



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FISICA

OPTICA FRACCIONAL DE FOURIER

Tesis para optar el grado de Doctor en Ciencias Naturales - Física
presentada por:

César Orlando Torres Moreno

Director: Dr. Yezid Torres Moreno

Lugar de realización: Grupo de Optica y Tratamiento de Señales
(GOTS)

June 22, 2004

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FISICA

OPTICA FRACCIONAL DE FOURIER

Tesis para optar el grado de Doctor en Ciencias Naturales - Física presentada por:

César Orlando Torres Moreno

Director: Dr. Yezid Torres Moreno

Lugar de realización: Grupo de Optica y Tratamiento de Señales (GOTS)

22 de junio de 2004

Agradecimientos

Quisiera agradecer al Dr. Yezid Torres M. primero como hermano y posteriormente por haber aceptado dirigir este trabajo. Tanto su orientación, a lo largo de todos estos años de formación doctoral, como su ayuda, comprensión y consejos han resultado invaluable para la elaboración del presente documento.

Al Dr. Pierre Pellat-Finet por haber aceptado la asesoría académica de esta tesis; así como por su decidido apoyo en la realización de mi pasantía, sin la cual seguramente no habría podido terminar mi trabajo doctoral, así mismo por haberme presentado gente tan maravillosa como la de la Ecole Nationale de Telecom de Bretagne en Francia.

También quiero agradecer al Dr. Oscar Gualdrón, al Dr. Arturo Plata, a la Dra. María del Carmen Lasprilla, al Dr. Luis R. Salazar, al Dr. Jaime Salcedo y al Dr. Jaime Meneses por sus valiosos aportes e ideas, así como las discusiones en todos los seminarios donde pude compartir con ellos sus experiencias tanto teóricas como prácticas, fundamentales en mi trabajo de investigación.

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a todos los compañeros del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander en especial a los estudiantes de Postgrado quienes compartieron conmigo maravillosas experiencias, además de crear un ambiente propicio de trabajo, en el que siempre me sentí muy cómodo.

Agradezco especialmente a la Universidad Popular del Cesar el apoyo financiero brindado así como a la Universidad Industrial de Santander el haberme concedido beca para costear mi matrícula, también al personal administrativo de la Escuela de Física de la UIS por soportar con paciencia mis solicitudes y peticiones constantes.

Finalmente quiero agradecer a mi esposa e hijos, quienes con su compañía y apoyo permanente hicieron que todo me resultara menos difícil. A ellos dedico esta tesis.

Bucaramanga, Colombia

César Torres M.

Junio 21, 2004

Índice General

1	Introducción general	9
1.1	Panorama investigativo	10
1.2	Transformada de Fourier fraccional y propagación de ondas	11
1.3	Transformada de Fourier fraccional y las operaciones de filtrado y correlación	12
1.4	Transformada de Fourier fraccional y su representación en el espacio frecuencial	13
1.5	Transformada de Fourier fraccional y su implementación experimental	14
1.6	Transformada de Fourier fraccional y su cálculo computacional	16
2	Operador transformada de Fourier fraccional	18
2.1	Operadores básicos de la propagación en el espacio libre	18
2.1.1	Principio de Huygens y difracción de Fresnel	19
2.1.2	Operador transparencia de curvatura	22
2.1.3	Transferencia de emisor a receptor	23
2.2	Análisis de sistemas ópticos multielementos utilizando la transformada de Fourier de orden fraccional	24
2.2.1	Preliminares de la transformada de Fourier de orden fraccional	24
2.2.2	Matriz de transferencia de rayos	25

2.2.3	Transformada fraccional de Fourier y fórmula de Collins	26
2.2.4	Sistemas ópticos generales analizados como una transformada de Fourier de orden fraccional	28
2.2.5	Operador transformada de Fourier de orden fraccional.	30
2.3	Operador transformada fraccional de Fourier aplicado a estructuras ópticas elementales .	32
2.3.1	Difracción de Fresnel en el espacio libre	32
2.3.2	Difracción de Fresnel en el espacio libre seguido de una lente delgada	33
2.3.3	Lente delgada entre espacios libres	34
2.3.4	Transformador fraccional de Fourier Lohmann tipo II.	36
2.3.5	Medio con índice refractivo n	38
2.4	Análisis de sistemas ópticos coherentes utilizando el operador transformada fraccional de Fourier	39
2.4.1	Introducción	39
2.4.2	La transformada fraccional de Fourier y la fórmula de Collins	40
2.4.3	Sistemas ópticos coherentes	41
2.5	Formula de Collins en el dominio frecuencial	44
2.5.1	Formación de la imagen en el dominio frecuencial	44
2.5.2	Plano de entrada es el plano objeto focal del sistema óptico	45
2.5.3	Conclusiones	45
2.6	Interferograma fraccional de Young	45
2.6.1	Introducción	46
2.6.2	Interferograma clásico de Young	47
2.6.3	Interferograma fraccional de Young	48
2.6.4	Resultados digitales	50

2.6.5	Resultados Opticos	51
3	Resonadores y haces laser	52
3.1	Introducción	52
3.2	Difracción de Fresnel	53
3.3	Interpretación del factor de fase adicional	54
3.4	Condición de estabilidad de los resonadores laser	55
3.5	Diámetros de los haces de Gauss en un resonador	56
3.6	Modos de oscilación en una cavidad resonante	57
3.7	Resonador óptico canónico	59
3.7.1	Transformada fraccional de Fourier y matriz de transferencia de rayos	59
3.7.2	Resonador multielementos de espejos esféricos	60
3.7.3	Resonador multielementos de espejos planos	61
3.7.4	Resonador canónico de Lohmann	64
3.7.5	Modos de oscilación en la cavidad láser: el punto de vista de la difracción	65
4	Correlación fraccional	71
4.1	Correlador de transformación fraccional conjunta	73
4.2	Simulación computacional	76
4.3	Observaciones sobre el JTC fraccional	78
5	Coherencia y \mathcal{F}^α	79
5.1	Introducción	79
5.2	Teoría de la coherencia de sistema ópticos multielementos	80
5.2.1	El teorema de Zernike-Van Cittert	81
5.2.2	Zona lejana del teorema de Zernike-Van Cittert	83

5.2.3	Observaciones sobre el teorema de Zernike-Van Cittert	84
5.3	Propagación de haces invariantes, método basado en la transformada de Fourier de orden fraccional	85
5.3.1	Introducción	85
5.3.2	Teoría de la coherencia de sistemas ópticos multielementos	86
5.3.3	Propagación de haces parcialmente coherentes dentro de un sistema óptico multielementos	87
5.3.4	Propagación de haces invariantes parcialmente coherentes	88
5.3.5	Caso de estructura confocal vacía	88
6	Conclusiones	90
6.1	resultados generales	90
6.2	Producción académica	95
6.2.1	Trabajos completos en Eventos	95
6.2.2	Artículos completos publicados en revistas	98
6.2.3	Monografías de conclusión de especialización en Física asesoradas y concluidas . .	100

Índice de Figuras

2.1	Propagación en el espacio libre	18
2.2	Difracción de Fresnel entre superficies esféricas	21
2.3	Efecto del paso de un haz luminoso a través de una lente delgada	22
2.4	Sistema emisor receptor	24
2.5	Trayectoria de un rayo en un sistema óptico	25
2.6	Sistema óptico entre emisor esférico y receptor esférico	30
2.7	Propagación en e el espacio libre	32
2.8	Espacio libre y lente delgada	33
2.9	Lente delgada entre espacio libre	34
2.10	Transformador fraccional tipo I de Lohmann	35
2.11	Sistema transformador fraccional de Fourier Lohmann tipo II.	37
2.12	Onda en medio dieléctrico con índice refractivo n	38
2.13	Sistema Optico entre planos	40
2.14	Plano de entrada al frente de la lente	42
2.15	La entrada está directamente contra la lente	43
2.16	Plano de entrada entre la lente y el plano de salida	43
2.17	Dispositivo óptico para evaluar la transformada fraccional del espectro angular	44

2.18	Interferograma clásico de Young.	46
2.19	Interferograma fraccional de Young	48
2.20	Franjas para los ordenes fraccionales 0.4,0.6,0.8 y 1 obtenidos digitalmente	50
2.21	Franjas para los ordenes $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$	51
3.1	Difracción de Fresnel entre superficies esféricas	54
3.2	Simulación de los modos de oscilación a la entrada y salida de la cavidad resonante. (a)Entrada TEM_{00} ;(b)Salida TEM_{00} ;(c)Entrada TEM_{01} ;(d)Salida TEM_{01} ;(e) Entra- da TEM_{11} ;(f)Salida TEM_{11}	58
3.3	Resonador multielementos de espejos esféricos	60
3.4	Resonador multielementos de espejos planos	62
3.5	Difracción de Fresnel entre superficies esféricas	65
3.6	Resonador láser confocal	66
3.7	Simulación digital sin filtrado	69
3.8	Simulación digital con filtrado para el modo TEM_{01}	69
4.1	Sistema de iluminación con onda esférica y observación sobre un plano	72
4.2	Montaje propuesto para el JTC fraccional.	76
4.3	Picos de correlación fraccional entre dos caracteres obtenidos por simulación digital del FJTC propuesto.(a)Entrada;(b) $p_1 = p_2 = 0.4$;(c) $p_1 = p_2 = 0.6$;(d) $p_1 = 0.8, p_2 = 0.9$;(e) $p_1 =$ $p_2 = 0.9$;(f) $p_1 = p_2 = 1$	77

Título: OPTICA FRACCIONAL DE FOURIER ¹

Autor: César Orlando Torres Moreno.²

Palabras Claves:

1. Transformación de Fourier Fraccional. 2. Operadores de difracción. 3. Correlación fraccional 4. Resonadores y haces láser. 5. Coherencia.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se estudia detalladamente la transformación fraccional de Fourier y sus aplicaciones en el campo de la óptica. En el primer capítulo se estudia lo referente al estado de arte del tema objeto de investigación de la presente tesis doctoral, lo cual pone de manifiesto la importancia, pertinencia y relevancia del objeto de investigación; el segundo capítulo introduce el tema correspondiente a los operadores de la transformación de Fourier de orden fraccional, los cuales son de gran valor en la medida que posibilitan la interpretación de los conceptos transferencia de campo electromagnético y transparencia de curvatura en la propagación en el espacio libre y la transformada de Fourier de orden fraccional también es posible estudiar en detalle sistemas ópticos caracterizados por su matriz de transferencia de rayos. El tercero introduce el estudio de los resonadores y haces láser en el contexto de la difracción lo cual pone de manifiesto lo novedoso del método de la transformación de Fourier de orden fraccional, este análisis permite encontrar los parámetros más característicos de los resonadores y sus principales implicaciones en el estudio de tales dispositivos ópticos. En el cuarto se discute la operación correlación fraccional, así como se propone un dispositivo de esta naturaleza que solo tome en cuenta las curvaturas de las ondas de iluminación. El quinto está dedicado al estudio de la coherencia desde el punto de vista de la transformada fraccional de Fourier, a partir de este resultado se estudia finalmente en detalle la propagación de haces a través de sistemas ópticos multielementos.

¹Trabajo de Investigación.

²Facultad de Ciencias. Doctorado en Ciencias Naturales - Física. TORRES MORENO, Yezid.

Title: FRACTIONAL FOURIER OPTICS ³

Author: César Orlando Torres Moreno.⁴

Key words:

1. Fractional Fourier Transformation.
2. Diffraction Operators.
3. Fractional Fourier transform correlators
4. Resonators and beam laser.
5. Coherence.

Abstract

In this work we demonstrate that the propagation of a light wave into multi-element optical system can be treated in the framework of the fractional Fourier transform. This result provide new insight into wave propagation and multi-element resonators as well as the possibility of exploiting this result as a mathematical tool in analyzing such systems. This mathematical formulation gives the direct relationship between input and output of the light field, the confinement stability condition, the diameters of the beam at the mirrors and the diameter of the beam waist. This mathematical formulation gives a new formulation of the classical scalar beam-propagation method and the Zernike Van Citter theorem. The method relies on the fundamental fact that the coherence is transformed by a linear filter univocally connected to the filter acting on the electric field; building on this result, we solve exactly the problem of the passage of such fields through arbitrary lossless optical system characterized by their $ABCD$ matrices. and finally some properties of digital correlation based of the fractional Fourier transform are analyzed. We generalize the architecture of a VanderLugt correlator to achieve the VanderLugt fractional Fourier transform correlator such that fractional correlation can be obtained. In this situation the Fourier transform in the classical VanderLugt is replaced by the fractional Fourier transform, and four different VanderLugt fractional architectures can be implemented.

³Research Work

⁴Facultad de Ciencias. Doctorado en Ciencias Naturales - Física. TORRES MORENO, Yezid.

Capítulo 1

Introducción general

Es muy difícil y se necesitaría de mucho tiempo para llegar a obtener los orígenes que contribuyeron al surgimiento de la Transformada de Fourier fraccional ($\mathcal{F}^{(\alpha)}$), una historia comprensiva que puede resumir como la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ y su implementación óptica surgieron hace unos pocos años en la Universidad de Erlangen; hace referencia a la visita de pasantía de los profesores David Mendlovic (Tel -Aviv) y Haldun Ozaktas (Ankara); quienes trataron de fraccionar enteros para divertirse en el espíritu de la genuina investigación básica. Primero miraron las derivadas de orden m (entero) y encontraron una derivada con un índice p de valor real o complejo; inmediatamente se relacionó este resultado con la transformación clásica de Fourier a la cual puede ser asignada por ejemplo el índice 1.

Para darle interpretación física se diseñó un experimento fundamentado en el hecho de que una pieza de fibra GRIN de longitud propia L_1 , como ya se sabe; permite mejorar ópticamente una transformada de Fourier dos dimensional, por tanto se propuso trabajar con fracciones de fibra GRIN disminuyendo hasta obtener piezas cuyas longitudes tenían valores correspondientes a fracciones de la longitud propia de la fibra. Cualquier cosa que esa pieza de fibra haga a la onda de luz se definió como la Transformada de Fourier de orden fraccional, la cual se denota por: $\mathcal{F}^{(\alpha)}$; donde $\alpha = \frac{\pi}{2}n_\alpha$ y n_α es el orden de la transformación fraccional.

Posteriormente se supo que algunos matemáticos conocían la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ desde hacía algunos años; puesto

que esta herramienta fué reintroducida por Namias en 1980 para resolver ecuaciones diferenciales parciales que se encuentran en la física cuántica. Lo importante acá y quizás el aporte hace referencia al hecho que si bien se había definido la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ su implementación y aplicaciones a la óptica no se conocían.

Aplicaciones a la óptica han sido recientemente propuestas, la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ ha sido relacionada con la propagación en un medio de índice de gradiente cuadrático y algunas implementaciones ópticas han sido presentadas. No obstante estas aproximaciones apenas comienzan a establecer una muy fundamental relación entre la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ y la óptica; si la óptica de Fourier obedece su nombre al extensivo uso de la transformada estándar de Fourier en las teorías de difracción y formación de imágenes, la pregunta es: qué papel juega la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ en este campo?.

La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ puede ser absolutamente no necesaria, pero su utilidad es provechosa porque existe una clase de conocimientos y aplicaciones para los cuales el grado de generalidad de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ es correcta. La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ es suficientemente general en todos los casos; las contribuciones de esta investigación se fundamentarán en puntos de vista propios, los cuales serán reportados en las publicaciones que se surjan y que ya aparecieron como consecuencia del presente trabajo.

1.1 Panorama investigativo

Los antecedentes a los cuales se refiere la siguiente propuesta han sido obtenidos del análisis exhaustivo de las publicaciones en revistas especializadas tales como: Optics Letters, Applied Optics, IEEE Signal Processing, Optics Communications, Journal of Modern Optics, Optical Engineering, Photonics Spectra, Josa A, Josa B, y Physics Today desde el año 1995 hasta ahora, también es importante anotar que en abril de 1995 los profesores A. W. Lohmann, D. Mendlovic y Z. Zalevsky ; presentaron su Status report on: THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM [1] en el cual aparecen relacionados los artículos hasta ese tiempo realizados sobre el tema de este trabajo. Adicionalmente se ha obtenido material a través de memorias y proceedings de eventos, así como de los artículos que se han publicado en esta área de

trabajo.

En los siguientes párrafos se hace referencia a los principales trabajos y orientaciones que se pueden inferir en concordancia con las publicaciones analizadas y que sin lugar a dudas sirven de punto de partida para la ejecución posterior de trabajos en este campo.

Los temas que se abordan en las publicaciones sobre la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ se pueden dividir en seis aspectos:

1.2 Transformada de Fourier fraccional y propagación de ondas

Si se compara la difracción de Fresnel y la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$, la similitud permite pensar en la idea que la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ puede ser asociada con la transferencia de campo electromagnético por difracción. Se probará que la difracción de Fresnel puede ser escrita como una $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ cuyo orden depende de la distancia donde el campo difractado es observado y que la continuidad de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con respecto a sus ordenes se corresponde a la propagación de la onda y a la continuidad entre el fenómeno de difracción de Fresnel y el de Fraunhofer.

La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ también aparece como una herramienta matemática [2-4] apropiada de la expresión de la difracción de Fresnel bajo aproximación metaxial; donde la transformada de Fourier estándar es un caso especial que corresponde a la difracción de Fraunhofer; así como la transferencia entre dos medios homogéneos e isotrópicos puede también ser representada con ayuda de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ abriendo un nuevo camino de proceder con la óptica de Fourier y la teoría de formación de imágenes.

Otro aspecto importante en este campo es el que hace referencia a las propiedades y operaciones básicas de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$; y que se pueden resumir en [5]:

El teorema de escalamiento muestra que una $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de una entrada escalada con respecto a la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de una función no escalada es escalada, multiplicada por un factor de fase cuadrático y desplazada en su orden fraccional; por tanto la TF clásica es un caso específico de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ [6].

Se establece una relación entre la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ y la distribución de amplitud de la luz en dos superficies

esféricas de radio y separación dada. La propagación de la luz puede ser vista como un proceso de $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ continua. Cuando la luz se propaga su distribución de amplitud se envuelve a través de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de orden creciente. Este resultado coloca a la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ como una herramienta para el análisis y descripción de los sistemas ópticos compuestos de una secuencia arbitraria de lentes delgadas y secciones de espacio libre y llegar a la clase general de sistemas de transformación $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con entrada variable y factores de escalamiento a la salida.

Algunas propiedades esenciales de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ son como siguen:

- a) Es lineal
- b) La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de primer orden ($p=1$) corresponde a la TF estándar
- c) Es aditiva en índice: es decir aplicar una transformada fraccional de orden q a una función y luego aplicar al resultado una transformación fraccional de orden p ; equivale a aplicar a la función de partida una transformación de orden q más p

Existen otras propiedades que pueden ser encontradas en las referencias respectivas[5-7].

1.3 Transformada de Fourier fraccional y las operaciones de filtrado y correlación

La correlación es una herramienta muy utilizada para el reconocimiento de formas, comparación o análisis de señales. Es tal vez el caso más importante de la convolución. La correlación es fácilmente implementada ópticamente por ejemplo con la configuración coherente Vander Lugt de tipo 4-f, con su sistema análogo incoherente o con el JTC [8].

Los artículos estudiados han explotado la conveniencia experimental del concepto de JTC en otro contexto; el cual se caracteriza por generalizar la correlación convencional por definición de la operación de correlación fraccional, se combina el concepto teórico de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con el concepto del JTC experimental,

produciendo el Correlador de transformación conjunta fraccional [9].

Interpretaciones ópticas recientes del operador $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ han sido introducidas [10,11]; donde el operador fraccional es definido de dos formas las cuales son consistentes con la definición de la correlación convencional. La correlación fraccional no es siempre una operación invariante al desplazamiento, esta propiedad permite algunas nuevas aplicaciones para la correlación fraccional como detección de imágenes variantes al desplazamiento [12]. Una implementación óptica de la correlación fraccional es sugerida y demostrada mediante simulaciones en computador.

1.4 Transformada de Fourier fraccional y su representación en el espacio frecuencial

Se ha estudiado la aproximación a los filtros espaciales de Fresnel, la cual considera las propiedades de la función de distribución de Wigner para una transparencia de entrada bidimensional si ella es iluminada por una onda esférica convergente; y se asume un objeto de transparencia formado por una superposición de estructuras binarias. Por tanto se aplica la transformada fraccional de Fourier al filtrado espacial en el dominio de Fresnel.

La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ y algunas de sus propiedades se han presentado haciendo especial énfasis en la interpretación como una rotación en el plano frecuencial y en la relación de la transformación con las representaciones por la distribución de Wigner [13]; la función ambigüedad, la transformada de Fourier de espacio directo y el espectrograma. Estas relaciones tienen una forma natural simple y sustentan la interpretación de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ como un operador de rotación.

1.5 Transformada de Fourier fraccional y su implementación experimental

Se ha implementado experimentalmente un sistema modular de lentes invariante a escala y equidistante, que permite obtener la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ en el dominio deseado utilizando para ello la propiedad conmutativa de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$; es decir que si se aplica una $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de orden p_1 y seguido se aplica una de orden p_2 o viceversa, entonces la transformación total será: $p = p_1 + p_2$

En el tratamiento del fenómeno de propagación se han demostrado algunos de los teoremas de la Transformada de Fourier estándar, utilizando la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$. De tal forma que el problema de la difracción escalar en un medio homogéneo e isotrópico (espacio libre) dentro de la aproximación paraxial se puede describir en una forma compacta y coherente; donde la difracción de Fraunhofer aparece en el límite donde la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ se convierte en la transformada de Fourier clásica [5]. En particular la propagación de ondas monocromáticas a través de un medio GRIN con un perfil de índice de refracción cuadrático se ha analizado con la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$; las imágenes y las propiedades de transformación de Fourier en fibras [1] por tanto pueden ser ubicadas con ayuda de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ en una perspectiva simple y de mucha utilidad.

Se han implementado sistemas de lentes de zoom [11]; este montaje permite variar el grado p de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ continuamente desde -1 hasta 1. En concordancia con la representación matricial del sistema de lentes se pueden obtener dos sistemas de Fourier ópticos típicos; uno de ellos es conocido como el $2f$ y el otro es con dos sistemas $2f$ ($4f$). Este montaje [10] también puede ser implementado con la tecnología micro-óptica y la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ continua se puede lograr con piezas de fibra tipo GRIN y longitudes de Fourier propias.

La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ bidimensional de cualquier orden, se ha implementado ópticamente; lo cual permite procesamiento en tiempo real. La $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ biaxial se obtuvo utilizando un sistema de lentes cilíndricos, donde la utilización de un sistema simétrico y uno anamórfico simplifica el montaje e incrementa su flexibilidad.

Esto permite escoger el grado de invarianza a desplazamientos para dos ejes independientemente; además del multiplexado de señales se implementa más fácilmente usando $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ anamórfica [15].

Se ha mostrado que la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ se puede utilizar para interpretar resultados de sistemas de imágenes parcialmente coherentes en modelos de coherencia exponencial real cuadrático o imaginario. Por tanto se ha analizado sistemas de luz con grados arbitrarios de coherencia; en particular la coherencia parcial y se ha obtenido una conexión con la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ (se obtuvo que cuando la función de distribución es de tipo Gauss, el espectro de salida está relacionado con a la respuesta impulsional del sistema de imágenes y la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ del patrón de entrada) [16].

Se ha probado que la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ de orden creciente permite expresar la evolución de la distribución de amplitud de la luz a través de un sistema óptico; también se ha extendido este concepto a luz parcialmente coherente formulando la propagación de intensidad mutua (parámetro que caracteriza la coherencia espacial de una onda).

Se ha implementado ópticamente la $R - \mathcal{F}^{(\alpha)}$ (Transformada fraccional de Fourier Real) la cual; puede ser utilizada para la iluminación espacialmente coherente o incoherente en un interferómetro con un difusor que gira y por tanto rompe mecánicamente la coherencia espacial; el haz de luz se divide en dos direcciones, en el primer camino la luz llega directamente al plano de salida y en el segundo se coloca un prisma que rota el objeto original p radianes; luego los dos haces se vuelven a recombinar con el mismo divisor de haz. Si los dos caminos son iguales una transformación coseno convencional es obtenida, esta es una versión real de la transformada de Fourier (Su definición es la parte real de la transformada de Fourier, si se usan funciones de entrada reales); si se cambian las longitudes de los brazos se prueba que la $R - \mathcal{F}^{(\alpha)}$ es obtenida a la salida mientras que la relación entre la longitud óptica de cada camino es el orden de la transformación [].

También se han implementado montajes que prueban que la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ es una herramienta muy útil en el diseño de lentes; especialmente para lo que se conoce como un sistema de lentes en cascada, es decir la

$\mathcal{F}^{(\alpha)}$ se puede utilizar en óptica geométrica, donde se puede aprovechar su propiedad de aditividad; lo cual significa que aplicar dos transformaciones fraccionales seguidas se obtiene que es equivalente a una sola transformación cuyo orden es igual a la suma de los ordenes previos.

El uso de la óptica anamórfica permite obtener una $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con diferente orden en dos ejes ortogonales. Esta posibilidad es observada con un experimento de laboratorio donde una $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ anamórfica es obtenida ópticamente y el resultado es simulado por el computador [17]. Varias aplicaciones tales como correlación y multiplexado pueden tener ventajas de los nuevos grados de libertad adicionados por este método.

De manera general se puede decir que el estado del arte en la actualidad del tema de investigación de esta tesis posibilita la utilización de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ como una herramienta para el análisis de sistemas ópticos.

1.6 Transformada de Fourier fraccional y su cálculo computacional

El primer método propuesto para el cálculo de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ digital se basó en la descomposición de la distribución de entrada en los modos propios del operador $\mathcal{F}^{(\alpha)}$; un factor de propagación de fase transforma cada una de estas funciones independientemente, la adición de los modos propagados constituye la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ final [17]. Este método consume mucho tiempo ya que para imágenes grandes el algoritmo es proporcional al cuadrado del tamaño de la entrada. Después fué publicado un algoritmo [18] que en esencia utiliza este mismo concepto obteniendo una proporcionalidad en el tiempo de cálculo proporcional a la relación matemática $N \log N$; donde (N es el tamaño de la imagen de entrada), sin embargo este método causa pérdida de información para ordenes fraccionales bajos.

Finalmente se ha obtenido un método para el cálculo de la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con ayuda de un algoritmo que utiliza la transformada de Fourier rápida [19]. El proceso involucra prioritariamente dos transformadas de Fourier rápidas en cascada; así el proceso tiene la misma complejidad que el algoritmo; el método es

válido para ordenes fraccionales de -1 a 1. Los factores de escala para la $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ y la difracción de Fresnel son calculados también a través de la transformada de Fourier rápida.

Capítulo 2

Operador transformada de Fourier fraccional

2.1 Operadores básicos de la propagación en el espacio libre

La propagación del campo electromagnético en el espacio libre, estudiada desde la transformación de Fourier, permite una más adecuada elaboración pedagógica de los fenómenos de difracción de Fresnel y Fraunhofer; en la primera parte de este capítulo estudiaremos los operadores básicos de la propagación en el espacio libre.

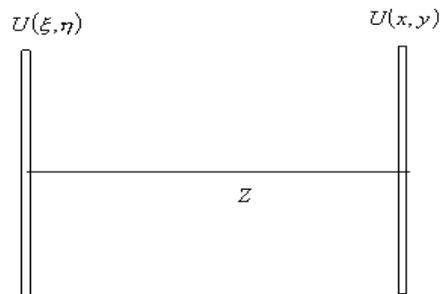


Figura 2.1: Propagación en el espacio libre

En la figura 2.1., cuando un objeto plano es iluminado con una onda luminosa plana de amplitud unitaria, la amplitud del campo complejo observada sobre el plano $U_P(x, y)$ es calculada con la ayuda de la formula de difracción de Fresnel [] dada por:

$$U_P(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{iz\lambda} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A(\xi, \eta) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \exp\left[\frac{-ik}{z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta \quad (2.1)$$

Para mayor conveniencia desde el punto de vista de la escritura matemática U_A es el plano de coordenadas cuyas componentes son (ξ, η) en el plano de entrada difractante y U_P es el plano de coordenadas cuyas componentes son (x, y) en el plano de salida o de observación y el origen sobre P es desplazado con respecto al tiempo de origen sobre A . Se obtiene entonces que la interpretación más simple es que esta expresión permite obtener las figuras de difracción entre planos a medida que la onda se propaga.

2.1.1 Principio de Huygens y difracción de Fresnel

La ecuación de la difracción de Fresnel (Ecuación 2.1.) se puede escribir de la siguiente forma:

$$U_P(x, y) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda(-z)}(x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{iz\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A(\xi, \eta) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda(z)}(\xi^2 + \eta^2)\right] \exp\left[\frac{-2i\pi}{\lambda(z)}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta \quad (2.2)$$

Lo cual es equivalente a:

$$U_P(x, y) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda(z)}(x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{iz\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A(\xi, \eta) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda(-z)}(\xi^2 + \eta^2)\right] d\xi d\eta \quad (2.3)$$

$$\exp \left[\frac{-2i\pi}{\lambda(z)} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta$$

Pero las multiplicaciones de las distribuciones de amplitud compleja sobre superficies esféricas confocales de radios z , es decir para el caso del plano difractante. se tiene una onda esférica convergente y para el caso del plano de observación se obtendrá una onda esférica divergente. Se considera que:

$$U_{A_{esf}}(\xi, \eta) = U_A(\xi, \eta) \exp \left[\frac{-i\pi}{\lambda(-z)} (\xi^2 + \eta^2) \right] \quad (2.4)$$

y

$$U_{P_{esf}}(x, y) = U_P(x, y) \exp \left[\frac{-i\pi}{\lambda(z)} (x^2 + y^2) \right] \quad (2.5)$$

Es decir ahora las distribuciones de amplitud compleja estan sobre las superficies esféricas $U_{A_{esf}}(\xi, \eta)$ en la superficie del emisor y $U_{P_{esf}}(x, y)$ en la superficie de observación; las cuales son tangentes a sus respectivos planos.

Por tanto la difracción de Fresnel se puede escribir como:

$$U_{P_{esf}}(x, y) = \frac{1}{iz\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{A_{esf}}(\xi, \eta) \exp \left[\frac{-2i\pi}{\lambda(z)} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \quad (2.6)$$

Introduciendo parámetros de escala para las coordenadas de las distribuciones de amplitud compleja de emisión y observación:

$$\rho = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} \xi; \quad \gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} \eta \quad \text{and} \quad u = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} x; \quad v = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} y$$

Reescribiendo en coordenadas originales se obtiene:

$$U_{P_{esf}}(x, y) = \frac{2\pi}{iz\lambda} \mathfrak{S} [U_{A_{esf}}(\xi, \eta)] \quad (2.7)$$

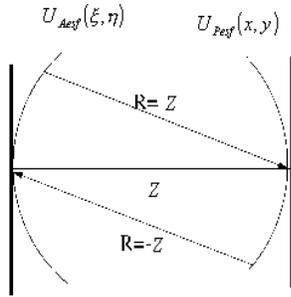


Figura 2.2: Difracción de Fresnel entre superficies esféricas

Situación que corresponde a la configuración óptica de la figura 2.2.

La difracción de Fresnel es una transformada de Fourier estandar entre dos superficies esféricas cuyos vértices están ubicados sobre la misma esfera y separados una distancia que se corresponde con el radio de la esfera. Este resultado desde el punto de vista de la óptica metaxial no es otro que el operador esfera de Fourier. Es decir $U_{Pesf}(x, y)$ es la esfera de Fourier de $U_{Aesf}(\xi, \eta)$. Obviamente que esta interpretación cumple con la conservación del principio de Huygens; es decir que la superficie esférica del emisor de radio z que se propaga debe ser observada a una distancia z pero sobre una superficie esférica de radio $-z$.

Para el caso en el cual las magnitudes de los radios del emisor y del detector son diferentes se probará que la conservación del principio de Huygens exige una transformación de Fourier de orden fraccional.

En otras palabras se ha obtenido el operador transferencia de campo electromagnético o esfera de Fourier.

Por tanto: Si A es un emisor esférico de radio z y P es un receptor esférico de radio $-z$, y está centrado sobre A ; la transferencia de campo de A a P corresponde a la figura de difracción de Fraunhofer y se expresa matemáticamente como una transformada de Fourier estándar.

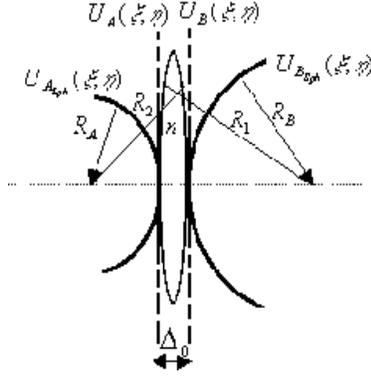


Figura 2.3: Efecto del paso de un haz luminoso a través de una lente delgada

2.1.2 Operador transparencia de curvatura

Si se considera la configuración de la figura 2.3. la cual muestra el efecto del paso de un haz luminoso a través de una lente delgada.

$U_{A_{esf}}(\xi, \eta)$ es la distribución del campo en frente de la lente y $U_{B_{esf}}(\xi, \eta)$ es la distribución del campo inmediatamente después de la lente; con ayuda de la aproximación de la transformación de la amplitud compleja por una lente delgada se obtiene luego de algunos pasos algebraicos

$$U_B(\xi, \eta) = U_A(\xi, \eta) \exp\left(\frac{2i\pi\Delta_0}{\lambda}\right) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] \quad (2.8)$$

En la situación particular cuando el radio de la superficie de la onda esférica de iluminación coincide con el radio de la superficie posterior de la lente y el radio de la superficie de la onda esférica que atraviesa la lente coincide con el radio de la superficie anterior de la lente, ($R_1 = R_B$ y $R_2 = R_A$), la distribución de amplitud compleja inmediatamente detrás de la lente es:

$$U_B(\xi, \eta) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{R_B}\right)\right] = \quad (2.9)$$

$$U_A(\xi, \eta) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{R_A}\right)\right] \exp\left(\frac{2i\pi\Delta_0}{\lambda}\right) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)(n)\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)\right]$$

En la ecuación 2.9 el factor $\exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{R_B}\right)\right]$; es un factor de fase que representa en aproximación cuadrática una onda esférica que converge a un punto luminoso a la distancia R_B ; y el factor $\exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{R_A}\right)\right]$ es un factor de fase que representa en aproximación cuadrática una onda esférica que diverge desde un punto luminoso a la distancia R_A . Si $\Delta_0 \rightarrow 0$ (criterio de la lente delgada) se obtendrá:

$$U_{B_{esf}}(\xi, \eta) = U_{A_{esf}}(\xi, \eta) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)\right] \quad (2.10)$$

Resultado que conduce a la obtención del operador transparencia de curvatura de la óptica metaxial.

2.1.3 Transferencia de emisor a receptor

Con la correcta aplicación de estos dos operadores es posible obtener la transferencia del campo electromagnético de forma general para un emisor A de radio R_A al receptor B de radio R_B , separados por una distancia cualquiera z . (ver figura 2.4); Se debe resaltar que los autores que introdujeron estos operadores originalmente fueron G. Bonnet y Pierre Pellat-finet, sin embargo su deducción se realizó mediante la óptica metaxial; contrario a la situación desarrollada en esta tesis, la cual se fundamenta en la aproximación paraxial.

$$U_{B_{esf}}(x, y) = \frac{2\pi}{iz\lambda} \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{z}\right)\right] \Im\left[U_{A_{esf}}(\xi, \eta) \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_A}\right)\right]\right] \quad (2.11)$$

En la situación particular cuando $R_A \rightarrow \infty$ y $R_B \rightarrow \infty$ la difracción se establece entre pantallas planas a distancia finita (difracción de Fresnel); para el caso en el cual $R_A \rightarrow \infty$ o $R_B \rightarrow \infty$ (Una de las dos superficies planas) a distancia finita, Configuración equivalente a emisor esférico y detector plano o emisor plano y detector esférico, un apropiado escalamiento entre las coordenadas involucradas permite

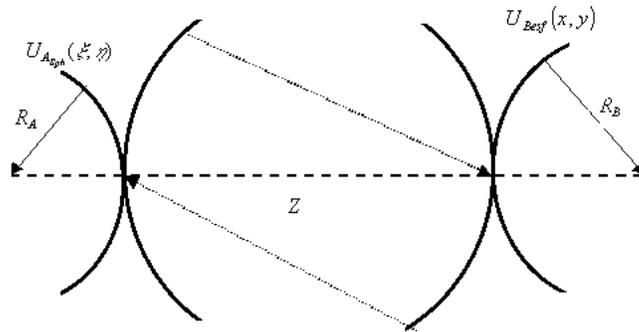


Figura 2.4: Sistema emisor receptor

obtener la transformada fraccional de Fourier [20-22] y finalmente para el caso en el cual $R_A \rightarrow \infty$, $R_B \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow \infty$, se recupera la formula de difracción de Fraunhofer.

2.2 Análisis de sistemas ópticos multielementos utilizando la transformada de Fourier de orden fraccional

Una relación directa entre la transformada fraccional, la teoría matricial de transferencia de rayos y la formula de Collins es estudiada en este numeral del presente capítulo. Este resultado es aplicado para describir el comportamiento de algunos sistemas ópticos, este tratamiento sugiere una generalización de la transformada fraccional de Fourier basada en la matriz de transferencia de rayos.

2.2.1 Preliminares de la transformada de Fourier de orden fraccional

La Transformada fraccional de Fourier, la cual es una extensión de la transformada de Fourier convencional fué reintroducida en la literatura matemática por Namias[5] en 1980; recientemente, Mendlovic y Ozaktas[1-4]; la introducen como una nueva herramienta para el análisis de imágenes en óptica, sus propiedades, implementación experimental y aplicaciones han sido estudiadas extensivamente. Una definición operacional de la transformada de Fourier de orden fraccional en óptica y la interpretación de la

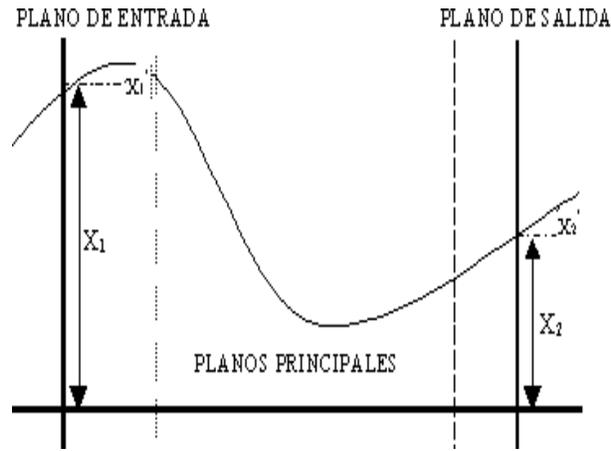


Figura 2.5: Trayectoria de un rayo en un sistema óptico

misma en términos de la difracción de Fresnel también fué obtenida [22], Lohmann propone una definición diferente de la transformada fraccional de Fourier, la cual se fundamenta en las funciones de distribución de Wigner. El propósito de esta parte de la tesis es formular el operador transformada fraccional de Fourier; esta expresión contiene una relación directa entre las entradas y salidas de sistemas ópticos multi-elementos.

El estudio de la matriz de transferencia de rayos[23] es de gran utilidad para simplificar el análisis de sistemas ópticos complejos; la formula de Collins[24], es una integral de difracción para sistemas ópticos y establece un puente entre la óptica de rayos y la óptica ondulatoria bajo el régimen de aproximación paraxial. Se mostrará como la combinación de la matriz de transferencia de rayos, la formula de Collins y la transformada de Fourier de orden fraccional[23,24], resultan en una nueva aproximación adecuada para el estudio de estructuras ópticas, donde la propagación de la luz puede ser vista como un proceso de transformación fraccional continua.

2.2.2 Matriz de transferencia de rayos

Bajo condiciones de aproximación paraxial las propiedades de los rayos en un sistema óptico pueden ser tratadas con el formulismo elegante de la matriz de transferencia de rayos; un rayo paraxial es obtenido en una sección transversal dada de un sistema óptico y por tanto está totalmente caracterizado por su distancia x del eje óptico y pendiente x' (ver figura 2.5, la pendiente se asume pequeña, de tal forma que el rayo que pasa a través de cualquier estructura dependerá de sus propiedades y de las condiciones de

salida. En esta situación la relación entre los parámetros de entrada y salida está dada por:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Las pendientes son medidas positivamente como se indica en la figura 2.5.

La matriz $ABCD$ conocida como la matriz de transferencia de rayos y su determinante es generalmente la unidad [25].

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

2.2.3 Transformada fraccional de Fourier y fórmula de Collins

La formula de Collins que describe la distribución de amplitud compleja entre los planos de entrada $U_A(\xi, \eta)$ y de salida u observación $U_P(u, v)$ respectivamente se representa matemáticamente como:

$$U_P(u, v) = \frac{-i}{\lambda B} \exp\left(\frac{i\pi D(u^2 + v^2)}{\lambda B}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i\pi A(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda B}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda B}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.14)$$

La ecuación 2.14. puede ser escrita como:

$$U_P(u, v) = \frac{-i}{\lambda(B)} \exp\left(\frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda(\frac{B}{D})}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i\pi(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda(\frac{B}{A})}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda(B)}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.15)$$

Iluminando el plano de entrada con una onda esférica de radio $\frac{R_1}{A} > 0$, la ecuación 2.15. es justamente una transformada de Fourier de orden fraccional[5] dada por:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp \left[\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) B} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.16)$$

Donde la transformada de Fourier de orden fraccional en forma explícita es:

$$\mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] = \frac{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{2\pi \sin \alpha} \exp \left[\frac{-i(u^2 + v^2)}{2 \tan \alpha} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{-i(\xi^2 + \eta^2)}{2 \tan \alpha} \right] \exp \left[\frac{i(u\xi + v\eta)}{\sin \alpha} \right] [U_A(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (2.17)$$

Una transformada de Fourier fraccional \mathcal{F}^α de orden n_α entre la amplitud compleja de salida $U_P(u, v)$ y la amplitud compleja de entrada $U_A(\xi, \eta)$; $\alpha = \frac{\pi}{2} n_\alpha$, α es un parámetro real.

El factor de fase adicional corresponde a una aproximación cuadrática de una onda esférica[22], por tanto la amplitud compleja del campo de salida $U_P(u, v)$ está sobre una superficie esférica de radio R_2 y es proporcional a la transformada de Fourier de orden fraccional de la amplitud compleja del campo de entrada $U_A(\xi, \eta)$ [20-22]; la relación entre las curvaturas de las superficies esféricas se encuentra como:

$$R_2 = \frac{-AB \left(1 - \frac{B}{R_1}\right)}{AD \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) - \cos^2 \alpha} \quad (2.18)$$

Por consiguiente se puede concluir que cualquier sistema óptico caracterizado por su matriz de transferencia de rayos $ABCD$ que satisfaga la relación 2.18. puede implementar una transformada de Fourier de orden fraccional entre superficies esféricas de radios R_1 y R_2 , siempre y cuando los radios cumplan la condición anterior.

2.2.4 Sistemas ópticos generales analizados como una transformada de Fourier de orden fraccional

La condición 2.18 define el requisito para establecer una transformación de Fourier de orden fraccional, para lo cual se requiere que $B \neq 0$; en esta situación la amplitud compleja $U_P(u, v)$ representa la transformada de Fourier de orden fraccional de la amplitud del campo $U_A(\xi, \eta)$, se debe notar que, justamente como los operadores de la óptica ondulatoria, la matriz de transferencia de rayos debe ser aplicada en la secuencia en la cual la estructura óptica es encontrada si la luz se propaga primero a través de una estructura con matriz de transferencia de rayos M_1 , luego a través de una estructura con matriz de transferencia de rayos M_2 , etc, por consiguiente tendrá una matriz de transferencia de rayos resultante dada M_n , luego la matriz de transferencia de rayos para el sistema completo es $M = M_n \dots M_2 M_1$.

Transformación de Fourier de orden fraccional entre las distribuciones de amplitud compleja de la luz sobre dos superficies esféricas

Se debe notar que otra solución no trivial para la ecuación 2.18. implica que $R_1 \neq B$ y $R_2 \neq \frac{B}{D}$; $D \neq 0$ luego una relación de transformada de Fourier de orden fraccional existe entre las amplitudes complejas de los campos electromagnéticos en las dos superficies esféricas de radios R_1 y R_2 . Por consiguiente se puede escribir la condición 2.18. en la forma:

$$\cos^2 \alpha = A \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) \left(D - \frac{B}{R_2} \right) \quad (2.19)$$

Se puede concluir que con la ayuda de un sistema óptico $ABCD$ se puede realizar una transformada de Fourier de orden fraccional; si se satisface la ecuación (2.18). Ahora, se analizarán las principales consecuencias del cumplimiento de esta relación desde cinco perspectivas:

1. Una relación de transformación de Fourier de orden fraccional existe entre los campos sobre dos superficies esféricas de radios R_1 y R_2 sí y únicamente sí $0 \leq A \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) \left(D - \frac{B}{R_2} \right) \leq 1$.

2. Haciendo $\alpha = \pi$, es posible mostrar que la ecuación 2.19. implica la bien conocida condición de formación de imágenes para sistemas ópticos multi-elementos.

3. Haciendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Transformada convencional de Fourier) en la ecuación 2.19. se observa que la distribución de amplitud compleja del campo en la superficie esférica de radio R_2 es la transformada estándar de Fourier de la distribución de amplitud compleja sobre la superficie esférica de radio R_1 .

4. De la ecuación 2.19. puede derivarse la condición de confinamiento y estabilidad para resonadores ópticos multi-elementos[26,27]; coincidiendo con el resultado obtenido por el método del campo auto-consistencia. Por tanto se puede afirmar que una transformación de Fourier de orden fraccional α entre superficies esféricas de radios R_1 y R_2 implica la condición de estabilidad y confinamiento para resonadores ópticos multi-elementos.

5. En concordancia con las ecuaciones (2.16.) y (2.19.) la evaluación de la integral de difracción de un sistema óptico multi-elementos puede ser fácilmente calculada en términos de la matriz $ABCD$. En la situación particular cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la ecuación 2.19. implica que $0 = A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) \left(D - \frac{B}{R_2}\right)$. Lo cual significa que sí la matriz tiene el elemento $A = 0$ una transformada de Fourier convencional relaciona la distribución de los campos electromagnéticos. En la expresión 2.16. haciendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $R_1 = -B$, luego $R_2 = \frac{B}{D}$ para $A \neq 0$ se obtiene que la distribución de amplitud compleja de la luz sobre la superficie esférica con radio R_2 es la difracción de Fraunhofer de la distribución de la luz sobre la superficie esférica con radio R_1 ; en la situación particular cuando $D = 1$ el *operador esfera de Fourier multi-elementos* es obtenido.

Transformada de Fourier de orden fraccional entre superficies planas

Se ha mostrado que es posible obtener una transformación de Fourier de orden fraccional entre campos electromagnéticos sobre superficies esféricas; en la ecuación 2.19. se puede considerar que sí $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$ (Transformación de Fourier de orden fraccional entre campos electromagnéticos sobre

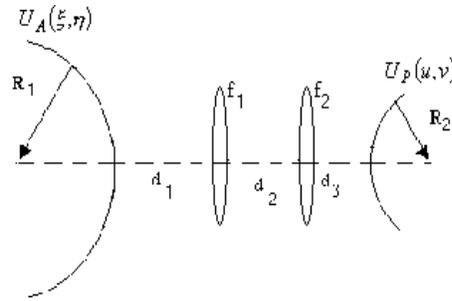


Figura 2.6: Sistema óptico entre emisor esférico y receptor esférico

superficies planas) la ecuación 2.19. la condición se convierte en $\cos^2\alpha = D$. Si además se hace $\alpha = \pi$ se alcanza una transformación de Fourier de orden fraccional entre el campo electromagnético sobre el plano de entrada $U_A(\xi, \eta)$ y el campo electromagnético sobre el plano de salida $U_P(u, v)$, por tanto se puede escribir la condición de formación de imágenes (para una imagen invertida) como $1 = AD$. La transformada de Fourier convencional corresponde a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y la expresión 2.19. se convierte en $0 = AD$; evidentemente, cuando los elementos de la matriz A y D son iguales a cero, se puede ver que la distribución de amplitud compleja en el plano de salida $U_P(u, v)$ es la transformada de Fourier estándar de la amplitud compleja sobre el plano de entrada $U_A(\xi, \eta)$.

2.2.5 Operador transformada de Fourier de orden fraccional.

Un operador puede ser utilizado para expresar la transferencia de campo por difracción para un sistema descrito por la matriz $ABCD$, la forma de la relación entre los campos electromagnéticos de entrada y de salida puede ser establecida por la ecuación 2.16. Para entender como se debe usar este operador, se considera un emisor esférico $U_A(\xi, \eta)$ de radio R_1 , una sección de espacio libre d_1 , una lente de longitud focal f_1 ; una sección de espacio libre d_2 , una lente de longitud focal f_2 , una sección de espacio libre d_3 , y finalmente un receptor esférico $U_P(u, v)$ de radio R_2 (Fig. 2.6). La matriz de transferencia de rayos $ABCD$ del sistema óptico resultante se escribe como:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} + d_3 \left(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} \right) & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} + d_3 \left(1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

La relación entre la distribución de amplitud compleja del campo sobre el emisor esférico $U_A(\xi, \eta)$ con radio R_1 y la distribución de amplitud compleja sobre el receptor esférico $U_P(u, v)$ con radio R_2 se escribe como:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} + d_3 \left(1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \right) \right)} \exp \left[\frac{i\pi (u^2 + v^2)}{\lambda R_2} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.21)$$

Dados R_1 y la matriz $ABCD$; sí se busca diseñar un sistema transformador de Fourier de orden fraccional específico α utilizando la ecuación 2.19. se puede deducir el correspondiente valor para R_2 . Dados R_1, R_2 y la matriz $ABCD$, si se busca diseñar un sistema transformador de Fourier de orden fraccional utilizando la ecuación se puede obtener el orden específico α .

En la figura 2.6. alternativamente, se puede considerar el caso particular para superficies planas, $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$, y es posible deducir la bien conocida propiedad de transformación de las lentes delgadas de Goodmann [23] ($d_3 = 0$ y $f_2 \rightarrow \infty$); los montajes canónicos propuestos por Lohmann[11], ($d_1 = d_2$ $d_3 = 0$, $f_1 = f$, y $f_2 \rightarrow \infty$ configuración tipo I); ($d_1 = d_3 = 0$ y $f_1 = f_2 = f$ configuración tipo II); la condición de formación de imagen ($\alpha = \pi$, $d_3 = 0$ y $f_2 \rightarrow \infty$); sistemas ópticos que permiten obtener dos transformaciones de Fourier de orden fraccional consecutivas [28-40] ($d_2 = d_1 + d_3$); condición para que $U_P(u, v)$ sea la imagen coherente de $U_A(\xi, \eta)$ ($\alpha = \pi$) y $U_P(u, v)$ sea la transformación convencional de Fourier de $U_A(\xi, \eta)$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Este resultado muestra que el operador transformada de Fourier de orden fraccional en su forma integral mostrado en la ecuación 2.16. provee una técnica conveniente y sistemática para el análisis de

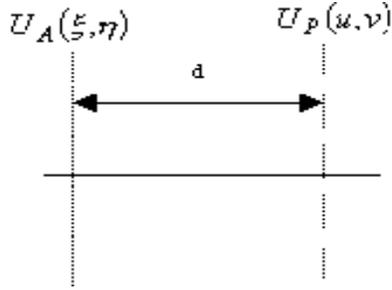


Figura 2.7: Propagación en el espacio libre

sistemas ópticos descritos por la matriz de transferencia de rayos $ABCD$.

2.3 Operador transformada fraccional de Fourier aplicado a estructuras ópticas elementales

La relación directa entre la transformada fraccional, la teoría matricial de transferencia de rayos y la fórmula de Collins es aplicada para describir el comportamiento de algunos sistemas ópticos, este tratamiento sugiere una generalización de la transformada fraccional de Fourier basada en la matriz de transferencia de rayos.

2.3.1 Difracción de Fresnel en el espacio libre

La difracción de Fresnel en el espacio libre es mostrada en la figura 2.7. Un objeto localizado en el plano de entrada, es iluminado con un haz plano de luz coherente. Su matriz de transferencia de rayos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La difracción de Fresnel a la distancia d está sobre una superficie esférica de radio R dado por:

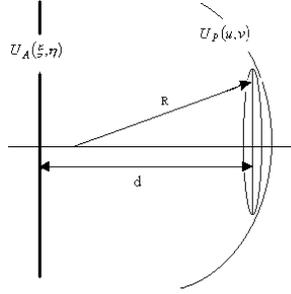


Figura 2.8: Espacio libre y lente delgada

$$R = \frac{-d}{\sin^2 \alpha} \quad (2.23)$$

Luego, la distribución de amplitud compleja del campo de salida, $U_P(u, v)$ puede escribirse como:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(d)} \exp\left[\frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda R}\right] \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \mathcal{F}^\alpha[U_A(\xi, \eta)] \quad (2.24)$$

2.3.2 Difracción de Fresnel en el espacio libre seguido de una lente delgada

El sistema óptico sugerido (ver fig 2.8.), (iluminación plana y monocromática del plano de entrada). Se describe la transferencia de rayos por una distancia d y luego la transferencia de rayos a través de una lente delgada de longitud focal f . La matriz de transferencia de rayos equivalente del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

La distribución de amplitud compleja del campo de salida $U_P(u, v)$ está sobre la superficie esférica de radio R definido por:

$$R = \frac{-d}{\sin^2 \alpha - \frac{d}{f}} \quad (2.26)$$

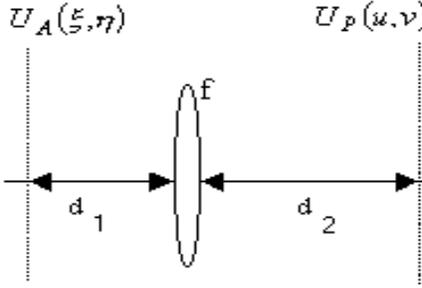


Figura 2.9: Lente delgada entre espacio libre

Luego, la distribución de amplitud compleja del campo electromagnético de salida, $U_P(u, v)$ está definida por:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(d)} \exp \left[\frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda R} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.27)$$

Una de las particularidades de esta solución y quizá la más importante en esta situación es cuando se cumple que $d = f \sin^2 \alpha$; por consiguiente $R \rightarrow \infty$ y se obtiene para la difracción entre superficies planas que:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(d)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.28)$$

La distribución de amplitud compleja del campo a la salida, $U_P(u, v)$ está sobre una superficie plana haciendo de este caso muy interesante desde el punto de vista experimental. La situación particular de la sola lente con longitud focal f , se obtiene haciendo $d = 0$. [22]

2.3.3 Lente delgada entre espacios libres

El sistema óptico sugerido (ver fig. 2.9.) muestra que el sistema total consiste de una longitud de espacio libre d_1 , una lente de longitud focal f y otro espacio de distancia de espacio libre d_2 . La matriz de

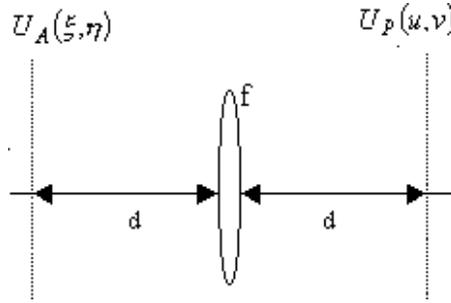


Figura 2.10: Transformador fraccional tipo I de Lohmann

transferencia equivalente es [25]:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Transformador fraccional tipo I de Lohmann

Si $d_1 = d_2 = d$, se obtiene el montaje simple de una lente de Lohmann [11](ver Fig. 2.10.). La matriz de transferencia de rayos es:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & 2d - \frac{d^2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

La condición $A = D = \cos \alpha$ garantiza que se obtenga una relación de transformación fraccional entre el plano donde la distribución de amplitud compleja de salida es $U_P(u, v)$ y el plano donde la distribución de amplitud compleja de entrada es $U_A(\xi, \eta)$,

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda \left(2d - \frac{d^2}{f}\right)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.31)$$

Si $d = f$, esto implica que la matriz de transferencia de rayos es simplemente:

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Es de anotar que una relación de transformación de Fourier convencional ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) entre las distribuciones de amplitud compleja de entrada y salida existe, puesto que se satisface la condición $A = 0$. La distribución de amplitud compleja del campo electromagnético a la salida es:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi}{i\lambda(f)} \mathcal{F}[U_A(\xi, \eta)] \quad (2.33)$$

Se obtiene la expresión reportada por Goodmann [23].

Distribución de amplitud compleja en el plano focal en frente de una lente

Sí $f = d_2$ y $d_1 = d$, implica que $A = 0$ y la matriz de transferencia de rayos se convierte:

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

La distribución de amplitud compleja del campo a la salida, $U_P(u, v)$ es:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(f)} \exp \left[\left(\frac{1-d}{f} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.35)$$

Este resultado también es consistente con el resultado reportado por Goodmann si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ [23].

2.3.4 Transformador fraccional de Fourier Lohmann tipo II.

El sistema óptico mostrado (ver fig 2.11.) se ilumina con una onda plana monocromática una lente de longitud focal f seguida de una longitud de espacio libre d y finalmente una lente de igual longitud focal f . Su matriz de transferencia de rayos es [11]:

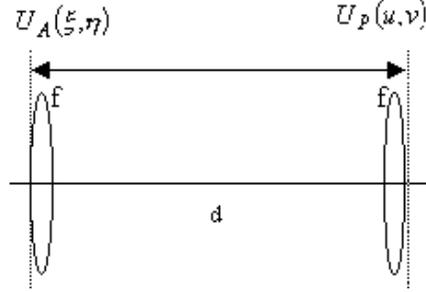


Figura 2.11: Sistema transformador fraccional de Fourier Lohmann tipo II.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{2}{f} + \frac{d}{f^2} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

La condición $A = D = \cos \alpha$ garantiza el que se obtenga una relación de transformación fraccional entre el plano donde la distribución de amplitud compleja de salida es $U_P(u, v)$ y el plano de la distribución de amplitud compleja de entrada es $U_A(\xi, \eta)$,

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(d)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.37)$$

Sí $d = f$, es decir $\alpha = \frac{\pi}{2}$; esto implica que la matriz de transferencia de rayos es muy simple,:

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

En esta situación particular la distribución de amplitud compleja del campo a la salida es:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi}{i\lambda(f)} \mathcal{F} [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.39)$$

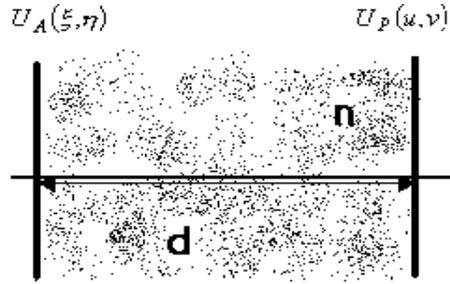


Figura 2.12: Onda en medio dieléctrico con índice refractivo n

2.3.5 Medio con índice refractivo n

El sistema óptico (mostrado en la fig. 2.12.) es iluminado con onda plana monocromática a la altura de la superficie de entrada, y posteriormente la onda electromagnética se propaga a través de un medio con índice refractivo n .

Su matriz de transferencia de rayos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Luego, la distribución de amplitud compleja a la salida $U_P(u, v)$ se expresa como:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda \left(\frac{d}{n}\right)} \exp \left[\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\frac{d}{n}} \right) \frac{i\pi (u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.41)$$

La distribución de amplitud compleja del campo a la salida se encuentra sobre una superficie esférica de radio R , cuyo valor se deduce la ecuación (2.41.):

$$R = \frac{-d}{n \sin^2 \alpha} \quad (2.42)$$

2.4 Análisis de sistemas ópticos coherentes utilizando el operador transformada fraccional de Fourier

Con ayuda del operador transformada fraccional de Fourier y la matriz de transferencia de rayos se estudian detalladamente los principales sistemas ópticos coherentes; utilizando exclusivamente el análisis de la óptica ondulatoria; los resultados alcanzados son totalmente consistentes con los obtenidos de la óptica geométrica, con las ventajas adicionales que los efectos de difracción son incluidos en el modelo ondulatorio y la correcta aplicación del operador facilita los cálculos matemáticos.

2.4.1 Introducción

Antes de comenzar un análisis de los sistemas ópticos coherentes; es importante tener claridad conceptual sobre los aspectos fundamentales en los cuales se basa el operador transformada fraccional de Fourier.

Aproximación paraxial

Si un rayo luminoso está viajando muy próximo al eje óptico; es decir con un ángulo pequeño con respecto a este, se obtiene la condición aproximación paraxial. En tal aproximación, las propiedades de propagación pueden ser estudiadas con el formalismo matricial [25]. Teniendo en cuenta la configuración en la Figura 2.13 y considerando la aproximación paraxial, las relaciones entre (y_2, θ_2) y (y_1, θ_1) son lineales y pueden escribirse explícitamente como se indica en las ecuación (2.43.).

$$y_2 = Ay_1 + B\hat{\theta}_1 \tag{2.43}$$

$$\hat{\theta}_2 = Cy_1 + D\hat{\theta}_1$$

Matriz de transferencia de rayos (MTR)

El sistema de ecuaciones (2.43.) puede ser expresado más compactamente como:

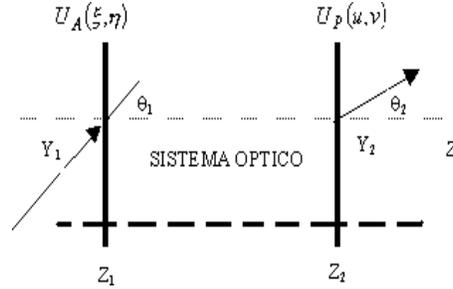


Figura 2.13: Sistema Optico entre planos

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

La matriz $ABCD$ es llamada 'La matriz de transferencia de rayos (MTR)'; dicha matriz representa al sistema óptico contenido entre los dos planos $U_A(\xi, \eta)$ y $U_P(u, v)$, (ver figura 2.13.).

La formula de Collins

Collins[41] dedujo una expresión matemática que relaciona la distribución de amplitud compleja entre los planos de entrada $U_A(\xi, \eta)$ y de salida $U_P(u, v)$ los cuales contienen sistemas ópticos caracterizados por su MTR.

2.4.2 La transformada fraccional de Fourier y la fórmula de Collins

Si la distribución de amplitud compleja $U_A(\xi, \eta)$ se encuentra sobre una onda esférica de radio $\frac{R_1}{A} > 0$, y se manipula adecuadamente la ecuación integral de Collins se encuentra una relación la cual denominaremos operador transformada fraccional de Fourier en forma integral expresado como:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp \left[\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) B} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right]$$

$$\exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A (\xi, \eta)] \quad (2.45)$$

Donde, la transformada fraccional de Fourier de orden α se define como:

$$\mathcal{F}^\alpha [U_A (\xi, \eta)] = \frac{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{2\pi \sin \alpha} \exp \left[\frac{-i (u^2 + v^2)}{2 \tan \alpha} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{-i (\xi^2 + \eta^2)}{2 \tan \alpha} \right] \exp \left[\frac{i (u\xi + v\eta)}{\sin \alpha} \right] [U_A (\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (2.46)$$

La expresión (2.44.) indica que la formula integral de Collins puede ser escrita como una transformada fraccional de Fourier \mathcal{F}^α de orden n_α donde $\alpha = \frac{\pi}{2n_\alpha}$ (α parámetro real); por consiguiente se establece que la distribución de amplitud compleja del campo electromagnético tanto a la entrada como a la salida del sistema óptico se encuentra sobre superficies esféricas de radios de curvatura R_1 y R_2 respectivamente [22]. El término adicional de fase de la ecuación (2.44.) conduce a la siguiente condición :

$$R_2 = \frac{-AB \left(1 - \frac{B}{R_1} \right)}{AD \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) - \cos^2 \alpha} \quad (2.47)$$

2.4.3 Sistemas ópticos coherentes

Una de las propiedades más importantes y útiles de una lente convergente, es su habilidad inherente para "traer" la transformada de Fourier hasta distancias finitas si se trabaja con sistemas ópticos coherentes en los cuales la iluminación es monocromática. A continuación se estudiarán casos particulares de sistemas ópticos de gran importancia; en los cuales se considerará que la iluminación es realizada con una onda plana colimada de amplitud unitaria y monocromática, por tanto la ecuación (2.43.) se convierte en:

$$U_P (u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp \left[\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{AB} \right) \frac{i\pi (u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A (\xi, \eta)] \quad (2.48)$$

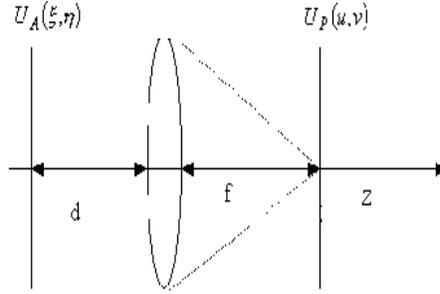


Figura 2.14: Plano de entrada al frente de la lente

Plano de entrada al frente de la lente

Si se observa la Figura 2.14. se nota que para este caso la MTR tendrá los elementos $A = 1$, $B = f$, $C = -1/f$, $D = 1 - d/f$ y la distribución de amplitud compleja utilizando el operador transformada fraccional de Fourier para este caso será:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(f)} \exp \left[(\sin^2 \alpha - d/f) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda f} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.49)$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se encuentra el resultado obtenido por Goodman.[23]

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(f)} \exp \left[(1 - d/f) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda f} \right] \mathcal{F} [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.50)$$

La entrada está directamente sobre la lente

Si se observa la Figura 2.15. la MTR tendrá los elementos $A = 0$, $B = f$, $C = -1/f$, $D = 1$ y la distribución de amplitud compleja en este caso será:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(f)} \exp \left[\left(\frac{\sin^2 \alpha}{f} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.51)$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se encuentra el resultado reportado por Goodman.[23]

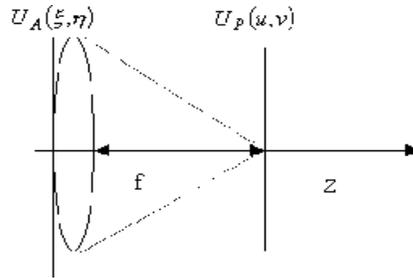


Figura 2.15: La entrada está directamente contra la lente

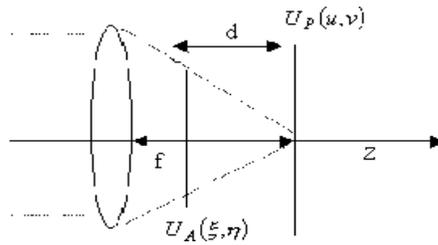


Figura 2.16: Plano de entrada entre la lente y el plano de salida

La entrada está entre la lente y el plano de observación

Al iluminar la lente con una onda plana (ver figura 2.16.), ésta se convierte en una onda esférica convergente, la cual iluminará el objeto, propagándose posteriormente en el espacio libre hasta llegar al plano de observación, la MTR tendrá los elementos $A = 1$, $B = d$, $C = 0$, $D = 1$. Utilizando el operador transformada fraccional de Fourier para este caso se obtiene:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \left(\frac{f}{d}\right) \exp \left[\left(\frac{1}{d} - \frac{\cos^2 \alpha}{2d} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.52)$$

En el caso particular para el cual $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se encuentra el resultado reportado por Goodman [23].

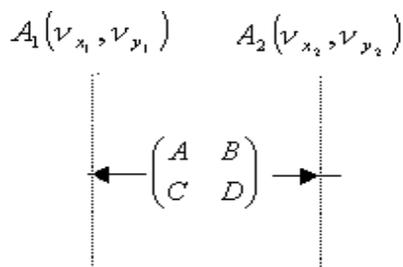


Figura 2.17: Dispositivo óptico para evaluar la transformada fraccional del espectro angular

2.5 Formula de Collins en el dominio frecuencial

Utilizando los resultados preliminares se busca relacionar el espectro angular del campo electromagnético a la entrada con el de salida sobre superficies planas tal y como se indica en la configuración óptica descrita en la figura 2.17.:

Por aplicación directa de la transformada fraccional de Fourier en un sistema óptico multielementos se encuentra que:

$$A_2(\nu_{x_2}, \nu_{y_2}) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \mathcal{F}^\alpha[A_1(\nu_{x_1}, \nu_{y_1})] \quad (2.53)$$

La expresión anterior corresponde a la fórmula de Collins en el dominio frecuencial.

2.5.1 Formación de la imagen en el dominio frecuencial

A fin de garantizar que las distribuciones de amplitud compleja de los espectros angulares se encuentren sobre planos se debe cumplir que $A = D = \cos \alpha$ y además que, dado que se quiere obtener la imagen del espectro angular es decir $\alpha = \pi$, todo lo anterior significa que $A = D = -1$, esto exige que $BC = 0$; reemplazando estos valores en la ecuación (2.55.) se tiene entonces:

$$A_2(\nu_{x_2}, \nu_{y_2}) = \frac{-2\pi}{\lambda} [A_1(-\nu_{x_2}, -\nu_{y_2})] \quad (2.54)$$

Por consiguiente para el caso $BC = 0$ se encuentra una relación simple de entrada y salida del espectro angular, por consiguiente esta situación particular se corresponde al caso de sistema de formación de imagen expresada en el dominio frecuencial.

2.5.2 Plano de entrada es el plano objeto focal del sistema óptico

Las distribuciones de amplitud compleja de los espectros angulares también se encuentran sobre planos y se requiere que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entonces se debe cumplir que $A = D = 0$; en consecuencia se exige que $BC = -1$; reemplazando estos valores en la ecuación (2.52.) se tiene:

$$A_2(\nu_{x_2}, \nu_{y_2}) = \frac{2\pi}{i\lambda(B)} [U_1(-\lambda B\nu_{x_2}, -\lambda B\nu_{y_2})] \quad (2.55)$$

Significa que el plano de entrada es justamente el plano focal objeto del sistema óptico.

2.5.3 Conclusiones

El análisis de los sistemas ópticos coherentes es muy importante para el procesamiento de imágenes ópticas, pues estos y estas constituyen el fundamento de tales sistemas. El método aquí expuesto es eficaz y sencillo en el estudio de los sistemas ópticos coherentes, sobre todo sí se aplica adecuadamente la matriz de transferencia de rayos y el operador transformada fraccional de Fourier.

2.6 Interferograma fraccional de Young

Utilizando el montaje canónico de Lohmann tipo I se realiza un estudio sobre el fenómeno de interferencia de Young; los resultados son presentados de manera teórica, digital y con implementación experimental

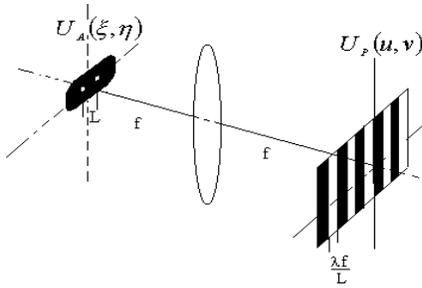


Figura 2.18: Interferograma clásico de Young.

donde se muestra como el patrón de intensidad es una función del orden de la transformación fraccional de Fourier, de la longitud de la onda de iluminación y de la distancia de separación entre los orificios circulares que sirven como fuente de la interferencia.

2.6.1 Introducción

Uno de los experimentos clásicos y fundamentales de la óptica lo constituye el experimento de Young; en el cual se utiliza un par de orificios circulares de diámetros pequeños comparados con su separación y separados una distancia también pequeña, los cuales se encuentran en un plano que es iluminado con una onda plana monocromática. A una distancia igual a la distancia focal de una lente de longitud focal f se coloca una lente y posteriormente se coloca a la misma distancia f un plano donde se realiza la observación del patrón de interferencias obtenido. Los resultados bien conocidos muestran un interferograma de Young cuyo perfil de intensidad se muestra en la figura 2.18. En esta parte de la tesis se muestra lo que sucede si se generaliza la obtención del interferograma de Young con ayuda del montaje canónico de Lohmann tipo I, con el cual se logra una transformación fraccional cuyo orden puede ser modificado controlando la distancia equidistante d de la lente a los planos donde se encuentran los orificios y de observación de la irradiancia del patrón de interferencia.

2.6.2 Interferograma clásico de Young

Consideremos un objeto de transmitancia como se muestra en la figura 2.18; el cual consta de un par de agujeros circulares pequeños del mismo diametro D separados una distancia L . La distribución de amplitud compleja producida por la iluminación con onda plana monocromática de amplitud A , del objeto de difracción que se encuentra en el plano de coordenadas (ξ, η) es observada a una distancia igual a la longitud focal de la lente $2f$ sobre el plano de coordenadas (u, v) . En ese caso teniendo en cuenta los resultados preliminares ya expuestos se obtiene la siguiente relación entre las distribuciones de amplitud compleja del plano de observación $U_P(u, v)$ y el plano donde se encuentran los orificios $U_A(\xi, \eta)$:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi A}{i\lambda f} \mathcal{F}^{\frac{\pi}{2}} [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.56)$$

Donde $\mathcal{F}^{\frac{\pi}{2}}$ es la transformada convencional de Fourier. En este caso se puede considerar que la distribución de amplitud compleja del campo producida por el objeto de difracción puede ser representada por:

$$U_A(\xi, \eta) = A \left[\delta\left(\xi - \frac{L}{2}\right) + \delta\left(\xi + \frac{L}{2}\right) \right] \delta(\eta) \quad (2.57)$$

Si se reemplaza esta forma de la transmitancia y si se realiza el reemplazo correspondiente $\xi \Rightarrow -\frac{u}{\lambda f}$; se obtiene el resultado bien conocido:

$$U_P(u, v) = \frac{2A}{i\lambda f} \cos\left(\pi L \frac{u}{\lambda f}\right) \quad (2.58)$$

Donde el patrón en intensidad está dado por:

$$|U_P(u, v)|^2 = \frac{4A^2}{\lambda^2 f^2} \left[1 + \cos\left(2\pi L \frac{u}{\lambda f}\right) \right] \quad (2.59)$$

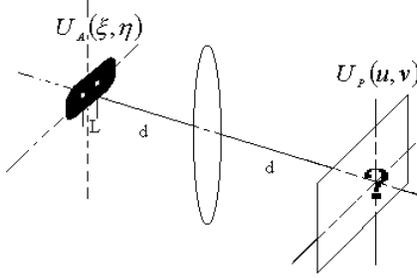


Figura 2.19: Interferograma fraccional de Young

Resultado que es representado en el plano de observación de la figura 2.18.; donde se obtiene que la separación entre franjas (In_c) convencionalmente es:

$$In_c = \frac{\lambda f}{L} \quad (2.60)$$

2.6.3 Interferograma fraccional de Young

Si ahora se considera la configuración mostrada en la figura 2.19.:

Teniendo en cuenta los resultados preliminares se puede establecer una relación de transformación fraccional entre las distribuciones de amplitud compleja del campo sobre el plano donde se encuentran los orificios $U_A(\xi, \eta)$ y la amplitud compleja del campo sobre el plano de observación $U_P(u, v)$ expresada como:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda \left(\left(2d - \frac{d^2}{f} \right) \right)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (2.61)$$

Además, se requiere que $\left(1 - \frac{d}{f} \right) = \cos \alpha$, de lo cual se deduce que $d = 2f \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; resultado que corresponde al montaje canónico de Lohmann tipo I.

Considerando la distribución de amplitud compleja del campo producida por el objeto de difracción;

además teniendo en cuenta que:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[\delta \left(\xi \mp \frac{L}{2} \right) \right] = \frac{\exp \left[-i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \exp \left[\frac{-i}{2} \cot \alpha \left(\xi^2 + \frac{L^2}{4} \right) \pm i \frac{L}{2} \xi \csc \alpha \right] \quad (2.62)$$

Y que:

$$\mathcal{F}^\alpha [\delta(\eta)] = \frac{\exp \left[-i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \exp \left[\frac{-i\eta^2}{2} \cot \alpha \right] \quad (2.63)$$

De donde se obtiene que la distribución de amplitud compleja en el plano de observación es:

$$U_P(u, v) = \frac{A}{i\lambda f \sin^2 \alpha} \left[\exp \left(\frac{-i}{2} \cot \alpha \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{L^2}{4} \right) \right) \right] \left[2 \cos \left(\frac{\pi L}{2} \xi \csc \alpha \right) \right] \quad (2.64)$$

Si se realizan los reemplazos correspondientes a $\xi \Rightarrow -\frac{u}{2\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ y $\eta \Rightarrow -\frac{v}{2\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ en la ecuación anterior:

$$U_P(u, v) = \frac{A}{i\lambda f \sin^2 \alpha} \left[\exp \left(\frac{-i}{2} \cot \alpha \left(\frac{u^2}{4\lambda^2 f^2 \sin^4 \frac{\alpha}{4}} + \frac{v^2}{4\lambda^2 f^2 \sin^4 \frac{\alpha}{4}} + \frac{L^2}{4} \right) \right) \right] \left[2 \cos \left(\frac{\pi Lu}{4\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \csc \alpha \right) \right] \quad (2.65)$$

El patrón en intensidad está dado por:

$$|U_P(u, v)|^2 = \frac{4A^2}{\lambda^2 f^2 \sin^4 \alpha} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{Lu}{\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \csc \alpha \right) \right] \quad (2.66)$$

Resultado que también conduce a la obtención de franjas como en el caso convencional solo que ahora la separación entre franjas espesada como una función del orden fraccional seleccionado:

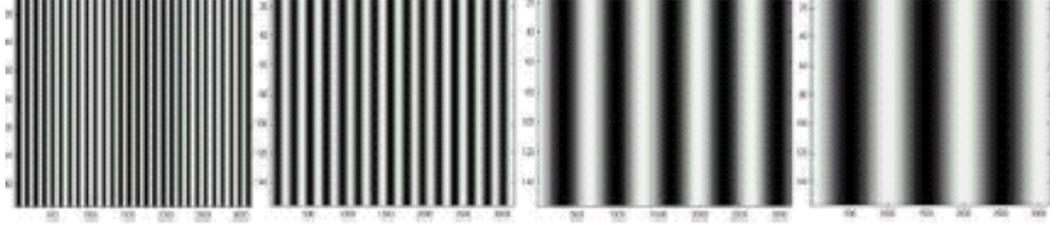


Figura 2.20: Franjas para los ordenes fraccionales 0.4, 0.6, 0.8 y 1 obtenidos digitalmente

$$In_f = \frac{2\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{L} \quad (2.67)$$

En términos de la separación convencional de franjas se obtiene:

$$In_f = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) (In_c) \quad (2.68)$$

2.6.4 Resultados digitales

Con ayuda de una rutina computacional en la plataforma matemática Matlab se calculó digitalmente la transformada fraccional de orden α , para el experimento arriba descrito, con los resultados mostrados en la figura 2.20.; en la cual se observa efectivamente que existe una modulación de la separación entre franjas por el factor obtenido en la ecuación (2.66.), el cual indica que la separación entre franjas es una función del orden fraccional observado, alcanzando un valor máximo de separación para cuando se logra el interferograma clásico de Young; es decir en la situación particular en la cual $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

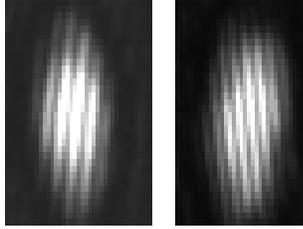


Figura 2.21: Franjas para los ordenes $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$

2.6.5 Resultados Ópticos

Con ayuda de un montaje experimental como el mostrado en la figura 2.19.; se obtuvieron los resultados ópticos para los casos particulares cuando el valor del orden fraccional es $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ver figura 2.21.).

Capítulo 3

Resonadores y haces laser

3.1 Introducción

Desde la reaparición de la transformada fraccional de Fourier en forma integral en 1980 en el artículo de Víctor Namias, ha tenido múltiples aplicaciones en la física; pero en los últimos tiempos se ha incrementado sustancialmente el interés por un grupo significativo de investigadores en el campo de la óptica; dentro de los cuales se destacan básicamente tres grandes líneas que dieron origen a las múltiples aplicaciones de esta herramienta matemática en la actualidad. Empezando por los trabajos de Mendlovic y Ozaktas [1] en el genuino espíritu de la investigación en el campo de las lentes Grin y la transformación fraccional, casi simultáneamente aparece el trabajo de Lohmann y sus configuraciones canónicas en el contexto de la función de distribución de Wigner y más recientemente el trabajo de Pellat-Finet y Bonet en el campo de la difracción en el espacio libre a través de la transformada fraccional de Fourier; todos estos trabajos dan origen a lo que se conoce como óptica de Fourier fraccional. En particular es importante resaltar el manejo riguroso del tema por parte de quienes se dedican a explorar este formulismo matemático en el campo de la óptica, puesto que una teoría ondulatoria necesariamente debe llenar todas las exigencias de su propia naturaleza; en particular en este documento se prueba como utilizando exclusivamente la propagación en el espacio libre se obtiene una transformada fraccional de Fourier bajo la condición del

cumplimiento del principio de Huygens-Fresnel, obteniéndose resultados en el campo de los resonadores ópticos y propagación de haces de Gauss.

3.2 Difracción de Fresnel

De la difracción de Fresnel; $U_A(\vec{r})$ es la distribución de amplitud compleja del campo en el plano de entrada y $U_P(\vec{r}')$ representa la distribución de amplitud compleja en el plano de salida, entonces la relación matemática que representa la propagación en el espacio libre a una distancia d y ya utilizada previamente es:

$$U_P(\vec{r}') = \frac{-1}{i\lambda(-d)} \exp\left(\frac{-i\pi \vec{r}'^2}{\lambda(-d)}\right) \int_{R^2} \exp\left(\frac{-i\pi \vec{r}^2}{\lambda(-d)}\right) \exp\left(\frac{2i\pi \vec{r}' \cdot \vec{r}}{\lambda(-d)}\right) U_A(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.1)$$

Ahora, sí se ilumina el plano de entrada $U_A(\vec{r})$ con onda esférica convergente de radio R_1 se obtiene:

$$U_P(\vec{r}') = \frac{-1}{i\lambda(-d)} \exp\left(\frac{-i\pi \vec{r}'^2}{\lambda\left(\frac{d}{R_1}-1\right)}\right) \int_{R^2} \exp\left(\frac{-i\pi \vec{r}^2}{\lambda(-d)}\right) \exp\left(\frac{2i\pi \vec{r}' \cdot \vec{r}}{\lambda(-d)}\right) U_A(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.2)$$

Haciendo los siguientes cambios de variables que corresponden físicamente a escalamientos en las coordenadas del plano de entrada y de salida respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sqrt{\frac{2\pi\left(\frac{d}{R_1}-1\right)\tan\alpha}{\lambda d}} \vec{r} \\ \vec{p}' &= -\sqrt{\frac{2\pi\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda d\left(\frac{d}{R_1}-1\right)}} \vec{r}' \end{aligned} \quad (3.3)$$

Con $R_1 \neq d$ y $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$; después de un proceso algebraico se obtiene:

$$U_P(\vec{r}') = \frac{i\sqrt{2\pi\sin\alpha}}{\lambda d} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

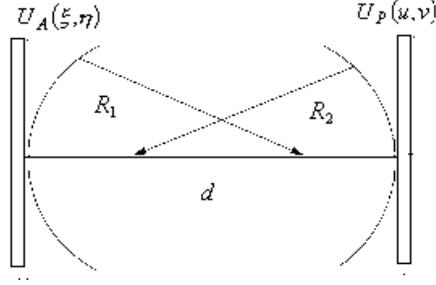


Figura 3.1: Difracción de Fresnel entre superficies esféricas

$$\exp \left[\left(\frac{-i\pi \vec{r}'^2}{\lambda} \right) \left(-\frac{d - R_1 \sin^2 \alpha}{d(d - R_1)} \right) \right] \mathcal{F}^{(\alpha)} [U_A(\vec{r})] \quad (3.4)$$

Lo cual significa que, la distribución de amplitud compleja del campo sobre el plano $U_P(\vec{r}')$ es proporcional a la transformada fraccional de Fourier de orden α de la distribución de amplitud compleja del campo sobre el plano $U_A(\vec{r})$ multiplicada por un factor de Fase.

3.3 Interpretación del factor de fase adicional

El factor de fase variable obtenido en la expresión anterior:

$$\exp \left[\left(\frac{-i\pi \vec{r}'^2}{\lambda} \right) \left(-\frac{d - R_1 \sin^2 \alpha}{d(d - R_1)} \right) \right] \quad (3.5)$$

Este termino de fase se interpreta de la siguiente forma: En propagación libre a distancias finitas, la amplitud compleja del campo $U_P(\vec{r}')$ está sobre una superficie esférica de radio R_2 y es proporcional a la transformada de Fourier fraccional de orden α de la amplitud compleja del campo $U_A(\vec{r})$ que se encuentra sobre una superficie esférica de radio R_1 .

En este caso:

$$R_2 = \frac{d(d - R_1)}{d - R_1 \sin^2 \alpha}. \quad (3.6)$$

Bajo condición que $R_1 \neq d$, la anterior relación indica que para cada radio R_1 de la onda de iluminación existe un valor de R_2 de observación; y que esta conexión esta en términos del orden de la transformación

fraccional, lo cual no es otra cosa que la conservación del principio de Huygens-Fresnel en el cual cada punto de un frente de onda se puede considerar como una fuente de ondas esféricas secundarias (ondeletas). En la situación descrita por la figura 3.1. El frente de onda de la envolvente que proviene de la iluminación del plano de entrada $U_A(\vec{r})$ por la onda esférica de radio R_1 es usada para describir ese mismo frente de onda después de una propagación de longitud d sobre la superficie esférica de radio R_2 ; en otras palabras la distribución de amplitud compleja del campo sobre la superficie esférica de radio R_2 contiene la información completa de la distribución de amplitud compleja del campo sobre la superficie esférica de radio R_1 .

3.4 Condición de estabilidad de los resonadores laser

La configuración descrita en la figura 3.1. se puede hacer corresponder con un resonador de espejos esféricos de radios diferentes R_1 y R_2 .

Para comprobar la correspondencia entre la ecuación (3.6.) y el principio de Huygens-Fresnel se debe obtener que las superficies de los espejos son coincidentes con los frentes de fase de los modos del resonador; cumpliendo así con la teoría de campo autoconsistente [25]. De la ecuación (3.6.) es fácil obtener:

$$\cos^2 \alpha = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \quad (3.7)$$

Si se tiene en cuenta que $R_1, R_2 \neq d$ y además que R_1 y R_2 no pueden tender a infinito (planos) simultáneamente; ya que no se obtendría en ese caso una transformada fraccional de Fourier sino el fenómeno de difracción de Fresnel entre superficies planas; entonces se puede concluir para α real que [42]:

$$0 < \left(1 - \frac{D}{R_1}\right) \left(1 - \frac{D}{R_2}\right) < 1 \quad (3.8)$$

Resultado que muestra la condición de estabilidad de un resonador láser.

3.5 Diámetros de los haces de Gauss en un resonador

Si ahora consideramos un haz de Gauss $\exp\left(\frac{-i\pi\vec{\rho}^2}{2}\right)$ que se propaga desde el espejo de radio de curvatura R_1 al de radio de curvatura R_2 ; teniendo en cuenta resultados preliminares y la propiedad de invarianza de los haces de Gauss bajo una transformación fraccional (ya que son funciones propias de este operador), esto es:

$$\exp\left(\frac{-i\pi\vec{\sigma}^2}{2}\right) = \mathcal{F}^{(\alpha)} \left[\exp\left(\frac{-i\pi\vec{\rho}^2}{2}\right) \right] \quad (3.9)$$

Sí se tiene en cuenta el cambio de variables se obtiene:

$$\exp\left(\frac{-i\pi\vec{\sigma}^2}{2}\right) = \exp \left[\frac{-\pi}{\lambda} \left(\frac{i \sin \alpha \cos \alpha}{d \left(\frac{d}{R_1} - 1 \right)} \right) \vec{\rho}^2 \right] \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta que la propagación del haz va del espejo de radio R_1 al espejo de radio R_2 se establece la siguiente relación:

$$\frac{\lambda}{\pi w^2} = \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{d \left(\frac{d}{R_1} - 1 \right)} \right) \quad (3.11)$$

Donde, w es un número real referido como parámetro complejo del haz, el cual describe la variación en forma de curva de Gauss en intensidad del haz con la distancia al eje óptico; así como la curvatura

del frente de fase el cual tiene forma esférica cerca del eje, aproximación paraxial. Con la condición de estabilidad de los resonadores se encuentra facilmente que:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \left(\frac{R_1 - d}{R_2 - d} \right) \left(\frac{d}{R_1 + R_2 - d} \right) \quad (3.12)$$

Un tratamiento similar para ir del espejo de radio de curvatura R_2 al espejo de radio de curvatura R_1 , "retorno del haz" equivale a intercambiar en la ecuación anterior R_1 por R_2 obteniéndose:

$$w_1^4 = \left(\frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \left(\frac{R_2 - d}{R_1 - d} \right) \left(\frac{d}{R_1 + R_2 - d} \right) \quad (3.13)$$

Las anteriores relaciones permiten determinar el diámetro del haz sobre los espejos de un resonador de radios de curvatura diferentes.

Finalmente la condición de mínimo del haz Gaussiano (Beam Waist o cintura del haz) se obtiene luego de una pequeña álgebra:

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} \quad (3.14)$$

3.6 Modos de oscilación en una cavidad resonante

Con la ayuda de un programa se han simulado los modos de oscilación a la altura de la entrada de la cavidad; es decir en el espejo de radio de curvatura R_1 y lo observado sobre la salida del resonador, es decir sobre el espejo de superficie esférica R_2 ; los resultados son mostrados en la figura 3.2.

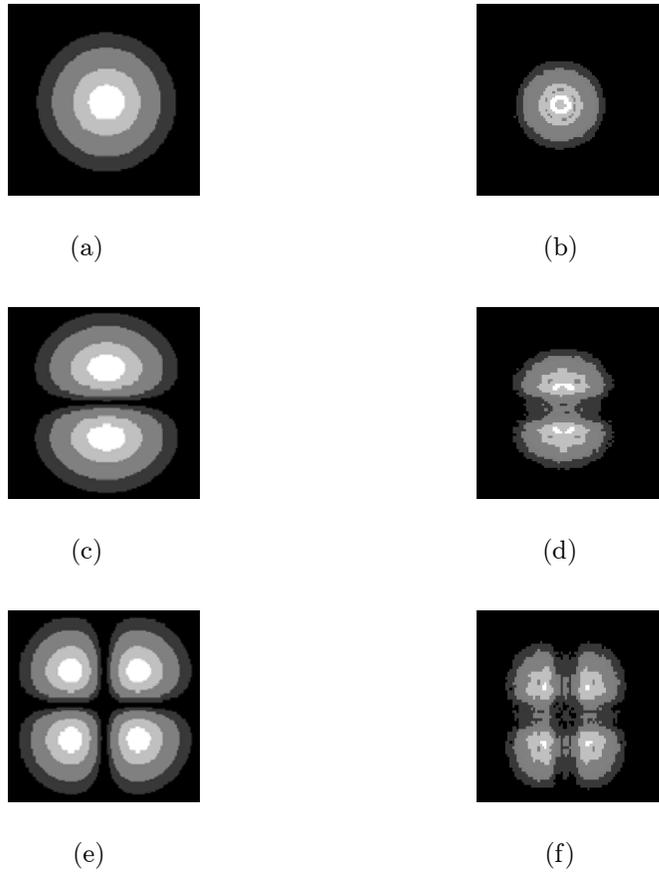


Figura 3.2: Simulación de los modos de oscilación a la entrada y salida de la cavidad resonante. (a)Entrada TEM_{00} ; (b)Salida TEM_{00} ; (c)Entrada TEM_{01} ; (d)Salida TEM_{01} ; (e) Entrada TEM_{11} ; (f)Salida TEM_{11}

3.7 Resonador óptico canónico

Con ayuda de la transformación fraccional de Fourier, la teoría del campo autoconsistente y la matriz de transformación de rayos de un sistema óptico se realiza un estudio detallado sobre las condiciones para obtener un resonador óptico multielementos; el trabajo hace énfasis en el caso de resonadores ópticos multielementos de espejos planos encontrando que en la configuración canónica de Lohmann tipo I, una invarianza del orden de la transformación fraccional de Fourier para el ancho del beam waist se presenta. Una de las particularidades de interés en el estudio de la transformación fraccional de Fourier es la posibilidad de describir la teoría de resonadores con ayuda de la teoría del campo autoconsistente. Se utiliza una relación matemática que define una transformación fraccional de Fourier de orden n_α entre dos superficies que contienen un sistema óptico cuyo matrix de transferencia de rayos se conoce. Este ensamble se asimila a un resonador óptico multielementos lo que permite el estudio de su condición de estabilidad, así mismo el ancho del beam waist y los anchos de los haces sobre las superficies de entrada y de salida del resonador.

3.7.1 Transformada fraccional de Fourier y matriz de transferencia de rayos

En resultados preliminares expuestos anteriormente se mostró que el conocimiento de la MTR de un sistema óptico que se encuentra entre dos superficies posibilita la obtención de una relación de transformación fraccional de Fourier de orden n_α entre los campos electromagnéticos sobre las dos superficies.

Sí se considera el caso de la propagación a través de un sistema óptico cuya MTR es conocida y que se encuentra luego de una distribución de amplitud compleja del campo $U_A(\xi, \eta)$ localizada sobre la superficie de entrada y antes de la distribución de amplitud compleja del campo $U_P(u, v)$ localizada sobre la superficie de salida; y sí la matriz de transferencia de rayos MTR del sistema es del tipo $ABCD$; la distribución de amplitud compleja de salida $U_P(u, v)$ esta dada por:

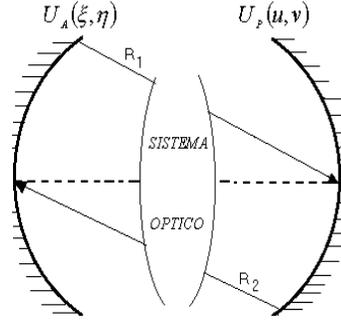


Figura 3.3: Resonador multielementos de espejos esféricos

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp \left[\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) B} \right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (3.15)$$

En términos de los elementos de la matriz de transferencia de rayos; resultados anteriores permiten deducir una transformación fraccional de Fourier de orden diferente a uno en el caso en el cual $A \neq 0$ y la obtención de una transformada fraccional de orden uno (transformada de Fourier estandar) en la situación en la cual $A = 0$.

3.7.2 Resonador multielementos de espejos esféricos

La distribución de amplitud compleja de salida $U_P(u, v)$ esta dada por la misma expresión matemática anterior. Donde, la relación entre los radios de las dos superficies de los espejos está dada por:

$$R_2 = \frac{-AB \left(1 - \frac{B}{R_1}\right)}{AD \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) - \cos^2 \alpha} \quad (3.16)$$

La relación entre los radios de curvatura de los espejos del resonador permiten cumplir con los requerimientos de la teoría del campo autoconsistente y por tanto posibilitan el obtener la condición de estabilidad de los resonadores ópticos multielementos:

$$A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) \left(D - \frac{B}{R_2}\right) = \cos^2 \alpha \quad (3.17)$$

Considerando que R_1 y R_2 son diferentes de B ; y también que R_1 y R_2 no pueden representar planos simultáneamente; una transformada de Fourier de orden fraccional puede ser obtenida, es decir se establece que existe una figura de difracción de Fresnel entre superficies esféricas a distancias definidas. Por consiguiente, para α real:

$$0 < A \left(1 - \frac{B}{R_1}\right) \left(D - \frac{B}{R_2}\right) < 1 \quad (3.18)$$

Expresión que representa la condición de estabilidad para los resonadores ópticos multielementos de espejos esféricos. Igual que para el cálculo en un resonador vacío o, el ancho del haz a la salida del resonador está dado por:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda R_2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{R_1 - B}{DR_2 - B}\right) \left(\frac{B^2}{A^3}\right) \left(\frac{1}{R_1 R_2 (1 - AD) + AB (R_1 + R_2 D - B)}\right) \quad (3.19)$$

El ancho del haz a la entrada del resonador está dado por:

$$w_1^4 = \left(\frac{\lambda R_1}{\pi}\right)^2 \left(\frac{R_2 - B}{DR_1 - B}\right) \left(\frac{B^2}{A^3}\right) \left(\frac{1}{R_2 R_1 (1 - AD) + AB (R_2 + R_1 D - B)}\right) \quad (3.20)$$

El beam waist o cintura del haz está dado por:

$$w_0^4 = \frac{w_2^4}{\left[1 + \left(\frac{\pi w_2^2}{R_2 \lambda}\right)^2\right]^2} \quad (3.21)$$

3.7.3 Resonador multielementos de espejos planos

En resultados preliminares descritos previamente, se mostró que es posible obtener una transformación fraccional de Fourier de orden n_α entre las distribuciones de amplitud compleja sobre dos planos que contienen un sistema óptico cuya MTR sea conocida. En esta situación particular se requiere el cumplimiento

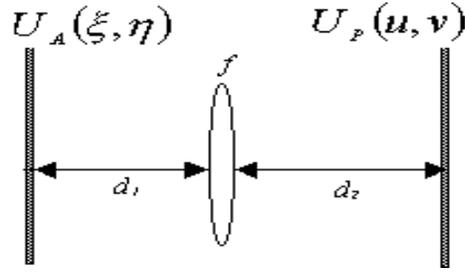


Figura 3.4: Resonador multielementos de espejos planos

de la condición:

$$AD = \cos^2 \alpha \quad (3.22)$$

Expresión que representa la condición de estabilidad para los resonadores ópticos multielementos de espejos planos. La distribución de amplitud compleja del campo de salida $U_P(u, v)$ entre superficies planas está dada por:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda(B)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (3.23)$$

El ancho del haz a la salida del resonador está dado por:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \left[\frac{AB}{(1-AD)D} \right] \quad (3.24)$$

La cintura del haz se obtiene reemplazando este valor en la ecuación (3.21.). Sí se considera el sistema óptico propuesto en la figura 3.4. El sistema óptico completo consiste de una propagación en el espacio libre d_1 seguido por una lente de longitud focal f seguido por otra propagación en el espacio libre de distancia d_2 . Su MTR es:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

La distribución de amplitud compleja del campo electromagnético a la salida $U_P(u, v)$ entre superficies planas está dada por:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \right)} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (3.26)$$

Donde:

$$\left(1 - \frac{d_2}{f}\right) \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) = \cos^2 \alpha \quad (3.27)$$

Es la condición de estabilidad para este tipo de resonador. El ancho del haz a la salida del resonador está dado por:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{d_2}{f}\right) \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}\right)}{\left[1 - \left(1 - \frac{d_2}{f}\right) \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)\right] \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)} \right] \quad (3.28)$$

Un análisis de la relación anterior permite establecer lo siguiente: 1.) Debido a la invarianza de las distribuciones de la amplitud del campo del tipo Gauss a una transformación fraccional de Fourier, sí en el espejo plano de entrada del resonador se coloca una distribución de este tipo; a la salida del resonador es decir en el espejo plano de salida se obtiene también una distribución del tipo de Gauss para la amplitud del campo (ver ecuación (3.26.)). 2.) En el caso en el cual $d_1 = f$; es decir el haz de Gauss de entrada está colocado en el plano focal objeto del sistema óptico del resonador se tiene entonces que $\cos^2 \alpha = 0$ es decir $\alpha = \frac{\pi}{2}$ lo cual conduce a $d_2 = f$; es decir cuando se coloca la cintura del haz en el plano objeto focal siempre se produce una cintura del haz en el plano focal imágen (ver ecuación (3.27.)). La ecuación (3.27.) puede ser escrita como:

$$d_1 = f \left[1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 - \frac{d_2}{f}\right)} \right] \quad (3.29)$$

Además de la ecuación (3.28) se deduce que:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left[(f) \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)^2} \right] \quad (3.30)$$

3.) De las relaciones anteriores se obtiene que en el caso en el cual $d_2 = f$; (ver ecuación (3.29.)) es decir el haz de Gauss de salida está colocado en el plano focal imágen del sistema óptico del resonador; el ancho de la cintura del haz formado por la lente siempre será máximo y esa anchura disminuirá cuando la cintura del haz sea movida a ambos lados del plano focal imágen del sistema óptico del resonador.

3.7.4 Resonador canónico de Lohmann

En la situación particular cuando $d_1 = d_2 = d = 2f \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ es fácil encontrar que:

$$U_P(u, v) = \frac{2\pi}{i\lambda f \sin \alpha} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (3.31)$$

Resultado que corresponde al montaje canónico de Lohmann tipo I. El ancho del haz a la salida del resonador está dado por:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 [f] \quad (3.32)$$

Un análisis de la relación anterior permite establecer lo siguiente: 1.) El resultado obtenido de la ecuación anterior pone de manifiesto que para el caso de un resonador de espejos planos paralelos que contiene un sistema óptico con la configuración del montaje canónico de Lohmann tipo I, el cual llamaremos *resonador canónico de Lohmann tipo I*, en el cual la obtención de los diferentes ordenes de la transformada fraccional de Fourier se realiza ubicando equidistantemente y con valor de distancia dado por $d = 2f \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ de la lente de distancia focal f a los espejos planos del resonador; se obtiene que el ancho del haz sobre la superficie del espejo plano de salida permanece constante con valor proporcional a la longitud focal de la lente f e independiente del orden fraccional obtenido para cada posición de d . En otras palabras para todos los ordenes de la transformación fraccional el ancho del haz de salida siempre será el mismo, permaneciendo por tanto invariable. 2.) Una observación interesante es el hecho de que como consecuencia de la condición de estabilidad del resonador canónico de Lohmann tipo I (ver ecuación (3.27.)) se obtiene que los beams waist sobre el espejo de salida del resonador no son imágenes en el sentido convencional de la cintura del haz de entrada; puesto que se puede notar que cuando la cintura del haz de entrada es movida hacia la lente el haz sobre el espejo de salida debe ser movido también hacia la lente, situación contraria a lo que se esperaría de las consideraciones convencionales de la teoría de la formación de imágenes.

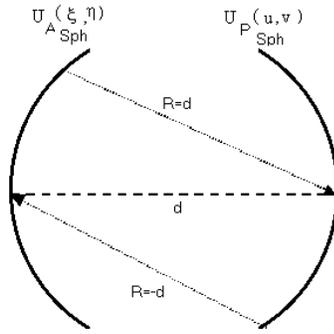


Figura 3.5: Difracción de Fresnel entre superficies esféricas

3.7.5 Modos de oscilación en la cavidad láser: el punto de vista de la difracción

Un resultado interesante de este trabajo es que la propagación del campo electromagnético en el espacio libre entre un emisor y detector esférico centrados corresponde al fenómeno de difracción Fraunhofer y es matemáticamente expresado como una transformada de Fourier. Esta aproximación puede ser utilizada para obtener los parámetros del haz y mostrar digitalmente los modos de oscilación que se propagan en la cavidad láser.

Introducción

Tal y como se ilustra en la figura 2.7, considerando $U_A(\xi, \eta)$ el campo electromagnético sobre el plano de difracción y $U_P(u, v)$; el campo electromagnético sobre el plano de observación. Donde, se han incorporado los límites finitos de la apertura en la definición de $U_A(\xi, \eta)$.

Difracción de Fresnel y operador esfera de Fourier

La ecuación de difracción de Fresnel puede ser escrita de la siguiente forma:

$$U_{P_{Sph}}(u, v) = \frac{2\pi}{i\lambda d} \mathcal{F}[U_{A_{Sph}}(\xi, \eta)] \quad (3.33)$$

Donde \mathcal{F} es la transformada de Fourier estándar; la situación anterior es similar a la configuración óptica de la figura de arriba. La difracción de Fresnel puede interpretarse como una transformada de

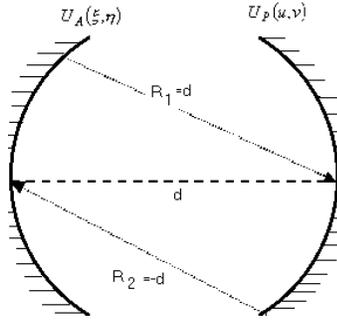


Figura 3.6: Resonador láser confocal

Fourier entre dos superficies esféricas cuyos vértices están localizados sobre la misma esfera y separados una distancia igual al radio de la esfera. Este resultado desde el punto de vista de la óptica metaxial [20-22] corresponde al operador "esfera de Fourier". Es decir que $U_{P_{Sph}}(u, v)$ es la esfera de Fourier de $U_{A_{Sph}}(\xi, \eta)$. Obviamente que esta interpretación satisface la conservación del principio de Huygens; en otras palabras la superficie del emisor esférico de radio d después de la propagación debe ser observado a la distancia d pero sobre una superficie esférica de radio $-d$. Por tanto "Si A_{Sph} es un emisor esférico con radio $R = d$, y P_{Sph} un receptor esférico con radio $R = -d$, y centrado sobre A_{Sph} . La transferencia del campo de A_{Sph} a P_{Sph} corresponde al fenómeno de difracción de Fraunhofer y es expresado matemáticamente como una transformación de Fourier"

Resonador confocal

El más comúnmente resonador láser [25,26] esta compuesto de dos espejos esféricos de caras enfrentadas. La estabilidad de tales resonadores *abiertos* ha sido discutida en términos de la teoría paraxial de rayos. El estudio de los modos de propagación de los resonadores láser solo tiene en cuenta su naturaleza ondulatoria, con aperturas de los espejos que son grandes comparadas con el tamaño del spot de los haces, el modo de un resonador está definido como una configuración de campo auto - consistente. Si el modo puede ser representado por la propagación de un haz ondulatorio entre los espejos del resonador, los parámetros después de un viaje completo del haz. La configuración de la figura 3.5., puede hacerse

corresponder con la estructura de un resonador confocal, en este caso un resonador láser con espejos de igual curvatura es obtenido (Ver figura 3.6.). En la teoría clásica [25], para esta estructura simétrica es suficiente postular la auto - consistencia para un trasciente del resonador (lo cual es equivalente a una secuencia completa de viaje), en lugar de un viaje completo (ida y vuelta). En la teoría propuesta se muestra que las superficies de los espejos son coincidentes con los frentes de fase de los modos del resonador. Localizando una distribución de amplitud del campo electromagnético del tipo Gauss sobre la superficie de los espejos esféricos de radio R_1 , con ayuda de la ecuación (3.34.), se encuentra que a la distancia d exactamente sobre la superficie del espejo de radio R_2 la distribución de amplitud del campo electromagnético es también del tipo Gauss; completando de esta forma, las propiedades matemáticas de la transformación de Fourier. Por consiguiente:

$$\exp\left(\frac{-i\pi(u'^2 + v'^2)}{2}\right) = \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{-i\pi(\rho^2 + \gamma^2)}{2}\right)\right] \quad (3.34)$$

Teniendo en mente el escalamiento de las coordenadas utilizadas previamente para el espejo esférico de salida se obtiene que:

$$\exp\left(\frac{-i\pi(u'^2 + v'^2)}{2}\right) = \exp\left(\frac{-i\pi^2}{\lambda(-d)}(u^2 + v^2)\right) \quad (3.35)$$

El signo negativo de d indica que el espejo de radio R_2 es concavo en el sentido de la propagación del haz. Por conveniencia un parámetro real del haz w es igualmente introducido y la siguiente forma de relación se obtiene:

$$\frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{1}{d} \quad (3.36)$$

Ahora es claro de la ecuación precedente que w es un parámetro real [26] como el parámetro complejo del haz, el cual describe la variación en forma de curva de Gauss de la intensidad del haz con la distancia al eje óptico; así como la curvatura del frente de fase, el cual tiene forma esférica cerca del eje, aproximación paraxial. Este parámetro es denominado el radio del haz o "tamaño de la mancha".

Se obtiene inmediatamente el parámetro real del haz . Se puede ver que d es igual al radio de curvatura de los espejos, lo cual significa que las superficies de los espejos coinciden con el frente de fase de los modos del resonador. El ancho $2w$ o diámetro del modo fundamental se puede deducir de la expresión anterior. Para calcular el radio del haz w_0 (cintura del haz) en el centro del resonador donde el frente de fase es plano, se utiliza el valor $\frac{d}{2}$ para z y se obtiene fácilmente:

$$w_0^2 = \frac{\lambda d}{2\pi} \quad (3.37)$$

El parámetro del haz d (parámetro confocal) y w describen los modos de todos los órdenes. Pero las velocidades de fase son diferentes para todos los órdenes, así que las condiciones del resonador dependen del índice del modo. La resonancia ocurre cuando el desfase del espejo uno al otro es un múltiplo entero de π .

Simulación digital

Para la simulación digital un algoritmo matemático digital con interfase gráfica ha sido utilizado para obtener la transformada de Fourier; se introduce sobre la superficie esférica del espejo de entrada con radio R_1 la figura del orden a estudiar y los cálculos que realiza permiten obtener la figura de difracción sobre la superficie esférica del espejo de salida con radio R_2 . El primer resultado muestra que las imágenes (Ver figura de arriba) en la forma de oscilación del campo electromagnético introducidas y obtenidas sin llevar a cabo operaciones de filtrado muestran combinaciones de las transformadas de todos los elementos ubicados en la imagen de entrada. Es decir, para los modos diferentes del fundamental, que sólo tiene un objeto sobre la imagen, se obtendrá transformaciones de Fourier donde algunos de los elementos de la imagen corresponden a productos cruzados de elementos de la imagen original, esto es debido exclusivamente a la aplicación del algoritmo implementado. El hecho de cambio de escala es observado en las coordenadas para la imagen a la salida; completando de esta manera las propiedades de escalamiento de la transformación de Fourier. En el segundo caso una operación de filtrado convencional (Ver figura

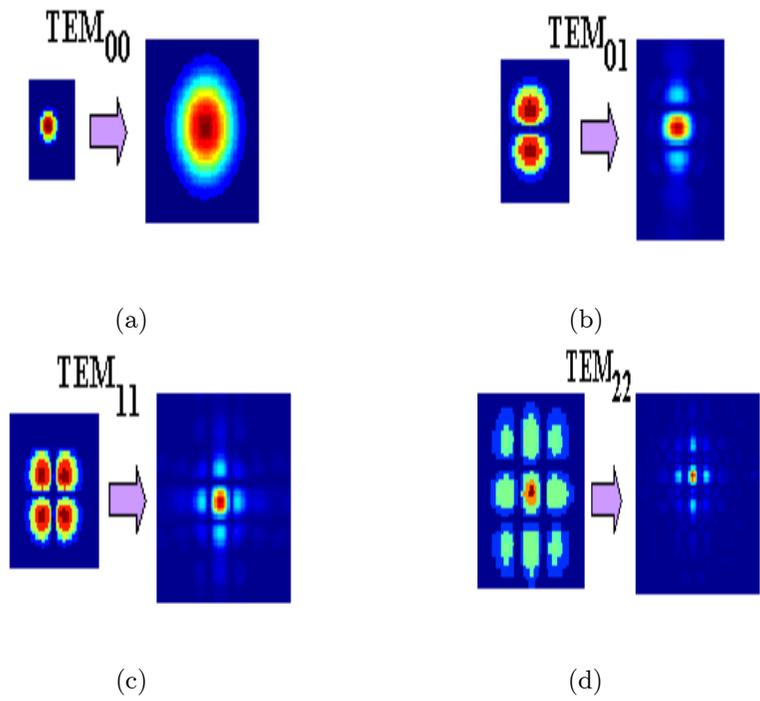


Figura 3.7: Simulación digital sin filtrado

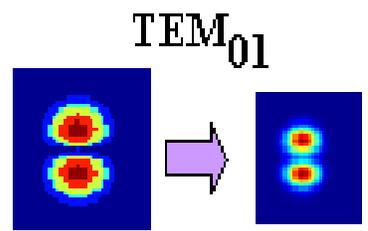


Figura 3.8: Simulación digital con filtrado para el modo TEM_{01}

precedente) sobre la imagen de salida es realizada, con el propósito de eliminar los productos cruzados y así obtener el resultado real para modos de entrada diferentes del M_{oo} y se observa que los resultados son altamente satisfactorios.

Capítulo 4

Correlación fraccional

En los capítulos anteriores se encontró que la distribución de amplitud y fase de la luz sobre un receptor esférico de radio R_F puede ser escrito en terminos de una transformación fraccional de Fourier, sí por ejemplo, un objeto plano $U_A(x, y)$ es iluminado con una onda esférica convergente de radio R_A [21,22]:

$$U_F(f_x, f_y) = \frac{-i}{\lambda d} \sqrt{2\pi \sin \alpha} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \exp \left[\frac{-i\pi (f_x^2 + f_y^2)}{\lambda} \left(-\frac{1}{R_F} - \frac{d - R_A \sin^2 \alpha}{d(d - R_A)} \right) \right] \mathcal{F}^{(\alpha)} [U_A(x, y)] \quad (4.1)$$

d es la distancia del objeto plano al receptor esférico, α es el orden fraccional, (x, y) and (f_x, f_y) son los sistemas coordenados en las superficies del objeto y del receptor respectivamente. El campo de amplitud compleja sobre del campo sobre el receptor esférico $u_F(f_x, f_y)$ es proporcional a la transformada fraccional de Fourier de orden α de la amplitud compleja del objeto plano $u_A(x, y)$, si el factor de fase:

$$\exp \left[\frac{-i\pi (f_x^2 + f_y^2)}{\lambda} \left(-\frac{1}{R_F} - \frac{d - R_A \sin^2 \alpha}{d(d - R_A)} \right) \right] \quad (4.2)$$

Es un factor de fase cuadrático que representa una aproximación cuadrática de una onda esférica divergiendo desde un punto luminoso a la distancia:

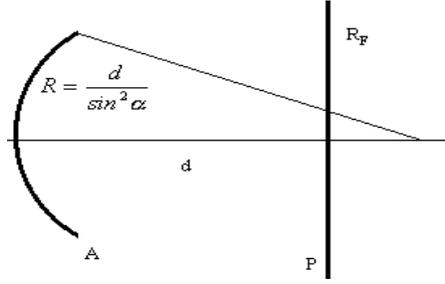


Figura 4.1: Sistema de iluminación con onda esférica y observación sobre un plano

$$R_F = -d \frac{d - R_A}{d - R_A \sin^2 \alpha} \quad (4.3)$$

Medido desde el plano de observación tangente al receptor esférico.

El radio de curvatura es tomado desde el vértice al centro; y puede ser positivo o negativo dependiendo de la convexidad del segmento esférico y el sentido de la propagación del haz luminoso.

Sí d es una distancia finita diferente de cero y si $R_F \rightarrow \infty$, se puede hacer la observación sobre un plano receptor (ver figura 4.1.), resultado importante desde el punto de vista experimental (por ejemplo un receptor CCD plano), luego el radio de la onda esférica de iluminación es:

$$R_A = \frac{d}{\sin^2 \alpha} \quad (4.4)$$

Esto significa que la transformada fraccional de Fourier de cualquier orden (diferente de cero y $\pi/2$ [22]) puede ser observada a la distancia d fija sobre el receptor plano P (ver figura previa) sí la onda de iluminación cumple con la curvatura dada por la condición anterior.

En otras palabras esto significa que si d es fijo y el parámetro α (relacionado con el orden p de la transformación fraccional por $\alpha = p\pi/2$) es modificado, físicamente corresponde a un cambio en la curvatura de radio R_A de la onda de iluminación.

En esta situación particular la ecuación (4.1.) se convierte en:

$$U_F(f_x, f_y) = \frac{-i}{\lambda D} \frac{\sqrt{2\pi \sin \alpha}}{\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]} \mathcal{F}^{(\alpha)} [U_A(x, y)] \quad (4.5)$$

4.1 Correlador de transformación fraccional conjunta

El correlador de transformación fraccional conjunta (FJTC) es un dispositivo que sirve para correlacionar dos imágenes, y sirve para comparar un objeto desconocido $U_0(x, y)$ con una referencia conocida $U_R(x + b, y)$. Goodman y Weaver [43] introdujeron este concepto. El JTC estándar Joint Transform Correlator requiere dos etapas, y la referencia es usada directamente como un filtro espacial complejo $U_R(f_x, f_y)$, la referencia es casi siempre real, positiva y binaria. En el caso estándar la distribución de la luz en el plano de correlación es:

$$\begin{aligned} C(x', y') = & U_0(x, y) \otimes U_0^*(x, y) + U_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes U_R^*(x, y) \\ & + U_0(x, y) \otimes U_R^*(x - b, y) + U_0^*(x, y) \otimes U_R(x + b, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde \otimes denota la operación correlación y $*$ denota el complejo conjugado. Los primeros dos términos representan las funciones de autocorrelación de la señal de entrada y la referencia que aparecen en el origen del plano de salida. Los últimos dos términos representan la correlación cruzada y aparecen en la posición $x = \pm b$. La distancia $2b$ entre las señales de correlación es fija y depende de la distancia b de las señales en el plano de entrada.

En el caso de un correlador de transformación conjunta fraccional [44-58] dos transformaciones fraccionales son requeridas. Este nuevo concepto combina la transformación fraccional por propagación en el espacio libre y el JTC.

Propiedades de la transformación fraccional de Fourier pueden ser encontradas en las referencias [59-71]. Las reglas exponencial y desplazamiento se resumen de la siguiente forma:

Regla del desplazamiento

$$\mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x+b)] = \exp \left[-ib \left(x' + \frac{b}{2} \cos \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x)] \quad (4.7)$$

Regla exponencial:

$$\mathcal{F}^{(p_1)} [\exp(imx) U_R(x)] = \exp \left[im \left(x' + \frac{m}{2} \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x)] \quad (4.8)$$

En esta situación en la primera etapa la señal de entrada que contiene el objeto a identificar y la referencia son iluminadas por una onda esférica de radio R_A y la salida observada en el plano intermedio, el cual se encuentra a la distancia d . Luego el plano intermedio es iluminado de nuevo con otra onda de radio $R_{A'}$ y observado sobre un plano situado a igual distancia d . El radio de curvatura en las dos etapas controla los ordenes de la transformada fraccional de Fourier. Para el plano de entrada:

$$U_0(x, y) + U_R(x + b, y) \quad (4.9)$$

Sí el plano de entrada es iluminado con una onda convergente:

$$\exp \left[\frac{-i\pi \sin^2 \alpha_1}{\lambda d} (x^2 + y^2) \right] \quad (4.10)$$

d finita y $\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}$

Después de la iluminación:

$$\begin{aligned} & U_0(x, y) \exp \left[\frac{-i\pi \sin^2 \alpha_1}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \\ & + U_R(x + b, y) \exp \left[\frac{-i\pi \sin^2 \alpha_1}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

En el plano intermedio (f_x, f_y) :

$$U_F(f_x, f_y) = \frac{-i}{\lambda D} \frac{\sqrt{2\pi \sin \alpha}}{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]} \mathcal{F}^{(\alpha)} [U_0(x, y) + U_R(x + b, y)] \quad (4.12)$$

Utilizando las reglas exponencial y de desplazamiento, descritas previamente:

$$\mathcal{F}^{(p_1)} [U_0(x, y)]_{(f_x, f_y)} + \exp \left[-ib \left(f_x + \frac{b}{2} \cos \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x, y)]_{(f_x, f_y)} \quad (4.13)$$

Sí únicamente se toma en cuenta el término de correlación cruzada se obtiene entonces:

$$\frac{1}{\lambda^2 D^2} \frac{2\pi \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right)}{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - (p_1 \pi) \right) \right]} \exp \left[-ib \left(f_x + \frac{b}{2} \cos \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x, y)]_{(f_x, f_y)} \right] \left[\mathcal{F}^{(p_1^*)} [U_0(x, y)]_{(f_x, f_y)} \right] \quad (4.14)$$

Esto corresponde al espectro de potencia del JTC fraccional de los dos términos de la correlación cruzada, luego si el plano intermedio es iluminado con una onda convergente:

$$\exp \left[\frac{-i\pi \sin^2 \alpha_2}{\lambda d} (f_x^2 + f_x'^2) \right] \quad (4.15)$$

d finito y $\alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$

En el plano de correlación (x', y') :

$$\frac{i}{\lambda^3 D^3} \frac{2\pi \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right)}{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - (p_1 \pi) \right) \right]} \frac{\sqrt{2\pi \sin \left(p_2 \frac{\pi}{2} \right)}}{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - (p_2 \frac{\pi}{4}) \right) \right]} \exp \left(-i \frac{b^2}{4} \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \exp \left[-ib \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \left(x' + \frac{b}{2} \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(p_2 \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \times C_{p_1, p_2} \left[x' + b \sin \left(p_1 \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(p_2 \frac{\pi}{2} \right), y' \right] \quad (4.16)$$

Donde la correlación fraccional es:

$$C_{p_1, p_2} = \mathcal{F}^{(p_2)} \left[\left[\mathcal{F}^{(p_1)} [U_R(x, y)] \right]_{(f_x, f_y)} \left[\mathcal{F}^{(p_1^*)} [U_0(x, y)] \right]_{(f_x, f_y)} \right] \quad (4.17)$$

El montaje observado en la figura 4.2. sugiere la implementación experimental del JTC fraccional utilizando una pantalla de cristal líquido.

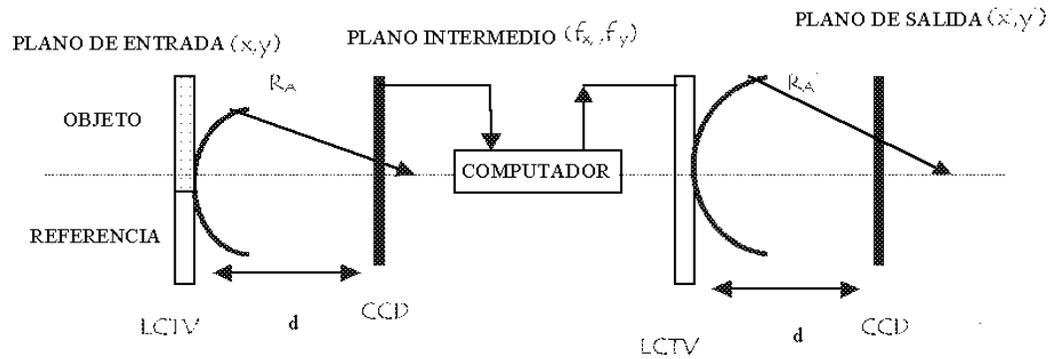


Figura 4.2: Montaje propuesto para el JTC fraccional.

Experimentalmente para la primera etapa, un modulador espacial de luz (SLM) puede ser el plano de entrada para el objeto y la referencia simultáneamente. Esta configuración permite grabar la densidad espectral de energía (JTPE) a la salida del transformador de correlación conjunta fraccional sobre un sensor CCD.

En la segunda etapa el SLM en el plano de entrada es eléctricamente direccionable para escribir la JTPE obtenida por el sensor CCD en la primera etapa. Este SLM es iluminado modificando el radio de la onda para obtener así un orden fraccional p_2 y finalmente sobre el segundo sensor CCD, los picos de correlación fraccional de orden p_1 y p_2 son obtenidos.

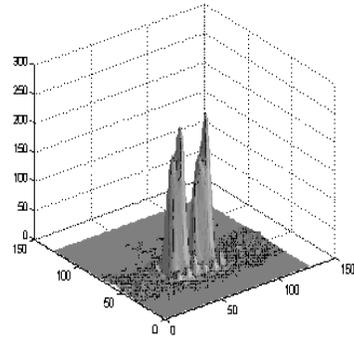
4.2 Simulación computacional

Implementación del algoritmo numérico reportado por Tucker y otros [19], en *MatlabTM*, permite obtener resultados por simulación de la correlación con la transformación fraccional de Fourier en el espacio libre. La figura 4.3. muestra las imágenes, de tamaño 128 x 128 pixeles resultado de la simulación del JTC fraccional.

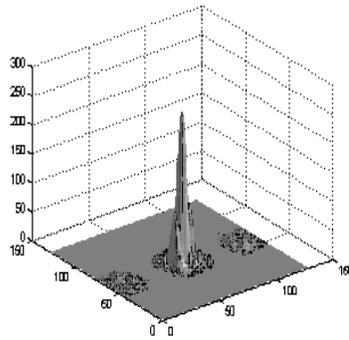
Aquí la imagen de dos letras *A* son usadas para el test de autocorrelación; en esta simulación el orden para la primera etapa es p_1 y el orden para la segunda etapa es p_2 .



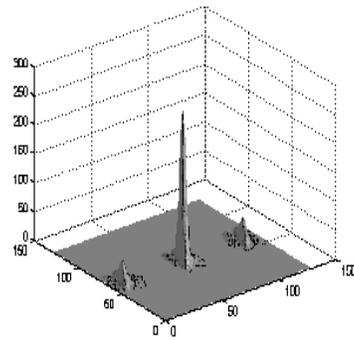
(a)



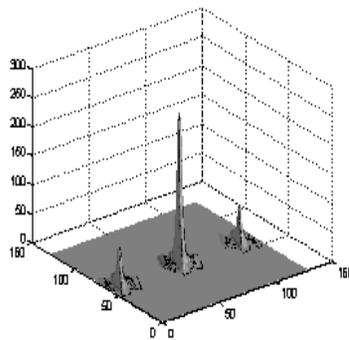
(b)



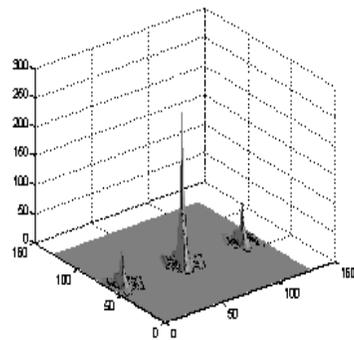
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.3: Picos de correlación fraccional entre dos caracteres obtenidos por simulación digital del FJTC propuesto. (a) Entrada; (b) $p_1 = p_2 = 0.4$; (c) $p_1 = p_2 = 0.6$; (d) $p_1 = 0.8, p_2 = 0.9$; (e) $p_1 = p_2 = 0.9$; (f) $p_1 = p_2 = 1$.

4.3 Observaciones sobre el JTC fraccional

En este capítulo se ha mostrado que la combinación de los conceptos de transformación fraccional de Fourier, propagación en el espacio libre y la configuración del correlador de transformación conjunta es posible obtener picos de correlación, controlando únicamente la curvatura del radio de la onda de iluminación. De esta forma, ajustando la curvatura del emisor esférico es posible modificar el factor de fase y obtener la densidad "espectral" de energía fraccional conjunta en la primera etapa. Finalmente, en la segunda etapa otro orden fraccional puede ser obtenido cambiando la curvatura del emisor esférico, o bien de la onda de iluminación, permitiendo observar picos de correlación fraccional entre el objeto y la referencia sobre el plano de salida del correlador.

La principal dificultad en la implementación experimental de este montaje es la iluminación del plano de entrada con onda esférica de radio controlable. Sin embargo, es importante decir que esta situación puede ser resuelta si un SLM en régimen apropiado o las nuevas aplicaciones de lentes integradas específicas ASIL son usadas en el plano de entrada de la primera y segunda etapa del correlador fraccional.

Capítulo 5

Coherencia y \mathcal{F}^α

La transferencia de la coherencia en un sistema óptico multielementos es estudiada, dentro del formalismo de la transformada de Fourier de orden fraccional. El resultado mostrará, que el teorema de Zernike-Van Cittert puede ser expresado en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional de las intensidades mutuas sobre las superficies M_1 y M_2 ; lo cual sitúa este teorema en un contexto mucho más general.

5.1 Introducción

La transformada fraccional de Fourier de orden alfa \mathcal{F}^α de la función $U_A(\xi, \eta)$ es definida para $0 < |\alpha| < 2$. Algunas propiedades esenciales de la transformada de Fourier de orden fraccional han sido presentadas formalmente en las referencias [59-71]. La implementación óptica, aplicaciones al procesamiento de señales, la transformada de Fourier de orden fraccional como una herramienta para describir y analizar sistemas ópticos y resultados experimentales, las propiedades estadísticas de la luz en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional pueden ser halladas. En todas las referencias mencionadas anteriormente, la transferencia de la coherencia por un sistema óptico multielementos y el teorema de Zernike-Van Cittert son ignorados y la propagación en el espacio libre de la intensidad mutua expresada en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional es únicamente asumida. En este capítulo

extenderemos resultados obtenidos con anterioridad en particular lo mostrado en las referencias [72,73].

5.2 Teoría de la coherencia de sistema ópticos multielementos

La coherencia mutua relativa al acople de puntos (\vec{S}_1, \vec{S}_2) de la fuente M_1 es definida por:

$$\Gamma(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \tau) = E \left[V(\vec{S}_1, t) V^*(\vec{S}_2, t + \tau) \right] \quad (5.1)$$

Donde $V(\vec{S}_1, t)$ es la amplitud compleja del campo óptico. El perfil de intensidad puede ser obtenido de $I_{M_1}(\vec{S}) = \Gamma(\vec{S}, \vec{S}; 0)$. En concordancia con el teorema de Bernstein, Wiener, Kinchine (BWK); la densidad espectral cruzada (intensidad mutua) esta definida por:

$$J(\vec{S}_1, \vec{S}_2; \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle V(\vec{S}_1, t) V^*(\vec{S}_2, t + \tau) \rangle \exp(2i\pi\nu\tau) d\tau \quad (5.2)$$

Los corchetes indican promedio temporal y el asterisco denota el complejo conjugado. Bajo la condición de aproximación paraxial, la formula de propagación de la intensidad mútua esta dada por:

$$J(\vec{S}_1, \vec{S}_2; \nu) = \frac{1}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{ikD}{2B} (\vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2; \nu) \exp \left[\frac{ikA}{2B} (\vec{\rho}_1^2 - \vec{\rho}_2^2) \right] \exp \left[\frac{-ik}{B} (\vec{S}_1 \vec{\rho}_1 - \vec{S}_2 \vec{\rho}_2) \right] d^2 \vec{\rho}_1 d^2 \vec{\rho}_2 \quad (5.3)$$

Donde $ABCD$ es la MTR de un sistema óptico caracterizado, λ_0 es la longitud de onda de iluminación; \vec{S}_1, \vec{S}_2 y $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ son las coordenadas transversas sobre las superficies M_1 y M_2 , respectivamente y ν es la frecuencia de la luz.

Bajo condiciones de aproximación paraxial, las propiedades de los rayos en los sistemas ópticos pueden ser tratadas con el elegante formulismo matricial, el cual en la mayoría de aspectos es el equivalente

de la óptica geométrica a los métodos operacionales de la óptica ondulatoria. La propagación de los rayos paraxiales a través de varias estructuras ópticas puede ser descrito por matrices, para aplicar esta metodología, es necesario conocer la MTR resultante del sistema óptico $ABCD$, además su determinante siempre tendrá el valor de uno.

5.2.1 El teorema de Zernike-Van Cittert

La transferencia de la coherencia por un sistema óptico multielementos (ecuación anterior) puede ser escrita de una forma considerablemente simple en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional de la siguiente manera:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{i\pi [(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)]}{R_2 \lambda_0} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu)] \quad (5.4)$$

Donde:

$$R_2 = \frac{-AB \left(1 - \frac{B}{R_1} \right)}{AD \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) - \cos^2 \alpha} \quad (5.5)$$

Una relación de transformación de Fourier fraccional \mathcal{F}^α de orden n_α entre la densidad espectral cruzada $J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu)$ sobre la superficie esférica M_1 con radio de curvatura R_1 y la densidad espectral cruzada $J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu)$ sobre la superficie esférica M_2 con radio R_2 , puede ser obtenida con $\alpha = \frac{\pi}{2} n_\alpha$; (α parámetro real). La ley de propagación de Zernike para la intensidad mútua entre superficies esféricas es proporcional a la transformada de Fourier de orden fraccional.

Se supone ahora, que la superficie esférica M_1 coincide con la superficie de radiación de una fuente cuasi monocromática, plana, espacialmente incoherente ($R_1 \rightarrow \infty$):

$$J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu_0) = I_0(u_2, v_2; \nu_0) \delta(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \quad (5.6)$$

La presencia de la función delta sobre la parte derecha de la ecuación anterior expresa el hecho que cualquiera de los dos elementos de la fuentes se han asumido mutuamente descorrelacionados; sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (5.4.), se obtiene la formula siguiente:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{i\pi [(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)]}{R_2 \lambda_0} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F}^\alpha [I_0(u_2, v_2; \nu_0) \delta(u_1 - u_2, v_1 - v_2)]$$

Donde,

$$R_2 = \frac{-AB}{AD - \cos^2 \alpha} \quad (5.8)$$

y

$$\mathcal{F}^\alpha [I_0(u_2, v_2; \nu_0) \delta(u_1 - u_2, v_1 - v_2)] = \frac{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{2\pi \sin \alpha} \frac{\exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{2\pi \sin \alpha} \exp \left[\frac{-i(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{2 \tan \alpha} \right]$$

$$\exp \left[\frac{-i(\xi_2^2 + \eta_2^2)}{2 \tan \alpha} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{-i(u_2^2 + v_2^2)}{2 \tan \alpha} \right] \exp \left[\frac{-i(u_2^2 + v_2^2)}{2 \tan \alpha} \right]$$

$$\exp \left[\frac{i(u_2 \xi_2 + v_2 \eta_2)}{\sin \alpha} \right] \exp \left[\frac{i(u_2 \xi_1 + v_2 \eta_1)}{\sin \alpha} \right]$$

$$[I_0(u_2, v_2; \nu_0)] du_2 dv_2 \quad (5.9)$$

Con la condición (5.8.); sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (5.7.), y se normaliza el resultado (grado complejo de coherencia) [73]; finalmente se obtiene la fórmula para el grado complejo simultáneo de coherencia:

$$j(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{1}{\sqrt{I(\vec{\rho}_1)I(\vec{\rho}_2)}} \frac{2\pi \sin\alpha}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{i\pi [(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)]}{R_2 \lambda_0} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha [I_0(u_2, v_2; \nu_0) \delta(u_1 - u_2, v_1 - v_2)] \quad (5.10)$$

Donde $I(\vec{\rho}_j)$ es la intensidad del campo luminoso en el punto $(\vec{\rho}_j)$, la fórmula anterior es la más parecida a la formulación matemática del teorema de Zernike-Van Cittert [73] y expresa que el grado simultáneo de coherencia de dos puntos $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ en el campo generado por una fuente, puede ser encontrado en términos de una transformada de Fourier de orden fraccional de la intensidad mútua sobre la superficie radiante de una fuente espacialmente incoherente, plana cuasi monocromática y las intensidades $I(\vec{\rho}_1)$ y $I(\vec{\rho}_2)$ en los dos puntos del campo.

El resultado fundamental consiste en que con toda generalidad la intensidad mútua sobre la superficie radiante de una fuente plana cuasi monocromática espacialmente incoherente M_1 y la intensidad mútua sobre la superficie esférica M_2 son transformadas de Fourier de orden fraccional cada una de la otra; lo cual contiene efectivamente como casos particulares resultados preliminares mostrados previamente como el caso de radiación de banda estrecha, lo cual permite, entre otros resultados, situar el teorema de Zernike en un contexto mucho más general. Lo interesante de este resultado es mostrar que el teorema de Zernike-Van Cittert puede ser expresado en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional de las intensidades mútuas sobre las superficies consideradas [74].

5.2.2 Zona lejana del teorema de Zernike-Van Cittert

En la mayoría de casos de interés práctico los puntos del campo $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ están situados en la zona de campo lejano de la fuente; bajo estas circunstancias y con $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $R_1 \rightarrow \infty$ luego $R_2 = \frac{-B}{D}$; la fórmula (5.9.) se convierte en:

$$\mathcal{F}^\alpha [I_0(u_2, v_2; \nu_0) \delta(u_1 - u_2, v_1 - v_2)] = \mathcal{F} [I_0(u_2, v_2; \nu_0)] \quad (5.11)$$

Una relación de transformación de Fourier \mathcal{F}^α entre la intensidad mútua $I_0(u_2, v_2; \nu_0)$ sobre la superficie radiante de la fuente plana cuasi monocromática espacialmente incoherente M_1 y la intensidad mutua sobre la superficie esférica M_2 con radio $R_2 = \frac{-B}{D}$, es obtenida. En esta situación particular, los campos ondulatorios no distinguen entre evolución exacta y paraxial (zona de campo lejano del teorema de Zernike-Van Cittert); y por tanto el teorema de Zernike-Van Cittert toma la forma simple siguiente:

$$j(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{1}{\sqrt{I(\vec{\rho}_1)I(\vec{\rho}_2)}} \frac{2\pi}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{-i\pi D [(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)]}{B\lambda_0} \right] \mathcal{F} [I_0(u_2, v_2; \nu_0)] \quad (5.12)$$

Se puede observar que cuando los puntos del campo $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ están en la zona lejana de la fuente, la intensidad mútua $J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu)$ y el grado simultáneo de coherencia $j(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu)$ son expresables en términos de una transformada de Fourier de la intensidad $I_0(u_2, v_2; \nu_0)$ sobre la fuente. La fórmula precedente es la forma de la zona de campo lejano del teorema de Zernike-Van Cittert.

5.2.3 Observaciones sobre el teorema de Zernike-Van Cittert

La distribución de la intensidad mútua es una de las formas más comunes de caracterizar la coherencia de un campo ondulatorio; se ha mostrado que la transferencia de la coherencia por un sistema óptico multi elementos puede ser adecuadamente expresada en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional, esta nueva formulación permite la extensión del teorema de Zernike, cubriendo la transferencia de campos ondulatorios total o parcialmente coherentes, y finalmente se ha mostrado, cómo se soluciona el problema de la transferencia de tales campos a través de sistemas ópticos arbitrarios caracterizados por su MTR.

5.3 Propagación de haces invariantes, método basado en la transformada de Fourier de orden fraccional

Una nueva formulación del método escalar de propagación de haces, se puede obtener utilizando la transformada de Fourier de orden fraccional; fundamentados en este resultado, se puede solucionar el problema de la transferencia de tales campos a través de sistemas ópticos arbitrarios caracterizados por su MTR $ABCD$.

5.3.1 Introducción

El método de propagación de haces es una poderosa técnica para la simulación de la propagación de campos ópticos en estructuras integradas de gran complejidad. En investigaciones recientes la extensión del concepto de invarianza a la propagación en el dominio de la óptica parcialmente coherente ha sido ampliamente investigado. En este capítulo, haciendo uso de la teoría desarrollada de la transformada de Fourier de orden fraccional, de la cual se derivará, en particular, una expresión explícita para campos de ondas ópticos que son caracterizados por la función de densidad espectral cruzada (fuentes coherentes e incoherentes). El propósito de esta parte es proponer una nueva formulación del método de propagación de haces clásicos fundamentado en la transformada de Fourier de orden fraccional y la transferencia de estos campos a través de sistemas ópticos tipo $ABCD$. Por consiguiente, en esencia, este capítulo extiende resultados preliminares en términos de métodos familiares de la óptica física [75-78].

En trabajos muy recientes el caso de la propagación de la intensidad mutua expresada en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional ha sido investigado [78]; sin embargo, únicamente la propagación de la intensidad mutua a través de medios de índice de gradiente cuadrático, espacio libre y sistemas con factor de fase cuadrático han sido presentados en todos estos trabajos mencionados. La propagación de los haces a través de sistemas ópticos en aproximación paraxial ha sido ignorada, en esta

parte de este capítulo se extenderá este resultado al caso de un sistema óptico multielementos arbitrario y cubrirá el paso de todos tanto campos de ondas totalmente coherentes como parcialmente coherentes a través de sistemas ópticos tipo $ABCD$.

5.3.2 Teoría de la coherencia de sistemas ópticos multielementos

En el método de Fox-Li [25], los campos en los sistemas ópticos son tratados como estrictamente monocromáticos, o completamente coherentes. Wolf y Agarwal [72] desarrollaron una nueva teoría basada en la ecuación integral que expresa una condición de estado estacionario para la densidad espectral cruzada del campo de cualquier forma espectral, con el fin de obtener las propiedades de coherencia del haz de salida. La coherencia mútua relativa al acople de puntos (\vec{S}_1, \vec{S}_2) de la superficie esférica M_1 es definida en la ecuación (5.1). Donde $V(\vec{S}_1, t)$ es la amplitud compleja espacio temporal del campo óptico. El perfil de intensidad puede ser obtenido de igual manera que para la ecuación (5.1), es decir:

$$I_{M_1}(\vec{S}) = \Gamma(\vec{S}, \vec{S}; 0) \quad (5.13)$$

De acuerdo al teorema de Bernstein, Wiener, Kinchine (BWK); la densidad espectral cruzada se define como en la ecuación (5.2). Bajo las condiciones de aproximación paraxial, la formula de propagación de la densidad espectral cruzada es indicada por la ecuación (5.3). Cuando los espejos son esféricos y tienen aberturas rectangulares o circulares, las ecuaciones integrales dos dimensionales pueden ser separadas y reducidas a una ecuación unidimensional la cual es generalmente simple de solucionar por métodos analíticos o numéricos.

5.3.3 Propagación de haces parcialmente coherentes dentro de un sistema óptico multielementos

Superficies plano paralelas

Sí $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; luego $AD = \cos^2 \alpha$. En el caso particular cuando el sistema óptico es dos dimensional y se encuentra delimitado por do planos paralelos; y el número de Fresnel $N = \frac{a^2}{\lambda_0 L}$ es mucho más pequeño que $\frac{\lambda_0}{a^2}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $R_1 \rightarrow \infty$; $R_2 \rightarrow \infty$, luego $AD = \cos^2 \alpha$, y en concordancia con la ecuación (5.3.) se obtiene que:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathcal{F}^\alpha \left[J_0 \left(\vec{S}_2; \nu \right) \right] \quad (5.14)$$

Sí se consideran sistemas ópticos $ABCD$ en el aire, en otras palabras todos los elementos del sistema A, B, C, D son parámetros reales y $AD - BC = 1$ determinante unitario; cuando $\alpha = 0$ se conoce que la transformación fraccional se reduce a la operación identidad. En el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ se reemplaza $\sin \alpha$ por α y $\cot \alpha$ por $\frac{1}{\alpha}$, y utilizando las funciones generalizadas, se obtiene.

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{1}{\lambda_0^2 B^2} [J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu)] \quad (5.15)$$

Por tanto, un campo cuya densidad espectral cruzada es invariante a la propagación es generado a la altura del plano de salida del sistema únicamente sí $\alpha = 0$, luego $AD = 1$ y $C = 0$, lo cual a su vez implica que el sistema es afocal con aumento B .

Ahora, sí $\alpha = \frac{\pi}{2}$; luego $A = D = 0$, la densidad espectral cruzada es:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{1}{\lambda_0^2 B^2} \mathcal{F} \left[J_0 \left(\vec{S}_2; \nu \right) \right] \quad (5.16)$$

$J_0 \left(\vec{S}_2; \nu \right)$ es la transformada de Fourier estándar de $J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu)$.

5.3.4 Propagación de haces invariantes parcialmente coherentes

Los campos libres de difracción son soluciones exactas de la ecuación de Helmholtz que se propaga en el espacio libre sin ninguna modificación de la distribución de la intensidad transversal. Dentro del contexto de la teoría de la coherencia de segundo orden, la función de densidad espectral cruzada en el espacio libre de un campo ondulatorio escalar estadísticamente estacionario obedece las ecuaciones acopladas de Helmholtz. Además fue mostrado que las soluciones de las ecuaciones de Helmholtz, satisfacen la condición de invarianza a propagación; por tanto $\alpha = 0$; $A = 1$, $B = L$, $C = 0$ y $D = 1$:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{1}{\lambda_0^2 B^2} \exp \left[\frac{i\pi [(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)]}{R_2 \lambda_0} \right] [J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu)] \quad (5.17)$$

Donde $R_1 \neq L$ y:

$$R_2 = R_1 \left(1 - \frac{L}{R_1} \right) \quad (5.18)$$

5.3.5 Caso de estructura confocal vacía

Cuando se trata el sistema óptico confocal vacío, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $R_1 = L$, $R_2 = -L$:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi}{\lambda_0^2 L^2} \mathcal{F}[J_0(u_1, u_2, v_1, v_2; \nu)] \quad (5.19)$$

Una relación de transformación de Fourier \mathcal{F} entre la densidad espectral cruzada sobre el espejo esférico M_1 con radio $R_1 = L$ y la densidad espectral cruzada sobre el espejo esférico M_2 con radio $R_2 = -L$, separados por una distancia L es obtenida. En esta situación particular, los campos ondulatorios no distinguen entre solución paraxial y exacta.

En luz incoherente; el caso particular de radiación de espectro estrecho, de acuerdo a la ecuación (5.13.), y utilizando la transformada de Fourier y las propiedades de la convolución:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi}{\lambda_0^2 L^2} \mathcal{F} \left[J_0 \left(\vec{S}_2; \nu \right) \right] \quad (5.20)$$

Y utilizando el teorema BWK se obtiene:

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi}{\lambda_0^2 L^2} \Gamma \left(\vec{S}, \vec{S}; 0 \right) \quad (5.21)$$

Tomando en cuenta la ecuación (5.9.) se concluye que,

$$J(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu) = \frac{2\pi}{\lambda_0^2 L^2} I_{M_1} \left(\vec{S} \right) \quad (5.22)$$

El grado de coherencia del haz de salida puede ser fácilmente calculado en terminos de la transformada de Fourier de la intensidad de la radiación M_1 de entrada. (Teorema de Zernike-Van Cittert)

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. resultados generales

Las conclusiones de este trabajo de tesis doctoral se han dividido en resultados generales; los cuales contienen efectivamente los aportes alcanzados por el estudiante y en producción académica obtenida como efecto de realización de los estudios.

6.2. resultados generales

El formalismo de la transformada de Fourier de orden fraccional utilizado en la realización de la presente tesis doctoral está enmarcado en el enfoque desarrollado, por el Profesor P. Pellat-finet, el cual involucra la relación directa entre la transformada de Fourier de orden fraccional y la difracción de Fresnel en el espacio libre, de tal forma que se establece una conexión entre estos dos conceptos a través de la utilización de la aproximación cuadrática a una onda con frente esférico.

En el primer Capítulo del trabajo se muestran los resultados de una exhaustiva investigación bibliográfica preliminar, en la cual se abordan todos los resultados hasta el momento conocidos, de tal forma que esta sección de la tesis corresponde exactamente con el estado del arte del objeto de investigación, destaca el gran volumen de trabajos realizados en los campos correspondientes a la transformada frac-

cional de Fourier y propagación de ondas, transformada fraccional de Fourier y operaciones de filtrado y correlación, transformada fraccional de Fourier y su representación en el espacio frecuencial, transformada fraccional de Fourier y su implementación experimental y finalmente transformada fraccional de Fourier y su calculo computacional.

En el Capítulo II, en el marco del enfoque correspondiente a la propagación del campo electromagnético en el espacio libre; como aportes originales de este trabajo de investigación se encuentran los operadores de la óptica Metaxial en aproximación paraxial y el operador transformada fraccional de Fourier; ecuación matemática que contiene una relación directa entre las entradas y salidas de sistemas ópticos multi-elementos. Concluyendo que cualquier sistema óptico caracterizado por su matriz de transferencia de rayos $ABCD$ que satisfaga las condiciones del factor de fase puede implementar una transformada de Fourier de orden fraccional entre superficies esféricas de radios definidos; estos resultados fueron aplicados a estructuras ópticas elementales, también se llevó a cabo análisis de sistemas ópticos coherentes, así mismo a la formación de la imagen en el dominio frecuencial y finalmente como consecuencia de los aportes originales de esta tesis se utilizó el montaje canónico de Lohmann tipo I realizando un estudio sobre el fenómeno de interferencia de Young; presentando resultados de manera teórica, digital y con implementación experimental donde se muestra como el patrón de intensidad es una función del orden de la transformación fraccional de Fourier, de la longitud de la onda de iluminación y de la distancia de separación entre los orificios circulares que sirven como fuente de la interferencia.

En el Capítulo III, el aporte original de este trabajo de tesis prueba que la configuración descrita de una transformación de Fourier de orden fraccional entre superficies esféricas, corresponde con un resonador de espejos esféricos de radios diferentes; Para comprobar la correspondencia entre estas situaciones y el principio de Huygens-Fresnel se demostró que las superficies de los espejos deben ser coincidentes con los frentes de fase de los modos del resonador; cumpliendo así con la teoría de campo autoconsistente, resultado que muestra la condición de estabilidad de un resonador láser. Las anteriores relaciones

permiten también por primera vez en el marco de la transformación fraccional de Fourier determinar el diámetro del haz en los espejos de un resonador de radios de curvatura diferentes y finalmente la condición de mínimo del haz (cintura del haz) es obtenida; como aplicación de los resultados anteriores se realiza un análisis detallado del caso del resonador multielementos de espejos planos y en particular se enfatiza en los resultados principales del resonador canónico de Lohmann. Posteriormente se demuestra que la propagación del campo electromagnético en el espacio libre entre un emisor y detector esférico centrados corresponde al fenómeno de difracción Fraunhofer y es matemáticamente expresado como una transformada de Fourier; esta aproximación es utilizada para obtener los parámetros del haz y mostrar digitalmente los modos de oscilación que se propagan en la cavidad láser confocal. Es importante destacar que como consecuencia de este trabajo de investigación se introduce el concepto de resonadores y haces láser en el contexto de la teoría de la difracción.

El Capítulo IV se desarrolla toda la teoría de la correlación fraccional y en particular se enfatizan los resultados correspondientes al correlador de transformación conjunta fraccional (JTC fraccional). En el caso de un correlador de transformación conjunta fraccional dos transformaciones fraccionales son requeridas. Este nuevo concepto combina la transformación fraccional por propagación en el espacio libre y el JTC. En este trabajo se implementó el algoritmo numérico reportado por Tucker, en *MatlabTM*, con el cual se encontraron digitalmente los resultados de la correlación con la transformación fraccional de Fourier en el espacio libre; en esta caso particular la imagen utilizada corresponde a dos letras con las cuales se ejecutan pruebas de autocorrelación, como aporte original se encontró que es posible obtener picos de correlación, controlando únicamente la curvatura del radio de la onda de iluminación; por tanto, ajustando la curvatura del haz de iluminación es posible modificar el factor de fase y obtener la densidad espectral de potencia conjunta fraccional de un emisor plano en la primera etapa. Finalmente, en la segunda etapa otro orden fraccional puede ser obtenido cambiando la curvatura de la onda de iluminación, permitiendo observar picos de correlación fraccional entre el objeto y la referencia sobre el plano de salida

del correlador. Por consiguiente en el Capítulo IV se estudió la generalización fraccionaria de la correlación óptica, siendo uno de los resultados de esta tesis la implementación de un correlador digital que permite detectar variaciones en la localización y forma de los objetos almacenados en el filtro; Utilizando este dispositivo se realizaron estudios a fin de determinar como varía la sensibilidad de detección, a cambios en la posición del objeto, con diferentes órdenes fraccionarios, también se dedujo una generalización de la definición de correlación fraccionaria dada en las referencias existentes. En este nuevo producto de correlación pueden ser variados los tres órdenes fraccionarios de las FRFT involucradas en la definición. Utilizando esta generalización se interpretó a la correlación fraccionaria de dos señales como la correlación clásica de las señales originales pero con diferente magnificación y la fase ligeramente modificada.

En el Capítulo V, como aporte original de este trabajo de investigación se obtiene la relación de transferencia de la coherencia en un sistema óptico multielementos, dentro del formulismo de la transformada de Fourier de orden fraccional. El resultado fundamental de este trabajo muestra, que el teorema de Van Cittert-Zernike puede ser expresado en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional de las intensidades mutuas sobre dos superficies; resultado, que sitúa este teorema en un contexto mucho más general; en primera instancia encuentra una relación de transformación de Fourier fraccional de orden n_α entre las densidades espectrales cruzadas sobre dos superficies esféricas de radios conocidos, por tanto se concluye que la ley de propagación de Zernike para la intensidad mutua entre superficies esféricas es proporcional a la transformada de Fourier de orden fraccional. El aporte fundamental consiste en que con toda generalidad la intensidad mutua de la superficie radiante de una fuente plana casi monocromática espacialmente incoherente y la intensidad mutua sobre la superficie esférica son transformadas de Fourier de orden fraccional cada una de la otra; lo cual contiene efectivamente como casos particulares resultados preliminares mostrados previamente como el caso de radiación de banda estrecha; lo interesante de este resultado es mostrar que el teorema de van Cittert-Zernike puede ser expresado en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional de las intensidades mutuas sobre las superficies consideradas. Este

resultado es aplicado al caso particular de la zona lejana del teorema de van Cittert-Zernike y realizar observaciones sobre este teorema tan importante de la óptica. En la parte final de este Capítulo y como consecuencia de este trabajo de investigación se realiza un estudio detallado del método de propagación de haces, el cual es una poderosa técnica para la simulación de la propagación de campos ópticos en estructuras integradas de gran complejidad; en este Capítulo haciendo uso de la teoría desarrollada de la transformada de Fourier de orden fraccional, se deriva, una expresión explícita para campos de ondas ópticos que son caracterizados por la función de densidad espectral cruzada (fuentes coherentes e incoherentes), por tanto se propone una nueva formulación del método de propagación de haces clásicos fundamentado en la transformada de Fourier de orden fraccional y la transferencia de estos campos a través de sistemas ópticos tipo $ABCD$, lo cual, en esencia, extiende resultados preliminares en términos de los métodos familiares de la óptica física; este resultado finalmente es aplicado a la propagación de haces invariantes parcialmente coherentes.

Como conclusión final puede decirse que la tarea desarrollada en esta tesis constituye un estudio novedoso del formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria y de sus propiedades. Se analizaron diversos aspectos vinculados a la interpretación óptica de la transformada de Fourier fraccionaria y de algunas operaciones derivadas de ésta.

6.3. Producción académica

Como resultado de la realización de los estudios doctorales se alcanzaron los siguientes logros:

6.3.1. Trabajos completos en Eventos

1).Torres Moreno César Orlando, Perpiñan Iseda, Gilberto Iván, Lorenzo Mattos Vasquez, Análisis de sistemas ópticos coherentes utilizando el operador transformada fraccional de Fourier. Memorias del XX CONGRESO NACIONAL DE FISICA. Armenia: Sociedad Colombiana de Física, 2003.

2).Leonardo F. Britto, Torres Moreno César Orlando, Encriptamiento de imágenes digitales a color mediante transformada de Fourier. La Habana: TECNOLASER2003, 2003.

3). Mestre Carrillo, Gelys Igreth, Lorenzo Mattos Vasquez, Torres Moreno César Orlando,, Estudio comparativo del desempeño de un correlador digital de imágenes de huellas dactilares pre - procesadas. Memorias del XX CONGRESO NACIONAL DE FISICA. Armenia: Sociedad Colombiana de Física, 2003.

4). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. Fractional order Fourier transform as a tool for analyzing multi-element optical system. Proceedings of Etop. Tucson, osa, 2003.

5). Torres Moreno César Orlando, Oscar Leon Neira Bueno, Yezid Torres M. The oscillation modes in the confocal laser cavity: the diffraction point of view. Memorias del IV coloquio internacional sobre ecuaciones diferenciales y aplicaciones. Maracaibo: Universidad del Zulia, 2003.

6).Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. The Van Cittert-Zernike theorem: a fractional order Fourier transform point of view. Memorias del XX CONGRESO NACIONAL DE FISICA. Armenia: Sociedad Colombiana de Física, 2003.

7). Torres Moreno César Orlando, Mattos V Lorenzo, Angulo A Luis, Caracterización petrográfica de carbones utilizando la transformada de Fourier de imágenes microestructurales, XXVI Congreso Nacional de Ingeniería, 2002, Santafé de Bogotá.Pagina web de la sociedad colombiana de ingeniería.

8).Torres Moreno César Orlando, Luis Carlos Angulo Argote, Lorenzo Mattos Vasquez, Yezid Torres

M. Coal macerals characterization using the Fourier transform. Memorias del VIII ENCUENTRO NACIONAL DE ÓPTICA. 2002.

9). Torres Moreno César Orlando, Lorenzo Mattos Vasquez, Luis Carlos Angulo Argote, Yezid Torres M. Detección de macerales en imágenes microestructurales de carbones utilizando la transformada fraccional de Fourier. VII Simposio Nacional de Tratamiento de Señales, Imágenes y Visión Artificial, 2002, Bucaramanga. Memorias del evento. Bucaramanga: sistemas y computadores, P.63 - 6.

10). Torres Moreno César Orlando, Arias Hernandez, Nestor Alonso, Yezid Torres M. Interferograma fraccional de Young. Memorias del VIII ENCUENTRO NACIONAL DE ÓPTICA. Popayán: Universidad del Cauca, 2002.

11). Torres Moreno César Orlando, óptica de Fourier fraccional. Memorias del VIII ENCUENTRO NACIONAL DE ÓPTICA. Popayán: Universidad del Cauca, 2002.

12). Diana M Fernández, Kattia P. Mejía, Torres Moreno César Orlando, Lorenzo Mattos Vasquez Preprocesamiento de imágenes digitales a través de su transformada de Fourier. VII Simposio Nacional de Tratamiento de Señales, Imágenes y Visión Artificial, 2002 Bucaramanga. Memorias del evento.

13). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. The Curvature Transparency and Electromagnetic Field Transfer Operators in the Conceptual Elaboration of the Diffraction Phenomenon VII Encuentro Nacional de Óptica, 2000. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exáctas, físicas y naturales. Armenia: Universidad del Quindio.

14). Torres Moreno César Orlando,, Yezid Torres M. Transformada Fraccional de Fourier y aplicaciones a la óptica. VII Encuentro Nacional de óptica, Armenia, Revista de la academia Colombiana de Ciencias Físicas Exáctas y naturales. Universidad del Quindio, 2000.

15). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. Curvature transperence and the electromagnetic field transfer operators in the conceptual; elaboration of the diffraction phenomena. Sixth international topical meeting on Education and training in optics and Photonics, 1999, Cancun: www.spie.org.

16). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. La transformada fraccional de Fourier. Memorias del II SIMPOSIO NORORIENTAL DE MATEMÁTICAS VII JORNADAS NACIONALES DE MATEMÁTICAS. Bucaramanga: UNAB, 1999.

6.3.2. Artículos completos publicados en revistas

1). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. The van Cittert-Zernike theorem: a fractional order Fourier transform point of view. Optics communications. , v.232, n.1-6, p.11 14, 2004.

2). Morales, Wilmer, Perpiñan Iseda, Gilberto Iván, Caballero, Giovany, Torres Moreno César Orlando, Lorenzo Mattos Vasquez análisis de sistemas opticos coherentes utilizando el operador transformada fraccional de Fourier. Revista Colombiana de Física. Santiago de Cali: , v.35, n.1, p.164 - 167, 2003.

3). Diana M Fernández, Kattia P. Mejía, Peña Mattos, José Carlos, Torres Moreno César Orlando, Diseño y desarrollo de un software para la discriminación e identificación de macerales en muestras de carbón empleando procesamiento digital de imágenes y correlación digital. Revista Colombiana de Física.

Santiago de cali: , v.35, n.2, p.360 - 363, 2003.

4). Leonardo F. Britto, Torres Moreno César Orlando, Encriptamiento de imágenes digitales a color mediante transformada de Fourier. Revista Colombiana de Física. Santiago de Cali: , v.35, n.1, p.180 - 183, 2003.

5). Mestre Carrillo, Gelys Igreth, Lorenzo Mattos Vasquez, Torres Moreno César Orlando, Estudio comparativo del desempeño de un correlador digital de imágenes de huellas dactilares pre - procesadas. Revista Colombiana de Física. Santiago de Cali: , v.35, n.1, p.156 - 159, 2003.

6). Torres Moreno César Orlando, Oscar León Neira Bueno, Yezid Torres M. The oscillation modes in the confocal laser cavity: the diffraction point of view. Revista Colombiana de Física, , v.34, n.2, p.630 - 635, 2002.

7). Torres Moreno César Orlando,, Escobar Caro, Luis Arturo Discrimination and identification of pre- procesing fingerprints by optical digital correlation. Proceedings Spie volume 4419. Estados Unidos de América: , v.4419, p.628 - 631, 2001.

8). Torres Moreno César Orlando, Oscar León Neira Bueno, Yezid Torres M. Ray transfer matrix and fractional Fourier transform. Proceedings Spie volume 4419. Estados Unidos de América: , v.4419, p.439 - 442, 2001.

9). Escobar Caro, Luis Arturo, Torres Moreno César Orlando, Lorenzo Mattos Vasquez Discriminación de Imágenes de rostros preprocesados con filtro diferencial Gaussiano, mediante correlación óptica. CIEN-

CIA. Maracaibo: , v.8, n.2, p.181 - 187, 2000.

10). Lardier, Melody, Torres Moreno César Orlando, Gilles, Keryer, Debrouguenet, Jean Louis Implementation of phase-only coded ternary filters for filtering based optical processor. Spie. Estados Unidos de América: , v.4471, n.24, p.24 - 27, 1999.

11). Guerrero Bermúdez, Jader, Torres Moreno César Orlando, Gualdrón González, Oscar Micro-displacement by means of optoelectronic nonlinear joint transform correlation of speckle pattern. Optics And Photonics News. Estados Unidos de América: , v.19, n.11, p.20 - 21, 1998.

12). Torres Moreno César Orlando, Yezid Torres M. The free-space Fresnel and the fractional Fourier transform. Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Santafé de Bogotá: , n.090, 1998.

13). Guerrero Bermudez, Jader, Torres Moreno César Orlando, Gualdrón Gonzalez, Oscar, Yezid Torres M. Identificación de rostros mediante trabajo cooperativo de transformación conjunta binario y una red neuronal. Revista Colombiana de Física, 1997.

6.3.3. Monografías de conclusión de especialización en Física asesoradas y concluidas

1). Luis Arturo Escobar Caro. Discriminación de imágenes de rostros mediante correlación óptica. 1999. Monografía (Especialización En Física) - Universidad Popular del Cesar.

2). Juan de Dios Useche Figueredo. La transformada fraccional de Fourier y sus aplicaciones a la física. 1999. Monografía (Especialización En Física) - Universidad Popular del Cesar.

3). Reynaldo Enrique Ruiz Suarez. La transformada fraccional de Fourier y sus aplicaciones a la física. 1999. Monografía (Especialización En Física) - Universidad Popular del Cesar.

Bibliografía

- [1] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, and A. W. Lohmann, Graded-index fibers, Wigner-distribution functions, and the Fractional Fourier transform, *Appl. opt.* 33, 6188-6193(1994).
- [2] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, Fractional Fourier optics, *J. Opt. Soc. Am. A.* Vol. 12, No 4 743-750 (1995).
- [3] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation, *Opt. Commun.* 101 163-169 (1993).
- [4] D. Mendlovic, and H. M. Ozaktas, Fractional Fourier transforms and their optical implementation I, *J. Opt. Soc. Am. A* 1,1875-1881 (1993).
- [5] V. Namias, The fractional Fourier transform and its applications to quantum mechanics, *J. Inst. Math. Appl.*25, 241-265 (1987).
- [6] A. W. Lohmann, Z. Zalevsky, R. G. Dorsh and Mendlovic, Experimental considerations and scaling property of the fractional Fourier transform, *Opt. Commun.* 146, 55-61 (1998).
- [7] C. McBride and F. H. Kerr, On Namias's fractional Fourier transform, *IMA J: Appl. Math.* 39, 159-175.
- [8] D. Mendlovic, H. Ozaktas and A. W. Lohmann, Fractional correlation, *Appl. Opt.* 34, 303-309 (1995).

- [9] S. Granieri, M. Lasprilla, N. Bolognini and E. E. Sicre, Space-variant optical correlator based on the fractional Fourier transform: implementation by the use of a photorefractive $Bi_{12}GeO_{20}$ (BGO) Holographic filter, *Appl. Opt.* 35, 6951-6954 (1996).
- [10] A Sahin, H.M Ozaktas, and D. Mendlovic, optical implementation of the two-dimensional Fractional Fourier Transform with different orders in the two dimensions, *Opt. Commun.* 120, 134-138, (1995).
- [11] A. W. Lohmann, A fake lens for fractional Fourier experiments, *Opt. Com.* 115, 437-443 (1995).
- [12] P. Andres, W. D. Furlan, G. Saavedra and A. Lohmann, Variable fractional Fourier processor: a simple implementation, *J. Opt. Soc. Am. A.* Vol 14 No 4, 853-858 (1997).
- [13] A. W.Lohmann, Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am.* A10, 2181-2186 (1993).
- [14] C. McBride and F. H. Kerr, *IMA J. Appl. Math.* 39, 159(1987).
- [15] D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch, C. Ferreira, J. Garcia and H. M. Ozaktas, Anamorphic fractional Fourier transform: optical implementation and applications, *Appl. Opt.* 34, 7451-7456 (1995).
- [16] L. M. Bernardo and O. D. D. Soares, Fractional Fourier transforms and imaging, *J. Opt. Soc. Am.* A 11, 2622-2626 (1994).
- [17] H. M. Ozaktas, O. Arikan M. A. Kutay, and G. Bozdagi, Digital computation of the fractional Fourier transform, *IEEE Trans. Signal Process.* 44, 2141-2150 (1996).
- [18] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky and M. A. Kutay, *The fractional Fourier transform with application in optics and signal processing*, John Willey Sons, Ltd. (2001) P (259-260).
- [19] S. B. Tucker, J. O. Castañeda and W. T. Cathey, *J. Opt. Soc. Am.* A 16, 316-322 (1999).

- [20] P. Pellat-Finet and G. Bonnet, Fractional order Fourier transform and Fourier optics, *Opt. Commun.* 111, 141-154 (1994).
- [21] P. Pellat-Finet, Diffraction entre un émetteur et un récepteur localement toriques. Application á l'étude des systèmes astigmatés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327 Serie II b, 1269-1274 (1999).
- [22] P. Pellat-Finet, Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform, *Opt. Lett.* 19, 1388-1390 (1994).
- [23] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, McGraw-Hill companies. (1996) P(404).
- [24] H. Jianwen, L. Liren and L. Guoqiang, *Applied Optics* 36, 512(1997).
- [25] Kogelnik and Li, "Laser beams and resonators," *Proceedings of IEEE*. 172-189 (1966).
- [26] Zhao, "Multi-element resonators and scaled fractional Fourier transforms," *Opt. Commun.* 168, 85-88 (1999).
- [27] Z. Liu, X. Wu and D. Fan, *Opt. Comm.* 155 (1998) 7.
- [28] L. M. Bernardo and O. D. D. Soares, "Fractional Fourier transforms and optical systems," *Opt. Commun.* 110, 517-522 (1994).
- [29] A Sahin, *Two- dimensional Fractional Fourier Transform and its optical implementation*, M. S. thesis (Bilkent University, Ankara, Turkey, (1996).
- [30] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, "Every Fourier optical system is equivalent to consecutive fractional-Fourier-domain," *Appl. Opt.* 35, 3167-3170 (1996).
- [31] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, *Fractional Fourier optics*, *J. Opt. Soc. Am. A* 12, 743-751(1995).
- [32] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, *Fractional Fourier transforms and their optical implementation II*, *J. Opt. Soc. Am. A* 10, 2522-2531 (1993).

- [33] J. D. Gaskill, "Linear system, Fourier transforms; and optics," John Wiley sons, New York, Chap. 10, p. 420, (1978).
- [34] J. Hua, L. Liu and G. Li, "Scaled fractional Fourier transform and its optical implementation," *Appl. Opt.* 36, 8490-8492 (1997).
- [35] P. Pellat-Finet and Y. Torres, "Image formation with coherent light: The fractional Fourier approach," *Journal of modern optics*, Vol. 44, No.8, pag. 1581-1594 (1997).
- [36] D. Mendlovic, Z. Zalevsky, N. Konforti, R. Dorsch and Lohmann, "Incoherent fractional Fourier transform and its optical implementation," *Appl. Opt.* 34, 7615-7620 (1995).
- [37] M. J. Bastians, Wigner distribution function and its application to first-order optics, *J. Opt. Soc. Am. A* 69, 1710-1716 (1979).
- [38] J. Hua, L. Liu and G. Li, "Observing the fractional Fourier transform by free-space Fresnel diffraction," *Appl. Opt.* 36, 512-513 (1997).
- [39] L. M. Bernardo and O. D. D. Soares, "Optical fractional Fourier transforms with complex orders," *Appl. Opt.* 35, 3163-3166 (1996).
- [40] D. Mendlovic, R. G. Dorsch, A. Lohmann, Z. Zalevsky and Ferreira, "Optical illustration of a varied fractional Fourier-transform order and the Radon-Wigner display," *Appl. Opt.* 35, 3925-3929 (1996).
- [41] S. A. Collins, Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics, *J. Opt. Soc. Am.* 60 (1970) 1168-1177.
- [42] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators, *Opt. Lett.* Vol. 19, No. 21, 1678-1680 (1994).
- [43] J. W. Goodman and C. S. Weaver, *Appl. Opt.* 5, 1248-1249 (1966).

- [44] Almanasreh and M. A. G. Abushaqur, Fractional correlations based on the modified fractional order Fourier transform, *Opt. Eng.* 37(1), 175-184 (1998).
- [45] J. Kuo and Y. Luo, Generalized joint fractional Fourier transform correlators: a compact approach, *Appl. Opt.* 37, 8270-8276 (1998).
- [46] A. W. Lohmann and D. Mendlovic, "Fractional joint transform correlator," *Appl. Opt.* 36, 7402-7407 (1997).
- [47] A. W. Lohmann, Z. Zalevsky, Mendlovic, "Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing," *Opt. Commun.* 128, 199-204 (1996).
- [48] H. M. Ozaktas, S. Yksel and M. A. Kutay, *J. Opt. Soc. Am. A.* Vol. 19, No 8 1563-1571 (2002)
- [49] J. Hua, L. Liu and G. Li, *Appl. Opt.* 36 (1997) 512.
- [50] Javidi and C. J. Kuo, *Appl. Opt.* 27, 663-665 (1998).
- [51] M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, L. Onural, and O. Arikan, optimal filtering in fractional Fourier domains, in proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (Institute of electrical and electronics Engineers, New YORK, 1995), Vol. 12, pp. 937-940.
- [52] R. G. Dorsch, A. W. Lohmann, Y. Bitran, D. Mendlovic, and H. M. Ozaktas, "Chirp filtering in the Fractional Fourier domain, *Appl. Opt.* 33, 7599-7602 (1994).
- [53] S. Granieri, O. Trabocchi and E. E. Sicre, "Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain," *Opt. Commun.* 119, 275-278 (1995).
- [54] S. Granieri, R. Arizaga, and E. E. Sicre, "Optical correlation based on the fractional Fourier transform," *Appl. Opt.* 36, 6636-6645 (1997).

- [55] Y. Britan, Z. Zalevsky, D. Mendlovic and R. G. Dorsch, "Fractional correlation operation: performance analysis," *Appl. Opt.* 35, 297-303 (1996).
- [56] Z. Zalevsky, and D. Mendlovic, "Fractional Wigner filter, *Appl. Opt.* 36, 3930-3936 (1996).
- [57] Z. Zalevsky, D. Mendlovic and J. Caulfield, "Fractional correlator with real-time control of the space-invariance property," *Appl. Opt.* 36, 2370-2375 (1997).
- [58] Z. Zalevsky, I. Raveh, G. Shabtay, D. Mendlovic and J. Garcia, "Single out-put color pattern recognition using a fractional correlator," *Opt. Eng.* 36(8), 2127-2136 (1997).
- [59] L. B. Almeyda, "The fractional Fourier transform and time-frequency representation," *IEEE Trans. Signal Process.* 42, 3084-3091 (1994).
- [60] H. M. Ozaktas "Repeated Fractional Fourier domain filtering is equivalent to repeated time and frequency domain filtering, *Signal Process.* 54, 81-84 (1996).
- [61] H. M. Ozaktas B. Barshan, D. Mendlovic, and L. Onural, Convolution, filtering , and multiplexing in Fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transform, *J. Opt. Soc. Am. A* 11, 547-559 (1994).
- [62] J. Garcia, C. Ferreira, D. Mendlovic and Y. Bitran, " Anamorphic Fractional Fourier transforming," *Proceedings SPIE*, Vol. 2730 271-274 (1996).
- [63] J. R. Sheppard and K. G. Larkin, "Similarity theorems for Fractional Fourier transform and fractional Hankel transform,' *Opt. Commun.* 154, 173-178 (1998).
- [64] K. B. Wolf, Construction and property of canonical transform, in *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum, New York (1979), Chap. 9.

- [65] M. F. Erden, H. M. Ozaktas, A. Sahin, and D. Mendlovic, Design of dynamically adjustable Fractional Fourier transformer, *Opt. Commun.* 136, 52-60 (1997).
- [66] S. Liu, H. Ren, J. Zhang and X. Zhang, "Image scaling problem in the optical fractional Fourier transform," *Appl. Opt.* 36, 5671-5674 (1997).
- [67] Sahin, H. Ozaktas and D. Mendlovic, "Optical implementation of two-dimensional fractional Fourier transform and linear canonical transforms with arbitrary parameters," *Appl. Opt.* 37, 2130-2140 (1998).
- [68] Sahin, H. Ozaktas and D. Mendlovic, "Optical implementation of the two-dimensional fractional Fourier transform with different orders in the two dimensions," *Opt. Commun.* 120, 134-138 (1995).
- [69] X. Wang and J. Zhou, "Scaled fractional Fourier transform and optical system," *Opt. Commun.* 147, 341-348 (1998).
- [70] Y. B. Karasik, Expression of the kernel of a Fractional Fourier Transform in elementary functions, *Opt. Lett.* 19, 769-770 (1994).
- [71] Y. Bitran, D. Mendlovic, R. G. Dorsch, A. Lohmann and H. Ozaktas "Fractional Fourier transform: simulations and experimental results," *Appl. Opt.* 34, 1329-1332 (1995).
- [72] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press. (1995) P (189-191).
- [73] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon, Oxford, (1980) P(370-386).
- [74] C. O. Torres and Y. Torres, "The van Cittert-Zernike theorem: a fractional order Fourier transform point of view" *Opt. Commun.* 232, 11-14 (2004).

- [75] J. Bastians, Propagation laws for the second-order moments of the wigner distribution in first-order optical system, *Optik (Stuttgart)* 82, 173-181 (1989).
- [76] J. Bastians, Second order moments of the Wigner distribution function in first-order optical system, *Optik (Stuttgart)* 88, 163-168 (1991).
- [77] J. Bastians, Wigner distribution function and Hamilton's characteristics of a geometric-optical system, *Opt. Commun.* 30, 321-326 (1979).
- [78] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L. B. Almeyda, "The fractional Fourier transform in optical propagation problems," *Journal of modern optics*, Vol. 41, No.5, pag. 1037-1044 (1994).