

**Análisis de la estructura del campo gravitacional en los  
modelos de discos relativistas de Kuzmin-Toomre  
inmersos en un halo esferoidal de materia**

Sharon Tatiana Navarro Suárez

**Trabajo de grado para optar por el título de Física**

Director:  
Guillermo Alfonso González Villegas  
Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2023

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a mi profesor y director de proyecto Guillermo Alfonso González, por el apoyo, comprensión y la constante paciencia con la que siempre me recibía en las reuniones.

También agradezco a mis padres Marisol y Alexander, quienes han sido mi más grande apoyo.

Por último, les doy mis agradecimientos a mi hermana Alexandra, y a mis amigos Laura y Christian quienes se han convertido en unos grandes compañeros de vida.

# DEDICATORIA

*Hay que luchar todos los días, como Sísifo. Esto es lo que no comprendo. Que la vida contiene días, muchos días, y nada se conquista definitivamente.*

Alejandra Pizarnik.

# CONTENIDO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2. DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE CON HALO</b>   | <b>4</b>  |
| <b>3. CAMPO GRAVITACIONAL</b>   | <b>9</b>  |
| 3.1. Curvas integrales de la cuadri-aceleración en un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico . . . . .    | 9         |
| 3.2. Curvas integrales de la cuadri-aceleración en un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico . . . . . | 11        |
| <b>4. LÍNEAS DE CAMPO EN UN ESPACIO-TIEMPO CONFORMESTÁTICO</b>  | <b>13</b> |
| <b>5. RESULTADOS</b>  | <b>16</b> |
| 5.1. Líneas de campo para $n = 0$ . . . . .   | 16        |
| 5.2. Líneas de campo para $n = 1$ . . . . .   | 21        |
| 5.3. Líneas de campo para $n = 2$ . . . . .   | 24        |
| <b>6. CONCLUSIONES</b>  | <b>29</b> |
| <b>REFERENCIAS</b>  | <b>30</b> |
| <b>A. POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UN DISCO DE KUZMIN-TOOMRE</b>  | <b>33</b> |
| <b>B. FUERZAS QUE INTERVIENEN EN UN MOVIMIENTO RELATIVISTA</b>  | <b>34</b> |

# RESUMEN

**TÍTULO:** Análisis de la estructura del campo gravitacional en los modelos de discos relativistas de Kuzmin-Toomre inmersos en un halo esferoidal de materia.<sup>1</sup>

**AUTOR:** Sharon Tatiana Navarro Suárez.<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Espacio-Tiempo Conformestático, Discos Relativistas de Kuzmin-Toomre, Halo Esferoidal de Materia, Líneas de Campo Gravitacional.

## DESCRIPCIÓN:

En el presente trabajo se estudia la estructura del campo gravitacional en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico correspondiente a la superposición de los discos relativistas de Kuzmin-Toomre y un halo esferoidal de materia propuesto por González y Pimentel (1). Las propiedades del sistema compuesto por discos relativistas y halos esferoidales de materia se estudian mediante un análisis de las líneas de campo gravitacional, las cuales se definen como las curvas integrales de la cuadri-aceleración de observadores estacionarios con momento angular cero con respecto al eje de simetría (2). Asimismo, se especifica el proceso por el cual se obtiene un tensor métrico capaz de describir el sistema compuesto mencionado anteriormente y a partir de este, se estudia el comportamiento de la cuadri-aceleración de dichos observadores.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso Gonzalez Villegas, Ph.D.

# ABSTRACT

**TITLE:** Analysis of the gravitational field structure in relativistic Kuzmin-Toomre disks models immersed in a spheroidal halo of matter <sup>1</sup>

**AUTOR:** Sharon Tatiana Navarro Suárez. <sup>2</sup>

**KEY WORDS:** Conformal Space-Time, Relativistic Kuzmin-Toomre Disks, Spheroidal Matter Halo, Gravitational Field Lines.

## DESCRIPCIÓN:

In the present work we study the structure of the gravitational field in an axially symmetric conformastatic space-time corresponding to the superposition of the relativistic Kuzmin-Toomre disks and a spheroidal halo of matter proposed by González and Pimentel (1). The properties of the system composed of relativistic disks and spheroidal halos of matter are studied by means of an analysis of the gravitational field lines, which are defined as the integral curves of the four-acceleration of stationary observers with zero angular momentum with respect to the axis of symmetry (2). The process by which a metric tensor capable of describing the aforementioned composite system is obtained is specified, and from this, the behavior of the quadratic acceleration of these observers are studied.

---

<sup>1</sup>Degree Work

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso Gonzalez Villegas, Ph.D.

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

El concepto de *gravedad* es relativamente reciente, antes de Newton, se creía que el sol tiraba de la Tierra debido a la acción de fuerzas magnéticas (3). No obstante, en 1687 Newton dio a conocer la ley de la gravitación universal, en donde explicaba que el movimiento de los planetas alrededor del sol era producto de una “nueva fuerza” que depende de la masa de los cuerpos y de la distancia que hay entre ellos (4). Un par de siglos más tarde, Einstein con su *teoría de la relatividad* cambió la noción de gravedad asignándole una nueva interpretación y además describiéndola con una matemática mucho más sofisticada. La hipótesis de Einstein se basó en que la gravedad no es una fuerza como Newton lo había planteado, sino un movimiento en ausencia de fuerzas en un espacio-tiempo curvado debido a la presencia de materia (5). John Wheeler resumió las ideas de Einstein en una sola oración: “la materia le dice al espacio cómo curvarse; el espacio le dice a la materia cómo moverse” (6).

La teoría de Einstein fue revolucionaria para la época, debido a que logró explicar algunos fenómenos que la teoría newtoniana no pudo abarcar: la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, la deflexión de la luz debido a la curvatura del espacio-tiempo, el efecto del corrimiento al rojo gravitacional y la dilatación del tiempo debido a la gravedad (7). Es por este motivo que en el presente proyecto se estudia un sistema astrofísico desde la lente de la teoría de la relatividad de Einstein, cuyo objetivo principal es analizar la estructura del campo gravitacional generado por los discos relativistas de Kuzmin-Toomre inmersos en un halo esferoidal de materia.

Asimismo, una motivación para estudiar el sistema disco-halo es que esta estructura puede compararse a un sistema astrofísico como una galaxia. Los sistemas astrofísicos tienden a evolucionar a estados de menor energía; es por esta razón que algunas galaxias tienen la forma de un disco, el cual representa un estado de baja energía (8). Algunos ejemplos de este tipo de galaxias son las galaxias en espiral como nuestra Vía Láctea (9) y las elípticas como Centaurus A (10). Estos sistemas están compuestos principalmente por un bulbo de estrellas, un agujero negro súper masivo, un disco galáctico, y un halo (8; 11); no obstante, el sistema galáctico que estudiamos es más elemental, ya que se compone únicamente de un

disco y un halo. Esta simplificación se debe a que las soluciones a las ecuaciones de Einstein para sistemas más complejos no se encuentran de forma analítica, y para poder estudiar el sistema, necesitamos contar con expresiones a las que se les pueda asignar una interpretación física. Sin embargo, este modelo es una buena aproximación para estudiar su campo gravitatorio, ya que la masa de una galaxia se concentra principalmente en el halo y en el disco (8).

Previamente se han modelado discos galácticos como los discos newtonianos de Kuzmin-Toomre, cuya característica principal es que son delgados e infinitos; sin embargo, es interesante ver que estos tienen densidades de energía y masa finitas (12; 13). Estos discos también se han estudiado en su versión relativista (14) y asimismo, se ha analizado su evolución en presencia de campos magnéticos fuertes (15). Otro tipo de discos son los de Morgan-Morgan (16); estos a diferencia de los de Kuzmin-Toomre, tienen un radio de corte, es decir, poseen extensión finita. De estos sistemas se ha estudiado la presión, la distribución de la masa, y su momento angular (17; 18). Incluso se han analizado sus propiedades eléctricas y magnéticas (19; 20). En el artículo de González y Pimentel (1) se estudiaron los dos tipos de discos previamente mencionados; no obstante, se construyó un modelo más complejo: un disco inmerso en un halo. En el mismo, los autores analizan las propiedades físicas del sistema como la presión, la masa y la densidad de energía, como también las curvas de rotación de una partícula que se mueve en el plano del disco. Por último, vale la pena mencionar los discos de Kalnajs (21); estos son discos delgados y finitos que en contraste con el modelo más simple de Morgan-Morgan no son discos estáticos, ya que estos rotan uniformemente.

En resumen, hay una amplia cantidad de estudios con respecto a discos galácticos y sus tipos; no obstante, los discos que estudiamos en este proyecto son los de Kuzmin-Toomre inmersos en un halo esferoidal de materia, ya que su solución relativista ya fue encontrada por González y Pimentel (1), y sus resultados representan un sistema físicamente bien comportado. Además, es interesante ver que la primera familia de soluciones encontradas por estos autores, converge a una expresión idéntica a la del potencial gravitacional de un disco de Kuzmin-Toomre en su forma newtoniana (8) como veremos en los posteriores capítulos, a pesar de que el sistema fue generado a partir de la solución a las ecuaciones de Einstein.

Para cumplir con el objetivo principal que es analizar la estructura del campo gravitacional del sistema disco-halo, nos basamos en el estudio de Semerák y sus colegas (2). Los autores en este artículo parten de una formulación relativista para calcular las curvas integrales de la quadri-aceleración de observadores ZAMOs (en posteriores capítulos describiremos en detalle a estos observadores) que se mueven alrededor de un agujero negro de Schwarzschild superpuesto con un anillo de Bach-Weyl, y finalmente estas curvas son interpretadas como las líneas del campo gravitacional.

Vale la pena mencionar que si bien se han realizado estudios en los que se halla una expresión para el campo gravitacional de sistemas compuestos en el marco de la relatividad general (un ejemplo de ello es el análisis del campo gravitacional de discos y cascarones a partir de dos potenciales métricos (22); en (23) se encuentra una expresión para campo gravitacional haciendo una analogía con el formalismo del campo electromagnético. Boshkayev, Quevedo

y Ruffin estudiaron el campo gravitacional de objetos compactos partiendo del potencial newtoniano (24). En (23) se analiza el campo gravitacional de anillos masivos haciendo una analogía con el formalismo del campo electromagnético.), estos se han hecho de forma aproximada debido a la complejidad que representan las soluciones analíticas que resultan de una superposición.

Por último, se manifiesta que esta investigación puede dar paso a que se estudien los efectos (sobre otros cuerpos) del campo gravitacional generado por sistemas más complejos como la superposición de discos, agujeros negros, halos esferoidales y bulbos de estrellas, los cuales representan modelos de galaxias mucho más realistas.

## Capítulo 2

# DISCOS RELATIVISTAS DE KUZMIN-TOOMRE CON HALO

En este capítulo se describe el procedimiento debido para hallar las soluciones a las ecuaciones de Einstein del sistema disco-halo encontradas por González y Pimentel (1). Primeramente, se define el elemento de línea de un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico, el cual está dado en coordenadas cuasi-cilíndricas por

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

siendo  $\psi$  una función que depende únicamente de  $r$  y de  $z$ . Gráficamente, el sistema disco-halo se representa en la figura 2.1. En esta imagen se muestra que el disco es una hipersuperficie  $\Sigma$  definida mediante la función  $\phi = z$  la cual divide el espacio-tiempo en dos regiones  $M^+$  y  $M^-$ .

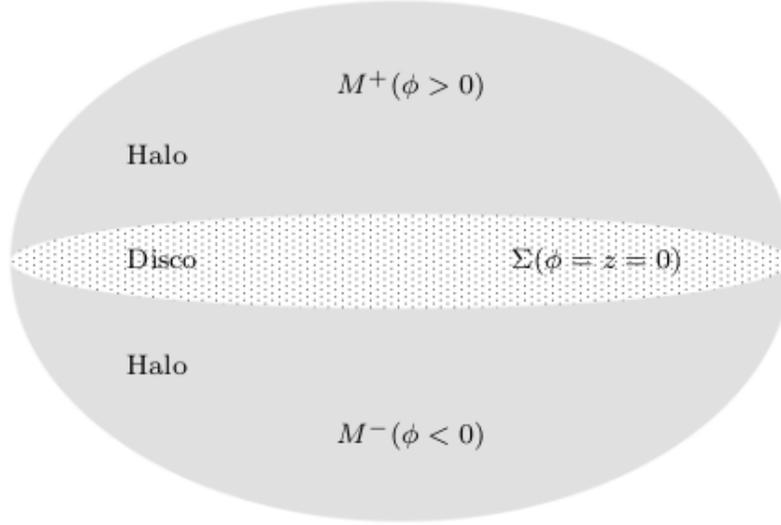
Para determinar el sistema descrito, debemos hallar una expresión para  $\psi$ , y para encontrarla se deben solucionar las ecuaciones de Einstein

$$T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (2.2)$$

De las ecuaciones de campo de Einstein se hallan las componentes del tensor de momentum-energía para el halo en un sistema de referencia comóvil, cuyos ejes espaciales están en dirección de los esfuerzos principales. Las componentes del tensor  $T_{\alpha\beta}$  son las siguientes

Figura 2.1

*Representación gráfica del sistema disco-halo*



*Nota.* El disco es una hipersuperficie  $\Sigma$  definida mediante la función  $\phi(x^\alpha) = z$ . Esta hipersuperficie divide el espacio-tiempo en las regiones  $M^+$  y  $M^-$  en  $z = 0$ .

**Fuente:** (1).

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = e^{2\psi}(2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi), \quad (2.3)$$

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (2.4)$$

$$T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (2.5)$$

$$T_{\hat{z}\hat{z}} = -e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (2.6)$$

donde  $T_{\hat{t}\hat{t}}$  es la densidad de energía  $\rho$  y las demás componentes  $T_{\hat{r}\hat{r}}$ ,  $T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ ,  $T_{\hat{z}\hat{z}}$  son los esfuerzos principales  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  respectivamente, de modo que, la presión promedio  $p$  del fluido del halo está dada por

$$p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (2.7)$$

Ahora bien, para que el sistema disco-halo sea físicamente bien comportado, este debe cumplir las condiciones de energía. Según González y Pimentel (1), las condiciones de energía se resumen en la siguiente relación

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (2.8)$$

donde  $k \geq 1$  para que la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho_0$  se mantengan positivas como lo vemos en la siguiente expresión la cual representa la ecuación de estado para el halo,

$$p = \frac{\rho_0}{3(2k - 1)}. \quad (2.9)$$

De la ecuación 2.9 podemos observar que  $p$  y  $\rho_0$  están relacionados linealmente por una constante  $\gamma = 1/3(2k - 1)$ , la misma depende únicamente del valor de  $k$ . Esto significa que el tipo de fluido que compone el halo sólo depende de la elección de este factor; por ejemplo, si  $k$  tiende a infinito la presión promedio se hace cero y se tendrá que el halo está compuesto de polvo. De otra forma, si  $k = 1$  se tendrá un fluido de radiación.

Por otro lado, para encontrar una solución de  $\psi$ , se reescribe la expresión (2.8) de la siguiente forma

$$\nabla^2 e^{-k\psi} = 0, \quad (2.10)$$

y luego, se reemplaza  $e^{-k\psi} = 1 - U$ , expresión en la que  $U$  debe ser una función que en el infinito tienda a 0 para que la métrica en el infinito espacial sea asintóticamente plana. Por consiguiente (2.10) se reescribe tal como

$$\nabla^2 U = 0. \quad (2.11)$$

Recuérdese que, la función  $\psi$  depende únicamente de las variables  $z$  y  $r$  por lo tanto, el laplaciano de  $U$  explícitamente se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_\phi h_z}{h_r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h_\phi h_r}{h_z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.12)$$

donde  $h_z^2 = g_{zz}$ ,  $h_r^2 = g_{rr}$  y  $h_\phi^2 = g_{\phi\phi}$ .

Luego, para hallar la solución a la ecuación de Laplace (2.11), la función  $U$  deben cumplir algunas condiciones con el fin de obtener una solución de disco. Una primera condición que se debe considerar, es que la métrica debe ser continua en  $z = 0$ , es decir

$$[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}|_{z=0^+} - g_{\alpha\beta}|_{z=0^-} = 0; \quad (2.13)$$

de ahí que, la función  $U$  debe ser simétrica con respecto a  $z$

$$U(r, z) = U(r, -z). \quad (2.14)$$

Asimismo, la hipersuperficie de la figura 2.1 introduce una discontinuidad en la derivada de la métrica con respecto a  $z$ , tal que

$$[g_{\alpha\beta, z}] = 2g_{\alpha\beta, z}|_{z=0^+} \neq 0, \quad (2.15)$$

por consiguiente, la función  $U$  debe cumplir que

$$U_{,z}|_{z=0^+} \neq 0. \quad (2.16)$$

Físicamente la discontinuidad (2.15) se produce porque hay una densidad de energía  $\sigma$  del disco, la misma debe ser mayor que cero ( $\sigma > 0$ ) para que se cumplan las condiciones de energía. Por consiguiente, se obtiene una última restricción para  $\psi$

$$\psi_{,z}|_{z=0^+} > 0, \quad (2.17)$$

que en términos de  $U$  es de la forma

$$U_{,z}|_{z=0^+} > 0. \quad (2.18)$$

Para obtener la discontinuidad presentada en (2.16), se utiliza el método de Kuzmin-Toomre (12; 13). Como se observa en la figura 2.2, esta técnica consiste en tomar el campo gravitacional de una partícula puntual y cortarlo desde la línea punteada hacia abajo, luego desplazar las líneas de campo restantes hasta el origen y por último reflejarlo con respecto al eje horizontal. Matemáticamente el método de desplazamiento, corte y reflexión consta en transformar la variable  $z$  de forma que

$$z \rightarrow |z| + a. \quad (2.19)$$

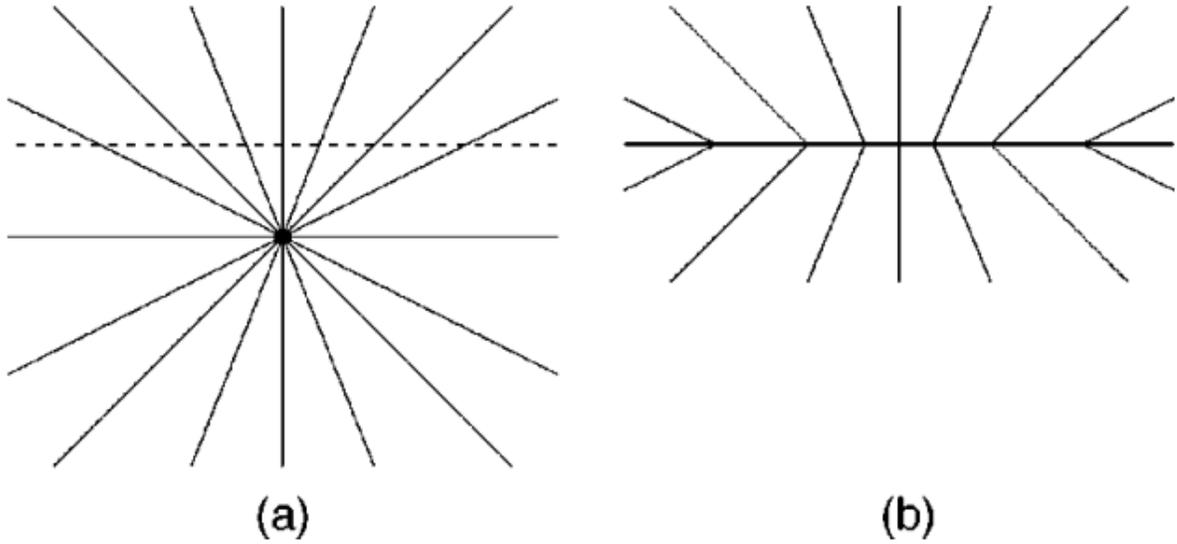
donde  $a$  es una constante.

Considerando lo planteado previamente, se puede expresar la solución a la ecuación de Laplace (2.11) como

$$U_n(R, \theta) = - \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l(\cos(\theta)), \quad (2.20)$$

Figura 2.2

*Método de desplazamiento, corte y reflexión de Kuzmin-Toomre.*



**Fuente:** (25).

donde  $P_l(\cos(\theta))$  son los polinomios de Legendre,  $\cos(\theta) = \frac{(|z|+a)}{R}$  y  $R = (r^2 + (|z| + a)^2)^{1/2}$ . Nótese que la métrica y el tensor momentum-energía del sistema disco-halo quedan determinados por la función  $U$ . Esta solución es esencial para hallar las líneas de campo del sistema binario como veremos en los posteriores capítulos.

# Capítulo 3

## CAMPO GRAVITACIONAL

Siguiendo las ideas de Abramowicz y sus colegas en (26) y los estudios de Semerák (27) presentadas en el apéndice B, en este capítulo veremos cómo hallar el campo gravitacional de un sistema astrofísico en un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico; luego aplicaremos una misma metodología para encontrar las líneas de campo gravitatorio para el sistema disco-halo en un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico. Para un observador ZAMOs en un espacio-tiempo estacionario la cuadri-aceleración (B.1) es equivalente a la aceleración gravitacional ya que los demás términos se anulan. Teniendo en cuenta lo anterior, y además haciendo una analogía con la mecánica newtoniana (2) en la que la aceleración de una partícula en caída libre es el campo gravitacional, diremos que la aceleración gravitacional es el campo gravitacional y en consecuencia la cuadri-aceleración también lo es. Para hallar la cuadri-aceleración para un observador con momento angular cero con respecto al eje de simetría del sistema disco-halo en un espacio-tiempo conformestático (sección 3.2), primero estudiaremos a los observadores ZAMOs en un espacio-tiempo estacionario como veremos en la siguiente sección.

### 3.1. Curvas integrales de la cuadri-aceleración en un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico

En esta sección expondremos el artículo “*The structure of superposed Weyl fields*” (2). En el mismo, los autores estudian el campo gravitacional de sistemas astrofísicos en un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico en coordenadas de Weyl-Lewis-Papapetrou, cuyo elemento de línea está dado por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{zz}dz^2. \quad (3.1)$$

En (3.1) cada componente de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  es tal que

$$g_{\phi\phi} = \rho^2 B^2 e^{-2\nu}, \quad g_{tt} = -e^{2\nu} + \omega^2 g_{\phi\phi}, \quad g_{\rho\rho} = e^{2(\lambda-\nu)}, \quad (3.2)$$

$$g_{zz} = e^{2(\lambda-\nu)}, \quad g_{t\phi} = -\omega g_{\phi\phi}, \quad g_{\phi t} = -\omega g_{\phi\phi}. \quad (3.3)$$

donde  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$  y  $B$  son funciones que dependen únicamente de  $\rho$  y  $z$ ; además  $\omega$  se interpreta como la velocidad angular de rotación del sistema inercial respecto a los observadores en reposo en el infinito espacial (28).

Por otra parte, en un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico, las líneas de mundo más simples son órbitas espaciales circulares donde  $\rho$  y  $z$  son constantes y  $d\phi/dt = \Omega = \text{constante}$  (2). Para hallar las curvas integrales de la aceleración, es necesario conocer la cuadri-velocidad

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (3.4)$$

De acuerdo con lo anterior, tenemos que las únicas componentes de la cuadri-velocidad que no se anulan son  $u^t$  y  $u^\phi$ , así pues, cada una de las componentes se escribe de la siguiente forma

$$u_t = g_{t\phi} u^\phi + g_{tt} u^t = u^t (g_{t\phi} \Omega + g_{tt}) \quad (3.5)$$

$$u_\phi = g_{\phi t} u^t + g_{\phi\phi} u^\phi = u^t (g_{\phi t} + g_{\phi\phi} \Omega) \quad (3.6)$$

Sabiendo que  $u^2 = -1$  y teniendo en cuenta (3.5) y (3.6), se tiene que la componente temporal de la cuadri-velocidad en su forma contravariante se escribe como

$$u^t = (-g_{tt} - 2g_{\phi t} \Omega - g_{\phi\phi} \Omega^2)^{-1/2}. \quad (3.7)$$

Una vez obtenida  $u^t$ , se procede a calcular la cuadri-aceleración  $a_\alpha$  a partir de la ecuación de la ecuación de la geodésica,

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} g_{\nu\kappa, \alpha} u^\nu u^\kappa. \quad (3.8)$$

En concordancia con los autores (2), en estudios previos a su artículo (29; 30; 31), se ha considerado que el movimiento relativista de un cuerpo alrededor de fuentes supermasivas puede ser interpretado como producto de una “fuerza” generada por la densidad de masa de la fuente que puede ser calculada a partir de la cuadri-aceleración B. En un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico esta última se mide con respecto a un observador

estacionario con momento angular cero respecto al eje de simetría o abreviadamente un observador ZAMOs. De la misma manera, la velocidad angular azimutal  $\Omega$  se interpreta como la velocidad angular de la geometría del espacio-tiempo en corrotación con la fuente, por ende

$$\Omega = \Omega_{ZAMO} = \frac{-g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}. \quad (3.9)$$

De acuerdo con la ecuación (3.7) y sabiendo que  $g_{\phi t} = -\omega g_{\phi\phi}$  tenemos que la componente temporal de la cuadri-velocidad es tal que

$$u^t = (-g_{tt} - \omega g_{\phi t})^{-1/2}. \quad (3.10)$$

En lo que respecta a la ecuación anterior, esta es de gran importancia para hallar una expresión explícita de la cuadri-aceleración (3.8) tanto para un sistema en este espacio-tiempo como para nuestro sistema disco-halo en un espacio tiempo conformestático y axialmente simétrico como se podrá ver a continuación.

## 3.2. Curvas integrales de la cuadri-aceleración en un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico

Si ahora consideramos un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico, la componente de la métrica  $g_{\phi t} = 0$ , por lo tanto  $\Omega$  es nula. Así pues, el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\phi\phi}r^2d\phi^2 + g_{zz}dz^2, \quad (3.11)$$

el mismo es equivalente a la ecuación (2.1). Además, vimos en la sección anterior que es importante conocer las componentes de la métrica, en este caso se escriben de la siguiente forma

$$g_{tt} = -e^{2\psi}, \quad g_{rr} = e^{-2\psi}, \quad (3.12)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2e^{-2\psi}, \quad g_{zz} = e^{-2\psi}. \quad (3.13)$$

Adicionalmente, exponemos las componentes de la métrica contravariante ya que serán útiles en el capítulo siguiente

$$g^{tt} = -e^{-2\psi}, \quad g^{rr} = e^{2\psi}, \quad (3.14)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2}e^{2\psi}, \quad g^{zz} = e^{2\psi}. \quad (3.15)$$

Por otra parte, para hallar la cuadri-aceleración (3.8) para nuestro sistema, primero debemos encontrar la cuadri-velocidad que en su forma contravariante se escribe como

$$u^\alpha = u^t (1, 0, 0, 0). \quad (3.16)$$

De acuerdo con (3.16), tenemos un observador en sistema de referencia comóvil, cuya componente temporal de acuerdo con la ecuación (3.10) es de la forma

$$u^t = (-g_{tt})^{-1/2}, \quad (3.17)$$

en consecuencia, la cuadri-aceleración según la ecuación (3.8) es

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} g_{tt,\alpha} u^t u^t, \quad (3.18)$$

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} g_{tt,\alpha} \cdot (g_{tt})^{-1}, \quad (3.19)$$

$$a_\alpha = \psi_{,\alpha}. \quad (3.20)$$

En conclusión, podemos observar que la cuadri-aceleración es la derivada de la función métrica  $\psi$  con respecto a las coordenadas, teniendo en cuenta que esta solo depende de  $r$  y  $z$ .

Ahora bien, en física clásica el campo gravitacional está dado en términos de la aceleración, y siendo este un campo conservativo se puede escribir como el gradiente de un potencial gravitacional. Haciendo una analogía con la ecuación (3.20) vemos que esta cuadri-aceleración es precisamente un gradiente de la función métrica  $\psi$ , por lo que esta ultima se considera como el potencial gravitatorio.

En términos de  $U$  (2.20), el potencial gravitacional  $\psi$  queda escrito como

$$\psi = -\frac{1}{k} \ln(1 - U), \quad (3.21)$$

por lo tanto la ecuación (3.20) se expresa tal que

$$a_\alpha = \frac{1}{k} \frac{U_{,\alpha}}{(1 - U)}. \quad (3.22)$$

Teniendo la expresión (3.22) ya podremos calcular sus curvas integrales las cuales describen las líneas del campo gravitacional del sistema disco-halo.

# Capítulo 4

## LÍNEAS DE CAMPO EN UN ESPACIO-TIEMPO CONFORMESTÁTICO

En este capítulo, como veremos, el cálculo de las curvas integrales de  $a_\alpha$  se basa en resolver una ecuación diferencial exacta de primer orden. Para alcanzar el objetivo, primeramente debemos tener en cuenta la ecuación de las líneas de campo

$$a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (4.1)$$

donde  $g^{\alpha\beta}$  corresponde a la métrica en su forma contravariante (3.14), (3.15) y  $\lambda$  es el parámetro asociado con la curva que describe un objeto bajo la influencia de un campo gravitacional. Luego, si expresamos a (4.1) en términos de  $dx^\alpha$  tendremos

$$dx^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta d\lambda. \quad (4.2)$$

Además, por (3.22) sabemos que  $a_\alpha = (0, a_r, 0, a_z)$ , por lo que (4.2) tendrá la forma

$$dr = g^{rr} a_r d\lambda, \quad (4.3)$$

$$dz = g^{zz} a_z d\lambda, \quad (4.4)$$

igualando los dos términos anteriores, tenemos

$$\frac{a_z dr}{g_{zz}} - \frac{a_r dz}{g_{rr}} = 0.$$

Por cuestión de practicidad, la expresión anterior se escribe en términos de los factores de escala

$$\frac{a_z dr}{h_z^2} - \frac{a_r dz}{h_r^2} = 0. \quad (4.5)$$

siendo  $h_z^2 = g_{zz}$  y  $h_r^2 = g_{rr}$ .

Si expresamos a (4.5) en términos de la función  $U$  y además multiplicamos toda la expresión por  $h_r h_\phi h_z$  tendremos

$$\frac{h_r h_\phi}{h_z} U_{,z} dr - \frac{h_\phi h_z}{h_r} U_{,r} dz = 0, \quad (4.6)$$

que para nuestro tema en caso, la ecuación previa es equivalente a

$$rU_{,z} - rU_{,r} = 0. \quad (4.7)$$

Por último, reescribimos la expresión (4.7) como un diferencial de una función auxiliar  $V$  de forma que

$$V_{,r} dr + V_{,z} dz = dV(r, z) = 0, \quad (4.8)$$

en la que  $V_{,r} = \frac{h_r h_\phi}{h_z} U_{,z}$  y  $V_{,z} = -\frac{h_\phi h_z}{h_r} U_{,r}$ . Por consiguiente, podemos deducir de la ecuación anterior que  $V$  es constante, ya que  $dV = 0$ , así que, las líneas de campo de  $a_\alpha$  son las curvas constantes de  $V$ .

Ahora, hallaremos  $V$  por la teoría usada para resolver ecuaciones diferenciales exactas de primer orden; así que  $V$  debe cumplir el siguiente criterio para que (4.8) sea un diferencial exacto (32) y en consecuencia  $V$  sea integrable,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right). \quad (4.9)$$

Si escribimos explícitamente la ecuación anterior

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_\phi h_z}{h_r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h_\phi h_r}{h_z} \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (4.10)$$

vemos que la expresión (4.10) es equivalente a la ecuación de Laplace (2.12), por lo tanto, la función  $V$  cumple el criterio exigido.

De esta manera,  $V$  puede ser encontrada y es tal que

$$\int \frac{\partial V}{\partial r} dr = \int V_{,r} dr \quad (4.11)$$

$$V = \int V_{,r} dr + g(z). \quad (4.12)$$

Para conocer  $g(z)$  derivamos la expresión anterior con respecto a  $z$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int V_{,r} dr \right) + \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \quad (4.13)$$

si despejamos  $\partial g(z)/\partial z$  tendremos que

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \int V_{,r} dr \right). \quad (4.14)$$

Por último si integramos  $g(z)$ , esta quedará escrita como

$$g(z) = \int V_{,z} dz - \int \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \int V_{,r} dr \right) \right] dz, \quad (4.15)$$

así que  $V$  es

$$V = \int V_{,r} dr + \int V_{,z} dz - \int \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \int V_{,r} dr \right) \right] dz. \quad (4.16)$$

Es de esta forma que llegamos a una expresión para calcular las líneas del campo, en el siguiente capítulo se observarán los resultados obtenidos a partir de (4.16).

# Capítulo 5

## RESULTADOS

En el capítulo previo, vimos la forma de calcular la función  $V$  y a partir de esta encontrar las líneas de campo. Ahora bien, como la función  $U$  tiene infinitas soluciones (ver 2.20), solo tomaremos las 3 primeras familias:  $n = 0$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$ .

### 5.1. Líneas de campo para $n = 0$

Si tomamos  $n = 0$ , la función  $U$  tiene la forma

$$U_0 = \frac{-A_0}{\sqrt{(|z| + a)^2 + r^2}}. \quad (5.1)$$

Por otro lado, si reemplazamos  $a = 1$  y  $A_0 = 1$ , y adimensionamos las variables  $z$  y  $r$  dividiendo entre  $a$ , la ecuación anterior se reescribe como

$$U_0 = \frac{-1}{\sqrt{(|z| + 1)^2 + r^2}}, \quad (5.2)$$

y el potencial

$$\psi_0 = \frac{1}{k} \ln(1 - U_0). \quad (5.3)$$

Como vimos en el capítulo 4, para hallar  $V$  se deben hallar las respectivas derivadas de  $U_0$ ,

$$U_{0,r} = \frac{r}{((|z| + 1)^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (5.4)$$

$$U_{0,z} = \frac{z(|z| + 1)}{|z|((|z| + 1)^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (5.5)$$

así pues, la ecuación (4.7) para  $n = 0$  queda escrita como

$$\frac{r^2}{((|z| + 1)^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r \cdot z(|z| + 1)}{|z|((|z| + 1)^2 + r^2)^{3/2}} = 0. \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.12) y realizando los respectivos cálculos, la función  $V$  para  $n = 0$  a la que llamaremos  $V_0$  se escribe como

$$V_0(r, z) = \begin{cases} \frac{A_0(1 - z)}{((1 - z)^2 + r^2)^{1/2}} & \text{si } z < 0, \\ -\frac{A_0(z + 1)}{((z + 1)^2 + r^2)^{1/2}} & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

A continuación, graficamos en el eje vertical y horizontal a  $z$  y  $r$  respectivamente y tendremos la figura 5.1. De allí, podemos observar que las líneas de campo tienden a ser rectas cuya pendiente disminuye a medida que nos alejamos del origen. Por otro lado, tenemos las superficies equipotenciales (5.3) para diferentes valores de  $k$ , tal como se observa en las figuras 5.2, 5.3 y 5.4.

Figura 5.1  
*Líneas de campo para  $n = 0$  y  $k = 1$ .*

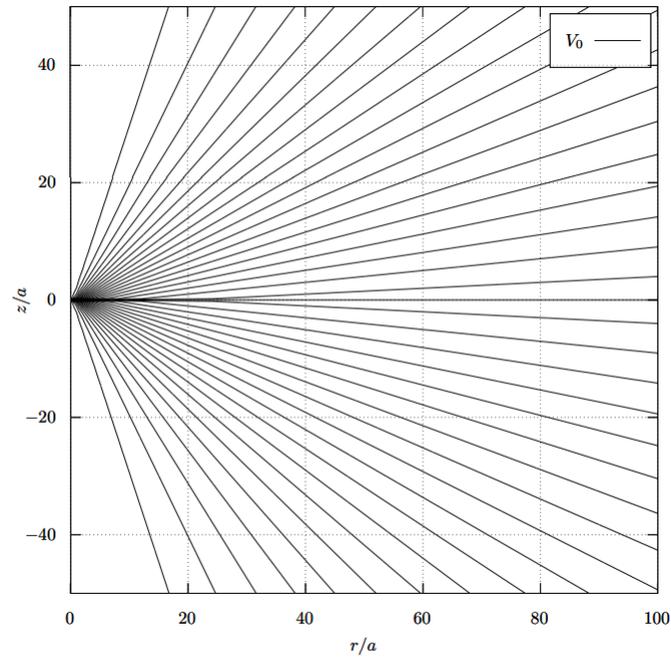


Figura 5.2  
*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 0$  con  $k = 1$ .*

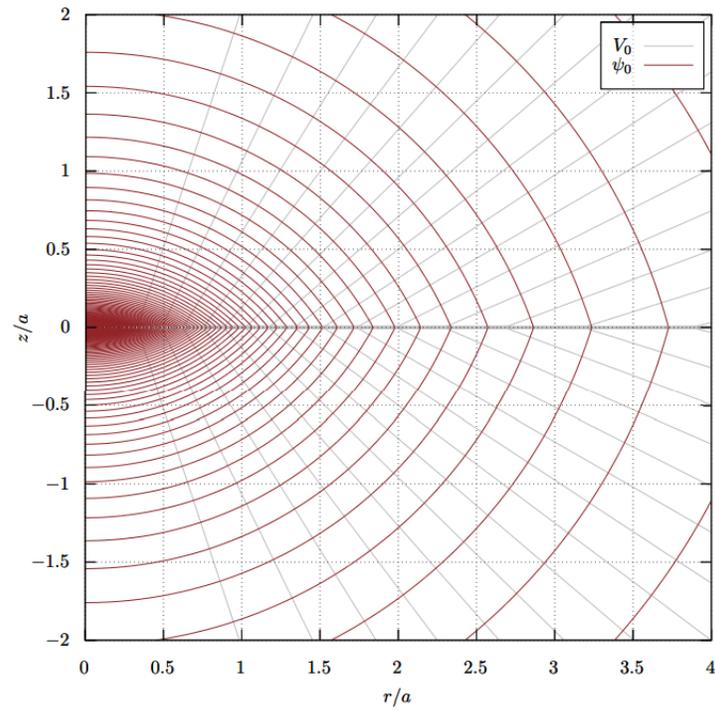


Figura 5.3

*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 0$  con  $k = 2000$ .*

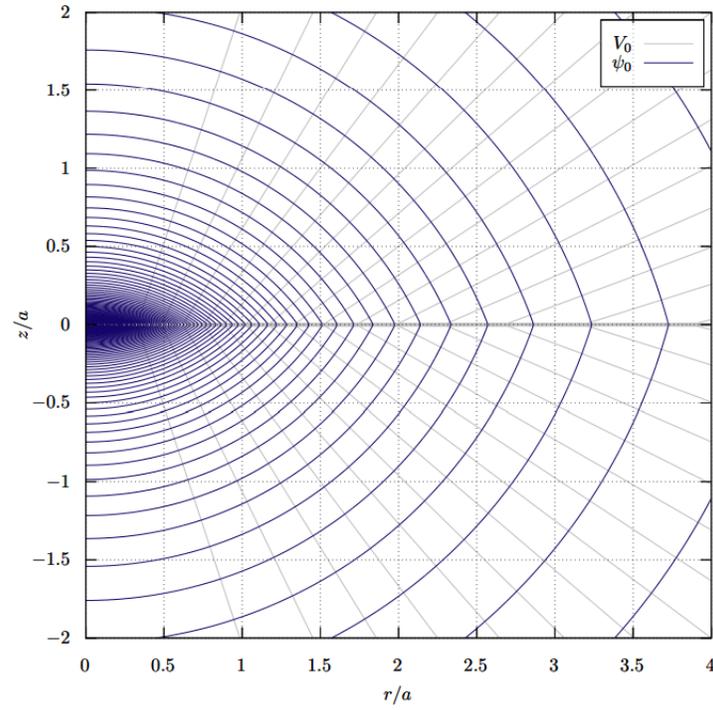


Figura 5.4

*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 0$  con  $k = 10000$ .*

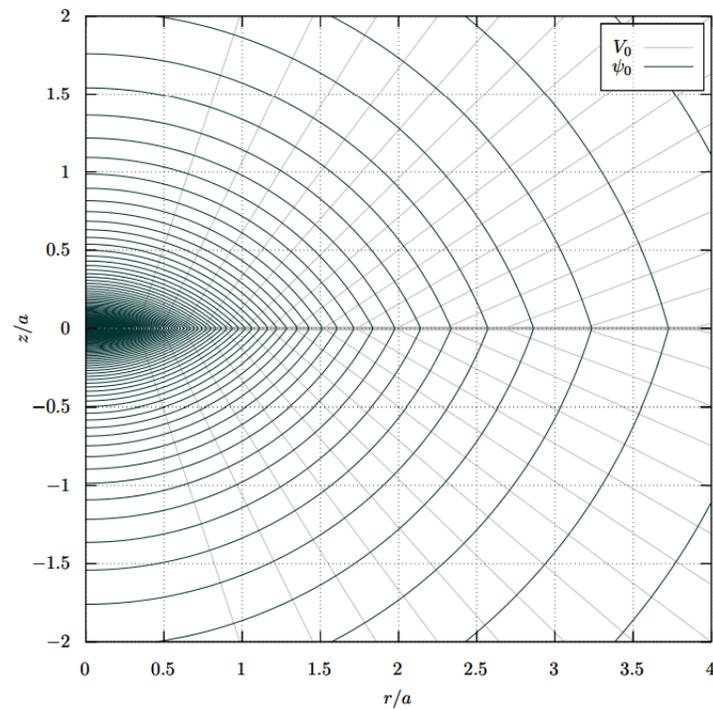
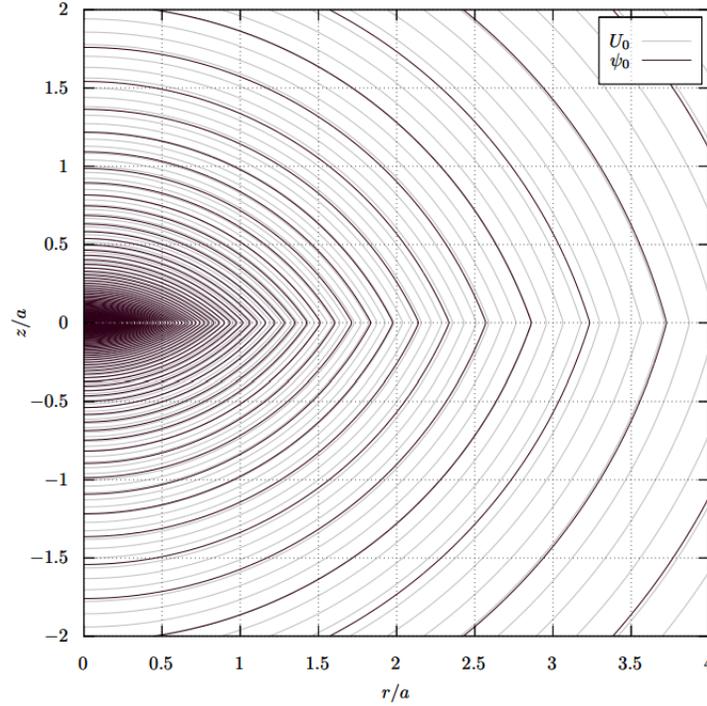


Figura 5.5  
 Representación de las funciones  $V_0$  y  $U_0$ .



De las figuras presentadas previamente, se logra observar que las superficies equipotenciales para cada  $k$  diferente, no cambia su forma, es decir, mantienen su estructura de curvas que tienden a ser “elipses” concéntricas. Por otro lado, se puede ver a simple vista que las líneas de campo son curvas perpendiculares a las superficies equipotenciales, tal como lo habíamos interpretado a partir de la ecuación (3.20); así que, como el campo es proporcional al gradiente del potencial, reafirmamos que  $V_0$  representa un campo conservativo.

También, vale la pena mencionar que la expresión  $U_0$  se escribe de forma casi idéntica al potencial gravitacional para un disco de Kuzmin-Toomre clásico (ver apéndice A). En consecuencia, interpretamos este resultado (la solución para  $n = 0$ ) como la solución más simple del sistema en la que la presencia del halo solo afecta la masa total del sistema pero no su geometría.

Por último tenemos la gráfica 5.5 correspondiente a las superficies equipotenciales y a las curvas de la función  $U_0$ ; de esta manera se puede ver que ambas funciones tienen curvas con una misma estructura pero diferente magnitud. Por ende,  $U_0$  puede ser interpretado como un potencial gravitacional newtoniano y  $\psi_0$  como un potencial gravitacional relativista.

## 5.2. Líneas de campo para $n = 1$

Siguiendo el mismo procedimiento expuesto en la sección anterior para encontrar  $V_0$ , tenemos que la función  $V$  para  $n = 1$  es de la forma

$$V_1(r, z) = \begin{cases} \frac{-A_1 + A_0(1-z)}{((1-z)^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{A_1(1-z)^2}{((1-z)^2 + r^2)^{3/2}} & \text{si } z < 0, \\ \frac{A_1 - A_0(z+1)}{((z+1)^2 + r^2)^{1/2}} - \frac{A_1(z+1)^2}{((z+1)^2 + r^2)^{3/2}} & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Así pues, las gráficas que representan esta familia son las siguientes:

Figura 5.6

*Líneas de campo para  $n = 1$ .*

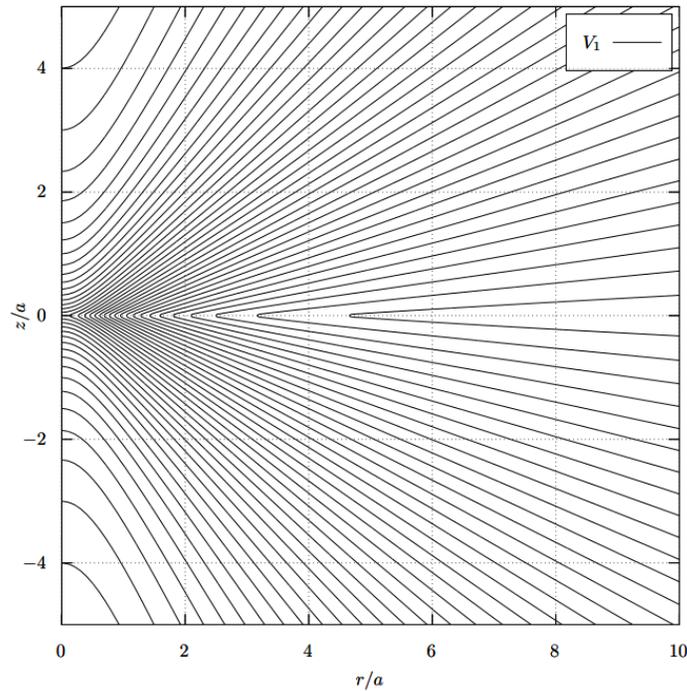


Figura 5.7

Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 1$  con  $k = 1$ .

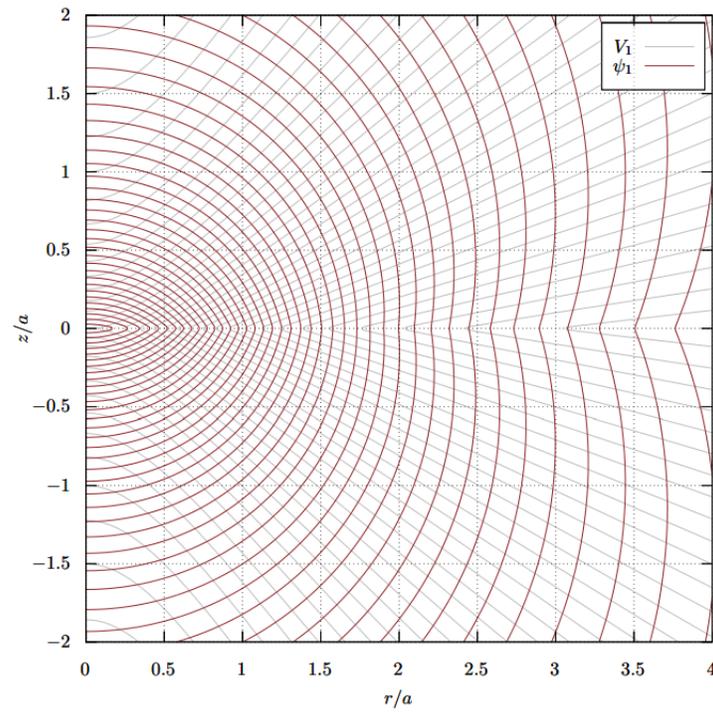


Figura 5.8

Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 1$  con  $k = 2000$ .

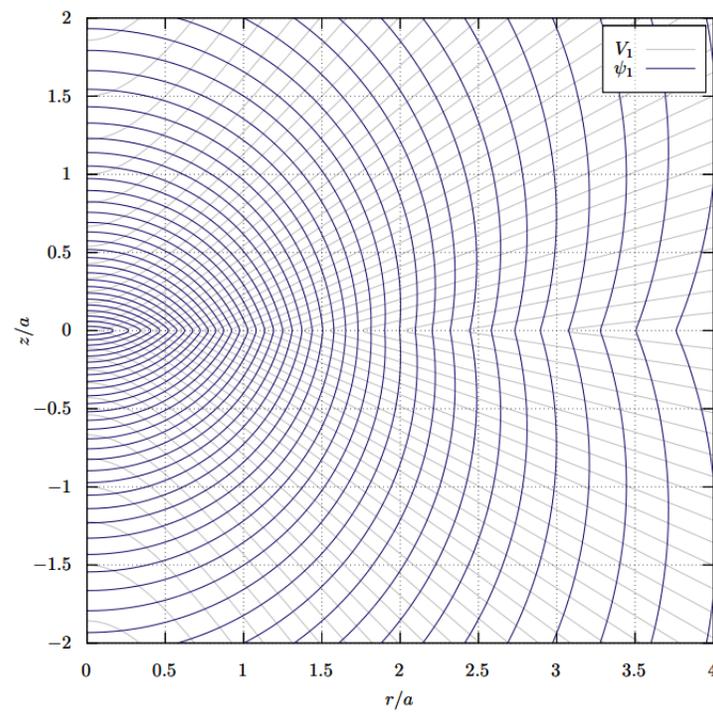


Figura 5.9

*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 1$  con  $k = 10000$*

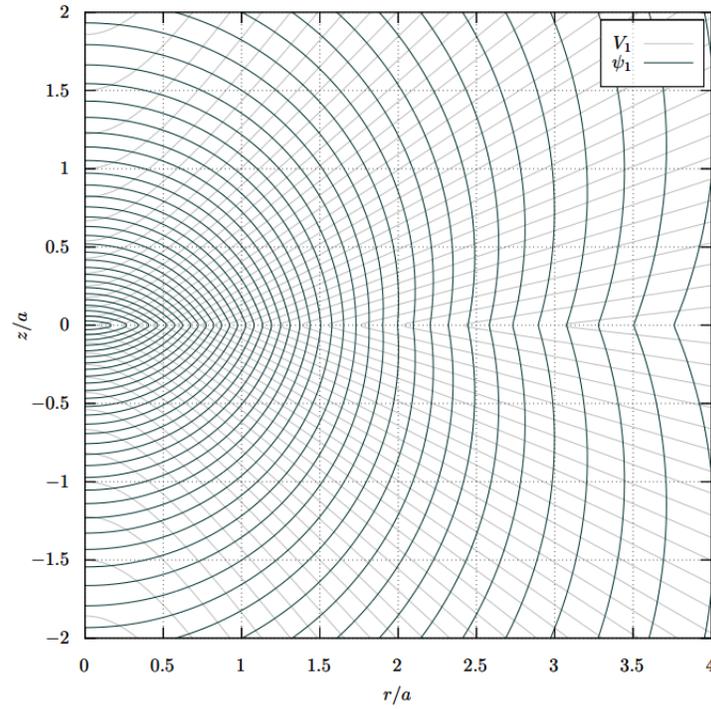
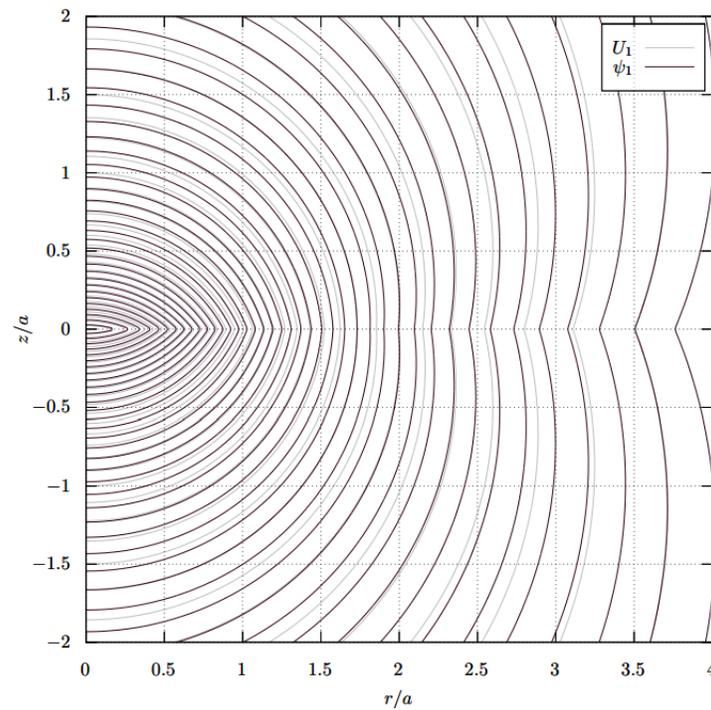


Figura 5.10

*Representación de las funciones  $V_1$  y  $\psi_1$*



De la representación 5.6 podemos ver que las líneas de campo son líneas rectas cuya pendiente disminuye a medida que tomamos un  $r$  mas grande, tal como lo vimos para  $n = 0$ .

En cuanto a las superficies equipotenciales, tenemos que en el origen se forman unas circunferencias achatadas, sin embargo, cuando nos alejamos de este, las superficies equipotenciales toman una forma esferoidal que en  $z^+ \rightarrow 0$  se van cerrando, para abrirse nuevamente en  $z^- \rightarrow 0$ . Esto se debe a que la geometría del halo se hace presente para esta segunda solución a diferencia de la familia  $n = 0$ , ya que como vimos en la expresión (5.8), esta tiene un término adicional a (5.7) del que podemos concluir que está directamente relacionado con la geometría del halo. Asimismo, se puede ver que las líneas de campo son perpendiculares a las líneas equipotenciales, ya que el campo es el gradiente de  $\psi_1$ ; así que,  $V_1$  también representa un campo conservativo.

Finalmente, tenemos la figura 5.10 de  $U_1$  y  $\psi_1$ , en la que podemos ver que ambas funciones tienen la misma forma. Tal como para  $n = 0$ , la función  $U_1$  la interpretamos como un potencial gravitacional clásico y  $\psi_1$  como el potencial gravitatorio relativista. En la sección 5.3 daremos una breve explicación de la función  $U_n$  cuando esta toma valores mayores o iguales a 1.

### 5.3. Líneas de campo para $n = 2$

Por último, la expresión de  $V$  para  $n = 2$  es una función tal que

$$V_2(r, z) = \begin{cases} \frac{-A_1 + A_0(z-1)}{((1-z)^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{2(1-z)[2A_1(1-z) - 3A_2]}{((1-z)^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{A_2(1-z)^3}{((1-z)^2 + r^2)^{5/2}} & \text{si } z < 0, \\ \frac{A_1 - A_0(z+1)}{((z+1)^2 + r^2)^{1/2}} - \frac{(z+1)[-2A_1(z+1) + 3A_2]}{2((z+1)^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{3A_2(z+1)^3}{2((z+1)^2 + r^2)^{5/2}} & \text{si } z \geq 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

así pues, las respectivas gráficas se muestran a continuación.

Figura 5.11  
*Líneas de campo para  $n = 2$ .*

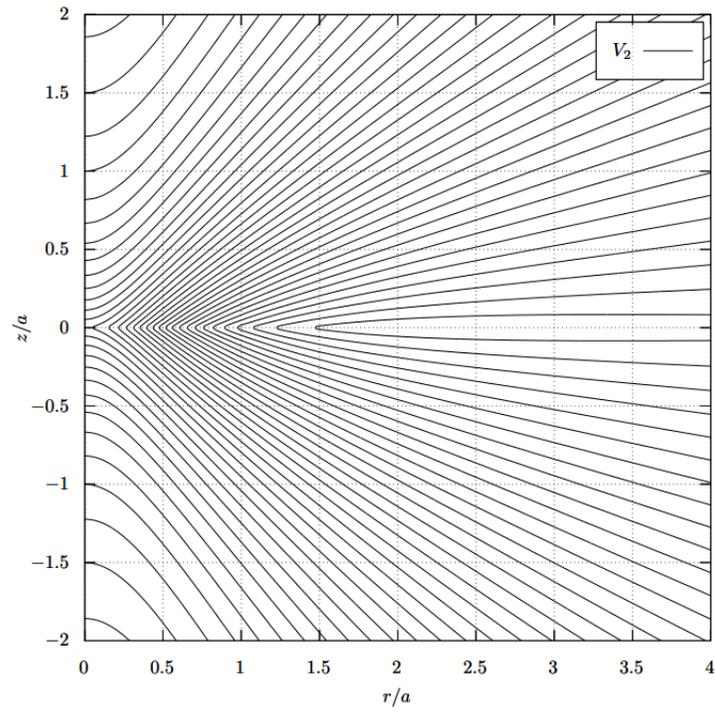


Figura 5.12  
*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 2$  con  $k = 1$ .*

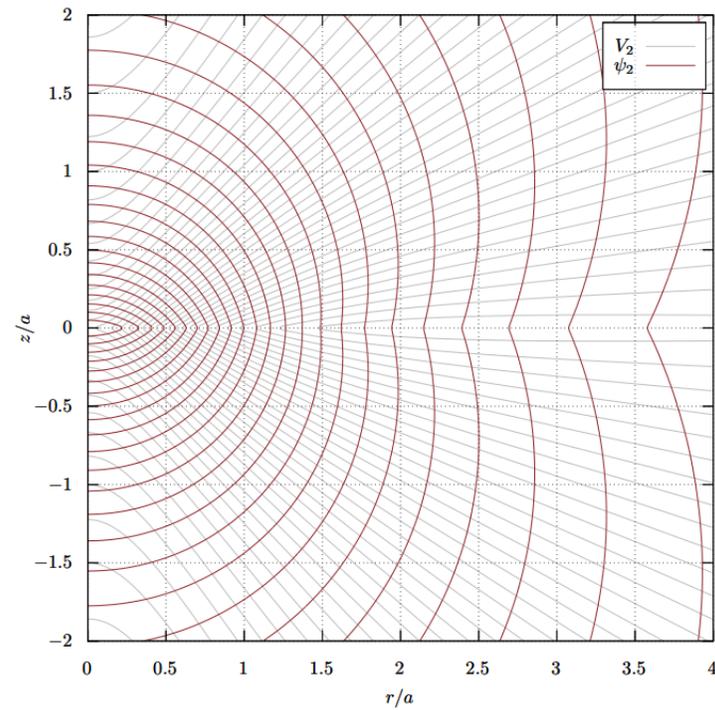


Figura 5.13

*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 2$  con  $k = 2000$ .*

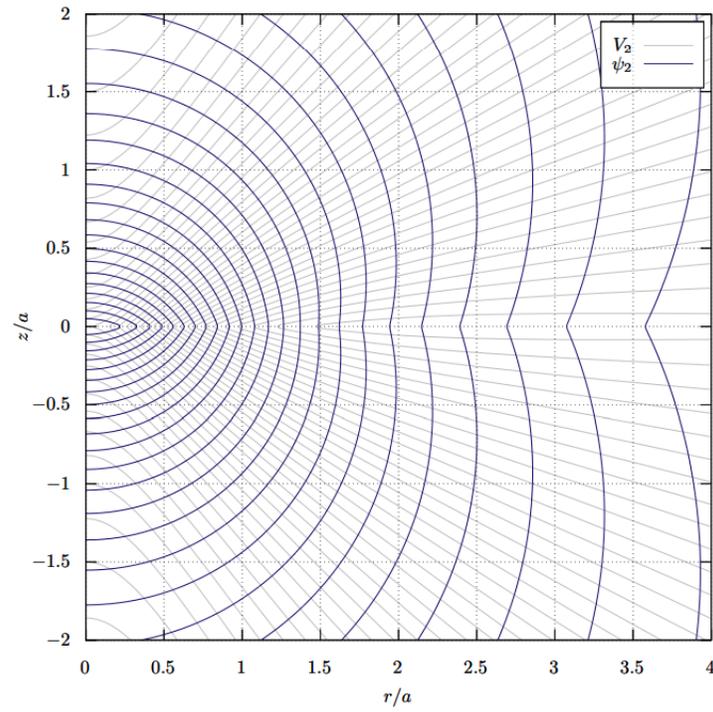


Figura 5.14

*Líneas de campo y superficies equipotenciales para  $n = 2$  con  $k = 10000$ .*

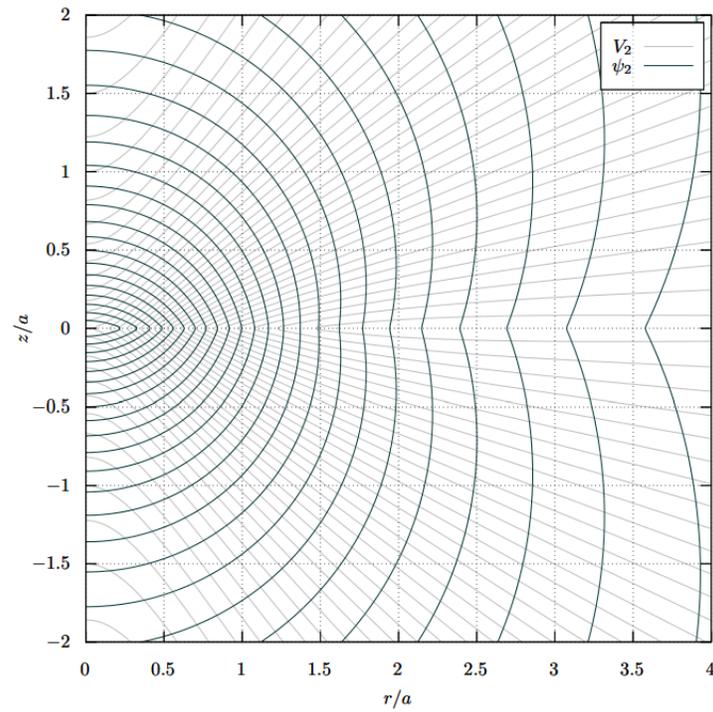
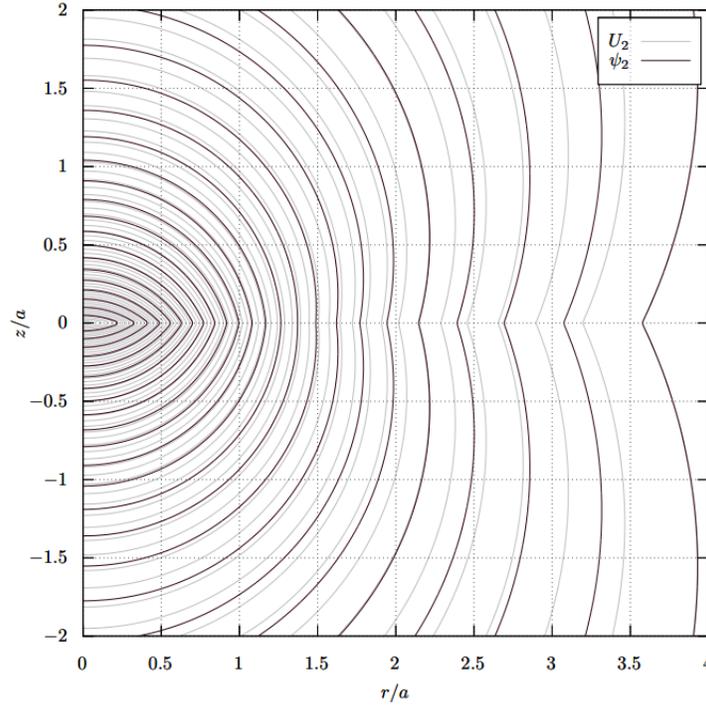


Figura 5.15

Representación de las funciones  $V_2$  y  $\psi_2$ .

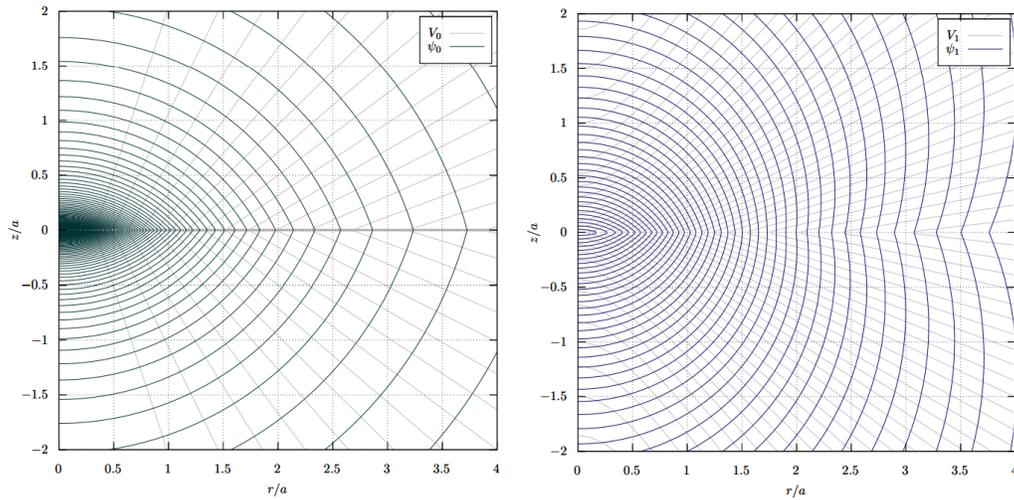
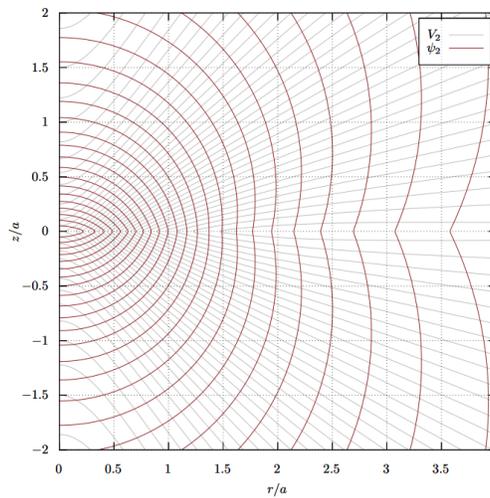


De las figuras anteriores, podemos observar que la gráfica de las líneas de campo 5.11 son similares a las que vimos previamente en 5.6. Además, la forma de las superficies equipotenciales son idénticas a las curvas para  $n = 1$ , así que la interpretación de estas curvas no difiere a la de la sección anterior 5.2. Por otro lado, sabiendo que  $U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$  (con  $n \rightarrow \infty$ ) planteamos que para  $n \geq 1$  las soluciones tienen en cuenta la geometría del halo, y no solo la geometría del disco como vimos para  $n = 0$ . También vemos que al igual que para las otras familias tanto  $V_2$  como  $U_2$  son equivalentes en estructura, pero no en magnitud.

Por último, vale la pena presentar en 5.16 las superficies equipotenciales y las líneas de campo de cada una de las familias de soluciones. Allí fácilmente pueden observarse las diferencias para cada una de estas familias.

Figura 5.16

*Líneas de campo y superficies equipotenciales de las familias  $n = 0$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$ .*

(a) Familia  $n = 0$  y  $k = 1$ .(b) Familia  $n = 1$  y  $k = 1$ .(c) Familia  $n = 2$  y  $k = 1$ .

Como podemos ver en la figura 5.16, la primera familia de soluciones  $n = 0$  (imagen 5.17(a)) difiere notablemente de las familias  $n = 1$  y  $n = 2$  (imágenes 5.17(b) y 5.17(c) respectivamente), tomando únicamente la geometría del disco, a diferencia de las demás familias.

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES

En primer lugar, logramos estudiar el sistema compuesto por un halo y un disco, en particular los discos de Kuzmin-Toomre en su forma relativista, propuestos por González y Pimentel (1), cuyas soluciones se usaron para calcular la cuadri-aceleración de observadores inerciales con momento angular cero respecto al eje de simetría del sistema. Además, encontramos las líneas de campo para tres de las familias de soluciones (halladas en el capítulo 2) calculando las curvas integrales de la cuadri-aceleración para nuestro sistema en un espacio conformestático y axialmente simétrico, todo esto a partir de una interpretación “clásica” de la gravedad presentada en el capítulo 2.

En segundo lugar, pudimos observar mediante las gráficas 5.1, 5.6 y 5.11 que para las tres primeras familias de soluciones de nuestro sistema, la estructura del campo gravitacional son rectas las cuales son perpendiculares a las curvas equipotenciales, hecho que es consistente con ecuación de campo (3.20). También conseguimos evidenciar que las curvas equipotenciales para la familia  $n = 0$  tienen forma de “elipses”, las cuales se asemejan a la silueta de un disco pero no del halo. Sin embargo, tenemos que las líneas equipotenciales de las familias  $n = 1$  y  $2$  cercanas al origen toman la forma del contorno de un disco; no obstante, cuando nos alejamos de este, estas curvas toman una geometría esferoidal. Esta particularidad puede deberse a que cuando nos alejamos del origen del sistema, la presencia del halo afecta de forma mas contundente el espacio-tiempo. Una observación interesante que podemos agregar con respecto a la familia  $n = 0$  es que  $U_0$  posee la misma forma de un disco de Kuzmin-Toomre newtoniano, por lo que físicamente la función  $U$  puede ser interpretada como un potencial gravitacional clásico y  $\psi$  como el potencial gravitacional relativista.

Para terminar, cabe señalar que los resultados de este proyecto de grado fueron presentados en el *XXIX Congreso Nacional de Física* del año 2022 en Armenia-Quindío.

# REFERENCIAS

- [1] González GA, Pimentel OM. Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes. *Phys Rev D*. 2016;93:044034. Available from: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044034>.
- [2] Semerák O, Zellerin T, Žáček M. The structure of superposed Weyl fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1999;308(3):691-704. Available from: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1999.02748.x>.
- [3] Hawking SW. *Historia del tiempo*. Alianza; 1996.
- [4] Kittel C, Knight WD, Ruderman MA, Lindsay RB. *Berkeley Physics Course. Volume 1, Mechanics*. American Institute of Physics; 1967.
- [5] Einstein A, Flores JMA, Goldar A. *Sobre la teoría especial y la teoría general de la relatividad*. Sarpe; 1983.
- [6] Wheeler JA, Ford K, Rigden JS. *Geons, Black Holes and Quantum Foam: A Life in Physics*. *American Journal of Physics*. 2000 06;68(6):584-5. Available from: <https://doi.org/10.1119/1.19497>.
- [7] Suslick KS. *Encyclopedia of physical science and technology. Sonoluminescence and sonochemistry*, 3rd edn Elsevier Science Ltd, Massachusetts. 2001:1-20.
- [8] Binney J, Tremaine S. *Galactic Dynamics*. Princeton series in astrophysics. Princeton University Press; 1987. Available from: [https://books.google.com.co/books?id=E\\_6vQgAACAAJ](https://books.google.com.co/books?id=E_6vQgAACAAJ).
- [9] Goodwin SP, Gribbin J, Hendry MA. The relative size of the Milky Way. *The Observatory*. 1998 Aug;118:201-8.
- [10] Harris GLH. NGC 5128: The Giant Beneath. *Publications of the Astronomical Society of Australia*. 2010;27(4):475-481.
- [11] Evans NW, Wilkinson MI. The mass of the Andromeda galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2000;316(4):929-42. Available from: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03645.x>.
- [12] Kuzmin G. A stationary galaxy model admitting triaxial velocity distribution. *Astron Zh*. 1956;33:27.

- [13] Toomre A. On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies. *Astrophysical Journal*. 1963;138:385. Available from: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1963ApJ...138..385T>.
- [14] González GA, Letelier PS. Rotating relativistic thin disks. *Phys Rev D*. 2000 Aug;62:064025. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.064025>.
- [15] Letelier PS. Exact general relativistic disks with magnetic fields. *Phys Rev D*. 1999 Oct;60:104042. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.104042>.
- [16] Morgan T, Morgan L. The Gravitational Field of a Disk. *Phys Rev*. 1969 Jul;183:1097-101. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.183.1097>.
- [17] Klein C, Richter O. Exact Relativistic Gravitational Field of a Stationary Counterrotating Dust Disk. *Phys Rev Lett*. 1999 Oct;83:2884-7. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.2884>.
- [18] Frauendiener J, Klein C. Exact relativistic treatment of stationary counterrotating dust disks: Physical properties. *Phys Rev D*. 2001 Mar;63:084025. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.084025>.
- [19] Gutiérrez-Piñeres AC, González GA. An Infinite Family of Magnetized Morgan-Morgan Relativistic Thin Disks. *International Journal of Theoretical Physics*. 2012 Jun;51(6):1737-52. Available from: <https://doi.org/10.1007/s10773-011-1051-0>.
- [20] Lemos JPS, Letelier PS. Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*. 1993 jun;10(6):L75. Available from: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/10/6/003>.
- [21] Kalnajs AJ, Athanassoula-Georgala E. The Bar Modes of Uniformly Rotating Stellar Disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1974 08;168(2):287-90. Available from: <https://doi.org/10.1093/mnras/168.2.287>.
- [22] Morgan L, Morgan T. Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity. *Phys Rev D*. 1970;2:2756-61. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.2756>.
- [23] Ruggiero ML. Gravito-electromagnetic effects of massive rings. *International Journal of Modern Physics D*. 2015;24(08):1550060. Available from: <https://doi.org/10.1142/S0218271815500601>.
- [24] Boshkayev K, Quevedo H, Ruffini R. Gravitational field of compact objects in general relativity. *Phys Rev D*. 2012;86:064043. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.064043>.
- [25] González GA, Letelier PS. Exact general relativistic thick disks. *Phys Rev D*.

- 2004 Feb;69:044013. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.044013>.
- [26] Abramowicz MA, Carter B, Lasota JP. Optical reference geometry for stationary and static dynamics. *General Relativity and Gravitation*. 1988 Nov;20(11):1173-83. Available from: <https://doi.org/10.1007/BF00758937>.
- [27] Semerák O. What forces drive the relativistic motion? *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*. 1995 Aug;110(8):973-91. Available from: <https://doi.org/10.1007/BF02722865>.
- [28] Podolsky J, Semerak O, Zofka M. *Gravitation: Following the Prague Inspiration: A Volume in Celebration of the 60th Birthday of Jiri Bicak*. World Scientific; 2002.
- [29] Greene RD, Schucking EL, Vishveshwara CV. The rest frame in stationary spacetimes with axial symmetry. *Journal of Mathematical Physics*. 2008 09;16(1):153-7. Available from: <https://doi.org/10.1063/1.522408>.
- [30] Jantzen RT, Carini P, Bini D. The many faces of gravitoelectromagnetism. *Annals of Physics*. 1992;215(1):1-50. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169290297Y>.
- [31] Abramowicz MA, Nurowski P, Wex N. Covariant definition of inertial forces. *Classical and Quantum Gravity*. 1993;10(10):L183. Available from: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/10/10/001>.
- [32] Stewart J. *Multivariable calculus*. 7th ed. Australia: Brooks/Cole Australia; 2012.

# Apéndice A

## POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UN DISCO DE KUZMIN-TOOMRE

El potencial gravitacional de un disco newtoniano de Kuzmin-Toomre, surge de aplicar el método del desplazamiento, corte y reflexión al potencial gravitatorio de una partícula puntual. Así pues, el potencial del disco está dado por

$$\phi_{\kappa} = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (|z| + 1)^2}}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa del disco, y  $z$  y  $r$  son las variables asociadas a las coordenadas cilíndricas.

## Apéndice B

# FUERZAS QUE INTERVIENEN EN UN MOVIMIENTO RELATIVISTA

En el artículo de Abramowicz y sus colegas (26), se estudia el movimiento relativista en términos de *fuerzas newtonianas*, así pues la cuadri-fuerza  $F$  resultante es la suma de 4 fuerzas que intervienen en este movimiento: una fuerza asociada a la gravedad, una fuerza centrífuga, una fuerza de Coriolis y la fuerza de Euler. Basándose en este artículo, Semerák (27) descompone la cuadri-aceleración  $a^\mu$  como la contribución de 5 aceleraciones

$$a^\mu = a_g^\mu + a_d^\mu + a_C^\mu + a_{cf}^\mu + a_{ti}^\mu, \quad (\text{B.1})$$

donde  $a_g^\mu$  es la aceleración gravitacional,  $a_d^\mu$  corresponde al *arrastre* de Lense-Thirring, la aceleración de Coriolis  $a_C^\mu$ , la aceleración centrífuga  $a_{cf}^\mu$  y  $a_{ti}^\mu$  es la componente tangente de la resistencia inercial de la partícula.