IDEALES SOBRE CONJUNTOS NUMERABLES

JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

IDEALES SOBRE CONJUNTOS NUMERABLES

JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO

TRABAJO DE GRADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR:
CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN
DR. EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos:

⋆ A Dios por ayudarme a comprender que con fe todo es posible.

⋆ Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su apoyo y recomendaciones en el transcurso de la carrera.

⋆ A mis padres por el apoyo que me brindaron para llevar a cabo la realización de mis estudios.

⋆ A mis compañeros y demás profesores que me ayudaron a crecer como persona.

Tabla de contenido

RESUMEN

TÍTULO: IDEALES SOBRE CONJUNTOS NUMERABLES. [*]

AUTOR: JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO.[**]

PALABRAS CLAVES: IDEAL, IDEALES REPRESENTABLES EN ESPACIOS DE BANACH.

DESCRIPCIÓN:

Un ideal sobre un conjunto numerable X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ tal que no contiene a X, es cerrado bajo subconjuntos y bajo uniones finitas. En este trabajo se estudian dos problemas importantes: i) Representación de ideales en espacios de Banach y ii) El problema de la extensión a un ideal F_σ. En la primera parte se estudian los ideales que son $\mathcal{B}$ – representables en algún espacio de Banach y obtenemos como resultado una caracterización de éstos. Además, damos un ejemplo de un ideal que es $\mathcal{B}$ – representable, pero no es P – ideal, esto permite diferenciar dos conceptos de representación en espacios de Banach: Ideales $\mathcal{C}$ – representables e ideales $\mathcal{B}$ - representables. En la segunda parte se estudia el orden de Katětov y la relación que existe con el problema de la extensión de un ideal a otro que es F_σ (El problema de la extensión). El orden de Katětov permite resolver el problema de extensión de un ideal a uno que es F_σ de manera parcial. Este es uno de los problemas que lleva muchos años abierto y hasta donde se conoce no se ha resuelto en su totalidad.

[*] Trabajo de grado.

[**] Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

ABSTRACT

TITLE: IDEALS ON COUNTABLE SETS. [***]

AUTOR: JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO. [****]

KEYWORDS: IDEAL, REPRESENTABLE IDEALS IN BANACH SPACES.

DESCRIPTION:

An ideal on a countable set X is a subset of $\mathcal{P}(X)$ such that it does not contain X, it is closed under subsets and under finite unions. In this work, two important problems are studied: i) Representation of ideals in Banach spaces and ii) The problem of extension to an ideal F_σ. In the first part we study the ideals that are $\mathcal{B}$ - representable in some Banach space and we obtain as a result a characterization of these. Furthermore, we give an example of an ideal that is $\mathcal{B}$ - representable, but is not P - ideal, this allows us to differentiate two concepts of representation in Banach spaces: Ideals $\mathcal{C}$ - representable and ideals $\mathcal{B}$ - representable. In the second part we study the Katětov order and the relationship that exists with the problem of the extension from one ideal to another, which is F_σ (The extension problem). The Katětov order allows solving the problem of extension from an ideal to one that is F_σ in a partial way. This is one of the problems that has been open for many years and as far as we know it has not been fully resolved.

[***] Grade work.

[****] Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

INTRODUCCIÓN

Un ideal sobre un conjunto numerable X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que contiene al vacío, es cerrado bajo subconjuntos y uniones finitas. En este trabajo se abordan algunos problemas que han surgido al estudiar las propiedades combinatorias y la complejidad de los ideales sobre conjuntos numerables. Durante este trabajo siempre que hablemos de ideales se está suponiendo que $Fin = \{A \subseteq X : A$ es finito $\}$ está contenido en el ideal.

Este trabajo contempla dos aspectos de la teoría de ideales. Por una parte, la representabilidad de los ideales en términos de convergencia en espacios de Banach. La segunda se refiere a propiedades del orden de Katětov, un orden que ha recibido mucha atención en los últimos años.

El problema principal al que está enfocado el proyecto es: ¿cuándo un ideal $\mathcal{I}$ puede ser extendido a un ideal F_σ? Esta pregunta ha sido estudiada en [1], [6], [10] y [12], donde se pueden encontrar algunos resultados parciales sobre esta problemática que aún sigue abierta. Para abordar este problema se estudiaron: i) ideales $\mathcal{C}$ - representables en un espacio de Banach, ii) ideales $\mathcal{B}$ - representables en un espacio de Banach y iii) el orden de Katětov.

El capítulo 2 está enfocado al estudio de lo ideales que son representables en espacios de Banach. En primer lugar están los ideales que son $\mathcal{C}$ - representables en un espacio de Banach. Se dice que un ideal $\mathcal{I}$ es C - representable en un espacio de Banach X si existe una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en X tal que:

$$\mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \quad \text{converge incondicionalmente} \right\}.$$

Es conocido que los ideales $\mathcal{C}$ - representables son P - ideales y $F_{\sigma\delta}$ (ver [4] y [2]). Por un teorema de Solecki [17] se conoce que si $\mathcal{I}$ es un P - ideal analítico, entonces existe φ una submedida semicontinua inferiormente tal que $Exh(\varphi) = \mathcal{I}$. Los únicos ideales que son $\mathcal{C}$ - representables en un espacio de Banach son los que provienen de cierta tipo de submedidas, más precisamente, $\mathcal{I}$ es un ideal $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach si, y solo si, $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$ para alguna submedida φ semicontinua inferiormente no- patológica (ver [2]).

Por otro lado, en el segundo capítulo también se estudian los ideales que son $\mathcal{B}$ - representables en un espacio de Banach. Se dice que un ideal $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$ - representable en un espacio de Banach X si existe $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X tal que

$$\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathbf{x}) \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \quad \text{es perfectamente acotada} \right\}.$$

Es conocido que los ideales $\mathcal{B}$ - representables son F_σ y que dada una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en un espacio de Banach X, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{x})$ (ver [4]). Por tanto, si $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ no es el ideal trivial $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ se puede extender a un ideal F_σ, que en este caso es $\mathcal{B}(\mathbf{x})$. Ahora, si $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, esto no garantiza que $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ no se pueda extender a un ideal F_σ (ver ejemplos 2.2.1(i) y 2.5.1(iv)).

Por tanto, particularizando el problema principal de la extensión a la clase de ideales representables en espacios de Banach, obtenemos la siguiente pregunta: dado $\mathcal{I}$ un ideal $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach X, ¿cuándo existe un ideal $\mathcal{J}$ no trivial que sea $\mathcal{B}$ - representable en un espacio de Banach Y y tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$? En lo que se ha estudiado de la literatura, no se ha encontrado respuesta a esta pregunta. Por ahora solo conocemos respuestas parciales (Por ejemplo, ver Teorema 2.2.6 y [4, Teorema 5.7])

En la sección 2.5 encontramos una caracterización nueva de los ideales que son $\mathcal{B}$ - representables, más precisamente, mostramos que un ideal $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$ - representable en un espacio de Banach si, y solo si, existe una submedida semicontinua inferiormente no - patológica tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}$ (ver Teorema 2.5.3). Además, construimos un ideal que es $\mathcal{B}$ - representable y no es $\mathcal{C}$ - representable (ver Ejemplo 2.5.4).

Por ahora no se sabe si ser $\mathcal{B}$ - representable da una caraterización de los ideales F_σ. En la sección 3.1 se estudian varios métodos para caracterizan completamente a los ideales que son F_σ, los cuales están asociados a: (i) una submedida semicontinua inferiormente, (ii) una familia de cerrados y (iii) una sucesión de coloraciones (ver [8]).

Por último, en el capítulo 3 se estudia el orden de Katětov. Dados dos ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ sobre conjuntos numerables X e Y respectivamente, se dice que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si existe una función $f : Y \to X$ tal que $f^{-1}(A) \in \mathcal{J}$ para todo $A \in \mathcal{I}$. Por ejemplo, si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$ que contiene a Fin, entonces $Fin \leq_K \mathcal{I}$. Además, si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, se tiene que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, sin embargo, al contrario no es cierto (ver ejemplo 3.3.3). Como veremos en el segundo capítulo, el problema de la extensión esta ligado al orden de Katětov. Para esto estudiaremos una relación más fuerte que $\leq_K$. Diremos que $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ si existe una función $f : Y \to X$ biyectiva tal que $f^{-1}(A) \in \mathcal{J}$ para todo $A \in \mathcal{I}$. Observemos que si $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X, se dice que un ideal tiene la propiedad $\mathbf{kat}$ si las siguientes afirmaciones son equivalentes para un ideal $\mathcal{J}$ sobre Y

1. $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$
2. $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$.

Por ejemplo, el ideal conv que consiste en el ideal generado por las sucesiones convergentes de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tiene la propiedad $\mathbf{kat}$ (ver [1]). En relación a este ideal se da una caracterización de los P - ideales analíticos que se pueden extender a un ideal F_σ (ver [1], [6] y [15]), más precisamente, si $\mathcal{I}$ es un P - ideal analítico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{I} \not\leq_K$ conv
2. $\mathcal{I} \not\sqsubseteq \mathcal{J}$
3. $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ.

Capítulo 1

PRELIMINARES

La topología que usaremos en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es la topología producto, es decir, consideraremos la topología generada por los abiertos sub-básicos $\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x(j) = 0\}$ y $\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x(j) = 1\}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia los abiertos básicos serán intersecciones finitas de estos.

Por comodidad en el transcurso de este trabajo en algunos casos denotaremos al conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ por k para cada $k \in \mathbb{N}$.

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es:

- F_σ, si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ con cada C_n cerrado en X.
- $F_{\sigma\delta}$, si $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j}$ con cada $C_{i,j}$ cerrado en X.

Una σ-álgebra sobre un conjunto X, es una familia Σ no vacía de subconjuntos de X, cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones numerables.

Sea X un espacio Polaco (espacio métrico, completo y separable). La **clase de los conjuntos borelianos** de X, que denotaremos por $\mathcal{B}(X)$, es la menor σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a los abiertos. Un conjunto perteneciente a esta clase se llama un conjunto boreliano. Decimos que $A \subseteq X$ es **analítico** si existen Y Polaco, $f : Y \to X$ continua y $B \subseteq Y$ boreliano tal que $A = f[B]$. Usaremos [3] como referencia general para las nociones de la teoría descriptiva de conjuntos.

Definición 1.0.1. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Definamos

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) : U_j \text{ es abierto de } X_j \text{ y } J \text{ es subconjunto finito de } I \right\}.$$

Donde, para cada $j \in I$, $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ denota la proyección sobre X_j. La topología generada por la base $\mathcal{B}_P$ se conoce como la **topología producto** sobre $\prod_{i \in I} X_i$.

La topología que se usará en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es la inducida por $2^{\mathbb{N}}$. Además, todos los subconjuntos cerrados de $2^{\mathbb{N}}$ lo denotaremos por $\mathcal{K}(2^{\mathbb{N}})$.

1.1 ÁRBOLES

Denotamos al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de un conjunto X por $X^{<\omega}$. Si s es una sucesión finita de elementos de X, su longitud la denotaremos por $|s|$.

Ahora si $s \in X^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < |s|$, entonces $s \lceil n$ denotará los primeros n elementos de la sucesión s.

Definición 1.1.1. [3] Sea X un conjunto. Decimos que $T \subseteq X^{<\omega}$ es un **árbol** si dados $s \in T$ y $t \in X^{<\omega}$ tales que $t < s$, entonces $t \in T$. Donde $t < s$ denota que $t(i) = s(i)$ para todo $i < |t|$.

(i) Una **rama** de un árbol T es una sucesión infinita $\alpha \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $\alpha \lceil n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Decimos que un árbol T es de **ramificación finita** si cada nodo tiene a lo sumo una cantidad finita de sucesores inmediatos, es decir, si $s \in T$, el conjunto $\{x : s^\wedge \langle x \rangle \in T\}$ es finito. Donde $s^\wedge \langle x \rangle$ denota la sucesión tal que el sucesor inmediato a s es x.

Ejemplo 1.1.2.

$1)$ $T = \mathbb{N}^{<\omega}$ es un árbol y el conjunto de todas las ramas infinitas de T es $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$2)$ Sea $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Entonces $T = \{\alpha\lceil n : n \in \mathbb{N}\}$ es un árbol de ramificación finita y el conjunto de todas las ramas infinitas de T es $\{\alpha\}$.

$3)$ Si $k \in \mathbb{N}$, $T = \mathbb{N}^{\leq k}$ el conjunto de todas las sucesiones cuya longitud es menor o igual que k es un árbol y T no tiene ramas infinitas.

A continuación se enuncia sin demostración el Lema de König, un lema muy conocido en la teoría de árboles (ver [3])

Lema 1.1.3. *(König) [3, Teorema 1.21] Si T es un arbol infinito de ramifificación finita, entonces existe α una rama infinita de T.*

1.2 IDEALES SOBRE CONJUNTOS NUMERABLES

Diremos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un ideal sobre X si cumple las siguientes afirmaciones:

1) $\varnothing \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$.

2) Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

3) Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Sea $X \in \mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{I}$. Definimos $\mathcal{I} \restriction X = \{A \cap X : A \in \mathcal{I}\}$.

Daremos a continuación ejemplos de ideales:

- Fin.
- $ED = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m, n \in \mathbb{N})(\forall k > n)(|\{l : (k,l) \in A\}| \leq m)\}$.
- $null(\mathbb{Q}) = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : \overline{A}$ tiene medida de Lebesgue 0$\}$.
- $\mathbf{nwd}(\mathbb{Q}) = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : int(\overline{A}) = \varnothing\}$.
- $ED_{fin} = ED \restriction \Delta$, donde $\Delta = \{(m,n) : n \leq m\}$.
- $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty\}$.
- $\mathcal{Z} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\right\}$.

Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales sobre X e Y respectivamente, donde X e Y son conjuntos numerables. Definimos los siguientes ideales sobre $X \times Y$ y $X \cup Y$ respectivamente:

- $\mathcal{I} \times \mathcal{J} = \{A \subseteq X \times Y : \{n : (A)_n \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}\}$, donde $(A)_n = \{m : (n, m) \in A\}$.
- $A \in \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{J}$ si, y sólo, si $A \cap X \in \mathcal{I}$ y $A \cap Y \in \mathcal{J}$, donde $X \cap Y = \varnothing$.

Observemos que $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$, por tanto, $\{\varnothing\} \times Fin$ y $Fin \times \{\varnothing\}$ son ideales sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X un conjunto numerable. Decimos que $\mathcal{I}$ es **alto** (*tall* en inglés) si dado $A \subseteq X$ infinito, existe $B \subseteq A$ infinito tal que $B \in \mathcal{I}$.

De los ejemplos de ideales que vimos anteriormente tenemos que:

- $Fin \times \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \times Fin$, Fin no son ideales altos.
- $Fin \times Fin$, ED, ED_{fin}, $null(\mathbb{Q})$, $\mathbf{nwd}(\mathbb{Q})$ y $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ son altos.

1.3 SUBMEDIDAS y P - IDEALES

Una función $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ es una **submedida** sobre $\mathbb{N}$ si:

(1) $\varphi(\varnothing) = 0$.

(2) $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ para todo $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

(3) $\varphi(\{n\}) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$.

(i) Se dice que una submedida φ es **semicontinua inferiormente** si para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que

$$\varphi(A) = \lim_{n \to \infty} \varphi(A \cap n).$$

(ii) Se dice que φ es no patológica si para todo $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\varphi(A) = \sup\{\mu(A) : \varphi \geq \mu \text{ y } \mu \text{ es medida }\}$$

donde $\varphi \geq \mu$ denota que para todo $B \subseteq \mathbb{N}$, $\varphi(B) \geq \mu(B)$.

Lema 1.3.1. *[2] Sea φ una submedida semicontinua inferiormente no patológica, entonces existen $(\mu_n)_n$ una sucesión de medidas, tales que $\mu_n(A) \leq \varphi(A)$ para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ y*

$$\varphi(A) = \sup_n \mu_n(A) \quad \textit{para cada } A \subseteq \mathbb{N}.$$

Demostración.

Sea φ una submedida semicontinua inferiormente no patológica. Para cada $F \in Fin$ existe una sucesión $(\mu_k^F)_k$ de medidas sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mu_k^F \leq \varphi$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\varphi(F) = \sup\{\mu_k^F(F) : k \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $D = \{\mu_k^F : F \in Fin \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$ es numerable, por tanto, sea $A = \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de D. Observe que para todo $F \subseteq \mathbb{N}$ finito, $\varphi(F) = \sup_n \mu_n(F)$. Entonces dado $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\varphi(A) = \sup_{F \in A^{<\omega}} \varphi(F) = \sup_{F \in A^{<\omega}} \sup_n \mu_n(F) = \sup_n \sup_{F \in A^{<\omega}} \mu_n(F) = \sup_n \mu_n(A).$$

La última igualdad se da porque toda medida es semicontinua inferiormente.

$\square$

Definimos $Fin(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}$. Observemos que $Fin(\varphi)$ es un ideal.

Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing, \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} & \text{si } A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Observemos que φ es una submedida semicontinua inferiormente. Entonces:

$$Fin(\varphi) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty \right\} = \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}.$$

Un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es un P-ideal si dada $(A_n)_n$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{I}$, existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $A_n \subseteq^* A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Donde $A_n \subseteq^* A$ significa que $A_n \setminus A$ es finito.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X un conjunto numerable. Decimos que $\mathcal{I}$ es un:

- **P-ideal analítico** si es P-ideal y analítico.
- **P-ideal analítico boreliano** si es P-ideal, analítico y boreliano.

Definición 1.3.2. Sea φ una submedida semicontinua inferiormente sobre $\mathbb{N}$. Se define:

$$Exh(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \sup \varphi(A \setminus n) = 0\}.$$

Los P-ideales analíticos son caracterizados por el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. *(Solecki [17]) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$:*

1) *$\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico.*
2) *$\mathcal{I} = Exh(\varphi)$ para alguna submedida semicontinua inferiormente φ sobre $\mathbb{N}$.*

Sea $\mathcal{I}$ un P-ideal analítico. Decimos que $\mathcal{I}$ es no patológico si existe φ submedida semicontinua inferiormente no patológica tal que $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$.

En [2] dan una caracterización de cuándo $Exh(\varphi)$ es alto para alguna submedida semicontinua inferiormente.

Teorema 1.3.4. *[2] Sea φ una submedida semicontinua inferiormente. $Exh(\varphi)$ es alto si, y sólo si, $\lim_n \varphi(\{n\}) = 0$.* □

1.4 ESPACIOS DE BANACH

Un espacio de Banach X es un espacio vectorial, normado y completo. En [4] se da una relación entre los espacios de Banach y algunos ideales en términos de sucesiones, por tanto, es necesario tener un previo conocimiento de series que convergen incondicionalmente y de series que son perfectamente acotadas.

Sea $T : X \to Y$ una transformación entre dos espacios de Banach X e Y. Decimos que T:

- es un *isomorfismo*, si es biyectiva y tanto T como T^{-1} son continuas.
- es una *isometría*, si para cada $x \in X$, $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$.
- es un *isomorfismo isométrico*, si T es un isomorfismo y es una isometría.

Además, decimos que dos espacios de Banach X e Y son isométricamente isomorfos si existe una transformación $T : X \to Y$ que es un isomorfismo isométrico.

Definición 1.4.1. [14] Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio métrico completo X. Decimos que:

- $\sum x_n$ converge incondicionalmente si para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum x_{\pi(n)}$ converge.
- $\sum x_n$ es perfectamente acotada si existe $K > 0$ tal que para todo $F \subset \mathbb{N}$ finito,
$$\left\| \sum_{n\in F} x_n \right\| \leq K.$$
- $\sum x_n$ es incondicionalmente Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que para todo $E \subseteq \mathbb{N} \setminus F$ finito,
$$\left\| \sum_{n\in E} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.4.2. *[14, Proposición 4.2.3] Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. $\sum x_n$ converge incondicionalmente si, y sólo si, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n\in A} x_n$ converge.*

Definimos $c_0 = \{(x_n)_n \subseteq \mathbb{F} : x_n \to 0\}$, donde $\mathbb{F}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Para nuestro estudio consideramos a $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Decimos que X tiene copia de c_0 si existe un subespacio Y de X que es isométricamente isomorfo a c_0.

Teorema 1.4.3. *(Bessaga-Pelczynski) Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *X contiene un subespacio isomorfo a c_0,*
- *Existe una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\sum x_n$ no converge en norma y para cada $x^* \in X^*$ se tiene que*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| < \infty.$$

Observación 1.4.4. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach tal que $\sum x_n$ es perfectamente acotada, entonces dado $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\sum_{n\in A} x_n \quad \text{es perfectamente acotada.}$$

El siguiente resultado es una de las consecuencias del Teorema de Bessaga-Pelczynski.

Teorema 1.4.5. *Sean X un espacio que no contiene copia de c_0 y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$\sum x_n$ es incondicionalmente convergente,*
- *$\sum x_n$ es perfectamente acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X un espacio de Banach que no contiene copia de c_0.

$[\Rightarrow]$ Supongamos que $\sum x_n$ no es perfectamente acotada y mostremos que no puede ser incondicionalmente convergente usando el teorema 1.4.2.

Sea $k = 1$, como $\sum x_n$ no es perfectamente acotada, existe $F_1 \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$\left\| \sum_{n\in F_1} x_n \right\| \geq 1.$$

Sea $n_1 = \max F_1$. Observe que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus s} x_n$$

no es perfectamente acotada para cada $s \in \mathbb{N}$. Entonces existe $F_2 \subset \mathbb{N} \setminus n_1$ finito tal que

$$\left\| \sum_{n \in F_2} x_n \right\| \geq 2.$$

Supongamos que hemos encontrado, $F_1, \ldots, F_k$ tales que $F_i \cap F_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y

$$\left\| \sum_{n \in F_i} x_n \right\| \geq i.$$

Sea $n_k = \max \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, entonces existe $F_{k+1} \subseteq \mathbb{N} \setminus n_k$ finito tal que

$$\left\| \sum_{n \in F_{k+1}} x_n \right\| \geq k+1.$$

Sea $A = \bigcup F_i$. Observe que

$$\sum_{n \in A} x_n \quad \text{no es convergente}$$

ya que no es de Cauchy. Luego $\sum x_n$ no converge incondicionalmente.

[$\Leftarrow$] La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que $\sum x_n$ es perfectamente acotada y que no es incondicionalmente convergente. Como $\sum x_n$ no es incondicionalmente convergente, por el teorema 1.4.2 existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \in A} x_n \quad \text{no es convergente en norma.}$$

Por la observación 1.4.4 tenemos que

$$\sum_{n \in A} x_n \quad \text{es perfectamente acotada.}$$

Entonces existe $K > 0$ tal que dado $F \subseteq A$ finito,

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq K.$$

Sean $x^* \in X^*$, $F_+ = \{n \in F : x^*(x_n) \geq 0\}$ y $F_- = \{n \in F : x^*(x_n) < 0\}$. Así

$$\sum_{n \in F} |x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \left\| \sum_{n \in F_+} x_n \right\| + \|x^*\| \left\| \sum_{n \in F_-} x_n \right\| \leq 2K\|x^*\|.$$

Como la desigualdad anterior ocurre para todo $F \subseteq A$ finito, entonces

$$\sum_{n \in A} |x^*(x_n)| \leq 2K\|x^*\| < +\infty.$$

En resumen, tenemos una sucesión $(x_n)_{n \in A}$ en un espacio X que no contiene copia de c_0 tal que

$$\sum_{n \in A} x_n \quad \text{no converge en norma}$$

y

$$\sum_{n \in A} |x^*(x_n)| < +\infty.$$

Luego por el teorema de Bessaga - Pelcynski X contiene copia de c_0, lo cual es una contradicción.

$\square$

Capítulo 2

REPRESENTACIÓN DE IDEALES EN ESPACIOS DE BANACH Y GRUPOS POLACOS

El ideal $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ se puede describir mediante subseries incondicionalmente convergentes en un espacio de Banach. Más precisamente, sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por:

$$x_n = \left(\frac{1}{n+1}, 0, \dots\right).$$

Observe que $(x_n)_n$ es una sucesión en c_0. Se puede mostrar que

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} x_n \text{ es incondicionalmente convergente } \right\}.$$

También ocurre que

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} x_n \text{ es perfectamente acotada } \right\}.$$

En este capítulo estudiaremos los ideales que se pueden describir mediante subseries incondicionalmente convergentes ó perfectamente acotadas de una serie dada. Estos ideales resultan ser una generalización del ideal $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

2.1 REPRESENTACIÓN EN GRUPOS POLACOS

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un grupo Polaco abeliano $(G, +, d)$, donde $+$ es la operación del grupo en G y d es una métrica compatible con G. Dados $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, notaremos $x_{n_0}+\cdots+x_{n_m}$ por

$$\sum_{i=0}^{m} x_{n_i}.$$

Por tanto, interpretaremos la convergencia de $\sum x_n$ de manera usual, es decir, $\sum x_n$ converge a $g \in G$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(g, \sum_{n=0}^{m} x_n\right) < \varepsilon, \quad \text{si} \quad m \geq k.$$

En [4] se define

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ es incondicionalmente convergente} \right\},$$

donde $\mathbf{x} = (x_n)_n$ es una sucesión en un grupo Polaco abeliano G.

Observe que dada $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en un grupo Polaco abeliano G, $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es un ideal. Diremos que $\mathcal{I}$ un ideal es representable en grupo abeliano Polaco, si existe G un grupo Polaco abeliano y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en G, tal que

$$\mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ es incondicionalmente convergente} \right\}.$$

En [2] se da una caracterización de los ideales que son representables en un grupo Polaco abeliano.

Teorema 2.1.1. *[2] Un ideal $\mathcal{I}$ es representable en un grupo Polaco abeliano si, y sólo si, es un P-ideal analítico.*

En la siguiente sección se hará la demostración de una de las implicaciones del Teorema 2.1.1 en el caso específico cuando el grupo Polaco abeliano es un espacio de Banach.

2.2 REPRESENTACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH Y EL IDEAL $\mathcal{C}(\mathbf{x})$

Los espacios de Banach separables son ejemplos de grupo polacos abelianos. En esta sección estudiaremos representación de ideales en espacios de Banach separables. Primero observemos que la restricción a espacios de Banach separables es innecesaria. Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. Observe que Y, la clausura del generado de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un espacio de Banach separable. Por tanto podemos definir $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ si tomamos como espacio de Banach Y. Por tanto, diremos que $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ es $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach X si existe $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$ - representable en la clausura del generado de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Daremos a continuación algunos ejemplos de ideales que son representables en c_0

Ejemplo 2.2.1. (i) Fin con la sucesión canónica $(e_n)_n$, ya que si $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in A} x_n \in c_0 \quad \text{si, y sólo si, } A \text{ es finito.}$$

(ii) Todo ideal sumable, ya que por ser sumable, existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y definimos la sucesión $(x_n)_n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (h(n), 0, 0, \ldots).$$

Observe que si $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \in A} x_n = \left(\sum_{n \in A} h(n), 0, \ldots \right)$$

y converge incondicionalmente si, y sólo si, $A \in \mathcal{I}_h = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} |h(n)| < \infty\}$.

Dada una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$, otro ideal que se estudia en [4] es el ideal $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ que consiste en todas las subseries de $\sum x_n$ que son perfectamente acotadas. Más específicamente,

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ es perfectamente acotada} \right\}.$$

El siguiente resultado está enunciado sin demostración en [4].

Teorema 2.2.2. *Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. Entonces $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es F_σ.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. Entonces por la definición de serie perfectamente acotada, $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \bigcup_{k} \bigcap_{F \in Fin} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{n \in A \cap F} x_n \right\| \leq k \right\}.$$

Veamos que dado $k \in \mathbb{N}$,

$$D_k = \bigcap_{F \in Fin} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{n \in A \cap F} x_n \right\| \leq k \right\}$$

es cerrado en $2^{\mathbb{N}}$. Mostremos que $2^{\mathbb{N}} \setminus D_k$ es abierto. Sea $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus D_k$, entonces existe $F \in Fin$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in A \cap F} x_n \right\| > k.$$

Definamos el abierto

$$U = \bigcap_{i \in A \cap F} \pi^{-1}(\{1\}).$$

Observe que si $B \in U$, entonces $B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus D_k$. $\square$

Hasta donde conocemos, el ideal $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ no ha sido tan estudiado como $\mathcal{C}(\mathbf{x})$, por esto será estudiado a más profundidad en la siguiente sección.

Recordemos el ideal

$$\mathcal{Z} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0 \right\}.$$

En seguida presentamos un lema, que es enunciado en [4] como una observación.

Lema 2.2.3. *$A \in \mathcal{Z}$ si, y sólo si,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap [2^n, 2^{n+1}]|}{2^n} = 0.$$

□

Por el lema 2.2.3 podemos escribir el ideal

$$\mathcal{Z} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [2^n, 2^{n+1}]|}{2^n} = 0 \right\}.$$

A continuación se muestra que $\mathcal{Z}$ es $\mathcal{C}$ - representable en c_0.

Teorema 2.2.4. *[4] El ideal $\mathcal{Z}$ es representable en c_0.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ la sucesión en c_0 dada por:

$$x_n = 2^{-k+1} e_k \quad \text{si} \quad n \in D_k = \{m \in \mathbb{N} : 2^{k-1} \leq m < 2^k\}.$$

Observe que dados $A \subseteq \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n \in A \cap D_k} x_n \right\| = 2^{-k+1} |A \cap D_k| = \frac{|A \cap D_k|}{|D_k|}.$$

Por el lema 2.2.3 se puede mostrar que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}$, ya que si $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \in A} x_n = \left(\frac{|A \cap D_k|}{|D_k|} \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Por tanto, sea $B \subseteq A$

$$\sum_{n \in B} x_n \quad \text{converge si, y sólo si,} \quad \left(\frac{|B \cap D_k|}{|D_k|} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0.$$

Además,

$$\left(\frac{|A \cap D_k|}{|D_k|} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad A \in \mathcal{Z}.$$

Así

$$\sum_{n \in A} x_n \quad \text{converge incondicionalmente si, y sólo si,} \quad A \in \mathcal{Z}.$$

□

En [4] prueban el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5. *[4] El ideal $\mathcal{Z}$ no es F_σ.*

Demostración. Sea Z el subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$ correspondiente a $\mathcal{Z}$. Observe que con esta identificación tenemos que $(\eta_j)_j \in Z$ si, y sólo si,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \eta_j = 0.$$

Defina ρ una métrica sobre Z dada por

$$\rho((\eta_m)_m, (\eta'_m)_m) = \sup_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\eta_j - \eta'_j|.$$

Se puede mostrar que (Z, ρ) es un espacio métrico completo y la topología generada por ρ en Z contiene a los abiertos en Z visto como subespacio de $2^{\mathbb{N}}$.

Supongamos que Z es F_σ en $2^{\mathbb{N}}$. Entonces $Z = \bigcup_n W_n$ donde W_n es cerrado en $2^{\mathbb{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que cada W_n también es cerrado en (Z, ρ), luego por el teorema de categoría de Baire, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Int(W_{n_0}) \neq \varnothing$. Entonces existe $(\varepsilon_j)_j \in W_{n_0}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_\rho((\varepsilon_j)_j, \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq W_{n_0}$. El siguiente paso sería construir una sucesión en W_{n_0} convergente (respecto de ρ) a un elemento que no está en Z, lo cual sería una contradicción. A continuación construimos la sucesión: Fije $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j < \frac{1}{2^k} \quad \text{para todo } \; m \geq n.$$

Si $m > n$, defina $\zeta_m = 1$ si $m = n + l2^{k+1}$ para algún $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\zeta_m = 0$ en caso contrario. Observe que

$$\frac{1}{m-n}\sum_{j=n+1}^{m} \zeta_j < \frac{r}{2}.$$

Ahora defina para cada $m > n$, $(\eta_j^m)_j = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_m, 0, 0, \ldots)$ y $(\eta_j^m)_j = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m, 0, 0, \ldots)$ si $m \leq n$. Es fácil ver que para cada $m \in \mathbb{N}$ $\rho((\varepsilon_j)_j, (\eta_j^m)_j) < r$, así $\eta_j^m \in W_{n_0}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Se puede mostrar que $(\eta_j^m)_j$ converge puntualmente a la sucesión $(\eta_j)_j$ donde $\eta_j = \varepsilon_j$ si $j \leq n$ y $\eta_j = \zeta_j$ si $j > n$. Observe que $(\eta_j)_j \in W_{n_0}$ por la cerradura de W_{n_0} (en la métrica producto). Finalmente, observe que $(\eta_j)_j \notin Z$, ya que si $m = n + l2^k$,

$$\frac{1}{n+l2^k}\sum_{i=0}^{n+l2^k}\eta_i = \frac{1}{n+l2^k}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i + \frac{1}{n+l2^k}\sum_{i=n+1}^{n+l2^k}\zeta_i = \frac{1}{n+l2^k}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i + \frac{l}{n+l2^k}.$$

Así,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\eta_i = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{n+l2^k}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i + \frac{l}{n+l2^k}\right) = \frac{1}{2^k} > 0,$$

lo cual es una contradicción.

$\square$

Ahora veremos una caracterización de los espacios de Banach que tienen copia de c_0.

Teorema 2.2.6. *[4] Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X *no contiene copia isomorfa de* c_0*.*

2) *Para cada sucesión* $\mathbf{x}$ *en* X*, el conjunto* $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ *es* F_σ *en* $2^{\mathbb{N}}$*.*

3) *Para cada sucesión* $\mathbf{x}$ *en* X*,* $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$*.*

Demostración.

[$1) \to 2), 1) \to 3)$] Suponga que X no contiene copia de c_0, entonces tenemos por el Teorema 1.4.5 que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$ para cualquier sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$. Por el teorema 2.2.2, $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es F_σ.

[$2) \to 1)$] Haremos la demostración de la contrarrecíproca. Sea X un espacio de Banach que contiene copia de c_0. Entonces existe $T : c_0 \to X$ una inmersión isométrica. Del Teorema 2.2.4 tenemos que el ideal $\mathcal{Z}$ es $\mathcal{C}$ - representable en c_0, entonces existe $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en c_0 tal que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}$. Sea $\mathbf{y} = (y_n)_n$ la sucesión en X dada por:

$$y_n = T(x_n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{y})$. Sea $A \in \mathcal{C}(\mathbf{x})$, entonces

$$\sum_{n\in A} x_n \text{ converge incondicionalmente.}$$

Por ser T una isometría, tenemos que si $B \subseteq A$ y $\sum_{n\in B} x_n$ converge, entonces $\sum_{n\in B} T(x_n)$ también converge. Por tanto,

$$\sum_{n\in B} y_n \text{ converge incondicionalmente.}$$

Así, $A \in \mathcal{C}(\mathbf{y})$. Análogamente se prueba que $\mathcal{C}(\mathbf{y}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{x})$.

Luego $\mathcal{Z} = \mathcal{C}(\mathbf{y})$, es decir, $\mathcal{Z}$ es $\mathcal{C}$ - representable en X y como $\mathcal{Z}$ no es F_σ por el teorema 2.2.5, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{y})$ no es F_σ.

$[3) \to 2)]$ Sea X un espacio de Banach. Suponga que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$ para cualquier sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en X. Como $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es F_σ, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es F_σ.

□

2.3 $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ ES UN P - IDEAL

En esta sección mostraremos que $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es un P-ideal para toda sucesión $\mathbf{x}$ en un espacio de Banach X.

El siguiente lema es una caracterización de las series incondicionalmente convergentes en un espacio de Banach (Ver 2.3.2).

Lema 2.3.1. *[2] Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $F \in [\mathbb{N} \setminus n]^{<\omega}$*

$$\left\| \sum_{n\in F} x_n \right\| < \varepsilon.$$

□

En [2] hacen la siguiente observación:

Lema 2.3.2. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\sum x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

2) *Para todo* $A \subseteq \mathbb{N}$
$$\sum_{n\in A} x_n \quad \textit{es convergente.}$$

3) *Para todo* $A \subseteq \mathbb{N}$
$$\sum_{n\in A} x_n \quad \textit{es de Cauchy.}$$

4) $\sum x_n$ *es incondicionalmente Cauchy.*

Demostración.

$[1) \Leftrightarrow 2)]$ Por el teorema 1.4.2.

$[2) \Leftrightarrow 3)]$ Porque el espacio es completo.

$[1) \Leftrightarrow 4)]$ Por el lema 2.3.1.

□

En [4] estudian la complejidad del ideal $\mathcal{C}(\mathbf{x})$.

Lema 2.3.3. *Dada $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en un espacio de Banach X, el ideal $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es analítico, de hecho es $F_{\sigma\delta}$.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. Por el Lema 2.3.1
$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_{F\in\mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j\in F\cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}$$
donde $\mathcal{F}_n = [\mathbb{N} \setminus n]^{<\omega}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea
$$D_k = \bigcup_n \bigcap_{F\in\mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j\in F\cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \bigcap_k D_k$. Mostremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, D_k es F_σ.

Sean $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$C_n = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j \in F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Sea $B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus C_n$, entonces existe $F \in \mathcal{F}_n$ tal que

$$\left\| \sum_{j \in F \cap B} x_j \right\| > \frac{1}{k}$$

Definamos el abierto

$$U = \bigcap_{n \in F \cap B} \pi_n^{-1}(\{1\})$$

Observe que si $A \in U$, entonces $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus C_n$. Por tanto, C_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.3.4. *[2] Si un ideal $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach, entonces $\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un ideal que es $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach, entonces existen X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathbf{x})$. Por el Lema 2.3.1

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_{F \in \mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j \in F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

donde $\mathcal{F}_n = [\mathbb{N} \setminus n]^{<\omega}$.

Sabemos por el Lema 2.3.3 que $\mathcal{I}$ es analítico. Veamos que $\mathcal{I}$ es un P-ideal. Sea $(A_k)_k$ una sucesión de elementos de $\mathcal{I}$. Entonces

$$\sum_{n \in A_k} x_n$$

converge incondicionalmente para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego por el Lema 2.3.1, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $F \in [A_k \setminus n_k]^{<\omega}$,

$$\left\|\sum_{n\in F} x_n\right\| < 2^{-k}.$$

Note que podemos suponer que $(n_k)_k$ es creciente. Sea

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \setminus n_k).$$

Observe que $A_k \setminus A = A_k \cap n_k$ es finito para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $A \in \mathcal{I}$. Para ello basta mostrar que la serie es incondicionalmente Cauchy por el teorema 2.3.1.

Sea $k \in \mathbb{N}$, como $(\bigcup_{i=1}^{k+1}(A_i \setminus n_i))$ está en $\mathcal{I}$, por el lema 2.3.1 existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $F \subseteq (\bigcup_{i=1}^{k+1}(A_i \setminus n_i)) \setminus m_0$ finito se tiene que

$$\left\|\sum_{n\in F} x_n\right\| < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Sea $n_1 = \max\{m_0, n_{k+2}\}$. Luego para todo $F \in [A \setminus n_1]^{<\omega}$

$$\left\|\sum_{n\in F} x_n\right\| < \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=k+2} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}.$$

Así $A \in \mathcal{I}$.

$\square$

El siguiente lema fue probado en [2] el cual muestra que si un ideal es representable en l_∞, se puede suponer que las componentes de cada elemento de la sucesión que lo representa son no negativas.

El espacio de Banach l_∞ lo cosideraremos como el espacio de todas las sucesiones de números reales acotadas con la norma del supremo.

Lema 2.3.5. *Sea* $\mathbf{x} = (x_n)_n$ *una sucesión en* l_∞ *tal que* $\sum x_n$ *no converge. Si* $\mathbf{x}' = (x'_n)_n$*, donde* $x'_n = (|x_n(k)|)_k$*, entonces* $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{x}')$*.*

Un resultado clásico de análisis funcional es el siguiente (ver [16, Teorema 5.17]):

Teorema 2.3.6. *(*Banach - Mazur*) Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de l_∞.*

Observación 2.3.7. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X, entonces el subespacio generado cerrado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es separable.

En el siguiente teorema se da una caracterización de los ideales que son $\mathcal{C}$ - representable en algún espacio de Banach.

Teorema 2.3.8. *[2] Un P-ideal analítico $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach si, y sólo si, $\mathcal{I}$ es no patológico.*

Demostración. [$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$ para alguna submedida semicontinua inferiormente no patológica. Por el lema 1.3.1 existen $(\mu_n)_n$ una sucesión de medidas tales que para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mu_(A) \leq \varphi(A)$ y $\varphi(A) = \sup\{\mu_n(A) : n \in \mathbb{N}\}$ para todo $A \subseteq \mathbb{N}$.

Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ la sucesión definida por

$$x_n = (\mu_0(\{n\}), \ldots, \mu_k(\{n\}), \ldots).$$

Veamos que $(x_n)_n$ es una sucesión en l_∞. En efecto, si $F \in Fin$,

$$\sum_{n \in F} x_n = (\mu_0(F), \ldots, \mu_k(F), \ldots)$$

y

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| = \varphi(F).$$

Además se tiene que

$$\begin{array}{lll} A \in \mathcal{C}(\mathbf{x}) & \text{si, y sólo si,} & \sum_{n \in A} x_n \text{ es incond. convergente} \\ A \in \mathcal{C}(\mathbf{x}) & \text{si, y sólo si,} & \forall \epsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \forall F \in (A \setminus n)^{<\omega} \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| = \varphi(F) < \epsilon. \end{array}$$

Usando la semicontinuidad inferior de φ obtenemos,

$$\begin{array}{lll} A \in \mathcal{C}(\mathbf{x}) & \text{si, y sólo si,} & \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \varphi(A \setminus n) \leq \epsilon \\ A \in \mathcal{C}(\mathbf{x}) & \text{si, y sólo si,} & A \in Exh(\varphi). \end{array}$$

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach X, es decir, existe $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathbf{x})$. Por el teorema de Banach - Mazur y la observación 2.3.7, podemos suponer que $X = l_\infty$. Por el lema 2.3.5 asumimos que los términos de cada elemento de la sucesión son no negativos. Las medidas se definen de la siguiente manera: Para $k \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ sea

$$\mu_k(A) = \sum_{n \in A} x_n(k),$$

y $\varphi = \sup\{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$. Observemos que para cada $F \in Fin$,

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| = \varphi(F).$$

Por tanto, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = Exh(\varphi)$

$\square$

2.4 IDEALES $\mathcal{C}$ - REPRESENTABLES QUE SON ALTOS

Se sabe por el teorema 2.3.8 que dada $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en l_∞, existe φ una submedida semicontinua inferiormente no-patológica tal que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = Exh(\varphi)$. Por el teorema 1.3.4 se sabe que $Exh(\varphi)$ es alto si, y sólo si, $\lim \varphi(n) = 0$. Veremos a continuación cuando $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es alto en términos de la sucesión $\mathbf{x}$. Este resultado se enunció sin demostración en [2].

Teorema 2.4.1. *[2] Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en l_∞. Entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es alto si, y sólo si,*

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en l_∞, por la demostracion del teorema 2.3.8 existe φ una submedida semicontinua inferiormente no-patológica tal que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = Exh(\varphi)$ y para cada $F \in Fin$

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| = \varphi(F).$$

Por tanto, $\lim_n \|x_n\| = 0$ si, y sólo si, $\lim_n \varphi(\{n\}) = 0$. Luego, por el teorema 1.3.4 se tiene el resultado.

□

Veremos a continuacion que el resultado anterior vale en general.

Teorema 2.4.2. *[2] Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es alto si, y sólo si,*

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0.$$

Demostración. Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X. Sabemos que Y el subespacio generado cerrado de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isométricamente isomorfo a un subespacio C de l_∞. Sea $T : Y \to C$ dicho isomorfismo isométrico. Tenemos que si $\mathbf{y} = (T(x_n))_n$, entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{y})$. Por el teorema 2.4.1 $\mathcal{C}(\mathbf{y})$ es alto si, y sólo si,

$$\lim_{n \to \infty} \|T(x_n)\| = 0.$$

Así, como T es una isometría, $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es alto si, y sólo si,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0.$$

□

2.5 EL IDEAL $\mathcal{B}(\mathbf{x})$

En la sección 2.2 vimos que si X es un espacio de Banach que no contiene copia de c_0, entonces para toda sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en X, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$. En esta sección estudiaremos el ideal $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ de manera más general incluyendo los espacios de Banach que contienen copia de c_0. Además presentaremos una caracterización de los ideales que son $\mathcal{B}$ - representables y daremos un ejemplo de un ideal que no es $\mathcal{C}$ - representable y es $\mathcal{B}$ - representable.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal. Se dice que $\mathcal{I}$ es *$\mathcal{B}$-representable* en un espacio de Banach, si existen X un espacio de Banach y $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X, tal que $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathbf{x})$. Por el teorema 2.2.2 $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es F_σ, luego una condicion necesaria para ser B-representable es que el ideal sea F_σ.

Ejemplo 2.5.1. Algunos ejemplos de ideales que son $\mathcal{B}$-representables son:

(i) Fin con la sucesión canónica $(e_n)_n$ en l_1

(ii) Todo ideal sumable, ya que por ser sumable, existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y definimos la sucesión $(x_n)_n$ en l_1 como

$$x_n = (h(n), 0, 0, \ldots)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$

(iii) Observemos que todo ideal sumable es $\mathcal{B}$ - representable en c_0 con la misma sucesión dada anteriormente.

(iv) Si consideramos la sucesión $\mathbf{x} = (e_n)_n$ en c_0, $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal F_σ y $\mathcal{B}$-representable en un espacio de Banach X, entonces existe $\mathbf{x} = (x_n)_n$ en X tal que $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathbf{x})$. Así, por el teorema de Banach - Mazur existe un subespacio cerrado Y de l_∞ isométricamente isomorfo a la clausura del generado de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, llamemos T ese isomorfismo isométrico entre estos dos espacios de Banach. Luego, si $A \subseteq \mathbb{N}$, $\sum_{n\in A} x_n$ es perfectamente acotada si, y sólo si, $\sum_{n\in A} T(x_n)$ es perfectamente acotada, por la isometría de T. Con esto se obtiene que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$-representable en l_∞, tomando como sucesión $(T(x_n))_n$.

Al igual que lo que mostrarmos para $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ (ver lema 2.3.5), tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.5.2. *Sea $x = (x_n)_n$ una sucesión en l_∞ tal que $\sum x_n$ no es perfectamente acotada. Defina $x' = (x'_n)$, donde $x'_n = (|x_n(k)|)_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x')$.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesón en l_∞ tal que $\sum x_n$ no es perfectamente acotada. Defina $x' = (x'_n)$, donde $x'_n = (|x_n(k)|)_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x')$.

$1)$ $\mathcal{B}(x') \subseteq \mathcal{B}(x)$:

Sea $A \in \mathcal{B}(x')$, entonces existe $K > 0$ tal que para todo $F \in [A]^{<\omega}$,

$$\left\| \sum_{n \in F} x'_n \right\| \leq K.$$

Dado $F \in [A]^{\omega}$, tenemos que

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in F} x'(n) \right\| \leq K.$$

Por tanto, $A \in \mathcal{B}(x)$.

$2)$ $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}(x')$:

Suponga que existe $A \in \mathcal{B}(x)$ tal que $\sum_{n \in A} x'_n$ no es perfectamente acotada. Entonces para todo $K > 0$, existe $F_K \in [A]^{<\omega}$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in F_K} x'_n \right\| > K.$$

Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \in F_K} x'_n(m) > K.$$

Sean $F_K^+ = \{n \in F_K : x'_n(m) > 0\}$ y $F_K^- = \{n \in F_K : x'_n(m) \leq 0\}$. Por tanto,

$$\sum_{n \in F_K^+} x'_n(m) > \frac{K}{2} \quad \text{ó} \quad \sum_{n \in F_K^-} x'_n(m) > \frac{K}{2}.$$

Así,

$$\sum_{n \in F_K^+} x_n(m) > \frac{K}{2} \quad \text{ó} \quad -\sum_{n \in F_K^-} x_n(m) > \frac{K}{2}.$$

Es decir,

$$\left\|\sum_{n\in F_K^+} x_n\right\| > \frac{K}{2} \quad \text{ó} \quad \left\|\sum_{n\in F_K^-} x_n\right\| > \frac{K}{2},$$

para todo $K > 0$. Lo cual es una contradicción, ya que $A \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$. $\square$

Un resultado que se obtuvo del estudio del ideal $\mathcal{B}(\mathbf{x})$, fue el siguiente:

Teorema 2.5.3. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal F_σ. $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$-representable en un espacio de Banach si, y sólo si, existe φ una submedida semicontinua inferiormente no-patológica tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$.*

Demostración.

[$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{I}$ un ideal $\mathcal{B}$-representable en un espacio de Banach. Como l_∞ contiene copia isométricamente isomorfa de todo espacio de Banach separable, podemos suponer que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$-representable en l_∞.

Por tanto, existe $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en l_∞ tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}$. Podemos suponer por el Lema 2.5.2 que los términos de los elementos de la sucesión son no negativos.

Defina las medidas de la siguiente manera: Dado $A \subseteq \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, sea

$$\mu_k(A) = \sum_{n\in A} x_n(k).$$

Sea $\varphi = \sup_k \mu_k$. Veamos que $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = Fin(\varphi)$.

$1)$ $\mathcal{B}(\mathbf{x}) \subseteq Fin(\varphi)$:

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$, entonces existe $K > 0$ tal que para todo $F \in [A]^{<\omega}$,

$$\varphi(F) = \left\|\sum_{n\in F} x_n\right\| \leq K.$$

Entonces $\varphi(A) = \sup_{F\in[A]^{<\omega}} \varphi(F) \leq K$. Así, $A \in Fin(\varphi)$.

$2)$ $Fin(\varphi) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{x})$:

Sea $A \in Fin(\varphi)$, entonces existe $K > 0$ tal que $\varphi(A) \leq K$. Así

$$\varphi(F) = \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq K$$

para todo $F \in [A]^{<\omega}$. Por tanto, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que existe φ una submedida semicontinua inferiormente no-patológica tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$. Representaremos el ideal $\mathcal{I}$ en l_∞. Defina la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_n$ de la siguiente manera: Dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$x_n = (\mu_0(\{n\}), \ldots, \mu_k(\{n\}), \ldots).$$

Observemos que dado $F \in Fin$,

$$\varphi(F) = \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\|.$$

Así, la prueba hecha anteriormente muestra que $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = Fin(\varphi)$.

□

A continuación se da un ejemplo de un ideal que es $\mathcal{B}$-representable en c_0 y no es P-ideal (en particular, no es $\mathcal{C}$ - representable).

Ejemplo 2.5.4. $Fin \times \{\varnothing\}$ es $\mathcal{B}$-representable en c_0.

Demostración. Sea $(N_n)_n$ una partición de $\mathbb{N}$ en conjuntos infinitos. Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por $x_n = me_n$ si $n \in N_m$, donde e_n es el vector estándar. Observe que $\mathbf{x} = (x_n)_n$ es una sucesión en c_0. Mostremos que $Fin \times \{\varnothing\} = \mathcal{B}(\mathbf{x})$.

$1)$ $N_m \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Observe que si $F \subseteq N_m$ finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i \right\| = \left\| \sum_{i \in F} me_i \right\| = m.$$

$2)$ $Fin \times \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{x})$. Se deduce del ítem $1)$ y el hecho de que $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es un ideal.

$3)$ Sean $A \subseteq \mathbb{N}$ y $B \subseteq \mathbb{N}$ infinito, tal que $A \cap N_i \neq \varnothing$ para todo $i \in B$. Entonces $\sum_{n \in A} x_n$ no es perfectamente acotada.

Sea $a_i \in A \cap N_i$ para cada $i \in B$. Sea $K \in \mathbb{N}$, como B es infinito, existe $m \in B$ tal que $m \geq K$. Sea $F = \{a_i : i \in B \cap m+1\}$, entonces

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| = \left\| \sum_{i \in B \cap m+1} i e_{a_i} \right\| = m \geq K.$$

Sea $C = \{a_i : i \in B\}$. Observe que dado $F \subseteq A$,

$$\left\| \sum_{n \in F \cap C} x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\|.$$

Con esta observación concluimos lo que queríamos.

$4)$ $\mathcal{B}(\mathbf{x}) \subseteq Fin \times \{\varnothing\}$.

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$, por el ítem $3)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} N_i.$$

Así, $A \in Fin \times \{\varnothing\}$.

$5)$ $Fin \times \{\varnothing\}$ no es P - ideal.

Observe que $N_m \in Fin \times \{\varnothing\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pero no existe $A \in Fin \times \{\varnothing\}$ tal que $N_m \subseteq^* A$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ya que $(N_m)_m$ es una partición de $\mathbb{N}$ en conjuntos infinitos. □

Teorema 2.5.5. *Si $\mathbf{x} = (x_n)_n$ es una sucesión en X convergente a cero, entonces $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es alto*

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X convergente a cero. Tenemos que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{x})$ y que $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es alto porque $\mathbf{x}$ converge a cero, entonces $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es alto. □

El siguiente resultado no aparece en la literatura consultada.

Teorema 2.5.6. *Sea* $\mathbf{x} = (x_n)_n$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Si* $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ *es alto, entonces* $\mathbf{x} = (x_n)_n$ *es acotada.*

Demostración. Haremos la demostración por contradicción. Suponga que $\mathbf{x} = (x_n)_n$ es una sucesión en X tal que

$$\sup_n \|x_n\| = \infty$$

y que $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ es alto. Entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $\mathbf{x}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n_k}\| \geq k. \tag{2.1}$$

Observe que dado $C \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $\{n_k : k \in C\} \notin \mathcal{B}(\mathbf{x})$ por la desigualdad 2.1, lo cual es una contradicción.

□

Sin embargo, observe que si $\mathbf{x} = (x_n)_n$ es la sucesión en c_0 tal que

$$x_{2n} = \frac{1}{n} e_n$$

y

$$x_{2n+1} = e_0.$$

Entonces $\mathbf{x} = (x_n)_n$ está acotada por 1, pero ningún conjunto infinito de los números impares está en $\mathcal{B}(\mathbf{x})$.

Preguntas:

1. Sean $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. ¿Son equivalentes las siguientes afirmaciones?:

   - $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ se puede extender a un ideal F_σ.
   - Existe $\mathbf{y} = (y_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach Y tal que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{y})$ y $\mathcal{B}(\mathbf{y})$ es no trivial.

Observe que la pregunta anterior tiene respuesta positiva cuando X no contiene copia de c_0 (por el teorema 2.2.6), pero no se sabe en general.

2. Sabemos del teorema 2.2.6 que si $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ y $\mathcal{C}$ - representable en un espacio de Banach X que no contiene copia de c_0, entonces $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$ - representable en X. Por eso es natural preguntarse lo siguiente: ¿Si $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ y $\mathcal{C}$- representable en c_0, entonces $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$ - representable en algún espacio de Banach?

   En [4] demuestran que si $\mathcal{I}$ es F_σ, alto y $\mathcal{C}$ - representable en c_0, entonces $\mathcal{I}$ es un ideal sumable. Así, $\mathcal{I}$ es $\mathcal{B}$ - representable en c_0, ya que todo ideal sumable es $\mathcal{B}$ - representable en c_0. (ver Ejemplo 2.5.1).

3. Recordemos que por el teorema 2.2.2, los ideales que son $\mathcal{B}$ - representables son F_σ, pero no sabemos si todo ideal F_σ es $\mathcal{B}$ - representable.

Capítulo

3

ORDEN DE KATĚTOV

El orden de Katětov es estudiado en [1], [10] y [12]. Este orden ha sido usado para caracterizar propiedades combinatorias de ideales [10, 12]. Mediante este orden podemos caracterizar P-ideales que se pueden extender a un ideal F_σ.

Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales sobre X e Y respectivamente, donde X e Y son conjuntos numerables. Decimos que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si existe una función, $f : Y \to X$, tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ para todo $A \in \mathcal{I}$. Este (pre)orden es llamado el **orden de Katětov**. Si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}$ lo denotaremos por $\mathcal{I} \simeq \mathcal{J}$.

Según el orden definido anteriormente, se tienen las siguientes propiedades para $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales sobre X e Y respectivamente, donde X e Y son conjuntos numerables (ver [10]):

1) $\mathcal{I} \simeq Fin$ si, y sólo si, $\mathcal{I}$ no es alto.

2) Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$.

3) Si $A \in \mathcal{I}^+$, entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{I} \restriction A$.

4) $\mathcal{I}, \mathcal{J} \leq_K \mathcal{I} \times \mathcal{J}$.

5) $\mathcal{I} \bigoplus \mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}, \mathcal{J}$.

Recordemos que el ideal $ED = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m, n \in \mathbb{N})(\forall k > n)(|\{l : (k,l) \in A\}| \leq m\}$ y que el conjunto $\Delta = \{(m,n) : n \leq m\}$, además se puede observar que $\Delta \notin ED$.

Ejemplo 3.0.1. $ED \leq_K ED \upharpoonright \Delta$, por la propiedad 3 del orden de Katětov.

3.1 REPRESENTACIÓN DE IDEALES F_σ

En esta sección se presentan algunos resultados conocidos sobre ideales desde el punto de vista de su complejidad boreliana. Nos concentramos en los ideales que son F_σ o $F_{\sigma\delta}$. Para los ideales que son F_σ se conocen tres representaciones asociadas a: (i) una submedida semicontinua inferiormente, (ii) una familia de cerrados y (iii) una sucesión de coloraciones. También se presenta la noción de ideal Farah y mostramos que los ideales $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ son Farah sin importar el espacio de Banach donde se tome la sucesión $\mathbf{x}$.

Un teorema clásico para representar ideales F_σ es el teorema de Mazur presentado en [13].

Primera representación:

Teorema 3.1.1. *(Mazur)[13] Un ideal $\mathcal{I}$ es F_σ si, y sólo si, existe una submedida semicontinua inferiormente φ tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$.* □

A continuación se definen los ideales que son generados por familia de cerrados en $2^{\mathbb{N}}$.

Para cada $K \in \mathcal{K}(2^{\mathbb{N}}) = \{K \in 2^{\mathbb{N}} : K$ es cerrado $\}$, definimos:

- $A \in \langle K \rangle^n$ si, y sólo si, existen $K_1, \ldots, K_n \in K$ tal que:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

- $\downarrow K = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \exists B \in K, A \subseteq B\}$.

$$\mathcal{I}_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \downarrow \langle K \rangle^n$$

Observe que para cada $K \in \mathcal{K}(2^{\mathbb{N}})$, $\mathcal{I}_K$ es un ideal y es F_σ.

Segunda representación:

Teorema 3.1.2. *[8] Para todo ideal F_σ $\mathcal{I}$, existe $K \in \mathcal{K}(2^{\mathbb{N}})$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_K$.* $\square$

Para dar pie a la tercera representacón necesitamos definir qué es una coloración y qué es un conjunto homogéneo para esta coloración.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $A^{[k]}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad k. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, la función $c : A^{[k]} \to 2$ denotará para nosotros una coloración. Sea $B \subseteq A$, diremos que B es c-homogéneo si $|c(B^{[k]})| = 1$.

Un Teorema clásico de la combinatoria es el teorema de Ramsey.

Teorema 3.1.3. *(Teorema de Ramsey) Sean $B \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $c : B^{[k]} \to 2$ una coloración. Entonces existe $A \subseteq B$ infinito tal que A es c-homogéneo.* $\square$

En [8] se usan sucesiones de coloraciones para construir ideales F_σ y dicha construcción permite caracterizar los ideales que son F_σ.

Decimos que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de coloraciones, si cada c_n es una coloración de n-tuplas de $\mathbb{N}$ con dos colores, es decir, $c_n : \mathbb{N}^{[n]} \to 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $A \subset \mathbb{N}$ es **simultáneamente monocromático u homogéneo** para $\{c_n\}_n$ si $|c_n(A^{[n]})| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos el conjunto de todos los conjuntos simultáneamente monocromáticos por $\mathcal{S}(\{c_n\}_n)$. Observemos que $\mathcal{S}(\{c_n\}_n)$ es cerrado y contiene a todos subconjuntos de cardinalidad 1 de $\mathbb{N}$.

Una pregunta natural que se puede plantear sobre sucesiones de coloraciones es la siguiente: ¿Existe una sucesión de coloraciones tal que cualquier subsucesión de ella no tenga conjuntos infinitos simultáneamente homogenéos? Esta pregunta fue enunciada y respondida en [8] como se muestra en el siguiente lema.

Lema 3.1.4. *[8] Existe una sucesión de coloraciones $(r_n)_n$ tales que dados $A, I \subseteq \mathbb{N}$ infinitos, existe $n \in I$ tal que A no es homogéneo para r_n.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $r_n(\{k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}\}) = 1$ si, y sólo si, $k_0 \equiv k_1 \equiv \cdots \equiv k_{n-1} \mod n$. Suponga que existen A, I conjuntos infinitos tal que A es simultáneamente homogéneo para $(r_n)_{n\in I}$.

Sean $a, b \in A$ tales que $a \neq b$. Dados $n \in I$ con $n \geq 2$ y $k_0, \ldots k_{n-3} \in A$, entonces $\{k_0, \ldots k_{n-3}, a, b\}$ es homogéneo para r_n. Observe que el color de A no puede ser 0, porque A es infinito. Así A es de color 1 y

$$a \equiv b \mod n \quad \text{para cada} \quad n \in I \quad \text{con} \quad n \geq 2.$$

Por tanto, n divide a $a - b$ para todo $n \in I$ con $n \geq 2$. Como I es infinito, entonces $a - b = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente lema fue enunciado en [8] sin demostración.

Lema 3.1.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $c : \mathbb{N}^{[n]} \to 2$. Si $m \geq n$, entonces existe $d : \mathbb{N}^{[m]} \to 2$ con los mismos conjuntos infinitos monocromáticos que c.*

Demostración. Sea $m \geq n$. Defina $d : \mathbb{N}^{[m]} \to 2$ de la siguiente manera:

$$d(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |c(a^{[n]})| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |c(a^{[n]})| > 1 \end{cases} \qquad \text{con } a \in \mathbb{N}^{[m]}$$

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito homogéneo para c, entonces $|c(A^{[n]})| = 1$. Sea $a \in A^{[m]}$, luego $d(a) = 1$, ya que $|c(a^{[n]})| = 1$. Ahora supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto infinito, homogéneo para d. Por el teorema de Ramsey 3.1.3, existe $B \subseteq A$ infinito, tal que B es homogéneo para c, así $d(A^{[m]}) = 1$. $\square$

Lema 3.1.6. *[8] Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Entonces para cada sucesión $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $d_n : \mathbb{N}^{[f(n)]} \to g(n)$, existe una sucesión de coloraciones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con los mismos conjuntos infinitos simultáneamente monocromáticos.*

Demostración. La prueba la haremos por partes.

$1)$ Mostremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{b_i^n\}_{i<g(n)}$ donde $b_i^n : \mathbb{N}^{[f(n)]} \to 2$ tal que $A \subseteq \mathbb{N}$ es homogéneo para d_n si, y sólo si, es homogéneo para cada b_i^n.

Dado $n \in \mathbb{N}$ defina $b_i^n(a) = 1$ si y sólo si $d_n(a) \neq i$ para $a \in \mathbb{N}^{[f(n)]}$. Veamos que la sucesión que definimos tiene los mismos homogéneos de la sucesión $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ homogéneo para d_n, entonces $d_n(A^{[f(n)]}) = l$ para algún $l < g(n)$. luego, $b_i^n(A^{[f(n)]}) = 1$ si $i \neq l$ y $b_l^n(A^{[f(n)]}) = 0$. Ahora supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto homogéneo para cada b_i^n. Sea $a \in A^{[f(n)]}$, entonces $d_n(a) = k$, por tanto, $d_n(A^{[f(n)]}) = k$, ya que $b_k^n(A^{[f(n)]}) = 0$.

$2)$ Definiremos recursivamente la sucesión $(c_n)_n$:

- Defina $c_{f(0)} = b_0^0$. Si $1 \leq i < g(0)$, por el lema 3.1.5 existe $c_{f(0)+i} : \mathbb{N}^{[f(0)+i]} \to 2$ con los mismos conjuntos infinitos homogéneos que b_i^0.
- Sea $m_1 = \max\{f(1), f(0)+g(0)\}$. Si $0 \leq i < g(1)$, por el lema 3.1.5 existe c_{m_1+i} con los mismos conjuntos infinitos homogéneos que b_i^1.
- Sea $m_2 = \max\{f(2), m_1 + g(1)\}$. Si $0 \leq i < g(2)$, por el lema 3.1.5 existe c_{m_2+i} con los mismos conjuntos infinitos homogéneos que b_i^2.

Recursivamente se sigue este procedimiento y si en este proceso quedan coloraciones por definir, éstas se pueden tomar constantes. Así hemos construido la sucesión $(c_n)_n$ y con esto terminamos la prueba.

$\square$

A continuación se da una caracterización mediante sucesiones de coloraciones de los ideales que son F_σ y contienen a Fin.

Tercera representación:

Teorema 3.1.7. *[8] Sea $\mathcal{I}$ un ideal F_σ que contiene a Fin. Entonces existe una sucesión de coloraciones $\{c_n\}_n$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{c_n\}_n)}$.*

Demostración.

Fijemos una sucesión de coloraciones $(r_n)_n$ tales que dados $A, I \subseteq \mathbb{N}$ infinitos, existe $n \in I$ tal que A no es homogéneo para r_n, por el lema 3.1.4. Sea $K \in \mathcal{K}(2^{\mathbb{N}})$ tal que $\downarrow K = K$ y $\mathcal{I}_K = \mathcal{I}$. Entonces tenemos que $\{n\} \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina una sucesión $(d_n)_n$ tal que

- $d_n : \mathbb{N}^{[n]} \to 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $d_n(a) = 1$ si $a \in K$,
- $d_n(a) = 0$ si $a \notin K$ y $r_n(a) = 0$,
- $d_n(a) = 2$ si $a \notin K$ y $r_n(a) = 1$.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Si $A \in K$, entonces $d_n(A^{[n]}) = 1$. Ahora si $A \notin K$, por la propiedad de la sucesión $(r_n)_n$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A no es homogéneo para r_{n_0}, así A no puede ser homogéneo para d_n. Por tanto, los conjuntos infinitos simultáneamente homogéneos de $(d_n)_n$ son de color 1. Aplicando el lema 3.1.6 existe $(c_n)_n$ una sucesión de coloraciones tales que $c_n : \mathbb{N}^{[n]} \to 2$ y $\mathcal{I} = \mathcal{I}_K = \mathcal{I}_{S(\{d_n\}_n)} = \mathcal{I}_{S(\{c_n\}_n)}$. $\square$

Sea c una coloración de $\mathbb{N}^{[k]}$ para algún k. Denotamos por $hom(c)$ la colección de todos los conjuntos c-homogéneos. Es fácil verificar que $hom(c)$ es un cerrado en $2^{\mathbb{N}}$. Así, podemos considerar el ideal $\mathcal{I}_{hom(c)}$, que vimos es un ideal F_σ. Definido esto, de manera natural se puede preguntar: ¿cuándo la siguiente igualdad es cierta?

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{c_n\}_n)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{hom(c_n)}.$$

En general tenemos que dada $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de coloraciones,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{c_n\}_n)} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{hom(c_n)}.$$

Sea $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{c_n\}_n)}$, entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}(\{c_n\}_n)$, tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Como $A_i \in \mathcal{I}_{hom(c_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{I}_{hom(c_n)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $A \in \mathcal{I}_{hom(c_n)}$.

Ahora si consideramos la sucesión de coloraciones $(r_n)_n$ como la definida en la demostración del Lema 3.1.4, entonces

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{r_n\}_n)} = Fin.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{I}_{hom(r_n)} = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$
Mostraremos esta segunda afirmación, ya que la primera se deduce directamente del lema 3.1.4.

Dados $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $n \in \mathbb{N}$, defina para cada $i \in n$, $F_i = A \cap \{m \in \mathbb{N} : m \equiv i \mod n\}$. Observe que $F_i \in \mathcal{I}_{hom(r_n)}$ para todo $i \in n$ y
$$A = \bigcup_{i=0}^{n-1} F_i.$$
Así, $A \in \mathcal{I}_{hom(r_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{hom(r_n)} \not\subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{r_n\}_n)}.$$
Más precisamente,
$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}(\{c_n\}_n)} = Fin$$
y
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_{hom(r_n)} = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

3.2 REPRESENTACIÓN DE IDEALES $F_{\sigma\delta}$

En [5], [11] se introduce la siguiente noción. Un ideal $\mathcal{I}$ es *Farah*, si existe una colección numerable $\mathcal{K}_n$ de cerrados hereditarios de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que
$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(A \setminus \{0, 1, \cdots, m\} \in \mathcal{K}_n)\}.$$
Todo ideal Farah es $F_{\sigma\delta}$. En [5] se demuestra que $\mathbf{nwd}(\mathbb{Q})$, $null(\mathbb{Q})$ y todo P-ideal analítico son Farah. Sin embargo, observemos que no existe un ideal $\mathcal{J}$ que sea F_σ y $\mathbf{nwd}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{J}$. En particular, $\mathbf{nwd}(\mathbb{Q})$ no se puede escribir como una intersección numerable de *ideales* F_σ.

Decimos que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es *cerrado bajo cambios finitos* si dado $A \in \mathcal{K}$, $A\Delta F \in \mathcal{K}$ para todo $F \subseteq \mathbb{N}$ finito.

Teorema 3.2.1. *(M. Hrušák and D. Meza-Alcántara, [11]) Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathcal{I}$ es Farah.

(ii) Existe $\{F_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos hereditarios F_σ y cerrados bajo cambios finitos tal que $\mathcal{I} = \bigcap_n F_n$.

(iii) Existe una sucesión $\{F_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ de F_σ cada uno cerrado bajo cambios finitos tal que $\mathcal{I} = \bigcap_n F_n$.

Sabemos por el Teorema 2.3.4 que dada $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X, $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es un P-ideal analítico y por tanto es Farah. A continuación se da una demostración de este hecho.

Teorema 3.2.2. *Sea $\mathbf{x} = (x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ es Farah.*

Demostración. Por el Lema 2.3.1 tenemos que $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ se puede escribir de la siguiente manera,

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_{F \in \mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j \in F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

donde $\mathcal{F}_n = [\mathbb{N} \setminus n]^{<\omega}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$D_k = \bigcup_n \bigcap_{F \in \mathcal{F}_n} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \left\| \sum_{j \in F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Anteriormente mostramos en el lema 2.4.1 que cada D_k es F_σ.Por tanto, falta mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$, D_k es hereditario y cerrado bajo cambios finitos.

$1)$ D_k es hereditario: Sea $A \in D_k$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}_n$,

$$\left\| \sum_{j \in F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Sea $C \subseteq A$. Observemos que dado $F \in \mathcal{F}_n$, $C \cap F \in \mathcal{F}_n$. Por tanto,

$$\left\| \sum_{j \in C \cap F} x_j \right\| = \left\| \sum_{j \in C \cap F \cap A} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Luego, $C \in D_k$.

$2)$ D_k es cerrado bajo cambios finitos: Observemos que si $F \in Fin$, entonces $F \in D_k$, ya que tomando $m \geq \text{máx}\{n, \text{máx}\, F\}$ se tiene que para todo $S \in \mathcal{F}_m$

$$\left\| \sum_{j \in S \cap F} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Ahora sea $A \in D_k$ y $B \in Fin$, entonces $A \setminus B \in D_k$ y $B \setminus A \in D_k$, porque $A \setminus B \subseteq A$ y $B \setminus A \in Fin$. Por tanto, existen n_1 y n_2 en $\mathbb{N}$ tales que para todo $F_1 \in \mathcal{F}_{n_1}$ y para todo $F_2 \in \mathcal{F}_{n_2}$

$$\left\| \sum_{j \in F_1 \cap (A \setminus B)} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}$$

$$\left\| \sum_{j \in F_2 \cap (B \setminus A)} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Observe que si $r = \text{máx}\{n_1, n_2, \text{máx}\, B\}$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}_r$

$$\left\| \sum_{j \in F \cap (B \setminus A)} x_j \right\| = 0.$$

Así, para todo $F \in \mathcal{F}_r$

$$\left\| \sum_{j \in F \cap A \Delta B} x_j \right\| = \left\| \sum_{j \in F \cap (B \setminus A)} x_j \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Por tanto, $A \Delta B \in D_k$.

$\square$

3.3 EL PROBLEMA DE LA EXTENSIÓN CON IDEALES F_σ

Un problema que se ha estudiado durante mucho tiempo es saber qué ideales se pueden extender a un ideal F_σ. Más precisamente, si $\mathcal{I}$ es un ideal, cuándo existe un ideal $\mathcal{J}$ que es F_σ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.

Diremos que un ideal $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ, si existe $\mathcal{J}$ ideal F_σ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.

Un ejemplo de un ideal que no se puede extender a un ideal F_σ se mostrará a continuación. Para este fin, diremos que un subconjunto A contenido en $\mathbb{Q}$ es una sucesión convergente si A es el rango de una sucesión convergente. Consideremos la familia

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : A \text{ es una sucesión convergente o } A \text{ es finito } \}.$$

Diremos que $B \in \mathsf{conv} \Leftrightarrow B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, donde $A_i \in \mathcal{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que conv es un ideal.

Lema 3.3.1. *[13] Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ una submedida semicontinua inferiormente, entonces para cada $U \notin Fin(\varphi)$ se tiene que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A_k \subset U$ finito, tal que*

$$\varphi(A_k) \geq k.$$

Tenemos el siguiente resultado, el cual es enunciado en [10]:

Teorema 3.3.2. conv *no se puede extender a un ideal F_σ.*

Demostración. Supongamos que conv se puede extender a un ideal F_σ y sea $\mathcal{J}$ el ideal F_σ, tal que $\mathsf{conv} \subseteq \mathcal{J}$. Entonces existe una submedida φ semicontinua inferiormente, tal que $\mathcal{J} = Fin(\varphi)$ (ver Teorema 3.1.1). Por definición de submedida, $\varphi(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \infty$. Por tanto, $\varphi(\mathbb{Q} \cap [0,1/2]) = \infty$ ó $\mathbb{Q} \cap [1/2,1]) = \infty$, ya que si no fuese así, se tiene que $\mathbb{Q} \cap [0,1] \in \mathcal{J}$, lo cual es absurdo. Llamaremos I_1 a uno de los dos intervalos que satisface la condición anterior, es decir, que $\varphi(\mathbb{Q} \cap I_1) = \infty$. De la misma manera a como se hizo con $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, dividimos a I_1 en dos intervalos cerrados, con intersección sólo un punto, con la misma longitud y definimos I_2 al intervalo que satisface que $\varphi(\mathbb{Q} \cap I_2) = \infty$. Supongamos que ya tenemos definido I_n, entonces lo dividimos en dos intervalos cerrados del mismo tamaño, sólo con un punto en común, y definimos I_{n+1} a uno de los intervalos que cumple que $\varphi(\mathbb{Q} \cap I_{n+1}) = \infty$.

Se ha definido una sucesión de intervalos encajados donde cada uno intersectado con $\mathbb{Q}$ tiene submedida infinita, por el Lema 3.3.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos A_n finito tales que $A_n \subset \mathbb{Q} \cap I_n$ y $\varphi(A_n) \geq n$. Sea

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Claramente $\varphi(A) = \infty$, pero $A \in \mathsf{conv}$, ya que A es el rango de una sucesión que converge a x, donde

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

$\square$

Diremos que un ideal $\mathcal{I}$ tiene la propiedad $\mathbf{kat}$ si las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo ideal $\mathcal{J}$:

(i) $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$.

(ii) $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$.

Donde $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ significa que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva, tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ para todo $A \in \mathcal{I}$.

Podemos observar que si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, donde $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales, entonces $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ (basta elegir f como la función identidad). Además si $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$. Esto se prueba usando la misma biyección que se obtiene de $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$.

A continuación se muestra un ejemplo de dos ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ tales que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ y $\mathcal{I} \not\sqsubseteq \mathcal{J}$

Ejemplo 3.3.3. Sean $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ y $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \times \{\varnothing\}$.

$1)$ $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \leq_K \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \times \{\varnothing\}$.

Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $f(n, m) = n$. Sea $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, mostremos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \times$

$\{\varnothing\}$. Para tal motivo, basta ver que $\{m : (f^{-1}(A))_m \neq \varnothing\} \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, donde $(f^{-1}(A))_m = \{n : (m,n) \in f^{-1}(A)\}$.

Observe que $\{m : (f^{-1}(A))_m \neq \varnothing\} = A$, ya que $f^{-1}(A) = A \times \mathbb{N}$.

2) $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\sqsubseteq \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \times \{\varnothing\}$.

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Mostremos que existe $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ y $f^{-1}(A) \notin \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \times \{\varnothing\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $n_i \in f(\{i\} \times \mathbb{N})$ tal que $n_i \geq 2^i$. Defina $A = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Observe que $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, ya que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_i} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i}.$$

Tenemos que $(f^{-1}(A))_m \neq \varnothing$ para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $\{m : (f^{-1}(A))_m \neq \varnothing\} = \mathbb{N} \notin \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

A continuación se presentan unos ideales que tienen la propiedad $\mathbf{kat}$.

Ejemplo 3.3.4. Los siguientes ideales tienen la propiedad $\mathbf{kat}$:

- Fin.
- $Fin \times Fin$.

En [1] prueban que el ideal conv tiene la propiedad $\mathbf{kat}$.

Teorema 3.3.5. *[1] conv tiene la propiedad* $\mathbf{kat}$*.* □

En [6] definen la propiedad $FinBW$ y estudian los ideales que tienen esta propiedad.

Sean X un espacio topológico e $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Diremos que $\mathcal{I}$ es un ideal $FinBW$ si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tiene una subsucesión convergente $(x_n)_{n\in A}$ con $A \in \mathcal{I}^+$.

La propiedad $\mathbf{kat}$ parece sencilla, pero es de vital importancia para saber cuándo un P-ideal analítico se puede extender a un ideal F_σ como a continuación.

Teorema 3.3.6. *Sea $\mathcal{I}$ un P-ideal analítico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) conv $\nleq_K \mathcal{I}$*.*

2) conv $\not\sqsubseteq \mathcal{I}$*.*

3) $\mathcal{I}$ es un ideal $FinBW$.

4) $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ.

Del Teorema 3.3.5 tenemos que $1)$ es equivalente a $2)$. La demostración de las equivalencias restantes se hará por partes, primero se realizará la equivalencia entre $1)$ y $3)$ (Ver Teorema 3.3.7), y después la de $3)$ y $4)$ (Ver Teorema 3.3.12).

El siguiente teorema fue enunciado en [15] sin demostración. Por tanto, la prueba fue pensada y hecha por nosotros.

Teorema 3.3.7. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$1)$ conv $\nleq_K \mathcal{I}$

$2)$ *$\mathcal{I}$ es un ideal $FinBW$.*

Demostración.

[$1) \to 2)$] Haremos la prueba de la contrarrecíproca.

Supongamos que $\mathcal{I}$ no es un ideal $FinBW$, entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en $[0,1]$ tal que si $(x_n)_{n\in A}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$ converge, entonces $A \in \mathcal{I}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ definida por $f(n) = x_n$.

Sea $A \in$ conv, entonces existen $A_1, \ldots, A_n$ sucesiones convergentes o conjuntos finitos tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Así,

$$f^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)$$

Por tanto, $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{I}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ ya que $f(f^{-1}(A_i))$ es convergente o finito. Luego $f^{-1}(A) \in \mathcal{I}$.

$[2) \to 1)]$ Sean $(x_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ convergente, tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una función, podemos suponer que f es inyectiva, ya que conv tiene la propiedad $\mathbf{kat}$. Mostraremos que existe $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $f^{-1}(A) \notin \mathcal{I}$.

Observemos que $(x_n)_{n \in f^{-1}(\mathbb{N})}$ es convergente y $f^{-1}(\mathbb{N})$ es infinito. Por tanto, existe $B \subseteq f^{-1}(\mathbb{N})$ tales que $B \notin \mathcal{I}$ y $(x_n)_{n \in B}$ es convergente, porque $\mathcal{I}$ es un ideal $FinBW$. Luego, sea $A = f(B)$.

□

En [6] se muestra que los ideales que son F_σ tienen la propiedad $FinBW$ y que esta propiedad es hereditaria, es decir, si queremos saber cuándo un ideal se puede extender a un ideal F_σ, éste debe ser un ideal $FinBW$.

Teorema 3.3.8. *[6] Todo ideal $\mathcal{I}$ que es F_σ tiene la propiedad $FinBW$.* □

Lema 3.3.9. *[6] Sea $\mathcal{I}$ un ideal que se puede extender a un ideal $\mathcal{J}$ que es $FinBW$, entonces $\mathcal{I}$ es $FinBW$.* □

En [17] Solecki muestra que si $\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico, este puede ser representado mediante el ideal

$$Exh(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \|A\|_\varphi = 0\},$$

para alguna submedida φ semicontinua inferiormente, donde

$$\|A\|_\varphi = \limsup_{F \in fin} \varphi(A \setminus F),$$

que equivalentemente $\|A\|_\varphi = \lim_k \varphi(A \setminus k)$.

El siguiente teorema permite obtener una propiedad importante que tienen los P-ideales que son $FinBW$. (Este teorema está enunciado en [6] en términos de la propiedad BW, pero ellos hacen la observación que $FinBW$ implica Bw)

Teorema 3.3.10. *[6] Sea φ una submedida semicontinua inferiormente tal que $Exh(\varphi)$ es un ideal $FinBW$ si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{N}$, existe $i \leq n$ con $\|A_i\|_\varphi > \delta$.*

La siguiente definición es introducida en [6].

Definición 3.3.11. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n, A$ subconjuntos de $\mathbb{N}$. Decimos que una coleccion disjunta dos a dos $F_1, \ldots, F_n$ es una (n, δ)-partición del conjunto A, si $F_1 \cup \cdots \cup F_n = A$ y $\varphi(F_i) \leq \delta$ para todo $i \leq n$.

Teorema 3.3.12. *[6] Sea $\mathcal{I}$ un P-ideal analítico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$\mathcal{I}$ es $FinBW$,*
- *$\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ.*

Demostración.

[$\Leftarrow$] Suponga que $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal $\mathcal{J}$ que es F_σ, entonces por el Teorema 3.3.8 $\mathcal{J}$ es $FinBW$ y por el Lema 3.3.9 $\mathcal{I}$ es $FinBW$.

[$\Rightarrow$] Por ser $\mathcal{I}$ un P-ideal analítico, existe φ una submedida semicontinua inferiormente tal que $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$. Por el Teorema 3.3.10, existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda partición $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{N}$, existe $i \leq n$ con $\|A_i\|_\varphi > \delta$. Así, $\varphi(A_i \setminus k) > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por la monotonía de φ.

Sea

$$\mathcal{I}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists n, k)(\forall m \geq k)(\exists \mathcal{F})\mathcal{F} \text{ es una } (n, \delta)\text{-partición de } A \cap [k, m]\},$$

Afirmamos que $\mathcal{I}_\delta$ es la extensión que necesitamos. Si $A \in Exh(\varphi)$, entonces $\|A\|_\varphi = 0$, así existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(A \setminus k) \leq \delta$, luego si $n = 1$ $\mathcal{F}_m = \{[k, m]\}$ para cada $m \geq k$. La monotonía de φ implica que

$$\varphi(A \cap [k, m]) = \varphi([k, m]) \leq \varphi(A \setminus k) \leq \delta.$$

Por lo tanto, $A \in \mathcal{I}_\delta$.

Ahora mostremos que $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}_\delta$. Supongamos que $\mathbb{N} \in \mathcal{I}_\delta$, entonces existen $n, k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq k$ existe $F_1^m, \ldots, F_n^m$ una (n, δ)-partición de $[k, m]$. Dado $m \in \mathbb{N}$, defina

$$T_m = \{f : [k, m] \to n \mid \{f^{-1}(i)\}_{i \leq n} \text{ es una } (n, \delta)\text{-partición } \}.$$

Entonces $T = (\bigcup T_n, \subseteq)$ es un árbol infinito, pues cada T_m es no vacío por la hipótesis. Además T es claramente de ramificación finita, así por el lema de König 1.1.3 existe una rama infinita $B = \{f_m : f_m \in T_m, m \in \mathbb{N}\}$ de T. Defina $g = \bigcup f_m$. Entonces $g^{-1}(n)$ es una partición de $\mathbb{N} \setminus k$. Sea $A_0 = k$ y $A_i = g^{-1}(i)$, entonces $A_0, \ldots, A_n$ es una partición de $\mathbb{N}$. Por la propiedad que tiene δ, existe $i \leq n$ tal que $\varphi(A_i) > \delta$. Observe que $i \neq 0$, ya que $\|A_0\|_\varphi = 0$. Luego por la semicontinuidad inferior de φ, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi([k, m] \cap g^{-1}(i)) = \varphi(f_m^{-1}(i)) > \delta$ lo cual es una contradicción, ya que $f_m \in T_m$.

$\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] BARBARSKI, Pawel, *et al.* When does the Katětov order imply that one ideal extends the other? [En línea]. Colloq. Math., 130(1):91–102, 2013. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://pdfs.semanticscholar.org/8628/cf648b42c181426232924e5a15a362e598c9.pdf

[2] BORODULIN–NADZIEJA, Piotr, *et al.* Representations of ideals in Polish groups and in Banach spaces. [En línea]. J. Symb. Log., 80(4):1268–1289, 2015. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://dmg.tuwien.ac.at/farkas/repr-rev.pdf

[3] DI PRISCO, Carlos y UZCÁTEGUI, Carlos. Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos. 1 ed. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2020. ISBN 978-958-774-946-5

[4] DREWNOWSKI, Lech and LABUDA, Iwo. Ideals of subseries convergence and copies of c_0 in Banach spaces. [En línea]. In Vector measures, integration and related topics, volume 201 of Operator Theory: Advances and Applications. pages 199–204. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-0346-0211-2_18

[5] FARAH, Ilijas. Luzin gaps. Transactions of the American Mathematical Society. [En línea]. 356(6):2197–2239, 2004. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://www.ams.org/journals/tran/2004-356-06/S0002-9947-04-03565-2/S0002-9947-04-03565-2.pdf

[6] FILIPÓW, Rafał, *et al.* Ideal convergence of bounded sequences. [En línea]. *J. symbolic Logic*, 72(2):501–512, 2007. [Citado el 20 de agosto

de 2020]. Disponible en: https://pdfs.semanticscholar.org/0ec0/5dfda0fe71af9ad16572bf984a1f9bc503bb.pdf

[7] FILIPÓW, Rafał, *et al.* Ideal version of Ramsey's theorem. [En línea]. Czechoslovak Mathematical Journal, 61(2):289–308, 2011. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://mat.ug.edu.pl/~rfilipow/papers/ramsey.pdf

[8] GREBÍK, Jan and HRUŠÁK, Michael. No minimal tall Borel ideal in the Katětov order. [En línea]. preprint, 2018. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://www.matmor.unam.mx/~michael/preprints_files/no-K-minimal-tall.pdf

[9] HRUŠÁK, Michael. Combinatorics of filters and ideals, Set theory and its applications. [En línea]. Amer. Math. Soc. Providence, vol. 533:29–69, 2011. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://pdfs.semanticscholar.org/3143/8794067fb3d4acc2570305a82c6a4946ac23.pdf

[10] HRUŠÁK, Michael. Katětov order on Borel ideals. [En línea]. Archive for Mathematical Logic, 56(7-8):831–847, 2017. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://matmor.unam.mx/~michael/preprints_files/KatetovBaumgartner.pdf

[11] HRUŠÁK, Michael and MEZA-ALCÁNTARA, David. Comparison game on Borel ideals. [En línea]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 52(2):191–204, 2011. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141498

[12] HRUŠÁK, Michael, *et al.* Ramsey type properties of ideals. [En línea]. Annals of Pure and Applied Logic, 168(11):2022–2049, 2017. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168007217300787

[13] MAZUR, K. F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps. [PDF] Institute of mathematics, University of Warsaw. 138(2):103–111, 1991.

[14] MEGGINSON, Robert. An introduction to Banach space theory. Volumen 183. New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN 0-387-98431-3

[15] MEZA-ALCÁNTARA, David. Ideals and filters on countable set. [En línea]. Tesis doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México, 2009. [Consultado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: http://132.248.9.195/ptd2009/junio/0645364/Index.html

[16] M. Fabián, *et al*. Functional Analysis and Infinite - Dimentional Geometry. CMS Books in Mathematics / Ouvrages de mathématiques de la SMC, Springer - Verlag, New York. 2001. ISBN 978-1-4757-3480-5

[17] SOLECKI, Sławomir. Analytic ideals and their applications. [En línea]. Annals of Pure and Applied Logic, 99(1-3):51–72, 1999. [Citado el 20 de agosto de 2020]. Disponible en: https://pdf.sciencedirectassets.com/271596/1-s2.0-S0168007200X00620/1-s2.0-S0168007298000517/main.pdf?X-Amz-Security-Token=
IQoJb3JpZ2luX2VjEBYaCXVzLWVhc3QtMSJGMEQCIGDgOSuyP9q1lTwgy3fCSauJ5N
2BZucJhFxESvhxnJ4bAiBum7F4vB6cn8HBrXLtdAt6aFBTMPzTLZmufhiDZR9JSSq0
2F00SX8y7UtKoUZTjTDNDCKuBvTNpfV7EtzNxs2iykMTTgE3k3dFz5xgPL4BI3Qzl5
2B8CRdFM%2BIi%2B1LI0JkQG9P6A6LGHZJ1xElWYJFDhZtxG95Uq8deupcXCgcZm6a
2BdWTpE%2BvshXKUb%2Bk710RZ137rUz%2FbPxq32Tl3b93HD%
2F2wLpXwpF4JOpxJ9bRg%2FRg7h32FGmHhPZagKhHJNHPjkWT3XV7nYpt%
2FhjFPWYdGm2Vb6aM2cBKSgdIoOosSquDpjcIXc8PcIiZaZXpeY9sMoxuoQrSAQO2g
2B3Y44hxw8dErUmyy1wTraIk%2FtZILQemFkeaKKQMjJM3poIp0Qw6tXa%
2BgU67AF8joFN2PQgnWS4Aw1hASlYUc5tkYRC40bzvXK%
2BmudCh9DQqAetar2bp7x9%2BBH%2F66MC%2Bq4Xwln06RlEazTYlW4o3pdczpVyII
2FVkhUPYeo%2F81uL6EzkAUyG2ET4pVTnpoEWeN4Wet9nGry46Q3T%
2FyIk2Nhwl4SlBgVPhBUfBh0l7uQ9NZrJxDU7PWdyLL3u%
2BWGyU2BjS6N0uKrojkTNOX4Qe7XNjDEoKtY4bqLpV7cAXc%
2FSXsLLBkXNUwhFOaO7QOjBJXXBnuhYUPYQchqtaLoWJFxlk%2By3w%
3D%3D&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Date=
20200907T230935Z&X-Amz-SignedHeaders=host&X-Amz-Expires=
300&X-Amz-Credential=ASIAQ3PHCVTYTYI3GD53%2F20200907%
2Fus-east-1%2Fs3%2Faws4_request&X-Amz-Signature=
d45f8be5e8036d2a92b76c95627a30abc3e011f8c091bf8233a83f745349ffc0&
hash=456baa06dfbbc28011a7b6bbe54dc3a255200967b24334fb0d191c1554ad3
host=68042c943591013ac2b2430a89b270f6af2c76d8dfd086a07176afe7c76c2