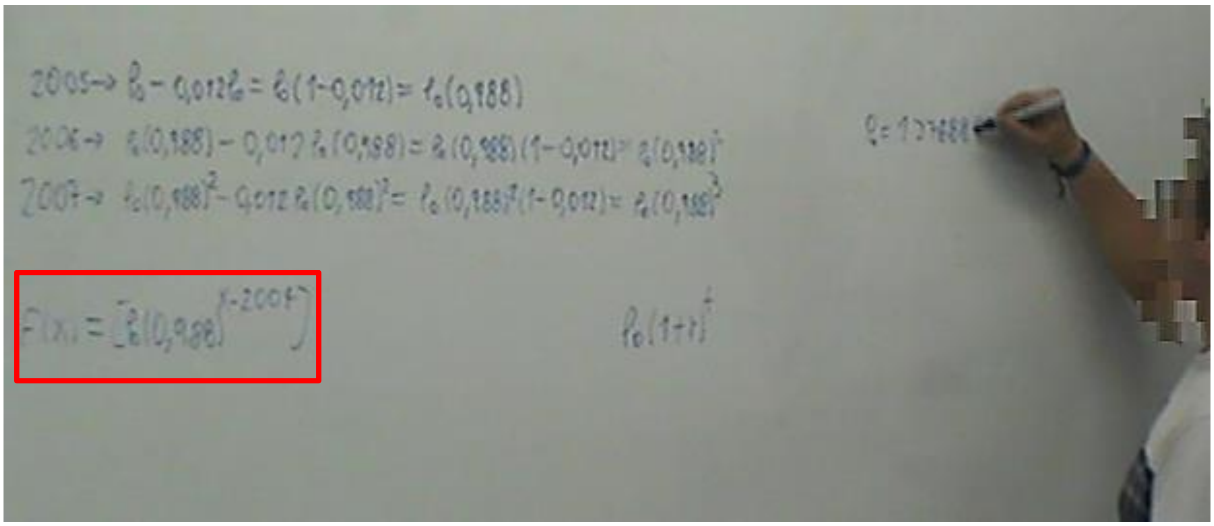
Respuesta de Brandon al segundo problema del taller de funciones.



A diferencia de Brandon, el profesor P5 logró modelar la situación, ya que encontró la relación entre el año y la cantidad de habitantes pertenecientes a la población indígena, año por año hasta notar la secuencia y modelar la situación por medio de una expresión algebraica que representara la interdependencia entre esas variables como se muestra en la Figura 123.

Figura 123.

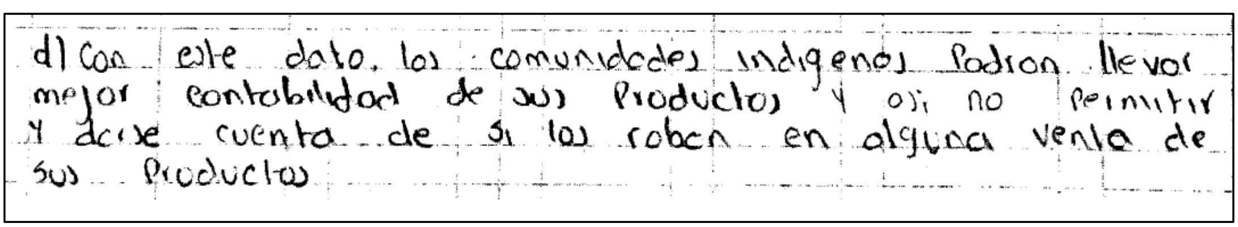
Respuesta de P5 al segundo problema del taller de funciones.



En cuanto al pensamiento didáctico de Brandon en el taller de funciones 3.4.3. Él valora positivamente los problemas contextualizados, mencionando la utilidad que conlleva la solución de los problemas implementados en el taller (ver Figura 124).

Figura 124.

Respuesta de Ignacio al inciso "d" del primer problema del taller de funciones.

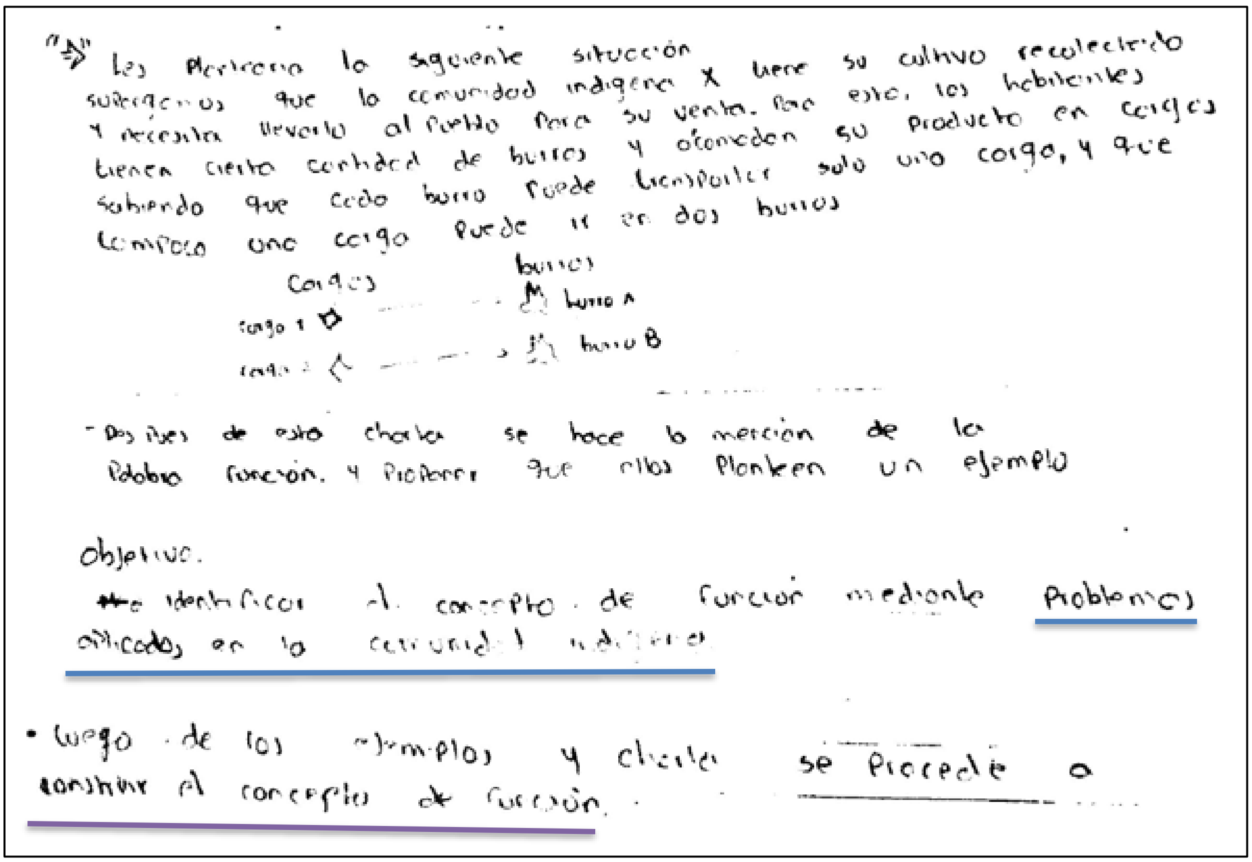


d) Con este dato. las comunidades indigenas podrian llevar mejor contabilidad de sus productos y asi no permitir y darse cuenta de si los roban en alguna venta de sus productos

También, el profesor en formación da importancia al contexto del estudiante al momento de diseñar una situación problema para abordar el tema de funciones con estudiantes indígenas (ver Figura 125), y a través del uso de ejemplos llegar a construir el concepto de función.

Figura 125.

Respuesta de Brando a la segunda parte del taller de funciones.


"3" Les plantearía la siguiente situación suponiendo que la comunidad indígena X tiene su cultivo recolectado y necesita llevarlo al pueblo para su venta. Para esto, los habitantes tienen cierta cantidad de burros y acomodan su producto en cargas sabiendo que cada burro puede transportar solo una carga, y que tampoco una carga puede ir en dos burros

Cargas → burros
carga 1 → burro A
carga 2 → burro B

- Después de esta charla se hace la mención de la palabra función, y proponer que ellos planteen un ejemplo

Objetivo.
Identificar el concepto de función mediante problemas aplicados en la comunidad indígena

• Luego de los ejemplos y charla se procede a construir el concepto de función.

Las ideas de Brandon que se presentan en la Figura 125, concuerdan con lo establecido por Meléndez (2021) quien menciona que la incorporación de fenómenos físicos es adecuada, pues permiten una aproximación a los conceptos matemáticos, desde cuestiones familiares para los estudiantes.

Además de mencionar la importancia de los problemas contextualizados y diseñar un problema ajustado al contexto de los estudiantes indígenas, Brandon da importancia al uso de recursos como el marcador y el tablero (ver Figura 126), que parecieran recursos no tan llamativos para el estudiante pero que se han llegado a consolidar como recursos indispensables en la mayoría de las aulas de clase.

Figura 126.

Respuesta de Brandon a la última parte del taller de funciones.

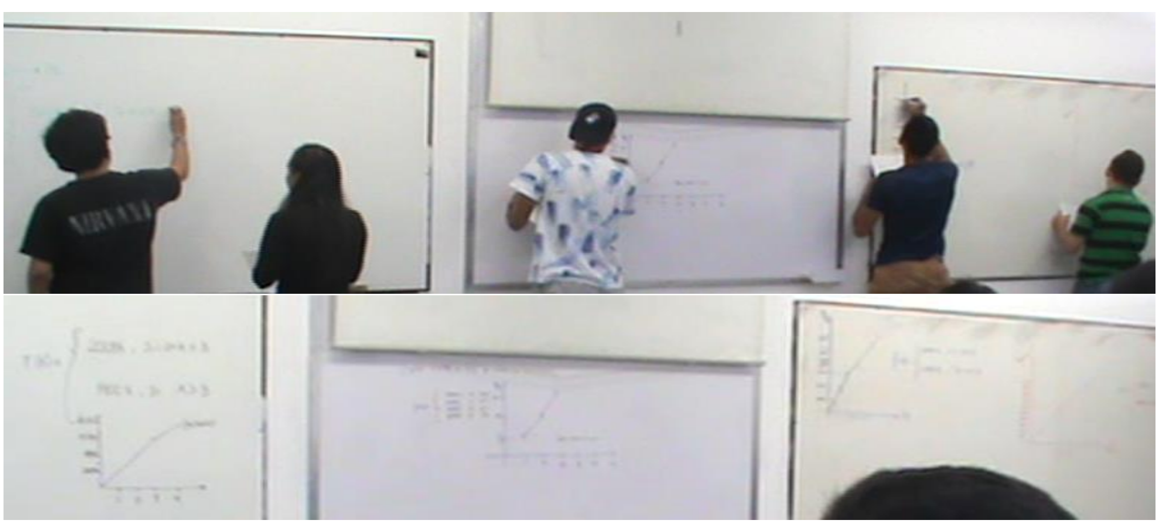
- Recursos
    - tablero
    - marcador
    - borrador de tablero

5.1.4 Negociación de significados alcanzados en el taller de límites.

En la primera parte de este taller, cinco de los profesores pasaron al tablero y representaron tanto gráfica como analíticamente las funciones que creían que modelaban el problema (ver Figura 127).

Figura 127.

Respuesta de los profesores al primer inciso del taller de límites.



Los profesores intentaron modelar la primera situación problema de este taller, pero cometieron algunos errores como el hecho de no articular la representación gráfica con la analítica y algunos de ellos no tenían en cuenta cual era la variable independiente y cual la dependiente así que no lograron graficar adecuadamente la función. En la puesta en común los profesores con la ayuda de sus compañeros lograron ver los errores que habían cometido (ver Episodio 16).

P5: yo creo que la función de P6 y P7 (refiriéndose a sus expresiones analíticas) están bien solo que están mal graficadas. Con la noción de límites podemos corregir ese error, encuentre el límite por derecha y por izquierda.

Moderador: ¿Por qué creen que la función de P6 está mal?

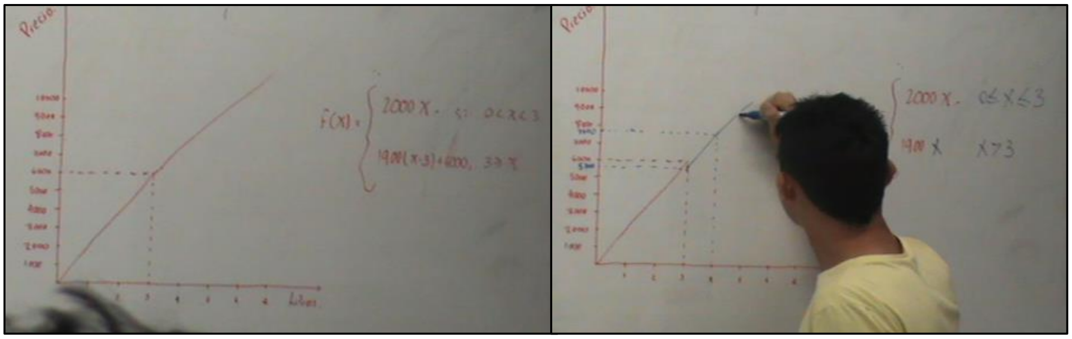
Brandon: La ecuación está bien, aunque hace falta restringir el dominio y no hay que unir las dos rectas.

Episodio 16

Brandon logró identificar los errores que había cometido uno de sus compañeros, y a partir de ello consiguió representar tanto analítica como gráficamente la función que representaba la interdependencia entre los litros de leche y su precio (ver Figura 128).

Figura 128.

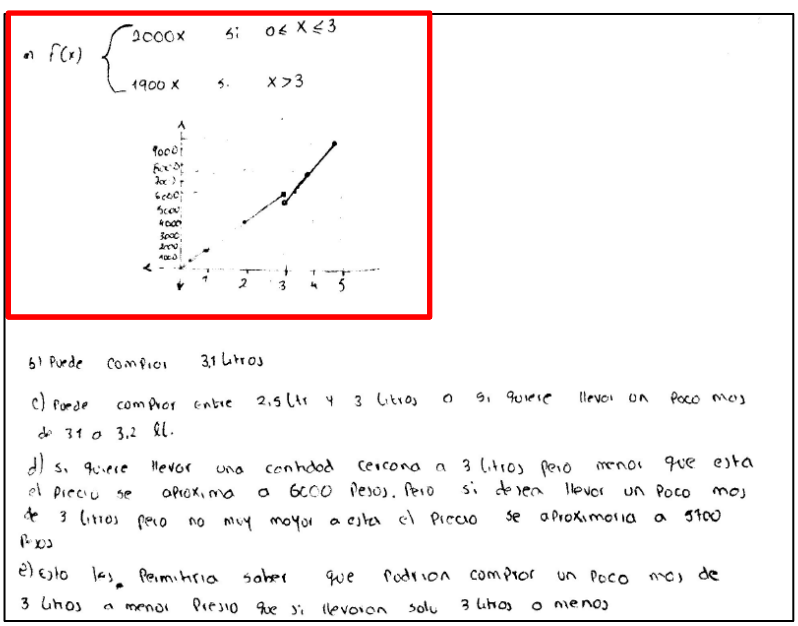
Respuesta de Brandon a la primera parte del taller de límites.



Además de representar analítica y gráficamente la interdependencia entre los litros de leche y su costo, en su hoja de trabajo Brandon respondió a los demás puntos que se encontraban en esta primera parte del taller (ver Figura 129) logrando articular diferentes representaciones de la función para dar solución al problema y mostrar la utilidad de esta.

Figura 129.

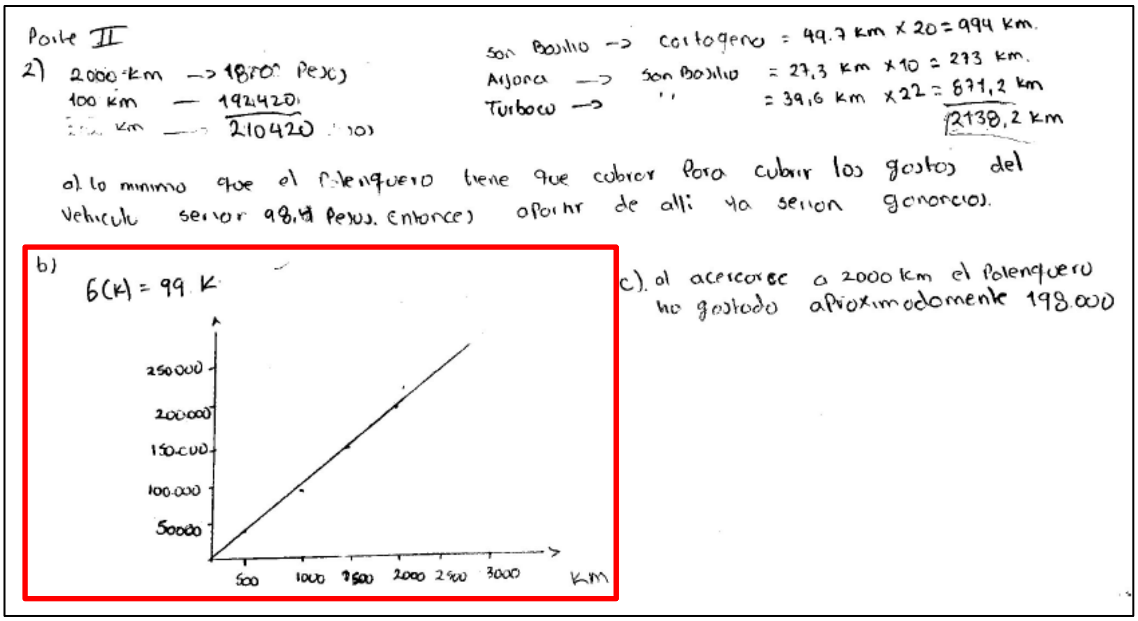
Respuesta de Brandon al primer problema del taller de límites.



En la segunda parte del taller, Brandon logró representar aritmética, gráfica y analíticamente la interdependencia entre los gastos y los kilómetros recorridos dando sustento a sus respuestas (ver Figura 130). El profesor en formación logró modelar la situación problema y articuló las diferentes representaciones de la función que modelaba el problema.

Figura 130.

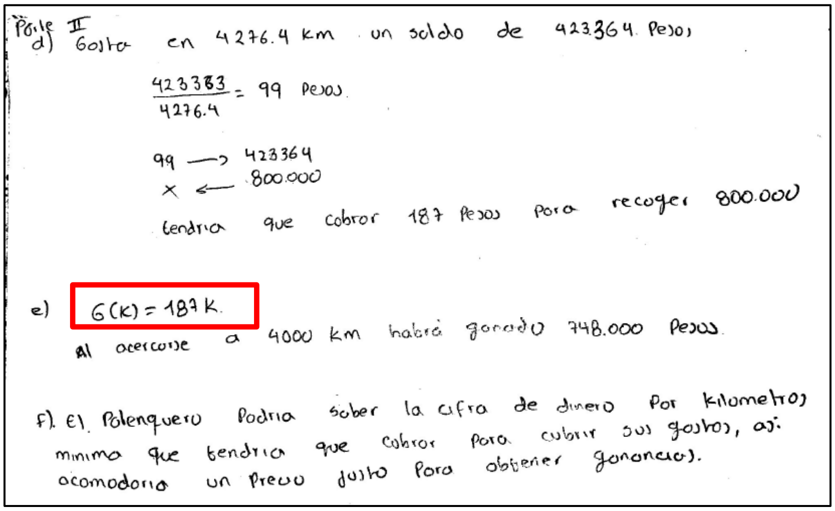
Respuesta de Brandon al segundo problema del taller de límites.



Al igual que con el gasto y los kilómetros, Brandon consiguió representar algebraicamente la interdependencia entre las ganancias y los kilómetros recorridos. Además de encontrar una utilidad a la solución del problema (ver Figura 131).

Figura 131.

Respuesta de Brandon al segundo problema del taller de límites del inciso "d" al "f".

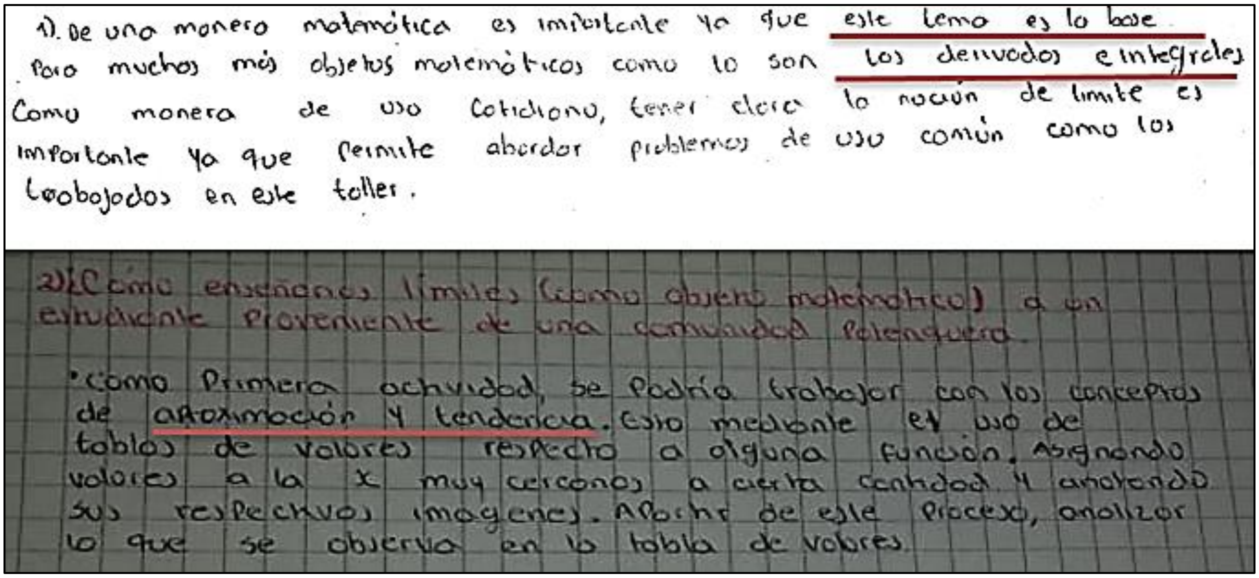


En este taller el profesor en formación logró identificar variantes e invariantes, la dependencia entre ellas y consiguió representar aritmética, algebraica y analíticamente los problemas que se le plantearon a lo largo del taller, articulando estas representaciones para darle solución a los problemas. También logró modelar las situaciones problemas a través de funciones que representaban la interdependencia entre las magnitudes variables que se encontraban inmersas en cada uno de los problemas.

Respecto al conocimiento de Brandon alrededor del concepto de límite, este lo ve como base para la enseñanza del tema de derivadas e integrales en concordancia con lo que establece Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2017); además de resaltar la importancia de enseñar este concepto a través de los conceptos de aproximación y tendencia (ver Figura 132), al igual que lo mencionan Guarín, Parada y Fiallo (2018).

Figura 132.

Respuesta de Brandon a la tercera parte del taller de límites.


1). De una manera matemática es importante ya que este tema es la base para muchos más objetos matemáticos como lo son las derivadas e integrales. Como manera de uso cotidiano, tener clara la noción de límite es importante ya que permite abordar problemas de uso común como los trabajados en este taller.

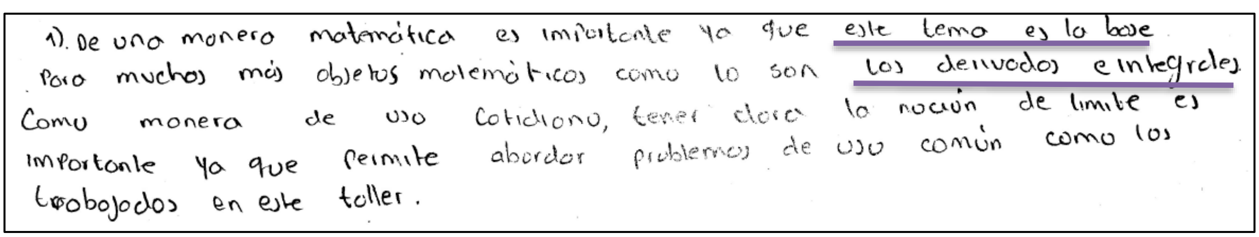
2) ¿Cómo enseñarías límites (como objeto matemático) a un estudiante proveniente de una comunidad palenquera?

• Como primera actividad, se podría trabajar con los conceptos de aproximación y tendencia. Esto mediante el uso de tablas de valores respecto a alguna función. Asignando valores a la x muy cercanos a cierta cantidad y anotando sus respectivas imágenes. A partir de este proceso, analizar lo que se observa en la tabla de valores.

Brandon aparte de mencionar la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del límite como base para construir el concepto de derivada e integral, valora positivamente la utilidad que se puede conseguir en la vida cotidiana al resolver problemas como los trabajados en el taller (ver Figura 133).

Figura 133.

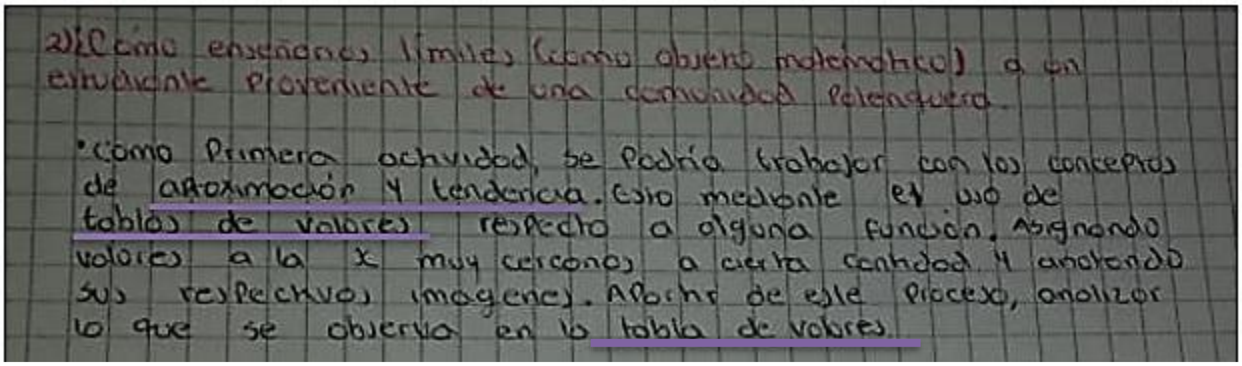
Respuesta de Brandon al primer inciso de la última parte del taller de límites.


1). De una manera matemática es importante ya que este tema es la base para muchos más objetos matemáticos como lo son las derivadas e integrales. Como manera de uso cotidiano, tener clara la noción de límite es importante ya que permite abordar problemas de uso común como los trabajados en este taller.

Además de dar importancia a la contextualización de los problemas, Brandon menciona la importancia de la noción de aproximación y tendencia, al igual que el uso de las diferentes representaciones de la función, para enseñar el tema de límites a un estudiante indígena (ver Figura 134).

Figura 134.

Respuesta de Brandon al inciso 2 y 3 de la última parte del taller de límites.



2) ¿Cómo enseñarías límites (como objeto matemático) a un estudiante proveniente de una comunidad Palenquera.

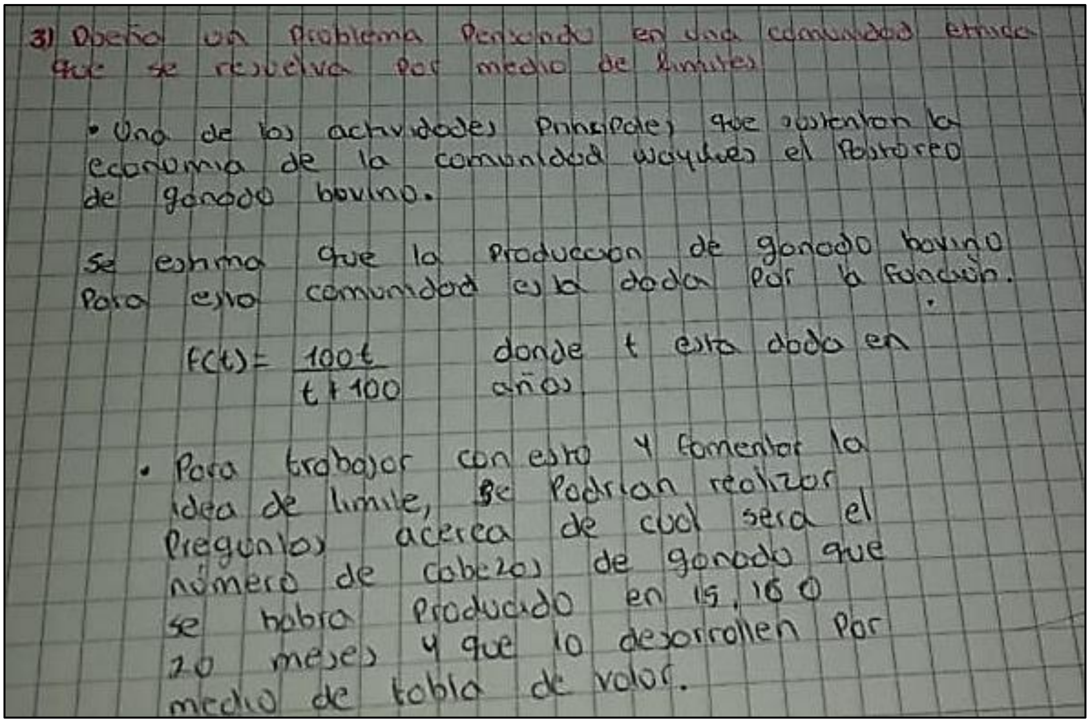
• Como Primera actividad, se Podría trabajar con los conceptos de aproximación y tendencia. Esto mediante el uso de tablas de valores respecto a alguna función. Asignando valores a la x muy cercanos a cierta cantidad y anotando sus respectivas imágenes. A partir de este Proceso, analizar lo que se observa en la tabla de valores.

En este taller se logra evidenciar un avance en el desarrollo del pensamiento didáctico de Brandon ya que en la prueba diagnóstico inicial no tuvo en cuenta el contexto del estudiante, la noción de tendencia o las diferentes representaciones de la función para abordar la enseñanza del límite, contrario a lo que vemos en este taller.

El profesor en formación también da importancia al uso de problemas contextualizados para acercar el concepto de límite a estudiantes indígenas (ver Figura 135).

Figura 135.

Respuesta de Brandon a la última parte del taller de límites.


3) Diseña un problema pensando en una comunidad étnica que se resuelva por medio de límites.

• Una de las actividades principales que sostentan la economía de la comunidad wayuu es el pastoreo de ganado bovino.

Se estima que la producción de ganado bovino para esta comunidad es la dada por la función.

$$f(t) = \frac{100t}{t+100}$$ donde t está dado en años

• Para trabajar con esto y fomentar la idea de límite, se podrían realizar preguntas acerca de cuál será el número de cabezas de ganado que se habrá producido en 15, 16 o 20 meses y que lo desarrollen por medio de tabla de valor.

Situación problema que en concordancia con Meléndez (2021) es eficiente pues permite una aproximación a los conceptos matemáticos, desde cuestiones familiares para los estudiantes.

5.1.5 Negociación de significados alcanzados en el taller de derivadas.

El taller de derivadas 3.4.5 aplicado en la segunda intervención fue dividido en dos: el taller 4.1 y el taller 4.2. Estos dos talleres se realizaron de manera diferente a la habitual, ya que aunque los profesores en formación en cada uno de los otros talleres realizados anteriormente habían contado con acceso a GeoGebra y DGpad, estos principalmente apoyaron sus respuestas en lo realizado en sus hojas de trabajo; en estos dos talleres se trabajó sobre archivos diseñados en GeoGebra los cuales les permitieran visualizar de forma dinámica la variación y el cambio, estos taller fueron basados en los creados por Fiallo y Parada (2018).

Respecto a las respuestas de Brandon en el taller 4.1 de derivadas, el profesor inicialmente realizó la construcción de una caja con tapa a través de medidas estándar que consideró empíricamente sin realizar anteriormente los cálculos adecuados para llegar a la construcción de la caja con tapa que tuviera el mayor volumen (ver Figura 136).

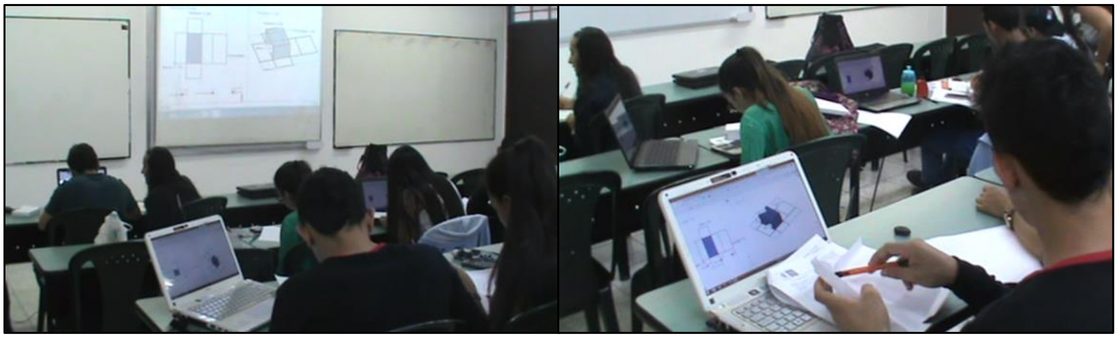
Figura 136.

Caja con tapa construida por Brandon.

Después de haber construido la caja, se les presentó un archivo en GeoGebra en el cual se presentaba la forma en que variaba el volumen de la caja a medida que cambiaban sus dimensiones, a lo que Brandon manipuló el archivo e intentó modificar su caja para tener el mayor volumen (ver Figura 137) pero esta vez con apoyó de GeoGebra y basado en el procedimiento algebraico que siguió haciendo uso de la derivada.

Figura 137.

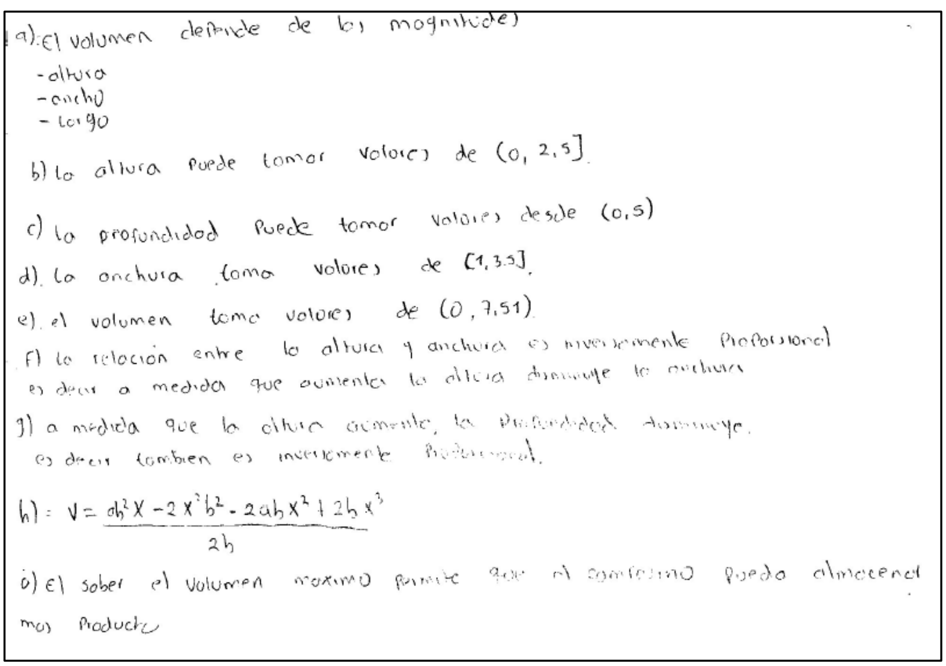
Uso del archivo de GeoGebra por parte de Brandon.



Brandon a través de la exploración del archivo de GeoGebra consiguió plantear algunas conjeturas (ver Figura 138) que posteriormente le ayudarían a dar solución al problema, como la forma en que varía el volumen, la altura, el largo y el ancho de la caja.

Figura 138.

Conjeturas planteadas por Brandon en el taller de derivadas 4.1.


a): El volumen depende de las magnitudes
- altura
- ancho
- largo

b) la altura puede tomar valores de (0, 2,5]

c) la profundidad puede tomar valores desde (0,5)

d) la anchura toma valores de [1, 3.5]

e) el volumen toma valores de (0, 7,51)

f) la relación entre la altura y anchura es inversamente proporcional es decir a medida que aumenta la altura disminuye la anchura

g) a medida que la altura aumenta, la profundidad disminuye. es decir tambien es inversamente proporcional.

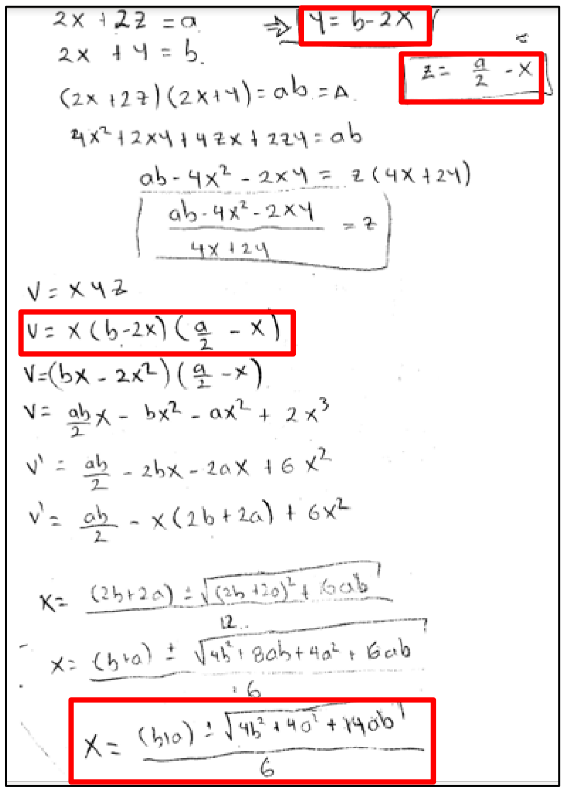
h): $V = \frac{ab^2x - 2x^2b^2 - 2abx^2 + 2bx^3}{2b}$

i) el saber el volumen maximo permite que el comerciante pueda almacenar mas productos

En cuanto al tratamiento algebraico, Brandon logró representar la relación entre el ancho y la altura, y el largo y la altura, para posteriormente encontrar una función que representara la interdependencia entre el volumen de la caja y su altura (ver Figura 139).

Figura 139.

Respuesta de Brandon al problema del taller de derivadas 4.1.



Brandon usó las reglas de derivación para encontrar el valor de la altura (x) que hacía que el volumen de la caja fuese máximo, aunque lo dejó expresado para cualquier valor del largo (a) y de alto (b) del material (cartón) que se usa como base para la construcción de la caja con tapa. Se evidencia que Brandon realizó un tratamiento algebraico adecuado y un uso correcto de las reglas de derivación para encontrar la solución del problema.

Al momento de la puesta en común algunos de los profesores en formación, al igual que Brandon, lograron encontrar las ecuaciones que relacionaban la anchura con la altura, la profundidad con la altura para posteriormente encontrar una expresión algebraica que representara el volumen de la caja en función de la altura como se ve en el Episodio 17.

Moderador: ¿De qué magnitudes depende el volumen de la caja?

Brandon: altura, anchura y profundidad.

Moderador: ¿Qué valores puede tomar la altura?

P8: de 0 a 2.5, sin tomar el cero porque el volumen de la caja sería cero.

P9: pasa lo mismo con 2.5, porque la profundidad sería 0.

Moderador: ¿Qué valores puede tomar la anchura y la profundidad?

P8: la anchura de 1 a 3.5 y la profundidad desde 0 hasta 5.

Moderador: La altura puede ir desde 0 hasta 3.5 pero debido a la forma de la construcción del archivo solo va desde 1 hasta 3.5.

Moderador: ¿Cuál sería la relación entre la altura y la anchura?

P4: la anchura es “a” medios menos equis (refiriéndose a que la anchura es la mitad del lado “a” de la caja menos su altura)

Moderador: ¿Cuál sería la relación entre la profundidad y la altura?

Brandon: que la profundidad es el lado “b” de la caja menos dos veces la altura.

Moderador: ¿Cuál sería la expresión algebraica que representa la interdependencia entre el volumen de la caja y su altura?

P5: las relaciones que encontramos se remplazan en la ecuación del volumen que es alto por ancho por profundidad, quedando el volumen en función de la altura.

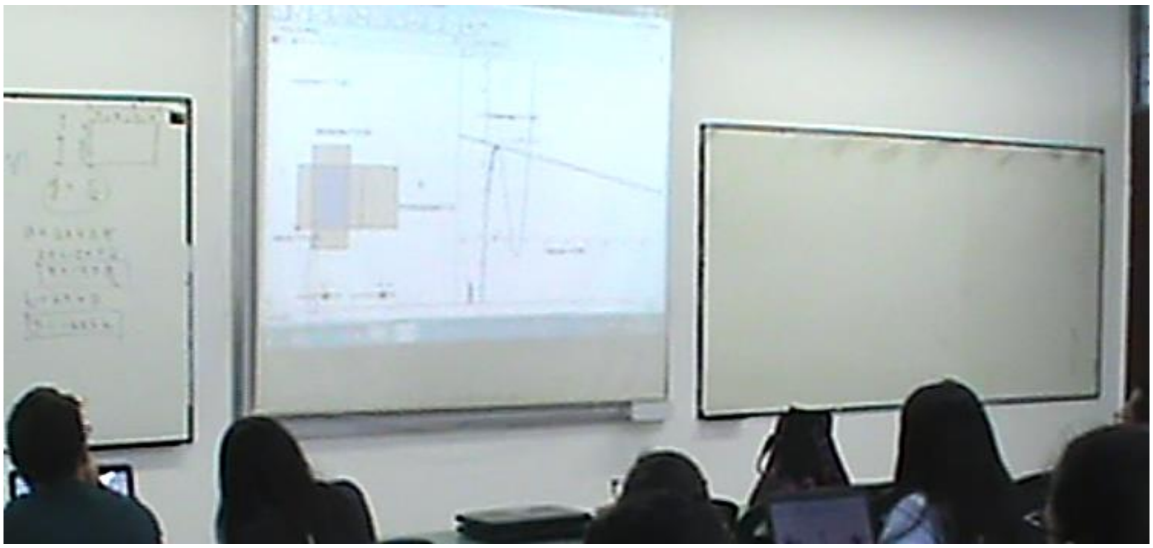
Episodio 17

Además, a través del uso de GeoGebra (ver Figura 140) los profesores lograron relacionar y/o significar la pendiente de la recta tangente como derivada. Qué según Gutiérrez, Buitrago y

Ariza (2017) representa una dificultad para los estudiantes el significar la derivada como pendiente de la recta tangente y como razón de cambio.

Figura 140.

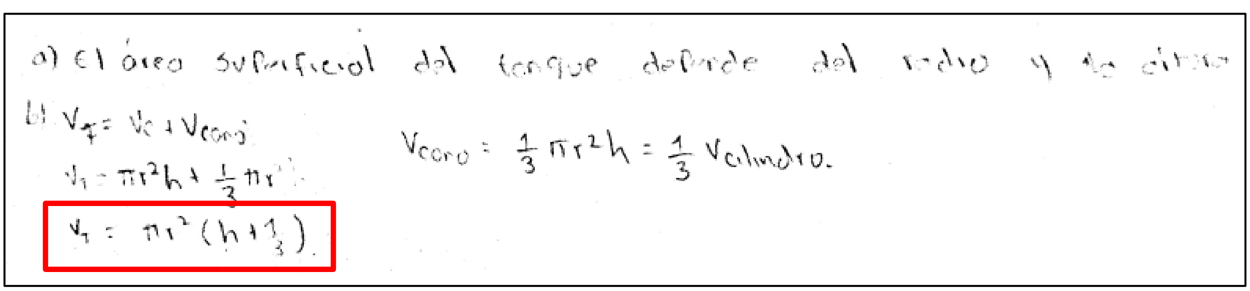
Derivada como pendiente de la recta tangente problema 4.1.



En el problema planteado en el taller de derivadas 4.2, Brandon logró plantear algunas conjeturas apoyando sus respuestas a través del archivo de GeoGebra destinado para este taller, señalando las magnitudes variantes y la forma en la que variaban (ver Figura 141).

Figura 141.

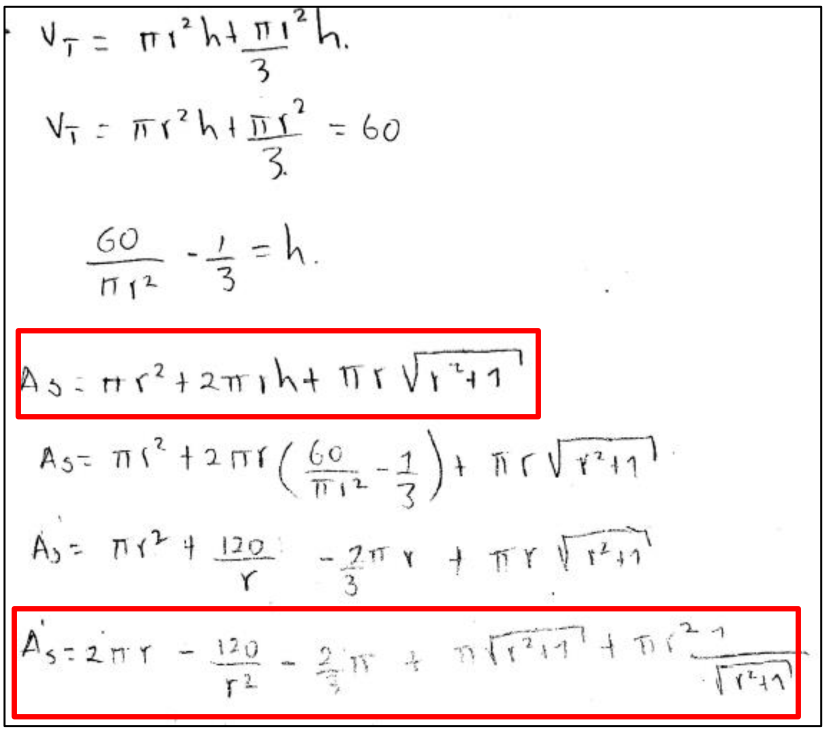
Conjeturas planteadas por Brandon al taller de derivadas 4.2.



A través de estas conjeturas el profesor en formación consiguió hallar la relación entre la altura del cilindro y el radio del tanque, para posteriormente encontrar una función que representara la interdependencia entre el área superficial del tanque y su radio (ver Figura 142).

Figura 142.

Respuesta de Brandon al problema del taller de derivadas 4.2.



Al aplicar la derivada Brandon dio cuenta de las limitaciones que en ocasiones puede tener la representación algebraica en un problema, ya que al igualar a cero la derivada del área superficial se vuelve una labor compleja el despejar el radio para encontrar el valor de este que haga que el área superficial sea mínima. El profesor en formación da cuenta de cómo el software dinámico GeoGebra juega un papel importante en la solución del problema (ver Episodio 18), ya que al representar gráficamente la función del área superficial se pueden encontrar los valores del radio en donde ocurren mínimos locales y restringiendo el dominio de la función encontrar el radio que hace que el área superficial sea mínima.

Moderador: ¿Cuál sería el radio que hace que el área superficial sea mínima?

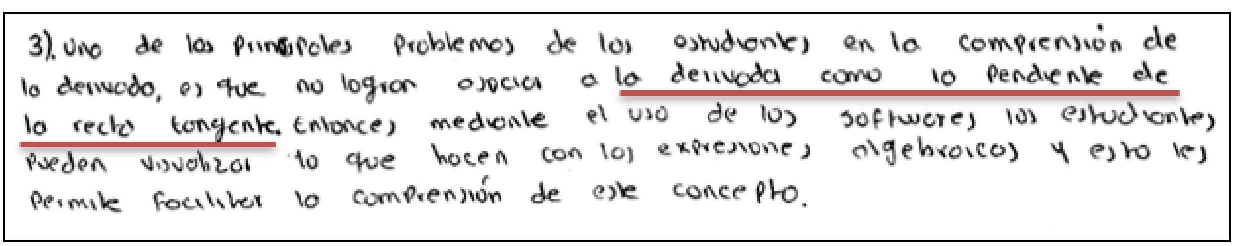
Brandon: Profe, yo hice la derivada del área superficial en función del radio, pero cuando igualé a cero el área superficial no pude despejar el radio y con GeoGebra el radio me dio 2,18 y el área superficial aproximadamente 81,84.

Episodio 18

Respecto al conocimiento alrededor de la derivada por parte del Brandon, el profesor logra usar adecuadamente las reglas de derivación para abordar los problemas, además de significar la derivada como pendiente de la recta tangente (ver Figura 143) y como razón de cambio (lo cual se hace visible en los problemas que diseñó en su proyecto).

Figura 143.

Respuesta de Brandon en la tercera parte del taller de derivadas 4.2.

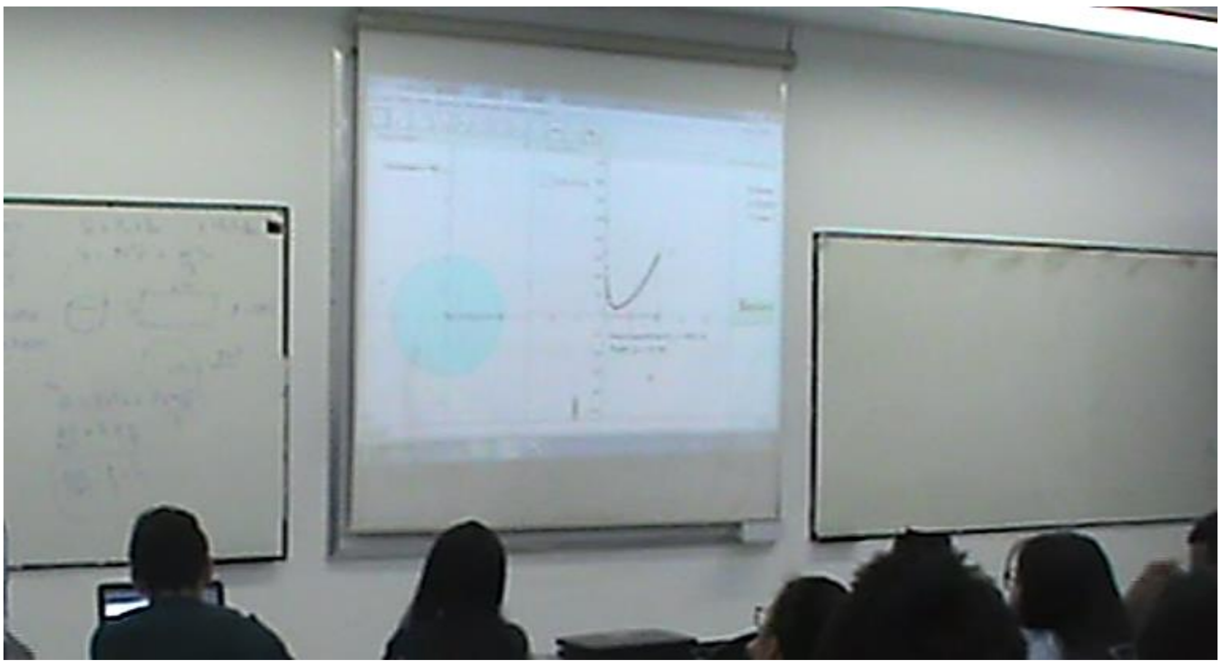

3). Uno de los principales problemas de los estudiantes en la comprensión de la derivada, es que no logran asociar a la derivada como la pendiente de la recta tangente. Entonces mediante el uso de los softwares los estudiantes pueden visualizar lo que hacen con las expresiones algebraicas y esto les permite facilitar la comprensión de este concepto.

La idea mostrada en la Figura 143 apunta a la idea de Villa y Ruiz (2010) quienes proponen el uso del software GeoGebra para el diseño de estrategias que potencien el desarrollo del pensamiento variacional en el alumnado. Además, el uso de GeoGebra favorece las habilidades ligadas a la visualización matemática que para Hitt (2003) son primordiales al momento de abordar los problemas de aprendizaje de los estudiantes y profesores sobre los conceptos relacionados con el cálculo diferencial: función, límite y derivada.

Al igual que Brandon, en la puesta en común los profesores en formación lograron modelar el área superficial en función del radio y posteriormente significar la derivada como pendiente de la recta tangente, encontrando que la mínima área superficial se encontraba cuando la pendiente de la recta tangente fuera cero (ver Figura 144)

Figura 144.

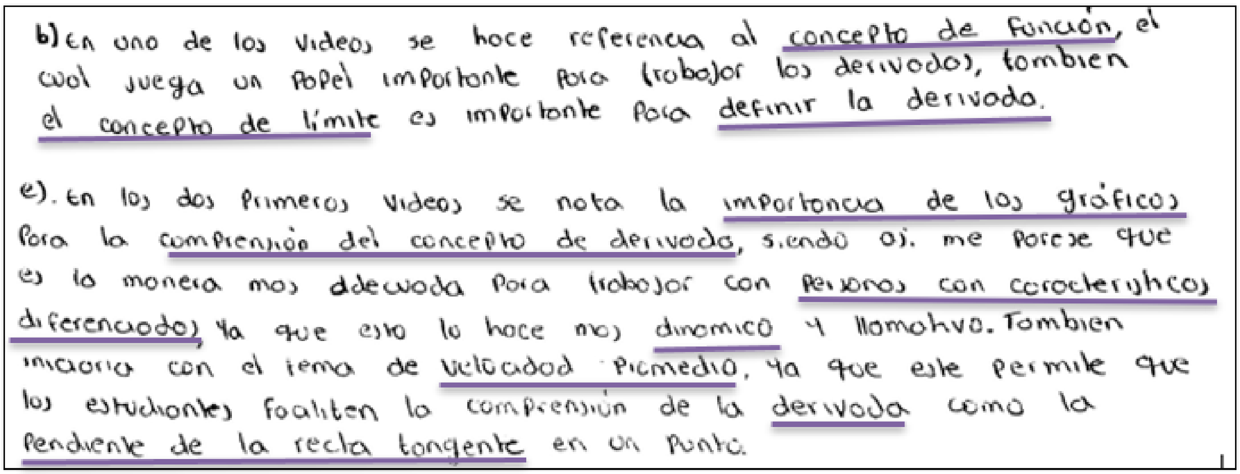
Puesta en común taller de derivadas 4.2.



En la segunda parte del taller de derivadas 4.1, Brandon al ver videos sobre como introducir el tema de derivadas, menciona la importancia que tiene el tema de funciones y límites al abordar el concepto de derivada, tal y como lo mencionan Ariza, Buitrago y Gutiérrez (2017). Brandon afirma que el hecho de usar representaciones gráficas de la derivada favorece el aprendizaje de los estudiantes con características diferenciadas ya que se puede ver este concepto de manera dinámica (Fiallo y Parada, 2018). También da importancia al tema de la velocidad promedio (refiriéndose a la velocidad instantánea) para significar la derivada como pendiente de la recta tangente (ver Figura 145).

Figura 145.

Repuesta de Brandon a los aspectos didácticos del taller de derivadas 4.1.

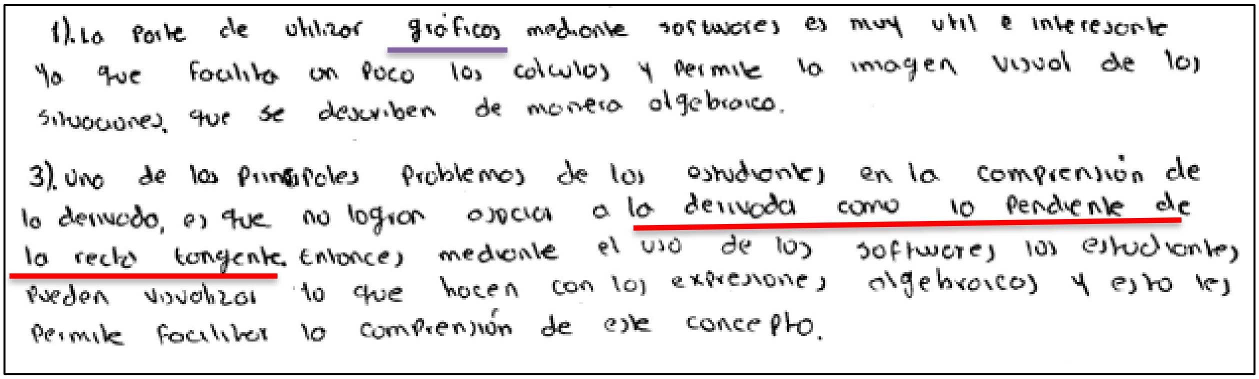

b) En uno de los videos se hace referencia al concepto de función, el cual juega un papel importante para trabajar los derivados, tambien el concepto de límite es importante para definir la derivada.

e). En los dos primeros videos se nota la importancia de los gráficos para la comprensión del concepto de derivada, siendo así me parece que es la manera mas adecuada para trabajar con personas con caracteristicas diferenciadas ya que esto lo hace mas dinamico y llamativo. Tambien mejoraria con el tema de velocidad promedio, ya que este permite que los estudiantes faciliten la comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto.

Además, Brandon da importancia al uso de la representación gráfica (de la función que modela la situación) a través de software de geometría dinámica para favorecer la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes con características diferenciadas y significarla como pendiente de la recta tangente (ver Figura 146).

Figura 146.

Respuesta de Brandon a los aspectos didácticos del taller de derivadas 4.2.

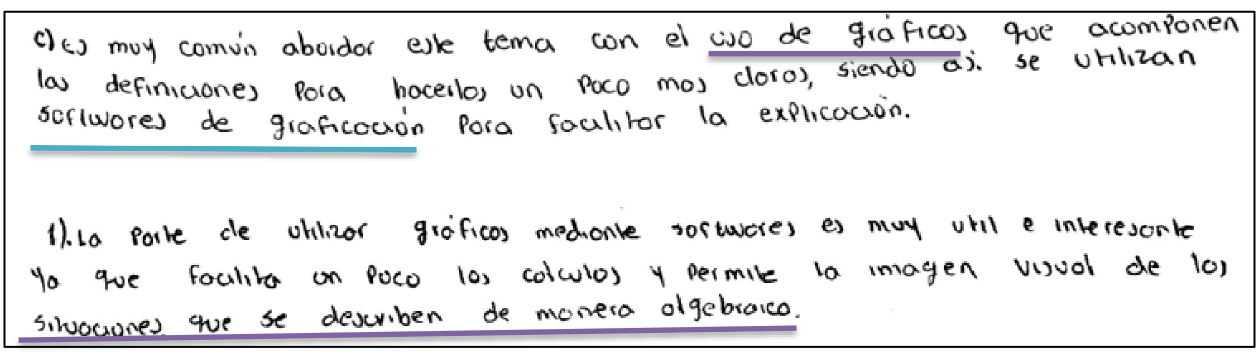

1). La parte de utilizar gráficos mediante softwares es muy útil e interesante ya que facilita un poco los calculos y permite la imagen visual de las situaciones que se describen de manera algebraica.

3). Uno de los principales problemas de los estudiantes en la comprensión de la derivada, es que no logran asociar a la derivada como la pendiente de la recta tangente. Entonces mediante el uso de los softwares los estudiantes pueden visualizar lo que hacen con las expresiones algebraicas y esto les permite facilitar la comprensión de este concepto.

También, Brandon resalta la importancia del uso de software de geometría dinámica como GeoGebra para acercar el tema de derivadas a los estudiantes con características diferenciadas (ver Figura 147).

Figura 147.

Respuesta de Brandon a la última parte del taller de derivadas 4.1 y 4.2.


c) Es muy común abordar este tema con el uso de gráficos que acompañen las definiciones para hacerlos un poco mas claros, siendo así se utilizan softwares de graficación para facilitar la explicación.

1). La parte de utilizar gráficos mediante softwares es muy útil e interesante ya que facilita un poco los calculos y permite la imagen visual de las situaciones que se describen de manera algebraica.

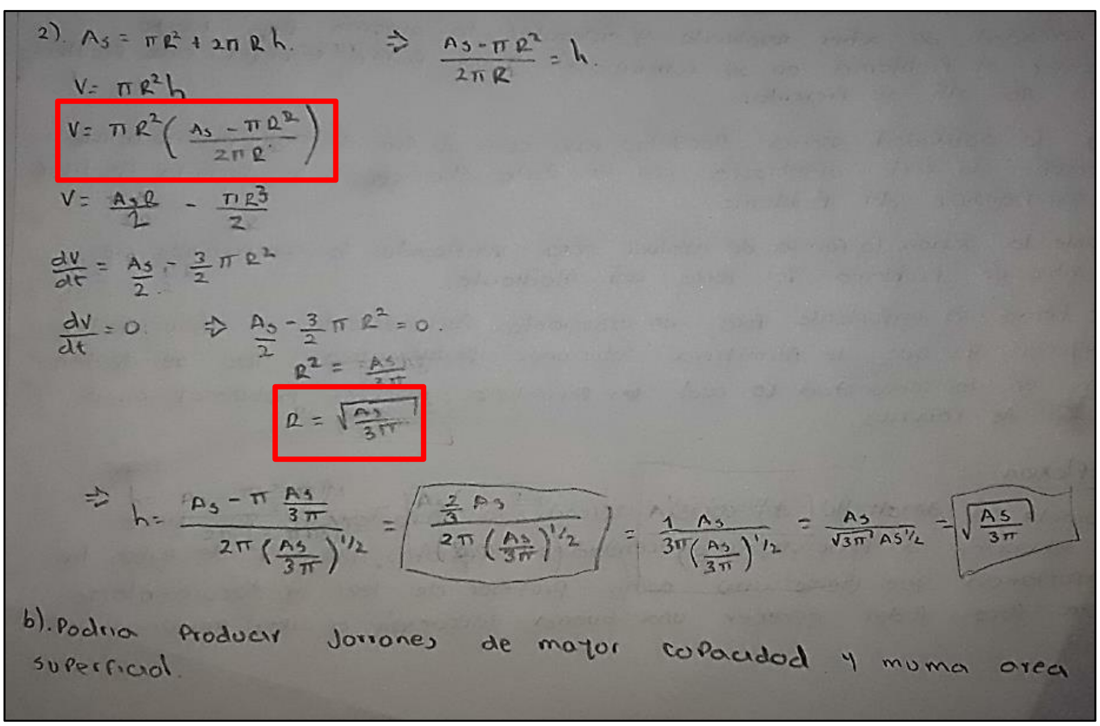
Las ideas mostradas en la Figura 147 concuerdan con las de Meléndez (2021) quien considera las tecnologías digitales como excelentes herramientas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, y su incorporación controlada puede favorecer aspectos como: una aproximación a la enseñanza de las matemáticas vía la modelación de fenómenos del mundo físico, el logro de la transversalidad en la enseñanza de distintas materias de estudio, entre otros.

5.1.6 Negociación de significados alcanzados en el taller prueba diagnóstico final.

En la prueba diagnóstica final 3.4.6, el profesor en formación consiguió encontrar la relación entre la altura del cilindro y su radio por medio del área superficial fija (As), para posteriormente encontrar la función que representa la interdependencia entre el volumen y su radio, y así lograr a través del uso de las reglas de derivación encontrar las dimensiones del radio y la altura que hacen que el cilindro tenga volumen máximo para un área superficial fija As (ver Figura 148).

Figura 148.

Respuesta de Brandon al segundo problema de la prueba diagnostico final.



2) $As = \pi R^2 + 2\pi R h.$ $\Rightarrow$ $\frac{As - \pi R^2}{2\pi R} = h.$

$V = \pi R^2 h$

$\boxed{V = \pi R^2 \left(\frac{As - \pi R^2}{2\pi R} \right)}$

$V = \frac{As R}{2} - \frac{\pi R^3}{2}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{As}{2} - \frac{3}{2}\pi R^2$

$\frac{dV}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{As}{2} - \frac{3}{2}\pi R^2 = 0.$

$R^2 = \frac{As}{3\pi}$

$\boxed{R = \sqrt{\frac{As}{3\pi}}}$

$\Rightarrow h = \frac{As - \pi \frac{As}{3\pi}}{2\pi \left(\frac{As}{3\pi}\right)^{1/2}} = \boxed{\frac{\frac{2}{3} As}{2\pi \left(\frac{As}{3\pi}\right)^{1/2}}} = \frac{1 \quad As}{3\pi \left(\frac{As}{3\pi}\right)^{1/2}} = \frac{As}{\sqrt{3\pi}\, As^{1/2}} = \boxed{\sqrt{\frac{As}{3\pi}}}$

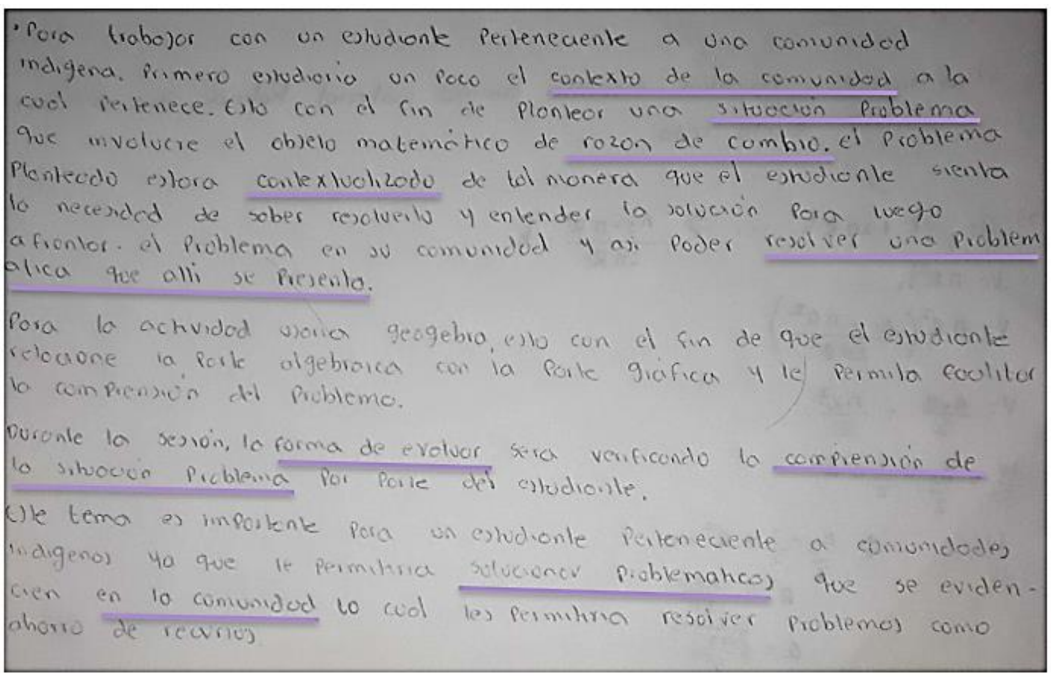
b). Podria producir jarrones de mayor capacidad y misma area superficial.

En cuanto al pensamiento variacional de Brandon a lo largo de los diferentes talleres, se puede evidenciar que el profesor en formación logró identificar las variantes e invariantes inmersas en los problemas, y su dependencia. Además, pudo modelar los problemas por medio de funciones que representaban la interdependencia entre las magnitudes inmersas en las situaciones problemas, articular sus diferentes registros (gráfico, analítico y numérico) y realizar tratos algebraicos adecuados para darle solución al problema.

En la segunda parte del taller, Brandon menciona la importancia de la contextualización para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la derivada como razón de cambio a los estudiantes indígenas, además da importancia a la utilidad que conlleva el solucionar problemas del contexto a través del uso de las derivadas, como el ahorro de recursos al interior de la comunidad (ver Figura 149).

Figura 149.

Respuesta de Brandon a la última parte de la prueba diagnostico final.


• Para trabajar con un estudiante perteneciente a una comunidad indígena. Primero estudiaría un poco el contexto de la comunidad a la cual pertenece. Esto con el fin de plantear una situación problema que involucre el objeto matemático de razón de cambio. el problema planteado estaría contextualizado de tal manera que el estudiante sienta la necesidad de saber resolverlo y entender la solución para luego afrontar. el problema en su comunidad y así poder resolver una problemática que allí se presenta.

Para la actividad usaría geogebra, esto con el fin de que el estudiante relacione la parte algebraica con la parte gráfica y le permita facilitar la comprensión del problema.

Durante la sesión, la forma de evaluar sería verificando la comprensión de la situación problema por parte del estudiante.

Este tema es importante para un estudiante perteneciente a comunidades indígenas ya que le permitiría solucionar problemáticas que se evidencien en la comunidad lo cual les permitiría resolver problemas como ahorro de recursos

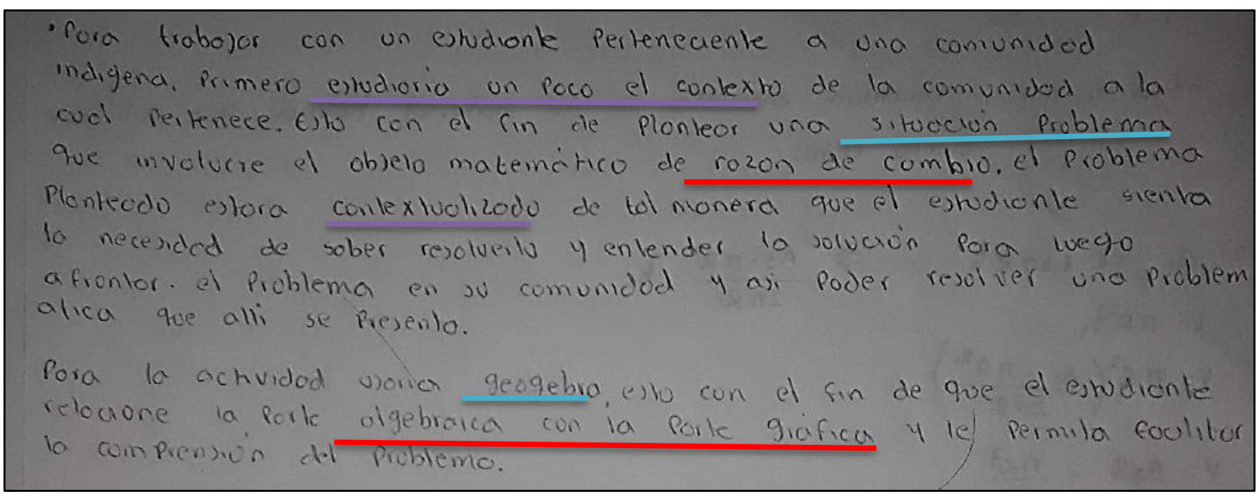
Aparte de mencionar las adaptaciones curriculares que haría, el profesor en formación menciona la forma de evaluar al estudiante por medio de la comprensión de la situación problema.

A diferencia de la prueba diagnóstico inicial, en la prueba diagnostico final Brandon tiene en cuenta las características de su estudiante y su contexto para enseñarle a partir de ello, esto evidencia un desarrollo en cuanto a su pensamiento didáctico al ir reflexionando sobre diversas adaptaciones curriculares y la forma de evaluar a los estudiantes con características diferenciadas.

Al igual que en los talleres anteriores, Brandon menciona en su hoja de trabajo la importancia del contexto al momento de diseñar problemas, al igual que el uso de GeoGebra para acercar el tema de derivadas (como razón de cambio) a un estudiante indígena (ver Figura 150).

Figura 150.

Respuesta de Brandon a la última parte de la prueba diagnóstica final.


• Para trabajar con un estudiante perteneciente a una comunidad indigena, Primero estudiaria un poco el contexto de la comunidad a la cual pertenece. Esto con el fin de Plantear una situación Problema que involucre el objeto matemático de razon de cambio. el Problema Planteado estaria contextualizado de tal manera que el estudiante sienta la necesidad de saber resolverlo y entender la solución para luego afrontar el Problema en su comunidad y asi Poder resolver una Problematica que alli se Presenta.

Para la actividad usaria geogebra, esto con el fin de que el estudiante relacione la Parte algebraica con la Parte grafica y le Permita facilitar la comprensión del Problema.

5.2 Proceso de Negociación de significados de Brandon en los avances de su proyecto.

Brandon junto con su compañera Lisbeth, llevaron a cabo un proyecto en donde cosificaron cada uno de los significados negociados a lo largo de los talleres y las demás actividades que se dieron al interior del curso.

Su proyecto consistió en el diseño de algunos problemas contextualizados para enseñar la derivada como razón de cambio a un estudiante proveniente de la comunidad indígena Wayúu. Cabe mencionar que Brandon estuvo a cargo de la discusión sobre los aspectos didácticos de la derivada en donde se discutió sobre sus dificultades; además de hablar de la derivada vista como pendiente de la recta tangente, límite del cociente incremental y como razón de cambio. De donde Brandon extrajo ideas para llevar a cabo su proyecto.

Inicialmente estos profesores realizaron un estudio documental sobre la comunidad indígena Wayúu, en donde consultaron paginas como la ONIC (Organización Nacional Indígena Colombiana) y extrajeron información sobre su localización geográfica, sus costumbres y actividades económicas.

Posteriormente prepararon una entrevista semiestructurada en donde le realizaban algunas preguntas al estudiante indígena Wayúu sobre su contexto, pero no fue posible implementarla debido a las medidas de prevención contra la propagación del Covid-19 por parte de la UIS. Se contactó con el estudiante a través de correos electrónicos y se le envió la entrevista por este medio, pero por motivos personales el estudiante indígena no pudo hacer llegar sus respuestas; y por la misma situación no se pudo realizar la implementación del proyecto con este estudiante, por lo que se decidió dejar planteado el proyecto.

Para realizar el diseño de los problemas los profesores revisaron el libro guía (2019-2), el cual es el libro de Zill para cálculo cuarta edición, en donde en la sección de derivadas como razón de cambio tomaron algunos problemas base y posteriormente usaron la información obtenida en el estudio documental para adaptarlos al contexto de la comunidad indígena Wayúu.

El primer problema que rediseñaron los profesores lo llamaron “caminata por el agua”, este problema está relacionado con el trayecto que hacen los indígenas Wayúu para recolectar agua y la derivada como razón de cambio (ver Figura 151). Cabe mencionar, que, aunque el profesor Brandon intentó adaptar el problema al contexto real de la comunidad Wayúu decidió usar las unidades de medida que se usan en los problemas del libro y del curso que se desarrolla en la UIS, dado que además permite trabajar la conversión de unidades de medida.

Figura 151.

Problema 1 diseñado por Lisbeth y Brandon.

Una de las problemáticas que se evidencio en el análisis documental fue la gran dificultan que presentan los habitantes de la comunidad indígena Wayú a la hora de recolectar agua para su consumo habitual. Con base en eso se presentan los siguientes problemas contextualizados que hacen referencia a las largas caminatas que las mujeres de la comunidad deben realizar para conseguir el preciado líquido, y a la estrategia que usan en las fuertes lluvias para recolectarla.

4.4.1 Caminata por el agua.

Respecto al control, uso y manejo físico del agua, en la comunidad Wayú, son las mujeres, niños y niñas los encargados de acarrear y buscar el preciado líquido, que en pimpinas de 20 a 25 litros son transportados en animales como asnos hasta la comunidad. En ocasiones, cuando la mujer Wayú no cuenta con animales (asnos) disponibles le corresponde realizar largas caminatas para llegar a los pozos, casimbas o jagüeyes.

En una mañana dos mujeres de la comunidad Wayú se disponen a salir a recolectar agua. Una de ella se dirige hacia un jagüey ubicado hacia el norte a una distancia de 2 km a una velocidad de 2 pies/ segundo. La otra mujer se dirige hacia un jagüey ubicado en el oeste a una distancia de 3 km a una velocidad de 2.3 pies/segundo.

a) ¿Con que rapidez crece la distancia entre las dos mujeres cuando la mujer que va hacia el norte está a 300 m de la aldea y la que va hacia el oeste está a 500 m de la aldea?
b) ¿Cuándo la mujer que va hacia el norte llega al jagüey, a que razón crece la distancia entre las mujeres? (sugerencia: Use $d = vt$)

El segundo problema rediseñado fue titulado “Estrategia de goteo”, está relacionado con la recolección de agua y la derivada como razón de cambio (ver Figura 152).

Figura 152.

Problema 2 diseñado por Lisbeth y Brandon.

4.4.2 Estrategia de goteo.

Antiguamente hacia la época de fuertes tempestades, en la comunidad Wayú construían sistemas de goteo (Orificio en las viviendas) para recolectar el preciado líquido.

En una noche de tempestad, una familia de la comunidad indígena Wayú puso a llenar una vasija o múcura esférica como la que se muestra en la figura 1, esta vasija tiene un radio de 10cm y una altura de 16 cm. Se sabe que del goteo proveniente de la lluvia cae agua a razón de $\frac{1}{3}cm^3/min.$ y que el volumen de un tanque esférico en t está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

Figura 1: Múcura para el problema 2

a) ¿A qué razón cambia la profundidad del agua cuando la profundidad es 10 cm?

Tanto en el primero como en el segundo problema los profesores en formación (Brandon y su compañera) dieron importancia al rediseño de problemas, que como la mayoría de los problemas planteados por los libros de texto son tomados de problemas clásico, ellos los llevaron al contexto del estudiante de la comunidad indígena para favorecer la enseñanza la derivada como razón de cambio.

Estas reflexiones son importantes porque ya que como lo mencionan Ponte y Santos (1998) el libro de texto a menudo constituye la principal fuente de organización de las clases; y en ocasiones los profesores se limitan a reproducir lo que el libro propone. Sin necesidad de acercar el contenido matemático a los estudiantes a través de problemas relacionados con su contexto que permitan una aproximación a los conceptos matemáticos desde cuestiones familiares para ellos.

6 Conclusiones.

En este apartado se exhiben explícitamente los significados logrados por los profesores en formación, los cuales fueron categorizados en cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo (pensamiento variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal) y que dan cuenta del alcance del objetivo de investigación.

Este apartado está organizado en dos partes, en la primera hablaremos de los significados logrados en cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo y en la segunda se mencionan algunas perspectivas que surgieron producto de esta investigación.

6.1 Significados negociados alrededor del pensamiento reflexivo.

En cada una de las categorías se rescatan los significados negociados que fueron comunes en los dos casos de estudio.

6.1.1 Significados negociados alrededor del pensamiento variacional.

En el proceso de formación vivido por los profesores, pese a que con anterioridad al curso de didáctica del cálculo ya habían tenido acercamientos previos a los objetos matemáticos del cálculo cómo en: cálculo diferencial, integral y ecuaciones diferenciales; aún presentaban dificultades al momento de reconocer y aplicar los conceptos matemáticos asociados al cálculo diferencial resolviendo situaciones problema. Es allí donde se refuerza la idea de Parada (2011) de que sean los profesores quienes inicialmente realicen la actividad matemática para así promoverla adecuadamente en sus estudiantes.

A lo largo de los diferentes talleres los profesores en formación reflexionaron sobre los objetos matemáticos del cálculo diferencial, como: la función, el límite y la derivada. En donde lograron identificar las variantes e invariantes que se encontraban inmersas en cada una de las situaciones problema, cómo se relacionaban entre ellas y cómo variaban entre sí.

En términos de Meléndez (2021) los profesores en formación lograron evolucionar su grado de abstracción de la idea de cambio para dar significado al concepto de función, puesto que siguieron el conjunto de actuaciones que para este autor constituyen un escenario para este fin, entre las actuaciones se encuentran: el análisis cualitativo con el cual identifica características del fenómeno de cambio, detección de magnitudes variantes e invariantes, encontrar la relación de dependencia entre ellas y la generalización de la variable aritmética que da paso a la variable algebraica que permite el planteamiento de una función que modele el fenómeno (situación problema).

Cabe mencionar que en varias ocasiones los profesores lograron un tránsito efectivo entre la información que se les brindaba en la situación problema y el tratamiento algebraico que realizaban para llegar a la solución de este. Es decir, los profesores pasaron de datos cualitativos suministrados en la situación problema a cuantificarlos a través de una generalización por medio de una expresión algebraica que modelara la situación y al realizar ciertos tratos algebraicos y analizar esta última información, pasaban nuevamente a los datos cualitativos para dar solución a la situación problema.

Respecto a la función, los profesores lograron modelar las situaciones problema por medio de diferentes representaciones y además articular estas representaciones para dar solución a los problemas que se les presentaron en cada uno de los talleres. También, los profesores lograron significar la función como una relación de interdependencia entre variables.

Los profesores dieron importancia a los conceptos de aproximación y tendencia para favorecer la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Reconociendo el límite y la función como conceptos clave para la enseñanza de objetos matemáticos del cálculo como la derivada y la integral.

En relación con la derivada, los profesores lograron significarla como pendiente de la recta tangente al igual que como razón de cambio, asimismo, dieron importancia al uso de problemas de optimización para favorecer el acercamiento de este concepto a estudiantes con características diferenciadas, en particular a estudiantes indígenas, y finalmente tanto Brandon como Ignacio lograron usar adecuadamente las reglas de derivación para dar un trato algebraico que les permitiera llegar a la solución de los problemas.

6.1.2 Significados negociados alrededor del pensamiento didáctico.

Recordemos que la pregunta de esta investigación es *¿Qué aprendizajes consolidan los profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas en la educación superior, al interior de una comunidad de práctica?* La cual se responde principalmente en este apartado.

Los profesores a lo largo de los acercamientos, Ignacio en el primero y Brandon en el segundo, tenían en mente tres preguntas relevantes ¿Qué enseñarles a los estudiantes con características diferenciadas? ¿Quiénes son los estudiantes con características diferenciadas? y ¿Cómo enseñarles a los estudiantes con características diferenciadas?

Respecto a la pregunta ¿Qué enseñarles a los estudiantes con características diferenciadas? Se encuentran los objetos matemáticos del cálculo diferencial como lo son: la función, el límite y la derivada.

Para abordar la enseñanza de estos objetos matemáticos, en particular la derivada, tanto Ignacio como Brandon revisaron el libro de texto guía del curso de Cálculo diferencial que se imparte en la UIS y decidieron rediseñar problemas y preguntas contextualizándolas al entorno de los estudiantes. En este sentido Font (2006) propone el término “contextualizar” para referirse al proceso que va del objeto matemático a la realidad. Así, los profesores identificaron situaciones familiares de las comunidades indígenas Misak y Wayú en las que se requiriere el uso de la derivada para resolverlas, como fue el caso del problema del terreno (Figura 106), del bebedero (Figura 107) y el de la caja de almacenamiento del maíz del café (Figura 108).

Consideramos que uno de los significados ampliamente negociados por los profesores en formación fue reconocer la importancia de contextualizar los problemas a las necesidades e intereses de los estudiantes y sus culturas. Al respecto, D’Ambrosio (2008) sostiene que justamente contextualizar la matemática es lo que permite que llegue a todos sin establecer diferencias sociales o culturales y que para ello implica conocer las matemáticas que se desarrollan en los grupos donde se van a realizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En esa línea, se rescata del autor que un problema matemático contextualizado es aquel que responde a una situación que se presenta en la cultura o realidad cercana al aprendiz, que no necesariamente está alejada de los problemas que ofrecen los libros de texto, porque seguramente esas realidades son las que han permitido enunciarlos.

¿Quiénes son los estudiantes con características diferenciadas? Cuando nosotros hablamos de los estudiantes con características diferenciadas, que se encuentran cursando cálculo diferencial en la UIS, según la política de admisiones especiales nosotros podríamos encontrar los siguientes estudiantes: provenientes de municipios de difícil acceso o problemas de orden público, víctimas del conflicto armado, pertenecientes a población afrocolombiana, palenquera y raizal, pertenecientes a comunidades o resguardos indígenas, provenientes de departamentos donde no existen instituciones de educación superior y desmovilizados en el proceso de paz. En la investigación los profesores en formación tuvieron contacto con algunos estudiantes afrocolombianos e indígenas, y finalmente los casos representativos de cada implementación fueron los estudiantes indígenas, en el caso de Ignacio de la comunidad indígena Misak y en el caso de Brandon de la comunidad indígena Wayú.

Y finalmente ¿Cómo enseñarles a los estudiantes con características diferenciadas? Inicialmente tanto Brandon como Ignacio optaron por analizar los presaberes de los estudiantes indígenas y por analizar su contexto para determinar las características principales de dónde provenían, esto con el fin de poder plantear situaciones problema familiares al contexto de sus estudiantes.

Además, a lo largo de los talleres los profesores fueron diseñando problemas los cuales refinaron y más adelante los propusieron en sus proyectos para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en los estudiantes indígenas.

Para determinar las características de sus estudiantes y las principales actividades que se realizaban al interior de su comunidad, los profesores optaron por leer documentos del ministerio de cultura alrededor de las comunidades indígenas Misak y Wayúu, y por diseñar entrevistas semiestructuradas las cuales fueron fundamentales para el diseño de los problemas contextualizados.

Los profesores significaron que la enseñanza del cálculo a sus estudiantes no puede estar centrada en lo algebraico como se ve en los libros de textos habituales (Zill, Stewart), que son lejanos al contexto de los estudiantes. Sino que se debe conocer el contexto de sus estudiantes, las características sociales, políticas y económicas, conocer los presaberes de sus estudiantes para apoyarlos en consecuencia y además diseñar problemas contextualizados para favorecer esa enseñanza.

El principal aprendizaje que consideramos fue alcanzado por los profesores seleccionados en las dos implementaciones fue el uso del contexto para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo diferencial en estudiantes con características diferenciadas.

Cabe resaltar que, aunque los profesores en formación reflexionaron en los talleres sobre como diseñar problemas contextualizados al entorno de los estudiantes con características diferenciadas hizo falta analizar la importancia de hacer uso del sistema de medidas que se utiliza principalmente en Colombia (sistema métrico).

6.1.3 Significados negociados alrededor del pensamiento orquestal.

Según el modelo de reflexión y acción de Parada (2011) los recursos pueden ser: preguntas, problemas, libros de texto, tecnologías digitales, entre otros.

Respecto a los recursos digitales como apoyo en la enseñanza del cálculo Barradas (2021) señala que algunos son: recursos digitales transmitivos (imágenes, tutoriales, sitios de internet y bibliotecas virtuales), recursos digitales activos (simuladores, juegos, programas expertos y buscadores) y recursos digitales interactivos (sistema de mensajería, videoconferencia y videos); entre estos recursos los más usados son el software GeoGebra y Mathematica.

Tanto en la primera como en la segunda intervención uno de los recursos más usados por los profesores en formación fueron los problemas, los cuales no fueron problemas tomados del libro de texto sino rediseñados por los profesores a partir de los trabajados en los talleres, basándose en el libro de texto (Zill, cuarta edición) y las lecturas que realizaron alrededor del contexto de los estudiantes con características diferenciadas.

Otros de los recursos a los cuales los profesores en formación dieron importancia fueron al uso de software de geometría dinámica como GeoGebra y DGPad, para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo diferencial a estudiantes con características diferenciadas. Al igual que el uso de estos softwares como apoyo a las respuestas de los estudiantes, resaltando su importancia al momento de explorar y modelar las situaciones problema.

Cabe señalar que, aunque a lo largo de las diferentes discusiones y puestas en común que se dieron en los talleres y actividades al interior de la CoP los profesores mencionaron la importancia de los softwares GeoGebra y DGPad, pero al momento de plantear sus proyectos y rediseñar los problemas para aplicarlos con sus estudiantes con características diferencias, estos no hicieron uso de ellos, sino que optaron por usar hojas de trabajo y problemas ajustados a su contexto.

Los problemas contextualizados a los estudiantes de admisión especial (que para el caso de la investigación que se reporta pertenecían a culturas indígenas del país) surgieron como producto de la interacción entre los profesores con lecturas (sobre el multiculturalismo y pluralismo colombiano y también sobre la enseñanza de los objetos matemáticos de estudio del cálculo), así como del intercambio personal con los estudiantes con quienes se tuvieron entrevistas de reconocimiento y familiarización.

Por último, las hojas de trabajo que constituyeron un recurso fundamental para poder articular los problemas contextualizados con el software de geometría dinámica GeoGebra, esto surgió principalmente en el taller de derivadas de la segunda implementación.

6.2 Perspectivas de Investigación.

La pregunta de esta investigación, la cual es *¿Qué aprendizajes consolidan los profesores en formación que reflexionan sobre la enseñanza del cálculo a personas con características* *diferenciadas en la educación superior, al interior de una comunidad de práctica?*, se logró responder plenamente, sin embargo, queda abierta para una investigación posterior inquietudes cómo ¿Qué apoyos se les pueden brindar a los estudiantes con características diferenciadas antes de que ingresen a cursar estudios de educación superior o durante estos estudios para evitar su deserción académica? ¿Cómo consolidar estos aprendizajes logrados por la CoP para que los profesores de cálculo en servicio atiendan las particularidades de los estudiantes con características diferenciadas?

Es necesario que en los cursos de cálculo los profesores en servicio acerquen el contenido matemático del cálculo a sus estudiantes mediante la contextualización de los problemas para que estos no vean este conocimiento tan lejano sino cercano a su realidad.

Aunque la Universidad Industrial de Santander (UIS) haya creado una forma de ingreso para los estudiantes con características diferenciadas por medio de las admisiones especiales, hace falta apoyar la permanencia de estos estudiantes mediante la creación de cursos en donde se refuercen las habilidades de resolución de problemas de estos estudiantes que ingresan a carreras de ingenierías o ciencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo 282 de 2017 (07 de noviembre) https://www.uis.edu.co/webUIS/es/transparenciaAccesoaInformacionPublica/UISInfluyente/documentos/adicionesEspeciales.pdf recuperado el 10 de abril del 2019.

Alsina, A., Planas, N. y Calabuig, T. (2009) *El aprendizaje reflexivo en la formación del profesorado de Matemáticas*. Barcelona: Universidad de Girona-Universidad Autónoma de Barcelona.

Amaya E., Fiallo J., y Parada S. (2018) *Significados de la Demostración de Profesores de Matemáticas en Formación*. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME recuperado el 1 de noviembre.

Artigue, M (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L & Gómez P (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática, pp.* 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de Colombia 1991*. Bogotá: Temis.

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Ball, D. (2008) Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study, COGNITION AND INSTRUCTION, 26:4, 430-511, DOI:10.1080/07370000802177235.

Barajas, C. (2015). *Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: una mirada desde la resolución de problemas que implican fenómenos de variación*. Trabajo de grado para optar el título de Maestra en ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigaciones en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), México. D.F.

Barradas, U. D. (2021). Recursos digitales como apoyo en la enseñanza del cálculo. *RIDE Revista Iberoamericana Para La Investigación Y El Desarrollo Educativo*, *12*(23). https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1040

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 8(30), 67-84

Botello, C. (2013) *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación.* Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. pp. 141-162. Lleida: SEIEM.

Camargo (2018). Breve reseña histórica de la inclusión en Colombia. *Revista Internacional de Apoyo a la Inclusión, Logopedia, Sociedad y Multiculturalidad*. Volumen (4), pp. 181-187.

D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México D. F.: Limusa.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós.

Dick, T. P. & Hollebrands, K. F. (2011). Focus in high school mathematics: Technology support reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers Mathematics.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*, Madrid: Morata.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content-knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. Journal for Research in Mathematics Education, 24(2), 94–116.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por Geogebra.* Ed: Ediciones UIS. ISBN impreso: 978-958-8956-43-5. En Colombia. 2018.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de Investigación. *PNA, 1(4),139-158.*

Flores, P. (2009). *Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos.* UNO 17, 37-50.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

García, N. y Álvarez, B. (2005). La motivación del alumnado a través de la satisfacción con la asignatura. Efecto sobre el rendimiento. *Revista Estudios sobre Educación, (13), 89-112*.

Guarín, S., Parada, S. y Fiallo, J. (2018) Un acercamiento a la comprensión del concepto de Límite de una Función en un punto. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3(2),52-54.*

Guerrero, R.C. (2003). *Principales aportaciones de las conferencias internacionales de educación de adultos de la Unesco al campo de la formación ocupacional.* http://sid.usal.es/idocs/F8/ART10030/principalesaportaciones.pdf Recuperado el 21 de octubre del 2019.

Gutiérrez, L., Buitrago, M. y Ariza, L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. DOI: 10.21830/19006586.170

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN; Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal.

Lave, J., & Wenger (1991). Situated learning: Legitimate peripherical participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Ley 115 de febrero 8 de 1994. Por la cual se expide la Ley General de Educación. Congreso de Colombia.

Llinares, S. (2011). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* (10),53-62.

López, José Marcos; Ojeda, Ana María (2011). *Pensamiento probabilístico en educación especial.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 499-507). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López-Mojica, J. y Cruz, K. (2015). Formación docente en educación especial: aspectos de su conocimiento matemático en fracciones. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.). *Educación especial y matemática educativa.* pp. 33-51. México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Meléndez, A. E. (2021). *Dotación de significado de las nociones de variación, variable y función mediante fenómenos físicos y la resolución de problemas*. Tesis doctoral del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

MEN (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006 a.). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006 b.). *Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con necesidades educativas especiales* NEE. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2013). ACUERDO POR LO SUPERIOR 2034 *Propuesta de política pública para la excelencia de la Educación Superior en Colombia en el escenario de la paz.* Recuperado de: http://www.dialogoeducacionsuperior.edu.co/1750/articles-319917_recurso_1.pdf

MEN (2016). *Hacia una educación superior inclusiva en Colombia*. http://www.scielo.org.co/pdf/pys/n45/n45a05.pdf recuperado el 18 de abril

MEN (2018) *Índice de Inclusión para superior (INES).* https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357277_recurso_1.pdf recuperado el 20 de abril.

Moreno-Armella, L. (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales*. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, D. (2015). *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo.* Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Moreno, S.L. (2017). *Prácticas profesionales tempranas en la formación inicial de profesores de matemáticas.* Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Neira, G. (2013). Dificultades detectadas al pasar del algebra al cálculo en educación matemática. *Revista Infancias imágenes, 12(1),44-50*

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* Tesis doctoral del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Parada, S., (2019). *Experiencias para la formación de profesores de matemáticas en atención a la diversidad*. XC CIAEM, Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Universidad de Medellín, Medellín, 5-10 de mayo.

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad*. Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. En G. Frontera, J. Perelló y D. Ruiz-Aguilera (Eds.) *Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. JAEM 2013. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX.

Ponte, J. (2000). Comentário: O conhecimento profissional do professor de Matemática. *Educação, Sociedade e Culturas*, 9, 189-195.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Teoría, crítica y práctica de la Educación Matemática, 83-98.*

Ponte, J. y Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), pp. 3-33.

Quintero (2019). *Una comunidad de práctica de profesores en formación que reflexiona sobre el significado de la función*. Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Ronau, R., Meyer, D., y Crites, T. (2014). Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Santamaria, A.M. (2016). *Habilidades procedimentales desarrolladas por estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento en matemáticas.* Trabajo de grado para optar al título de Licenciatura en Matemática. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, Colombia.

Schön, D. (1992). La formación de profesionales reflexivos. Buenos Aires: Paidós.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Springer Science+Businees 11:499-511.* DOI: 10.007/s10857-008-9089-5

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of kanowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education 41,481-492.* DOI: 10.1007/S11858-009-0192-6.

Thales, S. A. E. M. (2003). Principios y estándares para la Educación Matemática. Sevilla, SAEM Thales.

UNESCO (2000) *Marco de Acción de Dakar* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000121147_spa recuperado el 15 de octubre

UNICEF (2018) *Convención sobre los Derechos del Niño* https://www.unicef.es/causas/derechos-ninos/convencion-derechos-ninos recuperado el 01 de octubre

UNICEF (2006) *convención sobre los derechos del niño* https://www.un.org/es/events/childrenday/pdf/derechos.pdf recuperado el 18 de octubre

Villa, J. y Ruiz, M. (2010) Pensamiento Variacional: Seres humanos con GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Revista de Educação Matemática, 12(3), 514-528.*

Villalba, D. (2006). *Integración del invidente en la clase de matemáticas.* Tesis de Especialización en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Cambridge: Cambridge University Press.

Zill, D y Wright, W. (2011). *Cálculo Trascendentes tempranas*. Cuarta edición. México. Editorial Mc Graw Hill