Itinerario para la enseñanza del Álgebra Temprana en tercer grado de primaria

Mariana Bautista Prada

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciada en Educación Básica Primaria

Director

Alexander Betancur Sánchez

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mi abuelito quien desde el cielo me iluminaba día a día y me daba fuerzas para continuar.

A mi mamá y hermana por su amor incondicional, por apoyarme en cada paso que daba y por creer en mí todo el tiempo.

A mi Team Nacho por nunca dejarme sola y por apoyarme en todo momento.

A mi mejor amiga, Dayanna, por escuchar mis angustias, alegrías y locuras vividas en esta etapa y por jamás dejar que cayera.

Agradecimientos

A Dios por llenarme de paz, sabiduría y por permitirme llegar hasta este punto de la carrera con la mayor satisfacción del mundo.

A mi mamá y hermana por brindarme su apoyo incondicional para poder cumplir todos mis objetivos personales y académicos, por siempre creer en mí, en mis talentos y en mis capacidades.

Al profesor Alexander Betancur Sánchez por su dedicación y paciencia, sin sus palabras, ayuda y correcciones precisas no hubiese podido lograr llegar hasta aquí. Gracias por ser tan excelente profesor, guía, y por estar siempre motivándome en todo momento, me llevo cada uno de esos pequeños consejos que me dio para mi futuro como profesional.

A la profesora Jenny Patricia Acevedo Rincón por haberme guiado en la elección, desarrollo y estructuración de primer paso para la construcción de esta tesis y por haberme permitido ser parte de su semillero STEAM+H. No cabe duda de que cada uno de los espacios brindados, experiencias construidas en este trayecto y sus orientaciones me permitieron mejorar y crecer tanto académicamente como personalmente.

A la Profesora Adriana Dueñas por abrirme las puestas de su salón (3°1), por permitirme enseñarle a sus estudiantes un poco lo que es el álgebra temprana y por colaborarme todo el tiempo durante las tres semanas que estuve acompañándolos.

A mis amigas y compañeras fieles, María Victoria Angarita, Tatiana Jaimes, y María Camila Rodríguez, sin ustedes este paso por la universidad no hubiera sido tan grato, alegre y maravilloso. Sé que este capítulo se cierra hoy, pero espero podamos comenzar uno nuevo en un futuro. Gracias por estar para mí, por apoyarme, y resguardarme por estos 5 años.

A todos los mencionados, mis más sinceros agradecimientos.

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de figuras

Lista de Apéndices

Glosario

Álgebra temprana (*Early Algebra*): responde a la iniciativa de variación curricular, donde se visualiza la posibilidad y necesidad de incorporar el álgebra desde primaria con la finalidad de minimizar las dificultades y promover el pensamiento algebraico favoreciendo el trabajo con lo indeterminado y la variación sin recurrir al uso simbólico (Vergel y Rojas, 2018).

Pensamiento Algebraico temprano: puede ser considerado como un conjunto de procedimientos que permiten accionar y reflexionar sobre los procesos matemáticos (Vergel, 2015ª).

Enfoque de Itinerario de Enseñanza (EIEM): refiera a la promoción de una enseñanza secuenciada e intencionada de tareas inmersas en determinadas situaciones y las cuales se comprenden establecidas a partir de tres niveles de cercanía al estudiante y aumento de complejidad (Alsina, 2020).

Resumen

Título: Itinerario para la enseñanza del Álgebra Temprana en tercer grado de primaria*

Autor: Mariana Bautista Prada**

Palabras Clave: Pensamiento algebraico, Álgebra temprana, Educación Primaria, Enfoque de Itinerario de Enseñanza

Descripción: La actual necesidad de mejorar la praxis educativa en la enseñanza del álgebra temprana en primaria ha llevado al desarrollo de una corriente curricular llamada álgebra temprana (Early Algebra) enfocada en acercar a los estudiantes desde niveles inferiores al reconocimiento de patrones, cantidades indeterminadas, es decir, las "semillas" del pensamiento algebraico. Lo anterior lleva al desarrollo de este trabajo de investigación cuyo objetivo fue diseñar un itinerario que promoviera la enseñanza del álgebra temprana en un curso de tercero de primaria a partir de la revisión de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas de los países de Colombia, Chile, México, España y Estado Unidos. En este sentido, el estudio se enmarcó en una investigación cualitativa de tipo proyectiva en la que se recurrió a la revisión documental y prueba piloto como instrumento de recolección de información para el mejoramiento y perfeccionamiento de esta. Para eso, se tomó como referente a Ángel Alsina desde su propuesta de Enfoque de Itinerario de Enseñanza (EIEM) para la construcción y el diseño del propio itinerario. Se espera que futuras investigaciones puedan continuar la exploración, uso y adaptación del itinerario a diferentes niveles de escolaridad y evaluar su impacto en la comprensión y rendimiento de los estudiantes en álgebra.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Licenciatura en Educación Básica Primaria. Director: Alexander Betancur Sánchez. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: Itinerary for teaching Early Algebra in third grade of elementary school*

Author(s): Mariana Bautista Prada**

Key Words: *Algebraic thinking, Early Algebra, Primary Education, Teaching Itinerary Approach*

Description: The current need to improve educational praxis in the teaching of early algebra in elementary school has led to the development of a curricular current called Early Algebra, focused on bringing students from lower levels to the recognition of patterns, indeterminate quantities, that is, the "seeds" of algebraic thinking. The above leads to the development of this research work whose objective was to design an itinerary that would promote the teaching of early algebra in a third-grade class based on the review of the curricular guidelines for the area of mathematics in the countries of Colombia, Chile, Mexico, Spain and the United States. In this sense, the study was framed in qualitative research of projective type in which the documentary review and pilot test were used as an instrument for the collection of information for the improvement and refinement of this one. For this purpose, Angel Alsina's proposal of the Teaching Itinerary Approach (EIEM) was taken as a reference for the construction and design of the itinerary itself. It is hoped that future research can continue the exploration, use and adaptation of the itinerary to different levels of schooling and evaluate its impact on students' understanding and performance in algebra.

* Degree Work

** Faculty of Human Sciences. School of Education. Bachelor's Degree in Primary Basic Education. Director: Alexander Betancur Sánchez. Master's Degree in Mathematics Education.

Introducción

Algunas preguntas a manera de reflexión y que vinculan el contenido del presente estudio son: ¿Por qué es necesario promover desde tempranas edades que los estudiantes empiecen a involucrarse con tareas de reconocimiento de patrones, variación e indeterminancia?, ¿Cómo se promueve en Colombia el pensamiento algebraico en primaria?, ¿Cómo favorecer el pensamiento algebraico temprano en el contexto local a partir la revisión de orientaciones curriculares internacionales?

El presente trabajo de investigación estuvo inmerso en el marco de las preguntas anteriores. Trató de considerar cuestiones diarias que pasan por la mente de algunos profesores del área de matemáticas o básica primaria. Impulsar la enseñanza del álgebra temprana es una iniciativa que ha crecido en los últimos años en la educación matemática. La comunidad tiene un fuerte interés para que tales iniciativas tengan lugar en instituciones de educación básica en todo el mundo. De esta manera, el objetivo del presente estudio fue diseñar un itinerario para la enseñanza del álgebra temprana en estudiantes de tercer de primaria a partir de la revisión de la literatura y el contraste de los currículos de matemáticas de los países de Colombia, Chile, México, España y Estado Unidos. Para ello, se empezó con la búsqueda y análisis de diversos antecedentes nacionales e internacionales que permitan el acercamiento a la problemática de fomentar el trabajo del álgebra desde tempranas edades. De esa búsqueda se toman referentes de investigación como Butto y Rojano (2010); Lins y Kaput (2004); Vergel (2016); Vergel y Rojas (2018); y Kieran (2004); Alsina (2016; 2020), Mejías y Alsina (2020). También, se abordó el enfoque de itinerario de enseñanza de las matemáticas (EIEM) propuesto como un referente para el presente estudio y el diseño del itinerario.

En este sentido, la presente propuesta de investigación se organizó a partir de cuatro capítulos: En el primer capítulo se desarrolló la descripción del problema dónde se determinó y precisó la necesidad de desarrollar el pensamiento desde básica primaria, la justificación de la investigación donde se argumentó la necesidad existente de proponer situaciones y tareas a través del diseño un itinerario para promover la enseñanza del álgebra temprana en primaria y se plantearon los objetivos de la propuesta de investigación. En el segundo capítulo, se abordó el marco teórico el cual incluye los antecedentes, se realizó una descripción del pensamiento algebraico desde implicaciones y características, el Enfoque de Itinerario de Enseñanza de la Matemática y recomendaciones para el diseño del itinerario de enseñanza. En el tercer capítulo, se presentó el diseño metodológico, donde se definió el enfoque y tipo de investigación, las características de los participantes y el proceso metodológico orientado a través de cuatro fases propuestas por Rodríguez, Gil y García (1996). El cuarto capítulo abordó el análisis e interpretación de resultados, el quinto capítulo abarcó las conclusiones y, por último, el sexto capítulo se dejaron ciertas recomendaciones para futuras investigaciones.

Primer Capítulo

1. Planteamiento del problema

La educación es un proceso mediante el cual el individuo desarrolla diversas capacidades personales, académicas y sociales. En otras palabras, esta contribuye al progreso personal fortaleciendo habilidades esenciales para enfrentar situaciones demandadas por la sociedad. Para lograrlo, se establecen lineamientos curriculares que sirven como guía para definir objetivos precisos, contenidos, competencias, metodologías y criterios de evaluación en cada nivel educativo y área de conocimiento (MEN, 1998).

La implementación de estos lineamientos busca lograr beneficios como proporcionar una educación de calidad, garantizar la pertinencia y relevancia de los contenidos, fomentar el pensamiento crítico y la creatividad, promover la equidad y preparar a los estudiantes para los desafíos y oportunidades del mundo (MEN, 2006). Además, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) subraya que estos lineamientos deben orientarse desde el principio de igualdad, considerando las necesidades y conocimientos de los estudiantes, reconociéndolos como agentes activos en su propio aprendizaje, y promover el uso de tecnología en el aula (NCTM por sus siglas en inglés, 2000, p. 11). Sin embargo, a pesar de los beneficios, existen limitaciones en su implementación, entre estas está la dificultad de comprensión por parte de los profesores y su rigidez en algunos casos, lo que limita la adaptación a contextos específicos (Gómez, 2019). En concordancia, Gómez (2019) en una conferencia frente a la innovación, la calidad y la pertinencia para la educación en Colombia, refiere que hacen falta orientaciones propias hacia los profesores en relación con la interpretación de los niveles de enseñanza y situaciones pertinentes para el aula donde se favorezca el desarrollo de procesos y competencias matemáticas (Gómez, 2019).

Es importante destacar que cada país tiene sus propios lineamientos curriculares, diseñados para abordar los desafíos y necesidades particulares en educación. Así, al comparar los enfoques de México, Estados Unidos, España, Chile y Colombia, se observa que, aunque comparten intereses similares, sus enfoques de desarrollo son diferentes. Por ejemplo, Mejías y Alsina (2020) contrastan los currículos de Estados Unidos, España y Chile para analizar la relevancia del álgebra en la enseñanza de las matemáticas. Estos autores subrayan la preocupación persistente por responder a la demanda educativa en matemáticas, particularmente en el ámbito del álgebra, donde colocan en manifiesto diversas dificultades y resultados respecto a las pruebas estandarizadas PISA que reflejan que en algunos países los estudiantes no alcanzan las competencias mínimas propuestas para la educación (Mejías y Alsina, 2020).

En el contexto colombiano, la enseñanza de las matemáticas en primaria, según los lineamientos curriculares, se centra en el desarrollo de habilidades numéricas básicas, de lado el pensamiento algebraico (Linares, 2013). Aunque el pensamiento algebraico se considera una habilidad importante para el aprendizaje de las matemáticas, este no se suele enseñar en primaria a gran escala; es así como Linares (2013) menciona varias razones por las cuales el álgebra no se enseña en primaria en Colombia y por qué fracasan las matemáticas. Algunas de las principales causas son: Falta de formación del profesorado, es decir, los profesores de primaria no están lo suficientemente capacitados en la enseñanza del álgebra, por lo tanto, pueden sentirse inseguros a la hora de enseñar conceptos más complejos y abstractos, también hace alusión a que, desde hace varias décadas, la enseñanza ha tenido un enfoque invariante en i). la memorización y ii). la repetición de información. En este enfoque, el énfasis puede estar en el aprendizaje de fórmulas y procedimientos, en lugar de comprender los conceptos detrás de las operaciones matemáticas, por lo que no se procura usar recursos didácticos o materiales manipulativos diferentes al libro de texto (Linares, 2013).

Estas dificultades se reflejan en los resultados de las pruebas internacionales PISA, donde Colombia muestra un desempeño deficiente en matemáticas, especialmente en el ámbito del álgebra (OCDE, 2018). En contraste, España presenta un rendimiento superior, con un alto porcentaje de estudiantes que alcanzan niveles avanzados en matemáticas (OCDE, 2018). Puesto que Colombia es un país que apenas alcanza el nivel mínimamente establecido por la OCDE respecto al área de matemáticas, mientras que en España un 75% alcanza el nivel 2 o superior, en Colombia apenas el 35% alcanza el nivel mínimo, dejando claro que actualmente el país tiene múltiples desafíos y aspectos por mejorar en relación con esa enseñanza de las matemáticas, en este caso específico frente al pensamiento algebraico. Pero ¿Cómo se puede aportar a la solución de dicha problemática?, si bien, las soluciones pueden venir de diferentes direcciones. Pero, para abordar esta problemática, la presente investigación propuso el diseño de tareas que fomentaran una enseñanza temprana del álgebra en primaria, considerando diversos contextos y factores que contribuyan al desarrollo progresivo de este Pensamiento Algebraico.

En resumen, esta investigación destacó la necesidad de mejorar la enseñanza del pensamiento algebraico desde la educación primaria, basándose en la revisión de los documentos curriculares de Colombia en comparación con otros países. En este sentido, la pregunta de investigación que guio este estudio fue: ¿Qué situaciones y tareas debe incluir un itinerario de enseñanza para promover el pensamiento algebraico temprano en tercer grado de primaria en el contexto educativo colombiano?

1.2 Justificación

La enseñanza del álgebra desde temprana edad reviste una importancia fundamental en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Al introducir conceptos algebraicos desde los primeros años de educación, se fomenta la capacidad de razonamiento lógico y la resolución de problemas de manera abstracta, habilidades cruciales en la formación integral de cualquier individuo. En consecuencia, existe un creciente interés por parte de muchos investigadores y educadores en el marco de la educación matemática por iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas, con el fin de lograr mejores niveles de comprensión de los que se han logrado hasta el momento en los diferentes niveles educativos. Según lo anterior, la presente investigación hizo hincapié al reconocimiento del Álgebra temprana (*Early Algebra*) la cual surge desde la perspectiva de lograr un cambio curricular donde se promueva el álgebra desde el currículo de matemáticas y generar en los estudiantes una visión diferente que les permita comprender, tratar la simbología y las operaciones matemáticas desde un nuevo modo de pensamiento aritmético (Butto y Rojano, 2010 como se citó en Mojica y Martínez, 2017 y Kaput, 2000).

De esta manera, el estudio adquirió relevancia al abordar las deficiencias y limitaciones actuales en el currículo colombiano en lo que respecta al desarrollo del pensamiento algebraico en etapas tempranas. Además, este estudio fomentó la creación de un itinerario educativo basado en situaciones y tareas, inspirado en análisis de planes de estudio de países como México, España, Estados Unidos y Chile, con el propósito de identificar enfoques y actividades que potencien dicho pensamiento. En cuanto al diseño de estas situaciones y tareas, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés, 2000) sostiene que deben desarrollar en los estudiantes habilidades para analizar contextos matemáticos mediante la manipulación de símbolos algebraicos y la representación de relaciones cuantitativas.

En relación con lo anterior, diversas investigaciones han resaltado la importancia de promover enfoques pedagógicos que se centren en la resolución de problemas, el razonamiento algebraico y la interconexión de conceptos matemáticos; a partir de estos enfoques se ha resaltado que estrategias como el aprendizaje basado en proyectos, la utilización de material manipulativo y la integración de la tecnología han demostrado ser altamente efectivas (Alsina, 2020). Para dar ejemplo a lo anterior, en Finlandia, se propone un enfoque educativo que pone énfasis en el aprendizaje activo y la participación dinámica de los estudiantes ha resultado en un sobresaliente rendimiento en matemáticas. Por su parte, Singapur es reconocido por su enfoque en la resolución de problemas y el desarrollo gradual de habilidades matemáticas, a partir de contextos y situaciones de aprendizaje específicas que potencian la interacción de los estudiantes con los contenidos algebraicos. Asimismo, en Estados Unidos, programas como el "*Algebra Proyect*" han alcanzado el éxito al centrarse en la enseñanza del álgebra en contextos prácticos y pertinentes para los estudiantes.

De esta manera, se invita a los profesores a reconocer que son ellos quienes tienen el rol crucial de construir entornos educativos que estimulen la exploración y comprensión de estos conceptos, puesto que proporcionan los estudiantes contextos en el que puedan aplicar y visualizar las abstracciones matemáticas de forma concreta. Por lo que es esencial diseñar actividades que progresivamente desafíen a los estudiantes, permitiéndoles internalizar los fundamentos del álgebra de manera gradual y significativa. Esto garantiza que, al llegar a finalizar su primaria, los estudiantes cuenten con una base sólida para abordar con confianza y destreza los conceptos más avanzados, preparándolos para un éxito continuo en su educación matemática y en su desarrollo intelectual en general.

En ese marco de ideas, la presente propuesta abarcó la construcción de un itinerario de situaciones y tareas encaminadas a partir de la propuesta de Ángel Alsina (2020). El itinerario se desarrolló por niveles de enseñanza en contextos informales, intermedios y formales, permitiendo así una progresión gradual del aprendizaje. Además, se dio especial énfasis al reconocimiento de los distintos tipos de pensamiento algebraico, desde el factual hasta el simbólico, con el objetivo de potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas sólidas y la comprensión profunda de los conceptos algebraicos en los estudiantes.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar un itinerario para la enseñanza del álgebra temprana de estudiantes de tercer grado de primaria a partir de la revisión de la literatura y el contraste de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas de los países de Colombia, Chile, México, España y Estado Unidos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Seleccionar a partir del contraste a los lineamientos curriculares del área de matemáticas de países de Chile, México, España, Colombia y Estado Unidos aquellos aspectos que sean de apoyo para la estructuración del itinerario entorno a la enseñanza del álgebra temprana en Educación Básica Primaria.
- Implementar una prueba piloto del itinerario para la enseñanza del álgebra temprana en un curso de tercer grado de primaria de la Institución Educativa de Santander del municipio de Bucaramanga.

- Rediseñar las situaciones y tareas a partir de la prueba piloto aplicada en un curso de tercer grado de primaria de la Institución Educativa de Santander del municipio de Bucaramanga.

Segundo Capítulo

2. Marco teórico

La presentación del marco teórico delimita en primera instancia lo referente al pensamiento algebraico y sus características, luego se ocupa de presentar brevemente las comparaciones curriculares que han surgido en diferentes países por fomentar y promover el desarrollo dicho pensamiento y se finaliza, hablando de las iniciativas y abordaje del Enfoque de Itinerario de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) que propone Ángel Alsina.

2.1 Pensamiento algebraico temprano

Investigaciones como las de Butto y Rojano (2010); Lins y Kaput (2004); Vergel (2016); Vergel y Rojas (2018); y Kieran (2004) han demostrado que un eje importante es el desarrollo del pensamiento algebraico, porque es necesario que los estudiantes sean capaces de distinguir los símbolos, y las operaciones de forma diferente a la que común y tradicionalmente se enseña en primaria, y así, bajo ese nuevo conocimiento, sean capaces de desarrollar nociones básicas del álgebra. En este sentido, en el año 2004 surge un amplio interés por estudiar el pensamiento algebraico temprano, desde el cual se aclara que no corresponde a impartir un curso de álgebra avanzada a los estudiantes de este nivel educativo, sino que se busca en los estudiantes "el fomento y trabajo con generalidades y cantidades indeterminadas" (Lins, R & Kaput, J. 2004, p.58). Así mismo, se han fomentado propuestas que ayuden a disminuir las dificultades presentes a nivel secundaria, las cuales hacen alusión al pre-álgebra y álgebra temprana. La primera hace referencia a la transformación de la aritmética al álgebra teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes debidos el poco abordaje de lo numérico y lo aritmético en primaria, es decir, se pretende introducir como un nuevo curso o asignatura. Mientras que el Álgebra temprana (*Early Algebra*) responde a la iniciativa de variación curricular, donde se visualiza la posibilidad y necesidad de incorporar el álgebra desde primaria, con la finalidad de minimizar las dificultades y promover el pensamiento desde el favorecimiento del trabajo con lo indeterminado y la variación sin recurrir al uso simbólico (Vergel y Rojas, 2018).

2.1.1 Características del Pensamiento Algebraico

El pensamiento algebraico se considera un elemento que permite reflexionar sobre las matemáticas. De esta manera, Vergel (2015a) menciona que este puede ser considerado como un conjunto de procedimientos que permiten accionar y reflexionar sobre los procesos matemáticos. Ahora bien, Radford (como se citó en Vergel, 2015a) afirma que este está constituido por tres componentes: i) El sentido de indeterminancia, referido al reconocimiento de cantidades indeterminadas a lo que usualmente se denomina como enigma, variables y datos; es decir, lo opuesto a la determinancia numérica; ii) la analiticidad, reconocida como aquella forma de actuar y accionar sobre las cantidades indeterminadas, es decir, reconocer la forma en la que operan los objetos ya mencionados; y iii) la designación simbólica, la cual se relaciona con la forma de nombrar los objetos, es decir, la expresión semiótica de los objetos indeterminados. Vergel (2015) refiere que dichos tres componentes están estrechamente relacionados y permiten considera tres tipos de pensamiento algebraico o capas los cuales son: Factual, Contextual y Simbólico. A continuación, se refiere una breve descripción de cada uno.

1) *Pensamiento algebraico Factual:* los movimientos, gestos, ritmo, percepción y palabras son el mecanismo para referir la indeterminancia, sin embargo, esta se encuentra implícita, dado que las respuestas y acciones de los estudiantes son concretas (Vergel, 2015).

2) *Pensamiento algebraico Contextual:* En este, las palabras y los gestos son sustituidos por las frases claves, es decir, se convierten en objeto del discurso como forma de pensamiento, y, asimismo, comienza el uso de la formulación algebraica para la descripción de generalidades (Vergel, 2015).

3) *Pensamiento algebraico Simbólico:* En este, las frases claves del pensamiento anterior empiezan a ser representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, es decir, las acciones y respuestas de los estudiantes llegan a ser más abstractas (Vergel, 2015).

En este sentido, las tres tipos o capas de pensamiento algebraico describen la evolución que puede producirse en la mente del estudiante al avanzar en su trabajo y aprendizaje del álgebra.

Después de considerar algunos elementos básicos sobre el pensamiento algebraico. En lo que sigue se delimitaron algunas iniciativas del análisis curricular para identificar que tanto se promueve el álgebra temprana en otros países y de qué manera pueden aportar estos al currículo colombiano y se finaliza con aspectos del Enfoque de Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM).

2.1.2 Análisis comparativos a currículos de matemáticas

Ahora bien, el reconocimiento a la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico desde la propuesta de Álgebra temprana (*Early Algebra*) ha traído consigo la necesidad por parte de muchos investigadores de analizar y comparar la incorporación de este dentro de los currículos primordialmente a nivel internacional.

En consecuencia, Mejías y Alsina (2020) realizan un análisis frente a la presencia del álgebra en el currículo de Educación Básica Primaria comparando los currículos de países como Estados Unidos, España y Chile. Los autores mencionan que el estudio surge desde la necesidad de observar y seguir garantizando la calidad educativa en aras de buscar soluciones y mejorar las falencias del sistema, de manera que indagan sobre la presencia del Álgebra temprana (*Early Algebra)* en cada uno de los currículos (Mejías y Alsina, 2020). A partir del estudio se evidencia que en los currículos matemáticos de Primaria de estos países se encuentra el Álgebra temprana *(Early Algebra)* con la propuesta de algunas distinciones como lo son: i) la estructuración de los ejes temáticos para el trabajo del álgebra, ii) la forma de iniciar en cada grado, puesto que algunos inician desde lo aritmético hasta llegar a lo algebraico y iii) el uso que le dan a los patrones; pero con la necesidad de promover el desarrollo de competencias como la interpretación y representación, y/o la resolución de problemas referentes a números y operaciones, asimismo la identificación, construcción, y modelación asociados a patrones desde diferentes situaciones.

Dicho estudio muestra la necesidad de brindar recomendaciones y orientaciones hacía los profesores acerca de la enseñanza del álgebra con la idea de ofrecer respuestas a las dificultades y brindar una educación pertinente del siglo XXI a los estudiantes de primaria (Mejías y Alsina, 2020).

Por otra parte, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México (INEE, 2017) realiza un análisis de contraste entre la propuesta curricular de México y otros países como Corea del Sur, Chile e Inglaterra con la finalidad de identificar el objetivo, el contenido y la estructura de las matemáticas en primaria. A partir de esta comparación los autores realizan una valoración hacia los currículos donde mencionan que dentro del currículo de Corea del Sur e Inglaterra no se especifican los ejes temáticos, como en el currículo de México. Asimismo, para el caso de México y Chile, la organización de los contenidos establecidas para el trabajo de las matemáticas es más compleja de comprender, pues no presenta unas orientaciones claras o definidas para el trabajo o el manejo en el aula a comparación que Corea del Sur e Inglaterra que los currículos si presentan orientaciones más detalladas frente a las competencias y habilidades matemáticas que se han de fomentar y desarrollar en los estudiantes, promoviendo una actitud positiva frente a su aprendizaje (INEE, 2017) .

En el caso del álgebra, desde este documento, los autores mencionan que en México se proponen tres ejes temáticos, siendo uno de esos el sentido numérico y el pensamiento algebraico, es decir, se promueve un eje específico que permite profundizar en el trabajo del álgebra a partir de situaciones que promuevan el uso del lenguaje algebraico, el reconocimiento a propiedades aritméticas propias de la educación secundaria y finalmente, el empleo de diversas formas de representación de cálculos. Por otro lado, en Corea del Sur se promueve un bloque llamado patrones y resolución de problemas que involucra patrones, proporciones, uso de variables, ecuaciones simples y finalmente, lo referente a proporción directa e inversa (INEE, 2017, p. 235). En Chile, se encuentra el eje de patrones y álgebra desde el cual se promueve el estudio de las relaciones existentes entre números, formas, objetos y conceptos y finalmente en Inglaterra, los autores demuestran que el álgebra en este país es considerada una de las ramas más complejas de enseñar, por lo que está destinada dentro del currículo a ser enseñada únicamente a partir de sexto grado, dejando claro que en este país tampoco se promueve a profundidad la enseñanza de la misma desde tempranas edades.

En términos generales, desde este documento, muestra ciertas orientaciones escolares a partir de las cuales los profesores deben guiar la enseñanza de los contenidos desde primaria y cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas recogiendo aportes de otros textos (INEE, 2017).

En el contexto local, en marco de la práctica de investigación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander se ha realizado un estudio que compara el currículo colombiano con los currículos de México, España, Estados Unidos, y Chile, con la finalidad de identificar como trabajan y promueven el desarrollo del pensamiento algebraico en primaria en cada uno. En este estudio se opta por hacer una caracterización individual de cada uno de los países, recogiendo los contenidos algebraicos propuestos en ellos para así evidenciar las similitudes, diferencias y enfoques abordados en el trabajo del álgebra temprana. De ese análisis, se refleja que existen aspectos relevantes en los cinco documentos curriculares revisados de México, España, Estados Unidos, Chile y Colombia como los son i). el cubrimiento de la enseñanza de la matemática en primaria a partir de cinco ejes temáticos: a) números y operaciones; b) medidas; c) formas geométricas y situación de espacio; d) organización de la información y e) la generalización de patrones, y ii) la forma de iniciar el trabajo del algebra temprana, en algunos países se promueve desde la comprensión de patrones, relaciones y funciones hasta llegar a analizar el cambio desde diversos contextos, entre otro.

Ahora bien, en la tabla 1 se evidencia con mayor claridad y profundidad aquellas similitudes, diferencias y enfoques entre los currículos de España, México, Estados Unidos, Chile y Colombia. Las similitudes se evidenciaron a partir del uso que les dan a los patrones, las diferencias parten de la forma que cada país opta por iniciar el tratado del álgebra en primaria según los grados y los enfoques serían tres: i) acercamiento a lo aritmético, ii) patrones, y iii) modelos o funciones.

A continuación, se expone la tabla que detalla las similitudes, diferencias y enfoques identificados tras el análisis de los planes de estudio de cada país. Para facilitar la comprensión de la tabla, es importante destacar que los elementos incluidos fueron rigurosamente comparados entre sí, es decir, se examinaron todos los currículos para destacar las coincidencias, contrastes y enfoques particulares que emergieron a lo largo del análisis.

Tabla 1. *Similitudes, diferencias y enfoques en los cinco currículos para el trabajo del Pensamiento Algebraico*

	Similitudes	**Diferencias**	**Enfoques**
España	Promueven la experiencia inicial con los números y sus propiedades como la base para el trabajo posterior con símbolos alfanuméricos. Promueven la creación de secuencias numéricas crecientes y decrecientes, y comprensión y reconocimiento de patrones en diversos contextos.	Inician con el conteo de patrones hasta llegar a identificar regularidades, patrones en ecuaciones numéricas y geométricas y realizar predicciones sobre resultados esperados.	El trabajo algebraico en España se enfoca en el estudio, reconocimiento y comprensión de patrones y la construcción de secuencias numéricas de diversos contextos.
México	Promueven el reconocimiento y comprensión de secuencias numéricas.	Inicia con la comprensión de la relación entre las operaciones y su uso en la resolución de problemas y el cálculo mental hasta llegar a la comprensión y resolución de ecuaciones, funciones y operaciones inversas.	El trabajo algebraico se centra en comprender la relación entre secuencias y operaciones matemáticas, así como el estudio y resolución de ecuaciones y funciones.
Estados Unidos	Promueven la experiencia inicial con los números y sus propiedades como la base para el trabajo posterior con símbolos alfanuméricos. Promueven el uso de la variable y expresiones algebraicas a medida que describen y amplían patrones. El reconocimiento y descripción a las regularidades y patrones desde diversos contextos; expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones; representar variables de cantidades desconocidas usando letras o símbolos.	Inicia con la construcción solida de una experiencia sistemática clasificando y ordenando objetos con patrones hasta llegar al desarrollo de un repertorio de muchos tipos de funciones.	El trabajo algebraico se enfoca en la consolidación y reconocimiento de patrones cada vez más complejos hasta el trabajo con múltiples representaciones de funciones, incluidas numéricas, gráficas y simbólicas para desarrollar una compresión más completa de las funciones.

Chile	Promueven el reconocimiento, descripción y creación de patrones repetitivos en diversos contextos para identificar relaciones numéricas y resolver problemas usando ecuaciones e inecuaciones, que involucren adiciones y sustracciones, de manera pictórica y simbólica.	Inicia con el estudio y comprensión de relaciones o patrones a través del uso de material concreto y pictórico hasta la resolución de ecuaciones de primer grado con incógnitas.	El trabajo algebraico se centra en el estudio y comprensión de todo tipo de relaciones, en este caso, relaciones entre números, formas, objetos y conceptos y a su vez, el estudio de patrones y regularidades
Colombia	Promueven el reconocimiento y descripción a regularidades y patrones desde diversos contextos; la construcción de secuencias numéricas y geométricas; y el análisis y explicación de relaciones dependencia entre cantidades. Promueven la experiencia inicial con los números y sus propiedades para el trabajo posterior con símbolos algebraicos	Inicia con la ampliación del lenguaje aritmético para el posterior trabajo con expresiones algebraicas	El trabajo algebraico se enfoca en la generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente.

Nota: El gráfico representa las similitudes, diferencias y enfoques algebraicos propuestos en cada uno de los documentos curriculares de México, España, Estados Unidos y Chile. Fuente: Elaboración propia en base a fuentes como MEN, 2006; NCTM, 2000.

Con lo anterior, se puede demostrar que en Colombia el desarrollo del pensamiento algebraico inicia con la adquisición del lenguaje matemático y el uso de propiedades características de los sistemas numéricos hasta llegar al estudio de regularidades y formas, por lo que se proponen actividades que involucren el análisis de la manera en la que varía, aumenta o disminuye una secuencia para hacer predicciones sobre los valores restantes o posteriores en cada sucesión y formular una generalización al respecto. En este sentido, en Colombia se desarrolla el pensamiento variacional en relación con los pensamientos matemáticos y pensamientos más propios de las ciencias, pero no se reconoce propiamente el pensamiento algebraico porque se dice que se estudia la variación y el cambio desde las ciencias sociales y naturales, es decir, si bien se aborda la variación y el cambio, la falta de un reconocimiento explícito del pensamiento algebraico podría deberse a una menor prioridad en la abstracción algebraica en comparación con otros enfoques educativos.

2.2 Iniciativas del Enfoque de los Itinerario de Enseñanza (EIEM)

En interés de mejorar el reconocimiento al pensamiento algebraico desde básica primaria, es pertinente reconocer ciertas iniciativas que se han propuesto. Alsina (2020) plantea un Enfoque de Itinerario de Enseñanza que responde a la necesidad de garantizar un aprendizaje sólido mediante una enseñanza eficaz que se encuentre fundamentada bajo un amplio bagaje de recursos y estrategias didácticas que permitan realizar secuencias educativas en respuesta a las necesidades del contexto y a las capacidades de los estudiantes (Alsina, 2020).

En relación con eso, Alsina (2020) proponen dos tipos de contextos para la enseñanza del álgebra temprana: 1) Contexto informal y 2) Contexto intermedio. El primero hace referencia a enseñar a partir de las situaciones cotidianas y los materiales manipulativos (también se reconoce como ese contexto de enseñanza real). Por ejemplo, Alsina, No y Moreno (2016) realizaron una experiencia educativa titulada *"Redescubriendo la calle Mayor de Palencia con ojos matemáticos"* (Alsina, No y Moreno, 2016. p.10) esta experiencia tenía la finalidad de que los estudiantes desde la observación a su entorno fueran capaces de identificar patrones. Esta se realizó con estudiantes de una escuela pública llamada "Sofía Tartilán" en Palencia, España. En ese sentido, dividieron la experiencia en diversos momentos, en primer lugar, los estudiantes realizaron algunas seriaciones a partir de un patrón determinado sobre hojas de papel y tapas de diversos tamaños, formas y colores, también incluyeron los bloques lógicos y las formas geométricas regulares y abstractas, la idea era que los estudiantes fueran tomando los materiales y realizaran la descripción de cada uno de ellos para seguir el patrón específico. Es así, como una vez finalizada la actividad anterior, se propone llevar a los estudiantes a una zona urbana cercana a ellos como lo es la Calle mayor de Palencia, allí se les pidió empezar a nombrar e identificar patrones en las estructuras que observaran allí como por ejemplo los del suelo. Finalmente, al regresar al aula se les enseñó por última vez una fotografía de una puerta con patrones, a lo que rápidamente uno de los estudiantes resolvió sin problema dicha actividad identificando el patrón que había en ella (Alsina, No y Moreno, 2016).

Desde esta experiencia realizada se puede concluir que conectar a los estudiantes con situaciones cercanas a ellos, les permite desarrollar mejor el pensamiento algebraico a través de la observación de las similitudes, patrones y regularidades de su entorno mientras se involucra el uso de material manipulativo para lograr una evolución en este.

Por otra parte, en el segundo, *contextos intermedios*, es decir, involucrar la posibilidad de promover el uso de recursos literarios y tecnológicos en la enseñanza del álgebra. En este contexto se recomienda ser trabajado cuando los estudiantes ya tengan nociones previas frente al álgebra. Los recursos tecnológicos y literarios pueden ser herramientas pertinentes para gestionar la transición desde lo concreto hacía lo abstracto. Es así como Torra (2012 como se citó en Alsina, 2020) menciona que trabajar las matemáticas desde los cuentos es bastante gratificante por las aportaciones de estos puesto que permiten predecir lo que está por pasar, buscar regularidades y patrones.

Para este contexto, Alsina (2020) propone una posible forma de orientar la identificación de regularidades a partir de la estructura de un cuento: i) Se debe leer todo el cuento, ii) El profesor debe hacer preguntas referentes a la estructura del cuento, como, por ejemplo, “¿En cuántas partes se divide la historia?, ¿Qué ocurre en la tercera parte? O ¿Qué creen que pasará en el final?" (Alsina, 2020, p. 11). Y iii) Representar la historia mediante dibujos con los más pequeños, y a medida que avanzan, ir llevándolos a hacer representaciones más abstractas. Por otra parte, propone trabajar los recursos tecnológicos porque estos facilitan la adquisición de conocimientos algebraicos.

En general, la propuesta de abordar contextos específicos en el Enfoque de Itinerario de Enseñanza surge con el objetivo de transformar la manera en que se enseñan las matemáticas, superando la visión tradicionalista que se limita a la utilización exclusiva de libros de texto. Esta perspectiva, impulsada por la necesidad de modernizar las prácticas educativas, busca una enseñanza más dinámica y relevante, donde se reconozca la importancia de vincular los contenidos matemáticos con la realidad cotidiana de los estudiantes. De acuerdo con las ideas de Alsina (2016; 2020), la propuesta implica un cambio hacia un enfoque educativo más respetuoso, que considere el entorno inmediato y las necesidades individuales de los estudiantes en cada momento del proceso de aprendizaje. Este planteamiento no solo busca transmitir conocimientos matemáticos, sino también promover un entendimiento más profundo al conectar la teoría con la práctica, estimulando así el pensamiento crítico y la aplicación de las matemáticas en situaciones del mundo real. En este sentido, la integración de contextos cercanos y relevantes se convierte en un componente clave para potenciar la comprensión y la apreciación de las matemáticas como herramienta útil y significativa en la vida de los estudiantes.

2.2.1 Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM)

El EIEM se fundamenta teórica y metodológicamente de tres pilares importantes: i). la teoría sociocultural de Vygotsky (1978), ii). modelo realista-reflexivo para la formación del profesorado de Korthagen (2001) y iii). La educación matemática realista de Freudenthal (1991 como se citó en Alsina, 2020). En este sentido, desde la teoría sociocultural para el EIEM representa que la adquisición del aprendizaje de los estudiantes está determinada por el entorno y la interacción sociales que tengan los estudiantes con el medio que los rodean, es decir, toma como base en la formación de un ser humano los factores individuales y sociales. De esta manera, el conocimiento matemático es reconocido como aquel proceso social y cultural (Lerman, 2000 como se citó en Alsina, 2020), donde el objetivo de la matemática es brindarles oportunidades a los individuos de desarrollar competencias para mejorar las interacciones con su entorno.

Las consideraciones desde el modelo realista-reflexivo para la formación del profesorado permiten a los profesores de primaria considerar la importancia de sus experiencias escolares y reflexionar frente a estas a través de un análisis constante a sus acciones para reconocer la forma en la que se está enseñando, qué se está enseñando y cómo se puede mejorar y promover una enseñanza globalizada y significativa (Korthagen, 2010 y Alsina, 2020). En este sentido, se pretende fomentar una reflexión sistemática basada en un ciclo que involucre la enseñanza en el aula, una revisión a dicha enseñanza, concientización de aspectos esenciales a mejorar, diseñar alternativas y ensayar con las nuevas alternativas la enseñanza. En esta etapa se busca que los profesores puedan deconstruir aquellos conocimientos cotidianos o consideraciones que puedan ser un obstáculo para la mejora de su práctica pedagógica y en este orden de ideas los profesores puedan construir y reconstruir sus conocimientos profesionales (Alsina, 2020).

Desde el EIEM se ha considerado la necesidad de acercar la enseñanza de las matemáticas a la realidad de los estudiantes. Al respecto Alsina (2010) plantea un diagrama obsérvese en la figura 1, el cual permite reconocer de forma menos compleja los contextos y recursos necesarios para potenciar el pensamiento algebraico. Al ser de forma piramidal se precisa la “frecuencia de uso” en el aula o más recomendable, la función de cada uno en la enseñanza y, por consiguiente, se considera como una herramienta útil para ofrecer una educación matemática efectiva (Alsina, 2010).

Figura 1. *Pirámide para la enseñanza de las matemáticas*

Nota: Diagrama piramidal para la enseñanza de las matemáticas. Fuente: *Alsina (2010, p. 14)*

Dicha organización está en correspondencia con la reflexión sistemática en la formación de un profesorado preocupado por mejorar su práctica pedagógica, de tal manera, que los contextos usados con más frecuencia en el aula provengan de situaciones problemáticas, entorno o vida cotidiana, hasta considerar más adelante en la intervención pedagógica los libros de texto donde su uso sea menos preponderante, es decir, ver la posibilidad de reducir el uso ocasional del libro de texto dándole uso a otros como recursos lúdicos, literarios, tecnológicos, etc.

En vista a la referencia constante entre situaciones y tareas, ahora, se hace visible la postura tomada para el desarrollo de la presente investigación la cual no se contrapone con el enfoque EIEM.

2.2.1.1 Sobre las Tareas y Situaciones

Como se refirió al iniciar la sección 5.2, el EIEM tiene parte de sus fundamentos en el Educación Matemática Realista de Freudenthal (1991 como se citó en Alsina, 2020) donde se promueve la enseñanza de las matemáticas desde situaciones de la vida cotidiana o problemas contextualizados haciendo alusión a que la enseñanza debe avanzar progresivamente hasta que los estudiantes puedan generar conexiones más complejas y reconozcan estructuras indeterminadas (Heuvel-Panhuizen, 2003), y así, fomentar la interacción constante en el aula para que el estudiante sea capaz de mejorar y reinventar las matemáticas desde una orientación guiada por parte del profesor. Los 6 principios considerados por Freudenthal (1991 como se citó en Alsina, 2020) los cuales son denominados como Principio de actividad, de realidad, de reinvención dirigida, de niveles, de interacción y de interconexión, ponen de manifiesto que hacer aprender matemáticas involucra la actividad de todos los actores en el aula de clase, así como la selección cuidadosa de situaciones cercanas al estudiante que permitan avanzar en una comprensión progresiva manifestada en parte por el uso de medios semióticos más sofisticados.

En relación con lo anterior, por tareas escolares se entiende como aquellas propuestas que solicitan el accionar del estudiante y que el profesor planifica en respuesta a un aprendizaje o como un instrumento para evaluación de este. Por otro lado, las situaciones hacen parte de ese mundo y/o contexto del estudiante en el cual las tareas se encuentran localizadas y son dotadas de significado (Rico y Moreno, 2016).

Desde el EIEM (Alsina, 2020), hablar de itinerario para la enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático se hace alusión a esa enseñanza secuenciada e intencionada de tareas inmersas en determinadas situaciones y las cuales se comprenden establecidas a partir de tres niveles que se describen a continuación.

2.2.1.2 Niveles y contextos de un Itinerario

El diseño de un itinerario en relación con un concepto matemático pretende como lo expresa Alsina (2020); formar personas que sean capaces de descubrir y analizar las ideas matemáticas desde la planificación y la ejecución de tareas basadas en las competencias matemáticas, más que transmitirles un conocimiento ya existente.

De acuerdo con lo anterior la planificación y gestión del itinerario se considera en el marco de tres niveles de enseñanza en contextos; 1) Enseñanza en contextos informales, 2) Enseñanza en contextos intermedios y 3) Enseñanza en contextos formales.

A continuación, se hace una breve descripción de cada nivel según Alsina (2020):

i). Enseñanza en contextos formales: se refiere a que la enseñanza debe iniciar desde situaciones reales o cercanas al estudiante y debe involucrar el uso de materiales manipulativos y la interacción de los estudiantes mediante el juego, conocimientos informales, la experiencia o el sentido común.

ii). Enseñanza en contextos intermedios: se considera que la enseñanza continua en contextos que hacen puente entre lo real y abstracto, el uso de recursos literarios y los tecnológicos como applets, robots, etc. son claves en la exploración y reflexión para el desarrollo de conocimiento matemático.

iii). Enseñanza en contextos formales: en el itinerario se considera este nivel donde la formalización del conocimiento matemático tiene lugar con el lenguaje forma que ha tenido lugar en el desarrollo histórico y epistemológico del concepto son “disecados” en los libros de texto o guías.

Para el diseño de itinerarios de enseñanza se han delimitado algunas recomendaciones que se precisan en la siguiente sección.

2.2.2 Recomendaciones para el diseño de itinerarios de enseñanza

Alsina (2020) propone cinco recomendaciones iniciales para todos aquellos profesores interesados en incluir y aplicar el EIEM en sus aulas.

1. *Estructurar y guiar la enseñanza de las matemáticas a través de procesos:* invita a impartir matemáticas desde un enfoque más amplio y globalizado, es decir, no limitar a trabajar contenidos por separado, sino de forma integrada para así promover una enseñanza que favorezca a la autonomía mental de los estudiantes potenciando sus capacidades para resolver problemas, elaborar hipótesis y argumentar dependiendo de la situación (Alsina, 2012).

2. *Promover los procesos de enseñanza y aprendizajes que tengan en cuenta la interacción estudiantes-profesor***:** Promueve un aprendizaje que se construya a partir de la indagación del estudiante con el apoyo del profesor quien es el mediador del proceso. Es decir, dejar que los estudiantes tomen rinda de su propio aprendizaje y controle el proceso, de esta manera aprenderán mejor y más rápido (NCTM, 2000).

3. *Tener presente los contextos reales, intermedios y formales en todas las planeaciones:* Esta surge de la necesidad de desarrollar el pensamiento matemático desde diversos contextos como lo son las situaciones reales, los materiales manipulativos, los juegos, los recursos tecnológicos y gráficos para así lograr formalizar e institucionalizar los aprendizajes (Alsina, 2020).

4. *Garantizar el aprendizaje desde lo concreto hacía lo abstracto:* invita a reconocer que es necesario llevar al estudiante por un aprendizaje que vaya guiado desde lo concreto hacía lo abstracto, es decir, empezar con la enseñanza desde lo cercano al estudiante hasta llevarlo a estudiar gráficas o símbolos.

5. *Disponer de objetivos para la enseñanza de las matemáticas*: promueve la enseñanza gestionada adecuadamente para desarrollar en los estudiantes las competencias matemáticas.

En congruencia con lo anterior, se puede decir, que este enfoque ha cobrado vida desde la finalidad de promover el aprendizaje desde contextos adecuados y necesarios en el aprendizaje de las matemáticas, dejando de lado esa enseñanza fundamentada en la repetición y la solución constante de actividades presentadas en libros de texto, y en cambio, plantea fomentar la comprensión por parte del estudiante, la actividad que potencie la autonomía y el pensamiento matemático crítico (Alsina, 2020, p. 14). A esto Planas y Alsina (2009) afirma la necesidad existente por formar personas que sean matemáticamente competentes y comprendan lo que implica el conocimiento matemático y, en definitiva, se necesitan formar personas capaces de plantear y solucionar situaciones en la vida cotidiana.

Tercer Capítulo

3 Metodología

Esta investigación se realiza dentro del marco cualitativo el cual es entendido según Hernández (2014) como un estudio que posibilita el desarrollo de pruebas antes, durante y/o después del trabajo de campo para determinar los elementos más pertinentes de la investigación con la finalidad de proceder a perfeccionarla y dar respuesta a esta. En la misma línea de lo mencionado con anterioridad, la investigación cuenta con un nivel comprensivo que no solo busca las características evidentes sobre la educación matemática, sino que establece diversas conexiones entre el desarrollo del pensamiento algebraico y la importancia de promover la enseñanza desde determinados contextos (informales, intermedios y formales) para iniciar el trabajo del álgebra temprana (Barrera, 2008).

3.1 Participantes

La muestra objeto de estudio proviene de la Institución Educativa de carácter público del municipio de Santander, situada en la calle 9 #25-67. Este grupo está conformado por 36 estudiantes pertenecientes al tercer grado, específicamente al grupo 3°1. Presentan edades comprendidas entre los 7 y 8 años, lo que refleja una etapa temprana en su proceso educativo. Esta diversidad etaria, sumada a las particularidades propias de esta etapa de desarrollo de su pensamiento, ofrece un contexto enriquecedor para abordar la investigación planteada.

3.2 Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Las técnicas e instrumentos de recolección que fueron utilizados para el desarrollo de la investigación se encuentra la revisión documental que según Valencia (2011) permite reconocer las investigaciones, consolidar autores para elaborar una fundamentación teórica; distinguir los elementos; y precisar ámbitos no explorados. A continuación, se presenta una tabla caracterizada a partir de dicha revisión como referentes para el diseño del Itinerario de Enseñanza.

Tabla 2. *Referentes para el diseño de tareas y situaciones*

Autor	Título	Año	Tipo de texto	Descripción
Ángel Alsina	El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula?	2020	Revista	Este documento describe el EIEM como herramienta que promueve la enseñanza de las matemáticas de forma secuenciada y teniendo en cuenta diversos contextos (Reales, informales y formales). A su vez, el texto brinda cinco recomendaciones para incorporar el EIEM en las aulas.
James J. Kaput	*Algebra in the Early Grades*	2008	Libro	Este libro recoge todo acerca del álgebra haciendo alusión a la manera en cómo se

David W. Carraher Maria L. Blanton				debería promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la capacidad que ellos mismos tienen para representarlo. A su vez, recoge algunas experiencias de estudiantes de primaria involucrados en álgebra temprana, algunas cuestiones de implementación como los talleres de matemáticas, etc.
National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee	*Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*	2001	Libro	Este libro brinda una mirada a las matemáticas y al aprendizaje de esta haciendo referencia a ¿Qué hay que saber?, aspectos de competencias matemáticas y el reconocimiento a las nociones y saberes que los estudiantes ya traen a la escuela. A su vez, hace mención del desarrollo de la competencia a partir de números enteros, otros números, más allá del número, etc.
Gustavo Adolfo Moreno Giraldo	Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos	2015	Trabajo de grado/tesis	Esta tesis hace referencia a la incorporación del pensamiento algebraico a partir de actividades de tareas referentes a patrones. La muestra de este estudio es el grado tercero de primaria, a los cuales se les aplica la secuencia de actividades mediante situaciones de variación, cambio y la estructura multiplicativa.
Vince Font	Reflexión en la clase de didáctica de las matemáticas sobre una “Situación rica”	2005	Libro	Este capítulo de libro muestra la manera en se ejecutan diversas actividades propuestas en libros de textos con la finalidad de invitar a los profesores a reflexionar sobre el diseño de actividades en la que se tenga en cuenta la articulación y transversalización de contenidos.

Nota: Recopilación de libros y artículos base para el diseño del itinerario de enseñanza. Fuente: *Propia.*

A su vez, es importante destacar que en septiembre y octubre de 2023 se llevó a cabo una prueba piloto, en la cual se trabajó con un grupo de 36 estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 7 y 8 años y pertenecían a una escuela pública en la ciudad de Bucaramanga (Colombia). Según Mayorga-Ponce (2020) estas pruebas se utilizan como actividad previa a la investigación final para contribuir a disminuir los posibles errores en el diseño de esta y hacer los rediseños correspondientes. Además, se recolectó la información necesaria para el posterior análisis mediante video grabaciones de las sesiones y diarios de campo.

Para el análisis, de la revisión documental se optó por hacer un análisis de contenidos en el que se organizó y examinó determinada información encontrada en los documentos, identificando los temas y patrones relevantes para el desarrollo del itinerario, después se hizo la síntesis de la información donde se agrupó la información en categorías de análisis (Enseñanza en los tres contextos) para comprender mejor la diversidad de contenido presente en los documentos y se realizaron algunas comparaciones entre diferentes documentos para identificar similitudes y diferencias en los enfoques o perspectivas. En cuanto a la prueba piloto, se describieron los resultados de la prueba incluyendo las observaciones, y respuestas de los participantes, se identificaron las dificultades experimentadas durante la prueba tanto en la implementación como en la comprensión por parte de los participantes y se recogieron en comentarios cualitativos de los participantes sobre su experiencia en la prueba piloto.

3.3 Fases de la investigación

Por otra parte, esta investigación se desarrolló a partir de las cuatro fases (preparatoria, trabajo de campo, analítica e informativa) propuestas por Rodríguez, Gil y García (1996) en su libro “Metodología de la Investigación Cualitativa”. Estas fases fueron el mecanismo base para desarrollar la investigación, por lo cual, en cada fase se cumplió una tarea específica donde una vez finalizada se dirigió a la siguiente.

La *Fase Preparatoria*, la cual se encuentra dividida en dos etapas: *reflexiva y diseño* (García, Gil y Rodríguez, 1996). En la *Etapa Reflexiva* se realizó un arduo trabajo para elegir el tópico de interés (Álgebra temprana) donde se tuvo en cuenta las experiencias y saberes del investigador para definirlo y el contraste curricular de diferentes países sobre el pensamiento algebraico temprano. Delimitada la justificación del estudio y su relevancia, se delimitó el referente teórico que fundamenta la investigación, entre este se encuentran la caracterización del pensamiento algebraico y el Enfoque de Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. En la *Etapa de diseño* se llevó a cabo el proceso de estructuración del itinerario a partir de las recomendaciones propuestas por Alsina (2020), la revisión documental sobre los lineamientos curriculares para el área de matemáticas de los países de Colombia, Chile, México, España y Estado Unidos y los referentes de la Tabla 2. Por eso, en el diseño de actividades se tuvo en cuenta los tres momentos que propone Alsina de la mano de los contextos para el desarrollo del pensamiento algebraico: i) Identificar objetos algebraicos (Definir y/o reconocer), ii) Relacionar objetos algebraicos (Comparar) y iii) Operar con objetos algebraicos (Cambiar, transformar), en este sentido, las actividades fueron encaminadas a ver y describir patrones, completar y dibujar patrones, con observación de patrones de repetición, patrones crecientes/decrecientes y una cercanía con los patrones de correspondencia (Apéndice C). Lo anterior permitió acercar al estudiante de forma gradual al aprendizaje progresivo de los contenidos matemáticos.

En la segunda *Fase de trabajo de campo*, se ejecutó la prueba piloto del itinerario, en esta el investigador tuvo un acercamiento al campo del que obtiene la información necesaria para el estudio. De igual forma, se divide en dos partes: *Acceso al campo* y *recogida productiva de datos* (García, Gil y Rodríguez, 1996). Para el *acceso al campo* se tuvo en cuenta un documento legal de consentimiento informado (Apéndice y Anexo A) y asentimiento informado (Apéndice B) del que disponen todos los estudiantes participantes, a través de este se expuso el motivo por el cual era de importancia la participación del estudiante y de esta manera, sí estaba de acuerdo en hacer parte de la propuesta de forma voluntaria. En la *recogida productiva de datos* se dispuso a la inmersión en el aula para la ejecución del itinerario de enseñanza como prueba piloto, en este sentido, se ejecutaron las sesiones del itinerario en un horario de 7 am a 10 am en la Institución Educativa de Santander con los estudiantes de 3°1 durante 2 semanas, estas sesiones constaban de 4 horas para la sesión informal, 3 horas para la sesión intermedia y 3 horas para la sesión formal. Las secciones de la implementación de la prueba piloto fueron videograbadas con el propósito de hacer seguimiento a las producciones de los estudiantes.

Para la *Fase analítica*, una vez recogida la información, se analizó la secuencia de situaciones y tareas del itinerario para hacer los ajustes correspondientes a partir de la evidencia empírica de los datos provenientes de la prueba piloto. En este análisis se reconocieron aquellos aspectos característicos a las actuaciones de los estudiantes ante determinadas actividades encaminadas al uso de secuencias de patrones. Además, se hizo alusión a cada contexto (informal – intermedio - Formal) reconociendo aquellas formas de razonar comunes, atípicas o "erróneas" presentadas durante la intervención. Anudando así, la iniciativa frente a la construcción de "semillas" del pensamiento algebraico temprano (Factual, Contextual y Simbólico) en los estudiantes de tercero.

Como proceso final de la investigación, se encuentra la *Fase Informativa* en la que se divulgaron los resultados obtenidos en la fase anterior con la idea de tomar todas aquellas consideraciones necesarias para el ajuste y rediseño del itinerario de enseñanza con la finalidad de profundizar en la construcción y planeación óptima del mismo (García, Gil y Rodríguez, 1996).

Cuarto Capítulo

4 Análisis e interpretación de resultados

4.1 Delimitaciones para el análisis

En las siguientes páginas, se presentan los resultados del presente estudio enfocado en la implementación de un itinerario diseñado para la enseñanza del álgebra temprana en tercer grado de primaria, en el cual se tuvo en cuenta los tres momentos (Bloques) propuestos por Alsina (2019) para el desarrollo del pensamiento algebraico de forma gradual y constante: i) Identificar objetos algebraicos (Definir y/o reconocer), ii) Relacionar objetos algebraicos (Comparar) y iii) Operar con objetos algebraicos (Cambiar, transformar). Además, estos resultados se listan en tres categorías estructuradas a partir de los tres niveles propuestos por Alsina (2020) para la planeación de un itinerario de enseñanza: Nivel 1. Enseñanza en contextos informales, Nivel 2. Enseñanza en contestos intermedios y finalmente, Nivel 3. Enseñanza en contextos formales. Estos niveles están directamente relacionados con el diagrama piramidal para la enseñanza de las matemáticas, el cual se menciona en el marco teórico como parte fundamental de la conceptualización de los EIEM.

La organización de las evidencias y el análisis de los datos se hizo considerando los niveles mencionados anteriormente por Alsina (2020) Las evidencias provienen de transcripciones de videograbaciones de la implementación piloto, diario de campo y algunas producciones escritas de los estudiantes. En la revisión de las evidencias se buscó identificar la emergencia de los razonamientos en los estudiantes con relación al pensamiento algebraico temprano de acuerdo con los elementos del marco teórico. Así mismo, la manera en la que el diseño del itinerario mediaba el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. En este sentido, se emplearon fragmentos de los diálogos entre estudiantes y estudiantes profesora usaron las transcripciones de las grabaciones realizadas durante la implementación, acompañado por las notas de campo del investigador y las producciones escritas de los estudiantes. Para efectos de identificar los estudiantes participantes en los diálogos y la profesora se usa la letra 'E' seguida de un número correspondiente a su posición en la lista de estudiantes, es decir, E_1, E_2 ... y las intervenciones de la investigadora están demarcadas bajo la etiqueta 'PF' (Profesora en Formación).

4.2 Nivel 1. Enseñanza en contextos informales

En la primera parte, se realizó una actividad llamada Patrones Personales que constaba de formar con unas tarjetas un patrón de repetición de forma lineal, la actividad se contextualizaba a partir de tres preguntas: i). Tarjeta de color verde: ¿Cuál es tu color favorito?, ii) Tarjeta de color azul: ¿Cuál es tu comida favorita? Y iii) tarjeta de color rojo: ¿Cuál es tu deporte favorito?, es decir, cada estudiante debía responder en la tarjeta de color que correspondía a la pregunta según se muestra anteriormente. A medida que se iban contestando las preguntas, los estudiantes iban pasando al frente y contaban en voz alta lo que habían respondido en las tarjetas e iban pegando las tarjetas en el tablero de forma lineal (obsérvese la figura 2).

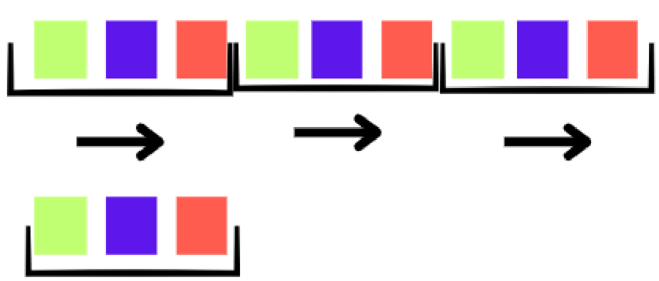
Figura 2. *Representación de la construcción lineal del patrón de repetición*

Nota: Imagen referente a la construcción lineal del patrón de repetición (Fuente: Propia)

A partir de esto, a los estudiantes se hicieron determinadas preguntas que permitieran continuar con la construcción del patrón. A continuación, se listas algunas preguntas y respuestas obtenidas por parte de los estudiantes:

Primero se le pregunta a modo de recordatorio “¿En qué color terminaba la secuencia?” [en este momento el orden inicial era verde, azul, rojo, verde, azul, rojo, es decir, los estudiantes que iban pasando pegaban las tres tarjetas], por lo que la gran parte del salón contestó “Rojo”, después la profesora en formación añade: *“Rojo, muy bien. Ahora, si yo le pido a otro estudiante que pegue las tarjetas, ¿En qué color quedaría?”* [Aquí nuevamente se espera que ese estudiante pegue las tres tarjetas en el mismo orden inicial] a lo que los estudiantes proceden a contestar *“rojo”* y nuevamente la profesora en formación interviene preguntando: *“¿Por qué sigue siendo el rojo y no otro?”* Y una estudiante añade: “*Porque el rojo es el último color con el que siempre terminamos, entonces si 5 estudiantes más las pegan en el mismo orden, pues la última seguirá siendo rojo”*. En relación con las preguntas anteriores similares los estudiantes respondían que era el color rojo, muchos estudiantes recurrían a pensar en el color anterior o el color en el que terminaba/ iniciaba la secuencia para poder reconocer que color de tarjeta venía o correspondía según lo solicitado. En particular, ante la afirmación y cuestionamiento de la profesora en formación “Si yo le pido a 4 estudiantes que peguen 12 tarjetas, ¿En qué color quedaría?” la estudiante E2: “Sigue siendo rojo porque 3 × 4 es igual a 12 entonces cada niño pegaría igual las tres tarjetas y la última de cada uno será rojo, entonces la última del último niño será roja” (Obsérvese la figura 3).

Figura 3. *Representación de la estrategia usada por la estudiante*



Nota. Estrategia usada por la estudiante (Fuente: Propia elaborada en Canva)

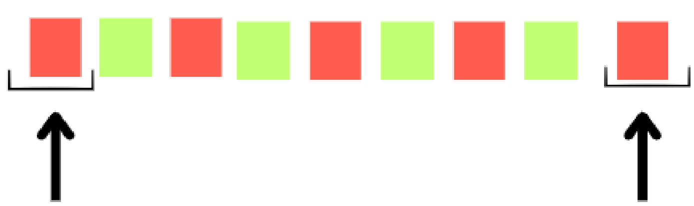
Tal como se aprecia en la secuencia figural de la figura 3 le (las flechas insertadas en la imagen de la secuencia indica que de forma lineal se va construyendo un patrón de repetición), la estudiante puede notar que la cantidad de tarjetas agregadas por un estudiante en forma lineal es la misma cantidad que pegó el estudiante anterior (es decir, cada uno debe pegar 3, verde-azul-rojo, según el acuerdo). De esta manera, se puede explicar y referir elementos de la secuencia figural de repetición basada en una estrategia multiplicativa de agrupar la cantidad de tarjetas que le corresponden a cada niño y la cantidad de niños que deben pasar a pegarlas para completar 12. Por lo tanto, la última tarjeta del último niño también sería roja, siguiendo el patrón establecido por la multiplicación realizada.

Con la intención de tener evidencias de las formas de ver el patrón de repetición en otros estudiantes, la profesora en formación propone una variación a la secuencia. Considerando que fueran Rojo-Verde se da la siguiente conversación en el aula:

PF: ¿Qué pasa si pegamos 9 tarjetas? entre rojo y verde.

E1: al ser un número impar el que debemos construir entonces al mezclar las tarjetas sabemos que al ser la primera roja entonces terminaría igual, o sea si, hagamos el mismo experimento que antes si empezamos en rojo vamos a terminar igual en rojo" (Ver figura 4).

Figura 4. *Representación de la estrategia usada por el estudiante*



Nota. Estrategia usada por el estudiante (Fuente: Propia elaborada en Canva)

La respuesta del estudiante D en particular, demuestra una iniciativa para describir el patrón de repetición basado en una característica de los números naturales, se par o impar. Esta conclusión se basa en la idea de que, si comenzamos con una tarjeta roja y el número de tarjetas es una cantidad impar, llevará a que la última tarjeta también sea roja como se muestra en la figura 4.

Hasta este momento se logra observar que los estudiantes pueden pensar y reconocer patrones por repetición, esto se debe quizás al fuerte apoyo perceptual en el que se apoyan este tipo de secuencias, lo cual de acuerdo con Vergel (2015) las formas de expresar y evocar el pensamiento algebraico inicial de los estudiantes es el factual, enfocado más a los movimientos, gestos, ritmo, percepción y palabras como el mecanismo para referir la indeterminancia. De acuerdo lo referido por Alsina (2019), el primer bloque referido al desarrollo del pensamiento algebraico temprano puede involucrar el identificar objetos algebraicos. De esta manera, se permite que los estudiantes puedan reconocer patrones (entre ellos los de repetición) que involucre no solo el color, sino también las formas, cantidades, ritmos, etc.

En la visita a las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander los estudiantes hicieron determinadas observaciones a aspectos figurales, estructurales y formas geométricas en los edificios, paredes y senderos de las zonas delimitadas (se hicieron 4 paradas por zonas como: laboratorio de genética, facultad de ciencias puras, Edificio Camilo Torres y edificio de química). durante este recorrido ocurrió una conversación entre la docente en formación y los estudiantes:

PF: Vamos a observar este primer edificio, en cuanto a figuras, colores, estructura, ¿Qué podemos observar?

E36: es alto, tiene números que representan los pisos [...] hay cuadrados, círculos, rectángulos [...]

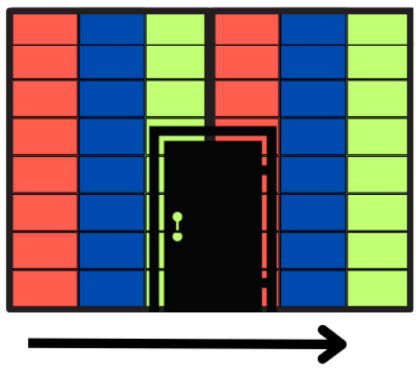
PF: ¿Qué le cambiarían? (En otro momento, frente a la Facultad de Ciencias Puras).

E27: podríamos pintar la pared (señala la pared).

E3: podríamos usar colores como los de la bandera de Colombia y pintar los rectángulos de la pared.

E1: Podría ser que pintáramos un rectángulo rojo, otro azul, otro verde, después otra vez rojo, azul, verde y así hasta terminar toda la pared. (Ver figura 5).

Figura 5. *Representación de la pintura que propone el estudiante*



Nota. Pintura que propone el estudiante (Fuente: Propia elaborada en Canva)

Al hacer el recorrido por la universidad, como se evidencia en el fragmento de la transcripción anterior, los estudiantes usan su imaginación para idear murales en las paredes que involucran patrones de repetición y colores. De manera creativa hacen alusión a un patrón de repetición parecido al trabajado con las tarjetas en el salón. En lugar de pensar en términos de tarjetas, sugiere que podrían pintarse rectángulos de diferentes colores en una pared. Lo anterior muestra como el estudiante puede pensar situaciones que involucran regularidades y patrones. En la propuesta del estudiante se reconocen tres colores: C_1 representa el color rojo, C_2 el color azul y C_3 el color verde, así el patrón de repetición que propuso formar el estudiante está dado por $C_1, C_2, C_3 \ldots, C1, C_2, C_3$, entonces la representación en la pared si fuese una secuencia de rectángulos de colores representado en $C_1, C_2, C_3 \ldots, C1, C_2, C_3$, que se repite infinitamente. En relación con lo referido por Lüken, M. & Sauzet, O. (2020) de usar secuencias de repetición, se puede identificar con las producciones de los estudiantes en la salida por la universidad para reconocer patrones que el estudiante debe abstraer el patrón de repetición de tal manera que no esté condicionado las formas, colores y configuraciones para la repetición.

En otro momento del recorrido por la universidad, al llegar al lugar de interés, Bienestar pro, se desarrolló una conversación entre la profesora en formación y los estudiantes:

PF: Enfoquemos la mirada en este sendero, ¿Cuáles son los colores de las piezas?"

E31: negro

E15: gris

E1: azul, amarillo, gris

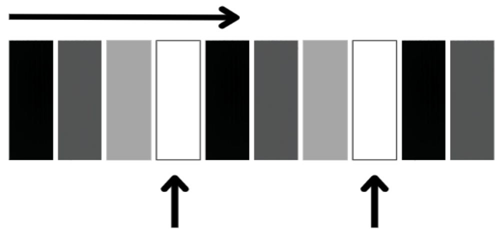
PF: Muy bien entonces vamos a mirar esto, si yo quiero extender esta secuencia que está en el piso ¿Cómo puedo hacer?

E12: agregando otro color

PF: ¿Qué color podríamos agregar?" (DM dice Blanco) ¿Por qué blanco? ¿Cómo quedaría (se refiere si extendemos el patrón)?

E1: Queda negro, gris oscuro, gris claro, blanco. Nuevamente, negro, gris oscuro, gris claro blanco [Aquí proceden a hacer la representación verbal de cómo quedaría ese patrón] (figura 6).

Figura 6. *Representación de la extensión del sendero de Bienestar Pro*



Nota. Extensión del sendero de Bienestar Pro (Fuente: Propia elaborada en Canva)

La habilidad de los estudiantes para extender un patrón determinado está relacionada con la comprensión de regularidad que está involucrada y usar las acciones mentales de tal manera que pueda referir que forma va a llevar el patrón para términos posteriores (cada vez más alejados). De acuerdo con el diálogo anterior, los estudiantes pueden reconocer (ver) y pensar en otras configuraciones en un patrón de repetición. Por ejemplo, se tenía una secuencia de colores que seguía un patrón de "negro, gris oscuro y gris claro", los estudiantes reconocieron la unidad de repetición (bloque de 3 colores, consecutivos) y propusieron una unidad de repetición, conformada por 4 colores (negro, gris oscuro, gris claro, blanco). Ahora bien, la forma de ver las secuencias de repetición por los estudiantes se ha centrado en hacer que la longitud de la cadena en la unidad de repetición sea más larga.

Ahora bien, en relación con el recorrido con los estudiantes se dio una conversación entre la profesora en formación y los estudiantes en relación con otras secuencias de repetición, diferentes a las ya consideradas. A continuación, se muestra un fragmento de la conversación:

PF: Ahora fijémonos en el orden de las tabletas del sendero, ¿Cómo están ubicadas? Miren en la primera fila, hay tres rectángulos, ¿pero si pasamos a la siguiente ya no hay tres sino?

E2: Dos

PF: Dos muy bien, en la primera hay tres rectángulos más pequeñitos y los dos son más grandes, entonces ¿Cuál es la secuencia?

E18: Sería tres pequeños, dos grandes

PF: Así es, y si nos paramos aquí en la de dos rectángulos ¿Cómo vendría la siguiente?

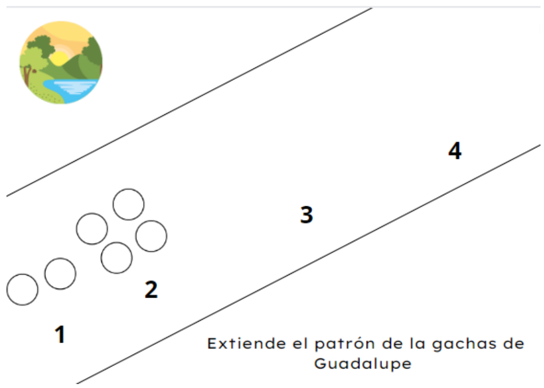
E1: Tres pequeños

De acuerdo con lo mencionaba en párrafos anteriores, en la conversación anterior se muestra el reconocimiento de una nueva secuencia de repetición, donde la unidad de repetición es diferente a la de las secuencias referidas por los estudiantes. La evidencia mediante el diálogo con los estudiantes deja ver la importancia de orientarles y acompañarlos en el reconocimiento de regularidades, formas, etc. con el propósito de identificar rastros de elementos algebraicos, referidos a capturar una regularidad y describirla, en este caso, usando el lenguaje.

En relación con las actividades realizadas en las instalaciones de la UIS, se esperaba conectar a los estudiantes con la identificación de regularidades en un contexto, para involucrarlos en tareas sobre secuencias figurales. De acuerdo con el diseño de la implementación del itinerario, la visita a la UIS también buscaba involucrar a los estudiantes como diseñadores donde lograran poner en juego regularidades y secuencias figurales. Para eso, el salón estaba organizado por seis mesas, cada una compuesta por un equipo de seis o cinco estudiantes a quienes se les asignó una tarea diferente de extender el patrón, había seis en total. Las tareas fueron diseñadas pensando en que los estudiantes se involucraran con elementos representativos de la Región de Santander y, asimismo, con elementos de formas, por eso, los patrones por extender incluían representaciones de las gachas de Guadalupe, hormigas culonas, flores de platanillo, panal de abejas, cuadros y hexágonos. En este sentido, la asignación de tareas quedó de la siguiente manera: i) Equipo 1: gachas de Guadalupe, ii) Equipo 2: cuadros, iii) Equipo 3: panal de abeja, iv) Equipo 4: flores de platanillo, v) Equipo 5: Hexágonos y vi) Equipo 6: hormigas culonas. A continuación, se refieren las tareas y las respuestas de los estudiantes ante estas:

Uno de los equipos tenía la tarea de resolver un patrón alusivo a las Gachas de Guadalupe:

Figura 7. *Tarea alusiva a la extensión del patrón*



Nota. Patrón de las gachas (Fuente: Propia elaborada en Canva)

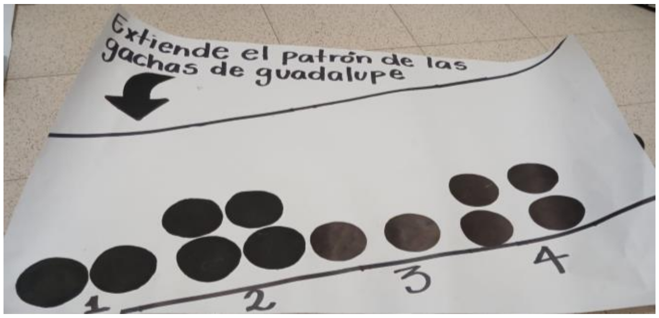
En este momento, se les explicó a los estudiantes que debían extender el patrón, para esto debían encontrar la estrategia/regla que les permitiera hacerlo [La idea en este momento era para de crear patrones de repetición a empezar a relacionar a los estudiantes con patrones de crecimiento/decrecimiento]. El equipo 1 expresó de la siguiente manera la forma de solución de la tarea:

E1: […] Al principio unos hicieron así 2, 4, 6, 8 y en cambio otros hicimos 2, 4, 2, 4 y al final decidimos dejar el segundo de 2, 4, 2, 4 porque empezábamos por el 1 y 3 que tenían 2 círculos y el 2 y 4 que tenían 4 círculos, jugamos con los números pares e impares y dijimos que así debía ser, los impares con un número de círculos y los pares con otro número de círculos y así se repetía (ver figura 8)

PF: ¿Por qué decían ustedes que el patrón debía ser 2, 4, 2, 4? ¿Por qué decidieron que el patrón no era el que habían dicho los demás de 2, 4, 6, 8?

E1: Pues yo al inicio había dicho que era ese, pero la mayoría dijo que ese no era porque no se repetía.

Figura 8. *Resultado de la tarea del patrón de las gachas*



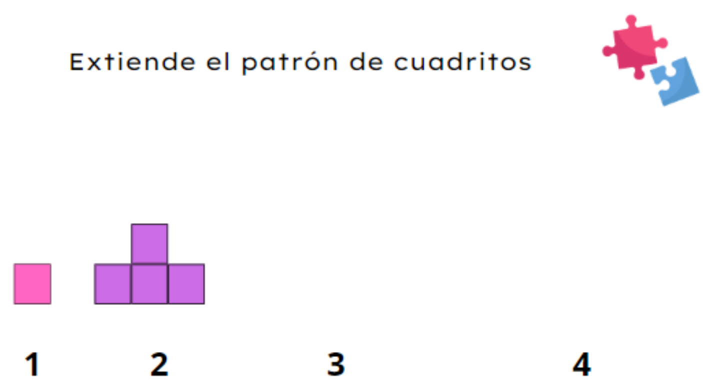
Nota. Resultado de la tarea del patrón de las gachas (Fuente: Fotografía propia)

El estudiante E1 refiere la manera en la que optaron construir y extender el patrón por jugar con los números pares e impares para dar solución a la tarea que se les presentó, con esto hacen alusión a que los números impares debían tener un número específico de círculos y los pares debían tener otro número específico de círculos. En esta presentación, se observó una forma de razonar atípica por parte de los estudiantes ya que, aunque tomaron en consideración la posibilidad de un incremento en el patrón, debido a sus conocimientos quizás y a lo observado en actividades anteriores, ellos se enfocaron en la relación existente entre los números impares y pares y el número de círculos construyendo así nuevamente un patrón por repetición, dando a entender que para ellos seguía siendo más adecuado que los patrones o elementos se repitieran más no que aumentaran o crecieran, por lo que extender el patrón en este caso continuó siendo la repetición.

Este cambio de estrategias posiblemente se convirtió en un obstáculo para ellos desde el hecho que los patrones de repetición son más simples y fácilmente identificables, por lo que pasar de reconocer patrones de repetición a construir nuevos patrones de crecimiento implica un cambio en la forma en que los estudiantes piensan y abordan esas tareas, requiriendo una reorientación de su estrategia/ regla al ser patrones más complejos que implican el uso de estrategias multiplicativas y aditiva. Sin embargo, es pertinente destacar que el desarrollo de los diferentes espacios del nivel informal les permitió a los estudiantes considerar diferentes formas de reconocer patrones mediante secuencias de repetición y crecientes. De manera que no solo los estudiantes reconocieron un tipo de patrón, sino que analizaron la existencia de diferentes formas de resolución y/o estrategias posibles para darle solución de este para aportar en el diseño de este.

Otra de las tareas como se mencionó anteriormente estaba encaminada a extender patrones referentes a formas geométricas, por lo que al Equipo 2 se le solicitó extender un patrón que involucraba el crecimiento de unas T invertidas (figura 9), la finalidad de esta tarea era reconocer desde las observaciones en la Universidad Industrial de Santander se identificaba el juego de formas geométricas y regularidades que tenía el diseño de los edificios, y así poder construir referencias a la consolidación de estas en otros contextos.

Figura 9. *Tarea alusiva a la extensión del patrón*

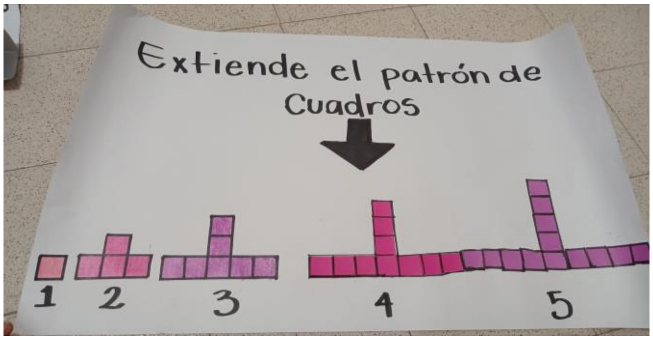


Nota. Extensión del patrón (Fuente: Propia elaborada en Canva)

A este equipo se le explicó nuevamente que la idea era extender el patrón y que ellos debían encontrar la regla/estrategia para resolverlo. A lo que ellos respondieron lo siguiente:

"*E24: es que notamos que al observar la posición número 1, tenía un solo cuadrito y a medida que crecía iba aumentando de a 1 a cada lado, entonces en la posición 2 ya había 3 cuadritos más y así con las demás. Entonces entendimos que debíamos agregarle 3 cuadritos a cada figura en cada posición, uno en cada lado"* (figura 10) y la profesora les preguntó: "*PF:* ¿Por qué uno en cada lado?" y otro estudiante responde*: "porque la figura debía aumentar la misma cantidad a cada lado para que quedara igual que las anteriores"*. Dadas las estrategias de solución la profesora les pregunta: "*PF: ¿Cuántos cuadritos entonces quedaron finalmente en la posición 4 y posición 5?"* y responden: "*10 y 13*". En esta respuesta, también se observó una forma de razonar atípica porque a diferencia del equipo anterior este equipo no solo logró identificar la forma en la que crecía sino también la forma en la que decrecía, esto haciendo alusión al siguiente comentario por parte de una estudiante: E24: *"también podemos notar que, si le quitamos los 3 cuadritos a la figura 5, nos queda la cantidad de la figura 4", "Sería restarle de a un cuadrito a cada lado, los tres que ya habíamos dibujado"*. Lo anterior permite evidenciar que los estudiantes reconocen las formas de extender determinadas secuencias figurales a términos cercano, es decir, son capaces de explicar lo observado en las figuras como esta puede variar para términos siguientes y/o anteriores. En relación con lo anterior Radford (2013) como se citó en Vergel (2015), alude esto como la identificación de la característica común o comunalidad que se refiere a la capacidad de identificar de qué manera cambian y permanecen constantes los elementos secuenciales y así deducir una manera para darle valor de cualquier término. Si bien el uso del lenguaje de los estudiantes hasta este punto refiere de formas más generales o simples de pensar, y describir esos cambios en la secuencia. Por ejemplo: *"agregarle 3 cuadritos a cada figura en cada posición, uno en cada lado".* Pero, se evidencia la capacidad que tienen ellos de describir cómo los elementos en una secuencia cambian y se mantienen iguales.

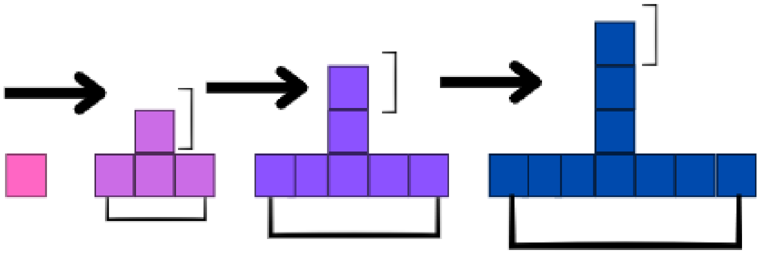
Figura 10. *Resultado de la tarea de extender el patrón de los cuadros*



Nota. Resultado de la tarea de extender el patrón de los cuadros (Fuente: Fotografía propia)

Los estudiantes observaron que, en la primera posición, la figura tenía un solo cuadrito. Luego notaron que a medida que avanzaban en las posiciones, la cantidad de cuadritos aumentaba de a 1 en cada lado. Por ejemplo, en la segunda posición, había 3 cuadritos más, y así sucesivamente. A partir de esta observación, llegaron a la conclusión de que, para construir la figura en cada posición siguiente, debían agregarle 3 cuadritos, distribuidos uno en cada lado de la figura (figura 11). Esto les permitió entender cómo se construía cada figura en la secuencia y aplicar el patrón de manera consistente.

Figura 11. *Representación de la primera estrategia y observación de los estudiantes*

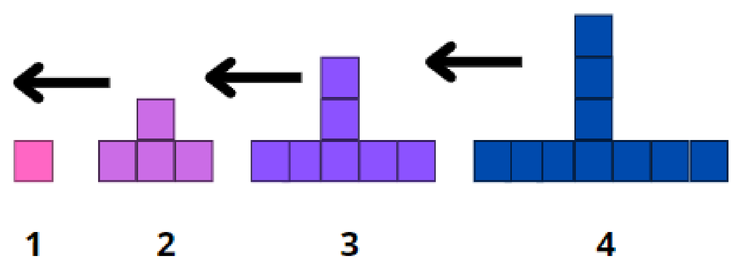


Nota. estrategia y observación de los estudiantes (Fuente: Propia elaborada en Canva).

Este grupo va un poco más allá desde el hecho de reconocer principalmente de qué manera fue aumentando cada una de las figuras, en este caso de 3 en 3. Tal vez ese patrón no son capaces de explicarlo con símbolos, sin embargo, las palabras y los gestos fueron un poco más allá, como a frases claves, es decir, convirtieron esas palabras en objeto del discurso como forma de pensamiento, y, asimismo, comenzaron la descripción de generalidades (Vergel, 2015), puesto que reconocieron que, si en la figura 1 había uno, ya en la siguiente figura debían haber el 1 de base y 3 más que irían a cada lado y así sucesivamente con cada posición y de la misma forma, reconocieron de atrás para adelante aumentaba, en el sentido contrario las figuras debían disminuir por lo que hicieron un pequeño acercamiento a lo que era descomponer la figura hasta el cuadrito más pequeño.

Además, como lo indican las flechas (figura 12) los estudiantes pudieron notar que la cantidad de cuadros en forma vertical es uno menos que el número de la figura siguiente y la cantidad de cuadros de forma horizontal en cada caso también representaba que hay uno menos que el número de cuadros de la figura consecutiva.

Figura 12. *Representación de la segunda estrategia y observación de los estudiantes*



Nota. Estrategia y observación de los estudiantes (Fuente: Propia elaborada en Canva)

Después de implementar esta segunda parte del nivel informal, se pudo observar que los estudiantes ya tenían más conocimiento sobre los patrones de crecimiento. Habían adquirido mejor comprensión de cómo ciertos patrones crecen a medida que se van extendiendo más. Sin embargo, a pesar de este mayor nivel de conocimiento, seguían basándose en las estrategias recursivas para resolver los problemas presentados. Esto se debe a que la recursividad usando la figura previa les proporcionaba un marco de referencia confiable para completar secuencias o extenderla a términos cercanos, sin embargo, puede resultar que para términos más alejados de la secuencia tal estrategia no sea la óptima. De esta manera, ellos recurrieron a utilizar dicha estrategia como una especie de andamiaje cognitivo que les permitía abordar las siguientes figuras que se les solicitaba de manera más segura.

A partir de la evidencia anterior se puede, se observar una progresión en la capacidad de los estudiantes para analizar y comprender los patrones, en este caso de crecimiento. Su habilidad para explicar cómo los patrones aumentaban evidenciaba un mayor grado de desarrollo en su pensamiento matemático y una mayor fluidez en el razonamiento lógico, logrando así una mejora significativa en su competencia matemática, la cual sugiere un desarrollo cognitivo continuo en el pensamiento algebraico. Además, se demuestra que los estudiantes empiezan a tener un acercamiento a lo indeterminado, sin necesidad de usar símbolos alfanuméricos, es decir, según Radford (2011) como se citó en Vergel (2015) emplean formas más simples de comunicación que implica considerar la noción de reducción de símbolos y signos, pero con un avance en la capacidad de entender la lógica que rigen a los objetos indeterminados. Por ejemplo: la estudiante es capaz de describir la forma algebraica de manera general diciendo: *“Agrego uno a cada lado” o “restarle de a un cuadrito a cada lado”.*

4.3 Nivel 2. Enseñanza en contextos intermedios

Esta segunda sesión, hace referencia a la enseñanza mediada en contextos que hacen puente entre lo real y abstracto, en este nivel el uso de recursos literarios y los tecnológicos como aplicaciones, robots, entre otros, son claves en la exploración y reflexión para el desarrollo de conocimiento matemático (Alsina, 2020).

En la primera parte, se realizó una actividad en la que se usó un recurso literario (historieta) que, no aparece explícitamente en las referencias de Alsina (2020), sin embargo, a partir de esta se busca identificar la manera en la que puede favorecer el pensamiento algebraico temprano (figura 13).

Figura 13. *Historieta*

Nota. Historieta alusiva a la vivenciado en el nivel anterior (Fuente: Propia elaborada en Canva)

En este momento, se les pregunta el tipo de texto que corresponde a la historieta a lo que los estudiantes responden que es un comic o una historieta, después la leyeron en conjunto para reconocer que nos proponía esta, sin embargo, al llegar a la parte N° 6 la historieta contenía un interrogante. Por lo que se dio una conversación entre la profesora en formación y los estudiantes en relación con la historieta y la parte faltante. A continuación, se muestra un fragmento de la conversación:

PF: ¿Por qué creen que está eso?

E3: porque nosotros debemos descubrirlo.

PF: ¿Qué podríamos decir sobre eso?

E27: Eso va a ser lo que vamos a hacer hoy

PF: muy bien, eso es lo que vamos a hacer hoy, si les cuento y les digo que hoy ustedes tienen una nueva tarea, ¿Cuál creen que será?

E2: Que vamos a extender patrones

E31: que vamos a ir a la UIS otra vez

E24: que vamos a remodelar edificios

E4: que vamos a dibujar edificios.

Una vez realizada esa dinámica, los estudiantes procedieron a dibujar todas aquellas ideas que tenían sobre la nueva tarea que tenían, cuando finalizaron nuevamente se les pide que cuenten cuál fue la tarea que representaron y algunos comentarios fueron los siguientes:

E2: la tarea es extender un patrón"

E1: Yo creo que lo que hicimos la actividad pasada (era el boceto para extender el patrón que a cada equipo le correspondía, como una especie de prueba en un papel pequeño para después pasarlo al diseño grande, eso referido al contexto informal)

E24: Yo creo que también haremos bocetos para poder completar un patrón

Hasta este momento, se puede observar cómo los estudiantes muestran la capacidad para anticipar o predecir lo que iba a suceder en términos de las figuras presentes en la historieta. A su vez, demuestra cómo son capaces de producir esas secuencias figurales a partir de la experiencia previa que habían tenido en la sesión anterior, por lo que al observar la presencia de elementos que cambiaban y permanecían constantes entre los personajes fueron capaces de idear lo que iba a pasar en las siguientes partes de la historieta a términos cercanos de extender una secuencia figural.

Después, se les indica que la tarea nueva de ellos será extender un patrón referente a un panal de abejas, esta tarea estaba presente en la parte número 7 de la historieta (Obsérvese la figura 14), por lo que ellos debían extenderla en la parte número 8 de la historieta que se encontraba en blanco.

Figura 14. *Patrón por extender de la historieta*

Nota. Tarea que debían completar en la historieta (Fuente: propia elaborada en canva)

En este momento, se les invitó a realizar una tabla que relacionara el número de la figura, con la cantidad de hexágonos. A lo que ellos respondieron lo siguiente (figura 15):

PF: Figura número 1 ¿Cuántos hexágonos tiene?

E2: 8 profe

PF: la figura número 2 ¿Cuántos hexágonos tiene?

E2: 12

PF: la figura número 3 ¿Cuántos hexágonos tiene?

E2: 16 profe, esa tiene 16

PF: Listo a hora vamos a mirar por qué cada una tiene esa cantidad y cuál sería el patrón para llegar a eso, ¿Cómo creen que se puede extender más el patrón? [Aquí la idea era empezar a involucrar a los estudiantes en proponer patrones numéricos/simbólicos para la solución de este].

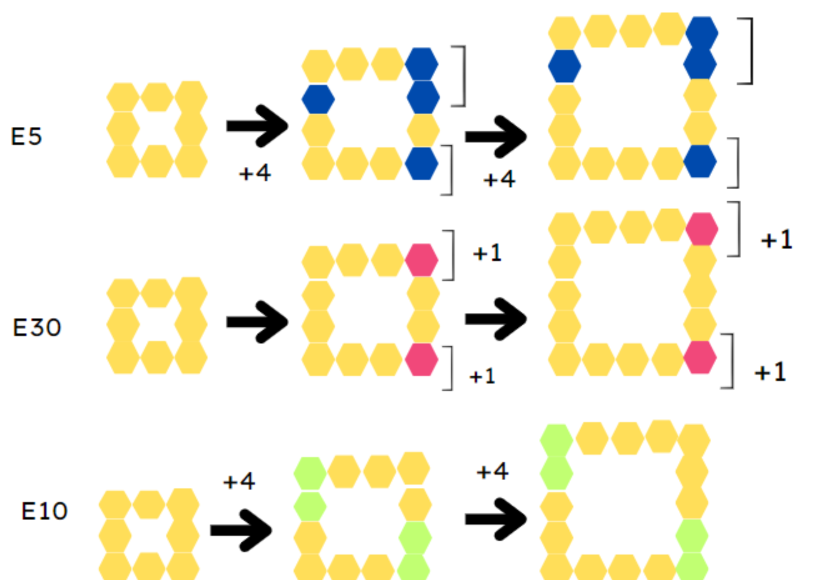
A partir de lo anterior, se desarrolló una conversación entre la profesora en formación y los estudiantes:

E5: Sumándole 4 al anterior

E30: sumándole 1 arriba y otro abajo en cada figura

E10: aumenta de 4 en 4.

***Figura 15**. Representación a las estrategias de los estudiantes*



Nota. Representación a las estrategias de los estudiantes (Fuente: propia elaborada en canva)

En este caso, los estudiantes identificaron varias formas de explicar cómo debían resolver el problema para extender el panal de la figura N°4, por lo que cada uno se podría explicar así:

1. E5: Si el primer término de la secuencia es h_1, el segundo termino sería $h_2 = h_1 + 4$, el tercer término sería $h_3 = h_2 + 4$, y así sucesivamente. En términos matemáticos, esto

se puede expresar como una relación de recurrencia: $h_n = h_n - 1 + 4$ [h refiriéndose al número de hexágonos y n al número de la figura]

2. E30: este estudiante está aplicando una estrategia aditiva de 2 al término anterior. esto se puede expresar como una relación de recurrencia: $h_n = h_n - 1 + 1$ en ambas posiciones
3. E10: En este caso, la secuencia está aumentando de 4 en 4 en cada término. Esto se puede expresar como: $h_n = h_1 + 4(n-1)$. $h_1$se refiere al primer término de la secuencia.

Si bien los estudiantes dan respuestas basadas en su habilidad para reconocer y aplicar reglas o identificar relaciones entre elementos. Hasta ahora, no se puede afirmar que todas son "válidas" para determinar la cantidad de hexágonos en las otras figuras. A pesar de las variaciones en las respuestas, lo que resulta intrigante es el proceso cognitivo subyacente en el que los estudiantes pueden identificar rápidamente la relación entre los elementos de la secuencia y así determinar cómo cambian los números, permitiéndoles inferir una regla que describe ese cambio. Esta habilidad cognitiva no solo evidencia un nivel de comprensión avanzada en términos de reconocimiento de patrones, sino que también sugiere un profundo nivel de razonamiento inductivo. Además, a partir de las producciones de los estudiantes y mediante las orientaciones de la profesora en formación, se evidencia que los estudiantes se acercan a una manera funcional de describir el patrón, es decir, notan la correspondencia en entre el número de la figura y la cantidad de hexágonos

Después de proponer y analizar las estrategias de los estudiantes, se pasó a completar la figura según habían propuesto ellos, por lo que se obtuvo una figura con 20 hexágonos. Luego, trabajó con la cantidad de hexágonos presentes en la figura, entonces la profesora les dice:

PF: Miremos esta (Centrándonos en la figura 1) ¿Cuál es el número de la figura 1?

E36: 1

PF: ¿cuántos hexágonos hay en cada esquina o punta del cuadrado que se forma? (Aquí se les ayudó un poco señalándoles)

PF: y ¿cuántos hexágonos aumenta según cada figura?

E36: 4.

Entonces según los datos obtenidos en esas respuestas, la profesora pasó a explicarles lo siguiente:

PF: para descubrir cómo saber cuántos hexágonos tiene una figura también podemos hacerlo así (Obsérvese la figura 16).

Figura 16. *Representación numérica de las figuras*

Figura	1	2	3	4
Cantidad de hexágonos	8	12	16	20
Patrón	(1 x 4) + 4	(2 x 4) +4	(3 x 4) + 4	(4 x 4) + 4

Nota. Representación numérica de las figuras (Fuente: propia elaborada en canva)

Lo anterior hacía referencia a que el primer término corresponde al número de la figura, el segundo término es la cantidad de hexágonos que siempre van en las esquinas, es decir, 4 y el tercer término corresponde a la cantidad en la que aumenta como dijeron los estudiantes. Aquí se les propuso un caso donde ellos debían decirle a la profesora el patrón que debían utilizar para descubrir la cantidad de hexágonos presentes en determinada figura. Para eso, la profesora les dijo *PF: Entonces, si queremos haber cuántos hexágonos tiene la figura 8 ¿Qué debemos hacer?*

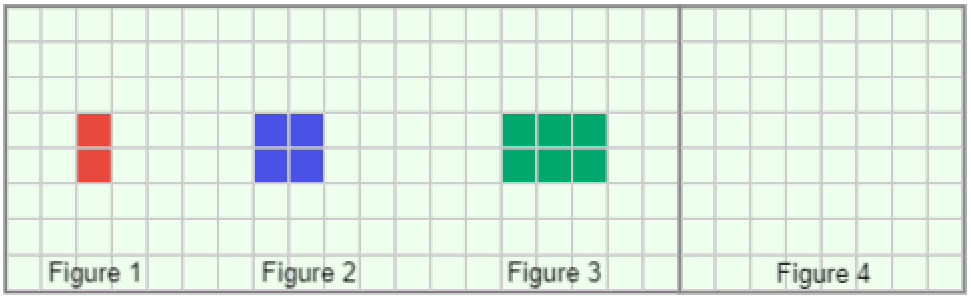
y el diálogo ocurrido fue el siguiente: *E25: Sumarle 4.* La profesora a partir de esa intervención empezó a mediar la solución, pero eran los mismos estudiantes quienes aportaban y la profesora solo escribía en el tablero; *"PF: ¿A qué le sumamos 4?", "E24: a la figura".* En este momento, una estudiante menciono todo el proceso que se debía hacer para identificar la cantidad de la figura 8 entonces dijo: *"E2: ponemos el 8 por 4 más 4"* a lo que la profesora como retroalimentación dijo *"PF: ¿Por qué 8?"* y la misma estudiante respondió *"E2: porque es el número de la figura".*

Lo sucedido anteriormente demuestra que los estudiantes utilizan un razonamiento algebraico enfocado en el uso de estrategias aditivas y multiplicativas para identificar la cantidad de hexágonos que necesitan saber. Cabe resaltar que debido a actividades anteriores o a mediaciones por parte de la profesora, los estudiantes logran formar pequeñas frases claves mediante el uso de la formulación algebraica para dar a entender cómo ocurre una generalidad en un patrón. Vergel (2015) refiere lo anterior como esa capacidad de identificar la característica común para términos cercanos y referirla más allá de gestos o dibujos, es decir, usar el lenguaje para proponer una frase clave que tiene rastros de generalidad usadas para referir términos más alejado de una secuencia. Por ejemplo, los estudiantes al abordar términos más lejanos de la secuencia empiezan a notar y describir la correspondencia apoyados en el pensamiento aritmético que han desarrollado.

Ahora bien, después de eso, se pasó a una actividad llamada *Finding Patterns* a través de la cual se hacía uso de una herramienta tecnológica de gamificación llamada Gizmos, esta actividad consistía en que cada grupo de estudiantes debía completar una secuencia que se encontraba en la pantalla y a su vez, encontrar la relación existente entre la figura, la cantidad de cuadros y de qué manera se resolvía, en este caso cuál era el patrón que permitía solucionarlo.

Uno de los equipos tenía la tarea de resolver el siguiente patrón:

Figura 17. *Tarea alusiva a la extensión del patrón en la aplicación*



Nota. Representación gráfica de la extensión del patrón en la aplicación (Fuente: Aplicación *explore learning Gizmos)*

En este momento, se les explicó a los estudiantes que debían extender el patrón, para esto debían encontrar la estrategia/regla que les permitiera hacerlo y después seleccionaran con el mouse las casillas correspondientes [La idea en este momento era para extender el patrón con la finalidad de construir patrones de crecimiento]. Este equipo expresó de la siguiente manera la forma de solución de la tarea:

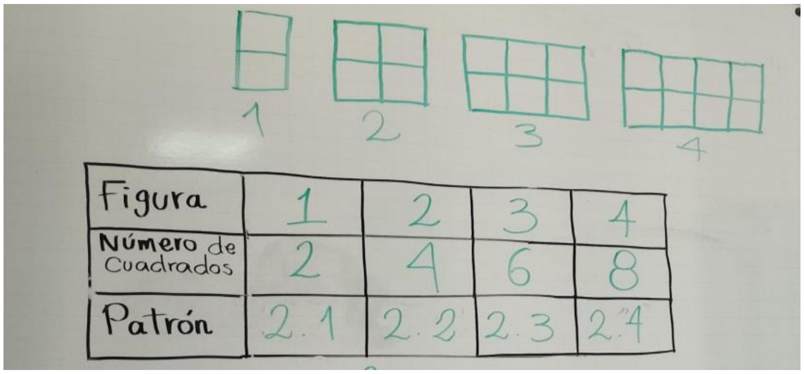
E32: Aumenta de 2 en 2

E5: podemos sumarle 2 a cada figura

E1: podemos multiplicar el número de la figura por 2

PF: vamos a completar la tabla (obsérvese la figura 18).

Figura 18. *Representación tabular de la información del patrón*



Nota. Cuadro completado por los estudiantes a partir del uso de una de las estrategias proporcionadas (Fuente: fotografía propia).

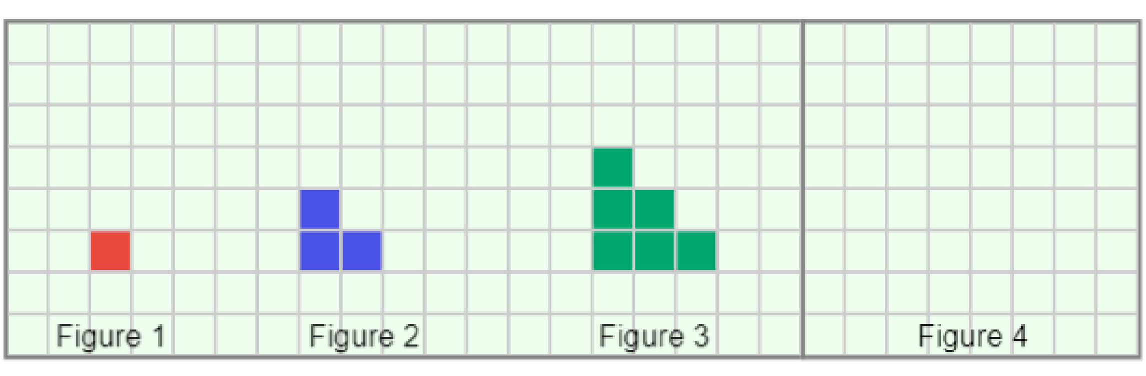
El proceso de pensamiento llevado a cabo por el equipo refleja dar una mirada a la forma aritmética y de crecimiento exponencial basada en las estrategias multiplicativa y/o aditiva de solucionar el patrón, es decir:

1. E32 parece estar utilizando una estrategia enfocada en observar que hay un aumento constante de 2 unidades (cuadros) entre las figuras sucesivas [Percibe un patrón aritmético]
2. E5 sugiere una operación aritmética directa que consiste en sumarle 2 a cada figura en la secuencia respecto a la anterior.
3. E1 propone una estrategia diferente, utilizando la estrategia multiplicativa por lo que sugiera que el número de cada figura debe multiplicarse por 2 [Crecimiento].

Lo anterior refiere que los estudiantes pudieron observar en primera instancia la diversidad de estrategias que podían ser aplicadas para la solución de dicho patrón. Si bien todas son correctas y demuestran como esas estrategias de descripción de un patrón puede variar dependiendo del enfoque que se le quiere dar. Sin embargo, como se ha venido dando hasta el momento los estudiantes tienden a recurrir a operar a la figura anterior para poder dar solución a las siguientes, este tipo de análisis de forma recursiva implica que los estudiantes han hecho una observación de detalles inmediatos y repetitivos de las figuras por lo que puede convertirse en un obstáculo a la hora de querer identificar una estructura de comportamiento del patrón más adelante y así tendrán dificultad en reconocer tendencias más amplias y/o aquellas estrategias que lo rigen. Pero, empiezan a reconocer que no solo son las formas de la figura las que se operan para encontrar el patrón, sino que también es un elemento fundamental el número de la figura, la cantidad en la que aumenta cada uno, entre otros.

Otro de los equipos tenía la tarea de resolver el siguiente patrón:

Figura 19. *Tarea alusiva a la extensión del patrón en la aplicación*



Nota. Representación de la extensión del patrón en la aplicación (Fuente: Aplicación *explore learning Gizmos)*

A este equipo se le explicó nuevamente que la idea era extender el patrón y que ellos debían encontrar la regla/estrategia para resolverlo. A lo que la profesora les dijo "*PF: ¿Cuáles estrategias descubrieron para poder identificar la cantidad y la forma en la que debía quedar la figura?"* a modo que surgió el siguiente diálogo:

E24: Pues nos fijamos en la cantidad de cuadros que tenían las anteriores, en el primero había 1 entonces el segundo seguía teniendo el 1 abajo, pero se le agregaba otros 2 para que nos dieran 3 y a la siguiente podíamos mirar que seguía teniendo la figura 1 inicial y, pero le sumamos 5 más para que nos diera 6 que era la cantidad.

En este parte del diálogo se presentó otra situación atípica porque por más de que E24 y otro compañero enfatizaran en que se resolvía de esa manera, otros dos del equipo sugirieron que decían sumarle 2 al número anterior, sin embargo, la profesora les dijo: *"PF: Vamos a ver si cumple, si le sumamos 2 a la figura 1, ¿Cuánto nos da?"* y aquí evidenciaron las siguientes respuestas:

E36: 3

PF: bien, y si le sumamos 2 a esa figura que tiene 3, ¿Cuánto nos da?

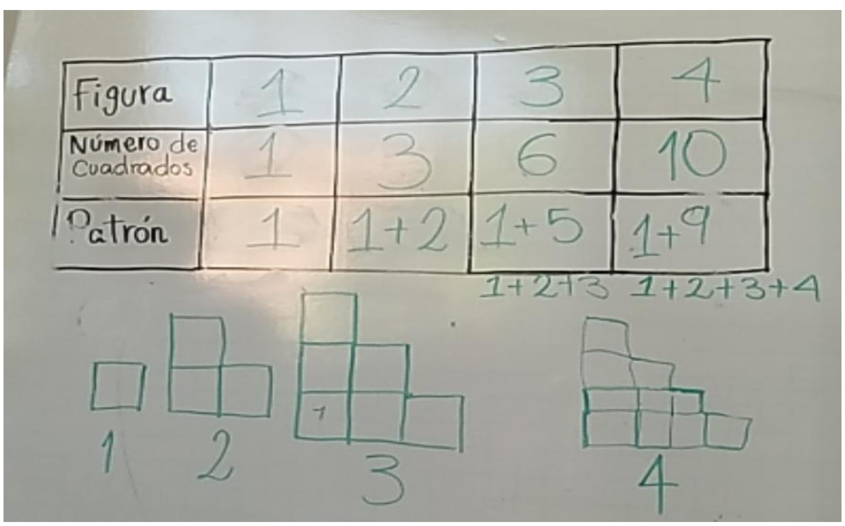
E36: 5

PF: Ahora si le sumamos 2 a ese 5, ¿Cuánto nos da?

E3: 7

Aquí la profesora les preguntó: *"PF: Entonces, ¿estaría bien?, cumplirían con la cantidad de cuadritos que necesitamos para formar las figuras?* a lo que los estudiantes se dieron cuenta que esa estrategia fue propuesta de forma errónea.

Figura 20. *Representación tabular de la información del patrón*

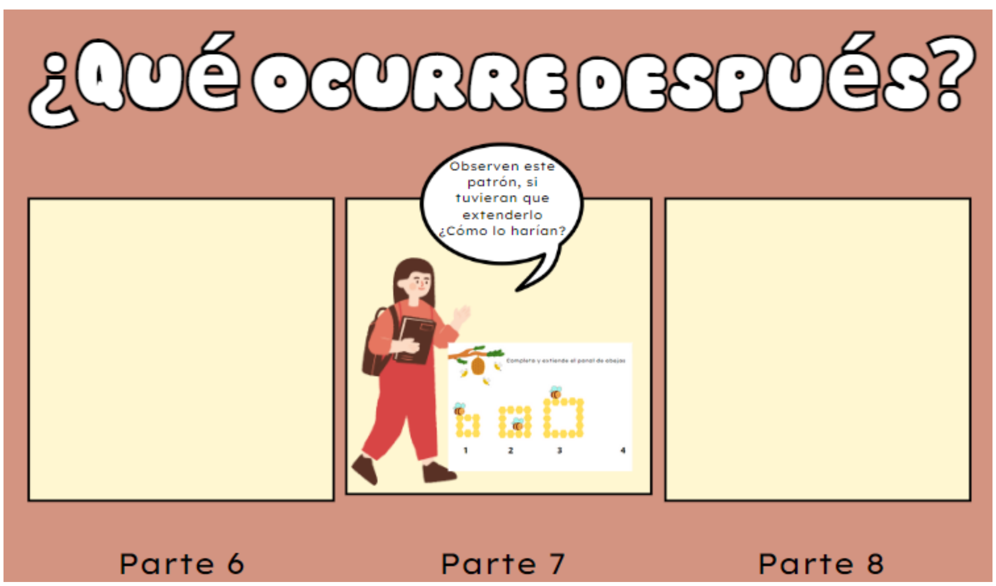


Nota. Representación a la estrategia optada por los estudiantes para la solución del patrón

(Fuente: Fotografía propia)

De la evidencia anterior, referida a contextos intermedios se pudo notar que los estudiantes demostraron esa capacidad que tienen ya no solo de observar y registrar información como lo hacían en el nivel 1, sino que también empiezan a deducir principios fundamentales que subyacen a los procesos de cambio y crecimiento que pueden tener las figuras lo que les permitió tomar decisiones frente a lo observado y así proponer estrategias clave para la solución de los problemas. A pesar de ellos, algunas limitaciones en este nivel fueron evidentes, como el recubrimiento a dar propuestas de forma recursiva, que, como se mencionaba en apartados anteriores, limita al estudiante en su capacidad para explorar nuevas perspectivas y enriquecer su comprensión de los patrones puesto que, constantemente tendrá que recurrir a la figura anterior para poder pensar en la siguiente y si en determinado momento, no está dicha figura será un “choque cognitivo para él/ella”. En términos generales usar la historieta permitió que los estudiantes visualizaran y comprendieran la relación existente entre diferentes partes de la historia y cómo los personajes cambian y permanecen constantes a favor de crear una secuencia figural en cada una de estas (Obsérvese la figura 21).

Figura 21. *Historieta para completar*



Nota. Secuencia de la historieta que los estudiantes deben imagina y completar (Fuente. Propia elaborada en canva)

Lo anterior favorecer el uso del pensamiento algebraico para describir la manera de determinar términos más alejados de la secuencia, lo cual crea un escenario para acercar al estudiante al estudio de lo indeterminado y más adelante el uso de símbolos alfanuméricos.

Por otra parte, la aplicación *explore learning Gizmos* permitió que los estudiantes manipularan y observaran secuencias de forma más dinámica. En cuento al desarrollo del pensamiento algebraico llevó a que los estudiantes fortalecieran ese reconocimiento a la forma general en la que cambian las figuras según la posición en la que están, potenciando así su capacidad de describir esos cambios en términos más complejos. Por ejemplo: los estudiantes empiezan a darse cuenta de que no solo implica reconocer que determinada figura tiene tantos cuadros, sino que existen unas estrategias que las rigen las cuales dan explicación al porqué de esa cantidad de figuras. Se considera es importante hacer el andamiaje de la construcción de figuras en el aparato tecnológico con lo que refiere a reconocimiento de las variables que operan dicha construcción mediante una tabla donde se haga visible la conexión entre la figura, la cantidad de elementos que esta posee y de qué manera permanece constante, crece, y/o disminuye.

4.4 Nivel 3. enseñanza en contextos formales

Este refiere a un nivel en el cual se lleva a cabo la formalización del conocimiento matemático, empleando el lenguaje formal (símbolos y gráficos). Este nivel estuvo enfocado a la solución de una guía que será analizada en los siguientes apartados (Alsina, 2020).

La primera tarea consistía en observar nuevamente uno de los patrones que habíamos creado en el nivel 1 referente a la forma en la que crecían unas flores de platanillo (obsérvese la figura 22), donde se les proponía a los estudiantes reconocer la estrategia/regla utilizada en la secuencia para dar solución a determinadas preguntas. Antes de empezar la solución, los estudiantes ya tenían previo conocimiento a esta por lo que dijeron: *"Profe, esa aumenta de 2 en 2"* entonces la profesora les dice: *"PF: Entonces ya sabemos que está aumentando de 2 en 2, entonces, ¿Cómo creen que quedaría el patrón?* y los estudiantes responden:

E1: Primero ponemos el 2 en la operación

PF: ¿Por qué 2? y los estudiantes responden haciendo alusión a que 2 es la cantidad en la que aumenta la figura como ya habían mencionado anteriormente.

PF: Después, ¿Qué colocamos?

E5: el 1

PF: ¿Qué representaría ese 1 en la operación?

E36: El número de la figura

PF: Nos falta algo, ¿Qué debemos hacer para que nos de la cantidad de pétalos presentes en la figura 1?

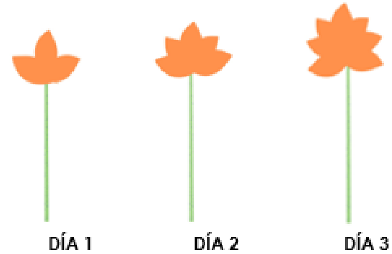
E3: Sumarle

PF: ¿Cuánto le sumamos?

E7: 1

PF: Entonces el patrón nos quedaría $2n + 1$ *[* n *refiriéndose al número de la figura].*

Figura 22. *Tarea alusiva a las flores de platanillo*



Nota. Representación gráfica de la tarea (Fuente: propia elaborada con canva)

Las preguntas que debían resolver los estudiantes eran las siguiente (se adjuntan también algunas respuestas). Una de estas era ¿Cuántos pétalos tendrá la flor en el día 8? ¿Por qué? a lo que un estudiante dijo: *E7: mira vamos a hacerlo así, 2 por 8, es 16 más 1, igual a 17 entonces al día 17 la flor tendrá 17 pétalos*

Otra de las preguntas era: ¿Cuántos pétalos tendrá la flor en el día 12? ¿Por qué? y un estudiante dijo: "*Profe yo ya se cómo va ese*" y la profesora le dijo: *¿Cómo?* y E6 dijo: *"sabemos que el 12 es el día que nos están pidiendo entonces hacemos la operación, 2 por 12 que nos da 24 y le sumamos 1 entonces nos da 25 pétalos".*

En este punto, los estudiantes están demostrando una comprensión más profunda y simbólica del patrón y están utilizando estrategias de razonamiento y cálculo para predecir el número de pétalos en días específicos que le son solicitados. Si se analizan las respuestas en conjunto se puede evidenciar que un estudiante está aplicando un razonamiento matemático basado en la comprensión de la relación existente entre el número del día y la cantidad de pétalos presentes en cada uno de ellos. Otro demuestra el uso de estrategias multiplicativas para la resolución del problema, explicando al igual que el anterior la relación de cantidad entre el número del día y la cantidad de pétalos. El hecho de que ambos estudiantes propongan ese mismo tipo de estrategias refleja una manera consistente de aplicar dicha estrategia sólida para la comprensión del patrón, lo que demuestra un progreso significativo en su capacidad para resolver este tipo de problemas.

Después la profesora propone una situación:

PF: Si yo les pregunto la cantidad de pétalos del día 20, ¿cómo quedaría?, ¿Qué tengo que hacer?

E13: $2 \times 20 + 1$

PF: ¿Cuánto nos da?

E1: 41

Entonces aquí la profesora hace alusión que esa es una manera más rápida de resolver un patrón o de descubrir una cantidad sin necesidad de dibujar todas las flores hasta el día solicitado. Esto implica que se pasa de extender patrones basándose en la recursividad a empezar a trabajar patrones por correspondencia, es decir, ir a términos más lejanos de una secuencia sin necesidad de pensar en el anterior para poder resolverlo [Aquí se hicieron varios ejercicios con valores más altos como 25, 110]. luego, la profesora les dijo lo siguiente:

M: Siguiente Tarea, ¿Cómo le explicarían a un amigo si tuviera que encontrar la cantidad de pétalos del día 25? Sin tener que dibujar todas las flores de los días anteriores. Ahí viene un recuadro donde ustedes escribirán como le van a explicar

A lo que dos de los estudiantes respondieron así:

E28: Yo le explicaría que tiene que multiplicar 2×25 *y le darían 50 y después le suma 1 y le saldrían 51 pétalos en el día 25*

E2: Yo le día que $2\ x\ 25$ *es 50 y le suma 1 y serían 51*

Así ella fue pidiéndole a los estudiantes que le explicaran porque usaban esos números y términos en las operaciones que hacían, por ejemplo*: PF: ¿Por qué le dirían 2 por 25? ¿El 2 qué representa?*

E1: el aumento

PF: ¿Y qué representa entonces ese 25?

E2: el día

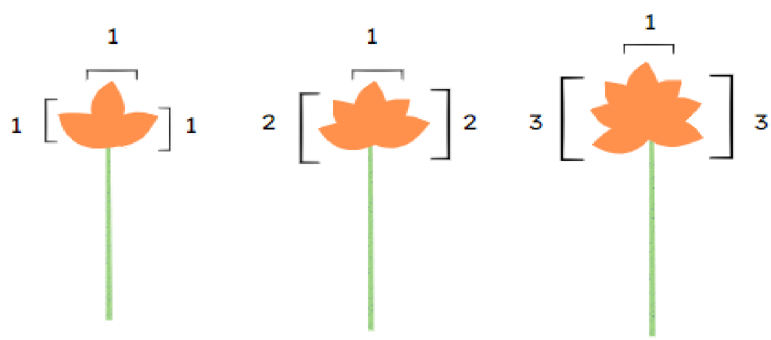
PF: ¿y el 1?

E2: lo que le falta

En términos de los aportes de los estudiantes es evidente que están demostrando una comprensión sólida del patrón y están utilizando estrategias de cálculo para generalizar y explicar cómo determinar la cantidad de pétalos en un día específico sin tener que dibujar todas las flores anteriores. Ambos estudiantes emplearon la estrategia de multiplicar el número del día por 2 y luego sumarle 1. Por ejemplo, para el día 25, multiplicaron 2 por 25, lo que dio 50, y luego añadieron 1, obteniendo 51 pétalos. Al cuestionarlos sobre el significado de los números y términos en las operaciones representa una forma de ver qué tan claro y comprendido tiene el estudiante el patrón, en este caso, los estudiantes si pudieron mencionar que dichos patrones representan la cantidad en la que aumenta, el día solicitado, etc., mostrando una comprensión clara del contexto del problema.

En determinado momento, se orientó a ver la relación geométrica que siguen los pétalos en las figuras (figura 22).

Figura 23. *Representación de la observación geométrica*



Nota. Características geométricas (Fuente: propia elaborada con canva)

En este espacio, se les pidió a los estudiantes que fueran mirando la forma en la que se ubicaban los pétalos en cada flor y la cantidad que había en cada extremo (como se muestra en la figura 22), a lo que ocurrió el siguiente diálogo con la profesora:

E1: La figura 2 tiene 2 a cada lado y 1 arriba

E7:la figura 3 tiene 3 a cada lado y 1 arriba

PF: ¿Cómo quedaría la figura 4 y 5?

E2: la 4 queda con 4 pétalos a cada lado y 1 arriba

E8: la 5 queda con 5 y 5 y 1 arriba"

Luego se les preguntó por términos más lejanos como 30 a lo que los estudiantes respondieron:

E36: 30 a cada lado y 1 arriba

Hacer notar la relación geométrica fue una forma de demostrar que los estudiantes podían visualizar de manera más clara y rápida el patrón que cumplen esos pétalos sin centrarse en utilizar una operación. Además, fue una forma para que ellos pudieran formular reglas generales que describieran cómo cambia la cantidad de pétalos a medida que progresa el patrón (ejemplo del día 30). Asimismo, como se mencionaba en apartados del marco teórico, el pensamiento algebraico es un pensamiento que abarca diferentes aspectos de distintas áreas de la línea matemática, por lo que hacer notar la relación geométrica se está conectando el conocimiento previo que tienen en esta área los estudiantes y el patrón, ayudándoles a integrar y aplicar esos conceptos con mayor facilidad.

La segunda tarea, consistía en completar el patrón para resolver el problema y así completar una tabla en la que se observaran la identificación de la relación existente entre la figura y la cantidad de cuadros que tenía cada una, para eso, la profesora les preguntó:

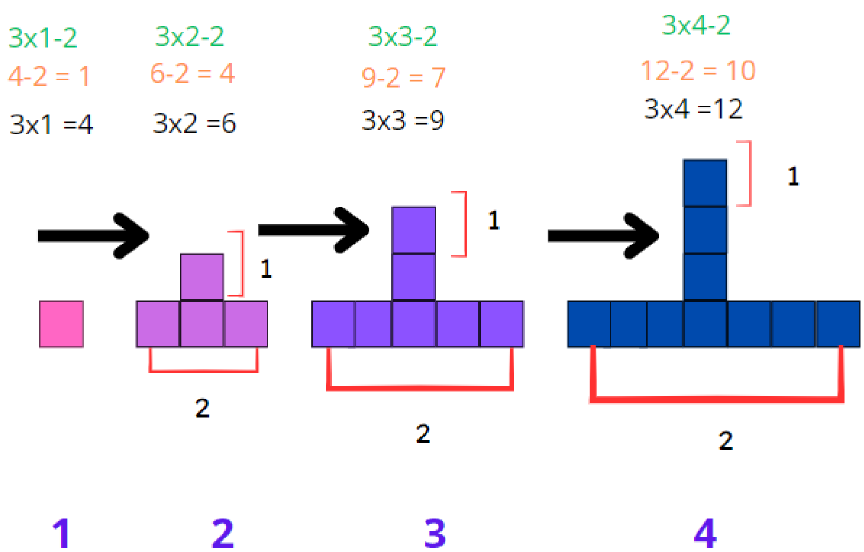
PF: Vamos a ver, ¿De a cuánto aumentaba cada figura?

E11: 3 en 3

PF: ¿Cómo quedaba entonces el patrón?

E2: 3 el número que aumenta, lo multiplicamos por el día que es corresponda y le restamos la cantidad de cuadros que sobra siempre que es 2 (obsérvese en la figura 23).

Figura 24. *Representación de la respuesta de los estudiantes*



Nota. Respuesta de los estudiantes (Fuente: Propia elaborada con canva)

Siendo los números azules el número de la figura, los corchetes rojos la cantidad de cuadros que aumenta cada figura, naranja la cantidad que sobra o que se le debe restar a cada figura para que corresponda a la cantidad observada en las imágenes, entonces, el patrón dado por los estudiantes cumple con la lógica para solucionar la tarea. Después, para asegurarse de eso, la profesora hace el último ejercicio:

PF: Muy bien y en dado caso que yo les pida el día 46, ¿Cómo sería?

E2: 3x46-1

PF: ¿Cuántos cuadritos quedarían?

E2: 136 [La estudiante realiza la operación en su mente]

En este punto se podría decir que los estudiantes con el tiempo y la práctica demostraron que se han familiarizado con los diferentes tipos de patrones y la forma más rápida para hallar la relaciones entre estos. Además, si bien los estudiantes no están usando símbolos alfanuméricos, se evidencia que pueden extender la característica común a términos más lejanos de la secuencia, lo que de acuerdo con Radford (2000) y Vergel (2015) favorece el sentido de la indeterminancia y promueve la necesidad de signos (símbolos) para comunicar la relación entre el número de la figura y el número de pétalos o lo que corresponde.

5 Conclusiones

En cuanto al itinerario y la implementación de cada nivel de enseñanza se concluye lo siguiente, principalmente se debe reconocer que introducir conceptos previos al álgebra en la Educación Básica Primaria permite que los estudiantes comiencen a desarrollar habilidades de pensamiento algebraico. Esto, en relación con las capacidades de resolución de problemas y argumentación matemática, les capacita para representar, describir, comprender y razonar sobre conceptos matemáticos.

A partir de los hallazgos de esta investigación, en el nivel 1. Enseñanza en contextos informales los estudiantes son capaces de expresar y evocar el pensamiento más enfocado a los movimientos, y perciben ciertas palabras como el mecanismo para referir a la indeterminancia, por lo que los estudiantes pueden reconocer patrones (entre ellos los de repetición) que involucre no solo el color, sino también las formas, cantidades, ritmos, etc. Aunque, a pesar de contar con un nivel de conocimiento más avanzado, los estudiantes continúan utilizando estrategias recursivas para resolver los problemas. Esto se debe a que la recursividad les brindaba una estructura confiable para enfrentar nuevos patrones. En consecuencia, emplearon este enfoque u observación como un tipo de apoyo mental que les facilitaba abordar las figuras siguientes con mayor seguridad. De este nivel de enseñanza en contexto informal se destaca la importancia de crear espacios en el aula de clase que le permitan a los estudiantes ir de lo concreto a lo abstracto a la vez que permite un encuentro más auténtico y significativo con el conocimiento matemático, por lo que se considera que la salida a la UIS fue un espacio oportuno para que los estudiantes reconocieran patrones, regularidades y se sumergieran en el universo de secuencias figurales.

En el nivel 2. Enseñanza en contextos formales, los estudiantes demostraron como lograron identificar los principios esenciales que subyacen en los procesos de transformación y expansión de las figuras, lo que les posibilitó analizar lo observado en las tareas propuestas y, en base a ello, proponer estrategias fundamentales para resolver los problemas. Si bien, sus estrategias fueron cambiando y aumentando de nivel, pasando de decir “tiene un cuadro más a la derecha” a mencionar “Podemos multiplicarlo por 3”, lo que demuestra cómo fueron empleando poco a poco estrategias multiplicativas y aditivas que les permitieron demostrar en términos más matemáticos las formas de cambio de las figuras, lo que indica que la manera de describir la característica común fue ganando mayor rigurosidad. El uso de la historieta proporcionó una herramienta visual para demostrar cómo en la sucesión se observan o se crean secuencias figurales que incentivó en los estudiantes reconocer la relación existente entre cada una de las partes y como estas cambiaban en entorno a la continuidad de la historia. Por otra parte, la naturaleza discontinua del texto favoreció el trabajo de los estudiantes guiándolos a completar secuencias o extenderlas, generando un escenario oportuno para la emergencia de lo indeterminado y la característica común. Además, esta resultó ser una contribución autentica del trabajo puesto que no se han evidenciado hasta el momento la vinculación de esta para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano desde la perspectiva de los itinerarios.

En el nivel 3. Enseñanza en contextos formales hubo limitaciones en torno a que no se pudieron llevar a cabo completamente las actividades, sin embargo, se pudo observar cómo los estudiantes tendían a reconocer en las imágenes una correspondencia entre el número de la figura de la secuencia y los otros elementos que las componían (pétalos, cuadros, etc.). Lo que los llevó a acercarse al reconocimiento de la indeterminación desde un punto de vista más general y usando términos más alejados de la secuencia, generando el ante sala para pensar en un caso cualquiera, lo cual es característico de la designación simbólica, es decir, un primer uso de la variable. Por lo que desde el punto de vista matemático y didáctico es necesario hacer hincapié en el reconocimiento que tuvieron los estudiantes de la dependencia entre cantidades en aras de apuntar a la relación existente entre variables, esto anterior es un ejemplo de cómo en el nivel formal los estudiantes extendieron secuencias no necesariamente figurales sino numéricas.

Además, es crucial destacar que, al analizar los determinados currículos de matemáticas, se observa que países como España y Estados Unidos ya están implementando proyectos específicos orientados al desarrollo del pensamiento algebraico. Estos proyectos se centran en la creación de actividades que fomentan la habilidad de identificar regularidades y patrones en contextos matemáticos. Este enfoque innovador no solo fortalece las capacidades algebraicas de los estudiantes, sino que también les proporciona habilidades analíticas y de resolución de problemas de gran relevancia en el mundo actual. Chile también se ha destacado por proponer proyectos innovadores en el ámbito de la enseñanza del álgebra temprana. Estas iniciativas están diseñadas para introducir conceptos algebraicos de manera accesible y efectiva en los primeros niveles de educación primaria. A través de enfoques pedagógicos adaptados a las capacidades de los estudiantes más jóvenes, se busca fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico desde una etapa temprana, sentando así las bases para un aprendizaje matemático sólido y progresivo a lo largo de la trayectoria educativa. Por lo que se espera que en Colombia a futuro también se empiecen a incorporar más proyectos que permitan darle el mismo nivel o peso de importancia a los demás pensamientos, no solo al numérico.

6 Recomendaciones

Para futuras investigaciones relacionadas con el diseño de itinerarios para promover la enseñanza del álgebra temprana en primaria, se sugieren las siguientes recomendaciones:

- Es fundamental tener en cuenta que, al implementar itinerarios, la labor va más allá de la simple planificación. En el contexto del aula, existen diversas limitaciones y obstáculos que pueden dificultar el seguimiento preciso de dichos itinerarios. Por ello, es imperativo tener preparados planes alternativos, es decir, un plan B y C, para adaptarse a las circunstancias y garantizar un proceso educativo efectivo y enriquecedor para todos los estudiantes.
- El itinerario pilotado pretende servir de insumo para orientar los profesores de aula en educación primaria de cómo se puede favorecer el pensamiento algebraico temprano, sin embargo, no se puede ver como algo agotado en el tiempo. En el caso de la investigación en educación matemática a considerar itinerarios en otros niveles de la educación primaria, como 4 y 5 donde se puede pensar un progreso en el nivel formal en relación con la manera en la que los estudiantes, reconocen, usan y transforman objetos algebraicos
- Es crucial tener en cuenta que, tanto en la fase de planeación como en la ejecución de las actividades previstas, es posible que surjan variaciones. Esto es esencial para asegurarse de que se fomenten en los estudiantes habilidades como la observación, la identificación de cambios, y la expresión de significados o patrones. No obstante, es común

que estas actividades requieran ajustes en función del nivel de los estudiantes, y en ocasiones, necesitarán ser guiadas de una manera que inicialmente no se había contemplado.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿Por qué?, ¿Para qué? Y ¿Cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, *3*(2), 127-158. https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12018/5818

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *80*, 7-24. http://funes.uniandes.edu.co/3615/1/i2012HaciaNumeros80.pdf

Alsina, Á. (2019). Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años). Graó Educación: Barcelona. ISBN: 978-84-9980-938-0.

Alsina, Á. (2010). 'La pirámide de la educación matemática': una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. © *Aula de innovación educativa, 2010, núm. 189, p. 12-16*. https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/9481/PiramideEducacion.pdf?sequence

Alsina, Á., Novo Martín, M. L., & Moreno Robles, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/53015/revistas_uva_es__edmain_article_view_5856_4375.pdf?sequence=3&isAllowed=y

Butto Zarzar, C., & Rojano Ceballos, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22*(3), 55-86. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a4.pdf

EDSourse INC (2009). ¿Por qué aprender álgebra? Guía para padres y estudiantes. 520 San Antonio Rd, Suite 200, Mountain View, CA. https://edsource.org/wp-content/publications/pub_algebra_qa_Spanish.pdf

Font, V. (2005). Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una “situación rica”. Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas, 59-91.

Gómez, G. R., Flores, J. G., & Jiménez, E. G. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. &lieion.. Aljibe. SL. 1996. http://148.202.18.157/sitios/catedrasnacionales/material/2010b/ortiz/infmic.pdf

Gómez, P. (2019). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en Colombia: ¿dónde estamos y para dónde vamos? Conferencia presentada en Primer encuentro internacional *“WeMaths”.* Bogotá. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/32084/Aprendizaje-y-ensenanza.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Hernández Sampieri (2014). Metodología de la investigación. Sexta edición por McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. México D.F. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Hurtado de Barrera, J. (2008). Cómo formular objetivos de investigación. Caracas: Editorial Quirón. https://tic.uis.edu.co/ava/pluginfile.php/1093451/mod_resource/content/1/C%C3%93MO%20FORMULAR%20OBJETIVOS%20DE%20INVESTIGACI%C3%93N.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2017). Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria de México y otros países. D.R. © Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación Barranca del Muerto 341, San José Insurgentes, Benito Juárez, 03900, Ciudad de México. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1F210.pdf

Kaput, J.J., Carraher, D.W., & Blanton, M.L. (Eds.). (2008). Algebra in the Early Grades (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebraizing" the K-12 curriculum. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. The mathematics educator, 8(1), 139-151. https://www.researchgate.net/profile/Carolyn-Kieran-2/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/55895b8408ae2affe714d428/Algebraic-thinking-in-the-early-grades-What-is-it.pdf

Korthagen, F. A. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. Revista interuniversitaria de formación del profesorado. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/37598/LaPracticaLaTeoriaYLaPersonaEnLaFormacionDelProfes-3276048.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Linares (2013). ¿Por qué somos tan malos en Matemáticas? Editorial EL TIEMPO. https://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-13088961

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study*, 45-70. https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-8131-6_4

Lüken, M. & Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in Early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children’s patterning competencies, *Mathematical Thinking and Learning*, DOI: 10.1080/10986065.2020.1719452.

Mayorga-Ponce, Virgen-Quiroz, Martínez-Alamilla, y Salazar-Valdez (2020). Prueba piloto. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo Publicación semestral, Vol. 9, No. 17 (2020) 69-70.

Mejías, C., & Alsina, Á. (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de Educación Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *105,* 81-102. http://funes.uniandes.edu.co/23567/1/Mej%C3%ADas2020La.pdf

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Ministerio de Educación Nacional. ISBN 958-691-290-6. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Moreno, G. A. (2015). Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos. http://funes.uniandes.edu.co/11561/1/Moreno2015Una.pdf

Mojica & Martínez (2017). Una caracterización del pensamiento algebraico en los libros de texto de educación primaria. *Pensamiento Algebraico en México desde diferentes.* https://www.researchgate.net/publication/332763102_Una_caracterizacion_del_pensamiento_algebraico_en_los_libros_de_texto_de_educacion_primaria

National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-9988. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17719/Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics.pdf?sequence=1&isAllowed=y

OECD (2018). Programme for international student Assessment (PISA) results from PISA 2018. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

Planas, N., & Alsina, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior* (Vol. 257). Barcelona: Graó.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*, 237-268. https://link.springer.com/article/10.1023/A:1017530828058

Rico, L. y Moreno, A. (2016). Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria. Ediciones Pirámide. Grupo Anaya, S. A. Madrid.

Valencia (2011). Revisión documental en el proceso de investigación. Univirtual Aprendiendo juntos. https://univirtual.utp.edu.co/pandora/recursos/1000/1771/1771.pdf

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, *54*, 9-35. https://link.springer.com/article/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/algebra_escolar_y_pensamiento_algebraico_aportes_para_el_trabajo_en_el_aula.pdf

Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9(3), 193-215. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6220/5534

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano0ay_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf

Apéndices

Apéndice A. *Consentimiento Informado de la Universidad Industrial de Santander*

Universidad Industrial de Santander

Licenciatura en Educación Básica Primaria
Escuela de Educación
Facultad de Ciencias Humanas

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PADRES O CUIDADORES

Estimado Sr./Sra.
Padre de familia o cuidador

Su hijo(a) ha sido invitado a participar en la investigación titulada "Itinerario para la Enseñanza del Álgebra Temprana en tercer grado de primaria**"**, a cargo de Mariana Bautista Prada, estudiante en modalidad de Trabajo de grado de Investigación del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander.

Este estudio se realiza con la finalidad de diseñar un itinerario para la enseñanza del álgebra temprana en estudiantes de tercer de primaria a partir de la revisión de la literatura y el contraste de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas de los países de Colombia, Chile, México, España y Estado Unidos. Para esto, se requiere de la autorización por parte de los padres de familia para realizar una visita a las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander con su hijo(a), la cual estará sujeta a la toma de registros fotográficos y audiovisuales.

Si usted acepta que su hijo(a) participe en este estudio, se le solicitará firme el presente consentimiento mencionando aceptar ante la participación, en caso contrario colocar no acepto.

La participación en esta actividad es voluntaria y no involucra ningún daño o peligro para la salud física o mental de su hijo(a). Si usted no desea que su hijo(a) participe, no implica sanción. Usted tiene el derecho a negarse, también puede optar por retirar al estudiante de este estudio en cualquier momento y la información recogida con sus datos será descartada del estudio y eliminada de las bases de datos.

Los datos obtenidos serán de carácter confidencial, se guardará el anonimato, la identidad de los niños que participen, estará disponible solo para el personal del proyecto y se mantendrá completamente confidencial. Los datos estarán a cargo de la investigadora para el posterior desarrollo de análisis y conclusiones.

Si durante la investigación usted tiene alguna duda, comentario o preocupación relacionadas con la conducción de la investigación o preguntas sobre sus derechos al participar en el estudio, puede dirigirse directamente a la investigadora del proyecto para resolver esto.

ACTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo,____, C.C ____________________________________, acepto que mi hijo(a)____ del grado 3° participe de forma voluntaria y anónimamente en la investigación "Itinerario para la Enseñanza del Álgebra Temprana en tercer grado de primaria", dirigida por Mariana Bautista Prada, estudiante en modalidad de Trabajo de grado de Investigación del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander.

Declaro haber sido informado/a de los objetivos y procedimientos del estudio y del tipo de participación. Por la presente, doy mi consentimiento de que mi hijo (a) participe en las actividades que implican la toma de fotografías y registros audiovisuales y la visita a las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander con la investigadora.

Declaro haber sido informado/a que la participación de mi hijo(a) no involucra ningún daño o peligro para su salud física o mental, que es voluntaria y que puedo negarme a que participe en cualquier momento sin dar explicaciones o recibir sanción alguna.

Declaro saber que la información entregada será **<u>confidencial y anónima</u>**. Entiendo que la información será analizada por la investigadora y que no se podrán identificar las respuestas y opiniones de cada persona de modo personal.

Este documento se firma en dos ejemplares, quedando uno en poder de cada una de las partes.

Nombre del padre de familia o cuidador __________________________

Mariana Bautista Prada __________________________

____

Firma

Apéndice B. *Asentimiento informado*

Licenciatura en Educación Básica Primaria
Escuela de Educación
Facultad de Ciencias Humanas

ASENTIMIENTO INFORMADO

Itinerario para la Enseñanza del Álgebra Temprana en tercer grado de primaria

Hola, mi nombre es Mariana Bautista Prada, soy estudiante del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria. Actualmente estoy realizando estas actividades con ustedes para promover la enseñanza del álgebra temprana, por esto quiero pedirte que me apoyes.

Tu participación en el estudio es voluntaria, es decir, aun cuando tus papá, mamá o cuidador hayan dicho que puedes participar, si tú no quieres hacerlo puedes decir que no. Es tu decisión si participas o no en el estudio. También es importante que sepas que, si en un momento dado ya no quieres continuar en el estudio, no habrá ningún problema, o si no quieres responder a alguna pregunta en particular, tampoco habrá problema.

No tienes que contestar ahora, lo puedes hablar con tus padres y si no entiendes cualquier cosa puedes preguntar las veces que quieras y te explico lo que necesites.

Si decides participar:

- Tendrás que participar en una serie de actividades que realizaremos
- Cumplir las reglas para la visita a la Universidad Industrial de Santander

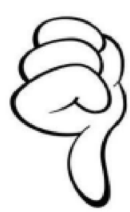
Toda la información que nos proporciones me ayudará en mi proyecto de investigación como futura profesora

Esta información será confidencial. Esto quiere decir que no diré a nadie sobre tu participación, solo lo sabrán las personas que forman parte del equipo de este estudio y tus padres que estarán al tanto de tu participación.

Si aceptas participar, te pido que por favor pongas un (✔) en el cuadrito de abajo que dice "Sí quiero participar", escribas tu nombre y colorea la mano que indica querer participar de tu color favorito

Si no quieres participar, pon un (✔), en la casilla que dice que no quieres participar y colorea la mano que indica "no quiero participar" con el color que menos te gusta

☐ Sí quiero participar ☐ No quiero participar



Nombre: ____

Fecha: _______ de ______________ del 2023.

Universidad Industrial de Santander, Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria. Bucaramanga, Santander

Apéndice C. *Itinerario "El viaje por los patrones rumbo al álgebra"*

	Itinerario de Enseñanza de las Matemáticas	
Asignatura: Matemáticas	**Lugar de implementación:** Institución Educativa de Santander	**Edad:** 7-8 años aproximadamente
Título de la propuesta: El viaje por los patrones rumbo al Álgebra		
Tiempo estimado de duración: 10 horas		**N° de participante:** 36 estudiantes de 3°1
Diseño del Itinerario		

Justificación:

A lo largo de los años se ha reconocido los diferentes enfoques que buscan favorecer el aprendizaje de las matemáticas, su aprendizaje requiere del desarrollo de habilidades cognitivas que faciliten la codificación y descodificación de símbolos, de ahí que las dificultades emergentes para su aprendizaje involucran múltiples factores desde lo socioeconómico, histórico-cultural, cognitivo, etc. y en el contexto Colombiano, en particular, Bucaramanga, el aprendizaje del álgebra se concibe como una asignatura para la básica secundaria aproximadamente desde el grado séptimo u octavo. La propuesta de la presente investigación pretende favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano desde edades temprana a partir del enfoque de Itinerarios para la enseñanza (Alsina, 2019).

De acuerdo con lo anterior, propone implementar una serie de tareas en marcadas en ciertas situaciones que potencie en gran medida las competencias matemáticas y a su vez, se desarrolle el pensamiento algebraico en estudiantes de tercer grado. Para esto, se diseña un Itinerario de Enseñanza cuyo eje articulador se relaciona con el contexto cercano al estudiante. En este sentido, se realizó 3 observaciones en el aula de clase para identificar información relevante para el diseño y construcción del itinerario de enseñanza. Entre los aspectos observados de identifica una estrategia que usa la docente de aula con dos personajes (Juancho y Mary) que actúan como personajes ficticios donde se proyectan situaciones reales de los estudiantes y se vinculan los núcleos conceptuales de las diferentes materias. Considerando lo anterior, se propone un itinerario de enseñanza para el desarrollo del álgebra temprana teniendo en cuenta tres niveles que propone Alsina (2020) como lo son contextos informales, contextos intermedios y contextos formales. para la construcción de sus aprendizajes. Según Alsina (2019) los contenidos algebraicos deben ser organizados de manera que se observe un orden de dificultad creciente planteando situaciones que impliquen un avance de nivel. Además, en el diseño de las situaciones y tareas se tienen en cuenta los tres momentos que propone Alsina para el desarrollo del pensamiento algebraico: i) Identificar objetos algebraicos (Definir y/o reconocer), ii) Relacionar objetos algebraicos (Comparar) y iii) Operar con objetos algebraicos (Cambiar, transformar), en este sentido, el itinerario usa secuencias de patrones se promueva el reconocer, describir, completar, dibujar, extender y crear patrones. Los tipos de secuencias a utilizar corresponden a secuencias con patrones de repetición, crecientes/decrecientes y de correspondencia.
En este orden de ideas se espera que el itinerario de enseñanza sea pertinente con las realidades del estudiante, siga las orientaciones del enfoque de itinerarios de enseñanza y promueva el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Competencias para desarrollar

Área de matemáticas

Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

- Describe de manera cualitativa situaciones de cambio y variación utilizando lenguaje natural, gestos, dibujos y gráficas.
- Construye secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Encuentra y representa generalidades y valida sus hallazgos de acuerdo con el contexto

Derechos Básicos de Aprendizaje

- Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación

Resumen de la experiencia: por medio de la presente propuesta se fortalecerá el Pensamiento Algebraico por medio de una visita a la UIS y observación de diversos elementos característicos de la región, ya sea de forma presencial o virtual para el cumplimiento de determinadas situaciones y tareas encaminadas a la elaboración de bocetos y solución de problemas referentes a patrones.

Secuencia de actividades por sesión (Total 3 sesiones)

Dinámica de Presentación "Patrones Personales"	**Tiempo estimado: 1 hora (60 minutos)**

Materiales: Tarjetas con preguntas y colores, marcadores, cinta adhesiva, tablero para crear patrones visuales

La implementación del itinerario iniciará con un juego para conocernos, pero a su vez explorar los patrones, en este juego se tendrá en cuenta lo siguiente:

1. Se crearán tarjetas en las que se escribirán preguntas sobre los estudiantes, como su edad, color favorito, deporte preferido, comida favorita, etc. Cada categoría de preguntas tendrá un color específico.
2. Se les explicará a los estudiantes que vamos a jugar un juego llamado "Patrones Personales" que nos permitirá aprender sobre ellos mismos y sus compañeros, al mismo tiempo que explorarán patrones divertidos.

Dinámica:

1. Cada estudiante recibirá una tarjeta y un marcador del color correspondiente a la categoría de la pregunta.

- Color verde: ¿Cuál es tu color favorito?,
- Color azul: ¿Cuál es tu comida favorita?
- Color rojo: ¿Cuál es tu deporte favorito?

2. Cada estudiante responderá a la pregunta en su tarjeta y luego cuando la profesora lo indiqué deberá pegarla en el tablero de forma lineal. A medida que más estudiantes responden las

preguntas, se irá formando un patrón de repetición. Dado el caso que algún estudiante no coloque las tarjetas donde corresponde, se preguntaría:

- ¿Qué pasaría si colocamos las tarjetas en la misma forma en la que los pegó tu compañero (a)? Probémoslo

Después de que todos hayan respondido algunas preguntas, comienza a explorar los patrones que se han formado en el tablero. Por ejemplo, podríamos obtener un patrón verde, azul y rojo (en caso de que se peguen las 3 tarjetas seguidas), También podría ser verde, azul, verde azul (en caso de que se les diga a los estudiantes que no pegaremos la tarjeta roja) y así sucesivamente.

1. Se les preguntará a los estudiantes que describan el orden de tarjetas, qué pueden ver en ellas y cómo describirían la secuencia que se observa
2. Se animará a que hagan predicciones sobre la posible tarjeta (color) que vendría después, para esto se harán preguntas como:

   - ¿Cómo quedaría la secuencia si le pedimos a otro estudiante más que pegue sus tarjetas?
   - Si 5 estudiantes más pegan sus tarjetas, ¿En qué color quedaría?
   - Vamos a pedirle a 4 estudiantes que peguen 12 tarjetas más, ¿En qué color debería quedar?
   - Si no se pega la tercera tarjeta que tú tienes, ¿Cómo quedaría 2 estudiantes más pegan sus tarjetas? Sigan el mismo patrón
   - Si no se pegan las tarjetas de color rojo, ¿Cuál sería la secuencia que se formaría? ¿Podrían identificarla?

Nivel 1 (Contexto informal)			
	Título de la sesión: Patrones de creatividad: Remodelando la UIS a lo grande		
	Actividades	**Recursos**	**Tiempo previsto**
Sesión 1	**Estrategia:** Interrogación didáctica 1. **Presentación de la diseñadora**  En esta actividad la profesora invitará a alguien que llegará vestida como una ingeniera civil, a lo que ella se presenta y dice que viene de la Universidad Industrial de Santander a pedirle los estudiantes de 3°1 que le ayuden en una labor que el consejo superior, le encomendaron. Después les pregunta ¿Si me quieren ayudar? ¿Quieren apoyarme en esta labor? 2. **Misión**	• Vestuario • Figuras en cartulina • Pliegos de cartulina con los bocetos • imágenes (zona, poster de la misión) • video beam • computador	3 horas (180 minutos)

Luego de que los estudiantes acepten ayudarla en la labor, ella proyecta dos imágenes grandes en el tablero donde se puede observar la misión en la que ella necesita su ayuda y las condiciones que deben cumplir en esta. Les pide a los estudiantes que le ayuden a leerla para saber de qué se trata (Anexo 1). Aquí aprovecha para incentivar a los estudiantes y les pregunta:

- ¿A dónde los invitaron?
- ¿Cuál es la misión que les dieron?
- ¿Cómo creen ustedes que pueden cumplir esta misión?

Después de tener el pequeño conversatorio con los estudiantes, la profesora les proyecta un mapa de la UIS y les enseña superficialmente la zona "Bienestar Pro" (Anexo 2) y les comenta como será el recorrido hasta llegar allí, luego les pasa a explicar las tareas que deben cumplir durante la misión para lograr ayudar a los obreros, arquitectos y diseñadores de exteriores de la universidad. A continuación, se presentan las tareas:

- Llegar a la zona
- Observar todos los detalles de las paredes y los senderos
- Observar los posibles espacios que se podrían cambiar para hacerla más colorida y llamativa teniendo en cuenta las condiciones o requisitos que dan desde las directivas de la universidad.
- Identificar las formas y regularidades presentes en los senderos

Después se les indican las normas de comportamiento que deben seguir para que la actividad se pueda llevar a cabo:

Normas de comportamiento

- Seguir las instrucciones de la profesora

- Mantenerse en fila, uno detrás del otro y estar atentos al grupo para evitar quedarse atrás o se pierda
- Respetar el entorno (no tirar basuras) y a sus compañeros
- Prohibido correr, gritar o empujar a los demás en la zona
- No llevar objetos que no necesitemos
- Cuidar sus pertenencias
- Solicitar ayuda en caso de que lo necesites o suceda algo

3. **Desplazamiento**

Una vez terminada la explicación la profesora les pregunta ¿Están listos? En ese momento entonces les dice ¡Vamos a convertirnos en los mejores diseñadores! Para eso les entrega unas escarapelas con su nombre y una caricatura que los representa (Anexo 3) y se coloquen el gorro.

¡Buena suerte con la misión de remodelación!

4. **Llegada a la zona (observación de esta)**

En esta observación se pide a los estudiantes que tengan en cuenta todos los posibles detalles importantes para la remodelación, aquí nos detenemos a mirar atentamente los senderos y a observar y pensar cómo podríamos extender los patrones observados. En este espacio se harán 4 paradas estratégicas antes de llegar al destino final, estas paradas serán: Entrada del Santander que conecta con el nuevo laboratorio de Genética, el Camilo Torres, Faculta de Ciencias Exactas, y el Edificio/faculta de Química. Para esto se les pregunta:

- ¿Qué figuras o aspectos geométricos observamos?
- ¿En qué partes de la podemos observar algunas regularidades?
- ¿Cuál es la secuencia que siguen las tabletas del piso?

- Si agregamos una fila más de tabletas de otro color en todo el sendero, ¿Cómo quedaría la secuencia?
- Si observamos la estructura del edificio, ¿Qué regularidades observamos? ¿Cómo están organizadas las tabletas? ¿Siguen algún orden específico?
-

5. **Incorporación de patrones**

Luego de la observación del lugar, se regresan al salón y se pasa a la misión y labor más importante de todo este recorrido, el diseño de remodelación final. Para esto, la profesora proyecta nuevamente la imagen de la zona (Anexo 4) que observaron, les pregunta ¿Qué lograron ver?, ¿Qué debemos remodelar? Después procede a enseñar un comunicado por parte de la universidad (Anexo 5) donde indican que la universidad requiere hacer más visible los diferentes lugares turísticos de la región entonces quiere que los diseñadores utilicen diseños inspirados en las regiones de Santander.

Después, se les mostrará una serie de fotografías y/o imágenes de lugares y elementos representativos de Santander, como montañas, ríos, arquitectura típica, flora y fauna local, entre otros. En este momento se les pedirá a los estudiantes que observen detenidamente e intenten identificar las particularidades y semejanzas en las imágenes.

Para esto, la profesora procede a sacar unos dados, cada número del dado que caiga traerá un diseño de tarea especifico (Gachas, hormigas culonas, panales de abeja, hexágonos, cuadrados, flores de platanillo), entonces cada mesa lanzará el dado y le saldrá el diseño correspondiente. Una vez los grupos hayan descubierto sobre que les toca diseñar, la profesora les pasa la tarea de rediseño (Anexo 6) que se encontrará plasmada en un pliego de cartulina, por grupos deberán realizar las tareas, estas van encaminadas a:

1. Senderos:
    - completar y extender el patrón de las gachas de Guadalupe
    - Completar el patrón de las flores de platanillo

- Completar el patrón de las hormigas culonas

2. Paredes:
    - Completar y extender el panal de abejas
    - Completar el diseño de reconocimiento de figuras como hexágonos y triángulos
    - Completar el patrón siguiente las cuadriculas
    -

Para finalizar la actividad se hace lo siguiente:

1. **Presentación de las creaciones**

Se organiza el salón de manera que quede una mesa destinada para ver todos los diseños y todos los grupos puedan observarlas. Después se procede a lanzar nuevamente el dado para saber que grupo le corresponderá explicar su tarea y cómo la resolvieron en primer lugar. Luego, se hace lo siguiente:

- Al momento de que el grupo sea nombrado, este debe pasar al frente y enseñar su rediseño de la zona elegida, ellos deberán explicarle a los demás cuál estrategia utilizaron para poder extender el patrón y contar como resolvieron el problema asignado. También la idea es que cada grupo dé la posibilidad de que los demás identifiquen las regularidades y las estrategias utilizadas por los otros en la construcción del patrón que proponen para el rediseño.
- La profesora entonces puede tomar aleatoriamente uno de los rediseños logrados y puede decirles que van a complementar o extender el patrón. ¿Cómo lo harían? Si está de esta manera, ¿Qué seguiría después?

Para finalizar, se retoma la idea por la cual empezaron los bocetos y cuál era la finalidad de hacerlos.

Sesión 2

Título de la sesión: Matemágicos: el mundo de las historietas y los juegos digitales

Actividades	Recursos	Tiempo previsto
1. Reconocimiento de la historieta La actividad inicia con la proyección de una imagen (anexo 7) en el video beam, a lo que la profesora procede a preguntarles: ¿Qué tipo de texto es el de la imagen? Una vez hayan mencionado que es una historieta, le dice: ¡Leámosla! Cuando hayan concurrido seis de los recuadros de la historieta, es decir, seis partes de la historia, la profesora hace una pausa para realizar una recapitulación de lo que se ha leído. Para esto, tiene en cuenta las siguientes preguntas: • ¿En cuántas partes se encuentra dividida la historia hasta el momento? • ¿Qué ocurre en la primera parte de la historieta? • ¿Qué ocurre después de la tercera parte? • ¿Qué piensan que ocurrirá en la sexta parte? ¿Por qué? • ¿Cuál creen que será la nueva tarea? **2. Realizando hipótesis de lo que va a suceder en la historia** En este momento la profesora pasa a comentarles que teniendo en cuenta la secuencia de acciones que pasaron anteriormente, van a plasmar cómo creen ellos que continuará la historia. Para esto, la profesora les entrega una ficha (anexo 8) donde se observan 1 recuadro en blanco que corresponde a la sexta parte, un recuadro siguiente con contenido (la nueva tarea que deben hacer) y finalmente, otro recuadro en blanco (octava parte) que	• Historieta • Tablero • Marcadores • Video beam • fichas de la historieta • computador • herramienta tecnológica (Gizmos) https://apps.explorelearning.com/gizmos/launch-gizmo/219	3 horas (180 minutos)

ellos deberán utilizar para resolver la tarea del recuadro anterior.

3. **Socialización**

La profesora les permite a 5 estudiantes contar las hipótesis que tienen referente a la nueva tarea que deben cumplir A medida que van pasando los estudiantes, les va preguntando a los demás que, si ellos dibujaron situaciones similares, dado el caso que esto ocurra pregunta:

- ¿Cuáles fueron los hechos sucedidos anteriormente que los llevó a imaginar que eso sucedería?
- ¿Qué piensan que ocurrirá al final?
- ¿Cómo creen que debe quedar el patrón? ¿Quién quiere pasar al frente a resolverlo?

Después, proceden a continuar con la historia, y a completar el patrón que corresponde a la nueva tarea que los estudiantes debieron cumplir, para esto, permitirá que algunos estudiantes pasen al tablero, dibujen el patrón y entre todos descubrirán y completarán la siguiente tabla:

Figura		
Número de hexágonos		
Patrón		

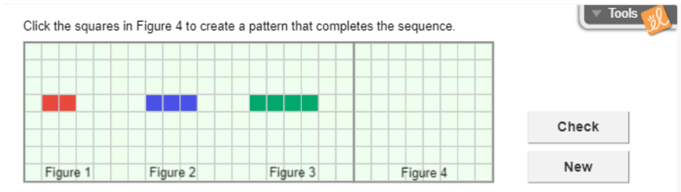
Aquí mismo se les cuestiona sobre:

- ¿Cuál será la cantidad de hexágonos que tendrá la figura 8?
- ¿Cuál será la cantidad de hexágonos correspondientes en la figura 15?

Cuando hayan completado juntos el cuadro, la profesora procede a decir:

“Durante esta sesión pudimos observar, ver y extender los patrones que ya habían realizado ustedes mismos, ¿se animan a resolver unos retos que les traigo?”

En ese momento, la profesora procede a proyectar una herramienta virtual llamada Gizmos, donde los estudiantes resolverán diversos ejercicios. Ejemplo:



A medida que los estudiantes van completando cada figura que se les solicita, se va preguntando lo siguiente:

- ¿Cuál estrategia usaron para solucionarlo?
- ¿Quién podría explicarme la relación entre figuras?

Luego, la profesora procede a enseñar esa relación que existe en las figuras de cada ejercicio y la analizarán todos juntos. Ejemplo:

Figure	1	2	3	4
Number of squares	2	3	4	5
Pattern	1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1

Se construirá una tabla equivalente en el tablero por cada figura completada por los estudiantes para ir haciendo el registro y motivar a los estudiantes a notar el patrón visto como correspondencia entre el número de la figura y la cantidad de elementos de la secuencia.

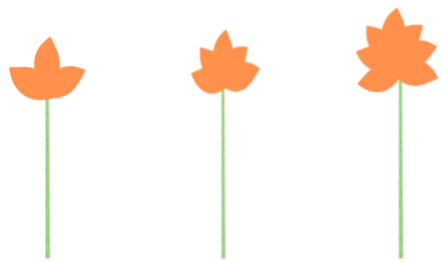
Sesión 3

Nivel 3 (Contexto formal)

Título de la sesión: Descifrando el Álgebra: El Destino de los Patrones Revelado

Actividades	Recursos	Tiempo
1. Reconociendo la cantidad de elementos En este nivel, se hará una actividad en la que a cada estudiante se le entregará una ficha (Véase el formato en el anexo 9) que se realizará de forma acompañada en la cual encontrarán las siguientes actividades: **Tarea 1** En la planeación del rediseño de los senderos cercanos a Bienestar Pro en la UIS, realizamos diseños de patrones enfocados en dar visibilidad a la Región Santander. Entre	• Imágenes de los diseños • Marcadores • Tablero • Fichas impresas	3 hora y media (90 minutos)

estos estaban las flores de platanillo, en el diseño 1 se muestra el patrón del sendero hasta donde lo terminamos, sin embargo, necesitamos saber cuántos pétalos tendrán en determinado día.



DÍA 1 **DÍA 2** **DÍA 3**

1. ¿Cuántos pétalos tendrá la flor en el día 5? ¿Por qué?

   ____

2. ¿Cuántos pétalos tendrá la flor en el día 8? ¿Por qué?

   ____

3. ¿Cuántos pétalos tendrá la flor en el día 12? ¿Por qué?

   ____

Registra la cantidad de hojas según cada día

Día	**Número de hojas**
1	
2	
3	
4	
5	

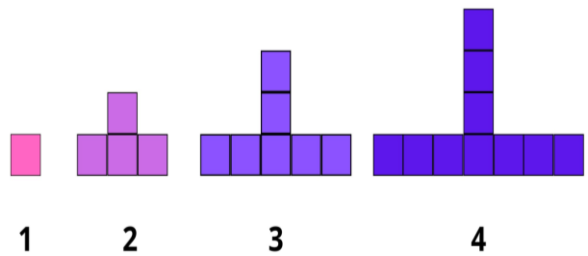
Si un amigo requiere averiguar la cantidad de pétalos que tendrá el platanillo en el día 25 o 110 ¿Cómo se lo explicarías? descríbelo en el recuadro

Una vez los estudiantes hayan resuelto esa primera parte, se

procederá a hacer una pequeña pausa y se harán la siguiente orientación y observación con ellos:
Vamos a fijarnos en las figuras, ¿Qué relación sigue los pétalos del platanillo?, por ejemplo, en el día 1, ¿Cuántos pétalos están al lado derecho del tallo? ¿Cuántos al izquierdo del tallo? Para esto, se irá haciendo registro en el tablero haciendo énfasis en la cantidad de días y cuántos pétalos hay por cada lado del tallo.

Tarea 2

En el rediseño de las paredes se encontraba este diseño de cuadros, la universidad desea hacer el mismo diseño en una pared más grande, por eso requiere saber cuál es la relación entre las figuras del patrón, ayúdales y completa la tabla.



Número de la figura	**Cantidad de cuadros**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
9	
11	

Después de diligenciar la tabla y se empezará a notar algunas regularidades juntos a los estudiantes, estas pueden ser las siguientes:

a). ¿Existe un número de la figura en la secuencia que tenga exactamente 55 cuadros? Explique sus razonamientos
b). ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 46 de la secuencia?

c). ¿Usando exactamente 111 cuadrados se puede construir alguna figura de la secuencia?

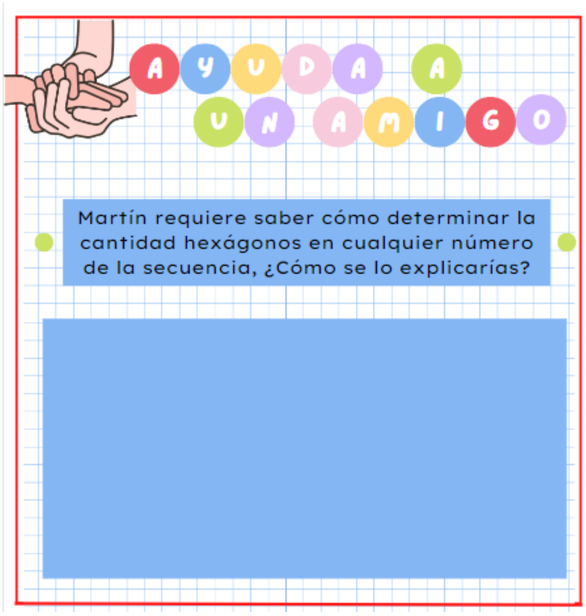
Aquí nuevamente se cuestionará y se completará una tabla con los estudiantes para entender cuáles fueron sus razonamientos y cómo llegaron a ellos.

Tarea 3

En la historieta se encontraba este patrón que resolvimos, ahora se requiere hacer un registro en la tabla y determinar la cantidad de hexágonos que habría en cada borde del panal según el número de la figura que aparece.

Número de la figura	**Cantidad de hexágonos**
8	
24	
37	
80	
111	

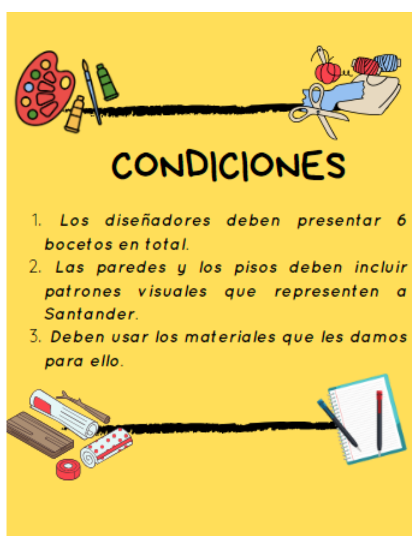
Se les dará un espacio a los estudiantes para que lo resuelvan, después se socializará y se hará la respectiva explicación de cada uno en caso de ser necesario.



Una vez se haya finalizado esta actividad, se dará por terminada la implementación del itinerario. En este momento, se da paso a agradecer por el apoyo y a escuchar lo que tienen que decir los estudiantes después de esto.

Anexos del itinerario

1. Poster de la misión



2. Mapa de la UIS

3. Escarapela/carné como diseñadores

4. Imagen de la zona

5. Comunicado de la universidad

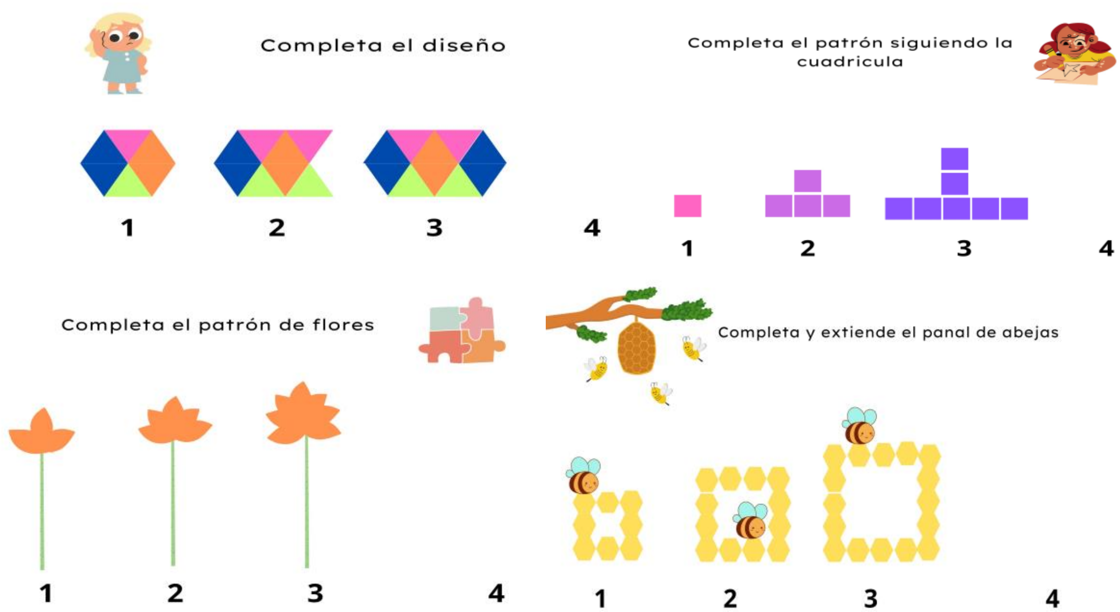
Universidad Industrial de Santander

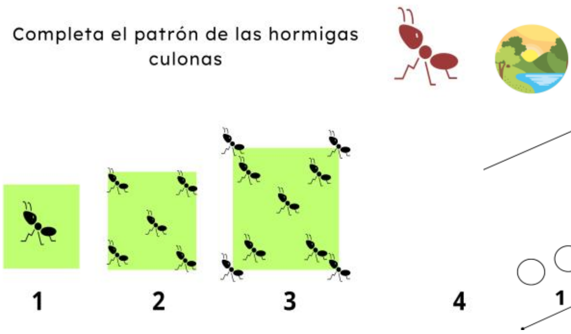
COMUNICADO DEL CONSEJO SUPERIOR

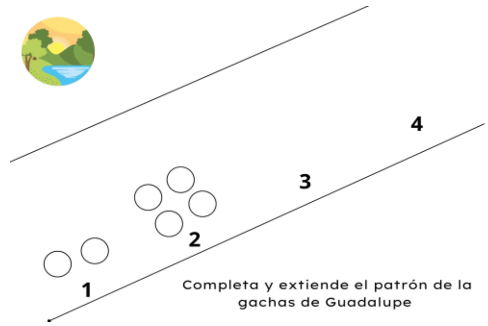
El Consejo superior de la Universidad Industrial de Santander, en sesión ordinaria celebrada el pasado treinta (30) de agosto, decidió que en aras a dar visibilidad a la Región de Santander desde los espacios de la universidad otorgar flexibilidad para que los diseñadores usen diseños inspirados en las regiones en el rediseño de los senderos, paredes y jardínes de la zona de Bienestar Pro.

Bucaramanga, 4 de septiembre del 2023

6. Tareas sobre patrones

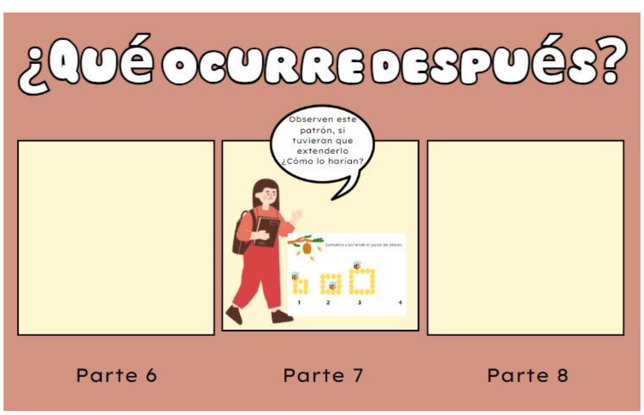


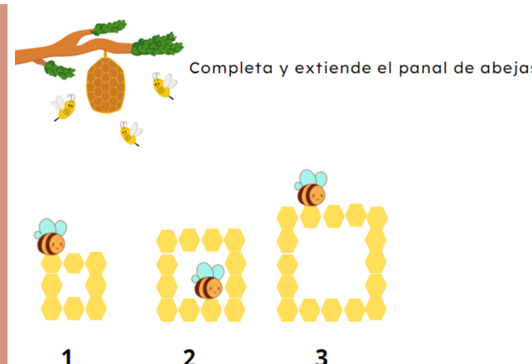




7. Historieta

8. Ficha para completar la historieta





***Apéndice D.** Transcripción sesión 1. Enseñanza en contexto informales*

Transcripciones Sesión 1

Día: 29 de septiembre **Tiempo:** 4 horas **N° estudiantes:** 31

****Transcripción de la dinámica de presentación****

Todo: Todo lo puedo porque hay un líder en mí, buenos días, Profesora Mariana

PF: Buenos días, nos vamos a sentar y les voy a explicar qué vamos a hacer.
PF: Antes de nosotros irnos a la UIS, necesitamos hacer una actividad de bienvenida para conocernos un poco, conocer cuáles son sus gustos. Entonces la idea es que iniciemos con eso ahora.
PF: Les explico, pasaré por los puestos y a cada niño le entregaré una fichita de cada color, entonces cada uno tendrá tres fichitas una verde, una azul y una roja. La idea es que en la verde contestemos la pregunta ¿Cuál es mi color favorito?; la azul es para escribir ¿Cuál es mi comida favorita? y, por último, la roja es para contestar sobre ¿Cuál es mi deporte favorito? Voy a ir pasándoles las fichitas
PF: ¿Listo? Vamos a tener las fichitas ahí en el puesto, no me los van a entregar todavía
PF: Con esas fichitas vamos a hacer una actividad llamada “Patrones Personales” ¿Por qué creen que la actividad se llama así?

Todos: Porque es personal
E12: Porque habla de nosotros
E1: Porque son nuestras cualidades
E15: Porque es algo que nos identifica a nosotros

PM: Vamos a empezar entonces, la idea es que yo le voy a decir a un niño que pase al otro tablero y va a contar sobre él, lo que contestó y va a ir colocándolo en un orden específico. Así hasta lograr que todos hayan pasado

PM: Vamos a empezar con E31, él va a pegar sus tres papelitos de forma lineal, ¿Cómo es de forma lineal?

E3, E10, E5: Así (hicieron la seña de la línea horizontal)

PF: Entonces E31 trae tus fichitas, la idea es que ustedes se paren aquí (parte trasera del salón, frente al otro tablero) y cuenten sobre ustedes y después coloquen las fichitas

En ese momento todos empiezan a contar sobre ellos**llegado determinado momento sucede lo siguiente**
E31: ¿Cómo nos va quedando ese patrón que estamos construyendo? Vamos a observarlo y vamos a ver qué es lo que está sucediendo ahí
E31: ¿Quién me puede decir cuál es el orden de colores que observa en esos papelitos?

E24: Verde, azul, rojo, verde

PF: ¿En qué color terminamos la secuencia?

Todos: Rojo

PF: Rojo, muy bien. Ahora, si yo le pido a otro estudiante que pegue las tarjetas, ¿En qué color quedaría?

Varios: Rojo
Varios: Verde

PF: ¿En rojo? ¿Quién dice que rojo?
PF: E23 dice que rojo
PF: E1 nos va a mostrar si queda en rojo o no

PF: Ahora vamos a pensar en algo, si yo le pido a 5 estudiantes más que peguen sus tarjetas, ¿En qué color quedaría?

Varios: Rojo.

PF: ¿Por qué sigue siendo el rojo y no otro?

E2: Porque el rojo es el último con el que siempre terminamos, entonces si 5 estudiantes más las pegan en el mismo orden, pues la última seguirá haciendo rojo

PF: Bien. Vamos a ver

Después se pasan a hacer otras preguntas

PF: Si yo le pido a 4 estudiantes que peguen 12 tarjetas, ¿En qué color quedaría?

Varios: Rojo
Varios: Verde

PF: ¿Por qué verde? ¿Por qué rojo?

Los estudiantes enfatizaban en que quedaba en rojo porque era el último color según en orden en que las pegaban

E2: Sigue siendo rojo porque 3 x 4 es igual a 12 entonces cada niño igual pegaría las tres tarjetas y la última de cada uno será rojo, entonces la última del último será rojo

PF: Ahora, si yo le pido a 3 estudiantes que peguen las tarjetitas, pero en este caso vamos a empezar con el rojo, después el azul y.

Varios: El verde

PF: Verde por último bien, entonces ¿Qué color quedará al final?

Varios: El verde

PF: Ahora, vamos a pagar solo 5 tarjetas, ¿En qué color quedaría?

Varios: Verde
Varios: Azul

PF: ¿Por qué azul? ¿Por qué verde?

Varios: verde porque es el último
E3: Azul porque usted dijo solo 5 entonces el azul es el del medio entonces si quitamos la última que sería verde quedaría en azul

minuto 12:40

PF: vamos a pegar 7 fichitas más
PF: si seguimos la secuencia que llevamos de rojo, azul, rojo, azul. ¿En qué color debería quedar?

Varios: Rojo
Varios: Azul

PF: Vamos a ver. Peguémoslas
Llega el momento de la tarjeta final

PF: Vamos a pegar la última tarjeta, ¿Cuál debemos pegar? ¿Rojo o Azul?

Varios: Rojo

PF: ¿Cómo hicimos para saber qué era el rojo?
E13: porque era como la primera ficha que pegamos

PF: ¿Qué más pudimos hacer para identificar eso?

Varios: Porque es el primero

PF: Ahora, peguemos 10 tarjetas más ¿Cómo sabemos cómo va a quedar?

E1: Pues podríamos decir que porque todos los números pares siempre van a quedar en el segundo color que colocamos. Por ejemplo: Hicimos el experimento de pegar dichas con un patrón azul, verde, azul, verde entonces ya sabemos que empieza en azul y termina en verde entonces por eso sabemos que debe quedar en verde

PF: ¿Quién más tiene otra estrategia para saber que terminábamos en verde?

E3: Porque a medida que íbamos pegando las fichitas íbamos mirando el color y contábamos cuántas faltaban para llegar a días entonces así podíamos saber el color

E24: Porque las íbamos contando

PF: Último ejercicio, ¿Qué pasa si pegamos 9 tarjetas? entre rojo y verde

Varios: quedará en verde

E1: Queda en rojo

M: ¿Por qué E1?

E1: Al ser un número impar entonces al mezclar sabemos que al ser el primero terminaría igual o sea si, hagamos el mismo experimento que antes si empezamos en rojo vamos a terminar en rojo

Finalización de la actividad

PF: ¿Quién me quiere contar para qué cree que hicimos esa actividad?

E3: Para conocernos entre nosotros

PF: ¿Por qué creen que empezamos a jugar con las fichitas y pegábamos unas y otras no?

E30: Para hacerlo más divertido

E2: Para conocernos más

PF: La anterior actividad la hicimos para dar apertura a lo que vamos a estar haciendo durante las demás actividades, para identificar patrones; ¿si se dieron cuenta que esas fichitas cumplían un orden y un patrón siempre? Empezábamos con tres colores y terminábamos con dos

Inicio de la implementación del nivel informal

PF: Les voy a presentar a alguien, es una persona muy importante que viene de la UIS

I: Buenos días, chicos, ¿Cómo están?

Varios: Buenos días

I: Hola yo soy la Ingeniera consultora de la Universidad Industrial de Santander. ¿Si conocen la universidad?

Varios: SI

I: Les comento que la universidad está en construcción y remodelación y ustedes han sido el equipo elegido como los diseñadores creativos para remodelar y poner más bello un lugar llamado Bienestar Pro

Varios: Aplauden

PF: Vamos a leer unas cartas de invitación que les mandaron para saber ¿Qué tenemos que ir a hacer a la UIS?
PF: ¿Quién me ayuda a leerlas?
Las leen
PF: ¿Están listos?
PF: ¿Todos quieren ayudar?

Varios: SI

: Listo entonces vamos a ver cuáles son las condiciones que debemos cumplir para esa misión

Las leen
PF: Ustedes van a presentar unos bocetos que les vamos a dar a la ingeniera, ese patrón cumplirá un patrón. ¿Qué es un patrón?

E1: Un patrón puede ser unos objetos que se repiten constantemente

PF: Ahora les voy a mostrar a donde vamos a ir (en el mapa)
PF: Esta es la universidad, nosotros nos ubicamos en este lado entonces vamos a seguir este camino hasta llegar a Bienestar Pro. Durante el recorrido iremos haciendo paradas para ir observando

colores, formas y características de las zonas para tener en cuenta para los bocetos que vamos a hacer.

PF: Les contaré sobre las normas que tenemos para la salida
Las leen y se van explicando una a una

PF: Vamos a convertirnos en diseñadores, para eso les entregaré unas escarapelas, deben ponérsela y cuidarla todo el recorrido

Ya en la entrada que conecta al Santander con la UIS

PF: Bienvenidos a la UIS. Durante el recorrido iremos haciendo paradas y yo iré haciendo unas preguntas que debemos tener en cuenta para después.
PF: Tengan presente que debemos ir identificando objetos, colores y figuras

PF: Vamos a observar este primer edificio de aquí de la entrada, en cuanto a figuras, colores ¿Qué podemos observar?

Varios: Es alto
Varios: Tiene números para los pisos
Varios: Hay cuadrados, círculos, rectángulos

PF: fijémonos en los círculos de las paredes. Si ven que no todos tienen el mismo color y hay unos que faltan

Varios: Siguen un patrón

PF: Muy bien, puede que eso signifique que la idea era que siguiera un patrón

PF: ¿Están listos para seguir? Vamos

Llegada a la facultad de ciencias exactas

PF: ¿Qué le cambiaran? Miremos los senderos y paredes

E1: La remodelación más útil sería que tuviera, así como algo que las plantas les diera más vida, que no estuvieran más muerta

E13: Podemos pintar esa pared

E1: Podemos igual proponer hacerle mantenimiento porque eso está todo dañado

PF: Ahora, si yo les dijera que tenemos que agregar algunas figuras geométricas en esas remodelaciones ¿Qué podríamos colocar?
E1: ¿Esté edificio de qué es?

PF: Es la facultad de Ciencias exactas

E1: ¿O sea de qué trata?

PF: Aquí estudian los estudiantes de matemáticas, biología, física

E1: Entonces podríamos hacer una molécula de ADN para los de biología y tal vez unos símbolos de suma y resta para los de matemáticas

PF: Si miramos este edificio, los ladrillos están organizados de determinada manera

Varios: tienen forma de rectángulo

PF: Entonces a esos rectángulos nosotros podríamos darle un color, si elegimos dos, ¿Cuáles creen que deberían ser?

Varios: Verde
Varios: Azul
Varios: Rojo

PF: Bien, con esos colores podríamos crear algo

E25: Podríamos crear algo como lo que hicimos antes en clase con las fichitas ya que son los mismos colores

PF: Exactamente, ¿Qué podríamos crear? ¿Qué patrón se les ocurre?

E1: Podría ser que pintáramos un rectángulo rojo, otro azul, otro verde, después otra vez rojo, azul, verde y así hasta terminar toda la pared

PF: Muy bien, así podríamos replicar el patrón específico que estábamos haciendo en el salón

E3: También podemos utilizar los colores de la bandera de Colombia y ubicarlos por diferentes tamaños, amarillo primero que sea el más grande, después azul más pequeño y después rojo más pequeño y volver a empezar hasta pintar toda la pared

E1: Una pregunta, no se supone que también debemos tener claro el prepuesto para poder hacer las remodelaciones

PF: Claro que si

E1: Sí, porque uno puede decir cambiemos el pasto y que se vea así todo bonito, pero no nos alcanza el dinero

PF: Muy bien por reconocer eso E1, eso es algo que los diseñadores, ingenieros, arquitecto deben tener presente a la hora de hacer una construcción

PF: Vamos a continuar a ver qué otras cosas podemos remodelar

PF: Este es el edificio de Química, si tuviéramos que pintar o dar ideas para remodelar esta zona igual que la de allá ¿Qué se les ocurriría?

Varios: Algo especial con escala de colores

PF: ¿Qué colores?

Varios: Verde y Naranja

E1: Podemos hacer una representación de algo de química como un científico, electrones, células

PF: ¿Pueden observar si las piezas o ladrillos cumplen un patrón de color u orden?

E13: No, están colocadas al azar

PF: Okay, todas tienen diferente color y tamaño, entonces esa es la idea que cuando lleguemos a Bienestar Pro podemos darnos cuentas si esas paredes o senderos cumplen con un patrón específico o está puesto al azar todo como aquí

PF: Bienvenidos a Bienestar Pro, les voy a dar unos minutos para que observen a su alrededor y me puedan contar qué logran observar

Pasó el tiempo

PF: Enfoquemos la mirada en este sendero, ¿Cuáles son los colores de las piezas?

J: Negro

E31: Gris

E1: Azul, amarillo, gris

PF: Muy bien entonces vamos a mirar esto, si yo quiero alargar esta secuencia que está en el piso ¿Cómo puedo hacer?

E12: Agregando otro color

M: Muy bien, ¿Qué color podríamos agregar?

Varios: Blanco

PF: ¿Por qué blanco?

E10: Porque es más claro que el gris anterior

PF: Bien entonces miremos como quedaría si agregamos ese blanco ¿Cómo quedaría?

E1: Queda negro, gris oscuro, gris claro, blanco. Nuevamente, negro, gris oscuro, gris claro blanco

PF: ¿Funciona?

Varios: SI **Ellos repetían el patrón**

E1: También podemos poderle amarillo, azul y rojo

PF: Bueno supongamos que los pintamos azul, amarillo, rojo, ¿Qué color vendría después?

E1: Azul, amarillo, rojo, azul, amarillo, rojo

PF: Ahora fijémonos en el orden de las tabletas del sendero, ¿Cómo están ubicadas?

PF: Miren en la primera fija, hay tres rectángulos, pero si pasamos a la siguiente ya no hay tres ¿sino?

Varios: Dos

PF: Dos muy bien, en la primera hay tres rectángulos más pequeñitos y los dos son más grandes, entonces ¿Cuál es la secuencia?

E13: Sería tres pequeños, dos grandes

PF: Así es, y si nos paramos aquí en la de dos rectángulos ¿Cómo vendría la siguiente?

Varios: Tres pequeños

Transcripción del diseño de los bocetos

PF: Buenos días, vamos a continuar con las actividades que estábamos haciendo la semana pasada

E5: El viernes

PF: El viernes muy bien, ¿Quién me quiere contar qué estábamos haciendo el viernes?

E23: estábamos pensando en la remodelación de la UIS

PF: Okay, ¿Qué hicimos David?

E1: Fuimos a la UIS a observar unos espacios para poder hacer los diseños que la UIS nos pidió

E24: Miramos los suelos, miramos las paredes para ver que podíamos agregarles en la remodelación

PF: muy bien, entonces la última actividad que estábamos haciendo el viernes eran estos pequeños bocetos para pasarlos a la plantilla grande, entonces hoy vamos a empezar a realizar esos bocetos, entonces les voy a entregar esos papelitos que ustedes hicieron para que puedan tenerlos en cuenta y armar el diseño grande

Aquí proceden lo estudiantes a completar los bocetos antes de pasar a la presentación de estos

PF: Ahora haremos la presentación de esos bocetos que ustedes hicieron, la idea es que cada equipo pase al frente y le explique a los demás cómo hicieron para cumplir con la tarea que tenían en cada diseño y así, ver si los demás reconocen esa estrategia y si tienen otra

Gachas

E1: Como a todos nos dieron el papelito inicial cada uno fue dibujando como creía que debía quedar el patrón, cada uno pensó en una estrategia para resolverlos. Al principio unos hicieron así 2, 4, 6, 8 y en cambio otros hicimos 2, 4, 2, 4 y al final decidimos dejar el segundo de 2, 4, 2, 4 porque empezábamos por el 1 y 3 que tenían 2 círculos y el 2 y 4 que tenían 4 círculos, jugamos con los números pares e impares y dijimos que así debía ser, los impares con un número de círculos y los pares con otro número de círculos y así se repetía

PF: ¿Por qué decían ustedes que el patrón debía ser 2, 4, 2, 4? ¿Por qué decidieron que el patrón no era el que habían dicho los demás de 2, 4, 6, 8?

E1: Pues yo al inicio había dicho que era ese, pero la mayoría dijo que ese no era porque no se repetía

PF: En este caso debemos reconocer que las dos estrategias estaban bien, una podía ser por repetición como están al inicio 2, 4…, pero también podía ser de crecimiento en este caso 2,4, 6, 8. Los patrones no siempre van a ser de repetición, puede haber más

Cuadritos

E24: es que notamos que al observar la posición número 1, tenía un solo cuadrito y a medida que crecía iba aumentando de a 1 a cada lado, entonces en la posición 2 ya había 3 cuadritos más y así con las demás. Entonces entendimos que debíamos agregarle 3 cuadritos a cada figura en cada posición, uno en cada lado

PF: ¿Por qué uno en cada lado?

Otro integrante de ese grupo: Porque la figura debía aumentar la misma cantidad a cada lado para que quedara igual que las anteriores

PF: ¿Cuántos cuadritos entonces quedaron finalmente en la posición 4 y posición 5?

E10: 10 y 13

E24: también podemos notar que, si le quitamos los 3 cuadritos a la figura 5, nos queda la cantidad de la figura 4

PF: Muy bien, miren aquí si hacemos el reconocimiento desde la figura más grande hasta la más pequeña ¿Qué haríamos? Explícales E24

E24: sería restarle de a un cuadrito a cada lado, los 3 que ya le habíamos dibujado

Panales de abeja

PF: Ellos identificaron varias estrategias para descubrir cómo debía quedar el panal de la posición N°3. Cuéntenles a sus compañeros

E5: Al principio debíamos darnos cuenta de que la figura 1 tenía figuras a cada lado entonces a la siguiente debíamos sumarle uno en cada esquina para que fueran 4

E13: Como si estuviéramos midiendo decíamos que en cada figura era 3x3, 4x4, 5x5

E5: Una era 3x3+3

E4: Lo mirábamos también por la posición en la primera habían 3, en la siguiente 4 entonces podíamos decir que la siguiente era 5

Profesora Adriana: E4 muestrales a tus compañeros, tu hiciste la siguiente

E4: Pues haciendo 6 Hexágonos lo fui dibujando para hacer la siguiente posición

PF: Él descubrió que como en el cartel no nos cabía, pero lo que estábamos haciendo seguía una secuencia entonces el dibujo él dibujó el siguiente que era de 6 hexágonos a cada lado

Flores de platanillo

E22: Ellas absorben el agua y por el sol ellas van creciendo y entonces para poder hacer esto nos dimos cuenta de que iban creciéndole 2 pétalos más a cada flor a medida que crecía

E16: Le íbamos sumando de a 2 pétalos más a cada flor

E12: Solo encontramos esa forma de hacerlo

Extensión de Hexágonos

E2: En esta secuencia era sumarle 2 a cada figura. Al principio no sabíamos, pero fuimos acomodando las fichas y nos dimos cuenta de que aumentaban de a dos, por ejemplo, el primero tenía 6, el segundo 8 y el tercero 10 entonces para poder hacer los dos que faltaban colocamos las 10 fichas del anterior y 2 más y así sabíamos que eran 12 y en la última posición entonces nos dio 14 poque como ven si en el anterior nos dio 12 a 12 le sumo 2 entonces nos da 14

E2: entonces en todas las figuras era poner el patrón anterior sumándole otras 2 fichas

PF: Debían tener en cuenta también el patrón de…

E2: De colores

Hormigas culonas

E27: Acá le fuimos sumando de a 4, nos dimos cuenta de que la primera tenía 1, pero ya la siguiente tenía 5 entonces fueron aumentando de a 4 en 4

Apéndice E. *Transcripción sesión 2. Enseñanza en contextos intermedios*

Transcripciones Sesión 2

Día: 2 de octubre **Tiempo:** 3 horas **N° estudiantes:** 36

Transcripción de la historieta

PF: Buenos días, ¿Cómo están?

Varios: Buenos días, Profesora Mariana, bien

PF: hoy les traigo un nuevo reto, unas nuevas actividades, ¿Quieren saber de qué se trata?

Varios: Sí

PF: Para eso, les voy a mostrar una imagen. ¿Qué tipo de texto creen qué es el de la imagen?

E1: Un comic

E12: Una historieta

PF: Muy bien, puede ser conocido como comic o como historieta
PF: ¿Quién me quiere ayudar a leer? Para ver qué nos cuenta esa historieta

E4: Yo Lee toda la historieta

PF: Gracias E4. Como pudieron leer, la historia nos cuenta una historia sobre lo que hicimos ayer, donde ustedes me contaban que habíamos hecho el día anterior, pero se fijaron que hay un interrogante en una de ellas. ¿Por qué creen que está eso?

E3: Porque nosotros debemos descubrirlo

PF: Muy bien, ¿Qué más podríamos decir?

E27: Eso va a ser lo que vamos a hacer hoy

PF: Sí, es cierto
PF: Les cuento, hoy ustedes tienen una nueva tarea, ¿Cuál creen que será?

E2: Que íbamos a extender patrones
E31: que vamos a ir a la uis otra vez
E24: que vamos a remodelar edificios
E4: que vamos a dibujar edificios
PF: Bueno, todas esas pueden ser, tengamos en cuenta lo que ya hemos hecho hasta ahora para identificarlo.
PF: Ahora, yo les voy a entregar la siguiente ficha, van a dibujar en el recuadro que dice Parte 6 aquello que me están contando sobre lo que imaginan que será la nueva tarea que tendremos hoy, únicamente vamos a usar ese recuadro, el de la parte 8 aun no

Pasado el tiempo

PF: Vamos a mirar y escuchar a los demás mientras nos cuentan cuál fue la tarea que representaron

E2: la tarea es extender un patrón
E1: Yo creo que lo que hicimos la actividad pasada (era el boceto para extender el patrón que a cada equipo le correspondía, como una especie de prueba en un papel pequeño para después pasarlo al diseño grande)
E24: Yo creo que también haremos bocetos para poder completar un patrón

PF: Vamos a leer a ver cuál es entonces esa tarea que tenemos

PF: Nuestra tarea de hoy es nuevamente mirar los patrones de los senderos y las paredes que hicimos anteriormente
PF: Por ejemplo, observemos este patrón, ¿Cómo harían para extenderlo? (Aquí se hizo la tabla de figura, número de hexágonos y patrón para completarlo con los estudiantes)

PF: ¿Cómo podemos identificar el número de hexágonos que requerirá la siguiente figura? Vamos a observar y completar la tabla

PF: Figura número 1 ¿Cuántos hexágonos tiene?

Varios: 8 profe

PF: Figura número 2 ¿Cuántos hexágonos tiene?

Varios: 12

PF: Figura número 3 ¿Cuántos hexágonos tiene?

Varios: 16
E2: 16 profe, esa tiene 16
PF: Listo a hora vamos a mirar por qué cada una tiene esa cantidad y cuál sería el patrón para llegar a eso

PF: ¿Cómo creen que se puede extender más el patrón?

E5: Sumándole 4 al anterior
E30: sumándole 1 arriba y otro abajo en cada figura
E10: aumenta de 4 en 4
PF: Vamos a intentar así, ¿Cuánto entonces tenemos que sumarle al 16 para descubrir la próxima figura?

Varios: 4

PF: ¿cuánto nos da eso?

Varios: 20

PF: Van a dibujar ustedes en el recuadro que dice parte 8, la figura número 4

Después de eso

PF: Miremos esta (Centrándonos en la figura 1) ¿Cuál es el número de la figura 1?
E: 1

PF: ¿cuántos hexágonos hay en cada esquina o punta del cuadrado que se forma? (Aquí les ayudé un poco señalándoles)

Varios: 4

PF: y ¿cuántos hexágonos aumenta según cada figura?

Varios: 4

PF: Muy bien, entonces tenemos tres números importantes aquí (los encierro)
PF: para descubrir cómo saber cuántos hexágonos tiene una figura también podemos hacerlo así

1 por 4 más 4, es decir, este número (el 1) siempre va a corresponder al número de la figura), 4 que es la cantidad de hexágonos de las puntas o esquinas siempre y 4 que es la cantidad en la que aumenta como me dijeron ustedes

PF: Entonces, si queremos haber cuántos hexágonos tiene la figura 8 ¿Qué debemos hacer?
E25: Sumarle 4

PF: ¿A qué le sumamos 4?

E24: a la figura

E2: ponemos el 8 por 4 más 4

PF: ¿Por qué 8?

E2: porque es el número de la figura

PF: Muy bien, así podremos saberlo con muchas figuras más

Transcripción de la parte del recurso tecnológico

PF: Ahora como ya hemos resuelto los retos de la historieta, vamos a hacer lo siguiente

PF: Yo les voy a proyectar un juego en el televisor y la idea es que por equipos vayamos resolviendo los patrones que nos colocaron ahí

PF: Vamos a empezar por el quipo 1, deben pararse sobre los recuadros, oprimir el botón y seleccionarlo para formar la figura de la posición número 3, y así los demás van complementando la figura (aquí únicamente era marcarlo con el mouse en el televisor)

PF: Ahora vamos a mirar e identificar porqué esa figura nos salió de esa manera

PF: La figura 1, ¿Cuántos cuadrados tiene?

Varios: 2

PF: La figura 2, ¿Cuántos cuadrados tiene?

Varios: 4

PF: La figura 3, ¿Cuántos cuadrados tiene?

Varios: 6

PF: La figura 4, ¿Cuántos cuadrados tiene?

Varios: 8

PF: ¿De a cuánto aumenta?

E2: aumenta de 2 en 2

PF: ¿Cómo podríamos descubrir cuál figura viene después?

E5: Sumarle 2

E1: multiplicar el número de la figura por 2

PF: vamos a probar si le sumamos 2 a la figura 2, ¿Cuánto nos daría?

Varios: 6

PF: ¿Corresponde al número?

Varios: sí

PF: Ahora entonces probemos multiplicando el número de la figura por 2 como me decían, si multiplicamos 1 x 2 ¿Cuánto nos da?

Varios: 2

PF: ¿Corresponde al número de recuadros que se contiene la figura 1?

Varios: Sí

PF: Probemos con la figura 2, ¿Cuántos cuadros tiene?
Varios: 4

PF: Multipliquemos 2 por 2, ¿Cuánto nos da?

Varios: 4

PF: ¿Cumple?

Varios: sí

PF: Entonces podríamos decir que esta figura se puede solucionar o completar a partir de 2 estrategias, y seguro hay más. Muy bien

Aquí ocurrió un accidente con el cable HDMI por lo cual no se pudo continuar la actividad con el dispositivo tecnológico, sin embargo, opté por hacer la misma dinámica de que cada estudiante tuviera la oportunidad de aportar a la construcción de la figura, pero en el tablero (solo un equipo alcanzó a pasar y utilizar el mouse)

PF: Mientras nos ayudan a ver si podemos solucionar el problema con el proyector, vamos a hacer la misma actividad en el tablero, a cada uno le voy a ir pasando el marcador y va a participar en la construcción de la figura que les indico

PF: Grupo 2 vamos a pasar, ¿Quién pasará de primero?

E24: yo

PF: Dale E24, pasa

PF: Siguiente, ¿Cómo debería quedar la figura?

Así fueron pasando todos los del equipo 2 que les correspondía la siguiente figura

PF: ¿Cuáles estrategias descubrieron para poder identificar la cantidad y la forma en la que debía quedar la figura?

E24: Pues nos fijamos en la cantidad de cuadros que tenían las anteriores, en el primero había 1 entonces el segundo seguía teniendo el 1 abajo, pero se le agregaba otros 2 para que nos dieran 3 y a la siguiente podíamos mirar que seguía teniendo la figura 1 inicial y pero le sumamos 5 más para que nos diera 6 que era la cantidad

PF: Okay, entonces E24 nos dice que ella fue sumándole progresivamente a cada figura basándose siempre en la cantidad de cuadros de la figura 1 (como se muestra en la imagen de arriba)

PF: ¿Cuál otra estrategia podíamos usar?

E27: Podemos sumerle de a 2 al número anterior

PF: Vamos a ver si cumple, si le sumamos 2 a la figura 1, ¿Cuánto nos da?

Varios: 3

PF: bien, y si le sumamos 2 a esa figura que tiene 3, ¿Cuánto nos da?

Varios: 5

PF: Ahora si le sumamos 2 a ese 5, ¿Cuánto nos da?

Varios: 7

PF: Entonces, ¿estaría bien?, ¿cumplirían con la cantidad de cuadritos que necesitamos para formar las figuras?

E: No

PF: así es nos faltarían cuadritos, miren esta, una estrategia que podemos usar es sumar 2 a la figura 1 para que nos dé el valor de la figura 2 y después ir sumando 1+2+3 para hallar la cantidad de cuadros de la figura 3

PF: ¿Cómo podemos hacer la de la figura 4? sigamos un patrón

E4: puede ser 1 +2 +3 +4

PF: Muy bien, y así sucesivamente con las demás

PF: siguiente figura

PF: ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 1?

Varios: 1

PF: ¿Cuántos tiene la figura 2?

Varios: 4

PF: ¿Cuántos tiene la figura 3?

Varios: 7

PF: ¿Cuántos tienen la 4?

Varios: 10

PF: Entonces, ¿Cómo podríamos saber cómo debemos aumentar la figura?

E13: sumar 1 más 3
E5: sumarlos
PF: ¿Cómo? 1+3 = 4 ¿cuánto necesitamos para hallar el valor de la siguiente figura?

Varios: sumarle 3

PF: bien, entonces sabemos que aumenta de 3 en 3, a cada valor anterior le sumamos 3
PF: también miremos esta 3 por 1 menos 2, ¿Cuánto es 3 por 1?

E5: 4
Varios: 3

PF: 3 menos 2

Varios: 1

PF: siguiente podíamos hacerlo 3 que es la cantidad en la que aumenta, por 2 el número de la figura, menos 2 que es lo que nos sobra

PF: ¿Cómo nos quedaría el siguiente?

Varios: 3 por…

PF: 3 por, ¿Cuál es el número de la figura?

Varios: 3

PF: entonces 3 por 3 menos ¿Qué?

Varios: 2

PF: Bien entonces para dar solución a este ejercicio entonces podemos o sumarle 3 a cada número de recuadros de la figura anterior o realizar esa otra operación

PF: siguiente figura

Aquí llenamos el cuadro reconociendo la cantidad de recuadros que hay en cada figura

PF: ¿Cómo podemos resolver esto? ¿Qué le hacemos a la figura N°1 para llegar a las N°2?

Varios: le sumamos 1

PF: 1 + 1 nos da 2, el siguiente ¿Cuánto nos da?

Varios: 3

PF: ¿Por qué?

E4: porque a la figura 1 le sumamos 2

PF: Lo hacemos así porque el 1 correspondería a la cantidad en la que aumente y el valor que cambia corresponde a el número de la figura

PF: Siguiente figura

PF: Si observamos las bases de cada figura ¿Qué podríamos decir?

E10: van aumentando de a 1

PF: Muy bien, si nos fijamos en la figura 1 tiene 3 y la siguiente tiene 4

PF: ¿Cómo están las figuras hacía arriba? fijémonos en la cantidad de cuadritos respeto a las bases

E2: hay uno menos que abajo

PF: de esta manera entonces si se cumpliese el hecho de que le sumemos uno a cada columna y uno a la base

PF: ¿las figuras aumentan de a cuánto?

Varios: 3 en 3

PF: entonces podemos hacerlo el número de la figura, por 3 que es la cantidad en la que aumenta, más la suma de la cantidad que queda en las esquinas o puntas de las columnas, es decir, 2

PF: ¿Cómo quedaría la siguiente?

E2: 3 por 3 más 2

PF: ¿Por qué?

E5: porque 3 es la cantidad en la que aumenta
E2: el otro 3 es el número de la figura
E23: 2 es lo de las puntas

PF: Muy bien, entonces este patrón lo podemos utilizar para reconocer la cantidad de cuadritos sin necesidad de hacer todos los dibujos

PF: ejemplo si yo les pido que me dibujen la figura número 8 ¿Cómo lo harían?

E2: 4

PF: 4, muy bien ¿Qué iría después? (Aquí la profe Adriana les gritó y les dijo: Piensen, si la profe está pidiendo que le digamos el patrón de la figura número 8, ¿Cuál sería? Después de esto los estudiantes si pudieron completarlo o específicamente algunos de ellos quienes estuvieron atentos o constantemente participan)

PF: miren atentamente aquí, el primer valor que me dijo E2 corresponde al valor en el que aumenta constantemente cada figura entonces es 4, después, el siguiente valor es el número que corresponde a la figura, ¿en este caso que figura vamos a dibujar?

Varios: la 4
Varios: la 8

PF: la 8 muy bien, el número final es el que corresponde a eso que le sobra a la figura respecto a la anterior, entonces ¿Qué figura sigue después del 4? (Vuelvo a hacer las mismas preguntas a ver si les quedó claro)

E5: Va el 8 profe

PF: 8 muy bien, ¿Por qué?

E2: porque es el número de la figura que necesitamos

PF: Muy bien y ¿Qué nos falta?

E2: restarle 3 que es el restante según el patrón anterior

Aquí terminaba la sesión 2 según la planeación en el itinerario, tal vez se ve cortada, sin embargo, yo conectaba directamente este momento final con lo que venía del anexo 9 que se optó por dejarlo como sesión 3 que correspondía al nivel formal

Apéndice F. *Transcripción sesión 3. Enseñanza en contextos formales*

Transcripciones Sesión 3

Día: 5 de octubre **Tiempo:** 3 horas **N° estudiantes:** 36

PF: Vamos a hacer una actividad en la que implica que ustedes encuentren un patrón. Va a ser muy similar a esta que acabamos de hacer (Aquí refiriéndome a la actividad con la que se finaliza la sesión 2)
PF: Les voy a entregar unas guías, lo primero que vamos a es marcar la hoja
PF: Quiero ver el nombre en las hojas
PF: *empieza a leer la tarea 1*

Tarea 1

En la planeación del rediseño de los senderos cercanos a Bienestar Pro en la UIS, realizamos diseños de patrones enfocados en dar visibilidad a la Región Santander. Entre estos estaban las flores de platanillo, en el diseño 1 se muestra el patrón del sendero hasta donde lo terminamos, sin embargo, necesitamos saber cuántos pétalos tendrán en determinado día.
PF: ¿Qué equipo le correspondió ese ejercicio?

Varios: al equipo 4

M: La idea es que ustedes tienen que descubrir un patrón

Varios: Aquí le están sumando de 2 en 2

PF: Entonces ya sabemos que está aumentando de 2 en 2, entonces, ¿Cómo creen que quedaría el patrón? si lo hacemos como en la actividad pasada

E2: primero 2

PF: ¿Por qué?

E2: Porque es la cantidad que aumenta

PF: Muy bien, ahora ¿por qué lo multiplicamos?

E2: por 1

PF: ¿Qué representa ese 1?

Varios: El número de la figura

PF: Entonces 2 por 1

Varios: 2

PF: ¿Qué debemos hacer para que nos de la cantidad de pétalos de la figura 1?

E3: sumarle

PF: ¿Cuánto le sumamos?

Varios: 1

PF: Entonces le sumamos 1, ese 1 representa la cantidad que le falta para completar la cantidad de pétalos que están presentes en la figura 1

Empiezan a resolver ellos la guía, se graba por los puestos para ver cómo están resolviendo los estudiantes el ejercicio

E7: mira vamos a hacerlo así, 2 por 8, 16 más 1, igual a 17, muy bien, exacto

E6: Profe, yo ya se cómo va este

PF: ¿Cómo?

E6: sabemos que el 12 es el día que nos están pidiendo entonces hacemos la operación 2 por 12 que nos da 24 y le sumamos 1 entonces nos da 25

Pasado un tiempo, se empieza a solucionar todos juntos en el tablero mediante una tabla

PF: ¿Cuántos pétalos tiene la flor en el día 1?

Varios: 3

PF: ¿Cuántos tiene en el día 2?

Varios: 5

PF: ¿Cuántos tiene en el día 3?

Varios: 7

PF: ¿Cómo sabemos que es 3, 5 y 7?

PF: ¿Cuál es el patrón que aplicamos?

E2: 2 que es la cantidad en la que aumenta

PF: ¿Qué le hacemos a ese 2?

E2: lo multiplicamos por el día

PF: entonces, ¿cómo es?

Varios: 2 por 2 más 1

PF: Muy bien, eso nos daría la cantidad del día 2

PF: El siguiente

Varios: 2 por 3 más 1

PF: ¿Cuántos nos dio la del día 5?

Varios: 11

PF: 11, entonces ¿Qué coloco primero para saber que nos da 11?

Varios: el 2

PF: ¿Después?

Varios: lo multiplico

PF: ¿por?

Varios: 5

PF: ¿Por qué colocamos el 5?

E2: Porque es el día de la figura que nos están pidiendo

PF: Muy bien, y ¿ahora?

Varios: más 1

Aquí pasa PM al tablero a hacer la operación del día 8

E2: 2X8+1

M: ¿Por qué queda así?

CSY: porque nos están pidiendo la del día 8 así que hay que multiplicar por 8

M: Si yo les pregunto la del día 20, ¿Cómo quedaría?, ¿Qué tengo que hacer?

E13: 2X20+1

M: ¿Cuánto nos da?

E1: 41

PF: En el día 20 entonces tendríamos 41 y así sucesivamente sin necesidad de dibujar todos los pétalos

PF: díganme otro numero

E2: 25

PF: Una pista para la otra tarea, vamos a resolverlo. ¿Cómo lo hago?

E2: 2x25+1 da 51

M: Siguiente Tarea, ¿Cómo le explicarían a un amigo si tuviera que encontrar la cantidad de pétalos del día 25? Sin tener que dibujar todas las flores de los días anteriores. Ahí viene un recuadro donde ustedes escribirán como le van a explicar

E28: Yo le explicaría que tiene que multiplicar 2 x 25 y le darían 50 y después le suma 1 y le saldrían 51 pétalos en el día 25

E2: Yo le día que 2x 25 es 50 y le suma 1 y serían 51
PF: ¿Por qué le dirían 2 por 25? ¿El 2 qué representa?

E1: el aumento

PF: ¿Y qué representa entonces ese 25?

E2: el día

PF: ¿y el 1?

E2: lo que le falta

PF: okay y si yo les pido un número más grande, ¿cómo sería?

E6: por ejemplo, el 110

PF: el 110, ¿Cómo lo hacemos?

E2: Lo haríamos a lo natural, pon el 110 arriba, el x debajo del 1 y el 2 debajo del 0

M: Perfecto, ¿Cuánto nos daría eso?

E2: 2 x 0 es 0
E2: 2 x 1 es 2
E2: 2 x 1 es 2
E2: 220

PF: Entonces nos da 220, ¿Qué nos falta? Hagamos la operación completa ¿Cómo quedaría?

E7: 2x 110 + 1

PF: muy bien, ¿Cuántos nos dio?

Varios: 221

PF: Así resolveremos el patrón sin necesidad de ir a dibujar 110 flores

PF: Vamos a fijarnos en la cantidad de pétalos que hay a cada lado

PF: En el día 2, ¿Cuántos pétalos hay?

E1: 5

PF: 5 y ¿Cuántos hay a cada lado y cuántos arriba?
E1: 2 a cada lado y 1 arriba

PF: ¿Cuántos irían en la figura 3?

E7: 3 y 3 y 1 arriba

PF: la 4 ¿Cómo queda?

E2: 4 y 4 y 1 arriba

PF: entonces la 5 queda 5 y 5 y 1 arriba, ¿verdad?

E8: Sí

PF: Así lo resolvemos cuando hay muchos elementos, saber la cantidad de pétalos que aumenta a cada lado según los días

Aquí la profesora Adriana hace una contextualización de cómo se podía observar esto de esta forma en los edificios de la UIS

PF: Ahora, vamos a hacer la siguiente tarea

Tarea 2

En el rediseño de las paredes se encontraba este diseño de cuadros, la universidad desea hacer el mismo diseño en una pared más grande, por eso requiere saber cuál es la relación entre las figuras del patrón, ayúdales y completa la tabla.

PF: Debemos completar entonces la tabla, ustedes lo van a hacer primero, descubriendo el patrón y después lo hacemos todos juntos

E30: E casi como el ejercicio anterior

PF: Así es, es muy similar

Pasado el tiempo

PF: Vamos a ver, ¿De a cuánto aumentaba cada figura?

E11: 3 en 3

PF: Aumentaba de 3 en 3

PF: ¿Cómo quedaba entonces el patrón?

E2: 3 el número que aumenta

PF: 3 primero, muy bien. Después, ¿Qué ponemos?

E2: lo multiplicamos por el día

PF: Lo multiplicamos por el número de la figura en este caso por el 1, ¿menos?

E2: 2 que es la cantidad que sobra

PF: ¿Cuánto nos daba eso?

E1: 1

PF: Ahora el día 2

E2: 3x2-2

PF: ¿Y eso nos daba?

E4: 4

PF: Ahora, ¿cómo nos quedaría la 5?

E23: 3x5-2

PF: ¿Cuánto nos daba?

E5: 13

PF: ¿y la última?

E1: 3x6-2 que nos daba 16

PF: Muy bien y en dado caso que yo les pida el día 46, ¿Cómo sería?

E2: 3x46-1

PF: ¿Cuántos cuadritos quedarían?

E2: 136

PF: Muy bien, y así sucesivamente lo haríamos con todos

Aquí di las gracias por la colaboración y abrí espacio para comentarios por parte de los estudiantes y la profesora Adriana

Anexos

Anexo A. *Consentimiento informado de la Institución Educativa de Santander*

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE SANTANDER *"Con Audacia, Valor y Honor... Caminamos hacia la EXCELENCIA"* **CONSENTIMIENTO INFORMADO**	**FT- PF-CE - 22** **Fecha: 26/09/2023** **Versión: 01**

Yo, ______________________________ mayor de edad, portador(a) de la cédula de ciudadanía No. ________________, en calidad de padre/madre/tutor legal del estudiante ______________________________, menor de edad, portador(a) de la tarjeta de identidad No. ________________, autorizo y doy mi consentimiento para que mi hijo(a) participe en la actividad extracurricular organizada por Mariana Bautista Prada estudiante de décimo semestre de la Universidad Industrial de Santander. Declaro haber leído y comprendido los términos de esta autorización y estoy de acuerdo con los siguientes puntos:

1. **Descripción de la Actividad:** La actividad consiste en: Visitar la Universidad Industrial de Santander para realizar una observación de diversos edificios, senderos y zonas verdes con la finalidad de identificar patrones y regularidades para la remodelación de la UIS. En esta actividad el estudiante fortalecerá su aprendizaje y conocimiento del área de matemáticas en torno al álgebra temprana. **Fecha:** viernes 29 de septiembre **horario**: el estudiante debe llegar en el horario normal a la institución, después a las 8:00- 8:30 am con la estudiante de la UIS se dirigirán a la universidad y después de 1 hora retornarán de nuevo al salón. **Lugar**: Universidad Industrial de Santander

2. **Restricción médica:** comprendo que la salida anteriormente nombrada se realizará en un ambiente que actualmente se encuentra en proceso de construcción y hay posibles problemas de contaminación del aire por movimiento constante de camiones de carga, declaro que el estudiante ______________________________________ **NO** tiene restricciones médicas como asma, problemas respiratorios u otra que pueda representar un riesgo a su salud. Se solicita traer tapabocas para realizar la salida.

3. **Manejo de Imágenes y Videos:** Autorizo a la estudiante Mariana Bautista Prada a tomar fotografías y grabar videos de mi hijo(a) durante la actividad. Entiendo que estas imágenes y videos pueden ser utilizados con fines educativos relacionados con el proyecto que está realizando la estudiante de la UIS.

4. **Responsabilidad y Riesgos:** Reconozco que existe un nivel de riesgo inherente a la participación de mi hijo(a) en esta actividad extracurricular. Estoy consciente de que pueden ocurrir lesiones menores, accidentes u otros incidentes imprevistos. Asumo todos los riesgos asociados con la actividad y libero a la estudiante Mariana Bautista Prada de cualquier responsabilidad por daños personales o materiales que puedan surgir como resultado de la participación de mi hijo(a).

5. **Exoneración de Responsabilidad:** Eximo de toda responsabilidad a la estudiante de la UIS por cualquier caso fortuito, fuerza mayor, lesiones, y daños incurridos durante la actividad. Entiendo que la estudiante ha tomado medidas razonables para garantizar la seguridad de los participantes, pero comprendo que no puede prevenir ni controlar cada posible situación.

6. **Autorización Médica de Emergencia:** En caso de una emergencia médica que requiera atención inmediata, autorizo al personal de la Universidad Industrial de Santander y a la estudiante Mariana Bautista Prada a tomar las decisiones necesarias para garantizar la salud y bienestar de mi hijo(a), incluyendo la búsqueda de atención médica y tratamiento.

7. **Información de Contacto:** En caso de emergencia o necesidad de comunicación, contactarme directamente en el colegio con la directora de grupo de su hijo/a.

8. **Duración de la Autorización:** Esta autorización está vigente desde la fecha de firma hasta la finalización de la actividad extracurricular mencionada anteriormente.

Al firmar a continuación, confirmo que he leído y comprendido los términos de este consentimiento informado y que doy mi consentimiento para que mi hijo(a) participe en la actividad extracurricular, asumiendo los riesgos y eximiendo de responsabilidad a la estudiante Mariana Bautista Prada.

Firma del Padre/Madre/Tutor: ________________________ (Firma)

Nombre del Padre/Madre/Tutor: ________________________ (Nombre impreso)

Fecha: ________________________ (Fecha de firma)