

RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA DE LA REFLECTANCIA
ESPECTRAL DE PINTURAS AL ÓLEO SOBRE LIENZO

LUIS GABRIEL VALDIVIESO GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2008

RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA DE LA REFLECTANCIA
ESPECTRAL DE PINTURAS AL ÓLEO SOBRE LIENZO

LUIS GABRIEL VALDIVIESO GONZÁLEZ

Trabajo de investigación presentado como requisito
para optar al título de MAGISTER EN FÍSICA

Director

Dr. JÁDER ENRIQUE GUERRERO BERMÚDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2008

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar sus agradecimientos a:

- Dr. JÁDER ENRIQUE GUERRERO BERMÚDEZ por su dirección, motivación y especial compromiso con la culminación de este trabajo de investigación.
- Mis padres, hermanos y demás familiares por su apoyo incondicional
- Dr OSCAR NEIRA y Dr. YEZID TORRES MORENO por la valoración de este trabajo y por sus importantes aportes para el mejoramiento de este texto.
- Los profesores y demás compañeros del GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES de la UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER por la discusión académica y el apoyo constante.
- Dr. ENRIQUE MEJIA OSPINO y la ESCUELA DE QUÍMICA por permitir el uso del espectro fotómetro *Shimadzu* UV 2401, pieza clave para la realización de esta investigación.
- Sr. ALEJANDRO por el adiestramiento en el manejo del espectrofotómetro y por su disponibilidad de tiempo para la toma de las curvas de reflectancia espectral.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	12
CAPITULO I	14
1.1 REFLECTANCIA ESPECTRAL	14
1.2 MONTAJE MULTIESPECTRAL	15
1.2.1 <i>Iluminante</i>	16
1.2.2 <i>Superficie de estudio</i>	19
1.2.3 <i>Filtros cromáticos</i>	20
1.2.4 <i>Sensor CCD</i>	22
1.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA ADQUISICIÓN MULTIESPECTRAL	23
CAPITULO II	26
2.1 TÉCNICA DIRECTA	26
2.2 TÉCNICAS INDIRECTAS	27
2.2.1 <i>Seudo-inversa</i>	27
2.2.2 <i>Interpolación</i>	28
2.2.3 <i>Modelamiento dimensional finito lineal</i>	31
2.3 ESTIMACIÓN DE WIENER	41
2.4 COMBINACIÓN DE TÉCNICAS DE RECONSTRUCCIÓN	43
CAPITULO III	45
3.1 BASE DE DATOS DE REFLECTANCIAS ESPECTRALES	45
3.2 MONTAJE EXPERIMENTAL DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES MULTIESPECTRALES	50
CAPITULO IV	54
4.1 EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LA RECONSTRUCCIÓN	54
4.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES	55
4.2.1 <i>Seudo-inversa</i>	56

<i>4.2.2 Interpolación</i>	58
<i>4.2.3 Modelamiento dimensional finito</i>	62
<i>4.2.4 Combinación de técnicas de reconstrucción</i>	66
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	70
ANEXO 1	71
ANEXO 2	73
ANEXO 3	75
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	77

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 ESQUEMA DEL MONTAJE DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES MULTIESPECTRALES	16
FIGURA 2 ESPECTRO DE RADIACIÓN DEL ILUMINANTE TIPO A	18
FIGURA 3: INGREDIENTES PARA PREPARAR UNA MEZCLA DE IMPRIMACIÓN	20
FIGURA 4: LIENZO IMPRIMADOS LISTOS PARA PINTAR	20
FIGURA 5: TRANSMITANCIA DE UN FILTRO INTERFERENCIAL	22
FIGURA 6. SENSITIVIDAD ESPECTRAL DE LA CÁMARA COHU SERIE 48	23
FIGURA 7: DIAGRAMA DEL SISTEMA ÓPTICO DE LA ESFERA INTEGRADORA	46
FIGURA 8: ESQUEMA PARA MEDIR LA REFLECCIÓN DIFUSA	47
FIGURA 9: REFLECTANCIAS ESPECTRALES DE LOS PEDAZOS DE LIENZO PINTADOS AL ÓLEO EN EL RANGO DEL VISIBLE [480 650] <u>nm</u>	48
FIGURA 10: DISTRIBUCIÓN DEL ESPECTRO DE POTENCIA (LADO DERECHO) PARA TRES CURVAS DE REFLECTANCIA ESPECTRAL DE PINTURAS AL ÓLEO	49
FIGURA 11: DENSIDAD ESPECTRAL DE 115 CURVAS DE REFLECTANCIA MOSTRANDO QUE A UN 5% DE LA AMPLITUD DE LAS COMPONENTES ESPECTRALES, EL ANCHO DE BANDA ES APROXIMADAMENTE 0.033 nm^{-1}	50
FIGURA 12: ESQUEMA DEL MONTAJE EXPERIMENTAL BASADO EN IMÁGENES MULTIESPECTRALES	51
FIGURA 13: 20 PEDAZOS DE LIENZO PINTADOS AL ÓLEO	51
FIGURA 14: TRANSMITANCIAS NORMALIZADAS DE LOS FILTROS INTERFERENCIALES USADOS	52
FIGURA 15: MONTAJE MULTIESPECTRAL UTILIZADO	53
FIGURA 16: CURVAS DE REFLECTANCIA NUMÉRICAMENTE RECONSTRUIDAS USANDO SEUDO-INVERSA	56
FIGURA 17: TENDENCIA DE LAS MÉTRICAS DE DESEMPEÑO PARA LA RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE LA TÉCNICA DE SEUDO-INVERSA	58
FIGURA 18: CALIBRACIÓN PARA EL FILTRO $\lambda = 650 \text{ nm}$ GRÁFICA DETALLADA	59

FIGURA 19: CALIBRACIÓN PARA LOS FILTROS: (A) $\lambda = 480$ nm, (B) $\lambda = 515$ nm, (C) $\lambda = 550$ nm, (D) $\lambda = 580$ nm, (E) $\lambda = 600$ nm, (F) $\lambda = 636$ nm	59
FIGURA 20: CURVAS DE REFLECTANCIA NUMÉRICAMENTE RECONSTRUIDAS USANDO INTERPOLACIÓN CON CERCHA CÚBICA (<i>CUBIC SPLINE</i>).	
FIGURA 21: TENDENCIA DE LAS MÉTRICAS DE DESEMPEÑO PARA LA RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE LA TÉCNICA DE INTERPOLACIÓN	62
TABLA 4: PRIMEROS 8 ÍNDICES DE CONTRIBUCIÓN ACUMULATIVA SEGÚN EL NÚMERO DE VECTORES BASE EMPLEADOS EN PCA	64
FIGURA 23: CURVAS DE REFLECTANCIA NUMÉRICAMENTE RECONSTRUIDAS USANDO PCA	64
FIGURA 24: TENDENCIA DE LAS MÉTRICAS DE DESEMPEÑO PARA LA RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE LA TÉCNICA DE PCA	66
FIGURA 25: CURVAS DE REFLECTANCIA NUMÉRICAMENTE RECONSTRUIDAS USANDO EL PROMEDIO DE LAS CURVAS OBTENIDAS POR SEUDO-INVERSA, PCA E INTERPOLACIÓN.	67
FIGURA 26: CURVAS DE REFLECTANCIA NUMÉRICAMENTE RECONSTRUIDAS USANDO EL PROMEDIO DE LAS CURVAS OBTENIDAS POR SEUDO-INVERSA, PCA E INTERPOLACIÓN.	68

LISTA DE TABLAS

TABLA 1 COMPARACIÓN ENTRE FUENTES DE ILUMINACIÓN	18
TABLA 2: EVALUACIÓN DEL ERROR AL RECONSTRUIR MEDIANTE LA TÉCNICA DE SEUDO-INVERSA	57
TABLA 3: EVALUACIÓN DEL ERROR AL RECONSTRUIR MEDIANTE LA TÉCNICA DE INTERPOLACIÓN	62
TABLA 4: PRIMEROS 8 ÍNDICES DE CONTRIBUCIÓN ACUMULATIVA SEGÚN EL NÚMERO DE VECTORES BASE EMPLEADOS EN PCA	64
TABLA 5: EVALUACIÓN DEL ERROR AL RECONSTRUIR MEDIANTE <i>PCA</i>	65
TABLA 5: EVALUACIÓN DEL ERROR AL RECONSTRUIR MEDIANTE EL PROMEDIO DE LAS CURVAS OBTENIDAS POR SEUDO-INVERSA, <i>PCA</i> E INTERPOLACIÓN.	68
TABLA 6: PROMEDIOS DE LAS MÉTRICAS DE DESEMPEÑO APLICADAS A TODAS LAS CURVAS DE REFLECTANCIA ESPECTRAL DE LA BASE DE DATOS	69

TITULO: RECONSTRUCCIÓN NUMÉRICA DE LA REFLECTANCIA ESPECTRAL DE PINTURAS AL ÓLEO SOBRE LIENZO*

AUTOR: LUIS GABRIEL VALDIVIESO GONZÁLEZ**

Palabras clave: Curvas de reflectancia espectral, Imagen multiespectral, Ajuste de curvas.

En este trabajo de investigación se presentan tres procedimientos para la reconstrucción numérica de las curvas de reflectancia espectral de pinturas al óleo sobre lienzo en una región del espectro visible, comprendida entre los 480 nm y los 650 nm. Estos procedimientos requieren, en general, un conjunto de curvas de reflectancia espectral obtenidas por medio de un espectrofotómetro, y sus respectivas imágenes multiespectrales usando filtros cromáticos, convenientemente seleccionados, los cuales se colocan en frente de una cámara monocromática de tipo CCD. Esta información se usa, en el primer procedimiento, para obtener un operador de estimación, mientras que para el segundo y tercer procedimiento se usa para calibrar el sistema mediante ajuste de mínimos cuadrados.

La reflectancia espectral para una muestra de lienzo pintado al óleo se estima, en el primer procedimiento, calculando pseudo-inversa. En el segundo, se determina interpolando, mediante cercha cúbica (*cubic spline*), las respuestas del sistema multiespectral calibradas. En el tercer procedimiento, se obtiene una base ortogonal, de acuerdo al análisis en componentes principales de la matriz que contiene las curvas reportadas por el espectrofotómetro. Una combinación lineal de esta base vectorial ortogonal permite la reconstrucción de la curva requerida. Por último, se promedia el resultado obtenido con cada uno de los procedimientos descritos anteriormente. El rendimiento de los procedimientos se evalúa usando tres métricas: error cuadrático medio, error medio absoluto y coeficiente de mejor estimación.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Maestría en Física; Director: Dr. Jáder E. Guerrero

TITLE: NUMERICAL RECONSTRUCCION OF SPECTRAL REFLECTANCE OF OIL PAINTING ON CANVAS*

AUTHOR: LUIS GABRIEL VALDIVIESO GONZÁLEZ**

Keywords: Spectral reflectance curves, Multispectral imaging, Curve fitting

In this work, three procedures for the numerical reconstruction of spectral reflectance curves from oil painting on canvas samples, in a region of visible spectrum, are presented. These procedures, in general, require a set of spectral reflectance curves captured by means of a spectrophotometer, and their respective multispectral images using chromatics filters placed in front of a monochrome charge-coupled devices (CCD) camera. This information is used, in the first procedure for the estimation of a matrix operator, while in the second and the third procedure, is used for calibrate the system by adopting a linear behaviour.

The spectral reflectance curve of a sample of oil painting on canvas is estimated, in the first procedure, using pseudo-inverse. In the second procedure, is estimated by interpolation of the camera response, using cubic spline. In the third procedure, an orthogonal basis is calculated from a matrix of the reflectance curves, obtained by an spectrophotometer. The linear combination of the base allows the reconstruction of the curve required. Finally, an average from all the procedures above is made. The performance of procedures is validated using three metrics: root mean squared, absolute mean error and goodness of fit coefficient.

* Research work

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Maestría en Física; Director: Dr. Jáder E. Guerrero

INTRODUCCIÓN

La reconstrucción numérica de curvas de reflectancia espectral de la superficie de objetos, obtenida mediante un sistema de adquisición de imágenes multiespectrales, se utilizó en un principio para sensar remotamente la tierra [1] y a partir de allí se extendió a diferentes aplicaciones, entre otras: técnicas no destructivas para el diagnóstico de pinturas, elemento clave para la restauración y el almacenamiento digital de pinturas de arte y documentos pictóricos, [2–9], el diseño de espectrofotómetros de bajo costo [10], pruebas forenses, [11], reconocimiento de patrones [12], representación de imágenes y la predicción de la apariencia cromática de un objeto bajo condiciones de iluminación arbitraria [9], [13], el análisis del *metamerismo* en escenas naturales [14] y el estudio de alimentos en el laboratorio [15]. El incremento en las aplicaciones de la reconstrucción de curvas de reflectancia espectral, puede explicarse por un lado al relativo bajo costo de los sensores de imagen optoelectrónicos, y por otro, al mejoramiento en la razón señal a ruido de los mismos.

Existen gran cantidad de técnicas para la reconstrucción de curvas de reflectancia espectral de un objeto [5], [16], [17], las cuales se basan en el muestreo de la superficie por medio de una imagen obtenida a partir de un sensor de intensidad luminosa (generalmente de estado sólido) y un conjunto de filtros de banda estrecha. Estas técnicas pueden ser clasificadas en directas e indirectas. Las técnicas directas requieren una caracterización espectral completa del sistema. Las indirectas necesitan un conjunto de curvas de reflectancia espectral con características similares a las de las curvas que serán reconstruidas, para utilizarlas como entrenamiento del sistema.

El estudio de las técnicas lineales de reconstrucción de curvas de reflectancia espectral, que es el objeto de este trabajo de investigación, se aborda en cuatro

capítulos: El primer capítulo contiene las definiciones básicas acerca de la reflectancia espectral e imágenes multiespectrales. En él se describe brevemente el montaje necesario para la adquisición de imágenes multiespectrales, identificando cada uno de sus componentes. Contiene además, una revisión sobre las características que debe poseer cada pieza del montaje para adecuarlo a las muestras que serán estudiadas en esta trabajo de investigación. Al final del capítulo se describe matemáticamente el sistema multiespectral.

El segundo capítulo está centrado en las técnicas que se revisaron para obtener numéricamente la reflectancia espectral. El capítulo inicia describiendo la técnica directa y continúa con la descripción de algunos procedimientos indirectos. En tercer lugar se describe la estimación de Wiener que puede clasificarse como técnica directa o indirecta y por último se explora brevemente la reconstrucción de curvas de reflectancia espectral, mediante la combinación de más de dos procedimientos lineales.

El montaje experimental para la reconstrucción de las curvas de reflectancia espectral de pinturas al óleo sobre lienzo está contenido en el capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan los resultados, valorándolos mediante métricas, tales como: el error espectral cuadrático medio, el error medio absoluto y el coeficiente de buen ajuste.

CAPITULO I

Este capítulo contiene los conceptos básicos que serán utilizados a lo largo del texto. Primero, se define brevemente la reflectancia espectral; luego, se describe esquemáticamente el montaje necesario para la adquisición de reflectancias, desde el punto de vista de las imágenes multiespectrales.

Cada componente del montaje se explica por separado, detallando las características que resultarán más apropiadas para reconstruir las curvas de reflectancia espectral de los pedazos de lienzo pintados al óleo. Por último se presentan los fundamentos matemáticos de la adquisición multiespectral.

1.1 REFLECTANCIA ESPECTRAL

En sentido amplio, la reflectancia r está definida como la razón entre la intensidad reflejada por una superficie I_r , y la intensidad que incide sobre ésta I_0 , es decir:

$$r \equiv \frac{I_r}{I_0} \quad (1)$$

En general y en acuerdo con las ecuaciones de Fresnel, los coeficientes de reflexión, que se encuentran relacionados con la reflectancia, dependen de la geometría con que se ilumina la superficie, la polarización y la longitud de onda del haz. Sin embargo, para efectos de medida, la *CIE (Commission Internationale de l'Eclairage)* estandarizó la geometría de los espectrofotómetros y los montajes que registran los espectros de reflectancia, fijando a la reflectancia como una propiedad intrínseca del material e

independiente de las condiciones de iluminación. Diferenciándose del color, que involucra la estimación subjetiva de la interacción de la radiación electromagnética con las superficies [18].

Cuando se estima la reflectancia en función de la longitud de onda, se habla de una curva de reflectancia espectral $r = r(\lambda)$. Obtener estas curvas es de especial interés en los sistemas de reconstrucción y reproducción digital del color.

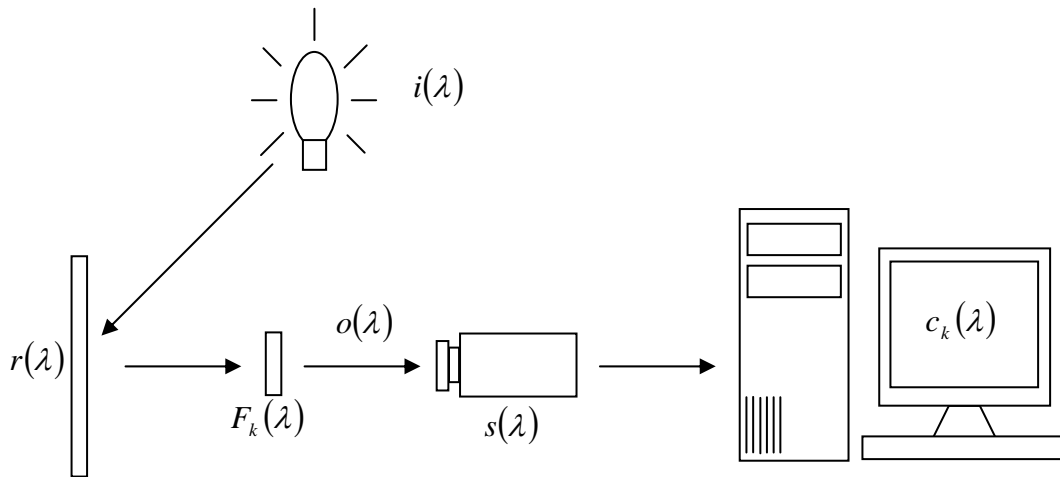
Una imagen multiespectral es el conjunto de N imágenes adquiridas usando el mismo número de filtros cromáticos. En el caso particular donde $N = 3$, la imagen adquirida suele ser una imagen a color convencional.

1.2 MONTAJE MULTIESPECTRAL

El espectrofotómetro es el instrumento adecuado para el registro de espectros de reflectancia, por excelencia; sin embargo, en algunas aplicaciones, el objeto de estudio requiere el procesamiento en paralelo de muchos puntos de manera simultánea. Estos objetos se convierten en el escenario para los sistemas de muestreo digital de las curvas de reflectancia espectral mediante imágenes multiespectrales.

La reconstrucción numérica de curvas de reflectancia espectral mediante imágenes multiespectrales, es ante todo un proceso de muestreo en bandas cromáticas, que requiere la elección apropiada de los siguientes elementos: un iluminante de amplio espectro cromático, con irradiancia espectral $i(\lambda)$; una superficie de estudio, con reflectancia espectral $r(\lambda)$; la trayectoria óptica de la radiación electromagnética $o(\lambda)$; un conjunto de K filtros cromáticos, $F_k(\lambda)$; un sensor de intensidad luminosa con sensibilidad espectral, $s(\lambda)$, y un sistema de procesamiento numérico de datos. Ver figura 1.

Figura 1 Esquema del montaje de adquisición de imágenes multispectrales



Fuente: Autor del trabajo de investigación

1.2.1 Iluminante

El iluminante $i(\lambda)$ -entendido como la representación espectral de una fuente de iluminación- es una de las piezas más importantes para la adquisición de imágenes multispectrales debido a que provee la energía que será reflejada por la muestra para la posterior adquisición.

Las fuentes de iluminación con las que se dispone son: [5]:

- Láser
- Diodos emisores de luz
- Fuentes electro-luminiscentes
- Radiadores térmicos
- Lámparas de descarga eléctrica

A partir de las características propias de cada fuente de iluminación, algunas de estas serán descartadas hasta encontrar la más apropiada para el montaje multispectral.

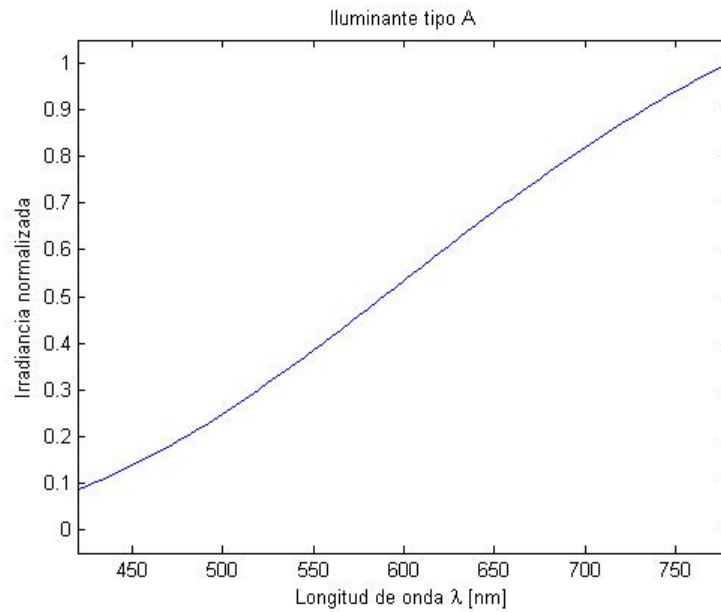
El láser y los diodos emisores de luz convencionales poseen espectros centrados en una longitud de onda específica y su rango espectral de visión no permite cubrir el espectro visible. Los diodos, pueden agruparse en parejas o tríos para completar un espectro cromático apropiado, pero su luminosidad baja hace que su uso en estas aplicaciones sea poco frecuente.

Las fuentes electro luminiscentes, como las utilizadas en el fondo de pantallas LCD, al igual que los diodos emisores de luz, tienen baja luminosidad y aunque su espectro es amplio, el uso de estas no está ampliamente extendido en los montaje multiespectrales. Sin embargo, en la actualidad la fabricación de estos elementos está evolucionando para encontrar diodos *led* blancos de alta luminosidad, lo cual permitirá usarlos.

La mejor opción para este tipo de sistemas es el uso de iluminantes que se encuentran sobre la curva de *Planck* en el diagrama de cromaticidad de la *CIE* y que exhiben compromisos para constituirse como blancos de referencia. Uno de estos iluminantes es la lámpara incandescente (iluminante tipo A). En la figura 2 se presenta el espectro de emisión de una lámpara incandescente que exhibe un comportamiento lineal en el visible.

Es de notar que dependiendo del contenido espectral del iluminante algunas longitudes de onda pueden ser acentuadas o atenuadas. En la tabla 1 puede verse una comparación de diferentes iluminantes y su desempeño en la reproducción del color [19].

Figura 2 Espectro de radiación del iluminante tipo A



Fuente: http://www.cie.co.at/index_ie.html a agosto de 2008

Tabla 1 Comparación entre fuentes de iluminación

Fuente de iluminación	Potencia eléctrica de entrada [W]	Flujo luminoso [lm]	Calidad de la representación de color
Halógena	20 – 2000	300 – 60000	Excelente
Descarga de metal haluro	20 - 2000	1600 – 24000	Bueno a excelente
LED inorgánico dicromático blanco	1 – 5	20 – 150	Bueno
LED inorgánico tricromático blanco	1	20 – 25	Excelente
LED orgánico	1.5×10^{-4} (por cm^2)	0.3 (por cm^2)	Excelente

Fuente: *Springer Handbook of Laser and Optics* [19]

1.2.2 Superficie de estudio

El siguiente componente en el montaje multiespectral es la superficie cuya curva espectral será reconstruida numéricamente. En este trabajo las superficies de estudio la constituyen lienzos pintados con óleos comerciales.

En la actualidad existen bases de datos constituidas por reflectancias de óleos sobre lienzo, como lo son: “*Selected artist*” y “*Restoration*” conformadas por 67 y 64 reflectancias respectivamente; sin embargo, en este trabajo se decidió conformar una base de datos con óleos y lienzos propios de nuestro entorno dado el acceso restringido a estas bases de datos [5].

El lienzo debe pasar por un proceso de imprimación, antes de recibir una capa de óleo. Este proceso consiste en aplicar un fluido a la tela para modificar y controlar su grado de porosidad, absorción y brillo [20].

Este fluido está conformado por un aglutinante, para la fijación; la carga, que aporta textura al lienzo y un pigmento que define el color de base. Este último puede aportar características de reflectancia a las pinturas, luego es recomendable el uso del mismo pigmento para todas las muestras de estudio.

Como ingredientes para preparar la mezcla al imprimir un lienzo, pueden usarse: (1) agua, (2) acetato de polivinilo (aglutinante), (3) yeso blanco (carga) y (4) pigmento (blanco o cualquier otro color). Los ingredientes para una mezcla típica se muestran en la figura 3.

Los ingredientes deben mezclarse agregando de uno a la vez y batiendo de manera circular hasta eliminar los grumos que generan los ingredientes y obtener la consistencia de un yogurt. En el mercado es posible encontrar lienzos imprimados y listos para pintar, como los mostrados en la figura 4.

Figura 3: Ingredientes para preparar una mezcla de imprimación



Fuente: Cómo imprimir un lienzo [20]

Figura 4: Lienzos imprimados listos para pintar



Fuente: Autor del trabajo de investigación

1.2.3 Filtros cromáticos

El muestreo en bandas cromáticas del contenido espectral se logra cuando la luz reflejada por la superficie se hace pasar a través de un conjunto de filtros cromáticos. Estos pueden agruparse de acuerdo a como filtran la luz en: filtros de absorción, filtros

interferenciales, filtros dicróicos y filtros ajustables electrónicamente basados en interferencia o dicroísmo.

Los filtros de absorción son construidos a partir de vidrio, gelatinas y/o líquidos que se ubican adecuadamente para aprovechar las propiedades de absorción y transmisión, a través del espectro, propias de estos materiales. Los picos de transmisión de estos filtros son considerados altos.

Por otro lado, la característica principal de los filtros interferenciales es su ancho de banda de transmisión extremadamente angosto (aproximadamente 10 nm. a la mitad de la altura del pico). Estos filtros se basan en interferencia destructiva de algunas componentes espectrales del haz cuando éste atraviesa un conjunto de películas delgadas que conforman un interferómetro de tipo *Fabry-Perot*. Se caracterizan porque, son extremadamente sensibles al ángulo de visión así que se debe ser cuidadoso a la hora de montarlos en un sistema óptico de manera que se recomienda la observación normal.

Tal como los filtros interferenciales, los filtros dicróicos se basan en un conjunto de películas delgadas que lo conforman. A diferencia de los filtros interferenciales, estos son muy poco sensibles a los ángulos y permiten ligeras inclinaciones en un montaje óptico.

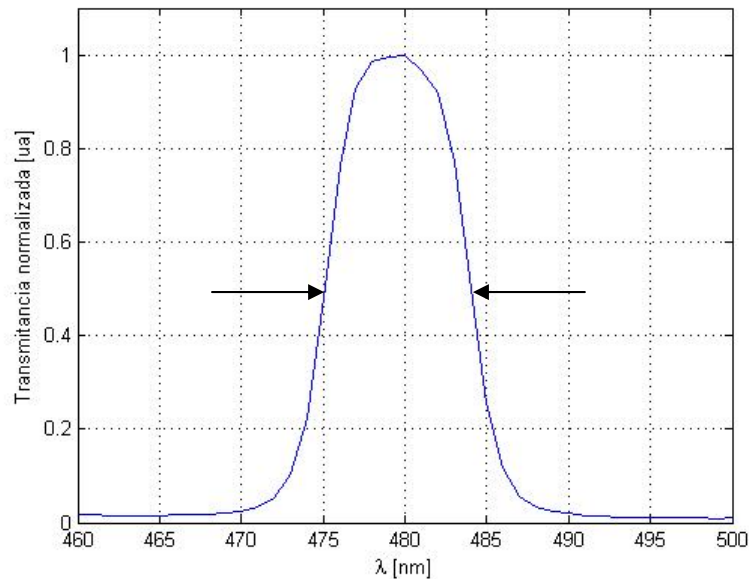
Un filtro ajustable es aquel cuyo espectro de transmisión puede ser electrónicamente controlado a través de un voltaje o una señal acústica [5]. La mayoría de ellos pueden ser clasificados en tres categorías: cristal líquido, basado en birrefringencia; acusto-ópticos, basado en difracción y *Fabry-Perot*, basados en interferencia.

La relación entre el rango de longitudes de onda transmitidas versus el rango de longitudes de onda bloqueadas, define si el filtro es de banda estrecha o banda amplia. Los filtros más usados para la obtención de imágenes multispectrales son aquellos que tienen banda estrecha porque ésta puede asemejarse a una distribución delta de Dirac. La principal ventaja de los filtros de banda amplia es que aumentan la relación

señal a ruido de la señal; pero, su desventaja radica en el aumento de la incertidumbre en el área de muestreo.

El espectro de transmitancia típico de un filtro interferencial, y en general de los filtros de banda estrecha tiene forma aproximadamente gaussiana, centrada en un valor de longitud de onda conocido como “longitud de onda pico”. En la figura 5 se muestra el espectro de transmitancia de un filtro interferencial, obtenido mediante un espectrofotómetro. Se observa el valor de onda pico cercano a 480 nm. y un ancho a mitad de pico cercano a 10 nm.

Figura 5: Transmitancia de un filtro interferencial



Fuente: Característica obtenidas usando un espectrofotómetro *Shimadzu UV-2401*

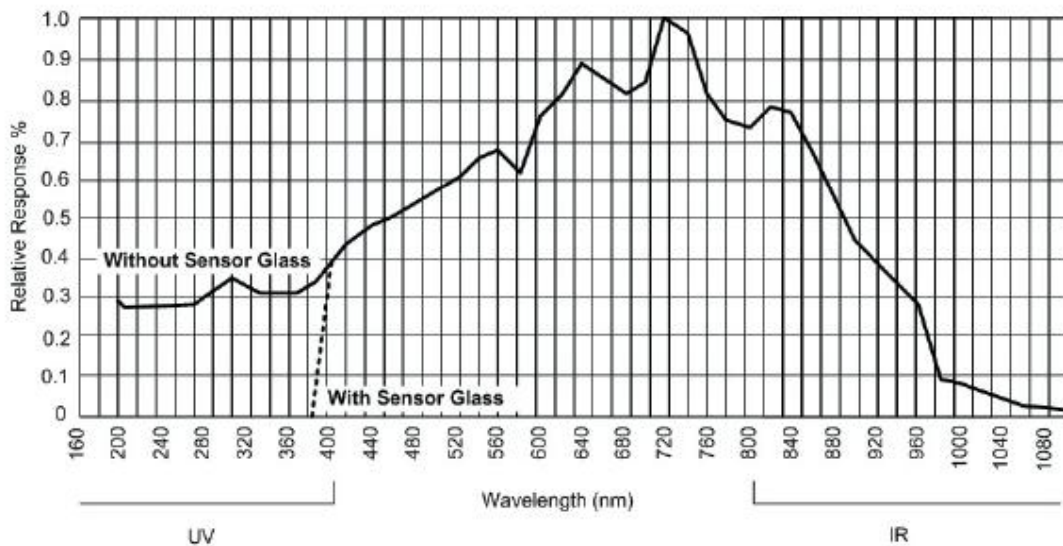
1.2.4 Sensor CCD

Las características del sensor de intensidad luminosa también deben tenerse en cuenta en la adquisición multiespectral. De acuerdo a la sensibilidad espectral de la cámara, se puede predecir un determinado comportamiento para el registro de la información espectral. Al igual que con el iluminante, la sensibilidad del sensor puede

favorecer la adquisición en determinadas longitudes de onda. Como un ejemplo, la sensibilidad de una cámara CCD Cohu 4815, (utilizada en este trabajo) proporcionada por el fabricante se muestra en la figura 6 [21]. Este comportamiento es típico de los sensores CCD que existen en la actualidad.

En la figura se evidencia que el sensor CCD es menos sensible a las longitudes de onda cercanas al azul en comparación con las longitudes cercanas al rojo.

Figura 6. Sensibilidad espectral de la cámara Cohu serie 48



Fuente: RS-170 Monochrome Frame Transfer CCD Camera 4810 Series [21]

1.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA ADQUISICIÓN MULTIESPECTRAL

Matemáticamente, la respuesta del sistema de adquisición, \tilde{c}_k , puede expresarse en aproximación lineal como una integral definida entre las longitudes de onda de interés.

$$\tilde{c}_k = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} i(\lambda) o(\lambda) s(\lambda) F_k(\lambda) r(\lambda) d\lambda + n_k \quad (2)$$

Donde n_k es el ruido aditivo para el k -ésimo canal que puede ser de naturaleza temporal o espacial debido a factores como: corriente oscura, falta de iluminación de la escena, etc.

Para cálculos, las cantidades espectrales en la ecuación (2) pueden ser reemplazados por sus homólogas muestreadas para obtener sumas como una aproximación numérica a las integrales [22]. Si se usan N muestras uniformemente espaciadas en el rango visible entre λ_{\min} y λ_{\max} , la ecuación (2) puede escribirse como

$$\tilde{c}_k = \sum_{m=0}^{N-1} w_k(\lambda_m) r(\lambda_m) \Delta\lambda + n_k \quad (3)$$

En esta ecuación, $\{\lambda_m\}_{p=0}^{N-1}$ son longitudes de onda uniformemente espaciadas que cubren la región del espectro visible, $\lambda_m = \lambda_{\min} + m\Delta\lambda$, con $\Delta\lambda$ igual al intervalo de muestreo de longitudes de onda, que generalmente se adopta igual a la unidad. $w_k(\lambda) = i(\lambda)o(\lambda)F_k(\lambda)s(\lambda)$, es la llamada sensibilidad espectral de un canal. Escribiendo en forma vectorial $w_k(\lambda_m)$ y $r(\lambda_m)$, la ecuación (3) puede reescribirse así:

$$\tilde{c}_k = \mathbf{w}_k \mathbf{r}^T + n_k \quad (4)$$

Cuando se hacen registros con tiempos de adquisición relativamente cortos, el ruido temporal puede disminuirse mediante un promedio de múltiples adquisiciones. Por otra parte, el ruido espacial se atenúa mediante la sustracción del fondo continuo o la ecualización de histogramas. Esto permite desprestigiar el término n_k en la ecuación (4).

$$c_k = \mathbf{w}_k \mathbf{r}^T \quad (5)$$

Teniendo en cuenta todos los filtros, que definen los diferentes canales, la ecuación (5) puede ser escrita en la notación matriz-vector:

$$\mathbf{c}_{K \times 1} = \Theta_{K \times N} \mathbf{r}_{N \times 1} \quad (6)$$

Donde K es el número total de canales y Θ es una matriz cuyas filas están formadas por los vectores \mathbf{w}_k .

En los capítulos ulteriores, la atención se concentrará en la estimación de la reflectancia espectral $\mathbf{r}_{N \times 1}$, a partir de un operador pseudo-inverso de la matriz Θ .

CAPITULO II

Este capítulo expone la formulación matemática de las técnicas lineales utilizadas para reconstruir numéricamente las curvas de reflectancia espectral. Estas técnicas se clasifican en directas e indirectas, de acuerdo a la información previa que requieren.

En primer lugar se describe la técnica directa, en la cual se conocen las características espectrales de cada una de las partes del sistema de imagen multiespectral. Posteriormente, se detallan las técnicas indirectas, que se basan en las respuestas del sistema multiespectral para un conjunto de muestras de lienzo pintadas con óleo, así como en una base de datos de curvas de reflectancia de las mismas. Finalmente se propone una combinación de las técnicas descritas para mejorar el rendimiento de la reconstrucción.

2.1 TÉCNICA DIRECTA

Para reconstruir curvas de reflectancia espectral de manera directa, es necesario conocer los valores numéricos de cada uno de los elementos en la ecuación (3). Esto es, conocer las componentes espectrales de la fuente de iluminación, la transmitancia de los filtros cromáticos, la sensibilidad del sensor y la dispersión cromática del medio para obtener la sensibilidad espectral del sistema, $w_k(\lambda_m)$. Una forma de encontrar estos valores es mediante el uso de un dispositivo (por ejemplo un monocromador) que emita luz monocromática y un radiómetro que encuentre el nivel de exposición para cada longitud de onda [10]. Con esta información se procede a ensamblar la matriz Θ .

Asumiendo que el medio es no dispersivo ($o(\lambda) = 1$), se procede a calcular un operador inverso de Θ , Q tal que la reflectancia pueda calcularse mediante,

$$\mathbf{r}_{N \times 1} = Q_{N \times K} \mathbf{c}_{K \times 1} \quad (7)$$

Dado que estimar la reflectancia espectral es un problema que exhibe alta inestabilidad, ya que usualmente $K \ll N$, y que por lo tanto mínimas variaciones en las condiciones de entrada podrían ocasionar grandes variaciones en los resultados, y debido a las dificultades experimentales para controlar todas las variables involucradas en Θ , se puede concluir que la técnica resulta poco práctica.

2.2 TÉCNICAS INDIRECTAS

Las técnicas indirectas requieren como datos de entrada, resultados previamente obtenidos por el sistema. Esto es, usar un conjunto de espectros con sus respectivas respuestas del sistema multiespectral para un cierto número de muestras de entrenamiento.

Entre el conjunto de técnicas lineales indirectas encontramos:

2.2.1 Seudo-inversa

El operador Q puede estimarse reemplazando los vectores $\mathbf{r}_{N \times 1}$ y $\mathbf{c}_{K \times 1}$ en la ecuación (7) por las matrices $R_{N \times p}$ y $C_{K \times p}$ que corresponden, de manera respectiva, a las reflectancias espectrales de un conjunto p pedazos de lienzos pintados al óleo, medidas con un espectrofotómetro y las respuestas del sensor en el sistema multiespectral de la figura 1. La ecuación (7) se reescribe, entonces, así:

$$R_{N \times p} = Q_{N \times K} C_{K \times p} \quad (8)$$

Despejar el operador $Q_{N \times K}$ de la ecuación (8) resulta

$$Q_{N \times K} = R_{N \times p} \text{pinv}(C)_{p \times K} \quad (9)$$

donde $\text{pinv}(C)$ representa el cálculo de la pseudo-inversa de la matriz $C_{K \times p}$.

A partir de (8) se puede obtener una expresión para calcular la pseudo-inversa, de la siguiente manera:

$$R_{N \times p} (C^T)_{p \times K} = Q_{N \times K} (C_{K \times p} (C^T)_{p \times K}) \quad (10)$$

donde T indica transpuesta.

El término a la derecha de $Q_{N \times K}$, en el lado derecho de la ecuación (10) es ahora una matriz cuadrada y por tanto posee inversa, luego

$$R_{N \times p} (C^T)_{p \times K} \left((C C^T)^{-1} \right)_{K \times K} = Q_{N \times K} \quad (11)$$

Comparando la ecuación (11) con (9), se tiene:

$$\text{pinv}(C) = C^T (C C^T)^{-1} \quad (12)$$

La ecuación (12) es la manera usual de calcular la pseudo-inversa [4].

2.2.2 Interpolación

También es posible reconstruir curvas de reflectancia espectral interpolando las respuestas de la cámara muestreadas por los filtros cromáticos. En general, la curva

que se infiere de la respuesta de la cámara para una muestra, no es similar a la reflectancia espectral de dicha muestra. Debe entenderse entonces, que antes de estimar la interpolación, es necesario calibrar la respuesta de la cámara según un conjunto de reflectancias espectrales de entrenamiento. Este proceso, en cierta forma, contempla la atenuación de algunas formas de ruido de carácter no aleatorio, como la falta de uniformidad en la iluminación.

Es recomendable una calibración para cada uno de los canales (filtros) que se utilizan en la adquisición de la imagen multiespectral, relacionando el nivel de intensidad de la cámara versus la reflectancia espectral normalizada obtenida mediante el espectrofotómetro.

Una vez hecha la calibración, existen una gran variedad de técnicas para interpolar el resultado, que en general, se basan en construir un polinomio interpolador tal que para las parejas de puntos $[x_i, y_i]$, el valor de la función interpolante evaluado en cada x_i , conocido como nodo, coincida con el valor de su respectiva pareja y_i para cada i . Algunas técnicas para construir el polinomio interpolador son:

- Interpolación de Lagrange
- Polinomio interpolador de Newton
- Polinomios de Chebyshev

Para el caso imágenes multiespectrales, sólo se dispone de las parejas de puntos formadas por la longitud de onda de los K filtros y su respectiva respuesta del sensor, y es necesario encontrar un método para aproximar el valor de la función en longitudes de onda diferentes a las de los filtros.

Un aspecto de la interpolación polinomial es que suele resultar poco satisfactoria cuando el grado del polinomio interpolador es alto, ya que es posible que la gráfica de la función presente grandes oscilaciones, por esta razón, no se suelen usar polinomios de grado seis o mayor [23].

Una opción es enlazar polinomios de grado bajo entre conjuntos de nodos consecutivos. Las porciones adyacentes de la curva, que se construyen sobre los intervalos de los nodos, se enlazan una con la otra en cada punto y el conjunto de funciones forma una curva polinomial a trozos o cercha. Las más usadas son las cerchas cúbicas (*cubic spline*) porque garantizan la continuidad y suavidad de las curvas.

La cercha cúbica se define de la siguiente manera: si para un conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\} \subset [a, b]$, donde $i = 0, 1, \dots, K$, es posible construir una función cúbica $S_i(x)$ en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tal que la curva definida a trozos $S(x)$ verifica las siguientes propiedades:

- I. $S(x) = S_i(x) = s_{i,0} + s_{i,1}(x - x_i) + s_{i,2}(x - x_i)^2 + s_{i,3}(x - x_i)^3$
para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ e $i = 0, 1, \dots, K - 1$
- II. $S(x_i) = y_i$
para $i = 0, 1, \dots, K$,
- III. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
para $i = 0, 1, \dots, K - 2$
- IV. $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
para $i = 0, 1, \dots, K - 2$
- V. $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$
para $i = 0, 1, \dots, K - 2$

Las relaciones I significan que $S(x)$ es un polinomio cúbico a trozos. Las relaciones II significan que $S(x)$ interpola los datos. Las relaciones III y IV significan que $S(x)$ es una función derivable y con derivada continua. Finalmente las relaciones V significan que la derivada segunda de $S(x)$ también existe y es continua.

Cuando se construye la cercha cúbica a partir de los datos $\{(x_i, y_i)\}$, aparece un sistema de $K - 1$ ecuaciones lineales con $K + 1$ incógnitas. Para que la solución sea

única, es necesario añadir dos ecuaciones adicionales llamadas restricciones en los extremos. Las restricciones más comunes son: cercha natural y cercha sujeta.

La cercha natural se refiere a dejar libre la inclinación en los extremos con el fin de que la cercha adquiera la posición que minimiza la conducta oscilatoria de la curva. Este tipo de cercha es útil para ajustar una curva a datos experimentales que tienen varias cifras significativas de precisión. Las ecuaciones utilizadas con esta restricción son: $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$.

La cercha sujeta involucra las derivadas en los extremos; esta cercha puede visualizarse como la curva que se obtiene cuando se hace pasar un segmento flexible, sujetado por sus extremos con una inclinación determinada, por los puntos del conjunto de datos. Las condiciones para una cercha sujeta actúan sobre la derivada primera en la frontera y están dadas por $S'(a) = d_0$ y $S'(b) = d_K$.

Una propiedad de las cerchas que es interesante desde el punto de vista de su utilización en la práctica es que presentan una conducta oscilatoria mínima; es decir, entre todas las funciones que son dos veces derivables y con derivada segunda continua en un intervalo y que, además, interpolan un conjunto de datos, las cerchas son las que oscilan menos. [23]

2.2.3 Modelamiento dimensional finito lineal

Otra técnica para reconstruir curvas de reflectancia espectral de forma indirecta es el modelamiento dimensional finito. Esta técnica consiste en encontrar una base vectorial para re-expresar, mediante una combinación lineal, el conjunto de datos, tal que el número de vectores base necesarios sea mínimo mientras se mantiene, tanto como sea posible, la variación en el conjunto de los datos [17].

En el caso de imágenes multiespectrales, se espera poder reconstruir curvas de reflectancia espectral usando un pequeño número de vectores que contienen

esencialmente toda la información de los datos originales [10]. Esto es, expresar una función espectral como una combinación lineal de un conjunto de $m \leq N$ funciones base que son linealmente independientes entre si [24] a partir de la matriz $R_{N \times p}$, usada para entrenamiento, así:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (13)$$

Los vectores base \mathbf{v}_i se hallan usando: (I) análisis en componentes principales (*PCA* del inglés *Principal Component Analysis*) el cual es un método lineal basado en momentos de segundo orden del conjunto de datos (análisis de varianza) [5] o (II) descomposición en valores singulares (*SVD* del inglés *Singular Value Decomposition*) ambos aplicados a la matriz $R_{N \times p}$ en cuyas columnas se encuentran p reflectancias espectrales de entrenamiento muestreadas en N longitudes de onda. A continuación serán descritas por separado ambas técnicas aunque están estrechamente relacionadas.

2.2.3.1 Análisis en componentes principales (*PCA*)

El objetivo principal del análisis en componentes principales es reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos que consta, en principio, de un gran número de variables *a priori* irrelevantes, conservando tanto como sea posible la información importante en un conjunto de datos de menor dimensión [17].

El elemento clave para determinar los componentes principales de un conjunto de datos multivariantes es cuantificar su redundancia. Para cuantificar la redundancia se calcula la covarianza de múltiples observaciones.

A continuación se mostrará que el análisis de componentes principales consiste en encontrar una base vectorial formada a partir de los vectores propios de la matriz de

covarianza de un arreglo de reflectancias a las cuales previamente se resta su valor medio.

Sea X una matriz de tamaño $p \times N$ asociada a un conjunto de p curvas de reflectancia \mathbf{r} de N componentes, obtenidas mediante un espectrofotómetro y centradas alrededor de su media, es decir

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} \quad (14)$$

Es posible calcular la matriz de covarianza de X mediante

$$S_x \equiv \frac{1}{N-1} XX^T \quad (15)$$

El producto matricial XX^T calcula el ij -ésimo elemento de la varianza; esto es, el producto punto entre el vector de la i -ésima reflectancia con el vector de la j -ésima reflectancia.

Calcular S_x cuantifica las correlaciones entre todos los posibles pares de medidas. Entre un par de medidas, un valor de covarianza alto corresponde a dos curvas de reflectancia muy semejantes entre si, mientras que una covarianza de cero corresponde a reflectancias completamente no correlacionados. Valores altos en los elemento fuera de la diagonal de S_x significa alta redundancia.

Para disminuir la redundancia es necesario aplicar una transformación lineal P sobre la matriz X , con el fin de obtener una matriz Y cuya covarianza exhiba un comportamiento diagonal. Esto constituye un cambio de base, que puede ser escrito como:

$$Y = PX \quad (16)$$

Para evidenciar que la matriz P contiene una nueva base que representa el conjunto de datos, escribimos la parte derecha de la ecuación (16) así:

$$PX = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \quad (17)$$

Donde \mathbf{p}_i son las filas de P y \mathbf{x}_i son las columnas de X . Desarrollando el producto de matrices se obtiene

$$Y = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde cada columna de Y puede escribirse como

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

Cada coeficiente de \mathbf{y}_i es un producto punto de \mathbf{x}_i con la correspondiente fila en P . Esto es, el j -ésimo coeficiente de \mathbf{y}_i es una proyección de \mathbf{x}_i en la j -ésima fila de P , lo cual confirma que las filas de P son un nuevo conjunto de vectores base que representan las columnas de X [25].

Para diagonalizar la matriz de covarianza de Y , dada por

$$S_Y = \frac{1}{N-1} YY^T \quad (20)$$

Inicialmente se expresa S_Y en términos de X :

$$\begin{aligned} S_Y &= \frac{1}{N-1} (PX)(PX)^T \\ &= \frac{1}{N-1} PXX^T P^T \\ &= \frac{1}{N-1} P(XX^T)P \\ S_Y &= \frac{1}{N-1} PAP^T \end{aligned}$$

donde $A \equiv XX^T$, es una matriz simétrica.

Se tiene que A puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal de sus vectores propios, así

$$A = EDE^T \quad (21)$$

Donde D es una matriz diagonal, con los valores propios de A ubicados en su diagonal principal y E es una matriz de los vectores propios de A ubicados como columnas.

Ahora se hace la suposición de que la matriz P es tal que cada \mathbf{p}_i es un auto-vector de XX^T ; esto es, $P \equiv E^T$. Sustituyendo en (21), se tiene que $A = P^T DP$; con esta relación y el hecho de que para una matriz ortogonal $P^{-1} = P^T$ resulta:

$$\begin{aligned}
S_Y &= \frac{1}{N-1} P A P^T \\
&= \frac{1}{N-1} P (P^T D P) P^T \\
&= \frac{1}{N-1} (P P^T) D (P P^T) \\
&= \frac{1}{N-1} (P P^{-1}) D (P P^{-1}) \\
S_Y &= \frac{1}{N-1} D
\end{aligned}$$

Es evidente que esta elección de P diagonaliza S_Y . Una vez determinado los vectores \mathbf{p}_i , se seleccionan aquellos que presentan mayor valor propio, constituyendo los m vectores \mathbf{v}_i de la ecuación (13). Las componentes α_i en la base conformada por los vectores \mathbf{v}_i , se calculan mediante la solución de un sistema de ecuaciones de $m \times m$

El número de vectores propios de la base se determina por conveniencia y, a partir del índice de contribución acumulativa (*CCI* del inglés *Cumulative Contribution Index*), estimar la calidad de la reconstrucción que se obtendrá.

El *CCI* se define como el cociente entre la suma de los m valores propios correspondientes a los vectores elegidos y la suma de todos los valores propios [27], esto es,

$$CCI = \frac{\sum_{i=1}^m d_{ii}}{\sum_{i=1}^p d_{ii}} \quad (22)$$

Donde los d_{ii} son los valores propios de la matriz de covarianza.

2.2.3.2 Descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares es una de las técnicas más destacadas en el álgebra lineal, dado que siempre es posible determinarla para una matriz X de tamaño $p \times N$ [26]. Esta descomposición tiene la forma

$$X = U\Sigma V^T \quad (23)$$

Donde U es una matriz ortogonal de tamaño $p \times p$, V es una matriz ortogonal de tamaño $N \times N$ y Σ es una matriz de tamaño $p \times N$ que contiene los valores singulares de X ordenados de mayor a menor, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$, a lo largo de su diagonal principal.

Para encontrar cada uno de los términos de la ecuación (23), se parte de la matriz $X^T X$, la cual es cuadrada y simétrica. Desarrollar $X^T X$ a partir de la ecuación (23) resulta:

$$\begin{aligned} X^T X &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) \\ &= V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T \\ &= V\Sigma^T \Sigma V^T \\ X^T X &= V\Sigma^2 V^T \end{aligned} \quad (24)$$

Comparando el resultado anterior con la ecuación (21) puede verse que Σ^2 contiene los valores propios de $X^T X$ y V contiene los correspondientes vectores propios. Los valores singulares de X se definen como la raíz cuadrada de los correspondientes valores propios de la matriz $X^T X$ esto es,

$$\sigma_j \equiv \sqrt{\lambda_j}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

donde λ_j son los valores propios de la matriz $X^T X$.

Para ensamblar la matriz Σ es necesario tener en cuenta además, que el rango r_X de la matriz X , que define el número de valores propios diferentes de cero, es igual al rango de la matriz $X^T X$, así que puede definirse una matriz Σ_1 de tamaño $r_X \times r_X$ que contenga todo los valores singulares diferentes de cero de la matriz X ordenados de mayor a menor a lo largo de su diagonal principal, entonces:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Esta nueva matriz Σ con el tamaño correcto $p \times N$ se llena con $p - r_X$ filas de ceros y $N - r_X$ columnas de ceros.

Los vectores propios de $X^T X$ deben ordenarse de la misma manera que los valores singulares, esto es:

$$V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r_X}, \mathbf{v}_{r_X+1}, \mathbf{v}_{r_X+2}, \dots, \mathbf{v}_N] \quad (27)$$

Donde \mathbf{v}_i es el vector propio asociado al valor singular σ_i . Los vectores propios asociados a valores singulares iguales a cero se separan y reagrupan en la matriz V_2 , entonces:

- $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_X}]$ es el conjunto de vectores propios asociados con los valores propios diferentes de cero
- $V_2 = [\mathbf{v}_{r_X+1}, \dots, \mathbf{v}_N]$ es el conjunto de vectores propios asociados con los valores propios iguales a cero.

Se sigue que

$$\begin{aligned} XV_2 &= (XV_{r_X+1}, \dots, XV_N) \\ XV_2 &= (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \\ XV_2 &= \bar{\mathbf{0}} \end{aligned} \tag{28}$$

donde $\bar{\mathbf{0}}$ es la matriz cero.

Para encontrar la matriz U se procede a descomponer la ecuación (23) así

$$XV = U\Sigma \tag{29}$$

Reemplazando se tiene:

$$X \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_X}, \mathbf{v}_{r_X+1}, \dots, \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r_X}, \mathbf{u}_{r_X+1}, \dots, \mathbf{u}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_{r_X} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X\mathbf{v}_1, \dots, X\mathbf{v}_{r_X}, X\mathbf{v}_{r_X+1}, \dots, X\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, \sigma_{r_X} \mathbf{u}_{r_X}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$X\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j, \text{ para } j = 1, \dots, r_X \tag{30}$$

De (30) es evidente que el vector $X\mathbf{v}_j$ está en la dirección del vector unitario \mathbf{u}_j con longitud absoluta σ_j . Por lo tanto, el vector unitario \mathbf{u}_j , es el resultado de dividir el vector $X\mathbf{v}_j$ por su magnitud, σ_j

$$\mathbf{u}_j = \frac{X\mathbf{v}_j}{\sigma_j}, \text{ para } j = 1, \dots, r_X \quad (31)$$

La ecuación (31) permite encontrar los valores de U hasta donde no haya división por cero; esta parte de U se llamará U_1 y U_2 será la parte correspondiente a los valores propios iguales a cero.

Por último, se utilizarán los valores ya encontrados de la matriz V , la matriz Σ y la matriz U para probar si $U\Sigma V^T$ es una transformación de semejanza de la matriz X [10].

$$\begin{aligned} U\Sigma V^T &= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} [V_1, V_2]^T \\ &= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \\ &= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 V_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1^T + 0 \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1^T \\ &= X V_1 V_1^T \\ &= XI \\ U\Sigma V^T &= X \end{aligned}$$

Al igual que con el *PCA*, es posible seleccionar un reducido número de vectores propios en U que conformen una nueva base vectorial y que permita aproximar una curva de reflectancia espectral en el sentido de la ecuación (13). El índice de contribución acumulativa proporciona la cantidad adecuada de componentes.

Nótese que en el momento de seleccionar los vectores v_i en la ecuación (13), *PCA* y *SVD* son técnicas estrechamente relacionadas.

2.3 ESTIMACIÓN DE WIENER

La estimación de Wiener, también conocida como filtrado de Wiener, es probablemente la técnica más antigua que usa regularización [5]. Su primera aplicación a las imágenes multiespectrales fue desarrollada por William K. Pratt y Clanton E. Mancill en 1976 [28].

En la estimación de Wiener, la densidad de probabilidad de los datos de entrada se utiliza como información *a priori* con el fin de mejorar el rendimiento de la estimación [29]. Esta técnica además, minimiza la media del error cuadrático entre las respuestas del canal correspondientes a las reflectancias espectrales originales y estimadas, respectivamente.

En la estimación de Wiener, el operador $Q_{N \times K}$ de la ecuación (7) se reemplaza por el operador Q_{Wiener} que puede obtenerse a partir de:

$$Q_{Wiener} = \langle RR^T \rangle \Theta^T \left(\Theta \langle RR^T \rangle \Theta^T + \langle nn^T \rangle \right)^{-1} \quad (32)$$

o

$$Q_{Wiener} = \langle RC^T \rangle \langle CC^T \rangle^{-1} \quad (33)$$

Donde $\langle \rangle$ es un operador de promedio conjunto definido, por ejemplo para la matriz que contiene las reflectancias espectrales, así [30]:

$$\langle RR^T \rangle = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T \quad (34)$$

Donde \mathbf{r}_i es la reflectancia espectral del i -ésima muestra de color del conjunto de lienzos pintados al óleo utilizados en esta tesis y la matriz de correlación del ruido $\langle \mathbf{nn}^T \rangle$ es una matriz diagonal con las varianzas del ruido de cada canal en su diagonal principal.

La ecuación (34) puede ser escrita usando notación matricial, de la forma:

$$\langle RR^T \rangle = \frac{1}{p} RR^T \quad (35)$$

La estimación de Wiener puede agruparse en el método directo cuando se trabaja usando la ecuación (32) y en el método indirecto a través de la ecuación (33). Usar esta técnica como método directo implica los mismos inconvenientes derivados de encontrar Θ .

Reescribiendo (33), se tiene

$$Q_{Wiener} = \left(\frac{1}{p} RC^T \right) \left(\frac{1}{p} CC^T \right)^{-1} \quad (36)$$

Esto es:

$$Q_{Wiener} = RC^T(CC^T)^{-1} \quad (37)$$

El operador hallado usando la ecuación (37) es igual al que se encuentra en el cálculo de la pseudo inversa de las respuestas de la cámara descrita en la ecuación (11), luego, la estimación de Wiener para el caso indirecto converge a la técnica de pseudo inversa.

2.4 COMBINACIÓN DE TÉCNICAS DE RECONSTRUCCIÓN

Una vez realizada la reconstrucción usando las técnicas anteriormente descritas, es posible utilizar sus resultados de manera combinada con el fin de mejorar la aproximación a la curva que se pretende reconstruir [16].

Si la reflectancia espectral se obtuvo usando n técnicas diferentes, pseudo-inversa, PCA e interpolación y \mathbf{r}_j es la reflectancia obtenida usando la j -ésima técnica, la estimación discreta mejorada de la reflectancia se obtiene combinando los resultados como sigue:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{r}_j \quad (38)$$

Donde ω_j son los pesos aplicados a las curvas obtenidas con las diferentes técnicas, sujetos a las siguientes restricciones de normalización:

- $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$
- $0 \leq \omega \leq 1$.

Los pesos se encuentran minimizando el error espectral cuadrático medio y el error colorimétrico, este proceso se lleva a cabo mediante programación cuadrática.

En este trabajo, se estimó una curva de reflectancia espectral tomando valores uniformes de ω_j para las tres técnicas mencionadas arriba. Se trata del caso particular en el que los $\omega_j = 1/3$.

CAPITULO III

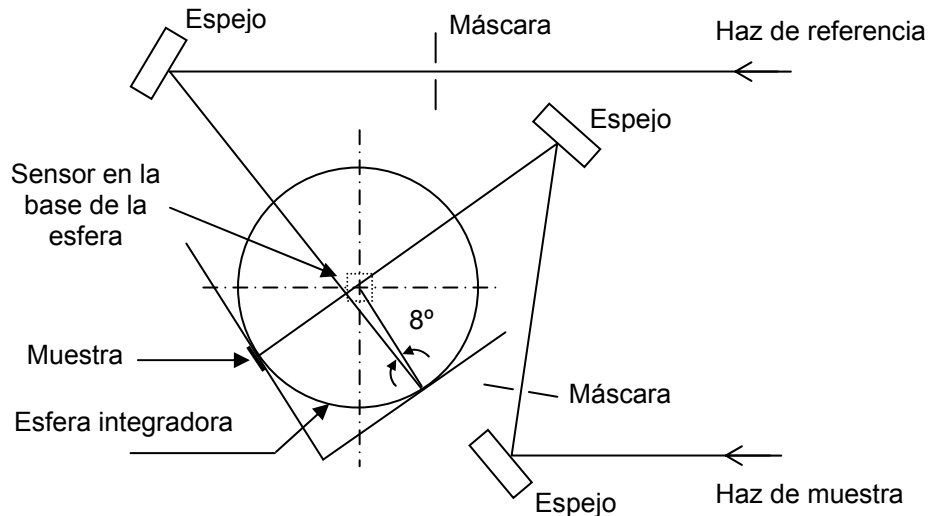
El capítulo comienza con una breve descripción sobre el procedimiento y el equipo utilizados para adquirir las reflectancias espectrales de los pedazos de lienzo pintados al óleo, que se admiten como reflectancias teóricas y que serán parte del conjunto de entrenamiento del sistema. Posteriormente, se describe el montaje experimental para adquirir las respuestas de la cámara en el sentido de imágenes multiespectrales

3.1 BASE DE DATOS DE REFLECTANCIAS ESPECTRALES

La matriz $R_{N \times p}$ de la ecuación (8), se construye ubicando $p = 115$ reflectancias espectrales de pedazos de lienzos pintados al óleo, obtenidas mediante un espectrofotómetro *Shimadzu UV-2401* con esfera integradora acoplada. El rango espectral en el cual se barrieron estas reflectancias se encuentra entre 450 y 800 nm. a paso 1 ± 0.1 nm. Este rango posteriormente fue limitado entre 480 y 650 nm. a paso 1 ± 0.1 nm. La fuente luminosa utilizada en el espectrofotómetro es una lámpara halógena de 50 W [31].

La esfera integradora, que se acopla al espectrofotómetro, es un sistema de doble haz, recubierto en su interior por una capa de sulfato de bario (BaSO_4), conocido como blanco estándar, de 60 mm de diámetro, esquematizada en la figura 7. El haz de la muestra entra en la esfera integradora con incidencia normal, y el haz de referencia entra con ángulo de incidencia de 8° . Ambos haces provienen de la misma fuente luminosa. La ventana frente al haz de muestra, donde se ubican los pedazos de lienzo pintado al óleo, mide 12×22 mm.

Figura 7: Diagrama del sistema óptico de la esfera integradora



Fuente: *Instruction manual ISR-2200 Integrating sphere attachment for UV-2200 series* [31]

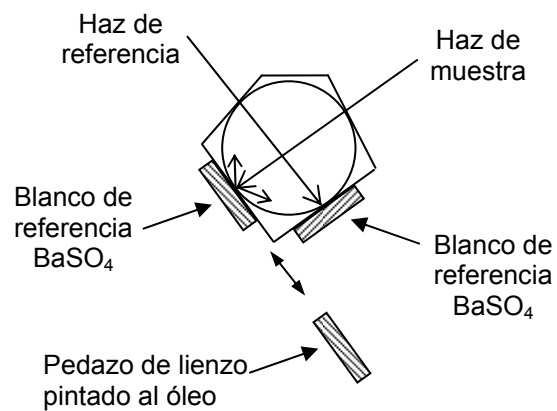
La reflectancia espectral se obtiene por comparación entre la radiación electromagnética reflejada por una placa de sulfato de bario y la reflejada por la muestra en estudio.

El procedimiento de calibración requiere el registro de la reflectancia espectral de una placa de sulfato de bario, que se ubica donde posteriormente estarán las muestras. Esto hace que todo el interior de la esfera integradora se encuentre recubierto con blanco estándar. Esto permite que el equipo genere valores para normalización (*baseline correction*) que servirán como referencia para obtener las demás reflectancias..

En segundo lugar, se reemplaza la placa de blanco de referencia, ubicada frente al haz de muestra, por el pedazo de lienzo pintado al óleo, como se muestra en la figura 8. El porcentaje de reflectancia se establece comparando los valores entre el blanco de referencia y la muestra de lienzo pintada al óleo.

La esfera integradora permite obtener toda la luz reflejada por el objeto de tal manera que la radiación reflejada en diferentes direcciones, debidas a las pequeñas rugosidades del lienzo, aporten en el resultado final. De esta manera, se pierde completamente la dependencia con el ángulo de observación. En términos de los estándares de iluminación, el espectrofotómetro trabaja a incidencia normal y registro difuso, esto es $0^\circ/d$.

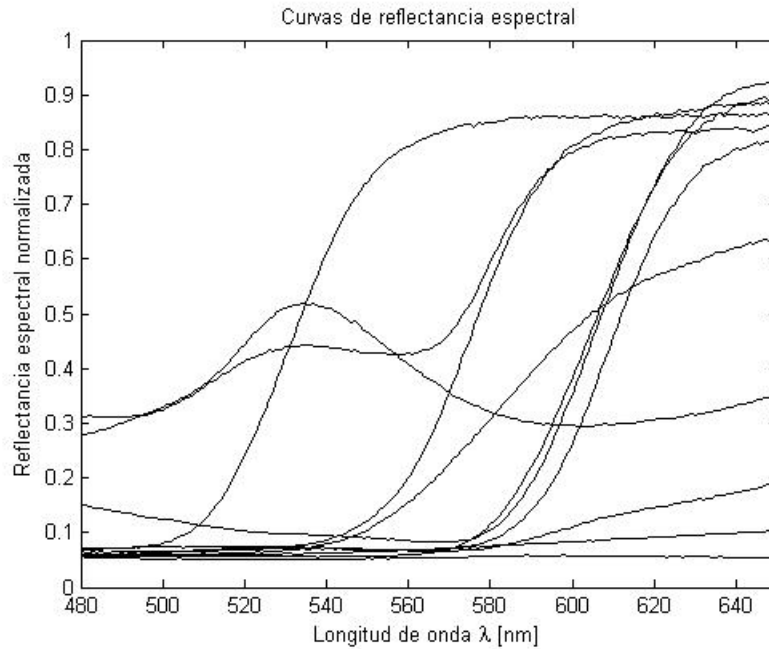
Figura 8: Esquema para medir la reflexión difusa



Fuente: *Instruction manual ISR-2200 Integrating sphere attachment for UV-2200 series* [31]

Algunas de las curvas de reflectancia espectral en el rango de [480 650] nm se muestran en la figura 9.

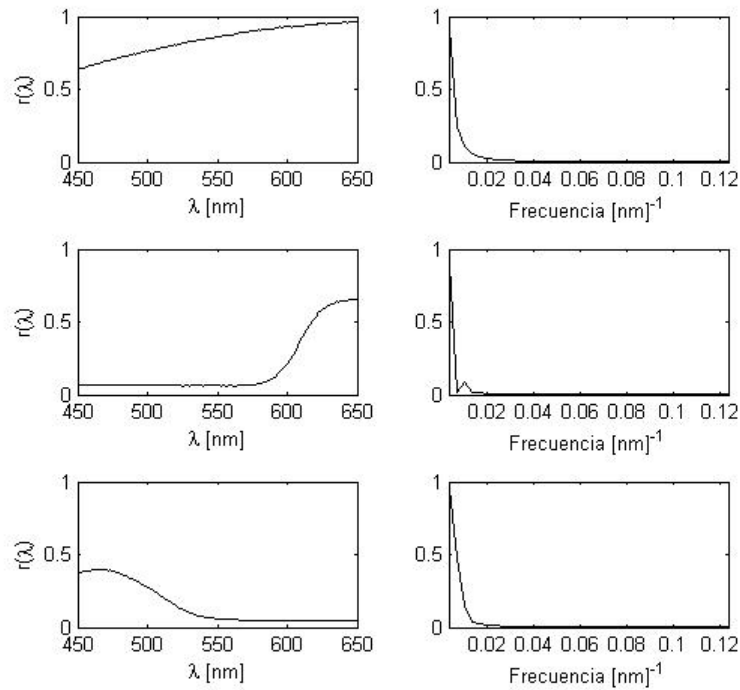
Figura 9: Reflectancias espectrales de algunos pedazos de lienzo pintados al óleo en el rango del visible [480 650] nm



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Con el objetivo de establecer la tasa de muestreo espectral óptima, se realiza el análisis de frecuencias del conjunto de reflectancias. Con base en los espectros de frecuencia, se observa que dichas curvas son señales de banda limitada, ver figura 10. Dicho de otro modo, puede tomarse un intervalo de frecuencias con amplitudes importantes y a partir de una amplitud umbral, definida de manera arbitraria, despreciar las contribuciones espectrales en las frecuencias con amplitudes por debajo de ese umbral.

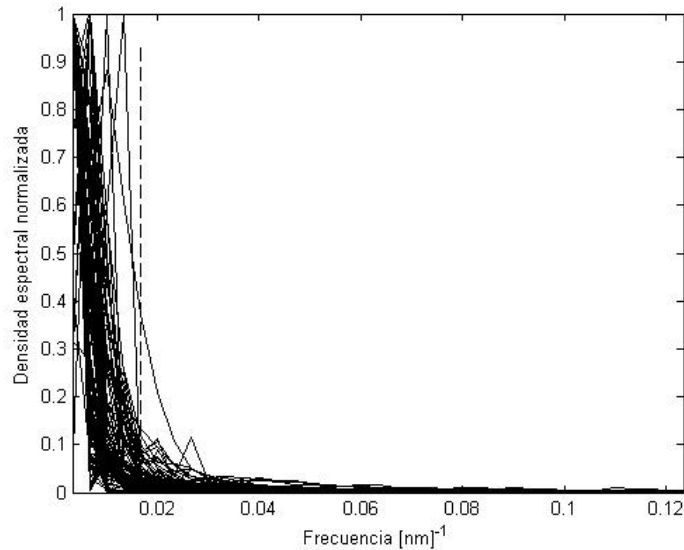
Figura 10: Distribución del espectro de potencia (lado derecho) para tres curvas de reflectancia espectral de pinturas al óleo



Fuente: Autor del trabajo de investigación

A partir de los espectros del conjunto de reflectancias, y tomando como umbral el 5% de la amplitud máxima del espectro, sin considerar la componente continua, se observa que la frecuencia de corte promedio es 0.017 nm^{-1} , de manera equivalente, el ancho de banda respectivo será de 0.034 nm^{-1} . Entonces, atendiendo al teorema del muestreo, una tasa adecuada resulta en 30.00 nm , ver figura 11. Considerando esta frecuencia de muestreo, se utilizaron siete filtros interferenciales, que aunque no están equiespaciados, sus longitudes de onda pico presentan una separación promedio de aproximadamente 29 nm , como se muestra en la figura 14.

Figura 11: Densidad espectral de 115 curvas de reflectancia mostrando que a un 5% de la amplitud de las componentes espectrales, el ancho de banda es aproximadamente 0.033 nm^{-1}



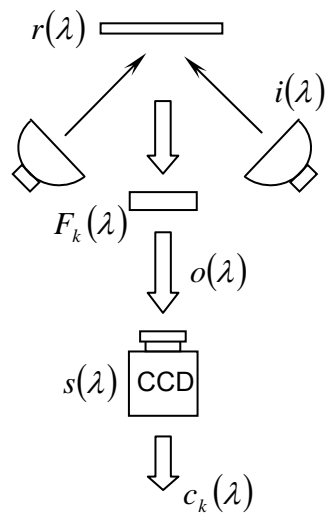
Fuente: Autor del trabajo de investigación

3.2 MONTAJE EXPERIMENTAL DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES MULTIESPECTRALES

El montaje necesario para adquirir las respuestas de la cámara, $c_k(\lambda)$, con las que se construye la matriz $C_{K \times p}$ de la ecuación (8), basado en imágenes multiespectrales, es el mostrado en la figura 12:

Donde $i(\lambda)$ es la radiancia espectral de cada uno de los iluminantes, $r(\lambda)$ es la superficie de estudio, $F_k(\lambda)$ es cada uno de los filtros cromáticos utilizados para filtrar la adquisición, $o(\lambda)$ representa la trayectoria óptica de la radiación electromagnética y $s(\lambda)$ representa la sensibilidad espectral del sensor *CCD*.

Figura 12: Esquema del montaje experimental basado en imágenes multispectrales



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Como se mencionó anteriormente, las superficies de estudio fueron 115 muestras de lienzo de $4.8 \times 2.6 \pm 0.1$ cm, pintados al óleo en una superficie de $2.0 \times 2.5 \pm 0.1$ cm aproximadamente. De estos, 30 colores corresponden a referencias disponibles en el mercado y los restantes 85 corresponden a combinaciones al azar de los primeros. Para todas las muestras se utilizaron lienzos imprimados con las mismas características. Algunas de estas muestras se presentan en la figura 13.

Figura 13: 20 pedazos de lienzo pintados al óleo

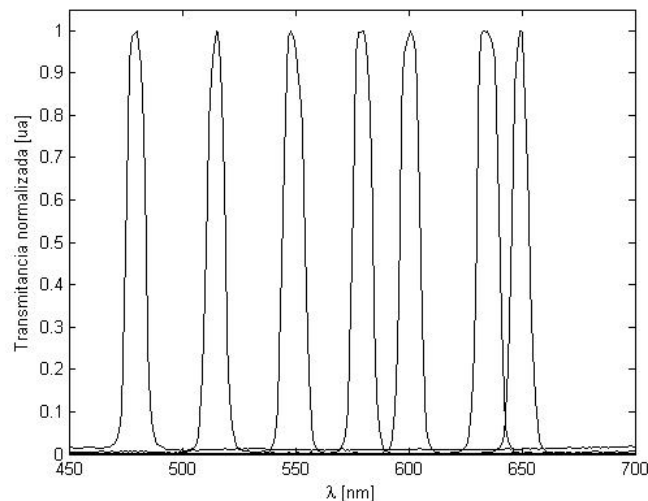


Fuente: Autor del trabajo de investigación

Con el fin de evitar sombras en la iluminación de las muestras, se utilizaron dos lámparas halógenas de 50 W de potencia cada una. Las dos lámparas se ubicaron con sus respectivos ejes ópticos a 45° con respecto a la normal de la superficie de estudio a una distancia de 20 ± 0.1 cm. El espectro de iluminación de estas lámparas es similar al iluminante tipo A.

La luz reflejada por el lienzo se muestrea usando siete filtros interferenciales de banda estrecha, $F_k(\lambda)$, con longitud de onda central en: 480, 515, 550, 580, 600, 636 y 650 nm con tolerancia ± 2 nm y ancho de banda a mitad de pico de 10 ± 2 nm. El espectro de transmitancia normalizado, del conjunto de filtros se presenta en la figura 14. Estas transmitancias fueron obtenidas usando el espectrofotómetro *Shimadzu*. Como se observa en la figura 14, para longitudes de onda inferiores a 470 nm y superiores a 660 nm, aproximadamente, ningún filtro permite el paso de radiación hacia el sensor.

Figura 14: Transmitancias normalizadas de los filtros interferenciales usados



Fuente: Autor del trabajo de investigación

La radiación transmitida por los filtros se registra mediante una cámara monocromática CCD (*Charge-Coupled Device*) marca COHUTM de referencia 4815, ubicada con su eje óptico paralelo a la normal de la superficie de estudio lo cual corresponde a trabajar con la geometría de iluminación-observación de la *CIE 45°/0°*. La sensibilidad espectral de la cámara utilizada, $s(\lambda)$, se mostró en la figura 6.

La imagen se forma en el sensor usando un objetivo de microscopio de focal 10 mm. El campo de observación resultó de $1.0 \times 1.0 \pm 0.1$ cm. La cámara registra las respuestas correspondientes a cada filtro, las cuales son digitalizadas mediante una tarjeta Matrox Meteor II, con un tamaño de imagen de 640×480 píxeles a 8 bits (256 niveles de gris). Para reducir el ruido, el registro de la cámara es el resultado de promediar 20 imágenes del pedazo de lienzo.

Una imagen del montaje utilizado se presenta en la figura 15. Es recomendable trabajar en una habitación oscura o asegurarse de aislar el sistema de adquisición de imágenes multiespectrales de cualquier luz parásita.

Figura 15: Montaje multiespectral utilizado



Fuente: Autor del trabajo de investigación

CAPITULO IV

Este capítulo inicia definiendo tres métricas de error (error espectral cuadrático medio, error medio absoluto y coeficiente de buen ajuste) que serán útiles para evaluar el desempeño de la reconstrucción numérica.

Posteriormente, se presentan los resultados al reconstruir curvas de reflectancia espectral usando las técnicas: pseudo-inversa, interpolación y análisis en componentes principales

Por último, se usa el promedio de las tres técnicas anteriores, como un cuarto procedimiento de reconstrucción numérica, mostrando que es posible mejorar los resultados.

4.1 EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LA RECONSTRUCCIÓN

El desempeño de la reconstrucción se evaluó usando tres diferentes métricas: El error espectral cuadrático medio (*RMS* del ingles *Root Mean Squared*) que se define como

$$RMS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|r_m(\lambda_i) - r_e(\lambda_i)\|^2, \quad (39)$$

donde N es el número de longitudes de onda, \mathbf{r}_m y \mathbf{r}_e son respectivamente las reflectancias espectrales medida en el espectrofotómetro y la reconstruida numéricamente.

La segunda métrica es el error medio absoluto (*AME* del inglés *Absolute Mean Error*) definido así:

$$AME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_m(\lambda_i) - r_e(\lambda_i)| \quad (40)$$

Y por último, el coeficiente de “mejor” estimación (*GFC* del inglés *Goodness-of-fit Coefficient*) el cual se define como

$$GFC = \frac{\left| \sum_{i=1}^N r_m(\lambda_i) r_e(\lambda_i) \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [r_m(\lambda_i)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N [r_e(\lambda_i)]^2}} \quad (41)$$

Esta última métrica establece una correlación entre las formas de la curva.

Una reconstrucción ideal presenta valores para la métrica *RMS* y *AME* iguales a cero y un valor para el *GFC* igual a uno.

4.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este trabajo se emplearon tres técnicas para reconstruir las curvas de reflectancia espectral. La primera se apoya en el cálculo del operador Q usando la ecuación (9). La segunda se apoya en la interpolación de las siete respuestas de la cámara CCD obtenidas con los filtros interferenciales. La tercera técnica requiere el cálculo de una base ortogonal constituida a partir de los vectores propios de un conjunto de reflectancias.

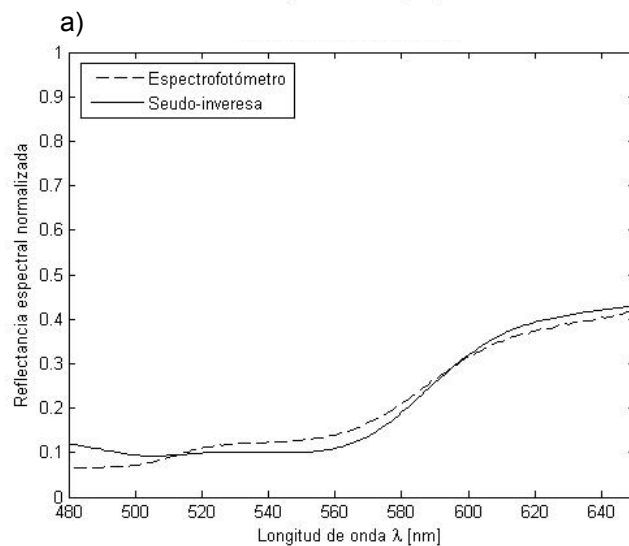
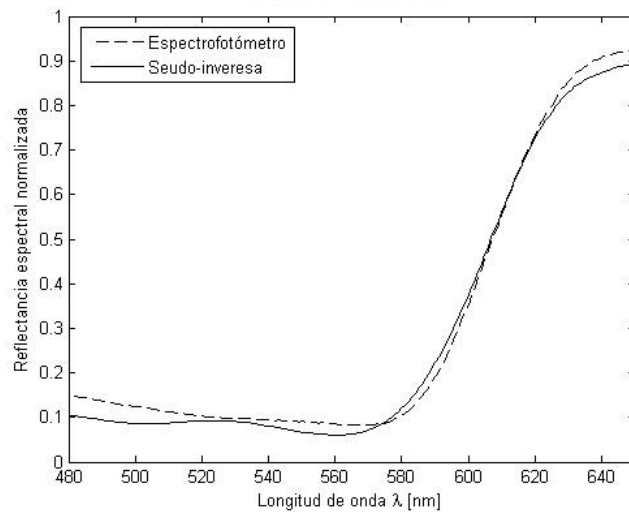
Por último, las reflectancias obtenidas con las técnicas anteriores se promedian con el fin de mejorar el rendimiento de la reconstrucción.

4.2.1 Seudo-inversa

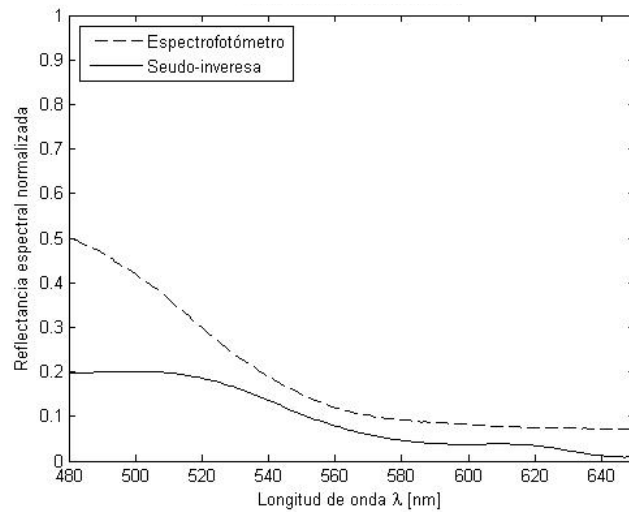
Para obtener los resultados usando la ecuación (9) se requieren las matrices: R y C , y a partir de ellas calcular el operador Q .

En las figura 16 se muestran tres curvas reconstruidas usando la técnica de seudo-inversa (en línea continua) y se compara con la reflectancia espectral obtenida con el espectrofotómetro (en línea de trazo). Junto a estas la imagen del lienzo reconstruido.

Figura 16: Curvas de reflectancia numéricamente reconstruidas usando seudo-inversa



b)



c)

Fuente: Autor del trabajo de investigación

El resultado de evaluar la reconstrucción de las curvas presentadas anteriormente, se presenta en la tabla 2

Tabla 2: Evaluación del error al reconstruir mediante la técnica de pseudo-inversa

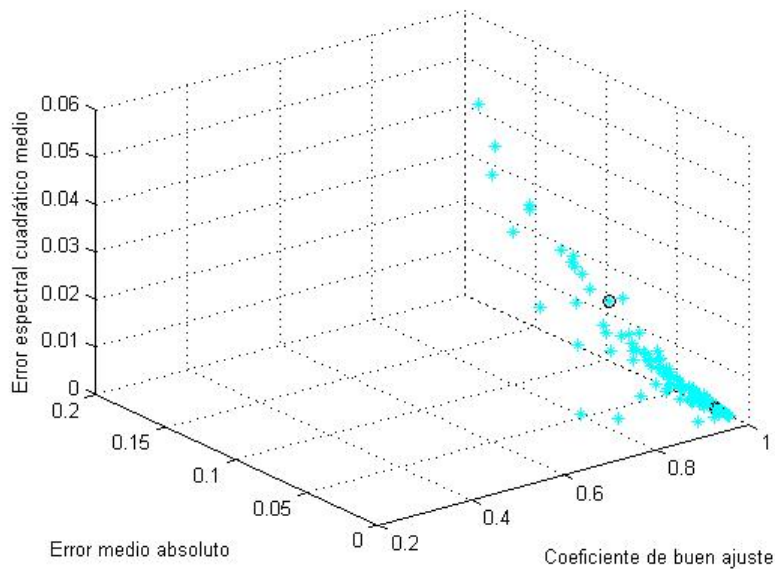
Curva	RMS	AME	GFC
a	0.0007	0.0242	0.9986
b	0.0020	0.0298	0.9983
c	0.0004	0.0193	0.9989

Fuente: Autor del trabajo de investigación

En la figura 17, se muestra el desempeño de la reconstrucción mediante la técnica de pseudo-inversa para un total de 115 curvas de reflectancia. Los valores de las métricas de desempeño se ubican en un sistema coordenado rectangular (GFC, AME, RMS). Obsérvese que la tendencia de la nube se encuentra cercana a la coordenada (1,0,0).

El resultado para las curvas reconstruidas presentadas en la figura 16 están marcados con círculos negros.

Figura 17: Tendencia de las métricas de desempeño para la reconstrucción numérica mediante la técnica de pseudo-inversa

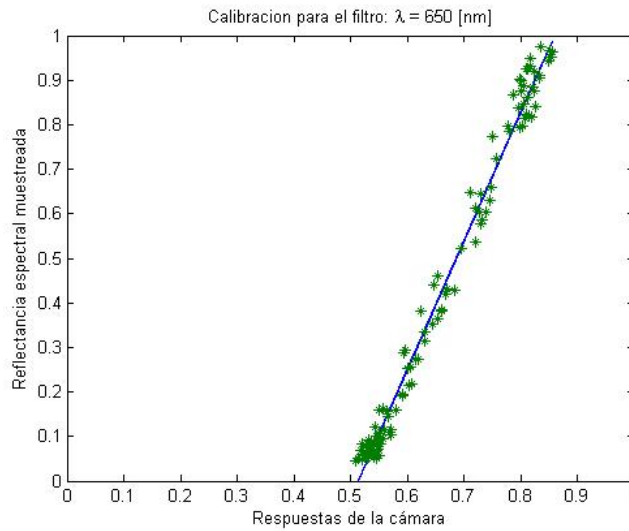


Fuente: Autor del trabajo de investigación

4.2.2 Interpolación

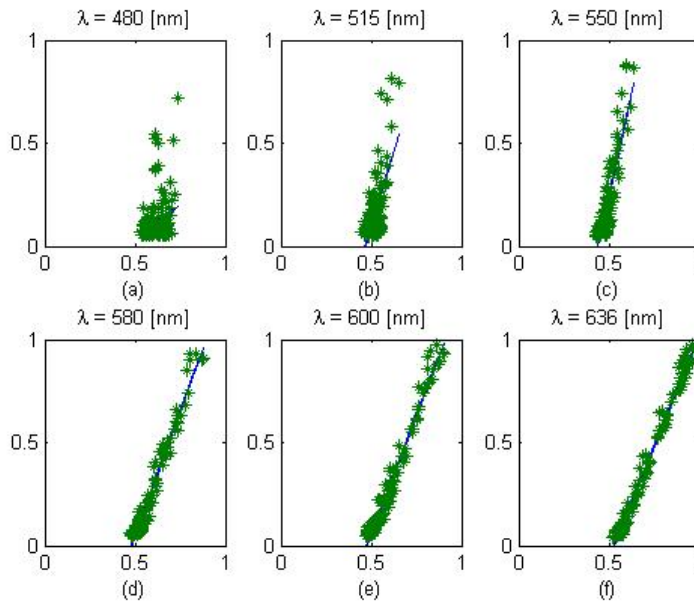
Antes de proceder con la reconstrucción numérica por interpolación, es necesario calibrar la respuesta del sistema a cada filtro. Esta consiste en ajustar, en el sentido de mínimos cuadrados, las respuestas de la cámara versus las reflectancias espectrales muestreadas en las longitudes de onda pico de los filtros. Ambas cantidades normalizadas. Los resultados obtenidos para la calibración de 115 pedazos de lienzo pintados al óleo son los siguientes:

Figura 18: Calibración para el filtro $\lambda = 650$ [nm]. Gráfica detallada



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Figura 19: Calibración para los filtros: (a) $\lambda = 480$ [nm], (b) $\lambda = 515$ [nm], (c) $\lambda = 550$ [nm], (d) $\lambda = 580$ [nm], (e) $\lambda = 600$ [nm], (f) $\lambda = 636$ [nm]

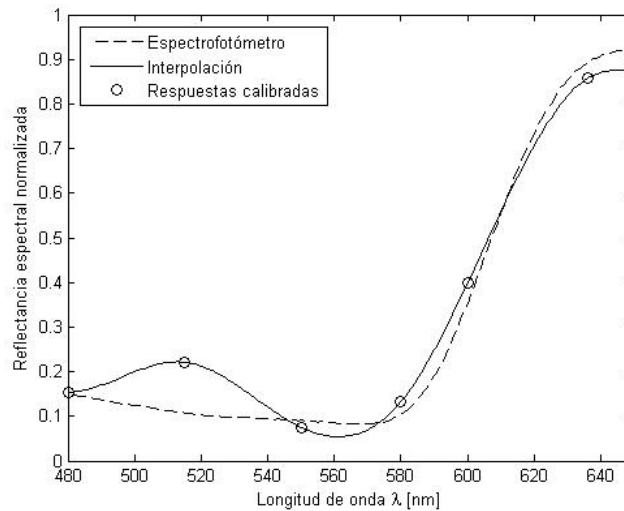


Fuente: Autor del trabajo de investigación

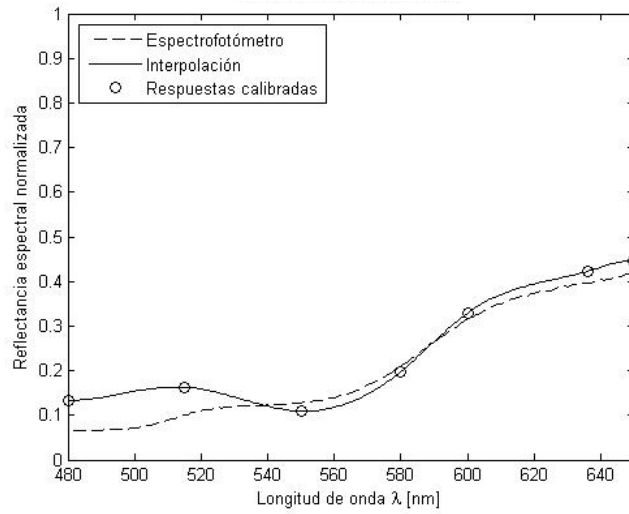
Como se observa en la figura 19, los valores para la calibración de los filtros $\lambda = 480$ [nm] y $\lambda = 515$ [nm] no presentan el comportamiento lineal esperado. Esto se debe a la coincidencia que el sensor *CCD* es poco sensible en ese rango de longitudes de onda, figura 6, e igualmente la radiancia espectral de fuente es relativamente menor en ese rango.

Para reconstruir numéricamente las curvas de reflectancia espectral, se interpolaron las respuestas de la cámara calibradas usando cercha cúbica natural. Algunos de los resultados obtenidos usando esta técnica se muestran en la figura 20.

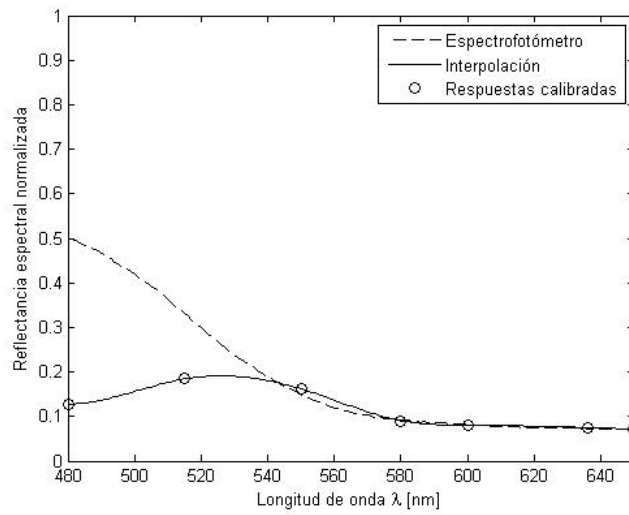
Figura 20: Curvas de reflectancia numéricamente reconstruidas usando interpolación con cercha cúbica (*cubic spline*).



a)



b)



c)

Fuente: Autor del trabajo de investigación

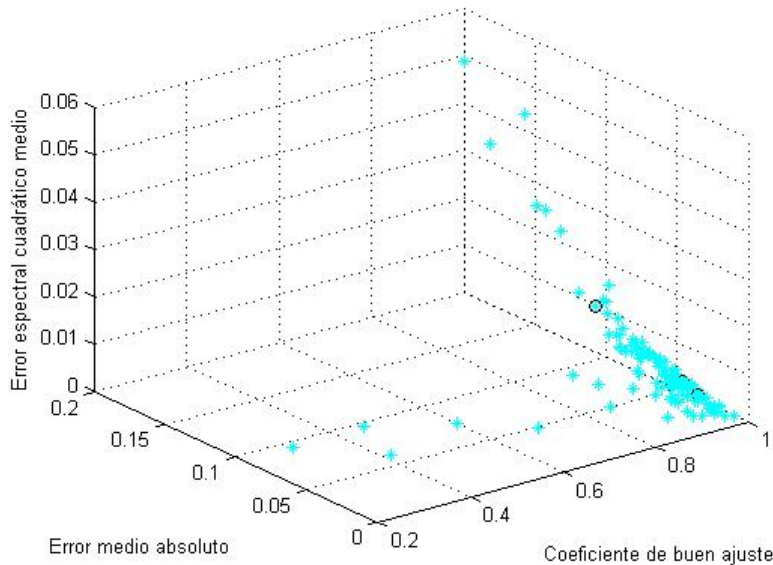
Al igual que con la técnica anterior, la evaluación del error al reconstruir las curvas de la figura 20 se encuentra en la tabla 3 y la tendencia de las métricas se exhiben en la figura 21

Tabla 3: Evaluación del error al reconstruir mediante la técnica de interpolación

Curva	RMS	AME	GFC
a	0.0027	0.0424	0.9936
b	0.0047	0.0603	0.9982
c	0.0006	0.0203	0.9988

Fuente: Autor del trabajo de investigación

Figura 21: Tendencia de las métricas de desempeño para la reconstrucción numérica mediante la técnica de interpolación



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Obsérvese que algunos datos se encuentran muy dispersos.

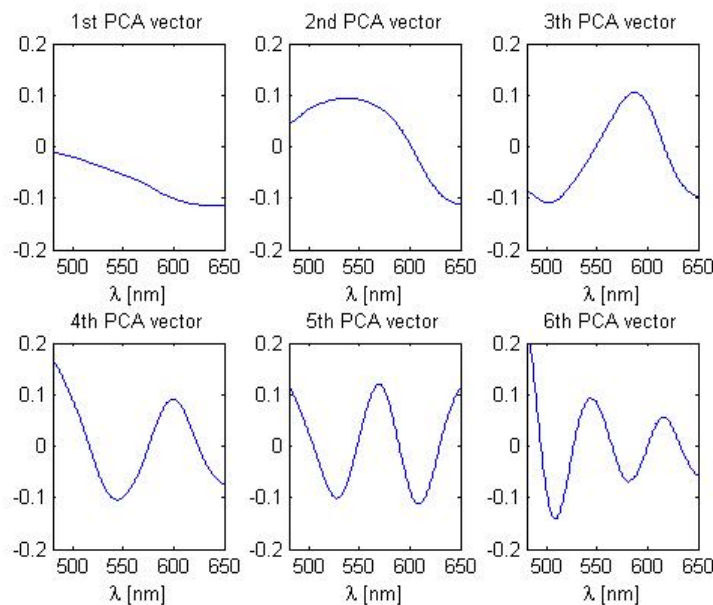
4.2.3 Modelamiento dimensional finito

Para reconstruir curvas de reflectancia espectral usando el modelamiento dimensional finito es recomendable calibrar las respuestas de la cámara mediante el ajuste en

mínimos cuadrados. Los resultados de este procedimiento preliminar se mostraron en las figuras 18 y 19.

Una vez realizada la calibración, el siguiente paso es encontrar los vectores base usando el análisis en componentes principales. Los primeros seis vectores principales, de siete utilizados, se muestran en la figura 22.

Figura 22: Primeros seis vectores base encontrados usando PCA



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Se aprecia en la figura 22 que a medida que decrecen los valores singulares, sus correspondientes vectores oscilan con frecuencias cada vez más altas.

Para reconstruir numéricamente las curvas de reflectancia espectral, se emplearon 7 vectores base. Esto guarda un buen compromiso entre el número de filtros utilizados y la eficiencia de reconstrucción. El nivel de eficiencia de la reconstrucción, en el sentido del índice de contribución acumulativa (*CCI*), para este cantidad de vectores base es de 99.95 %. Los valores de *CCI* cuando se usan desde 1 hasta 8 vectores base, a manera de comparación, se presentan en la tabal 4.

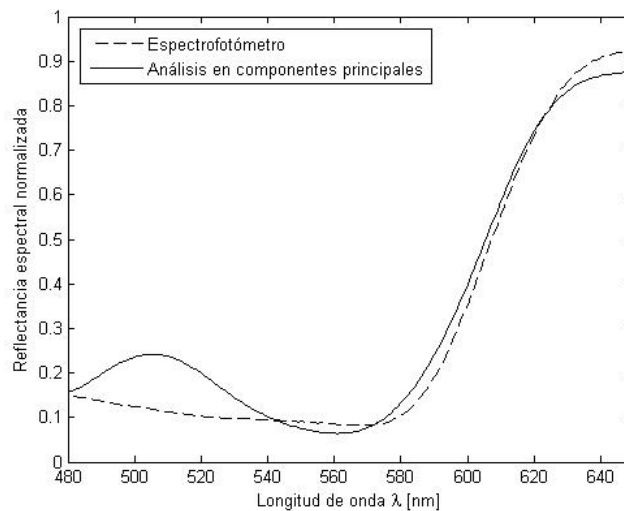
Tabla 4: Primeros 8 índices de contribución acumulativa según el número de vectores base empleados en PCA

No. de vectores base	<i>CCI</i>
1	72.02
2	92.97
3	97.47
4	99.09
5	99.61
6	99.84
7	99.95
8	99.98

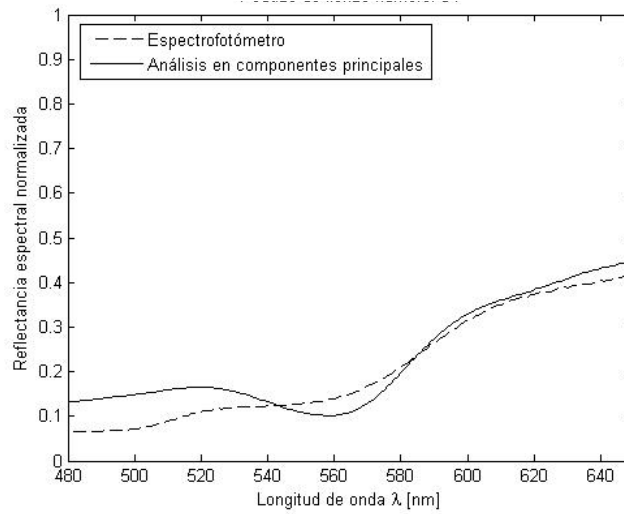
Fuente: Autor del trabajo de investigación

Los resultados correspondientes a reconstruir tres curvas de reflectancia espectral de pedazos de lienzo pintados al óleo a partir de los vectores base de la figura 22, se muestran en la figura 23, se observan el resultado de cuantificar el error para las curvas reconstruidas en la tabla 5 y la tendencia de desempeño de las métricas en la figura 24.

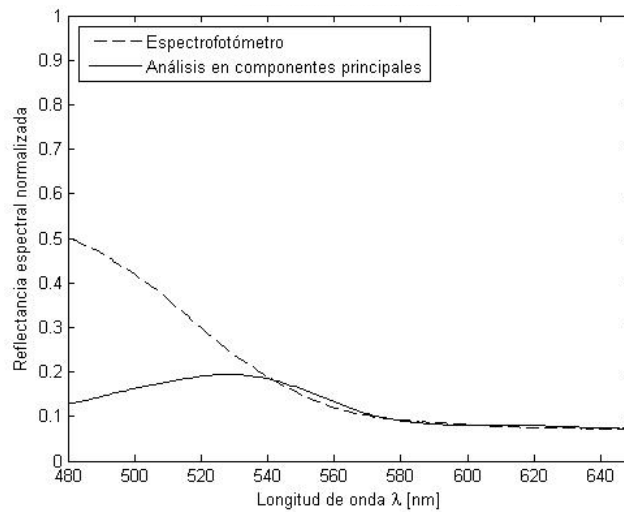
Figura 23: Curvas de reflectancia numéricamente reconstruidas usando.PCA



a)



b)



c)

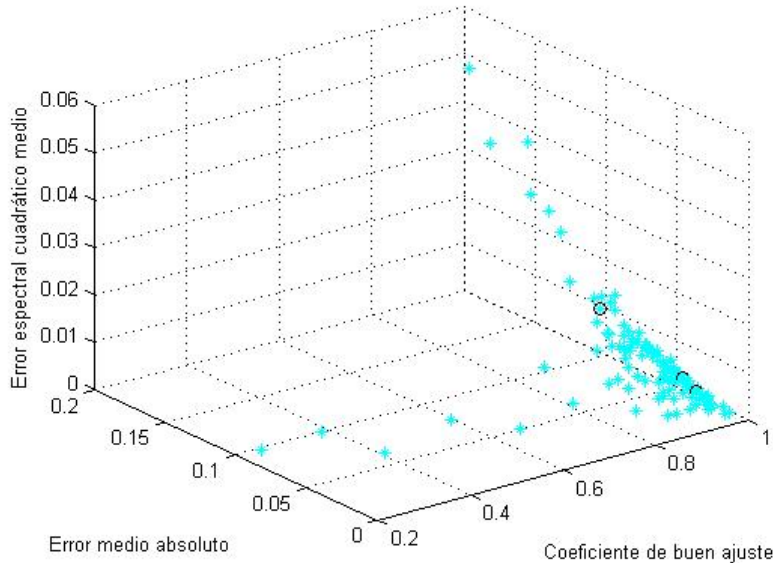
Fuente: Autor del trabajo de investigación

Tabla 5: Evaluación del error al reconstruir mediante PCA

Curva	RMS	AME	GFC
a	0.0030	0.0431	0.9928
b	0.0060	0.0721	0.9966
c	0.0006	0.0192	0.9987

Fuente: Autor del trabajo de investigación

Figura 24: Tendencia de las métricas de desempeño para la reconstrucción numérica mediante la técnica de PCA



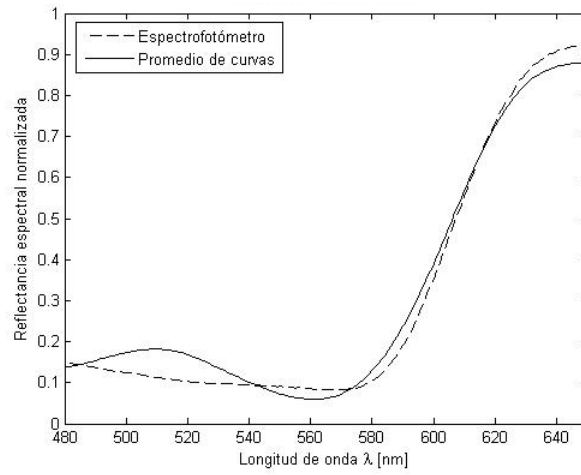
Fuente: Autor del trabajo de investigación

Cabe recordar que el modelamiento dimensional finito no es sólo útil para reconstruir curvas de reflectancia espectral sino que también permite almacenar éstas de manera comprimida y con mínima pérdida de información.

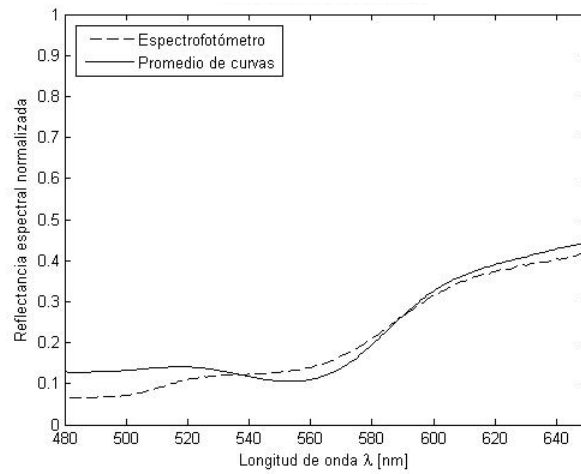
4.2.4 Combinación de técnicas de reconstrucción

Con el fin de mejorar la reconstrucción numérica de las curvas de reflectancia espectral, se procedió a promediar los resultados de cada una de las técnicas mencionadas anteriormente, obteniendo las curvas mostradas en la figura 25.

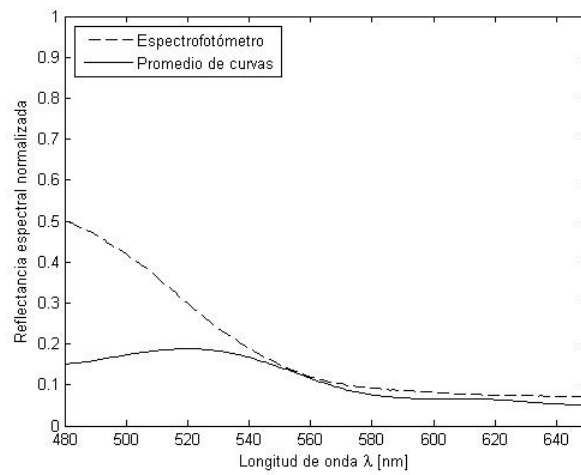
Figura 25: Curvas de reflectancia numéricamente reconstruidas usando el promedio de las curvas obtenidas por pseudo-inversa, PCA e interpolación.



a)



b)



c)

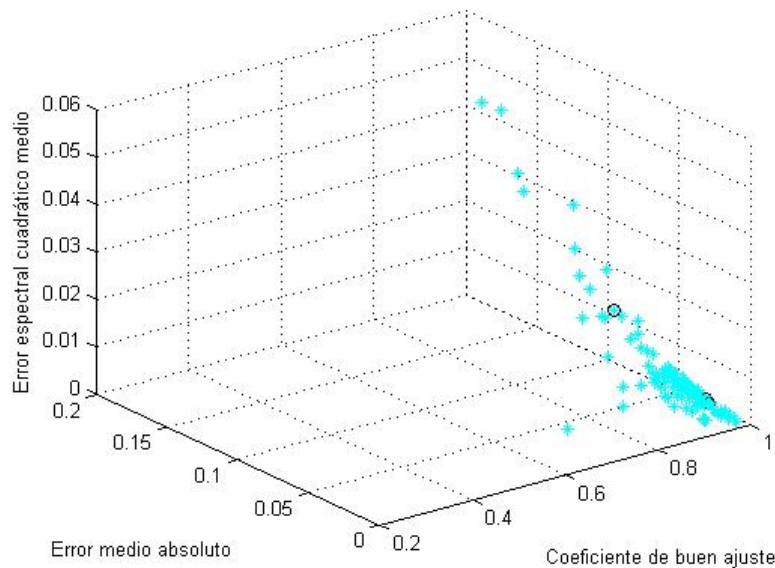
La evaluación de los resultados obtenidos combinando las tres técnicas desarrolladas se encuentra en la figura 26

Tabla 5: Evaluación del error al reconstruir mediante el promedio de las curvas obtenidas por pseudo-inversa, PCA e interpolación.

Curva	RMS	AME	GFC
a	0.0013	0.0308	0.9970
b	0.0020	0.0405	0.9991
c	0.0005	0.0180	0.9989

Fuente: Autor del trabajo de investigación

Figura 26: Curvas de reflectancia numéricamente reconstruidas usando el promedio de las curvas obtenidas por pseudo-inversa, PCA e interpolación.



Fuente: Autor del trabajo de investigación

Finalmente, para obtener una apreciación global del desempeño de las métricas, se exhibe en la tabla 6 los promedios de las métricas de desempeño aplicadas a todas las curvas de reflectancia espectral de la base de datos para cada unas de las cuatro técnicas empleadas.

Tabla 6: Promedios de las métricas de desempeño aplicadas a todas las curvas de reflectancia espectral de la base de datos

Técnica	<i>RMS</i>	<i>AME</i>	<i>GFC</i>
Promedio	0.0052	0.0489	0.9740
Seudo-inversa	0.0059	0.0554	0.9717
Interpolación	0.0066	0.0556	0.9468
PCA	0.0069	0.0573	0.9404

Fuente: Autor del trabajo de investigación

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo de investigación se implementaron cuatro técnicas para reconstruir numéricamente curvas de reflectancia espectral de muestras de lienzo pintado al óleo. Se probó, a partir de tres métricas de error, que la reconstrucción presenta un rendimiento aceptable de acuerdo al nivel de cuantización de 8 bits. Un mayor nivel de cuantización disminuye el error de reconstrucción.

El ruido espacial y temporal se alivia mediante el ajuste entre las respuestas de la cámara para cada canal versus la respuesta del espectrofotómetro, para un conjunto de entrenamiento.

Para la técnica correspondiente al cálculo de la pseudo inversa, se notó un mejor rendimiento cuando se calcula el coeficiente de buen ajuste que evalúa la forma de la curva reconstruida comparándola con la forma de la curva teórica obtenida con el espectrofotómetro. También se observa que la técnica de pseudo inversa presenta en general un mejor rendimiento cuando se calcula el error espectral cuadrático medio.

Calculando el error medio absoluto, no se encuentran diferencias importantes para la reconstrucción numérica encontrada usando cada una de las tres técnicas

Se encontró que cuando se combinan las técnicas de pseudo-inversa, *PCA* e interpolación para reconstruir las curvas de reflectancia espectral, el rendimiento calculado con las métricas usadas en este trabajo de investigación se ve mejorado. Esto permite recomendar, para trabajos futuros, utilizar otras maneras de combinar los resultados de estas técnicas.

Otra recomendación es el uso de un conjunto de filtros más rico en cantidad de filtros y cuyas longitudes de onda pico estén equiespaciados. El uso de filtros ajustables como lo son los filtros acusto-ópticos es altamente recomendable.

ANEXO 1

Código en Matlab® para: Pseudo-inversa

```
clear all
close all
clc

load('Matrices_entrenamiento.mat')

R=R/max(max(R));
C=C/max(max(C));

for k=1:7
    P(k)=find(L==l(k));
end
L=L(P(1)-10:P(7)+10);
R=R(:,P(1)-10:P(7)+10);

[M,N]=size(R);

% METODO INDIRECTO: SEUDO-INVERSA =====

Q=R*C*inv(C*C);
for p=1:M
    S(:,p)=Q*C(p,:);
    figure,plot(L,R(p,:),'k--',L,S(:,p),'k')
    axis([L(1) L(length(L)) 0 1])
    legend('Espectrofotometro','Seudo-inversa')
    title(['Pedazo de lienzo numero: ',num2str(p)])
    xlabel('Longitud de onda \lambda [nm]')
    ylabel('Reflectancia espectral normalizada')
end
S=S.'; % RESULTADO DE LA RECONSTRUCCION
% =====

% METRICAS DE ERROR =====

Erms=sum(abs(S-R).^2,2)/length(L);
figure,stem(Erms),axis([0 M 0 0.2])
xlabel('Pedazo de lienzo pintado al oleo')
ylabel('Error espectral cuadratico medio')

Eabe=sum(abs(S-R),2)/length(L);
```

```

figure,stem(Eabe),axis([0 M 0 0.2])
xlabel('Pedazo de lienzo pintado al oleo')
ylabel('Error medio absoluto')

gfc=abs(sum(S.*R,2))./(sqrt(abs(sum(S.^2,2))).*sqrt(abs(sum(R.^2,2))));
figure,stem(gfc),axis([0 M 0 1])
xlabel('Pedazo de lienzo pintado al oleo')
ylabel('Coeficiente de buen ajuste')

figure,plot3(Erms,Eabe,gfc,'*'),axis([0 0.2 0 0.2 0.6 1])
xlabel('Root mean square')
ylabel('Absolute mean error')
zlabel('Goodness of fit coefficient'),grid
% =====

```

ANEXO 2

Código en Matlab® para: Interpolación

```
clear all
close all
clc

load('Matrices_entrenamiento.mat')

R=R/max(max(R));
C=C/max(max(C));

for k=1:7
    P(k)=find(L==l(k));
end
L=L(P(1):P(7));
R=R(:,P(1):P(7));

[M,N]=size(R);

% CALIBRACION DE LAS RESPUESTAS DE LA CAMARA =====

for k=1:7
    P(k)=find(L==l(k));
end

for p=1:M
    a=R(p,:);
    Rr(p,:)=a(P);
end

for k=1:7
    x(:,k)=C(:,k);
    y(:,k)=Rr(:,k);
    pp(k,:)=polyfit(x(:,k),y(:,k),1);
    yy(:,k)=polyval(pp(k,:),x(:,k));
    figure,plot(x(:,k),yy(:,k),x(:,k),y(:,k),'*')
    axis([0 1 0 1])
    title(['Calibracion para el filtro: \lambda = ',num2str(l(k)),' [nm]'])
    xlabel('Respuestas de la camara')
    ylabel('Reflectancia espectral muestreada')
end
% =====
```

```

% INTERPOLACION =====
for p=1:M
    for k=1:7
        ye(k)=polyval(pp(k,:),C(p,k));
    end
    xx=L(1):1:L(length(L));
    re(p,:)=spline(l,[0 ye 0],xx);
    figure,plot(L,R(p,:),'k--',L,re(p,:),'k',l,ye,'ko')
    axis([L(1) L(length(L)) 0 1])
    legend('Espectrofotometro','Seudo-inveresa','Respuestas calibradas')
    title(['Pedazo de lienzo numero: ',num2str(p)])
    xlabel('Longitud de onda \lambda [nm]')
    ylabel('Reflectancia espectral normalizada')
end
re; % RESULTADO DE LA RECONSTRUCCION
%=====

```

No se incluyó el código para las métricas porque es el mismo que el utilizado en el código anterior

ANEXO 3

Código en Matlab® para: Análisis en componentes principales

```
clear all
close all
clc

load('Matrices_entrenamiento.mat')

R=R/max(max(R));
C=C/max(max(C));

for k=1:7
    P(k)=find(L==l(k));
end
L=L(P(1)-10:P(7)+10);
R=R(:,P(1)-10:P(7)+10);
[M,N]=size(R);

% CALIBRACION DE LAS RESPUESTAS DE LA CAMARA =====

for k=1:7
    P(k)=find(L==l(k));
end

for p=1:M
    a=R(p,:);
    Rr(p,:)=a(P);
end

for k=1:7
    x(:,k)=C(:,k);
    y(:,k)=Rr(:,k);
    pp(k,:)=polyfit(x(:,k),y(:,k),1);
    yy(:,k)=polyval(pp(k,:),x(:,k));
    figure,plot(x(:,k),yy(:,k),x(:,k),y(:,k),'*')
    axis([0 1 0 1])
    title(['Calibracion para el filtro: \lambda = ',num2str(l(k)),' [nm]'])
    xlabel('Respuestas de la camara')
    ylabel('Reflectancia espectral muestreada')
end
```

```

% =====
% MODELAMIENTO DIMENSIONAL FINITO (PCA) =====

[coef,score,latent]=princomp(R);
coef=coef(:,1:7);

% Indice de contribución acumulativa ===

% n=length(latent);
% SL=sum(latent);
% s(1)=latent(1);
% for i=2:n
%   s(i)=latent(i)+s(i-1);
%   vi(i-1)=(s(i-1)/SL)*100;
% end
%=====

for p=1:M
    for k=1:7
        coefr(k,:)=coef(P(k,:));
    end
    C=pinv(coefr)*yy(p,:).';
    C=C.';
    Cc=repmat(C,N,1);
    QQ=coef.*Cc;
    Q(:,p)=sum(QQ,2);
    figure,plot(L,R(p,:).','k--',L,Q(:,p),'k'),
    axis([L(1) L(length(L)) 0 1])
    legend('Espectrofotometro','Seudo-inversa')
    title(['Pedazo de lienzo numero: ',num2str(p)])
    xlabel('Longitud de onda \lambda [nm]')
    ylabel('Reflectancia espectral normalizada')
end
Q=Q'; % RESULTADO DE LA RECONSTRUCCION
% =====

```

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] J. R. Scott, "*Remote sensing of the earth: a synoptic view*" Physics Today vol 42, No. 9, pp 72-79, Septiembre 1989.
- [2] H. Haneishi, T. Hasegawa, A. Hosoi, Y. Yokohama, N. Tsumura y Y. Miyake, "*System design for accurately estimating the spectral reflectance of art paintings*" Appl. Opt., vol 39, No. 35, pp. 6621-6632, Diciembre 2000.
- [3] P. D. Burns y R. S. Berns, "*Quantization in multispectral color image acquisition*" in Proc. IS&T/SID Seventh color imaging conference: Color science, systems and applications, IS&T , 1999, pp 32-35.
- [4] F. H. Imai, R.S. Berns y D.Y. Tzeng, "*A comparative análisis of spectral reflectance estimated in various spaces using a trichromatic camera system*" Journal of Imaging Science and Technology, vol 44, No. 4, pp 280-287, Julio 2000.
- [5] A. Ribés, "*Multispectral analysis and spectral reflectance reconstruction of art paintings*" Ph.D. dissertation, École Nationale Supérieure des Télécommunications", Paris, 2003.
- [6] J. Conde, H. Haneishi, M. Yamaguchi, N. Ohyama y J. Baez. "*Spectral reflectance estimation of ancient mexican codices, multispectral image approach*" Rev. Mexicana de Física, vol. 50, No. 5, pp 484-489, Octubre 2004.
- [7] P. Carcagni , A. Della Patria, R. Fontana, M. Greco, M. Mastroianni, M. Materazzi, E. Pampaloni and L. Pezzati, "*Multispectral imaging of paintings by optical scanning*" Optics and Laser in Engineering, vol 45, pp. 360-367, Junio 2006.
- [8] A. Ribés y F. Schmitt, "*A fully automatic method for the reconstruction of spectral reflectance curves by using mixture density networks*", Pattern Recognition Letter, vol 24, pp. 1691-1701, 2003.

- [9] S. Tominaga, "In living color" *spie's oe magazine*, pp 24-26, Enero 2003.
- [10] M. Vilaseca, J. Pujol y M. Arjona "Spectral reflectance reconstruction in the near-infrared region by use of conventional charge-coupled-device camera measurements" *Appl. Opt.*, vol 42, No. 10, pp 1789-1797, Abril 2003.
- [11] P. Daukantas, "Optics in forensics: Separating science from fiction" *Optics and Photonics news* vol. 18, No. 4, pp 20 - 27, Abril 2007.
- [12] J.L. Nieves, J.Hernández, E. Valero y J. Romero, "Spectral-reflectance linear models for optical color-pattern recognition" *Appl. Opt.*, vol 43, No. 9, pp 1880-1891, Marzo 2004.
- [13] H. J. Trussell, E. Saber y M. Vhrel "Color Image Processing" *IEEE Signal Processing Magazine*, pp 14-22, Enero 2005.
- [14] D. H. Foster, K. Amano, S. Nascimento y M. J. Foster, "The Frequency of Metamerism in Natural Scenes", *Optics and Photonics news* vol. 18, No. 12, pp. 47, Diciembre 2007.
- [15] L. M. Savage, "Breaking down corn improves hyperspectral image analysis", *Photonics spectra*, Junio 2008, pp 103.
- [16] H. L. Shen, J. H. Xin y S. J. Shao, "Improved reflectance reconstruction for multispectral imaging by combining differents techniques," *Optics Express* [online], 15(7), pp 5531-5536. Disponible en: <http://www.opticsexpress.org> a Abril de 2007.
- [17] J. Y. Hardeberg, "Acquisition and reproduction of colour images colorimetric and multispectral approaches" Ph.D. dissertation, École Nationale Supérieure des Télécommunications", Paris, 1999.
- [18] L. G. Valdivieso y J. E. Guerrero, "Numerical reconstruction of spectral reflectance curves of oil painting on canvas", XII Simposio de Tratamiento de Señales, Imágenes y Visión Artificial, Septiembre, 2007

- [19] F. Trager, et al, "*Springer Handbook of Laser and Optics*", Springer Science+Business Media, New York, pp 565 – 581, 2007.
- [20] E. Villamarín, "Cómo imprimir un lienzo", disponible en <http://rafaquintero.webcindario.com/> a Julio de 2007
- [21] Cohu, Inc./Electronics division "*RS-170 Monochrome Frame Transfer CCD Camera 4810 Series*", disponible en: <http://www.cohu-cameras.com/pdf/4800.pdf> a Julio de 2008
- [22] G. Sharma, "*Digital Color Imaging Handbook*", CRC press, New York, capítulo 1, 2003
- [23] J. H. Mathews y K. D. Fink, "Métodos numéricos con Matlab", 3 ed.. Prentice Hall, Madrid 2000
- [24] S. Quan, "Evaluation and optimal design of spectral sensitivities for digital color imaging," Ph.D dissertation, Chester F. Carlson Center for Imaging Science on the College of Science Rochester Institute of Technology, New York, 2002.
- [25] J. Shlens, "A Tutorial on Principal Component Analysis", disponible en: <http://www.snl.salk.edu/~shlens/pub/notes/pca.pdf> a Julio de 2008
- [26] J. S. Hourigan y L. V. McIndoo, "*The Singular Value Decomposition*", disponible en: a Enero de 2007
- [27] Y. M. Kadah, "*Spatio-temporal analysis of color Doppler information using independent component analysis*", Proceedings of SPIE, vol. 4687 pp. 227 – 234, 2002.
- [28] W. K. Pratt y C. E. Mancill, "*Spectral estimation techniques for the spectral calibration of a color image scanner*", Appl. Opt. vol. 15, No. 1, pp. 73 – 75, Enero 1976.
- [29] Y. Murakami, T. Obi, M. Yamaguchi y N. Ohshima, "*Nonlinear estimation of spectral reflectance based on Gaussian mixture distribution of color image reproduction*", Appl. Opt. Vol. 41, No. 23, pp. 4840 – 4847, Agosto 2002

[30] Y. Murakami, K. Fukura, M. Yamaguchi y N. Ohya, “*Color reproduction from low-SNR multispectral images using spatio-spectral Wiener estimation*”, Optics express Vol. 16, No. 6, pp. 4106 – 4120, Marzo 2008

[31] Shimadzu Corporation, “*Instruction manual ISR-2200 Integrating sphere attachment for UV-2200 series*”