

# CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS DE RESONANCIA EN UN APLICADOR CIRCULAR CILÍNDRICO A TRAVÉS DE TÉCNICAS DE ANÁLISIS CIRCUITAL

**DIANA KATHERINE FRANCO ESTUPIÑÁN**  
**JOHN EDWARD JAIMES SUAREZ**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**  
**FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS**  
**ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y**  
**TELECOMUNICACIONES**  
**BUCARAMANGA**  
**2016**



**CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS DE RESONANCIA EN UN APLICADOR  
CIRCULAR CILÍNDRICO A TRAVÉS DE TÉCNICAS DE ANÁLISIS CIRCUITAL**

**DIANA KATHERINE FRANCO ESTUPIÑÁN  
JOHN EDWARD JAIMES SUAREZ**

**Trabajo de Grado presentado como requisito para obtener el título de  
Ingeniero Electrónico.**

**Director:**

**CARLOS RODRIGO CORREA CELY  
PhD. en Polimeros**

**Codirector:**

**IVÁN MAURICIO AMAYA CONTRERAS  
PhD. en Ingeniería**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2016**

## TABLA DE CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN.....	14
1. FUNDAMENTACIÓN.....	15
2. TRABAJO DESARROLLADO .....	18
2.1 METODOLOGÍA.....	18
2.2 MODELO MATEMÁTICO .....	21
2.3 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN.....	27
3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....	30
4. CONCLUSIONES .....	37
BIBLIOGRAFIA.....	39
ANEXOS .....	43

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Diagrama de la metodología implementada.....	19
Figura 2. a) Geometría utilizada en el desarrollo de la ecuación de onda.	
b) Caso fundamental de segmentación del problema. ....	22
Figura 3. Cilindro dividido para el estudio individual de sus piezas. ....	23
Figura 4. a) Cilindro segmentado en 3 partes. b) División del cilindro para el estudio por separado de los casos. ....	27
Figura 5. Curvas respectivas para un cilindro de dos particiones.....	30
Figura 6. Curvas respectivas para un cilindro de 10 particiones. ....	32
Figura 7. Tiempos de convergencia vs. No. De términos de sumatoria, para diferentes particiones de cilindros(C).....	33
Figura 8. Porcentajes de error vs. Número de términos de sumatoria, para diferentes particiones de cilindros(C).....	34
Figura 9. Tiempo vs. Número de Nidos (soluciones).....	34
Figura 10. Error vs. Número de Nidos.....	35
Figura 11. Tiempo y Error vs. Probabilidad de descubrimiento .....	35
Figura 12. Cilindro 2 con 2 puertos. ....	43
Figura 13. Cilindro 3 con 1 puerto.....	46
Figura 14. Conexión del cilindro A de 2 puertos y B de 1 puerto.....	48
Figura 15. Conexión de los cilindros A y B con 2 puertos cada uno.....	49
Figura 16. Cilindro seccionado en 3 partes.....	59
Figura 17. . Cilindro seccionado en 4 partes.....	59
Figura 18. . Cilindro seccionado en 5 partes.....	60
Figura 19. . Cilindro seccionado en 6 partes.....	60
Figura 20. . Cilindro seccionado en 7 partes.....	60
Figura 21. . Cilindro seccionado en 8 partes.....	61

Figura 22. . Cilindro seccionado en 9 partes. ....61

## LISTA TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Variación de los parámetros del modelo. ....	20
Tabla 2. Variación de los parámetros del algoritmo. ....	21
Tabla 3. Valores promedio de tiempo y porcentaje de error en un cilindro de dos particiones. ....	31
Tabla 4. Valores promedio de tiempo y porcentaje para un cilindro de 10 particiones. ....	32
Tabla 5. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 1. ....	51
Tabla 6. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 4. ....	52
Tabla 7. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 10. ....	54
Tabla 8. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 2. ....	55
Tabla 9. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 4. ....	56
Tabla 10. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 10. ....	57

## LISTA DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
Anexo A. Modelo matemático .....	43
Anexo B. Frecuencias Resultantes .....	51
Anexo C. Simulaciones .....	59

## NOMENCLATURA

- $TM_{mnp}$  Modo transversal magnético
- $r$  Radio [m]
- $h$  Altura [m]
- $\mu$  Permeabilidad magnética [H/m]
- $\varepsilon$  Permitividad eléctrica [F/m]
- $k$  Número de onda en el espacio libre [rad/m]
- $k_c$  Constante de corte [rad/m]
- $\gamma_n$  Constante de propagación [rad/m]
- $w$  Frecuencia Angular [rad/s]
- $\varepsilon_0$  Permitividad eléctrica en el vacío [F/m]
- $\mu_0$  Permeabilidad magnética en el vacío [H/m]
- $\varepsilon_r$  Permitividad eléctrica relativa
- $\mu_r$  Permeabilidad magnética relativa
- $X_{mn}$  Ceros de la función de Bessel de primera especie
- $f_0$  Frecuencia de resonancia [GHz]
- $\bar{Y}$  Matriz de Admitancia Generalizada [S]
- $\bar{Y}_0^{(i)}$  Matriz de admitancia incidente [S]
- $\bar{Y}_0^{(r)}$  Matriz de admitancia reflejada [S]
- $\bar{S}$  Matriz de Dispersión
- $\eta$  Número de nidos
- $P_a$  Probabilidad de descubrimiento

## RESUMEN

**TITULO** CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS DE RESONANCIA EN UN APLICADOR CIRCULAR CILÍNDRICO A TRAVÉS DE TÉCNICAS DE ANÁLISIS CIRCUITAL\*

**AUTORES** DIANA KATHERINE FRANCO ESTUPIÑÁN  
JOHN EDWARD JAIMES SUAREZ\*\*

**PALABRAS CLAVES** FRECUENCIA DE RESONANCIA, MODOS TM, BUSQUEDA CUCKOO, CONEXIÓN DE REDES

### DESCRIPCIÓN

Este trabajo presenta los resultados obtenidos por simulación, para la obtención de frecuencias de resonancia de un aplicador circular cilíndrico. Para lograr nuestro cometido empezamos por la obtención un modelo matemático, utilizando para ello la teoría del análisis circuital. Al llegar a este punto del proceso se decidió por establecer la restricción de la unión de los cilindros solamente al eje vertical, posteriormente se pasó a observar los resultados obtenidos, para los casos de dos cilindros, luego para tres, cuatro, etc. y en ese orden de ideas se termina por implementar un algoritmo que funciona para  $n$  cilindros, donde en cada caso se busca obtener la ecuación resultante de la matriz de dispersión. Posteriormente se procedió a la resolución de dicha ecuación por optimización, mediante la utilización del algoritmo de búsqueda Cuckoo, haciendo delimitaciones, primero a las variables que afectaran la expresión matemática obtenida y luego con las variables del algoritmo involucradas en la obtención de las frecuencias de resonancias. Para la validación de los resultados encontrados en el proceso de optimización, se hizo una comparación de los resultados del algoritmo con los resultados teóricos del caso más simple posible.

El desarrollo de este trabajo busca dejar una herramienta de cálculo de frecuencias de resonancia para dispositivos cilíndricos de diferentes materiales, lo cual es altamente deseable debido a la complejidad para hallar la solución a este problema..

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Co-director: Iván Mauricio Amaya Contreras.

## SUMMARY

**TITLE:** RESONANT FREQUENCIES CALCULATION IN A CIRCULAR CYLINDRICAL APPLICATOR THROUGH CIRCUITAL ANALYSIS\*

**AUTHORS** DIANA KATHERINE FRANCO ESTUPIÑÁN  
JOHN EDWARD JAIMES SUAREZ\*\*

**KEY WORDS** RESONANCE FREQUENCIES, TM MODES, CUCKOO SEARCH

### DESCRIPTION

This paper presents the results obtained by simulation for obtaining resonance frequencies of a circular cylindrical applicator. To achieve our mission started by obtaining a mathematical model, using the theory of circuital analysis. At this point in the process it was decided to establish the restriction of the union of the cylinders only the vertical axis, later went on to observe the results obtained for the cases of two cylinders, then three, four etc. and in that vein it is completed to implement an algorithm that works for  $n$  cylinders, which in each case is to obtain the equation resulting from the scattering matrix. Then we proceeded to the resolution of this equation by optimization, by using the search algorithm Cuckoo, making demarcations, first to the variables that affect the mathematical expression obtained and then with the variables of the algorithm involved in obtaining the resonance frequencies. For validation of the results found in the optimization process, a comparison was made of the results of the algorithm with the theoretical results in the simplest case.

The development of this work seeks to make a calculation tool to find the resonance frequencies for cylindrical devices of different materials, which is highly desirable because of the complexity to find a solution to this problem

---

\* Degree Work

\*\* Faculty of Physic-Mechanical Engineering. School of Electric, Electronic and Telecommunications Engineering. Project Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Project Co-director: Iván Mauricio Amaya Contreras

## INTRODUCCIÓN

Desde que los fundamentos de la teoría electromagnética fueron sentados por Michael Faraday y formulados por James Maxwell, el desarrollo de esta rama de la física ha revolucionado la era tecnológica de la humanidad. Es por esta razón que cada investigación y aporte tiene una enorme variedad de aplicaciones en campos como las telecomunicaciones, las ingenierías, la física, etc.

Sin embargo, muchos problemas de teoría electromagnética aplicados a la ingeniería son realmente complejos debido a la gran cantidad de variables y ecuaciones. Así, surge el reto de encontrar una solución de forma eficiente y eficaz utilizando la capacidad de procesamiento de los computadores de la actualidad.

Durante esta investigación se abordó un problema electromagnético, el cual plantea el cálculo de las frecuencias de resonancia en un aplicador circular cilíndrico dividido en secciones de diferentes materiales mediante la utilización de un algoritmo de optimización moderno. En este caso se implementó el algoritmo de búsqueda Cuckoo, en conjunto con el análisis circuital. La efectividad del algoritmo se puede verificar al ser comparado con la respuesta analítica. Como resultado de este trabajo de grado se obtiene una herramienta que permite determinar la frecuencia de resonancia para diferentes modos en una guía de onda cilíndrica.

## 1. FUNDAMENTACIÓN

La obtención del modelo matemático inicia con la ecuación de onda aplicada a un aplicador microondas. Se buscó una solución modal para regiones libres de fuentes, considerando modos TM en el sistema coordenado Z, tal como lo proponen Balanis<sup>1</sup> y Harrington<sup>2</sup>. Posteriormente se aplicó el análisis circuital, teniendo en cuenta que un aplicador puede estar formado por múltiples materiales, por lo que se puede segmentar el problema en elementos más sencillos. Finalmente, se realizó la unión de todas las secciones por conexión de redes. De esta forma se simplifica la resolución del problema como se muestra en estudios realizados por Peñaranda<sup>3,4,5</sup>, Boria<sup>6</sup>, Valero<sup>7</sup>, Chiu<sup>8</sup>, Tosun<sup>9</sup>, Goggans<sup>10</sup>, Pitarch<sup>11</sup>, Lee<sup>12</sup>, Mantilla<sup>13</sup> entre otros.

<sup>1</sup> BALANIS C. A., "Advanced Engineering Electromagnetics". New York. Wiley, 1989.

<sup>2</sup> HARRINGTON R. F., "Time-Harmonic Electromagnetic Fields". New York. McGraw-Hill, 1961.

<sup>3</sup> PEÑARANDA FOIX Felipe, "Aplicación de la teoría de análisis circuital generalizado a la resolución de problemas de difracción electromagnética". Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Valencia, Marzo de 2001. Disponible en línea: <http://riunet.upv.es/handle/10251/7121>.

<sup>4</sup> PEÑARANDA Felipe, JANEZIC Michael, CATALA José, CANOS Antoni, "Full-Wave Analysis of Dielectric-Loaded Cylindrical Waveguides and Cavities Using a New Four-Port Ring Network". IEEE Transactions on microwave theory and techniques, Vol. 60, Septiembre de 2012. [en línea] disponible en: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6238333&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fiel5%2F22%2F4359079%2F06238333.pdf%3Farnumber%3D6238333>

<sup>5</sup> PEÑARANDA Felipe, CATALA José, "Circuitual analysis of cylindrical structures applied to the electromagnetic resolution of resonant cavities". Passive Microwave Components and Antennas, InTech, 2010. [en línea] disponible en: <http://www.intechopen.com/books/passive-microwave-components-and-antennas/circuitual-analysis-of-cylindrical-structures-applied-to-the-electromagnetic-resolution-of-resonant-c>

<sup>6</sup> BORIA ESBERT V., "Análisis de problemas electromagnéticos mediante métodos modales y matrices generalizadas, y aplicaciones". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Junio de 1997. Disponible en línea: <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/5424/tesisUPV729.pdf>

<sup>7</sup> VALERO NOGUEIRA Alejandro, "Resolución de problemas electromagnéticos complejos mediante análisis circuital generalizado". Universidad Politécnica de Valencia, Junio de 1997. [en línea] disponible en: <http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/5949/tesisUPV734.pdf>

<sup>8</sup> CHENG-NAN Chiu, CHUN HSIUNG Chen, "Scattering from an Advanced Composite Cylindrical Shell". IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 1996, N° 2, Vol. 38, pp. 62-67. [en línea] disponible en: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=485696>

El cálculo de frecuencias de resonancia para cilindros seccionados es una tarea ardua y compleja que necesita de una solución precisa en un tiempo razonable. Para lograrlo se ha optado por un algoritmo de optimización moderno denominado la búsqueda Cuckoo. Éste fue presentado por Yang<sup>14 15 16 17</sup>

La búsqueda Cuckoo es un algoritmo de optimización metaheurístico que se basa en el comportamiento de los pájaros Cucos los cuales ponen huevos (nuevas soluciones) en nidos anfitriones aleatoriamente. Los mejores nidos, con las mejores respuestas, son conservados para la siguiente generación. El número de nidos anfitriones es fijo y existe una probabilidad de descubrimiento por el anfitrión  $P_a$  que oscila entre 0 y 1. Por tanto tendremos nidos (con nuevas respuestas) y los

---

<sup>9</sup> TOSUN H., "Novel Differential Formulation of Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders of Arbitrary Cross-Section". IEEE Proceedings on Microwave, Antennas and Propagation, 1994, N° 6, Vol. 141, pp. 189-195. [en línea] disponible en: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=295485&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D295485](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=295485&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D295485)

<sup>10</sup> GOGGANS P. M., KISHK A. A. y GLISSON A. W., "Electromagnetic Scattering from Objects Composed of Multiple Homogeneous Region Using a Region-by-Region Solution". IEEE Transactions on A.P., 1994, N° 6, Vol. 42, pp. 865-871. [en línea] disponible en: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=301713&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D301713](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=301713&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D301713)

<sup>11</sup> PITARCH Jaime, "Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales". Universidad Politécnica de Valencia, Julio de 2007. [en línea] disponible en: <https://riunet.upv.es/handle/10251/1986?show=full&locale-attribute=en>

<sup>12</sup> LEE Robert, CHUPONGSTIMUN Veera, "A Partitioning Technique for the Finite Element Solution of Electromagnetic Scattering from Electrically Large Dielectric Cylinders". IEEE Transactions on A.P., 1994, N° 5, Vol. 42, pp. 737-741. [en línea] disponible en: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=299575&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D29957](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=299575&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D29957)

<sup>13</sup> MANTILLA I., DÍAZ A., BALBASTRE J., NUÑO L., "Obtención de la matriz de dispersión generalizada (MGD) de estructuras de guías rectangulares en serie mediante la técnica de ajuste modal". ITEKNE. Innovación e Investigación en Ingeniería. Volumen 4, Número: 1, 2007, pp. 25-32.

<sup>14</sup> XIN-SHE Yang, SUASH Deb, "Cuckoo Search via Lévy Flights". IEEE, World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing, 2009.

<sup>15</sup> XIN-SHE Yang, "Cuckoo Search and Firefly Algorithm: Overview and Analysis". Springer International Publishing Switzerland 2014.

<sup>16</sup> -SHE Yang, "Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms Second Edition". University of Cambridge, United Kingdom. Luniver Press 2010

<sup>17</sup> XIN-SHE Yang, "Cuckoo Search (CS) Algorithm". A standard Cuckoo Search is implemented. [en línea] disponible en: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29809-cuckoo-search-cs--algorithm>

mejores nidos (con las mejores respuestas almacenadas). El vuelo Levy es el encargado de proporcionar una búsqueda aleatoria para determinar nuevas y posibles mejores soluciones.

## 2. TRABAJO DESARROLLADO

El cálculo de frecuencias de resonancia para un aplicador circular cilíndrico, dividido en diferentes secciones con propiedades electromagnéticas distintas, puede acarrear procedimientos matemáticos complejos al ser analizado como un todo. Sin embargo, el mismo problema se simplifica considerablemente al abordarlo a través de técnicas de análisis circuital. De esta forma se segmenta el problema en otros más pequeños, cuya solución no representa mayor complejidad matemática, y que se interconectan para formar redes. Es en este último escenario es donde se plantea el desarrollo de este proyecto.

### 2.1 METODOLOGÍA

Para cumplir los objetivos de este proyecto se trazó una metodología de desarrollo en la cual se trabaja en paralelo tanto el modelo matemático, como el algoritmo de optimización. Posteriormente, sus resultados convergen en una adaptación del método de optimización para este problema particular.

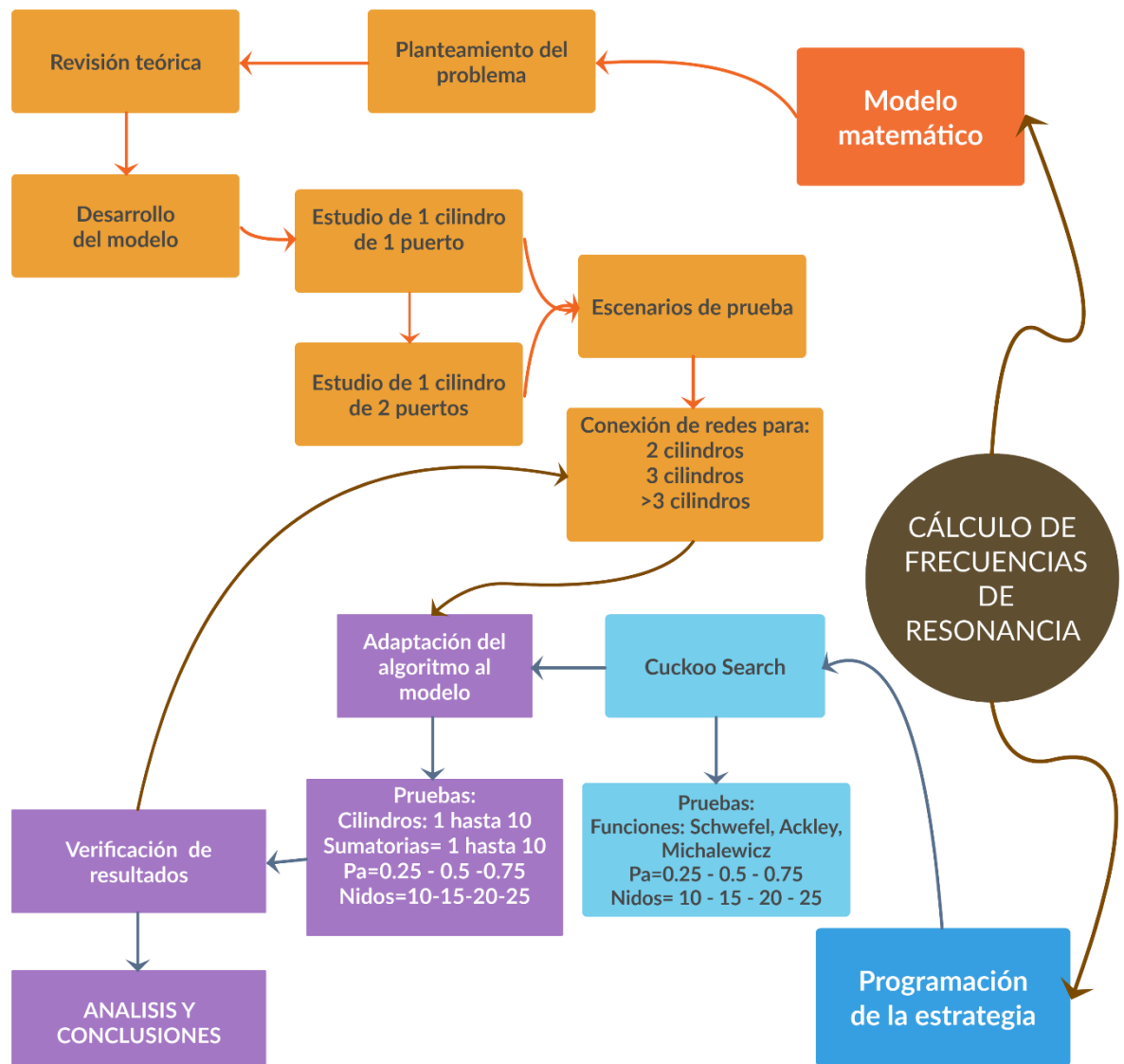
La metodología del proyecto está seccionada en tres fases. La primera presenta brevemente el análisis circuital del problema para la obtención del modelo matemático. La segunda resume el algoritmo de optimización escogido. La tercera incorpora las dos fases anteriores y define las pruebas de simulación a realizar para la comparación de resultados.

La Figura 1 presenta las etapas que comprenden el desarrollo del modelo matemático y la programación del algoritmo de optimización, y que fueron

realizadas simultáneamente hasta llegar a la etapa final donde se implementan en conjunto.

El desarrollo del modelo matemático comprende una revisión de la literatura existente, a manera de soporte sobre el problema planteado y para entender el mismo y su solución. Seguidamente se procedió con el planteamiento del análisis circuital y el desarrollo de la solución analítica mediante la segmentación del problema y su posterior unión a través de la conexión de redes.

**Figura 1. Diagrama de la metodología implementada.**



Se eligió como método al algoritmo de búsqueda Cuckoo. Se realizó igualmente una revisión de la documentación y se hizo el estudio de la programación del algoritmo propuesto por Yang<sup>18</sup> en la plataforma Matlab.

En la fase final de este proyecto se procedió a la unión de ambos métodos, a través de la adaptación del algoritmo Cuckoo a las necesidades del problema, pues mediante el modelo matemático se obtiene la función objetivo que va a ser evaluada por el algoritmo con el fin de obtener las frecuencias de resonancia para diferentes modos. Asimismo en esta etapa se plantearon las pruebas de simulación para evaluar el rendimiento tanto del modelo como del algoritmo. Dichas pruebas se definieron de dos formas:

- Variación de los parámetros del modelo: Para hacer estas pruebas los parámetros geométricos del cilindro tales como altura y radio se encuentran fijos y se varía el número de términos de la sumatoria del modelo y la cantidad de cilindros en los que se divide el problema. Se realizaron 30 repeticiones para cada una de las combinaciones. Los parámetros del algoritmo se encuentran definidos.

**Tabla 1. Variación de los parámetros del modelo.**

<b>No. DE TÉRMINOS DE LA SUMATORIA</b>	De 1 hasta 10
<b>PARA CILINDROS</b>	De 2 hasta 7
<b>No. DE TÉRMINOS DE LA SUMATORIA</b>	<b>De 2 hasta 10</b>
<b>PARA CILINDROS</b>	De 8 hasta 10

<sup>18</sup> XIN-SHE Yang, SUASH Deb, Op. Cit.

- Variación de los parámetros del algoritmo: En esta ocasión los parámetros geométricos vuelven a estar fijos pero se procede a variar parámetros del algoritmo tales como el número de nidos  $\eta$  y la probabilidad de descubrimiento  $P_a$ . Los parámetros del modelo se encuentran definidos y se realizan 30 repeticiones por cada una de las combinaciones.

**Tabla 2. Variación de los parámetros del algoritmo.**

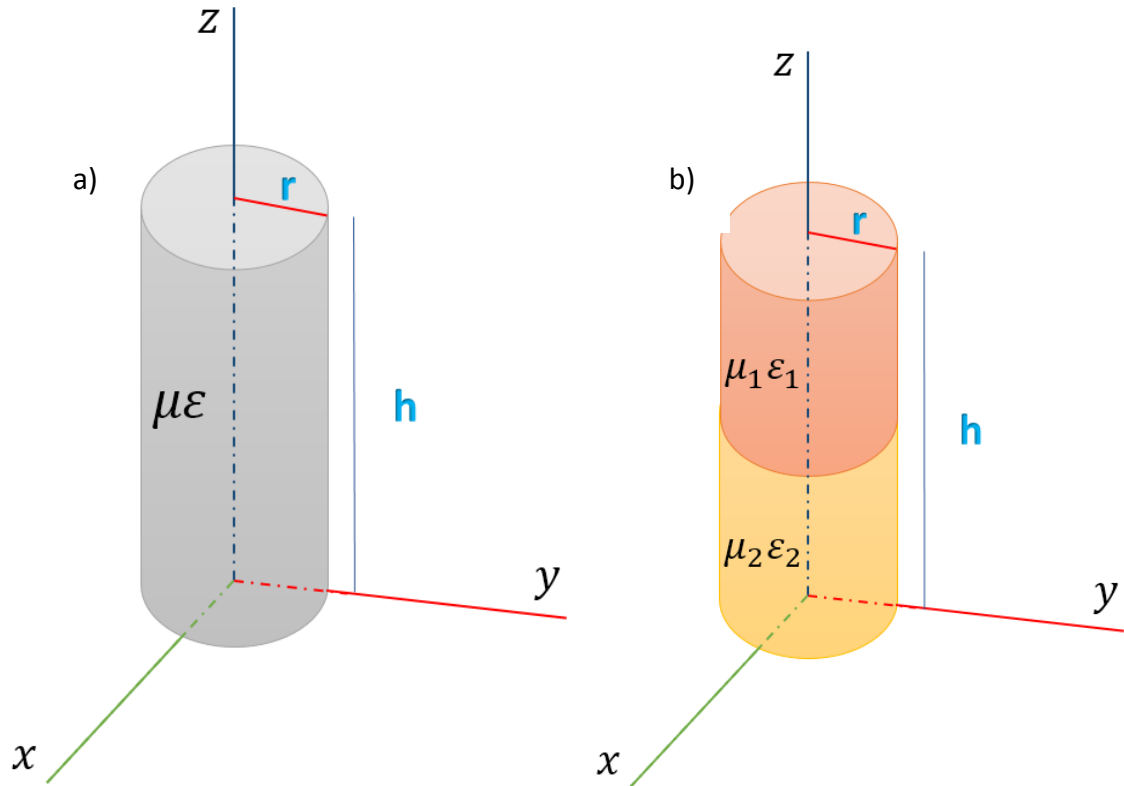
<b>NIDOS</b>	10 - 15 - 20 - 25
<b>Pa</b>	0.25 - 0.5 - 0.75

## 2.2 MODELO MATEMÁTICO

Para el desarrollo del modelo, se hace uso de la ecuación de onda y de sus soluciones modales para regiones libres de fuentes. En este caso se han utilizado los modos  $TM_{mnp}$  (Transversal Magnético) en el sistema de coordenadas cilíndricas.

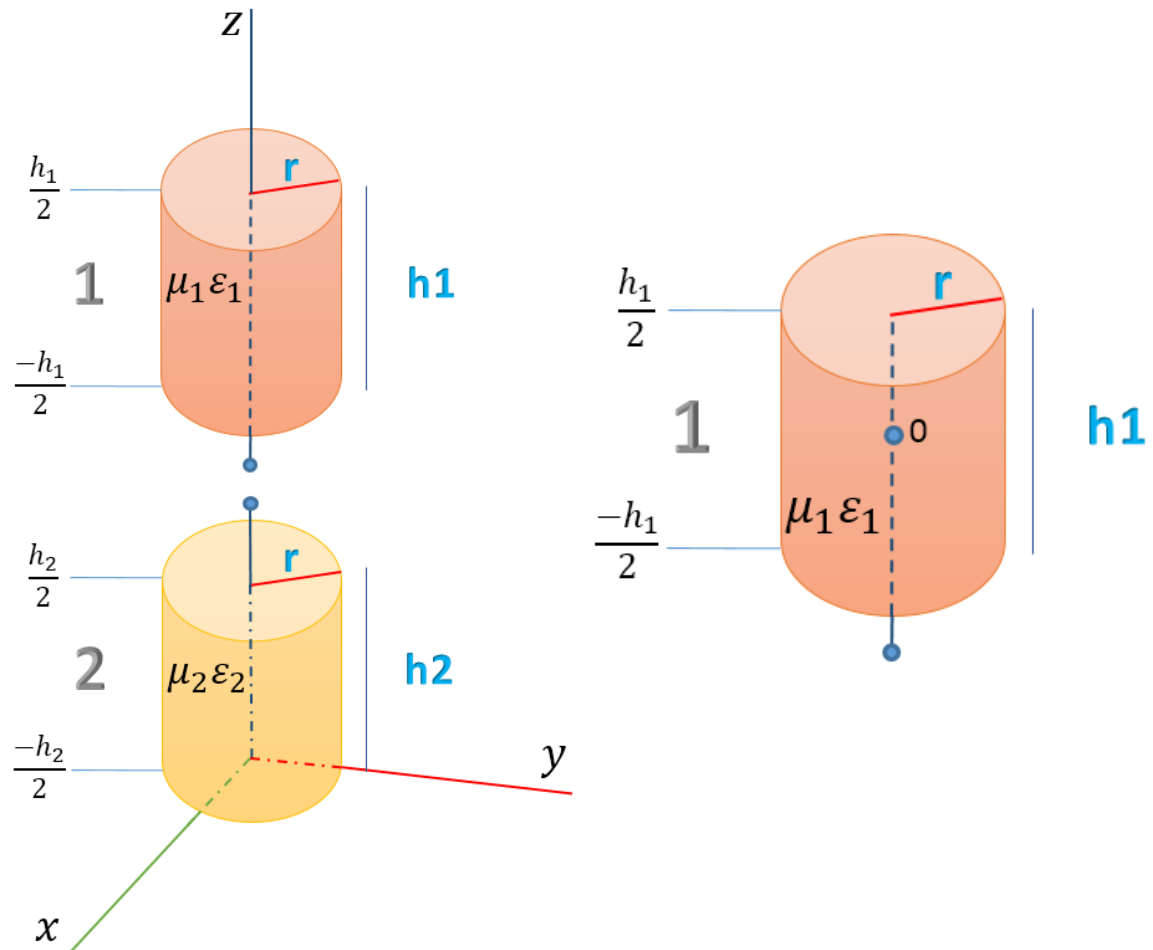
La Figura 2.a) muestra la geometría utilizada en el proceso de solución de la ecuación de onda, las dimensiones utilizadas  $r$  (radio) y  $h$  (altura), y donde  $\mu$  y  $\epsilon$  representan las características de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica del material. En la Figura 2b) se presenta el problema que nos concierne en su forma básica al tener el cilindro compuesto con dos materiales distintos como lo indican  $\mu$  y  $\epsilon$ . Esta es la primera estructura que se abordó a través del análisis circuital en busca de una solución.

Figura 2. a) Geometría utilizada en el desarrollo de la ecuación de onda. b) Caso fundamental de segmentación del problema.



El problema que se tiene entonces puede ser analizado al separar el cilindro principal en dos cilindros de radio  $r$ , con propiedades eléctricas y magnéticas distintas y con alturas propias de cada cilindro. Denominaremos como cilindro 1 al cilindro superior y como cilindro 2 al inferior, tal como se ve en la Figura 3. Se puede empezar entonces el cálculo de la Matriz de Admitancia Generalizada (GAM) si consideramos el cilindro 1 como una red de un puerto.

Figura 3. Cilindro dividido para el estudio individual de sus piezas.



Se definen los campos correspondientes para los modos  $TM_{0np}$  donde tenemos la siguiente ecuación:

$$k^2 = k_c^2 + \gamma_n^2 \quad (1)$$

Estos términos se detallan a continuación y de estos llegamos a la frecuencia de resonancia (5).

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r \quad (2)$$

$$k_c^2 = \left(\frac{X_{mn}}{r}\right)^2 \quad (3)$$

$$\gamma_n^2 = -\left(\frac{p\pi}{h}\right)^2 \quad (4)$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} \sqrt{\left(\frac{X_{mn}}{r}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} \quad (5)$$

Se tiene el puerto 1 ubicado en  $-h/2$  que aplicando las condiciones de contorno  $z(h/2) = 0$  da como resultado un campo eléctrico (6) y magnético (7). Éstos a su vez podrán ser igualados a campos eléctricos y magnéticos que se hacen incidir en el puerto para posteriormente poder hallar los parámetros de admitancia  $Y$ , como lo indica la ecuación (8) para el caso particular que estamos estudiando.

$$\vec{E}_t = E_r \cdot \hat{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\gamma_n k_{cn}}{j\omega\varepsilon\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \sinh\left(z - \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{r} \quad (6)$$

$$\vec{H}_t = H_\phi \cdot \hat{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k_{cn}}{\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \cosh\left(z - \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{\phi} \quad (7)$$

$$\vec{h}^{(1)} = \bar{Y}_{11} \vec{e}^{(1)} \quad (8)$$

$$\bar{Y}_{11} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1} \tanh(\gamma_{n_1} h_1)} \right] \quad (9)$$

A partir de la matriz de admitancia (GAM) se obtiene la matriz de dispersión  $\bar{S}$  gracias a la relación mostrada en la ecuación (10).

$$\bar{S} = \left[ \bar{Y} - \bar{Y}_0^{(r)} \right]^{-1} \cdot \left[ -\bar{Y} + \bar{Y}_0^{(i)} \right] \quad (10)$$

$$\bar{Y}_0^{(i)} = \frac{\vec{h}^{(i)}}{\vec{e}^{(i)}} = \text{diag} \left[ -\frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (11)$$

$$\bar{Y}_0^{(r)} = \frac{\vec{h}^{(r)}}{\vec{e}^{(r)}} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (12)$$

La admitancia incidente (11) y la admitancia reflejada (12), necesarias para hallar la matriz de dispersión en el puerto 1, se definen según la dirección de entrada y salida en el puerto. La admitancia incidente es la que entra en el puerto 1 con dirección +Z y la admitancia reflejada es la que sale del puerto 1 con dirección -Z. El proceso es el mismo en el cilindro 2.

Una vez obtenidas las matrices de dispersión para el cilindro 1 y 2, podemos calcular las frecuencias de resonancias del cilindro resultante mediante la resolución de la siguiente función, que será denominada función objetivo:

$$|\det(\bar{S}_1 \bar{S}_2 - I)| = 0 \quad (13)$$

Hasta ahora se ha planteado el caso más simple posible, el de un cilindro dividido en dos partes. El problema aumenta en dificultad una vez se empieza a segmentar el cilindro en más piezas, aunque al mismo tiempo el proceso de resolución se vuelve un poco repetitivo.

Como siguiente ejemplo tomemos un cilindro de tres fragmentos de diferentes materiales como se muestra en la Figura 4. El cilindro 1 y el cilindro 3 tienen las mismas características mostradas en el ejemplo de la Figura 3 que ya fue planteado, por lo que esta sección se enfocará en el desarrollo del cilindro 2. Tenemos entonces un cilindro con dos puertos. El puerto 1, ubicado en  $h/2$ , y el puerto 2, ubicado en  $-h/2$ , representan los mismos puertos del cilindro 1 y del cilindro 3 pero en un mismo elemento. En este caso se va a necesitar plantear nuevas matrices de admitancias denominadas  $\bar{Y}_{12}$  y  $\bar{Y}_{21}$ , el primer subíndice se refiere al campo magnético en el puerto que está indicando y el segundo subíndice

describe el campo eléctrico en el puerto que muestra. Por tanto a la hora de hallar la MAG, no se va a tener un solo elemento  $\bar{Y}_{11}$  sino una matriz de elementos de la siguiente forma:

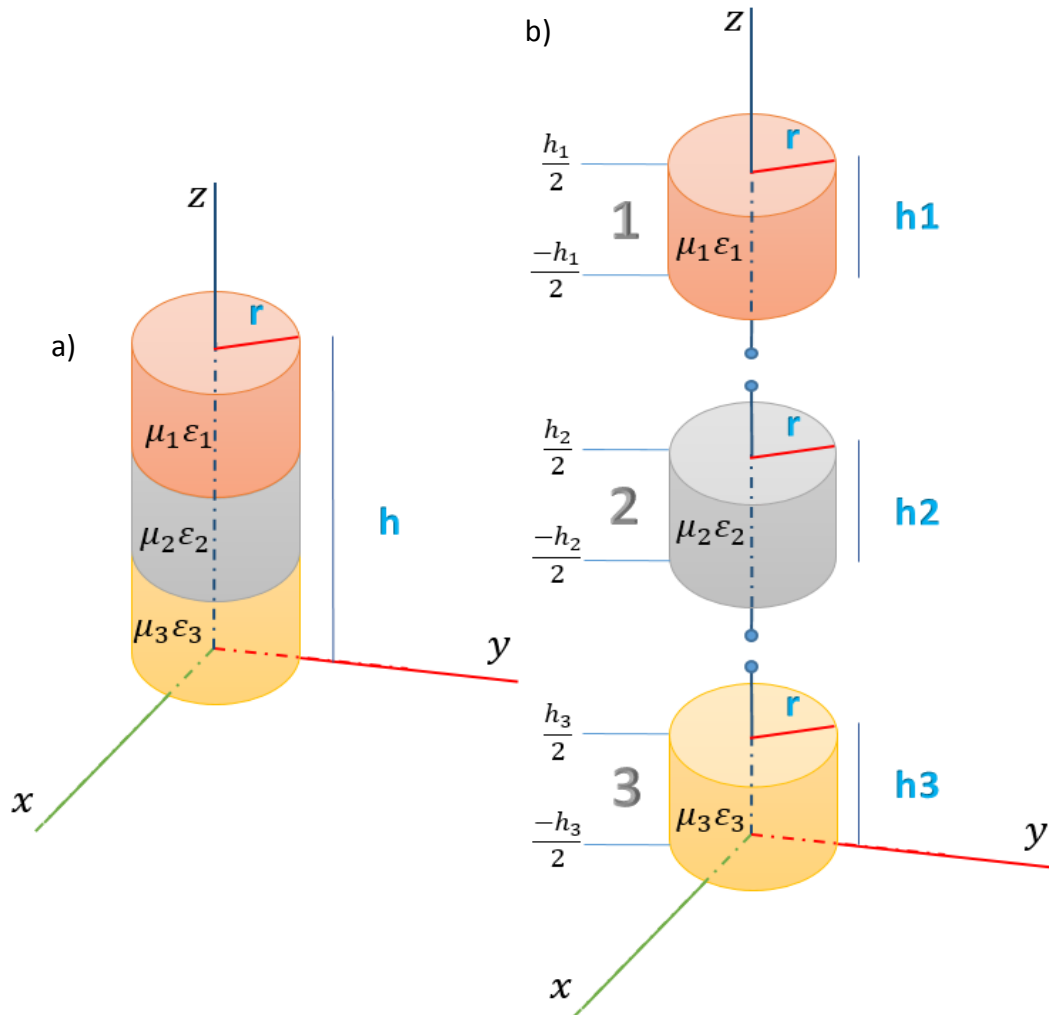
$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix}$$

Esta matriz relaciona los campos eléctricos y magnéticos de todos los puertos entre sí. La matriz de dispersión que se va a obtener de este caso es:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix}$$

Una vez se tiene la matriz de dispersión para cada cilindro, se puede proceder a realizar el acoplamiento de los mismos a través de la conexión de redes, la cual dará como resultado una matriz de dispersión total para el cilindro resultante de la conexión. De esta manera se puede conectar el cilindro 2 con el cilindro 3, y dar origen a una nueva matriz de dispersión que se puede utilizar junto con la del cilindro 1 para completar la función objetivo definida por la ecuación 11.

Figura 4. a) Cilindro segmentado en 3 partes. b) División del cilindro para el estudio por separado de los casos.



El desarrollo completo del modelo matemático se muestra en el anexo 1.

### 2.3 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

Se seleccionó como algoritmo de optimización el de la Búsqueda Cuckoo (CS), que es un algoritmo metaheurístico relativamente nuevo desarrollado por Xin-she

Yang y Suash Deb en el año 2009<sup>19</sup>. Fácil de implementar, brinda robustez y precisión en la resolución de problemas incluso para funciones altamente complejas.

Este método tiene por objeto estudiar las nuevas soluciones generadas aleatoriamente mediante vuelos Lévy, escogiendo las mejores y reemplazando con estas otras soluciones que no son buenas. Las ecuaciones que presiden este método son:

$$x_i^{(t+1)} = x_i^t + \alpha \oplus \text{Lévy}(\lambda) \quad (13)$$

$$\text{Lévy} \sim u = t^{-\lambda}, \quad (1 < \lambda \leq 3) \quad (14)$$

Las cuales representan la ecuación estocástica para una caminata aleatoria (13) y la distribución Lévy (14). El pseudocódigo del algoritmo se resume como<sup>20</sup>:

***begin***

*Objective function*  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$

*Generate initial population of*

*n host nests*  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

***while*** ( $t < \text{MaxGeneration}$ ) or (*stop criterion*)

*Get a cuckoo randomly by Lévy flights*

*evaluate its quality/fitness*  $F_i$

*Choose a nest among n (say, j) randomly*

***if*** ( $F_i > F_j$ ),

*replace j by the new solution;*

---

<sup>19</sup> PITARCH Jaime Op. Cit,

<sup>20</sup> XIN-SHE Yang, SUASH Deb, Op. Cit

**end**

*A fraction ( $p_a$ ) of worse nests*

*are abandoned and new ones are built;*

*Keep the best solutions*

*(or nests with quality solutions);*

*Rank the solutions and find the current best*

**end while**

*Postprocess results and visualization*

**end**

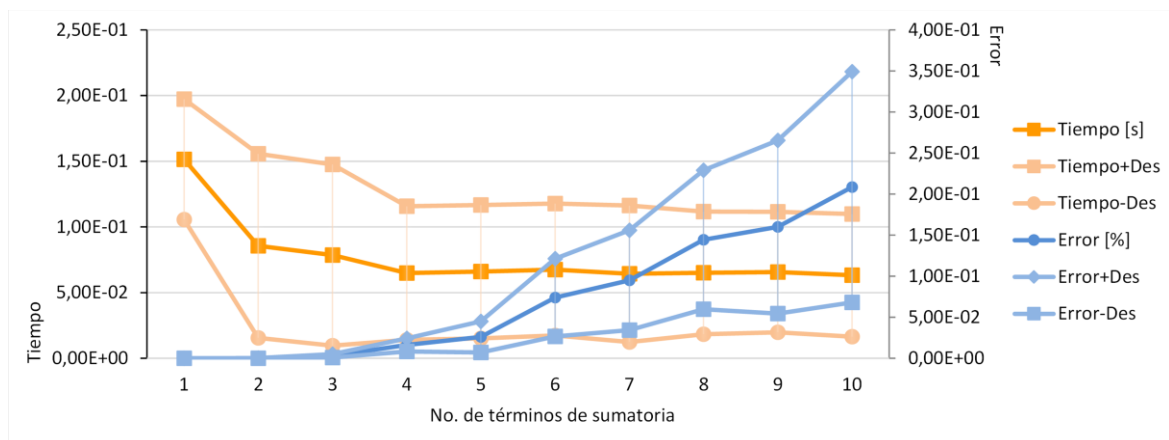
### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se mostrarán los resultados de simulación centrándose en el tiempo que se demora el algoritmo en encontrar una respuesta óptima y el porcentaje de error en la misma. Por tanto se presenta la variación de tiempo y error para diferentes combinaciones de cilindros y número de términos de sumatoria según las pruebas establecidas.

En la Figura 5 y Tabla 3 se muestran los resultados de simulación en el caso de un cilindro segmentado en dos partes, donde se ha variado el número de términos de la sumatoria de 1 a 10. Esta figura muestra una relación proporcional entre dicho número de términos y el error, que va en aumento. Caso contrario es lo que ocurre con el tiempo, el cual se reduce de manera drástica conforme aumentan los primeros términos y después logra establecerse hasta parecer casi constante.

En el Anexo B se detallan los resultados de las simulaciones e incluye los valores teóricos de las frecuencias de resonancia para cada caso estudiado.

**Figura 5. Curvas respectivas para un cilindro de dos particiones.**

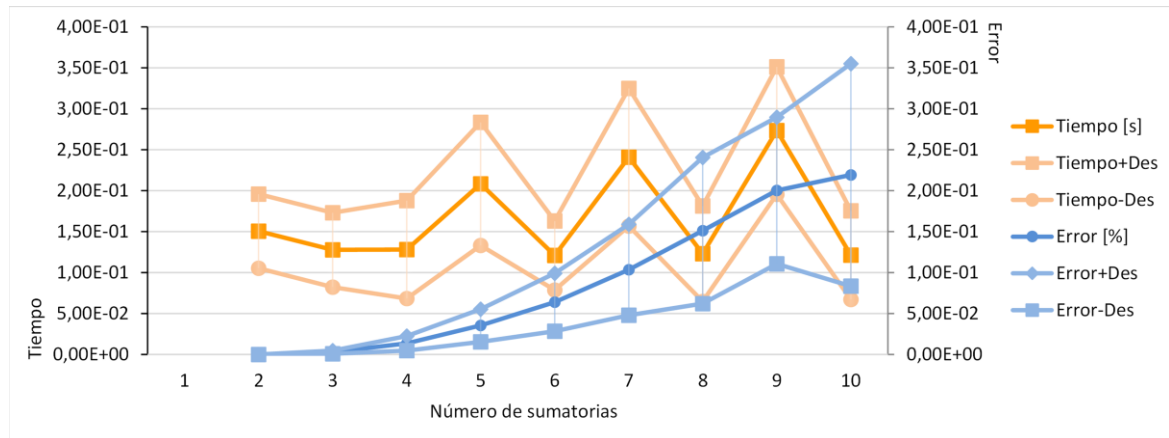


**Tabla 3. Valores promedio de tiempo y porcentaje de error en un cilindro de dos particiones.**

No. De términos de la Sumatoria	Tiempo [s]	% Error [Teórico-Simulación]	Desviación estándar Poblacional (Tiempo)	Desviación estándar Poblacional (Error)
1	1,514E-01	1,346E-08	0,04580	8,3210E-09
2	8,561E-02	1,708E-04	0,07005	7,7243E-05
3	7,863E-02	2,985E-03	0,06894	2,0933E-03
4	6,497E-02	1,637E-02	0,05079	8,0674E-03
5	6,595E-02	2,613E-02	0,05068	1,8849E-02
6	6,755E-02	7,397E-02	0,05017	4,7302E-02
7	6,440E-02	9,509E-02	0,05199	6,0774E-02
8	6,508E-02	1,444E-01	0,04667	8,4458E-02
9	6,565E-02	1,600E-01	0,04591	1,0541E-01
10	6,318E-02	2,086E-01	0,04664	1,4051E-01

En la Figura 6 y Tabla 4 se pueden ver la variación de las características de tiempo y error cuando un cilindro esta seccionado en 10 piezas. En esta oportunidad el error también tiene un comportamiento exponencial que crece a medida que aumentan el número de términos de la sumatoria. Sin embargo, se tiene un comportamiento para el tiempo muy diferente al caso anterior. Esta vez el tiempo presenta cambios bruscos dependiendo de si el número de términos es par o impar. Esto puede deberse a lo compleja que se torna la función objetivo cuando los términos en la sumatoria son impares, pues el algoritmo de búsqueda Cuckoo requiere de muchas más iteraciones para llegar a una respuesta óptima.

**Figura 6. Curvas respectivas para un cilindro de 10 particiones.**



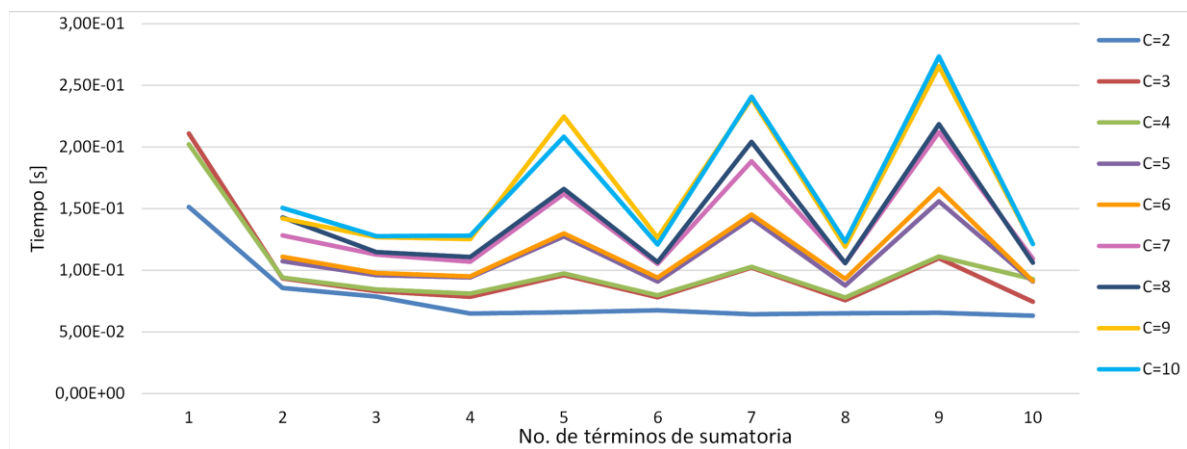
**Tabla 4. Valores promedio de tiempo y porcentaje para un cilindro de 10 particiones.**

No. De términos de la Sumatoria	Tiempo [s]	% Error [Teórico-Simulación]	Desviación estándar Poblacional (Tiempo)	Desviación estándar Poblacional (Error)
1				
2	1,507E-01	1,602E-04	0,04535	9,0096E-05
3	1,278E-01	2,949E-03	0,04550	1,9742E-03
4	1,282E-01	1,367E-02	0,05985	8,9065E-03
5	2,083E-01	3,550E-02	0,07502	2,0065E-02
6	1,210E-01	6,395E-02	0,04215	3,5370E-02
7	2,408E-01	1,035E-01	0,08391	5,5485E-02
8	1,232E-01	1,513E-01	0,05828	8,9159E-02
9	2,735E-01	2,002E-01	0,07781	8,9557E-02
10	1,213E-01	2,193E-01	0,05410	1,3582E-01

El singular comportamiento del tiempo no es algo exclusivo de una segmentación de 10 cilindros, sino un comportamiento recurrente que se va haciendo más

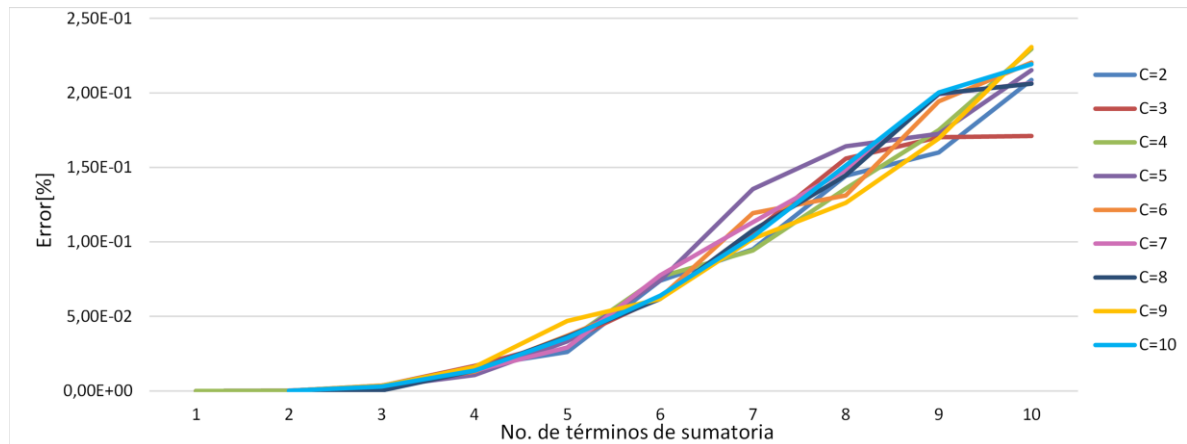
evidente conforme se aumenta el número de segmentaciones, tal y como lo demuestra la Figura 7, la cual realiza un barrido en el tiempo para cilindros segmentados desde 2 hasta 10 partes. En esta gráfica también podemos observar que el comportamiento en el tiempo viene dado en parejas, es así como los tiempos de ejecución son muy similares entre 3 y 4, 5 y 6, 7 y 8 y finalmente entre 9 y 10, y donde se presenta un salto significativo en el tiempo de ejecución de pareja a pareja.

**Figura 7. Tiempos de convergencia vs. No. De términos de sumatoria, para diferentes particiones de cilindros(C).**



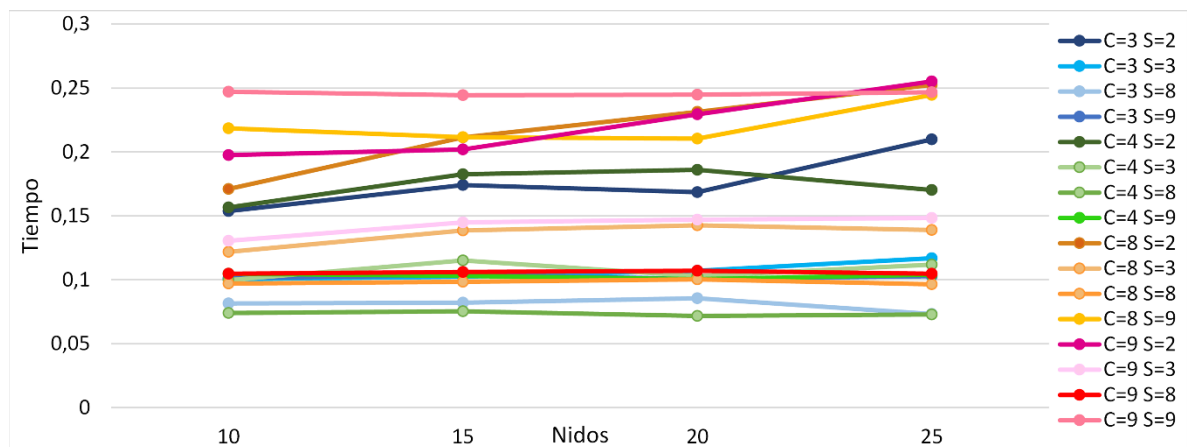
Se tiene en la Figura 8 las curvas del porcentaje de error en un barrido de sumatorias de 1 hasta 10 realizado en cilindros segmentados desde 2 hasta en 10 partes. Se observa un comportamiento homogéneo para todos los casos de segmentación donde el aumento del error depende del aumento del número de términos de la sumatoria.

**Figura 8. Porcentajes de error vs. Número de términos de sumatoria, para diferentes particiones de cilindros(C).**



Ya se ha observado el comportamiento del tiempo y del porcentaje de error variando los parámetros del modelo, por lo que ahora nos enfocaremos en su comportamiento al variar los parámetros del algoritmo.

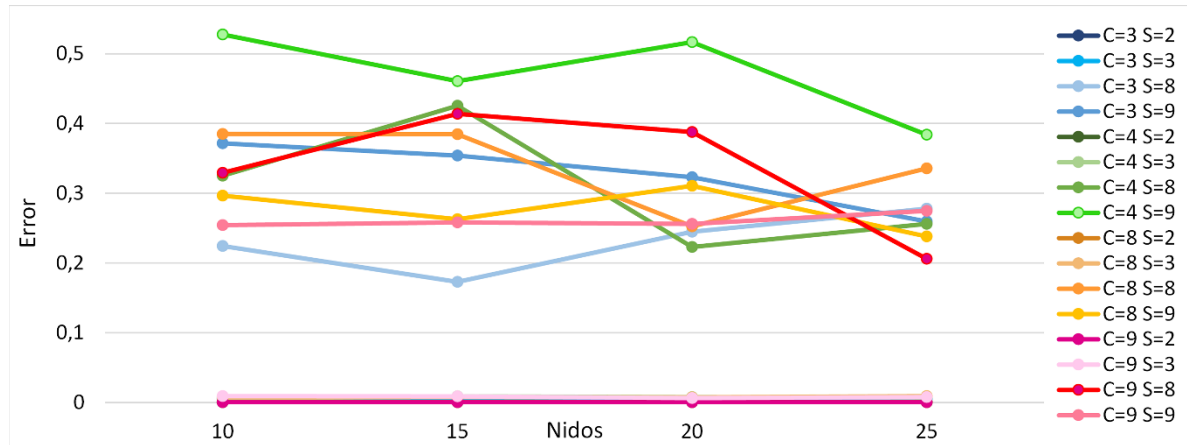
**Figura 9. Tiempo vs. Número de Nidos (soluciones)**



Como se puede evidenciar en la Figura 9, el número de nidos no incide significativamente en el comportamiento del tiempo, manteniéndose este último bastante estable en la mayoría de ocasiones. Sin embargo, cabe resaltar que el número de nidos solo presenta variaciones significativas es el tiempo cuando el

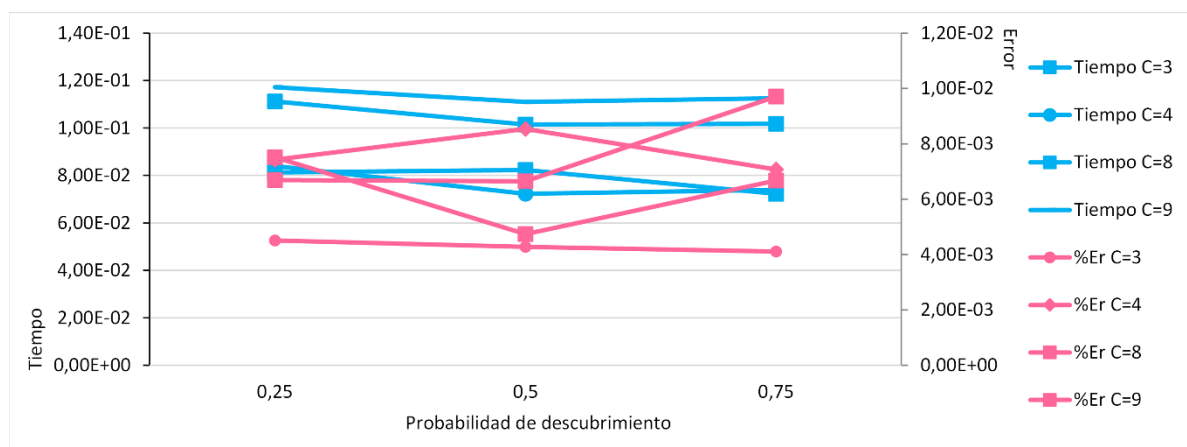
número de términos de la sumatoria es igual a dos, independientemente del número de particiones del cilindro.

**Figura 10. Error vs. Número de Nidos**



En el porcentaje de error tampoco parece incidir el número de particiones. Según se muestra en la Figura 10, las variaciones dependientes de los nidos sólo se evidencian en números de términos de sumatoria altas, siendo éstas menos significativas cuando el número de nidos es 25.

**Figura 11. Tiempo y Error vs. Probabilidad de descubrimiento**



La Figura 11 demuestra que el cambio en la probabilidad de descubrimiento presenta un comportamiento en el tiempo muy estable aunque con una leve tendencia a disminuir a medida que se aumenta esta. Caso muy diferente sucede con el error, el cual exhibe una variación considerable al cambiar la probabilidad de descubrimiento dependiendo del número de piezas en las que se haya dividido el cilindro. Dicha variación se reduce cuando la probabilidad es la menor de las tres.

#### 4. CONCLUSIONES

De los resultados del presente trabajo se puede concluir que el tiempo de ejecución depende principalmente del número de secciones en las que se haya dividido la guía de onda cilíndrica, mientras que el error está dado esencialmente por el número de términos de sumatoria que se definan.

Se evidenció igualmente que los parámetros del algoritmo (número de nidos y la probabilidad de descubrimiento) no influyen significativamente, ni en el tiempo ni en el porcentaje de error de los resultados. Esto señala la eficiencia y eficacia del algoritmo Cuckoo a la hora de resolver problemas complejos.

Cabe resaltar que este método en conjunto con la estrategia de resolución es perfectamente aplicable a un número de particiones mucho mayores a 10. La razón de limitar las pruebas realizadas en el presente trabajo de grado a un número de segmentos de 1 hasta 10 y a un número de términos de sumatoria de 1 hasta 10 fue la necesidad de tener resultados con una precisión de hasta mínimo dos cifras decimales.

Después de las pruebas realizadas quedó demostrado que se puede trabajar con un número de particiones amplio y obtener soluciones muy precisas desde que se defina un número de términos de sumatoria bajo. Si recordamos la Figura 7, esta nos presenta el comportamiento en el tiempo de diferentes segmentaciones según el número de términos de sumatoria.

Los resultados obtenidos comprueban que el método desarrollado a través del análisis circuital y la conexión en redes es una herramienta poderosa, incluso en la resolución de problemas electromagnéticos de gran complejidad. También se

puede concluir que el algoritmo de búsqueda Cuckoo es un instrumento de optimización sencillo y de fácil implementación, que puede ser aplicado en la búsqueda de frecuencias de resonancia con muy buenos resultados. Esto abre las puertas a un gran abanico de situaciones en donde podría ser aplicado.

## BIBLIOGRAFIA

C. A., "Advanced Engineering Electromagnetics". New York. Wiley, 1989.

BORIA ESBERT V., "Análisis de problemas electromagnéticos mediante métodos modales y matrices generalizadas, y aplicaciones". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Junio de 1997. Disponible en línea: <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/5424/tesisUPV729.pdf>

CHENG-NAN Chiu, CHUN HSIUNG Chen, "Scattering from an Advanced Composite Cylindrical Shell". IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 1996, N° 2, Vol. 38, pp. 62-67. [en línea] disponible en: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=485696>

GOGGANS P. M., KISHK A. A. y GLISSON A. W., "Electromagnetic Scattering from Objects Composed of Multiple Homogeneous Region Using a Region-by-Region Solution". IEEE Transactions on A.P., 1994, N° 6, Vol. 42, pp. 865-871. [en línea] disponible en: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=301713&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D301713](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=301713&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D301713)

HARRINGTON R. F., "Time-Harmonic Electromagnetic Fields". New York. McGraw-Hill, 1961.

LEE Robert, CHUPONGSTIMUN Veera, "A Partitioning Technique for the Finite Element Solution of Electromagnetic Scattering from Electrically Large Dielectric Cylinders". IEEE Transactions on A.P., 1994, N° 5, Vol. 42, pp. 737-741. [en línea] disponible en:

[http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=299575&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D29957](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=299575&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D29957)

MANTILLA I., DÍAZ A., BALBASTRE J., NUÑO L., "Obtención de la matriz de dispersión generalizada (MGD) de estructuras de guías rectangulares en serie mediante la técnica de ajuste modal". ITEKNE. Innovación e Investigación en Ingeniería. Volumen 4, Número: 1, 2007, pp. 25-32.

PEÑARANDA Felipe, CATALA José, "Circuital analysis of cylindrical structures applied to the electromagnetic resolution of resonant cavities". Passive Microwave Components and Antennas, InTech, 2010. [en línea] disponible en: <http://www.intechopen.com/books/passive-microwave-components-and-antennas/circuital-analysis-of-cylindrical-structures-applied-to-the-electromagnetic-resolution-of-resonant-c>

PEÑARANDA Felipe, JANEZIC Michael, CATALA José, CANOS Antoni, "Full-Wave Analysis of Dielectric-Loaded Cylindrical Waveguides and Cavities Using a New Four-Port Ring Network". IEEE Transactions on microwave theory and techniques, Vol. 60, Septiembre de 2012. [en línea] disponible en: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6238333&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fiel5%2F22%2F4359079%2F06238333.pdf%3Farnumber%3D6238333>

PEÑARANDA FOIX Felipe, "Aplicación de la teoría de análisis circuital generalizado a la resolución de problemas de difracción electromagnética". Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Valencia, Marzo de 2001. Disponible en línea: <http://riunet.upv.es/handle/10251/7121>.

PITARCH Jaime, "Modelado con técnicas modales de estructuras de microondas basadas en guías N-furcadas arbitrariamente rellenas con materiales". Universidad Politécnica de Valencia, Julio de 2007. [en línea] disponible en: <https://riunet.upv.es/handle/10251/1986?show=full&locale-attribute=en>

-SHE Yang, "Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms Second Edition". University of Cambridge, United Kingdom. Luniver Press 2010

TOSUN H., "Novel Differential Formulation of Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders of Arbitrary Cross-Section". IEEE Proceedings on Microwave, Antennas and Propagation, 1994, N° 6, Vol. 141, pp. 189-195. [en línea] disponible en:

[http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=295485&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D295485](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=295485&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D295485)

VALERO NOGUEIRA Alejandro, "Resolución de problemas electromagnéticos complejos mediante análisis circuital generalizado". Universidad Politécnica de Valencia, Junio de 1997. [en línea] disponible en: <http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/5949/tesisUPV734.pdf>

XIN-SHE Yang, "Cuckoo Search (CS) Algorithm". A standard Cuckoo Search is implemented. [en línea] disponible en: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29809-cuckoo-search--cs—algorithm>

XIN-SHE Yang, "Cuckoo Search and Firefly Algorithm: Overview and Analysis". Springer International Publishing Switzerland 2014.

XIN-SHE Yang, SUASH Deb, "Cuckoo Search via Lévy Flights". IEEE, World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing, 2009.



## ANEXOS

### Anexo A. Modelo matemático

En esta sección se desarrollará todo el proceso matemático para la obtención de la función objetivo para el cilindro de la Figura 4 segmentado en 3 partes diferentes denominadas a su vez cilindro 1, cilindro 2 y cilindro 3.

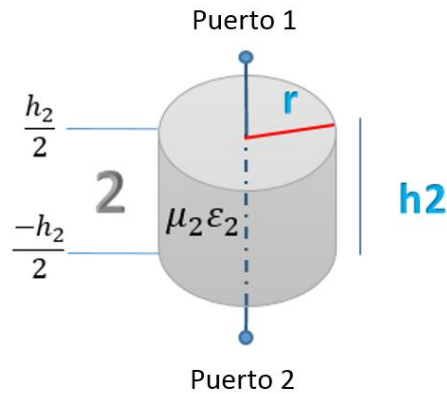
Para la geometría del cilindro 1, el cual es una red de un puerto, ya se ha explicado la obtención de la matriz de admitancia (9) y de dispersión (10) la cuál será la matriz  $\bar{\bar{S}}_1$  en:

$$|\det(\bar{\bar{S}}_1 \bar{\bar{S}}_2 - I)| = 0 \quad (13)$$

Por lo que nos queda obtener la matriz  $\bar{\bar{S}}_2$  de la unión de los dos cilindros restantes.

En principio debemos analizar la geometría del cilindro 2 el cual es una red de 2 puertos:

**Figura 12. Cilindro 2 con 2 puertos.**



Cada puerto se analiza por separado teniendo en cuenta los modos  $TM_{0np}$  (Transversal Magnético) para el sistema de coordenadas cilíndricas por lo que para el puerto 1 ubicado en  $h/2$  y aplicando las condiciones de contorno  $z(-h/2) = 0$  obtenemos:

$$\vec{E}_t = E_r \cdot \hat{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\gamma_n k_{cn}}{j\omega\epsilon\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \sinh\left(z + \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{r} \quad (14)$$

$$\vec{H}_t = H_\phi \cdot \hat{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k_{cn}}{\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \cosh\left(z + \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{\phi} \quad (15)$$

$$\vec{h}^{(1)} = \bar{Y}_{11} \vec{e}^{(1)} \quad (16)$$

$$\bar{Y}_{11} = \text{diag} \left[ \frac{-j\omega_1 \epsilon_1}{\gamma_{n_1}} \frac{1}{\tanh(\gamma_{n_1} h_1)} \right] \quad (17)$$

El puerto 2 ubicado en  $-h/2$  y aplicando las condiciones de contorno  $z(h/2) = 0$  resulta siendo exactamente igual al cilindro 1, ya analizado, por lo que las ecuaciones (6) y (7) funcionan para ambos:

$$\vec{E}_t = E_r \cdot \hat{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\gamma_n k_{cn}}{j\omega\epsilon\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \sinh\left(z - \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{r} \quad (6)$$

$$\vec{H}_t = H_\phi \cdot \hat{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k_{cn}}{\mu} J_0'(k_{cn}r) 2An^+ e^{-\frac{h}{2}\gamma_n} \cosh\left(z - \frac{h}{2}\right) \gamma_n \right) \cdot \hat{\phi} \quad (7)$$

$$\vec{h}^{(2)} = \bar{Y}_{22} \vec{e}^{(2)} \quad (18)$$

$$\bar{Y}_{22} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \frac{1}{\tanh(\gamma_{n_1} h_1)} \right] \quad (19)$$

Para completar la matriz faltarían las admitancias que relacionan entre sí a los puertos, las cuales se definen de la siguiente forma:

$$\vec{h}^{(1)} = \bar{Y}_{12} \vec{e}^{(2)} \quad (20) \quad \bar{Y}_{12} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_2 \varepsilon_2}{\gamma_{n_2}} \frac{1}{\sinh(\gamma_{n_2} h_2)} \right] \quad (21)$$

$$\vec{h}^{(2)} = \bar{Y}_{21} \vec{e}^{(1)} \quad (22) \quad \bar{Y}_{21} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \frac{1}{\sinh(\gamma_{n_1} h_1)} \right] \quad (23)$$

Según la ecuación 10, también necesitamos la admitancia incidente y reflejada en cada puerto, relacionadas a continuación:

Para el puerto 1:

$$\bar{Y}_0^{(i)} = \frac{\vec{h}^{(i)}}{\vec{e}^{(i)}} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (24)$$

$$\bar{Y}_0^{(r)} = \frac{\vec{h}^{(r)}}{\vec{e}^{(r)}} = \text{diag} \left[ -\frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (25)$$

Para el puerto 2:

$$\bar{Y}_0^{(i)} = \frac{\vec{h}^{(i)}}{\vec{e}^{(i)}} = \text{diag} \left[ -\frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (26)$$

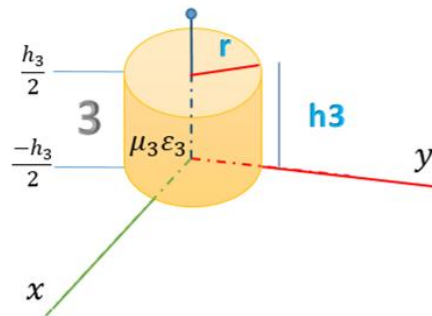
$$\bar{Y}_0^{(r)} = \frac{\vec{h}^{(r)}}{\vec{e}^{(r)}} = \text{diag} \left[ \frac{j\omega_1 \varepsilon_1}{\gamma_{n_1}} \right] \quad (27)$$

De esta forma tenemos todos los valores para reemplazar y poder hallar la matriz de dispersión para este cilindro, según la ecuación 10:

$$\bar{S} = [\bar{Y} - \bar{Y}_0^{(r)}]^{-1} \cdot [-\bar{Y} + \bar{Y}_0^{(l)}] \quad (10)$$

Hasta ahora se ha completado la matriz de dispersión para el cilindro 2, lo que resta por hallar es la matriz de dispersión para el cilindro 3.

**Figura 13. Cilindro 3 con 1 puerto.**



El cilindro 3 es una red de un puerto que presenta la misma geometría que el cilindro 1, pero con las direcciones contrarias. Está regido por las mismas ecuaciones que las presentadas para el puerto 1 en el cilindro 2, ecuaciones (14 - 15 - 16 - 17). Lo mismo sucede para las admitancias incidente y reflejada de dicho puerto, ecuaciones (24 y 25).

Teniendo la matriz de dispersión para el cilindro 2 y 3, se procede a realizar la unión de estos 2 cilindros mediante la conexión de redes.

$$\bar{S}_{pq}^T = \bar{S}_{pq} + \bar{S}_{pk} \Delta_1 \Delta_{lk} (\bar{S}_{lq} + \bar{S}_{ll} \Delta_{kl} \bar{S}_{kq}) + \bar{S}_{pl} \Delta_2 \Delta_{kl} (\bar{S}_{kq} + \bar{S}_{kk} \Delta_{lk} \bar{S}_{lq}) \quad (30)$$

$$\Delta_{kl} = (1 - \bar{S}_{kl})^{-1} \quad (31)$$

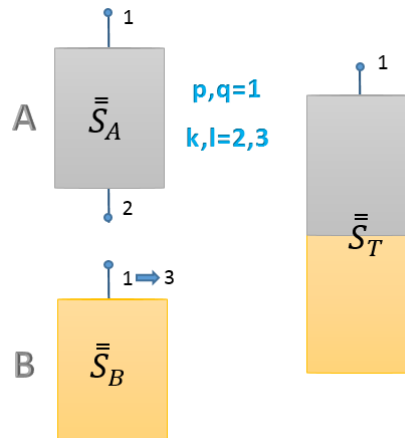
$$\Delta_{lk} = (1 - \bar{S}_{lk})^{-1} \quad (32)$$



$$\Delta_1 = (1 - \Delta_{lk} \bar{S}_{ll} \Delta_{kl} \bar{S}_{kk})^{-1} \quad (33)$$

$$\Delta_2 = (1 - \Delta_{kl} \bar{S}_{kk} \Delta_{lk} \bar{S}_{ll})^{-1} \quad (34)$$

Figura 14. Conexión del cilindro A de 2 puertos y B de 1 puerto.



Para evitar confusiones se renombran los cilindros como cilindro A al de 2 puertos y cilindro B al de 1 solo puerto, y se procede a la interconexión como se ve en la Figura 12. Las matrices de dispersión de los cilindros se acomodarán según el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{matrix} \overline{\overline{S}}_A \\ \left[ \begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{S_{11}}_{\overline{\overline{S}}_B} \end{array} \right] & = & [S_{T11}] \end{matrix}$$

A continuación se muestran las ecuaciones necesarias para realizar la conexión de las redes, cada elemento en las ecuaciones pertenece al arreglo matricial presentado. Todas estas ecuaciones son dependientes de  $p$  y  $q$ , las cuales representan los puertos que van a quedar en la red final, y de  $k$  y  $l$ , que representan los puertos a unir, aquí se observa que el puerto 1 del cilindro B pasó a denominarse puerto 3. El resultado será un solo elemento al haber un solo puerto en la red resultante  $\overline{\overline{S}}_T$ .

$$\bar{S}_{11}^T = \bar{S}_{11} + \bar{S}_{12} \Delta_1 \bar{S}_{33} \bar{S}_{21} \quad (35)$$

$$\Delta_{23} = 1 \quad (36)$$

$$\Delta_{32} = 1 \quad (37)$$

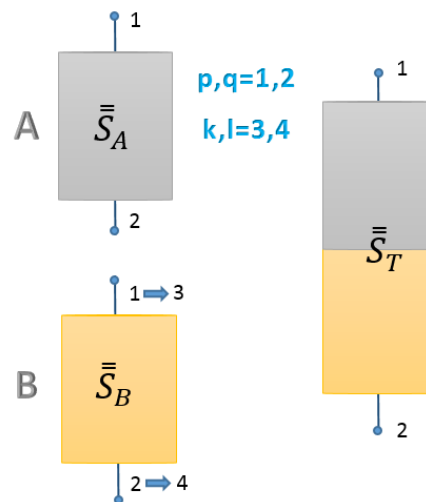
$$\Delta_1 = (1 - \bar{S}_{33} \bar{S}_{22})^{-1} \quad (36)$$

$$\Delta_1 = (1 - \bar{S}_{22} \bar{S}_{33})^{-1} \quad (37)$$

Otra conexión de redes de gran interés y utilidad para este proyecto se presenta a continuación, en esta tendremos 2 cilindros de 2 puertos cada uno, que serán conectados tal y como se representa en la Figura 8. En esta ocasión p y q pueden tomar 2 valores diferentes y el resultado será una red de 2 puertos. El arreglo matricial de la conexión será:

$$\begin{array}{c} \bar{S}_A \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} S_{T11} & S_{T12} \\ S_{T21} & S_{T22} \end{bmatrix} \\ \bar{S}_B \end{array}$$

Figura 15. Conexión de los cilindros A y B con 2 puertos cada uno.



A continuación se detallan los valores de la matriz  $\bar{\bar{S}}_T$  resultante. Se debe tener en cuenta que los índices mostrados para la obtención de los elementos de la matriz  $\bar{\bar{S}}_T$  corresponden a la ubicación de los elementos en el arreglo matricial.

$$\bar{\bar{S}}_{11}^T = \bar{\bar{S}}_{11} + \bar{\bar{S}}_{12}\Delta_1\bar{\bar{S}}_{33}\bar{\bar{S}}_{21} \quad (40)$$

$$\bar{\bar{S}}_{12}^T = \bar{\bar{S}}_{12}\Delta_1\bar{\bar{S}}_{34} \quad (41)$$

$$\bar{\bar{S}}_{21}^T = \bar{\bar{S}}_{43}\Delta_2\bar{\bar{S}}_{21} \quad (42)$$

$$\bar{\bar{S}}_{22}^T = \bar{\bar{S}}_{44} + \bar{\bar{S}}_{43}\Delta_2\bar{\bar{S}}_{22}\bar{\bar{S}}_{34} \quad (43)$$

## Anexo B. Frecuencias Resultantes

Los cálculos de las frecuencias de resonancia presentados corresponden para un cilindro de radio 0.2 [m] y altura total de 0.6 [m]. Las características de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética se han definido en 1. Las frecuencias indicadas en la primera fila corresponden a los valores teóricos arrojados según la ecuación (5) para los primeros 5 valores de  $p$  en los modos  $TM_{01p}$ . Los valores de frecuencia en la primera columna son los resultados obtenidos mediante la programación para 30 repeticiones. Los campos resaltados indican la correspondencia entre las frecuencias teóricas y calculadas por el algoritmo, con estos dos valores fue que se encontró el porcentaje de error. El color verde concierne a una exactitud de 3 o más cifras decimales, el color amarillo indica una exactitud de 2 dígitos decimales y un color rosado revela una exactitud menor a esta, la cual ya no es deseada.

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias de resonancia para un cilindro segmentado en dos partes, con un número de sumatoria igual a 1.

**Tabla 5. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 1.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
760802725						10900
1374592820						18250
1374592820						14750
760802725						16650
943868930						18400
1374592821						18900
760802725						12900
943868930						15900

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
943868930						11800
760802725						9950
760802725						15750
943868930						11300
625763633						12900
1374592821						18250
1374592820						11950
1152294856						19800
760802725						12500
1152294856						9400
1374592820						13000
760802725						21450
1152294856						13500
625763633						20300
760802725						22450
943868930						16200
625763633						16850
1374592821						12800
1374592821						18950
1374592821						19450
1152294856						18350
943868930						14750

La Tabla 6 presenta las frecuencias para 2 particiones con sumatorias iguales a 4, se puede observar como la exactitud empieza a disminuir pero que aún se encuentra dentro del rango aceptable.

**Tabla 6. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 4.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1,1523E+09	1374592821	Iteraciones
1374713250						200
944048387,4						300

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1,1523E+09	1374592821	Iteraciones
760994602,6						250
1152583687						150
943631472,7						0
1152407132						600
761029434,4						100
943577237,9						100
943870966						350
944080602,5						550
625687430,8						600
1374681590						650
625634650,3						300
1374726720						400
1152608273						650
625881359,3						50
1374754687						700
760692918,4						200
1374436887						200
1152451339						750
944064772,7						550
1152348805						700
760957657,5						300
1374839466						100
1374561605						0
944002245,2						700
625905282,4						250
1152391146						550
943634991,4						750
1374415575						350

En la Tabla 7 se evidencia cómo un número de sumatorias de 10 afecta notablemente la exactitud para la misma partición de 2 cilindros.

**Tabla 7. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 2 particiones y con sumatoria 10.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
1150299787						150
625220564						100
763568332						0
1149653530						100
1377621544						50
1374862169						100
1373702123						0
628060485						50
625085379						50
1374379914						50
762226203						0
761917037						0
1373086570						0
760937141						350
1152174180						0
943333775						0
1155657336						0
944233165						0
1155243047						0
762278388						0
1371771102						100
756884188						0
762821231						0
1147629433						0
625026487						50
757812461						200
1378377893						0
940772579						100
939751704						0
758057375						50

Los mismos resultados se enseñan para sumatorias iguales a 2, 4 y 10 esta vez variando el número de segmentos a 10 cilindros. En las 3 ocasiones la exactitud en los resultados es similar a los casos anteriores.

**Tabla 8. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 2.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
1374594446						1700
1152297455						1800
943870424						1650
760800595						1900
943867238						1400
760804037						650
943869123						1250
943871976						1850
1152297259						1250
943869964						3400
1152298290						3450
760801385						2900
1152298158						2300
943865865						1150
943867782						3900
943871405						1250
1152293794						2550
1374591211						1900
1152295779						2500
1152293202						1700
1152292154						1000
943867310						1550
625763271						1900
625764641						3000
1152294566						3050
760802296						2550
943868801						2550

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
1152295315						3400
625764481						200
1374589905						2350

**Tabla 9. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 4.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
943634047						200
1152052667						50
625888929						450
943841447						500
1374953813						400
943794409						450
1152317416						500
1374911757						400
1152248189						750
1374769986						300
625816464						600
760672159						150
761000442						100
1152271555						300
944015906						350
1374443285						600
625677612						600
1374954058						100
760801195						800
625693190						400
1374710125						700
625655802						350
944081777						200
1374746208						400
1152310950						150
760730079						300

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
625772759						400
943943882						400
1152031603						750
944158195						700

**Tabla 10. Cálculo de frecuencias de resonancia de un cilindro segmentado en 10 particiones y con sumatoria 10.**

Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
941372738						0
1371761184						50
1375745043						100
946406463						0
1157286382						50
762742399						100
1150256332						100
1147411966						0
764385601						100
1379698624						0
760306952						0
761012772						0
761093613						0
758213660						50
1150652264						0
1371374622						0
760612752						0
1375489808						0
942074331						0
1151680670						50
759317715						0
1147505394						0
758488684						100
763758540						0
1373158713						0

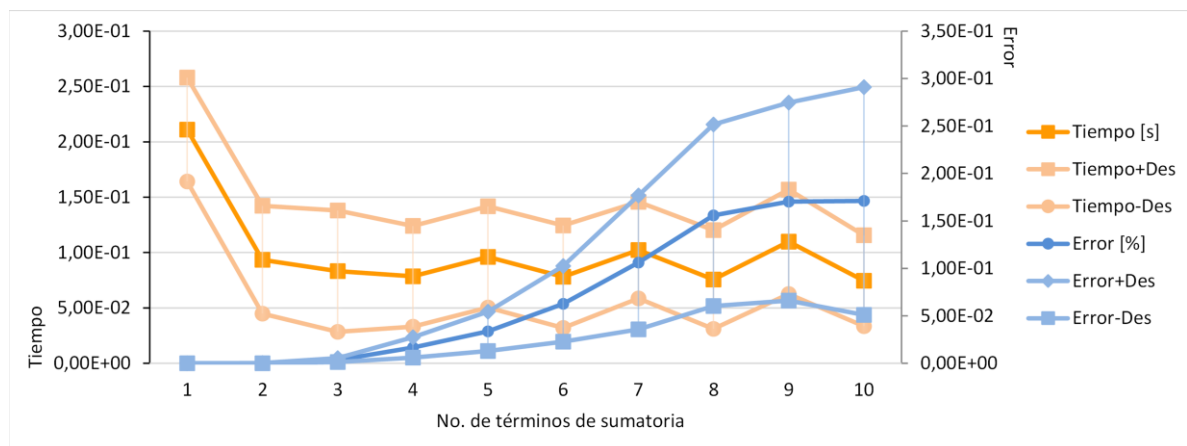


Frecuencias	625763633	760802725	943868930	1152294856	1374592821	Iteraciones
940168832						50
942919138						50
627460921						150
942748761						0
1372492371						0

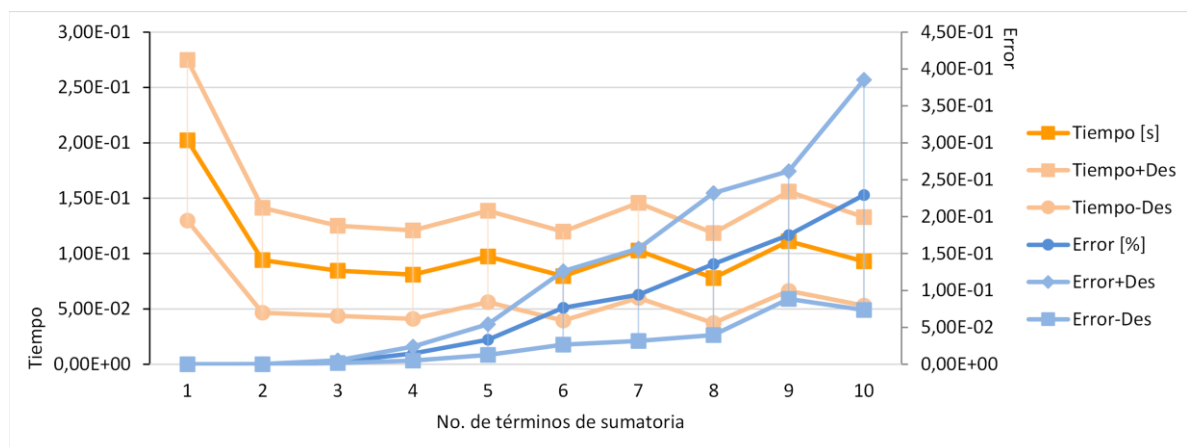
### Anexo C. Simulaciones

Resultados de tiempos de convergencia y porcentajes de error para cilindros segmentados en 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 partes.

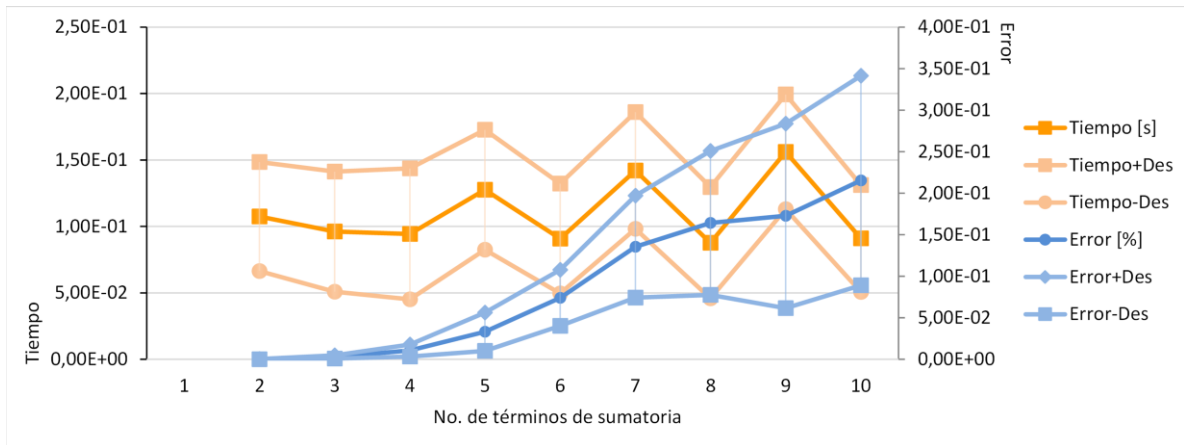
**Figura 16. Cilindro seccionado en 3 partes.**



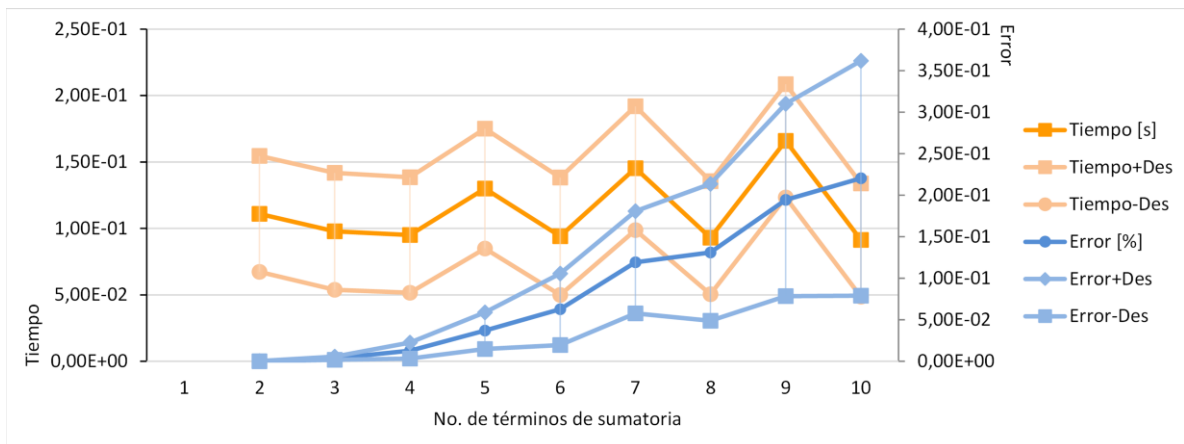
**Figura 17. . Cilindro seccionado en 4 partes.**



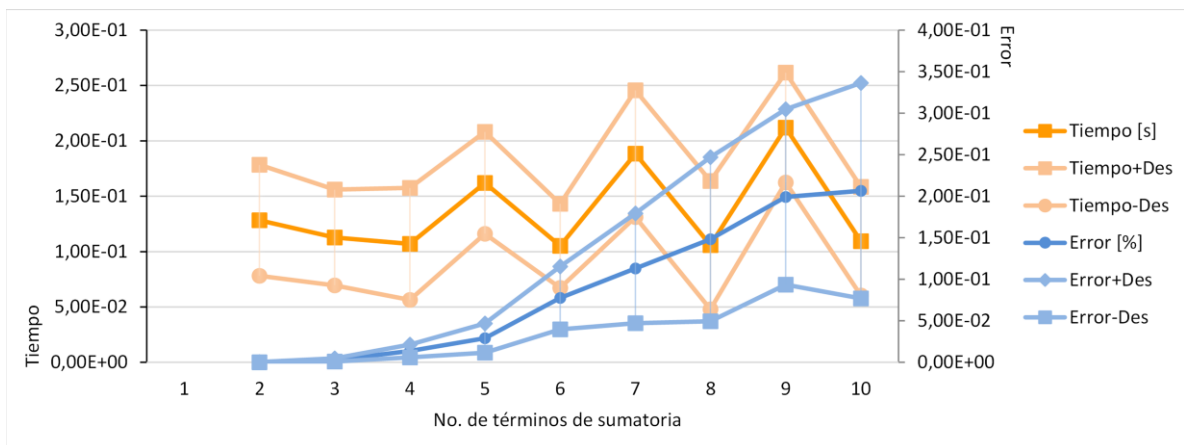
**Figura 18. . Cilindro seccionado en 5 partes.**



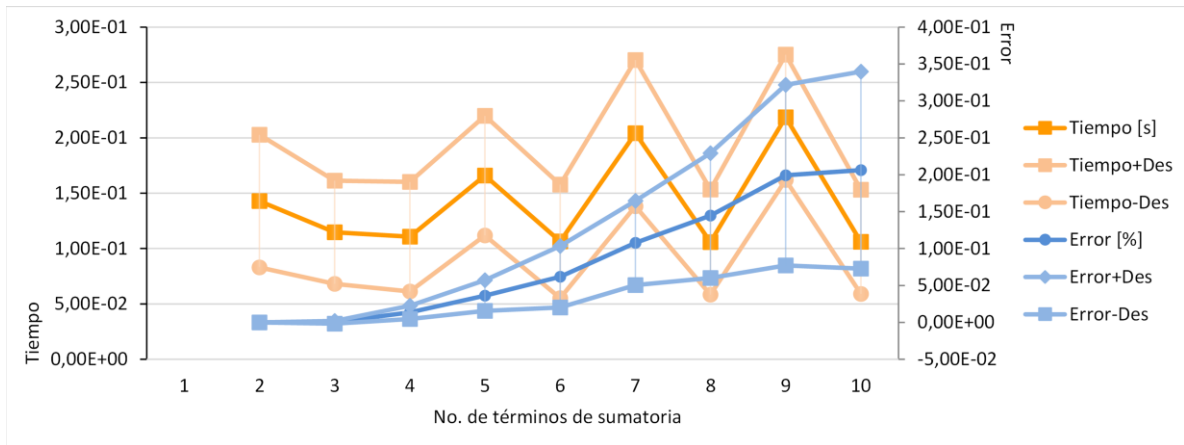
**Figura 19. . Cilindro seccionado en 6 partes.**



**Figura 20. Cilindro seccionado en 7 partes.**



**Figura 21. Cilindro seccionado en 8 partes.**



**Figura 22. . Cilindro seccionado en 9 partes.**

