# “DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE GUÍAS, PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL GRADO ONCE, USANDO GEOMETRIA FRACTAL”


**JOSELÍN RIVERO PINTO**
**2006341**
**SERGIO ANDRÉS MARTÍNEZ APARICIO**
**2032091**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**ESCUELA DE MATEMATICAS**
**BUCARAMANGA**
**2008**

**“DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE GUÍAS, PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL GRADO ONCE, USANDO GEOMETRIA FRACTAL”**

**JOSELÍN RIVERO PINTO**
**2006341**
**SERGIO ANDRÉS MARTÍNEZ APARICIO**
**2032091**

**Trabajo para optar al título de:**
**Licenciados en Matemáticas**

**DIRECTORA**
**SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA**
**DOCTORA EN MATEMÁTICAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**ESCUELA DE MATEMATICAS**
**BUCARAMANGA**
**2008**

*A mis padres, ya que siempre me apoyaron y nunca desconfiaron*

*de lo que yo podía lograr, por su esfuerzo y sacrificio*

*he logrado alcanzar esta meta tan*

*importante en mi vida*

*Joselín Rivero Pinto*

*A mi viejita querida "Roselia Aparicio" quien me regaló la vida*

*y con su amor, dedicación, apoyo, enseñanzas y comprensión*

*logró hacer de mí lo que soy. "Ella es mi razón de vivir".*

*Sergio Andrés Martínez Aparicio*

**AGRADECIMIENTOS**

*A Dios, por que ha estado y estará siempre con nosotros. "Sin el nada es posible"*

*A nuestros familiares compañeros y amigos ya que gracias a su apoyo incondicional pudimos superar todos aquellas dificultades que se presentaron a lo largo de nuestra carrera.*

*A los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Las Américas del año escolar 2008 por su disposición y colaboración a lo largo de la aplicación de nuestras guías.*

*A la profesora Sonia Marleni Sabogal, nuestra directora de proyecto, porque gracias a sus enseñanzas, colaboración y paciencia hemos podido alcanzar la cumbre de nuestra carrera.*

*A mi tía Alcira, quien me acogió en su casa como si fuera uno de sus hijos y me brindó todo su apoyo para que yo pudiera realizar mis estudios universitarios. (Sergio Andrés Martínez Aparicio)*

**TABLA DE CONTENIDO**

# RESUMEN

**TÍTULO:** DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE GUÍAS PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE LÍMITE EN GRADO ONCE, USANDO GEOMETRÍA FRACTAL*.

**AUTORES:** JOSELÍN RIVERO PINTO, SERGIO ANDRÉS MARTÍNEZ APARICIO**.

**PALABRAS CLAVES:** ITERACIÓN, AUTOSEMEJANZA, SUCESIÓN, SERIE, LÍMITE, FRACTAL.

Este trabajo se realizó en el Instituto Educativo Las Américas, con un grupo piloto de 12 estudiantes de undécimo grado. Con ellos se trabajó cinco guías con las que se buscaba que pudiesen construir una idea intuitiva sobre el concepto de límite, mediante el análisis de algunas características de los fractales: curva de Koch, isla de Koch, triángulo de Sierpinski, tetraedro de Sierpinski y conjunto de Cantor.

El origen de este trabajo radicó en la manera como se enseña el tema de límites en el colegio pues, en muchos casos, no se presenta de una forma diferente a la teórica y su concepto no queda lo suficientemente claro. Por ende, en este trabajo se quiere implementar una nueva forma de abordar este tema usando algunas figuras fractales, ya que de ellas se pueden deducir sucesiones inherentes a su construcción y al proceso algebraico para deducir características como su área o su volumen. Con esto, se puede hacer un acercamiento al concepto de límite visto como “el valor al cual se van acercando cada vez más los términos de la sucesión generada por cada figura”.

Además de esto, la estética y vistosidad de las figuras fractales permite despertar en los estudiantes el interés por la matemática, lo cual hace más fácil trabajar diferentes de temas y en este caso particular, el concepto intuitivo de límite.


* Trabajo de Grado


**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemática.
Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza. Doctora en Matemáticas.

## SUMMARY

**TITLE:** DESIGN, IMPLEMENTATION AND EVALUATION OF GUIDES TO INTRODUCE THE CONCEPT OF LIMITS IN 11° GRADE, USING FRACTAL GEOMETRY*.

**AUTHORS:** JOSELÍN RIVERO PINTO, SERGIO ANDRÉS MARTÍNEZ PARICIO**.

**KEYWORD:** Iteration, Self-similarity, Succession, Series, Limit, Fractal.

This work was carried out in the educational institute Las Americas, with a pilot group of 12 students in eleventh grade. They worked five guides with those looking for who could build an intuitive grasp on the concept of limit, by analyzing some characteristics of fractals: curve Koch, Koch island, Sierpinski triangle, Sierpinski tetrahedron and Cantor set.

The origin of this work lay in the way it teaches the subject of limits in school because in many cases are not presented in a different way from the theoretical and its concept is not clear enough. Therefore, this work want to deploy a new way of addressing this issue by using some fractals figures, because of them being able to deduct succession inherent in its construction and the process to derive algebraic characteristics as their area or volume. With this, we can approach the concept of limit seen as "the value of which are increasingly approaching the terms of succession generated by each figure."

In addition, the esthetic and view of the fractals figures allows students in awakening interest in mathematics, making it easier to work with different themes and in this particular case, the intuitive concept of limit.


* Working Grade

**Faculty of Science, Mathematics School, Mathematics Degree. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza. Mathematics PhD.

# PRESENTACION

Desde el inicio de la teoría infinitesimal, el concepto de límite ha ocupado un lugar especial en el desarrollo de las Matemáticas debido a sus importantes aplicaciones. Sin embargo, este concepto también es una de los más complejos y por ende uno de los más difíciles de asimilar.

En el colegio, por ejemplo, debido a que es uno de los últimos temas que se abordan en el grado once, no se le da la importancia requerida. Además la metodología que se aplica la mayoría de veces es solo teórica y no se brinda al estudiante la posibilidad de asimilarla de una manera más concreta o al menos más atractiva.

El objetivo que nos hemos trazado en este trabajo de grado, es inicialmente motivar a los estudiantes por el estudio de la geometría fractal y llevarlos a que reconozcan la importancia de ésta. Con ello poder desarrollar nuestro objetivo general que es elaborar, aplicar y evaluar guías para introducir el concepto de límite mediante la geometría fractal, ya que creemos que esta le podría dar una nueva posibilidad a los alumnos y profesores de entender mejor este concepto, ayudándose de las diferentes figuras fractales, en especial las que trataremos en nuestro trabajo que son *La curva de Koch, La isla de Koch, El triángulo de Sierpinski, El conjunto de Cantor y el tetraedro de Sierpinski* analizando sus características y principalmente hallando su longitud, área, y volumen.

Comúnmente, la definición de límite es presentada de la siguiente forma:

$$f(x) \to L \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$$
$$\exists \delta > 0 : 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Esta definición se llama frecuentemente "*la definición épsilon-delta del límite*" y es con la que los estudiantes recién egresados de un colegio, se van a encontrar en un curso de Cálculo uno en una universidad. Sobra decir que el grado de dificultad de esta definición es bastante alto y si se compara con la forma intuitiva que se muestra a los estudiantes de grado once de bachillerato, puede pensarse que se ha encontrado una de los causas de la dificultad que proyectan algunos estudiantes de Cálculo uno. Sin embargo, no solo la tan nombrada definición de límite genera dificultades a los estudiantes, pues razonamientos como "*a medida que el número de iteraciones incrementa el área de la figura disminuye, por lo tanto el límite es cero",* como las que se podrán observar en el análisis de las guías de este trabajo, son las que comúnmente se escuchan entre algunos estudiantes. Podría pensarse que uno de estos estudiantes, al enfrentarse con una ejercicio como $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1}$ , muy seguramente dirá que la respuesta es ***cero***

La forma en que este concepto se piensa introducir, mediante la geometría fractal, a los estudiantes partícipes de este trabajo, no tiene nada que ver con épsilones ni con deltas, ni mucho menos con épsilon – vecindades, solo se tratará de que los estudiantes entiendan el concepto intuitivo de límite como un valor hacia el cual se van "acercando los valores de una sucesión."

Por otra parte debemos resaltar que una posible ventaja adicional que se tiene trabajando con la geometría fractal es que la vistosidad y atractivo de sus figuras, así como sus muy diversas aplicaciones, podrían llamar mucho más la atención y entusiasmar tanto a los estudiantes como a los profesores de estos grados de segundaria, así como estimular su creatividad e imaginación.

Para el desarrollo de nuestro trabajo tuvimos en cuenta el articulo "FRACTALS IN HIGH SCHOOL: EXPLORING A NEW GEOMETRY" [1] ya que allí encontramos aportes muy buenos de cómo se podía llevar la geometría fractal a estudiantes de bachillerato. También debemos resaltar que el material didáctico que nos facilitaron las estudiantes de la carrera Diseño Industrial Ángela Andrea Silva e Irene Sarmiento Rojas, que hace parte de [7], fue clave para el análisis de algunas de nuestras guías.

Por último, también tendremos en cuenta algunos trabajos de grado que se han desarrollado en nuestra universidad como lo son Castro [2], Pérez [3], Acevedo [4], Estrada [5], Pico [6] y Silva [7].

# 1. MARCO TEÓRICO

El proceso de enseñanza-aprendizaje dado en el aula de clase ha sido afectado, a través de la historia, por ciertos puntos de vista llamados “teorías del aprendizaje” que, según el momento cultural, describen la forma en que se debería dar este proceso. El conductismo, el cognitivismo y el constructivismo, son algunas de las teorías que han propuesto diferentes formas en que el proceso de enseñanza aprendizaje se debe dar: “estímulo-respuesta”, “aprendizaje repetitivo y aprendizaje significativo”, “procesos mentales y la percepción”.

Esta última teoría mencionada fue la que se tuvo en cuenta en el proceso de enseñanza que se llevó a cabo durante la aplicación de las guías empleadas para alcanzar los objetivos de este proyecto.

La teoría constructivista intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conceptos y cómo sus estructuras conceptuales lo llevan a convertirse en las “gafas perceptivas” (Novack 1988) que guían sus aprendizajes.

La base de esta teoría se establece en la teoría de la percepción y en los modelos de procesamiento de la información que propone la teoría cognitiva para explicar la forma o el proceso interno en que se construye el aprendizaje.

Driver (1986) afirma que el aprendizaje constructivista enfatiza en el rol esencialmente activo del educando. Este rol activo está basado en las siguientes características de la visión constructivista:

- La importancia de los conocimientos previos, de las creencias y de las motivaciones de los alumnos.

- El establecimiento de relaciones entre los conocimientos para la construcción de mapas conceptuales y la ordenación semántica de los contenidos de memoria (construcción de redes de significado).

- La capacidad de construir significados a base de reestructurar los conocimientos que se adquieren de acuerdo con las concepciones básicas previas del sujeto.

- Los alumnos auto-aprenden dirigiendo sus capacidades a ciertos contenidos y construyendo ellos mismos el significado de esos contenidos que han de procesar.

El aprendizaje constructivista ha sido definido como un producto natural de las experiencias encontradas en los contextos o ambientes de aprendizaje en los cuales el conocimiento que ha de ser aprendido es clasificado y ordenado de una manera natural.
Fue pensando en la anterior definición que se realizaron las guías presentadas en este trabajo y con las que se pretendió alcanzar el objetivo planteado. En ellas se dan las indicaciones pertinentes para que el estudiante, paso a paso, construya un concepto de límite mediante el estudio de algunas figuras fractales.

Este aprendizaje, el aprendizaje constructivo, se produce en el aula a partir de tres supuestos:

1. la experiencia física, a partir de la cual construye los conceptos inductivamente.

2. la experiencia afectiva, que ante la realidad previa impulsa el aprendizaje.

3. los conceptos, que condicionan un planteamiento deductivo del aprendizaje.

De este modo, para que se dé el aprendizaje constructivo bajo este supuesto, metodológicamente se debe partir de conceptos familiares al alumno, se debe tender a dar un enfoque globalizador del proceso y, finalmente, del aprendizaje compartido, mediante el empleo de la discusión y el contraste en el grupo de clase.

Entre las corrientes del constructivismo encontramos el constructivismo cognitivo cuyo máximo representante es el psicólogo suizo Jean Piaget, y el constructivismo social cuyo máximo expositor es el también precursor de la neuropsicología soviética Lev Vigotsky.
La primera de las corrientes en mención considera que las estructuras del pensamiento se construyen, pues nada está dado al comienzo. Las estructuras se construyen con la interacción entre el sujeto y el objeto, y más específicamente por las acciones mismas que el sujeto ha realizado sobre el objeto, las cuales, a

través de una serie de asimilaciones y acomodaciones, se convertirán en nuevas estructuras que se integrarán a las ya existentes complejizándolas cada vez más.
Piaget denominó a su teoría “constructivismo genético” en la que explica el desarrollo de los conocimientos en el niño como un proceso de desarrollo de los mecanismos intelectuales, lo cual se da en las siguientes etapas o estadios:

| Etapa o estadio | Edad | Características |
|---|---|---|
| **1Etapa de inteligencia sensorio – motora** | 0 a 2 años aprox. | Este periodo comienza con el nacimiento, en donde los elementos iniciales son los reflejos del neonato, los cuales se van transformando en una complicada estructura de esquemas que permite que se efectúen intercambios del sujeto con la realidad. Estos mismos hacen que el niño realice una diferenciación entre el “yo” y el mundo de los objetos. |
| **2. Etapa del pensamiento preoperatorio** | 2 a 7 u 8 años aprox. | Este periodo se presenta con el surgimiento de la función simbólica en donde el niño comienza a hacer uso de pensamientos sobre hechos u objetos que no sean perceptibles en ese momento, mediante su evocación o representación a través de símbolos, como el juego de imaginación simbólica, el dibujo y, especialmente, el lenguaje. Antes de la aparición de éste la conducta es puramente |

| | | |
|---|---|---|
| | | perceptiva y motriz; después de él, en el plano mental Piaget observó los siguientes cambios: la posibilidad de un intercambio entre individuos, o sea, la socialización de la acción; una interiorización de la palabra, o sea, la aparición del pensamiento propiamente dicho. |
| **3. Etapa de operaciones concretas** | 7 a 12 años<br>aprox. | Se inicia cuando el niño se encuentra en posibilidad de utilizar intuiciones. En este periodo, las operaciones son concretas debido a que atañen directamente a objetos concretos, aún no a hipótesis, y se considera una etapa de transición entre la acción directa y las estructuras lógicas más generales que se presentan en el periodo siguiente. Aquí las operaciones nacientes son: clasificaciones, seriaciones, correspondencia de uno a uno, entre otras. |
| **4. Etapa de las operaciones formales** | 11 ó 12 a 14 ó 15 | Esta etapa se caracteriza por la elaboración de hipótesis y el razonamiento sobre las proposiciones sin tener presentes los |

objetos.

El constructivismo social en educación y teoría del aprendizaje, por su parte, es una teoría de la forma en que el ser humano aprende a la luz de la situación social y la comunidad de quien aprende. Según Vigotsky*, el espacio, brecha o diferencia entre las habilidades que ya posee el niño y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo un adulto o un par más competente se llama "**zona de desarrollo próximo**" (ZDP). Este concepto se basa en las habilidades actuales del niño y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del niño es cuando puede trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro. Sería este nivel basal lo que comúnmente es evaluado en las escuelas. El **nivel de desarrollo potencial** es el nivel de competencia que un niño puede alcanzar cuando se lo es guiado y apoyado por otra persona. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP. La idea de que un adulto significativo (o un par -como un compañero de clase-) medie entre la tarea y el niño es lo que se llama "**andamiaje**".

Estas dos corrientes del constructivismo se reflejan en el trabajo realizado en el aula de clase, pues el grupo estaba conformado por estudiantes entre los 14 y los 16 años, lo cual quiere decir que, según Piaget, se trabajó con estudiantes que se encuentran en la etapa de operaciones formales. Por lo tanto, las guías se diseñaron de tal manera que los estudiantes fueran descubriendo y construyendo el concepto. En particular, la guía número 5, se diseñó para que los estudiantes pudieran palpar las primeras iteraciones del tetraedro de Sierpinski y así estructuraran de una forma más sencilla sus propias ideas, abstracciones y formalizaciones. Sin embargo, el constructivismo social también está presente en este trabajo, pues todas las guías fueron asesoradas por nosotros y además fueron desarrolladas y evaluadas en grupo, lo cual quiere decir que se dio la zona de desarrollo proximal, teniendo como andamiaje las guías y el material didáctico usado.

Por otra parte, si bien es cierto que en el aula de clase es necesario tener en cuenta la parte psicológica y pedagógica, también es cierto que se deben tener muy claros los conceptos del tema que se va a enseñar. En este caso se trata de la matemática, y más específicamente del concepto de límite, cuya complejidad y grado de dificultad para los estudiantes de grado once en general, hizo que reflexionáramos alrededor de "*la forma como se puede lograr una buena comprensión del concepto por parte del alumno*", y que propusiéramos una forma diferente, y tal vez más sencilla, de introducir el concepto intuitivo de límite.

*Tomado de
http://educacion.idoneos.com/index.php/Teor%C3%ADas_del_aprendizaje#1_Las_teor%C3%ADas_asociacionistas

En este trabajo se propone una serie de guías en las que se usa **“la geometría fractal”** para intentar acercar a los estudiantes al concepto de límite. Para este propósito se usaron algunas de las figuras fractales como lo son *la curva de Koch, la isla de Koch, el triángulo de Sierpinski, el tetraedro de Sierpinski y el conjunto de Cantor:*

### *1.1 LA CURVA DE KOCH:*

Este es uno de las primeras y más sencillas figuras fractales que existen, y fue creada en 1904 por el matemático sueco Niels Helge Von Koch (1870 - 1924). Se forma (ver figura 1) partiendo de un segmento $L_0$ el cual se divide en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado, ubicados con una inclinación de 60°, de tal manera que, junto con dicha parte anulada, formen un triángulo equilátero. De esta forma se obtiene una figura $L_1$ (ver figura 2). A continuación se repite el proceso por cada segmento formado obteniendo así una figura $L_2$ (ver figura 3), y siguiendo este mismo proceso con cada figura formada, se obtiene una sucesión $(L_n)_{n\in N}$, cuyo límite cuando “***n***” tiende a infinito es la mencionada curva de Koch (ver figura 4).



Figura 1

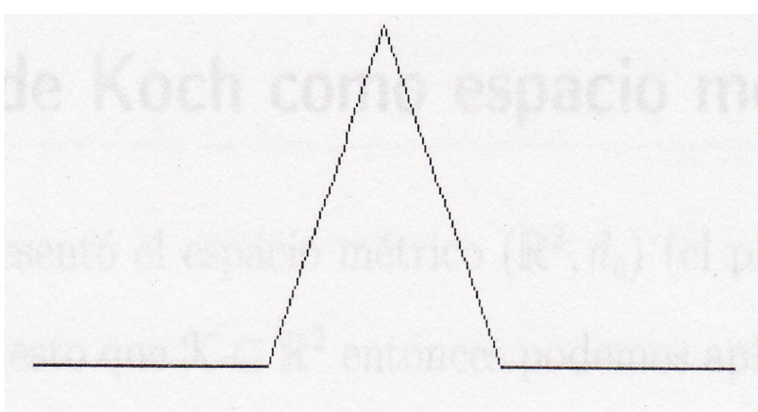


Figura 2 [1]

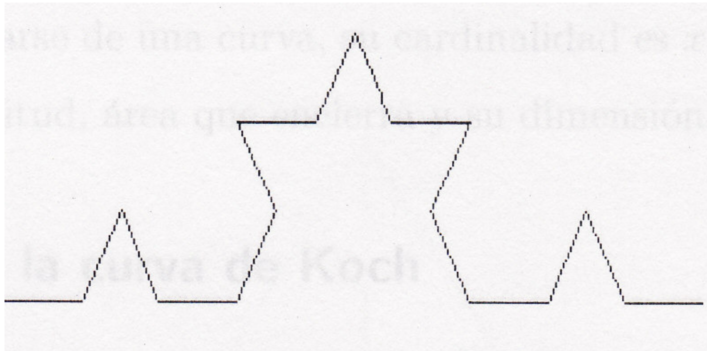


Figura 3 [2]

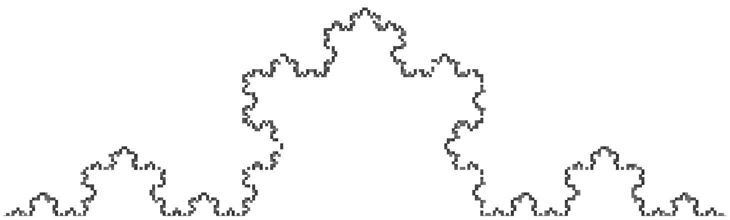


Figura 4 [3]

Para hallar la longitud de la curva, se toma un segmento de longitud $L_0$ **=** 1. Nótese que la figura $L_1$ se compone de 4 segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, es decir, tiene una longitud de $\frac{4}{3}$. La figura $L_2$ por su parte, está compuesta por 16 segmentos, ahora de longitud $\frac{1}{9}$, luego su longitud es $\frac{16}{9}$ ó $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Siguiendo con este razonamiento se produce la siguiente sucesión de longitudes: 1, $\frac{4}{3}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, … , $\left(\frac{4}{3}\right)^n$

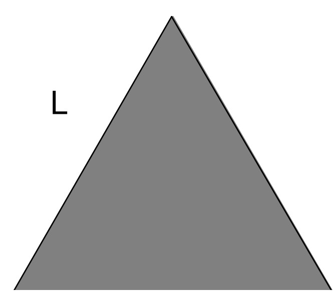
El límite, cuando ***n*** tiende a infinito, de esta sucesión es la longitud de la curva de Koch y es:

$$\underset{n\to\infty}{Lím}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = +\infty$$

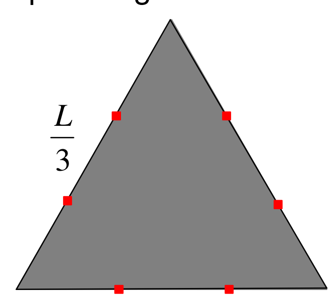
### *1.2 LA ISLA DE KOCH:*

Al igual que la curva, la isla de Koch o copo de nieve fue creada por el matemático sueco Niels Helge Von Koch (1870 - 1924). Esta figura fractal está relacionada con la curva de Koch, ya que una de las formas de construirlo es "pegando" de cierta forma tres copias de esta curva: "si se construye sobre cada una de los lados de un triángulo equilátero una curva de Koch, se obtiene lo que se conoce como la isla de Koch o copo de nieve".[1] Sin embargo, su construcción geométrica puede también hacerse de la siguiente manera:

1- Se inicia con un triángulo equilátero original de lado ***L***

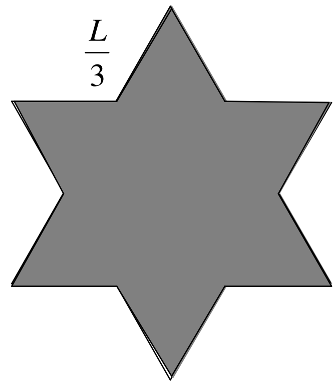



2- Cada lado se segmenta en tres partes iguales.

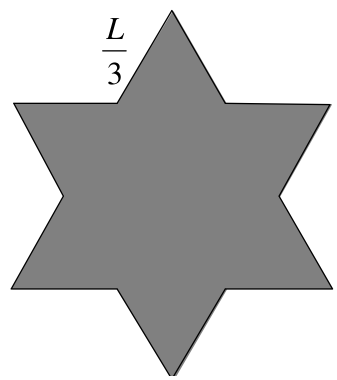



3- Tomando como base el segmento medio de cada lado, se traza sobre él un triángulo equilátero, quedando como longitud de lado $\frac{1}{3}$ del lado original. Esta operación se repite para los otros dos lados del triángulo original.

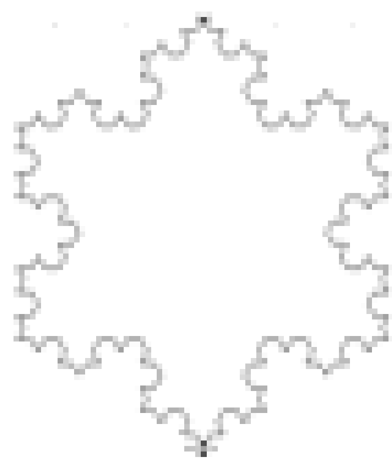
*1: Tomado de: MATAJIRA SANABRIA Tannia Loretta. ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LA CURVA DE KOCH. Universidad Industrial de Santander.2006.*




4- Se borran los segmentos del medio y se obtiene una figura con puntas triangulares.




5- A cada una de las puntas triangulares generadas se les aplican los pasos 2, 3 y 4. El fractal se genera repitiendo estos pasos sucesiva e indefinidamente a las puntas generadas.



Para hallar el área de este fractal, primero se toma un triángulo de área s **A** *(ver figura 1)*. Si divide la figura obtenida con la iteración 1 como muestra la figura 2, se puede ver que el área de cada triángulo adicionado a la figura inicial es $\frac{A}{9}$. Si este proceso se aplica a la iteración 2 aparecen 12 nuevos triángulos de área $\frac{A}{9^2}$ (ver figura 3). De la misma forma, en la tercera iteración se obtienen 48 nuevos triángulos de área $\frac{A}{9^3}$, en la cuarta iteración se obtienen 192 nuevos triángulos de área $\frac{A}{9^4}$, etc.

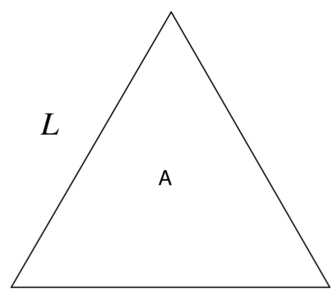



**Figura 1**

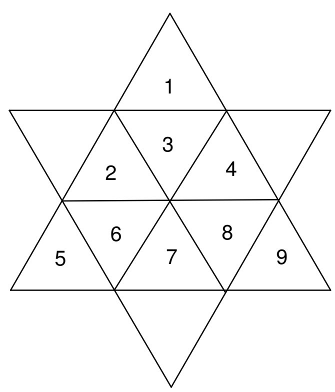



**Figura 2**

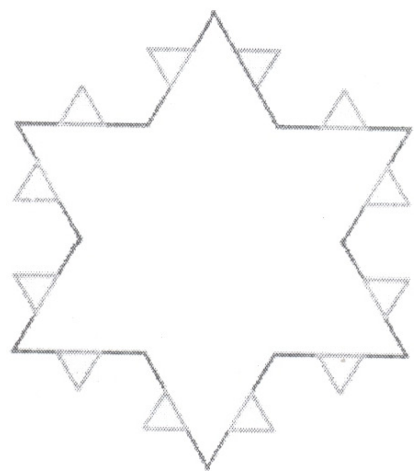


**Figura 3**

De esta manera, tomando todas las áreas parciales, se obtiene la siguiente progresión geométrica: $3*\frac{A}{9},\ 3*4*\frac{A}{9^2},\ 3*4^2*\frac{A}{9^3},...,3*4^{n-1}*\frac{A}{9^n}$ cuyo primer término y razón son $a_1 = 3*\frac{A}{9} \quad y \quad r = \frac{4}{9}$ respectivamente.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que la suma S de una progresión geométrica está dada por $S = \frac{a_1}{1-r}$ entonces se tiene que $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3*\frac{A}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{A}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}A$

Por otra parte, al sumar el área del triángulo inicial, se tiene que $\frac{3}{5}A + A = \frac{8}{5}A$

De esta manera podemos concluir que el área de la isla de Koch, en función del área del triángulo inicial, es $\frac{8}{5}A$

Cabe anotar que este resultado es sorprendente pues, dado que la longitud de la curva de Koch es infinita, el perímetro de la isla de Koch es ***infinito*** y sin embargo, el área que encierra esta portentosa figura es ***finita***.

## *1.3 EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI*

Este fractal fue creado por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1919. Para su construcción se parte (ver figura 1) de la superficie de un triángulo equilátero de lado unidad. Seguidamente (ver figura 2) se toma los puntos medios de cada lado y se construye, a partir de ellos un, triángulo equilátero invertido de lado 1/2 el cual se extrae de la figura. Luego (ver figura 3) se repite el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado 1/2 que quedan. Así que se recortan, esta vez, tres triángulos invertidos de lado 1/4. Si se repite infinitamente el proceso se obtendrá una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski. [2] (ver figura 4)

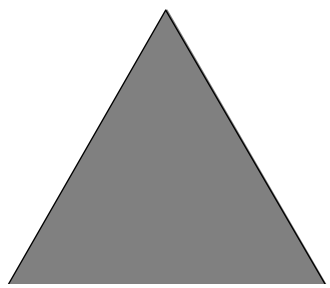


**Figura 1**

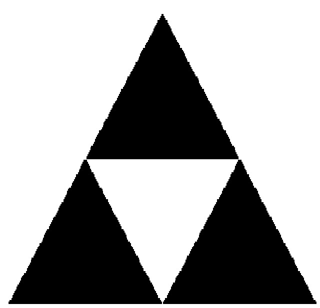


**Figura 2**

*2: Tomado de: MATAJIRA SANABRIA Tannia Loretta. ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LA CURVA DE KOCH. Universidad Industrial de Santander.2006.*

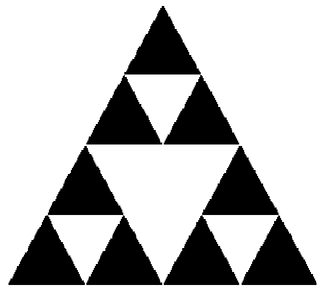


**Figura 3**

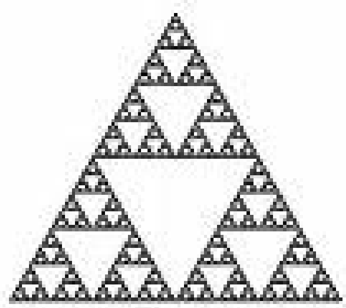


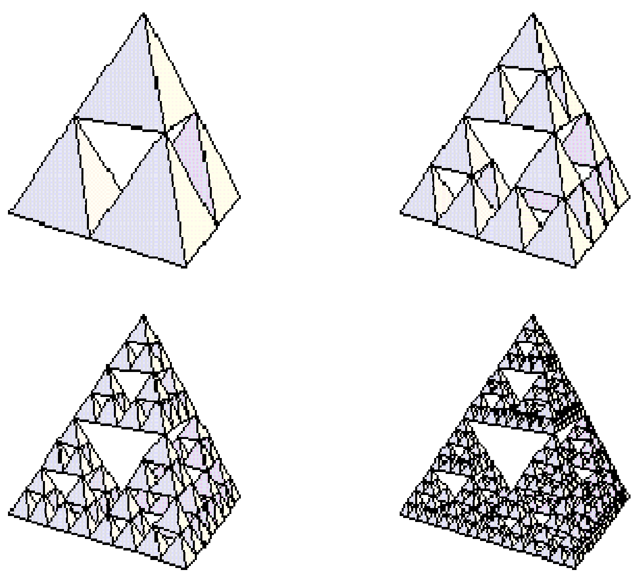
**Figura 4**

Para hallar el área de este fractal, se parte de una superficie **A** correspondiente al triángulo inicial. En la primera iteración (ver figura 2) el área sería $\frac{3}{4}A$. En la segunda, la figura tiene un área de $\frac{9}{16}A = \frac{3^2}{4^2}A$ (ver figura 3). En la tercera iteración, el área de la figura sería $\frac{27}{64}A = \frac{3^3}{4^3}A$. Por lo tanto, el área de la figura obtenida en la n-ésima iteración es $\frac{3^n}{4^n}A = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$. Para hallar el área del triángulo de Sierpinski se debe hallar el límite de esta última expresión obteniendo como resultado $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n A = 0$.

### *1.4 TETRAEDRO DE SIERPINSKI*

El tetraedro de Sierpinski es la proyección del triángulo de Sierpinski al plano tridimensional, los triángulos se convierten en tetraedros y la 3ª dimensión esconde formas que quedan tapadas por los tetraedros dispuestos en primer plano.

A continuación se muestran las 4 primeras iteraciones de este fractal:



Su construcción sigue la misma pauta que el triángulo, con lo cual la **longitud de la arista del tetraedro** en la n-ésima iteración coincidirá con la del lado del triángulo de Sierpinski, es decir, sí L=1

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

El **número de tetraedros iguales en la n-ésima iteración** vendrá expresado por:

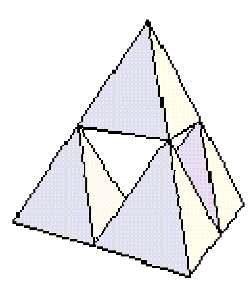
| Iteración | nº tetraedros |
|---|---|
| 0 | $1=4^0$ |
| 1 | $4=4^1$ |
| 2 | $16=4^2$ |
| 3 | $64=4^3$ |
| … | … |
| **N** | $\mathbf{4^n}$ |

La **superficie total del tetraedro en la n-ésima iteración** se calculará multiplicando el nº de tetraedros iguales por la superficie de uno de ellos, es decir

$$4^n \cdot l^2 \sqrt{3}$$

Nótese que el área del tetraedro se mantendrá siempre constante, pues las caras ocultas cubrirán exactamente los huecos externos.

Esto se puede comprobar en la 1ª iteración pues con 4 tetraedros es fácil entenderlo.



En cuanto al **volumen en la n-ésima iteración**, es evidente que se multiplica el volumen de uno por el nº de tetraedros en la n-ésima iteración, quedando

$$4^n \cdot \frac{A(base) \cdot h}{3}$$

Donde **h** (altura) en función de **l** (arista) es

$$h = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{6}} = \sqrt{\frac{12l^2 - 3l^2}{16}} = \sqrt{\frac{9l^2}{16}} = \frac{3}{4}l$$

Y **A(base)** o área de la base en función de la arista del tetraedro es

$$A(base) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Y sustituyendo se obtiene finalmente

$$4^n \cdot \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}l}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{48} l^3 \cdot 4^n$$

Lo cual, teniendo en cuenta que $L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es equivalente a $\frac{3\sqrt{3}}{48} * \frac{1}{2^n}$

Claramente, esta última expresión tiende a cero cuando n tiende a infinito, luego el volumen del Tetraedro de Sierpinski es igual a cero.

## *1.5 CONJUNTO DE CANTOR*

**El conjunto de Cantor**, llamado así por ser introducido por George Cantor en 1883, es un destacado subconjunto fractal del intervalo real [0, 1], que admite dos definiciones equivalentes:

Definición numérica: es el conjunto de todos los puntos del intervalo real [0,1] que admiten una expresión en base 3 que no utilice el dígito 1.

La definición geométrica, de carácter recursivo, que elimina en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo.

Además de una curiosidad matemática, contradice una intuición relativa al tamaño de objetos geométricos: es un conjunto de medida nula, pero no es vacío ni numerable.

Se construye de modo recursivo dando los siguientes pasos:

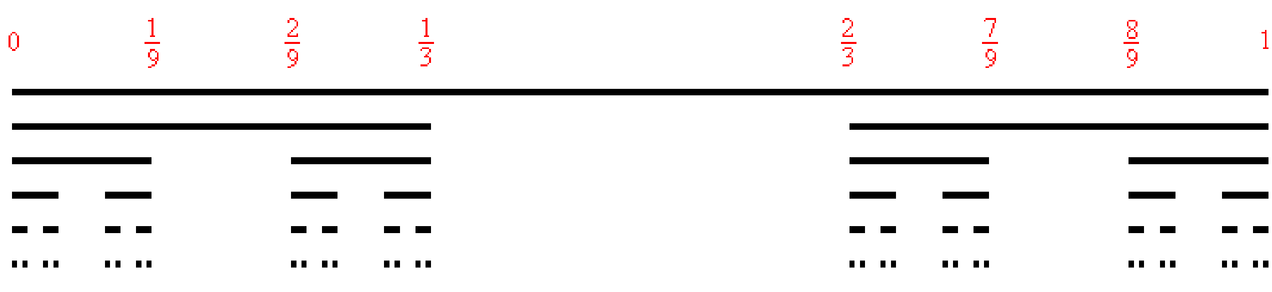
El primer paso es tomar el intervalo [0, 1].

El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto (1/3; 2/3).

El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos (1/9; 2/9) y (7/9; 8/9).

Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

La figura muestra las siete primeras etapas:



El conjunto de Cantor es el conjunto de los puntos restantes: entre ellos, es claro que los extremos de cada subintervalo pertenecen 0 y 1, 1/3 y 2/3, 1/9, 2/9, 7/9 y 8/9, 1/27..., hay una infinidad de puntos: los $1/3^n$ están todos incluidos, con n describiendo los naturales. Pero hay mucho más, por ejemplo 1/4 es un elemento del conjunto de Cantor.

Sin embargo, el conjunto es pequeño cuando se considera su longitud: el intervalo inicial [0,1] mide 1, y a cada paso, se le quita un tercio, lo que hace que su longitud se multiplique por 2/3. La sucesión geométrica $u_n = (2/3)^n$ tiende hacia cero. Por lo tanto el conjunto de Cantor es de medida nula. Esto implica, en particular, que el conjunto de Cantor no puede contener ningún intervalo de medida no nula.[4]

4: Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor

# 2. ELABORACIÓN DE LAS GUÍAS

En la creación de estas guías se tuvo en cuenta el hecho de que ya se conocía el grupo con el que se iba a desarrollar el proyecto, pues con este se había elaborado el trabajo de grado 1 de uno de nosotros. Esto fue algo ventajoso porque de antemano ya se conocían algunos aspectos de los estudiantes.

Teniendo en cuenta el propósito a desarrollar en este grupo, se trató de diseñar las guías buscando que esa idea intuitiva de límite la fuesen construyendo ellos mismos, primero creando algunos fractales y luego llevándolos al análisis de estas figuras mediante preguntas que buscaban respuestas altamente justificadas. Esto, se basó en una idea importante de los lineamientos curriculares de matemáticas que dice: *"Hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarle soluciones*"[1]

En cada prueba el número de preguntas variaba de acuerdo a la construcción del fractal y a la complejidad de éste. Para el tiempo de aplicación, se tuvo en cuenta que la guía se pudiese desarrollar en una sesión (Cada sesión constaba de dos horas). Además de esto, en los dos últimos talleres se utilizó el material didáctico creado por las estudiantes de diseño industrial (Ángela Andrea Silva e Irene Sarmiento Rojas), el cual facilitó la comprensión de los fractales que se analizaron en esta instancia: El triángulo y el tetraedro de Sierpinski. Además, esto también le permitió a los estudiantes manipular esas construcciones que ellos generaban siguiendo los pasos indicados en las guías, lo cual les facilitaba el análisis que le hacían a cada figura encontrando, de una forma más sencilla, las respuestas a cada punto propuesto.

En esta investigación educativa se debe resaltar la aplicación la teoría cognitiva de Piaget[2] cuyo objetivo es analizar procesos internos como la comprensión y la adquisición de nueva información a través de la percepción, la atención, la memoria, el razonamiento, el lenguaje, etc. El objetivo del educador según esta teoría será crear o modificar las estructuras mentales del alumno para introducir en ellas el conocimiento y proporcionar al alumno una serie de procesos que le permitan adquirir este conocimiento.

*1-Tomado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles*

*2-Tomado de http://www.monografias.com/trabajos16/teorias-piaget/teorias-piaget.shtml*

En las guías creadas y aplicadas con a los estudiantes, se encontró una clara aplicación de la teoría cognitiva ya que cada pregunta tenía como objetivo que ellos buscaran en sus procesos internos la mejor forma de adquirir esa nueva información. La precepción se presentaba en el momento de encontrar las nuevas figuras que se generaban después de cada iteración en el momento de construir cada fractal. El razonamiento se hacía más evidente cuando se les pedía deducir expresiones matemáticas a partir de una secuencia de figuras o en el momento en que se pedía realizar conclusiones a partir de tablas que ellos mismos construían.

Por otra parte se debe decir que en la teoría cognitiva de Piaget existen tres tipos de conocimiento que los estudiantes pueden poseer: ***físico, lógico- matemático y social***.

El ***conocimiento físico*** es el que pertenece a los objetos del mundo natural. La fuente de este razonamiento está en los objetos (por ejemplo la dureza de un cuerpo, el peso, la rugosidad, el sonido que produce, el sabor, la longitud, etcétera). Este conocimiento es el que adquiere el estudiante a través de la manipulación de los objetos que le rodean y que forman parte de su interacción con el medio. Ejemplo de ello, es cuando en la aplicación de una de nuestras guías, más exactamente en la guía del tetraedro de Sierpinski nuestros estudiantes gracias al material didáctico que se les facilitó pudieron palpar las figuras resultantes después de cada iteración diferenciando que ocurría entre la una y la otra ya fuese por su forma y en algún punto hasta por sus colores.

El ***conocimiento lógico-matemático*** es el que construye el estudiante al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos. Por ejemplo, los estudiantes diferenciaron entre las figuras resultantes después de cada iteración, y especialmente en las guías en las que pudieron manipular estas figuras, ya que podían ver qué partes desaparecían y qué partes aparecían. El conocimiento lógico-matemático "surge de una abstracción reflexiva", ya que este conocimiento no es observable y es el estudiante quien lo construye en su mente a través de las relaciones con las figuras, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, teniendo como particularidad que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, ya que la experiencia no proviene de las figuras analizadas sino de la forma como se profundice sobre las mismas.

El pensamiento lógico matemático comprende:

*Clasificación:* constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenencia del objeto a una clase y se incluyen en ella subclases. En conclusión las relaciones que se establecen son las semejanzas, diferencias, pertenencias (relación entre un elemento y la clase a la que pertenece) e inclusiones (relación entre una subclases y la clase de la que forma parte). La clasificación en el estudiante pasa por varias etapas:

*Seriación:* Es una operación lógica que a partir de un sistema de referencia, permite establecer relaciones comparativas entre los elementos de un conjunto, y ordenarlos según sus diferencias, ya sea en forma decreciente o creciente. Posee las siguientes propiedades:

Transitividad: Consiste en poder establecer deductivamente la relación existente entre dos elementos que no han sido comparadas efectivamente a partir de otras relaciones que si han sido establecidas perceptivamente.

Reversibilidad: Es la posibilidad de concebir simultáneamente dos relaciones inversas, es decir, considerar a cada elemento como mayor que los siguientes y menor que los anteriores.

El ***conocimiento social***, es un conocimiento arbitrario, basado en el consenso social. Es el conocimiento que adquiere el estudiante al relacionarse con otros estudiantes o con el docente en su relación estudiante-estudiante y estudiante-docente. Este conocimiento se logra al fomentar la interacción grupal.

Se puede concluir que a medida que los estudiantes tenían contacto con las figuras de forma manual (conocimiento físico) y compartían sus ideas con sus demás compañeros (conocimiento social), mejor era la estructuración del conocimiento lógico-matemático.

Ya teniendo bien clara la forma como se crearon las guías, a continuación se hará el análisis de cada una de ellas haciendo énfasis en lo que se buscaba en cada punto.

## GUÍA CERO

Esta guía que se aplicó en la Institución educativa Las Américas al grupo de estudiantes del grado once con el cual se estaba trabajando, fue una guía introductoria con la que se quería que ellos conocieran un poco más sobre lo que es el mundo de los fractales, teniendo en cuenta que ésto sería de vital importancia en el desarrollo de las siguientes guías. Por ello a esta guía se llamó la guía Cero[3] pues no se contaría como una de las cinco guías que son nombradas en el título del trabajo de investigación.

En el primer punto de esta guía se les pedía a los estudiantes dibujar un árbol con el objetivo de que después de conocer un poco más acerca de los fractales pudiesen buscar características de estos en ese dibujo.

El segundo punto estaba ligado a un video[4] que se les proyectó a cerca de la geometría fractal. Consecuente a esto se generaron dos preguntas:

1. ¿Qué es una iteración?
2. ¿Qué entiende por autosemejanza?

Con estas dos preguntas se buscaba que los alumnos tuvieran claros estos dos conceptos de la geometría fractal ya que en la construcción de cada una de los fractales que se propondría en las siguientes guías, la iteración y la autosemejanza serian conceptos claves para el buen desarrollo de estas.

Para la última parte de esta guía Cero se les pedía que, teniendo en cuenta lo que ya habían visto en el video, además de los conceptos anteriormente analizados, dibujaran en un recuadro un nuevo árbol, y en otro crearan un fractal. Lo que se quería alcanzar en este último punto era que el nuevo árbol lo pudiesen comparar con el dibujado en la primera parte de la guía, encontrando diferencias evidentes que solo la geometría fractal puede explicar. En el otro recuadro la intensión era que los estudiantes utilizaran los conceptos de iteración y auto semejanza en el momento de crear ese fractal.

3-Anexo 1. Contiene el Formato de la guía Cero.

4- Video creado por Antonio Pérez. Para más información consultar http://www.taringa.net/posts/downloads/118152/Ducumetal-Matematico.html

**GUÍA DE TRABAJO # 1**

En esta guía[5] el objetivo principal era que mediante la construcción del fractal conocido como la curva de Koch los estudiantes pudiesen deducir conclusiones a partir de cuestionamientos acerca de las características de esta figura fractal queriendo llevarlos hacia la idea intuitiva de límite.

En la primera parte de la guía se les daba una serie de indicaciones para la construcción de la Curva de Koch, separando los pasos para poder después analizar cada uno de ellos y compararlos entre sí.

En la segunda parte se les pedía que analizaran el resultado de las figuras que se generaban en cada uno de los pasos de la primera. La primera pregunta decía:

1. ¿Cuántas copias semejantes a la figura resultante en el paso tres están contenidas en la figura que se genera en el paso cuatro?

Con esta pregunta se buscaba que aplicaran el concepto de auto semejanza ya que la figura del paso tres se podía ver contenida en la figura del paso cuatro.

Para la siguiente pregunta se les pedía que calcularan la medida de las figuras resultantes teniendo en cuenta una longitud inicial definida antes de empezar las construcciones. El objetivo de este punto era buscar que los estudiantes notaran el aumento de la medida de la figura después de cada iteración.

Los dos siguientes puntos de la segunda parte de esta guía estaban bastante relacionados ya que en uno de ellos los estudiantes debían calcular una nueva figura siguiendo los pasos dados en el primer punto lo cual les generaba una aproximación más clara de lo que es la curva de Koch, solo que en este caso por ser el número de iteraciones un número finito, aún se podía calcular tanto la longitud de la curva como el número de copias contenidas en ella teniendo en cuenta la figura inicial.

En un nuevo punto debían construir una tabla en la que relacionaran el número de iteraciones con la longitud de la curva. Con esto, se quería que encontraran una pequeña relación entre el valor de la longitud de la curva en cada una de las iteraciones.

5-Anexo 2. Contiene el Formato de la guía 1.

La siguiente pregunta era:

¿Hasta dónde puedes hacerlo?

Con esta pregunta se pretendía que el estudiante observara la tabla que había construido y notara que, en teoría, no había ninguna limitación para continuar aplicando iteraciones y encontrando longitudes, y de esta manera llegaran intuitivamente lo que conocemos como “tiende a infinito”.

La última pregunta de esta guía era la siguiente:

¿Cuál sería la longitud de la figura final?

El objetivo de esta pregunta era llevar a los estudiantes a que, teniendo en cuenta la anterior pregunta y además la tabla construida, dedujeran una expresión para calcular la longitud de la figura final. Pues se consideró que el estudiante estaba en capacidad de buscar dicha expresión.

## GUÍA DE TRABAJO # 2

En esta guía[6] el objetivo era que mediante la construcción del fractal conocido como la isla de Koch, los estudiantes pudiesen hacer una relación entre el perímetro de la figura y el valor de su área.

Antes de aplicar esta guía se realizó una introducción hacia las series y las sucesiones, teniendo en cuenta que el objetivo principal era propiciar las condiciones necesarias para que el estudiante calculara el área de la Isla de Koch y la viera como el valor de la serie respectiva, por ello se vio la necesidad de utilizar una sesión completa para dejar claros estos dos conceptos.

Después de esto se procedió a aplicar formalmente la guía. En el primer punto se les daban las instrucciones para la construcción de la Isla de Koch. Para esto se partía de un triangulo equilátero al que luego se le dividían cada uno de sus lados en tres partes iguales de las cuales se retiraba el fragmento central de cada lado. Por último se reemplazaba cada uno de estos fragmentos con dos segmentos de la misma medida de los anteriores, dispuestos con un ángulo de 60°. Este proceso lo debían hacer los estudiantes, en repetidas ocasiones, con los nuevos triángulos obtenidos, de tal manera que al realizar cada iteración la figura obtenida se semejara más a la *isla de Koch.*

En la segunda parte de la guía se les pedía que encontraran los valores del perímetro y del área después de cada iteración, y que los consignaran en una tabla, buscando que vieran que el perímetro de esta figura “tiende a infinito” como en la curva de Koch, y que observaran también que este perímetro encierra un área finita lo cual, tal vez, se podría ver como algo contradictorio pero que analizado más profundamente se podía encontrar una buena justificación para esta paradoja.

En un nuevo punto se les pedía que se cuestionaran acerca de esa área que aparecía. ¿Que sucedía con ella?, si aumentaba o si disminuía a medida que pasaban las iteraciones; y por último que dedujeran una expresión que diera el valor del área en la n-ésima iteración.

6-Anexo 3. Contiene el Formato de la guía 2.

## GUÍA DE TRABAJO #3

En esta guía[7] el principal objetivo estaba orientado hacia el razonamiento que los estudiantes pudiesen hacer acerca del área del fractal conocido como el Triángulo de Sierpinski. Este razonamiento sería el que los llevaría, teniendo en cuenta que ya se habían trabajado dos guías, a una idea mucho más clara del concepto de límite.

En el primer punto les pedíamos que trabajaran sobre dos triángulos equiláteros que ya estaban dibujados previamente en las guías. Primero debían encontrar los puntos medios de los lados de cada triángulo y luego unirlos, generando cuatro triángulos dentro del triángulo inicial. Después se les pedía que “retiraran” (cuando se utilizaba la palabra “retira” se hacía referencia a un pedazo de área que le debían quitar al triángulo en cuestión) el triángulo del centro de la figura con lo cual solo quedaban tres triángulos dentro de la figura inicial. Posteriormente se les pedía que repitieran los anteriores pasos en el segundo triángulo generando nueve triángulos pequeños sobre la figura que resultaba después de aplicar los pasos anteriormente mencionados. De esos nueve triángulos ellos debían retirar tres, uno en cada triángulo mediano.

El segundo punto pedía responder una serie de preguntas y justificar cada una de las respuestas dadas. La primera de ellas pedía que describiera la iteración que se estaba aplicando sobre el triángulo inicial. La segunda de ellas les decía que tomaran como área inicial del triángulo un valor X, y a partir de ella encontraran el valor del área de cada uno de los triángulos que se generaban después de la primera iteración. Posteriormente se pedía calcular el área de la figura que se generaba después de la primera iteración. Luego se tomaba la segunda figura, ya que esta presentaba una segunda iteración, y nuevamente se pedía calcular el área de cada uno de los triángulos pequeños que se generaban; y por último el área total de la figura que resultaba en esta segunda iteración. En un nuevo punto de esta segunda parte se buscaba que construyeran una tabla en la que relacionaran el número de iteraciones con el área final de la figura que resultaba. También les se les solicitaba que dedujeran cuál era la sucesión de términos que daban el área de cada una de esas figuras y además que buscaran cómo podían deducir una expresión que les diera el resultado del área sin importar en cuál iteración se encuentre.

7-Anexo 4. Contiene el Formato de la guía 3.

Por último, teniendo en cuenta esta sucesión que habían construido y además que la figura ayudaba a deducir cuál sería el área en la n-ésima iteración, se les pidió encontrar el límite de esa sucesión buscando que dedujeran que ese límite tendía a cero.

## GUÍA DE TRABAJO # 4

En esta guía[8] el objetivo estaba orientado a buscar que los estudiantes hallaran la longitud del Conjunto de Cantor y lo vieran como el límite de la respectiva sucesión.

Teniendo en cuenta que en las guías anteriores la construcción del fractal, aunque no dejaba de ser importante, ocupaba bastante tiempo del que se tenía presupuestado para la aplicación del taller, en esta guía se les dio ya el fractal construido para que sobre él empezaran a razonar y sacaran sus conclusiones. Lo primero que se les pidió fue describir la iteración que presentaba este fractal. Con ello se quiso invertir el proceso que hasta ese momento se había hecho, en el que se les daban las indicaciones y ellos construían las figuras; en esta ocasión les dábamos el fractal y ellos debían describir el proceso que se debió dar para obtenerlo.

En una segunda parte se le daba un valor definido a la longitud inicia y se les pedía calcular la longitud que se generaba después de cada una de las iteraciones. Nuevamente, al igual que en las guías anteriores, el objetivo se veía encaminado a que encontraran una secuencia en cada uno de esos valores.

Posteriormente se requirió una tabla en la cual ubicaran estos datos. La importancia de estas tablas que se encuentran tanto en las guías anteriores como en esta, radica en que reconocieran más fácilmente la sucesión resultante de los valores de la longitud de la figura.

Por último se les preguntó lo siguiente:

¿Qué puedes concluir sobre el límite?

En esta pregunta el objetivo estaba orientado a que el estudiante ya tuviera mucho más claro el concepto de límite y generara una deducción bastante clara acerca del límite de la sucesión que había construido en el punto anterior.

8-Anexo 5. Contiene el Formato de la guía 4.

**GUÍA DE TRABAJO # 5**

En el momento de la realización de esta guía el objetivo principal era buscar la mejor forma para que los estudiantes hallaran el volumen del Tetraedro de Sierpinski y lo vieran como el límite de la respectiva sucesión.

Esta guía[9], teniendo en cuenta que era la última que se aplicaría, debía ser lo más clara posible buscando que cada uno de los estudiantes ya pudiesen tener una noción de lo que es el concepto de límite de una sucesión. Por ello se decidió utilizar un material didáctico creado por unas estudiantes de Diseño Industrial el cual permitía manipular desde el tetraedro inicial hasta la figura resultante después de cuatro iteraciones. Esto fue una herramienta muy valiosa ya que permitió desarrollar mucho más formalmente la Teoría Cognitiva de Piaget, pues como se mencionó anteriormente, en esta teoría existen tres tipos de conocimiento los cuales se resaltaban en el desarrollo de esta guía.

En el primer punto de esta guía se les decía que tuvieran en cuenta que el tetraedro inicial “que tenían en sus manos” tenía como longitud de arista un valor definido.

La primera pregunta que se realizó fue:¿Cuál es el área superficial de ese tetraedro?

En esta pregunta se pretendía que tuviesen como referencia un valor de esta área superficial el cual podrían comparar con los valores de esta misma área que resulta después de cada iteración. Por ello en los tres siguientes puntos se les pedía calcular el área tanto del tetraedro pequeño que se generaba en cada iteración, como el área final de la figura. Además esos datos debían organizarlos en una tabla en la que estuviera la iteración, el valor del área de ese tetraedro pequeño y el valor del área total de la figura resultante.

En un nuevo punto se empezó a trabajar el volumen del tetraedro. Como el objetivo no era la deducción de la formula que diera este volumen, sino el límite de la sucesión que se generaba con el volumen de cada una de las figuras que resultaban después de las iteraciones, se les dio el valor del volumen de la figura inicial. Teniendo en cuenta este valor, se les pidió que encontraran el volumen de cada uno de los tetraedros pequeños que se generaban después de la primera iteración y posteriormente hallaran el volumen de la figura completa resultante de

esta iteración.
9-Anexo 6. Contiene el Formato de la guía 5.

Una cosa que muy importante es que, en este caso, en el momento de aplicarle las iteraciones al tetraedro inicial y las figuras subsiguientes siempre la parte que se retiraba era un octaedro por ello se preguntó por el volumen de ese octaedro que desaparecía en esa primera iteración. El objetivo de esta pregunta era que al final el estudiante, teniendo en cuenta que en cada iteración retiraba una parte más de cada figura resultante, se diera cuenta que estos octaedros finalmente sumarían con sus volúmenes el valor del volumen del tetraedro inicial.

Luego se utilizó de nuevo la construcción de una tabla como la recopilación de cada uno de los pasos realizados en los puntos anteriores, ya que gracias a ella era un poco más fácil de ver la forma cómo aumentaba el número de tetraedros similares al original y a su vez cómo disminuía el valor del volumen de la figura resultante comparado con el de la figura inicial.

Por último se realizaron tres preguntas que son:

¿Qué pasará en la n-ésima iteración?

¿A cuánto equivale el volumen?

¿Cuál es el volumen del Tetraedro o Pirámide de Sierpinski?

Con estas preguntas se quería afianzar el concepto que ellos habían adquirido acerca de lo que es el límite de una serie, ya que para poder responderlas, debían hallar el límite de la serie que se genera al hallar el volumen de cada tetraedro formado a medida que se hacen las iteraciones.

# 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis de los resultados que se obtuvieron en la aplicación de estas cinco guías, se tendrá en cuenta la forma como razonaron los estudiantes frente a cada una de las preguntas. Las diferentes respuestas que se presentaron, los errores que se cometieron y en general el camino que cada estudiante tomó para comprender de mejor forma cada actividad propuesta. Cabe resaltar que no se buscan resultados perfectos, por el contrario es muy importante analizar esas diferentes formas con las que un estudiante aborda los nuevos conocimientos y cómo razona para concluir acerca de ellos.

En cada una de las guías la forma en la que se lleva al estudiante a abordarla, va de acuerdo al nivel de conocimiento que ha adquirido hasta ese punto con relación a nuestro objetivo principal. Esto significa que desde la Guía cero, el objetivo ha sido inculcar nuevos conocimientos, por lo tanto cada una de las preguntas que buscan que el estudiante razone a cerca de figuras o situaciones, tendrán que ir ligadas al conocimiento que él haya construido hasta ese momento.

Es notorio que muchos estudiantes partícipes de este trabajo, tal vez están más capacitados que otros de sus compañeros, por ello se tomarán apartes de las guías tanto de los estudiantes que hicieron trabajos de una forma acertada, como los que de alguna manera abordaron las situaciones y las preguntas de una forma poco correcta, queriendo con esto no solo mostrar las cosas que se pueden logran con la metodología que se está aplicando sino también los errores en los cuales se puede caer en el momento de proponerle una situación a los estudiantes.

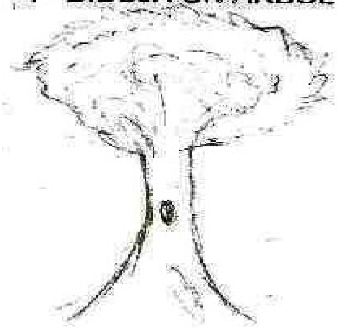
## 3.1 ANÁLISIS DE LA GUÍA 0

Como se dijo anteriormente, esta guía no la se tenía presente el proyecto pero se decidió aplicar teniendo en cuenta uno de los objetivos específicos que decía acerca de la motivación de los estudiantes por el estudio de la geometría fractal y la matemática. Por ello se hizo un pequeño análisis ya que los resultados obtenidos fueron bastante buenos.

En la primera parte de la guía se pedía dibujar un árbol, una tarea fácil con el objetivo de hacer una comparación más adelante con esa figura. En la segunda actividad se pedía responder dos preguntas referentes a un video proyectado llamado <u>*Fractales, la geometría del caos*</u> Lo realizado en esta primera parte por los estudiantes ***Ciro Dubán Quintero y Mildreth Mogollón*** fue:

En estas respuestas se ve que ya tienen una pequeña idea de lo que es una iteración y de lo que es la autosemejanza ya que estos dos términos son supremamente importantes para el desarrollo de nuestras actividades.

**1- DIBUJA UN ÁRBOL**



**2- Según lo que viste en la película**

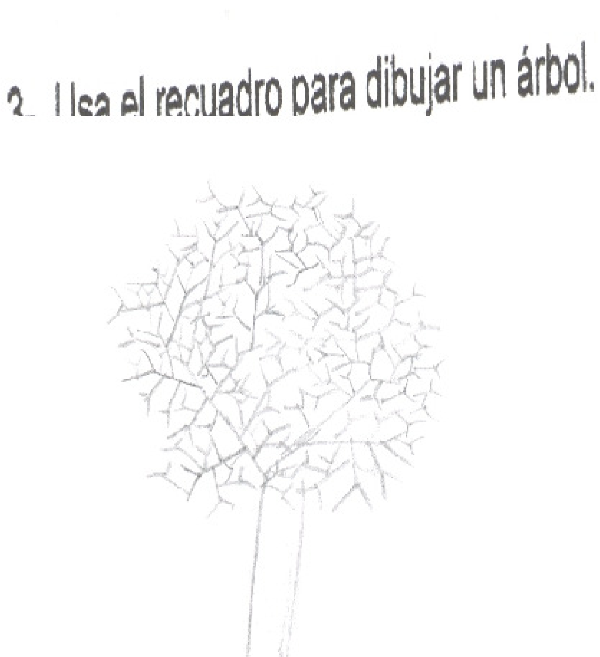
**a. ¿Qué es una iteración?**

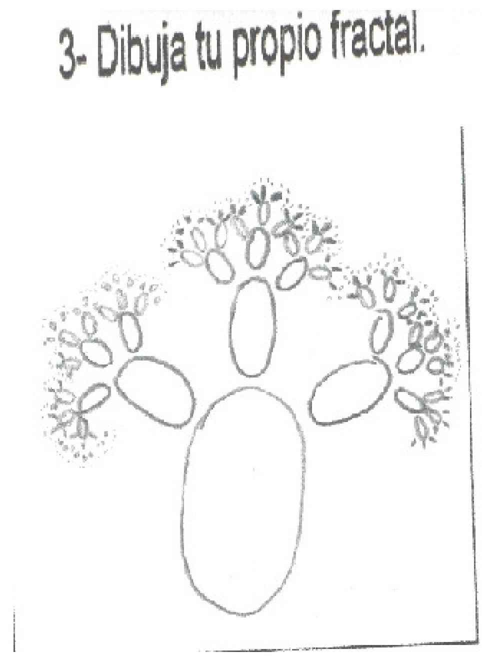
• Canbio realizado a la figura original, en la cual se transforma la figura con la longitud inicial el perimetro tiende hacer infinito, pero el área la podemos calcular.

**b. ¿Qué entiendes por autosemejanza?**

• Es la Semejanza o similitud que tiene un objeto de su forma original.

El una tercera parte de esta guía tenían que dibujar otro árbol pero ya en este caso aplicando los conceptos de autosimilitud e iteración y además debían crear su propio fractal. Con estos mismos estudiantes, este fue el resultado:



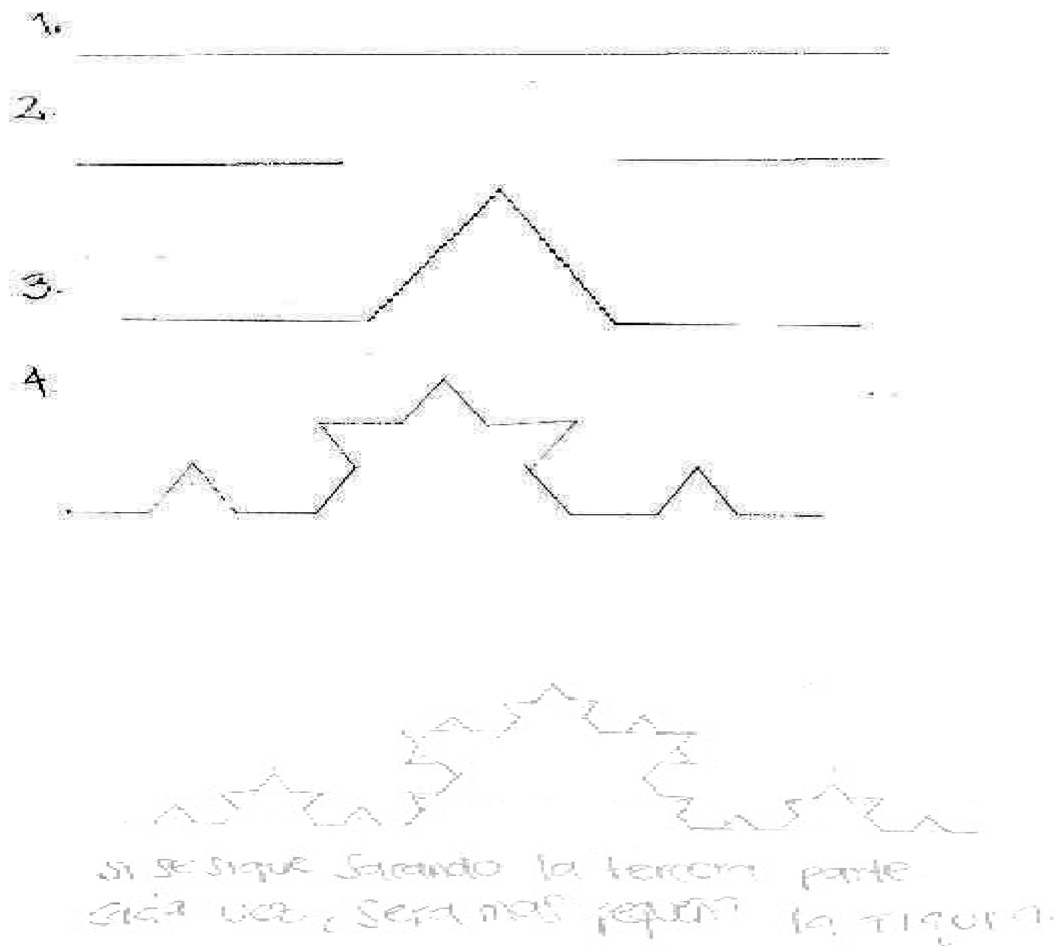




Con esto pudimos ver que el video ayudó mucho a tener una idea acerca de la geometría fractal y de saber aplicarla ya que si comparamos los dos dibujos de los arboles, nos daremos cuenta que el segundo se asemeja mucho más a la realidad. Además el fractal que construyeron es muy interesante ya que deja ver muy claro el concepto de auto similitud.

## 3.2 ANÁLISIS DE LA GUÍA DE TRABAJO # 1

Como se dijo anteriormente la primera parte de esta guía consistía en construir el fractal Curva de Koch. Para esta construcción se dividió en cuatro partes el trabajo. Cada una de ellas contenía la parte que se generaba a partir de la construcción original dependiendo de la instrucción dada.

Esta es la construcción de la estudiante ***Liliana Navas***




Sobre estas figuras Liliana supo responder los cuestionamientos que se le hicieron y en el momento que se pedía llenar la tabla ella se limitó a calcular el valor de la longitud pero sin relacionar las figuras resultantes entre una y otra iteración. La tabla mencionada es la siguiente:

| Figura | # de iteraciones | longitud de la curva |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 |
| 2 | 1 | 12 |
| 3 | 2 | 16 |
| 4 | 3 | 21.33 |
| 5 | 4 | 28.4 |
| 6 | 5 | 37.92 |
| 7 | 6 | 50.56 |
| 8 | 7 | 67.41 |
| 9 | 8 | 89.88 |
| 10 | 9 | 386.4 |

En la última parte de esta guía Liliana pudo analizar y concluir que la longitud de la curva crecería cada vez más, pero por alguna razón al preguntarle acerca de la longitud de la figura final respondió lo siguiente:

¿hasta donde puedes hacerlo? infinito

¿Cuál seria la longitud de la figura final?
la longitud seria $9\left(\frac{4}{3}\right)^n$, un limite, final

En esta respuesta aunque la formula que ella escribe para hallar la longitud final es correcta aún no tiene muy claro porque precisamente esa sería la longitud final ya que no especifica que esa “n” por ser el número de iteraciones está ligada a la pregunta anterior, a la cual ella respondió que era posible continuar hasta infinito.

En otra estudiante de nombre ***Mildred Mogollón Villamizar*** se encontró algo muy interesante al momento de construir la tabla ya que la longitud de la curva a partir de la quinta iteración ya no la expresa como un número sino como el producto entre la longitud inicial de la curva y la razón a la cual aumenta elevado al número de iteraciones. La tabla fue la siguiente:

| Figura | # de iteraciones | Longitud de la curva |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 |
| 2 | 1 | 12 |
| 3 | 2 | 16 |
| 4 | 3 | 21,33 |
| 5 | 4 | 28,44 |
| 6 | 5 | $9\left(\frac{4}{3}\right)^5$ |
| 7 | 6 | $9\left(\frac{4}{3}\right)^6$ |
| 8 | 7 | $9\left(\frac{4}{3}\right)^7$ |
| 9 | 8 | $9\left(\frac{4}{3}\right)^8$ |
| 10 | 9 | $9\left(\frac{4}{3}\right)^9$ |

Una de las guías para resaltar fue la de ***Karen Yurley Barrios Basto*** ya que supo razonar y abordar cada una de las preguntas. Las construcciones fueron muy bien realizadas lo cual es una muy buena herramienta para el razonamiento que se debe hacer. Además la tabla que construyó, también permite ver una relación directa que ayuda a calcular la longitud de la curva sin importar en que iteración esté. La conclusión o mejor la respuesta que da a la última pregunta permite ver que desde este momento ***Karen*** empieza a construir una idea acerca de lo que puede ser el límite.

La tabla y la conclusión de ***Karen*** fueron:

| Figura | # de iteraciones | Longitud de la curva |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 |
| 2 | 1 | 12 |
| 3 | 2 | 16 |
| 4 | 3 | 21,12 |
| 5 | 4 | 28,44 |
| 6 | 5 | $9(4/3)^5$ |
| 7 | 6 | $9(4/3)^6$ |
| 8 | 7 | $9(4/3)^7$ |
| 9 | 8 | $9(4/3)^8$ |
| 10 | 9 | $9(4/3)^9$ |

1/3

g. ¿hasta donde puedes hacerlo? $\infty$
"INFINITO"

h. ¿Cuál seria la longitud de la figura final?
PARA HALLAR LA FIGORA FINAL
LO CONCLUIRIAMOS
CON $9(\frac{4}{3})^n$ PARA VER EL
LÍMITE DE LA LONGITOD O EL
MÁXIMO

En general muchos de los estudiantes que realizaron esta guía observaron de una forma correcta la relación entre la figura resultante en el paso tres y cada una de las figuras que se generaban de ahí en adelante después de cada iteración; pero en el momento de concluir acerca de la longitud que tenía cada una de ellas, aunque por alguna razón intentaban deducirla, lo hacían de una forma algo incompleta, ya que no especificaban que representaba cada cosa que contenía esa expresión final con la cual ellos decían poder calcular la longitud de la figura final.

### 3.3 ANÁLISIS DE LA GUÍA DE TRABAJO # 2

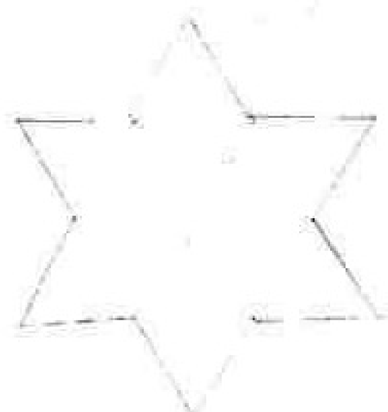
En esta segunda guía se tomó la decisión de dividirla en dos partes. La primera parte les indicaba a los estudiantes los pasos que debían seguir para construir unas figuras, de las cuales resultaría al final el fractal llamado la Isla de Koch. Cuando ya tenían algunas construcciones hechas venían unos cuestionamientos y además pedíamos que dieran algunas ideas a partir de ellas. En estas actividades el objetivo particular que se tenía era que ellos pudiesen comparar la figura que resultaba con la Curva de Koch que habían visto en la guía anterior, por ello además de pedirles que compararan el valor de los perímetros en las figuras que resultaban en el primer punto también debian construir una tabla en la que pudiesen relacionar esos datos. Estos resultados fueron muy positivos ya que las comparaciones fueron acertadas; además los datos ubicados en la tabla permitían ver el aumento en el perímetro.

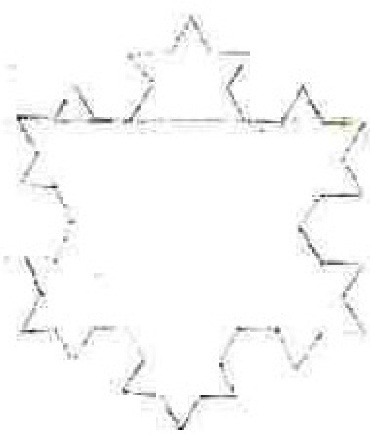
***Karen Yurley Barrios*** realizó unas deducciones a partir de su construcción (las figuras que se generaban) y con ello pudo responder los cuestionamientos que la guía le formulaba. A continuación veremos parte del desarrollo de la primera parte de la guía dos.

| Nº FIGURA | Nº ITERACCIONES | PERIMETRO cm |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 27 |
| 2 | 1 | 36 |
| 3 | 2 | 48 |
| 4 | 3 | 64 |
| 5 | 4 | 85 33 |
| 6 | 5 | 113,77 |
| 7 | 6 | 151,69. |

Aunque en este caso ***Karen*** no tuvo en cuenta o por lo menos no pudo notar la similitud con los razonamientos en la guía anterior, ya que en este caso la Isla de Koch se compone de tres curvas de Koch de las cuales se derivan muchas más por el proceso que se conoce como autosimilitud, los razonamientos realizados por lo menos dan el valor que se pedía y permite ver que el valor del perímetro aumente cada vez más.

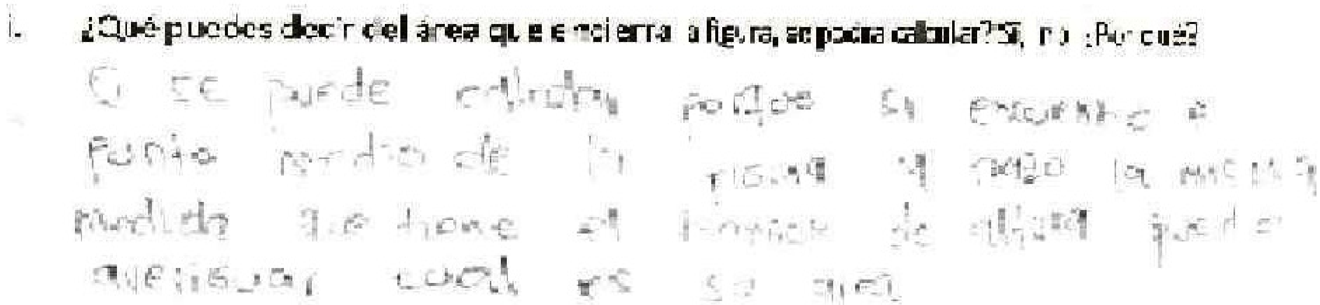
La estudiante ***Paola Ramírez*** desarrollo muy bien la guía ya que en la tabla que construyó se veía claramente que en el momento de calcular el perímetro la solución era muy similar a la propuesta en la Curva de Koch. La tabla y algunas de las construcciones las podremos ver a continuación:





| FIGURA | # ITERACIÓN | PERÍMETRO |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 27cm |
| 2 | 1 | 36cm |
| 3 | 2 | 48cm |
| 4 | 3 | $27(\frac{4}{3})^3=64$ cm |
| 5 | 4 | $27(\frac{4}{3})^4$ |
| 6 | 5 | $27(\frac{4}{3})^5$ |

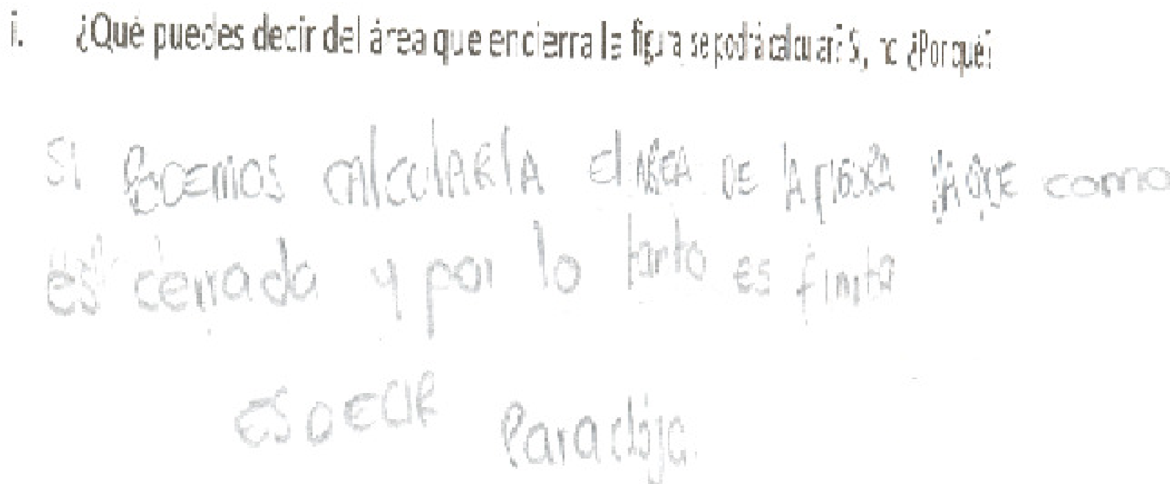
Ya terminada esta idea intuitiva que se quría que nuestros estudiantes tuvieran, se pasó a analizar el área que encerraba a nuestra figura particular. Para ello, se


i. ¿Qué puedes decir del área que encierra la figura, se podría calcular? Si, no ¿Por qué?

Si se puede calcular porque si encontramos el punto medio de la figura y luego la misma medida que tiene el tamaño de altura puede averiguar cual es su área

buscó que ellos se cuestionaran acerca de el por qué una figura con perímetro infinito tenía un área definida en los reales. Lo realizado por ***Paola*** fue lo siguiente:

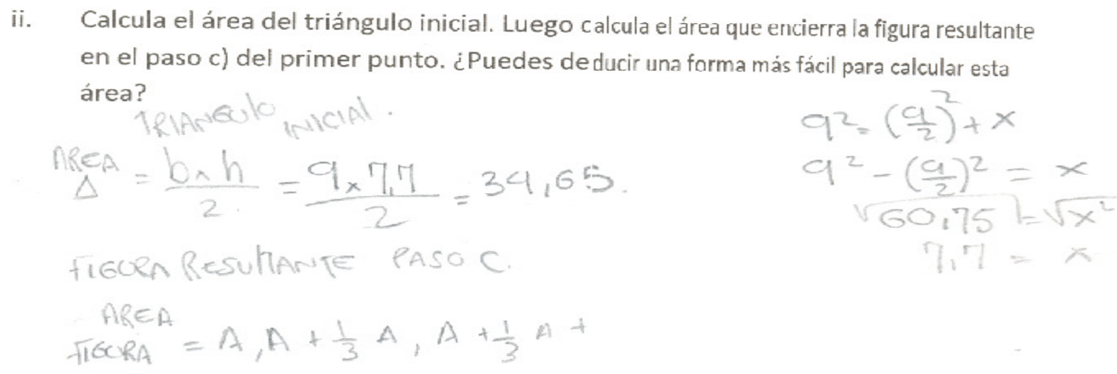
Y lo que hizo ***Karen*** fue:


i. ¿Qué puedes decir del área que encierra la figura se podría calcular? Si, no ¿Por qué?

Si podemos calcularla el área de la figura porque como es cerrado y por lo tanto es finita

es decir paradoja.

Comparando estos resultados se observa que ***Paola*** pudo ver que sí se podía calcular el área de la figura resultante, pero la forma como lo hacía no era muy clara mientras que en el caso de ***Karen***, su respuesta nos permitía ver que tenía la idea mucho menos confusa. Para Karen el hecho que el área se pudiese calcular teniendo en cuenta que el perímetro era infinito, lo llamaba “paradoja”. En le momento de calcular dicha área, ***Karen*** realizó lo siguiente:



ii. Calcula el área del triángulo inicial. Luego calcula el área que encierra la figura resultante en el paso c) del primer punto. ¿Puedes deducir una forma más fácil para calcular esta área?

TRIANGULO INICIAL.

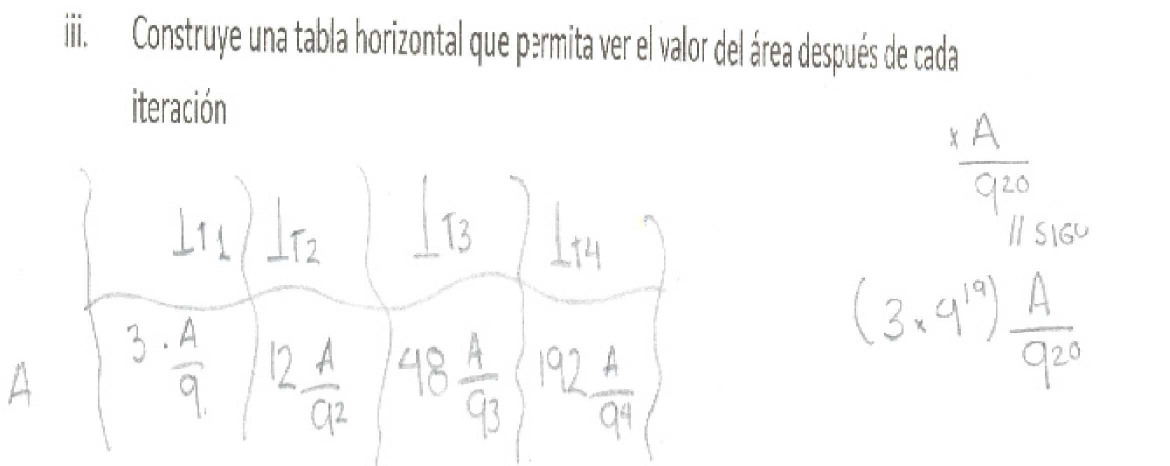
$$\text{AREA}_{\triangle} = \frac{b \times h}{2} = \frac{9 \times 7{,}7}{2} = 34{,}65.$$

$$9^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x$$
$$9^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = x$$
$$\sqrt{60{,}75} = \sqrt{x^2}$$
$$7{,}7 = x$$

FIGURA RESULTANTE PASO C.

$$\text{AREA FIGURA} = A,\ A + \frac{1}{3}A,\ A + \frac{1}{3}A +$$

Esta respuesta nos permite ver que el análisis que le realizó a la figura, fue abordado de una forma correcta ya que las deducciones permiten ver cuanto va a ser el área en las figuras que aparecerán después de la primera iteración. Además de esto, en el momento de construir la tabla que se les pedía que hicieran para ver el área después de cada iteración, ***Karen*** dio parte del objetivo final de esta guía, ya que dedujo una expresión que permitía calcular el área de más que aparecía en la figura después de cada iteración, pero le faltaba ver que esos términos que aparecían eran cada vez más pequeños mientras que el área aumentaba. La tabla fue la siguiente:



iii. Construye una tabla horizontal que permita ver el valor del área después de cada iteración

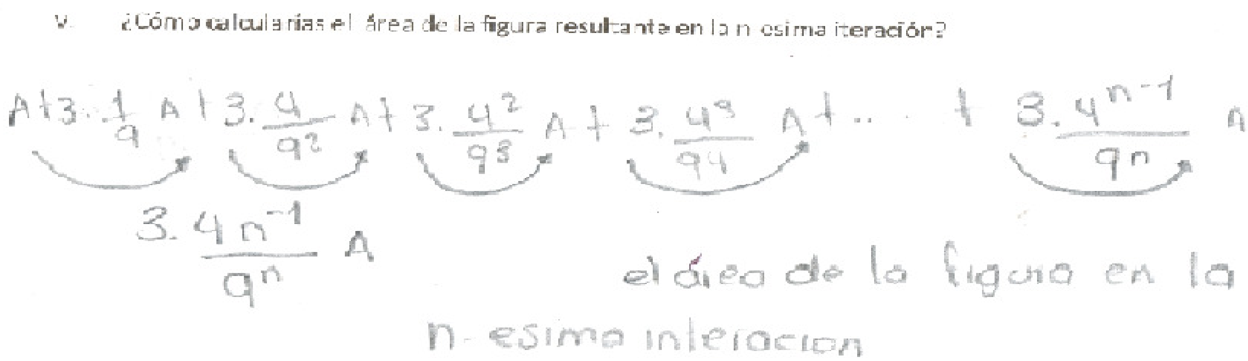
| | $I_{T1}$ | $I_{T2}$ | $I_{T3}$ | $I_{T4}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | $3 \cdot \frac{A}{9}$ | $12\frac{A}{9^2}$ | $48\frac{A}{9^3}$ | $192\frac{A}{9^4}$ |

$$x\frac{A}{9^{20}}$$

// SIGU

$$(3 \times 9^{19})\frac{A}{9^{20}}$$

En el último punto, se les pedía calcular el área de la figura resultante en la n-ésima iteración y, aunque muchas de las respuestas estuvieron cerca de lo correcto, solo en una se construyó una sucesión que nos daba la respuesta. Esa persona fue la estudiante ***Linda Tarazona Ramírez*** y su respuesta fue la siguiente:


V. ¿Cómo calcularías el área de la figura resultante en la n esima iteración?

$A + 3\cdot\frac{1}{9}A + 3\cdot\frac{4}{9^2}A + 3\cdot\frac{4^2}{9^3}A + 3\cdot\frac{4^3}{9^4}A + \cdots + 3\cdot\frac{4^{n-1}}{9^n}A$

$3\cdot\frac{4^{n-1}}{9^n}A$ el área de la figura en la n-esima interacion

En esta respuesta se puede ver que el valor del área en la n-ésima iteración es precisamente la suma de las áreas de más que aparecían en las figuras anteriores con respecto a el área de la figura inicial sumadas a el valor de ésta.

En general, en esta guía la mayoría de los estudiantes pudieron ver mucho más claro lo que pasaba entre una figura y otra después de aplicar las iteraciones y gracias a esto podían hacer mejores deducciones que en la primera guía. Además cabe resaltar que en esta guía se necesitaba saber un poco acerca de sucesiones y series por lo cual antes de aplicarla hicimos una breve introducción a estos dos temas y por lo visto en el desarrollo de la guía se pudo ver que esto fue clave para los buenos resultados que se obtuvieron.

## 3.4 ANÁLISIS DE LA GUÍA DE TRABAJO # 3

Para la aplicación de esta tercera guía, se les dió parte de la construcción ya que en las guías anteriores, el tiempo no estaba alcanzando debido a que los estudiantes querían hacer las figuras con las medidas lo más exactas posibles. Gracias a esto, las construcciones que debían hacer en esta guía las realizaron muy rápido.

En el análisis de estas construcciones, en esta guía se notó que las ideas fluían muy rápido lo cual hacía pensar que las dos guías anteriormente aplicadas habían alcanzado los objetivos trazados. Inicialmente se pedía que describieran la iteración que se aplicaba y que le calcularan el área tanto a los triángulos pequeños que se formaban después de esta iteración como a la figura total resultante. Las respuestas obtenidas por todos los estudiantes se entrelazaban entre sí ya que todos coincidían en el cambio que sucedía de una figura a la otra pero se resaltará la respuesta dada por la estudiante ***Liliana Navas*** que fue la siguiente:

**a) Describe la iteración que se está aplicando sobre el triangulo inicial.**

Cuando se halla el punto medio a los lado del triangulo, este quedara dividido en 4 partes... en donde se retirarara $\frac{1}{4}$ parte del triangulo Original.

y así sucesivamente a cada triangulo formado se le hallará su punto medio y se quitara $\frac{1}{4}$ de las 4 partes existentes en el triangulo

**¿Cuál es el área de la figura 1despues de aplicarle los pasos del punto 1?**

$$a = x - \frac{1}{4}x$$

$$= \frac{4x-1}{4} = \frac{3x}{4}$$

$a = \frac{3x}{4}$ → área de la PRIMERA ITERACION

d) ¿Cuál será el área de los triángulos pequeños que se generan después de la segunda iteración?

el area del Cada triangulo sera de $\frac{x}{4}$, y al dividir este triangulo en 4 parte, obtendremos que:

$$a = \frac{\frac{x}{4}}{4} = \frac{x}{16}.$$

En estas respuestas se puede ver que hace una relación entre lo que se retira de la figura con respecto a lo que se tenía y además lo ve hacía un proceso sucesivo de iteraciones. Por otra parte, en el literal d) ***Liliana*** refleja con su respuesta que para hallar el área de cada uno de esos triángulos pequeños que se generan después de cada iteración se debe dividir esa área, en 4. Es de resaltar que en este caso ***Liliana*** utiliza claramente uno de los tipos de conocimientos que Piaget nombra y que se expusieron anteriormente; es el conocimiento lógico-matemático ya que constituye una serie de relaciones mentales referente a lo que sucede en cada una de las construcciones. Estas las separa teniendo en cuenta que se refiere a cada una de ellas, y con ello construye una idea final que reúne todas esas ideas.

En un nuevo punto, se pedía construir una tabla en la que relacionaran los valores de las áreas después de cada iteración. También se pedía construir una sucesión con los datos de la tabla y calcularle el límite. La estudiante ***Linda Tarazona Ramírez*** construyó la siguiente tabla:

f) **Construye una *tabla* horizontal en la que se pueda ver el área de cada una de las figuras que se generan después de cada iteración.**

| Figura | # de iteraciones | área |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $x$ |
| 2 | 1 | $3/4\ x$ |
| 3 | 2 | $(3/4)^2 x$ |
| 4 | 3 | $(3/4)^3 x$ |
| 5 | 4 | $(3/4)^4 x$ |
| 6 | 5 | $(3/4)^5 x$ |

g) Construye una sucesión con los datos que obtuviste en la tabla.

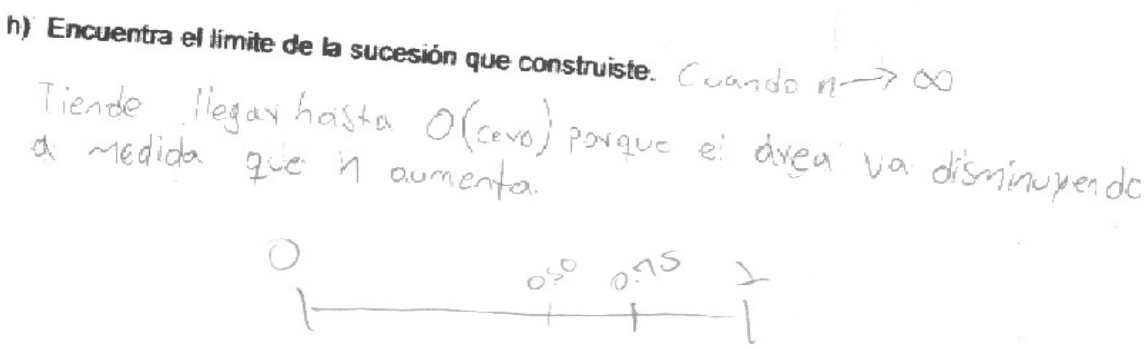
$S:\{x,\ 3/4\,x,\ 9/16\,x,\ 27/48\,x,\ 81/144\,x,\ \dots\}$

El propósito de estos últimos puntos era que, ayudados por la tabla, pudiesen deducir qué era lo que variaba y así lo pudiesen ver como una sucesión de términos. Además, teniendo en cuenta que ya tenían una pequeña idea de lo que es el límite de una sucesión gracias a lo trabajado en las guías anteriores, se consideró que ya se le podía pedir a los estudiantes que calcularan el límite para ver cómo reaccionaban y qué respuesta daban. ***Linda Tarazona Ramírez*** respondió lo siguiente:

h) Encuentra el limile de la sucesión que construiste.

$(3/4)^n x$, cuando $n=\infty$, entonces el limite de la sucesión tiende a 0, esto se debe a que en cada ocasión en que se realize una interación el area de la figura va a disminuir hasta llegar un punto en donde la figura no tendrá área y eso será igual a cero

En esta respuesta se puede ver claro que el concepto de límite ya iba tomando forma ya que, además de que las respuestas fuesen bastante concretas, estas deducciones las hacían muy rápido. Por otra parte la respuesta que dio a la pregunta que pedía encontrar el límite de la sucesión que había construido anteriormente es bastante completa, pues enfoca su visión hacia el infinito lo cual es de mucha importancia para el buen desarrollo de este trabajo. Otro resultado importante que se obtuvo en esta guía fue el que dio el estudiante ***Ciro Dubán Quintero Ardila*****n** ya que compara las áreas que ya tiene y ve que estas van disminuyendo en su valor lo cual le da una idea inicial de que puede ser que su límite sea cero, pero además esto lo refuerza con una pequeña representación grafica en el plano. Esta fue la respuesta:

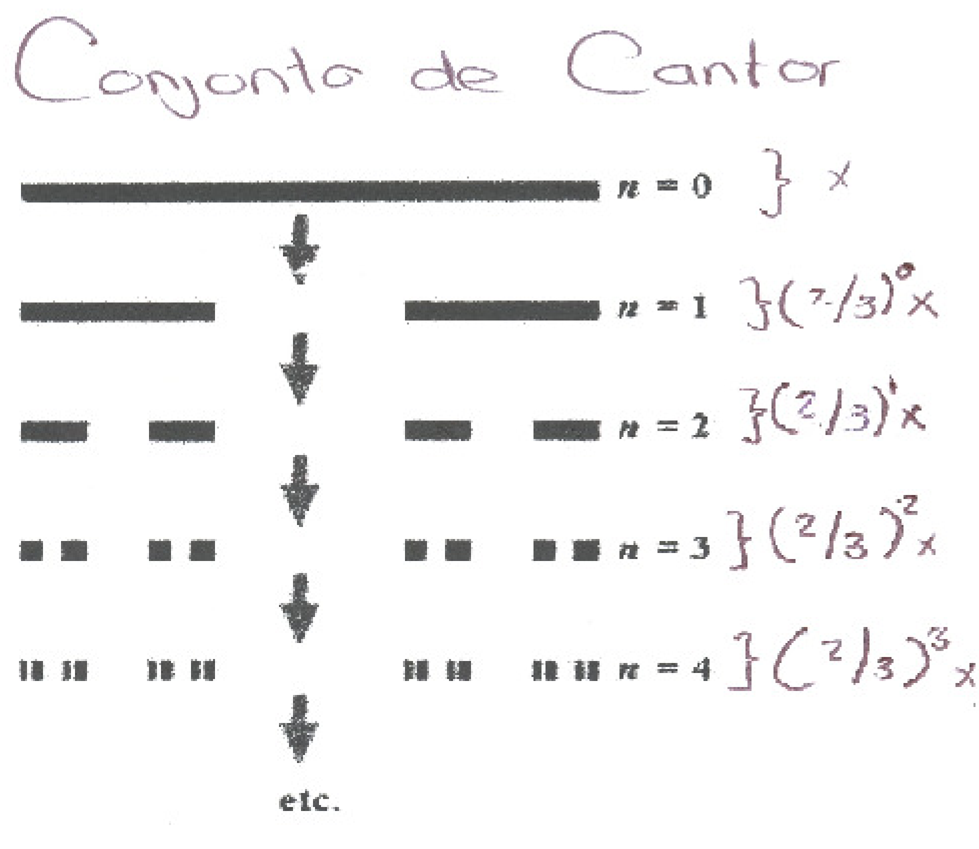

**h)** **Encuentra el límite de la sucesión que construiste.** Cuando $n \to \infty$
Tiende llegar hasta 0(cero) porque el área va disminuyendo a medida que n aumenta.


Con estos resultados se puede concluir que en esta guía se vio mucho más clara esa primera idea que se quería construir en los estudiantes acerca del límite, ya que en esta actividad se obtuvieron respuestas altamente justificadas. Además de esto, se notó que muchos de ellos estaban muy motivados por la forma como se estaba llevando el tema pues comprendían de una manera mucho más fácil analizando los fractales que se generaban que de una forma netamente explicativa como lo es el común de una clase como esta.

## 3.5 ANÁLISIS DE LA GUÍA DE TRABAJO # 4

Al igual que en la guía anterior, en esta también se decidió darles la construcción y no solo parte de ella sino dársela completa ya que no tenía caso poner a los estudiantes a construir este fractal teniendo en cuenta que en las guías anteriores ya habían demostrado que sabían seguir las instrucciones para la construcción de estos y además solo quedaban dos sesiones y las clases para ellos ya habían terminado por lo cual estas últimas guías se aplicaron en las instalaciones de la universidad.

En el punto 1) de esta guía se pedía analizar el fractal conocido como el conjunto de Cantor. El fractal que analizaron los estudiantes fue el siguiente:



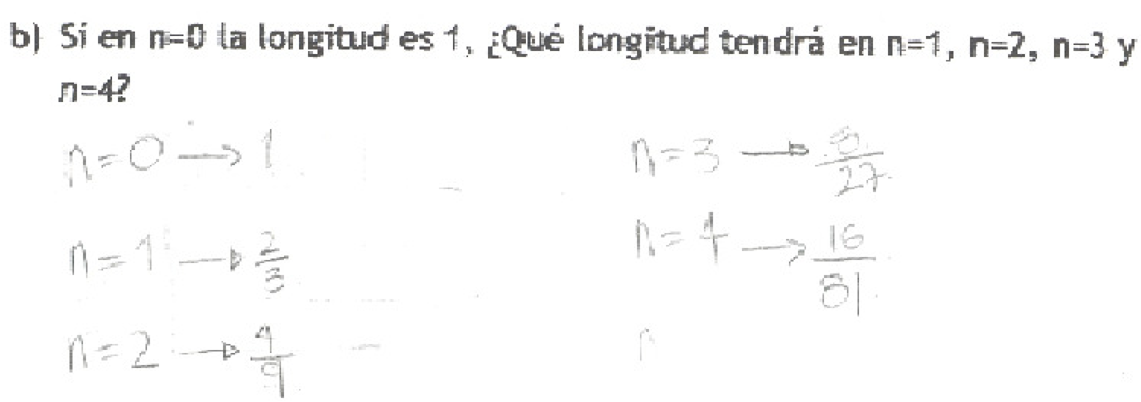

En el punto 2) ya les realizaban las preguntas que necesariamente ligaban al estudiante para que generara conclusiones del análisis realizado al conjunto de Cantor.

En el literal a) debían describir la iteración que se presentaba en la figura. Las respuestas que de parte de la gran mayoría de los estudiantes, fue muy acertada ya que describían de una forma clara lo que sucedía en la figura. La estudiante ***Liliana Navas*** respondió lo siguiente:

"Al principio tenemos una recta, que la dividimos en tres partes y retiramos la parte del centro, es decir 1/3, y a las dos rectas que quedan le aplicamos lo mismo que a la figura inicial y así sucesivamente con todas las rectas que aparezcan"

En esta respuesta se ve de forma clara que en el análisis que hace ***Liliana*** del concepto de iteración es evidente en el razonamiento de nuestros estudiantes ya que en esta guía solo les dimos la construcción para el análisis, y nada más. En su respuesta, cuando habla de "así sucesivamente" se puede notar que ya ha entendido que este proceso de iterar no se acaba por lo tanto seguirá aplicándose cuantas veces quiera.

En el literal b) debían tener en cuenta que en n = 0 la longitud del segmento era de 1cm y con ello hallar las longitudes de los pasos n = 1, n = 2, n = 3 y n = 4. La mayoría de las respuestas fueron de esta forma:



b) Si en n=0 la longitud es 1, ¿Qué longitud tendrá en n=1, n=2, n=3 y n=4?

$n=0 \rightarrow 1$

$n=1 \rightarrow \frac{2}{3}$

$n=2 \rightarrow \frac{4}{9}$

$n=3 \rightarrow \frac{8}{27}$

$n=4 \rightarrow \frac{16}{81}$

Esta en particular fue la que dio ***Liliana*** y en ella se ve que las respuestas son correctas, solo que en el siguiente literal en el que se les pide construir una tabla con la longitud de la figura en las 8 primeras iteraciones ***Liliana*** respondió:

c) Construye una tabla horizontal en la que se pueda la longitud de la figura en las 8 primeras iteraciones.

| # Iteración | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud | 1 | $\frac{2}{3}x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^3 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^4 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^5 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^6 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^7 x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^8 x$ |

Esta es una muy buena generalización pero comete un error, ya que se parte de que la longitud inicial es 1 como lo tiene consignado en la tabla pero a partir de la iteración 1 la longitud la da en términos de x.

La estudiante ***Linda Tarazona*** construyó una tabla muy similar a la de ***Liliana*** pero ella sí generalizó de forma correcta ya que partió de una longitud inicial x, lo que nos dice que con ese análisis se podría calcular la longitud de cualquier segmento en cualquier iteración sin importar la medida que nos den. Además de esto, en el literal d) les pedíamos construir una sucesión con los datos de la tabla, lo cual permitía ver la forma como disminuye la longitud del segmento inicial en el conjunto de Cantor. La tabla y la sucesión construida por ***Linda*** fueron las siguientes:

c) Construye una tabla horizontal en la que se pueda la longitud de la figura en las 8 primeras iteraciones.

| # de iteración | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| longitud | $x$ | $(2/3)x$ | $(2/3)^2 x$ | $(2/3)^3 x$ | $(2/3)^4 x$ | $(2/3)^5 x$ | $(2/3)^6 x$ | $(2/3)^7 x$ | $(2/3)^8 x$ |

d) Construye una sucesión con los datos de esta tabla.

$$S_n = \left\{ x, \left(\tfrac{2}{3}x\right), \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^7 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^8 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^9 x, \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10} x, \ldots \left(\tfrac{2}{3}\right)^n x \right\}$$

En el último literal de esta guía, se preguntaba sobre lo que podían concluir de lo cual dieron respuestas como estas:

***Linda Tarazona***

$$\lim_{n \to \infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 0$$

n= es el nomero de iteraciones y por ello tiende a ser infinito

Por lo tanto a mayor nomero de iteraciones que se le realize al segmento su longitud va disminuyendo progresivamente.

***Karen Yurley Barrios***

e) Que puedes concluir sobre el limite.

RTA: EN CONCLUSION SE PUEDE DECIR QUE CUANDO EL NUMERO DE ITERACIONES ES INFINITO SU LONGITUD LLEGA A CERO

$$n \to \infty \Rightarrow A \to 0$$

YA QUE A LA VEZ EN QUE AUMENTA EL OTRO DISMINUYE

***Ciro Duran Quintero***

e) Que puedes concluir sobre el limite

$n \to \infty \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ porque entre mas va creciendo la iteración va disminuyendo la longitud

***Liliana Navas***

e) Que puedes concluir sobre el limite

EL LIMITE VA HACER IGUAL A 0, YA QUE A QUE MAYOR SEA EL # DE ITERACIONES, ES DECIR, $n \to \infty$, IRA DISMINUYENDO LA LONGITUD DEL SEGMENTO HASTA NO QUEDAR NADA, EN CONCLUSION $L=0$.

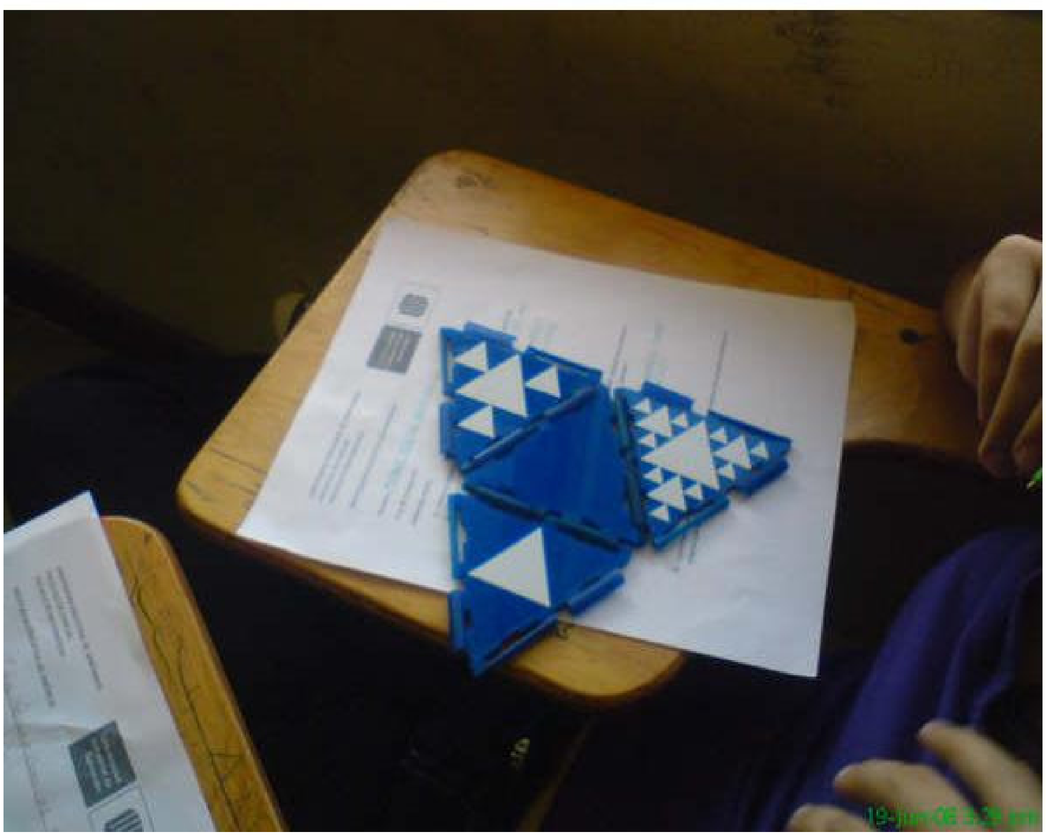
En ellas se refleja en gran parte el concepto intuitivo de límite ya que al hablar de que n tiente a infinito, relaciona esa n directamente con el término n-ésimo de la sucesión lo cual permite ver que esa longitud resultante va a ser muy pequeña o va a tender a cero.

## 3.6 ANÁLISIS DE LA GUÍA DE TRABAJO # 5

En esta guía, se pudo recopilar todas las ideas que se generaron en las guías anteriores, ya que cada uno de los razonamientos hechos por los estudiantes así lo reflejaban.

El fractal que se trabajó en esta guía fue e tetraedro de Sierpinski. Inicialmente se debe resaltar que esta guía fue trabajada con un material didáctico facilitado por las estudiantes de Diseño Industrial Ángela Andrea Silva e Irene Sarmiento Rojas quienes elaboraron unos tetraedros en material acrílico y con conectores en resina, que permitían manipular los tetraedros y con esto hacer mucho más fácil el análisis que se quería hacer con ellos.

Este es el material:



En el literal a) se preguntaba acerca del área superficial del tetraedro inicial y para mayor facilidad se les indicaba a los alumnos que ese tetraedro tenia 1cm de longitud cada una de sus aristas.

***Marcela Egea*** respondió lo siguiente:

a) ¿Cuál es el área superficial de ese tetraedro?

$b=1$ $\quad A\Delta = \dfrac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad A\Delta\ 4\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Area superficial: $\sqrt[2]{3}$

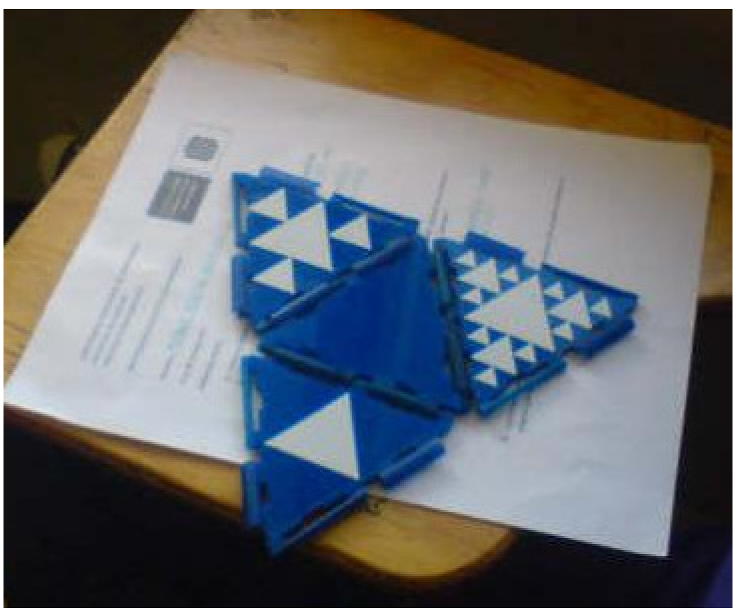
Y la respuesta de ***Ciro Quintero*** fue:

a) ¿Cuál es el área superficial de ese tetraedro?

$$A = \frac{4.\sqrt{3}}{4} \qquad A = \sqrt{3}$$

$$-\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 = l^2 \quad - a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \quad - a^2 = l^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad - a = l\frac{\sqrt{3}}{2} \quad - A = \frac{l.l\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \quad - A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad - \boxed{A = l^2\sqrt{3}.}$$

Tanto en la respuesta de ***Marcela*** como en la de ***Ciro*, **se evidencia un claro razonamiento acerca del área superficial del tetraedro ya que se ve que primero hallaron el área de una de las caras y posteriormente la multiplicaron por 4. Es de resaltar que en este punto fue de gran ayuda el material con el que se estaba trabajando ya que se pudo “desarmar” y así ver esa área como una figura plana.



Seguidamente se pidió analizar el tetraedro después de la primera iteración ya que gracias al material con el que se trabajó, permitía a los estudiantes explotar esos tipos de conocimiento que nos hablaba Piaget en su teoría cognitiva. En el literal c) se pidió a los estudiantes que calcularan el área superficial del tetraedro después de la primera y la segunda iteración. Las respuestas que se obtuvieron estaban encaminadas hacia lo mismo ya que la mayoría notó que el número de caras que desaparecían era el mismo número de caras que aparecían, por lo tanto el valor del área superficial no se modificaba. Para una mejor comprensión de esta conclusión, se pidió construir una tabla en la que ubicaran el área de cada tetraedro pequeño que se generaba, y el área superficial de la figura final que se formaba.

Esta es la tabla que construyó ***Mildreth Mogollón:***

| Iteracion | A tetraedro pequeño | A T. |
|---|---|---|
| 0 | $\ell^2\sqrt{3}$ | $\ell^2\sqrt{3}$ |
| 1 | $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ | $4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ |
| 2 | $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^2}$ | $4^2\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^2}$ |
| 3 | $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^3}$ | $4^3\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^3}$ |
| 4 | $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^4}$ | $4^4\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^4}$ |
| n | $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^n}$ | $4^n\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4^n}$ |

En este caso ***Mildreth*** expresó correctamente lo que se buscaba ya que con esto se puede ver el por qué es igual el área de la figura resultante en cualquier iteración.

Después de haber analizado de una forma muy rigurosa lo que pasa con el área del tetraedro de Sierpinski, se decidió pasar a analizar lo que pasaba con el volumen. Para ello se les dio la fórmula para que calcularan el volumen del tetraedro inicial y así en el literal e) debían hallar el volumen de los tetraedros pequeños que se generaban después de la primera iteración. En este punto hubo muy buenos resultados ya que la mayoría de ellos notaban que los tetraedros pequeños que aparecían tenían de arista la mitad de la medida del tetraedro original y con esa información lo único que les restaba por hacer era calcular ese valor. Después de tener el volumen del tetraedro pequeño, se pedía calcular el volumen de la figura que resultaba, y como se esperaba, todos lo hicieron bien ya que solo era multiplicar por el número de tetraedros pequeños. Esta fue la respuesta de ***Marcela Egea:***

$$V_\Delta = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l^3}{8} \qquad V_\Delta = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{\sqrt{2}}{24} l^3$$

Debido a esto, en el grupo se generó un interrogante, y era el saber a cuánto equivalía el volumen que se le “retiró” al tetraedro inicial. Ese era el literal g), en el que se les pedía calcular el área de ese octaedro que se retiraba. En este punto la respuesta que dieron los estudiantes decía que al volumen inicial del tetraedro le restaban el volumen que resultaba después de la primera iteración.

Esta fue la respuesta de ***Karen Barrios:***

el volumen del octaedro sería

$$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{12} l^3\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{24} l^3\right) = \frac{2\sqrt{2}\, l^3}{24} - \frac{\sqrt{2}\, l^3}{24} = \frac{\sqrt{2}\, l^3}{24}$$

RTA: El volumen de octaedro que desaparece es la mitad del tetraedro original

En esta respuesta se ve reflejado la exploración de uno de los estadios de la teoría que Piaget llama “Teoría del constructivismo” ya que en ella hay una etapa llamada de operaciones formales la cual se caracteriza por la elaboración de hipótesis y el razonamiento sobre las proposiciones que se le hagan. En este caso ***Karen*** elabora una hipótesis sobre cómo puede hallar el área de ese octaedro y razona acerca de ello para llegar a concluir la forma como se puede encontrar esa área que desaparece, y deducir que es exactamente la mitad del volumen de la pirámide inicial.

Como se ha venido haciendo en todas las guías anteriores, en esta también se les pidió construir una tabla en la que relacionen el número de tetraedros pequeños que aparecen después de cada iteración, el volumen de esos tetraedros y el volumen final de la figura resultante. Esta es la tabla que creó la estudiante ***Mildreth Mogollón:***

| Iteración | # de tetraedro | Volumen de los tetraedros | Volumen de la figura restante |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$ | $\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$ |
| 1 | 4 | $\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3$ | $\frac{\sqrt{2}\ l^3}{24}$ |
| 2 | $4^2$ | $\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^2}\right)^3$ | $4^2\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^2}\right)^3$ |
| 3 | $4^3$ | $\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^3}\right)^3$ | $4^3\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^3}\right)^3$ |
| ⋮ | ⋮ | | |
| n | $4^n$ | $\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3$ | $4^n\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3$ |

En ella se puede ver que relaciona el volumen del tetraedro inicial con el resultado de los volúmenes de los demás tetraedros que se forman y con las figuras que se generan después de cada iteración. Es evidente que ***Mildreth*** tiene bien claro que para hallar el volumen de los tetraedros pequeños debe cambiar la longitud de la arista en la formula original y si se multiplica este resultado por el número de tetraedros que se generan después de cada iteración se halla el volumen final de cada figura resultante en cada iteración.

En al última parte de esta guía, los estudiantes debían analizar la n-ésima iteración y de allí concluir la expresión para hallar el volumen del tetraedro de Sierpinski. Estos fueron algunos resultados:

***Mildreth Mogollón:***

i) ¿Que pasa en la n-ésima iteración? ¿a cuánto equivale el volumen?

ese valor $4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3$

es mas pequeño que el inicial

j) ¿Cuál es el volumen del tetraedro o pirámide de Sierspinski? ¿Por qué?

$\lim_{n \to \infty} 4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3 = 0.$ porq al haber mas y mas iteraciones, cuando n tiende a infinito el volumen $4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3$ es mas pequeño tiende a - 0.

***Karen Barrios:***

) ¿Que pasa en la n-ésima iteración? ¿a cuánto equivale el volumen?

$$RTA = 4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3$$

ESE VALOR ES MUCHO MAS PEQUEÑO QUE EL INICIAL

) ¿Cuál es el volumen del tetraedro o pirámide de Sierspinski? ¿Por qué?

$$\lim_{n \to \infty} 4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3 = 0$$

PORQUE ESE n SEA MAS GRANDE EL VOLUMEN LLEGARIA A CERO.

***Marcela Egea:***

j) ¿Cuál es el volumen del tetraedro o pirámide de Sierspinski? ¿Por qué?

$$\lim_{n \to \infty} 4^n \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l}{2^n}\right)^3 = 0$$

a medida que vamos [illegible] el volumen despues de cada iteracion este valor es mucho mas pequeño → 0

Con estas respuestas se podría pensar que el objetivo inicial estaba alcanzado ya que la idea intuitiva de límite la tenían todo los alumnos y se veían reflejadas en sus respuestas. Por otro lado, es bueno resaltar que en el momento de construir las tablas para que hicieran los análisis respectivos, los estudiantes lograron deducir de allí la sucesión que se presentaba, y con ella trabajaban para poder ver el límite que en este caso del tetraedro de Sierpinski, representaba el volumen final.

# 4. ANÁLISIS FINAL

Con los resultados obtenidos en las 6 guías (incluyendo la guía cero) se puede ver el gran avance de los estudiantes en el camino que conduce a la apropiación del concepto intuitivo de límite, lo cual significa que ese alcanzó el objetivo trazado en el presente trabajo.

Por otra parte, es de resaltar la buena respuesta que dieron los alumnos al trabajar con figuras fractales, ya que en cada construcción su empeño por hacer que la figura fuese lo más exacta posible se incrementaba y esto permitía que en el momento de analizarla, los razonamientos se dedujeran de una mejor forma.

En la guía # 2, en la cual se trabajó el fractal de la isla de koch, se debe resaltar que existía algo a lo que una estudiante llamó "paradoja" haciendo referencia al hecho de que en este fractal su perímetro fuese infinito mientras que su área fuese finita.

Algo para resaltar en este análisis es la forma como fue abordada la guía # 4 ya que después de analizado el fractal del conjunto de Cantor, las deducciones realizadas por los estudiantes fueron más allá de lo que se pedía pues muchos lograron concluir que a pesar de que la longitud final tendía a cero, la cantidad de segmentos que se generaban iban a ser infinitos. Esta deducción que realizaron los muchachos, resalta una parte importante de este fractal ya que deja ver el contraste entre la longitud final y la cantidad final de segmentos que quedan.

Una cosa que se debe tener en cuenta en este análisis final es que todos los estudiantes que trabajaron estas guías demostraron al final una gran habilidad para reconocer las iteraciones que presentaban los diferentes fractales trabajados, ya que podían deducir expresiones matemáticas a partir de solo la figura como lo fue en la guía # 4.

# 5. CONCLUSIONES

En el desarrollo de las Matemáticas en el bachillerato, el buen entendimiento de ésta depende en gran parte de la forma como sea llevada a los estudiantes por parte de nosotros los docentes. Ese entendimiento adquirido, se verá reflejado más adelante cuando nuestros alumnos ingresen a una institución de educación superior con el objetivo de terminar su formación académica en algún campo de desempeño, ya que es ahí en donde aparecerán los grandes retos y el éxito en esta etapa dependerá de las buenas bases académicas que tengan.

Con este trabajo pudimos ver que un tema de la Matemática como el concepto de límite, puede ser abordado de una manera diferente a la teórica. Y no es que la forma teórica sea una manera equivocada de enseñar el concepto de límite, es solo que con este trabajo quisimos dar a conocer una forma más didáctica para hacerlo usando una herramienta tan vistosa y al mismo tiempo tan compleja como lo es la geometría fractal.

Esta geometría nos permite conocer figuras muy interesantes, y al analizar sus características nos encontramos con cosas muy extrañas, o mejor, como lo decía un estudiante en alguna de las clases, “es algo como mágico”, y gracias a esas cosas “mágicas” es que se despierta el interés del estudiante para concentrarse más en el tema tratado y eso fue lo que logramos con este grupo de muchachos , ya que en fractales como la isla de Koch, esa cosa “mágica” que tenía de lograr encerrar un área finita en un perímetro infinito, llevaba a los estudiantes a buscar una explicación a esta característica. Otro ejemplo de esto es lo que sucedía en el conjunto de Cantor ya que, decían ellos, que era muy interesante ver que los segmentos que aparecían después de cada iteración iban a ser muchos, o mejor, que el número de segmentos iba a ser un muy grande, y que a su vez concluían que la longitud del conjunto de Cantor tendía a cero. En la guía del tetraedro de Sierpinski también existía algo muy curioso, analizando sus características y era que el área superficial del tetraedro siempre sería la misma. Todas estas cosas son las que nos llevan a concluir que la forma en que se aplicaron estas guías, además de despertar gran interés en los temas, logró que los estudiantes hicieran muy buenos razonamientos de las figuras fractales en cada una de ellas y lo más importante, que en sí era nuestro objetivo principal, fue que lograron quedar con una idea intuitiva del concepto de límite.

Por último, debemos decir que este trabajo deja en nosotros una agradable sensación ya que logramos desarrollar nuestra idea con éxito, y sabemos que será de gran ayuda en estos muchachos cuando empiecen a estudiar en una universidad, además creemos que puede ser una buena opción para los profesores que vayan a enseñar el concepto de límite y lo puedan hacer usando la geometría fractal.

# 6. BIBLIOGRAFÍA

[1] LORNELL Randi, WESTERBERG Judy. FRACTALS IN HIGH SCHOOL: EXPLORING A NEW GEOMTRY. The Mathematics Teacher. Vol 92, N° 3, 1999, pág. 260 – 269.

[2] CASTRO GRANADOS Fabiola, Geometría Fractal en el Bachillerato. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 1994.

[3] PÉREZ NOLVIS Patricia. Talleres sobre geometría fractal aplicados a grupos de estudiantes de básica secundaria y media. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2005.

[4] ACEVEDO GALVIS Diana María. Fractales en la secundaria: explorando una nueva geometría – Análisis de un artículo. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2008.

[5] ESTRADA William Fernando. Geometría fractal, conceptos y procedimientos para construcción de fractales. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá, 2004.

[6] PICO SÁNCHEZ Wilson. La pirámide de Sierpinski. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 2004.

[7] SILVA Ángela Andrea, Rojas Sarmiento Irene. Sistema Modular Didáctico como apoyo para la enseñanza de la geometría fractal. Tesis de grado. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2008.

[8] MATAJIRA SANABRIA Tania Loreta. Estudio sistemático de la curva de Koch. Monografía. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2006

[9] Teoría cognitiva de Piaget. Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos16/teorias-piaget/teorias-piaget.shtml

[10] El triángulo de Sierpinski. Recuperado de http://fractales.org/?p=45&akst_action=share-this

[11] El conjunto de Cantor. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor

# 7. ANEXOS

***Anexo 1***

## GUÍA CERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS

## GUÍA CERO

Nombre: ___________________________________________

1- Dibuja un árbol

2- Según lo que viste en la película:

   a. ¿Qué es una iteración?

   b. ¿Qué entiendes por autosemejanza?

3- Usa el recuadro para dibujar un árbol.

3- Dibuja tu propio fractal.

***Anexo 2***

**GUÍA # 1**

| |
|---|
| **UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER** |
| **FACULTAD DE CIENCIAS** |
| **LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS** |
| **SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II** |

| |
|---|
| **INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS** |

Universidad Industrial de Santander

Nombre: ________________________________________ Fecha: _______

**GUIA DE TRABAJO # 1**

I. Sigue las instrucciones y construye la figura

1. Dibuja una línea de longitud 9 cm.

2. Divídela en tres partes iguales y retira el tercio de la mitad

3. Sustituye la parte que quitaste con dos líneas de la misma longitud que la que revisaste.

4. A cada segmento de la figura resultante, aplícale los pasos 2 y 3 anteriormente realizados.

II. Comparación de las figuras resultantes en los pasos 3 y 4.

a) ¿Cuántas copias semejantes a la figura resultante en el paso 3 están contenidas en el paso 4? ____

b) Si tenemos en cuente que la línea inicial era de 9 cm, ¿Cuánto medirán las figuras resultantes en los pasos 3 y 4? ___ y ___ respectivamente.

c) ¿Qué pasaría si a la figura resultante en el paso 4 le aplicamos nuevamente los pasos 2, 3 y 4? Dibújala

d) ¿Cuántas copias semejantes a la figura resultante en el paso 3 estarán contenidas en esta nueva figura?_____

e) ¿Qué longitud tiene esta nueva figura? _____

f) ¿es posible continuar? Si es así, llena la siguiente tabla

| Figura | # de iteraciones | Longitud de la curva |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

g) ¿Hasta donde puedes hacerlo?_____

h) ¿Cuál será la longitud final?

*__Anexo 3__*

**GUÍA # 2**

| |
|---|
| **UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**<br>**FACULTAD DE CIENCIAS**<br>**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**<br>**SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II** |

| |
|---|
| **INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS** |

Nombre: ___________________________________________ Fecha: _____________

**GUIA DE TRABAJO # 2**

**Parte 1**

1. Sigue las instrucciones y construye la figura

a) Dibuja un triángulo equilátero de 9 cm de lado

b) Divide cada lado del triángulo en tres partes iguales y retira la sección del medio.

c) Reemplaza la parte que quitaste con dos segmentos de la misma medida que la del que retiraste.

d) Repite los pasos b) y c) en la figura resultante.

1. Deducciones a partir de las figuras resultantes en los pasos c) y d)

i. Si el perímetro del triángulo equilátero con el que empezaste es de 27cm, entonces ¿cual es el valor del perímetro de las figuras que se generan en los pasos c) y d)? _______ y ________ respectivamente

ii. ¿Encuentras alguna relación entre los perímetros de las figuras?

iii. Construye una tabla que muestre el valor de los perímetros de cada figura y la iteración en la que sucede

iv. ¿Puedes concluir algo de todo esto?

v. ¿Existirá alguna conexión entre las figuras resultantes después de cada iteración?

vi. ¿Puedes deducir alguna expresión matemática que te permita saber cual será el valor del perímetro en las iteraciones 10, 145 y11524?

vii. ¿Qué significa esa expresión?

viii. Si te pidieran hallar el perímetro de la última figura, el número de iteraciones debe *tender* a ____
Justifica tu respuesta

Parte 2

2. Si ya sabes que el perímetro de la figura final es “infinito”

i. ¿Qué puedes decir del área que encierra la figura, se podrá calcular? Si, no ¿Por qué?

ii. Calcula el área del triangulo inicial. Luego calcula el área de la figura resultante en el paso c) del primer punto. ¿Puedes deducir una forma más fácil para calcular esta área?

iii. Construye una tabla horizontal que permita ver el valor del área después de cada iteración.

iv. Deduce una expresión que te ayude a calcular el área de las figuras resultantes después de cada iteración.

v. ¿Cómo calcularías el área de la figura resultante en la n-esima iteración?

vi. ¿Qué puedes decir de este valor?

***Anexo 4***

**Guía # 3**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**
**SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II**

**INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS**

Nombre: ________________________________________________ Fecha: ______________

**GUIA DE TRABAJO # 3**

**1.** Sigue las instrucciones y aplícaselas a las siguientes figuras

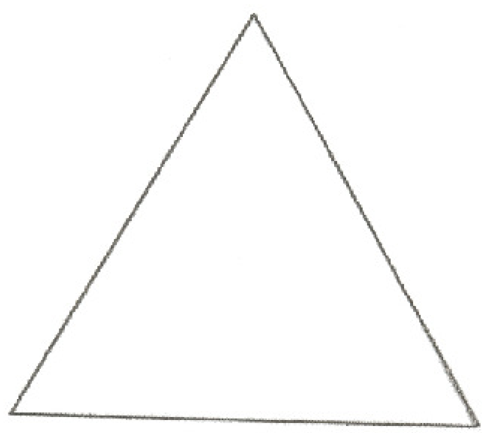


Figura 1

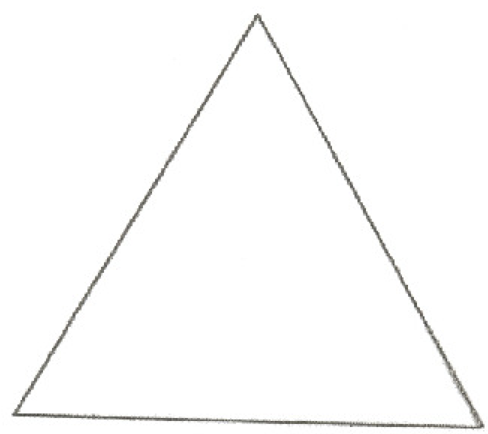


Figura 2

Cada uno de estos triángulos tiene un área definida por tanto, cuando utilicemos la palabra “retira” estaremos hablando de un pedazo de esa área que le quitamos al triangulo inicial.

a) A las dos figuras, encuéntrales los puntos medios de cada lado que las compone y une esos puntos entre sí, formando 4 triángulos pequeños dentro del triángulo inicial.

b) Retira el triángulo formado por los puntos medios de los lados del triangulo inicial. ¿Cuántos triángulos pequeños quedan? ___

c) Solo en la figura 2, a cada uno de los triángulos pequeños que quedaron, hállales los puntos medios de cada uno de sus lados, une esos puntos y retira el triangulo que forman dichos puntos.

2. Responde las siguientes preguntas justificando cada una de las respuestas:

   a) Describe la iteración que se esta aplicando en el triángulo inicial.

   b) Si el área de la figura es $X$ ¿a cuanto equivale el área de cada uno de los triángulos pequeños que se generan después de la primera iteración?

   c) ¿Cuál es el área de la figura 1 después de aplicarle los pasos del punto 1?

   d) ¿Cuál es el área de los triángulos pequeños que se generan después de la segunda iteración?

e) ¿Cuál es el área de la figura 2 después de aplicarle los pasos del punto 1?

f) Construye una tabla horizontal en la que se pueda ver el área de cada una de las figuras que se generan después de cada iteración.

g) Construye una sucesión con los datos que obtuviste en la tabla.

h) Encuentra el límite de la sucesión que construiste.

***Anexo 5***

**GUÍA # 4**

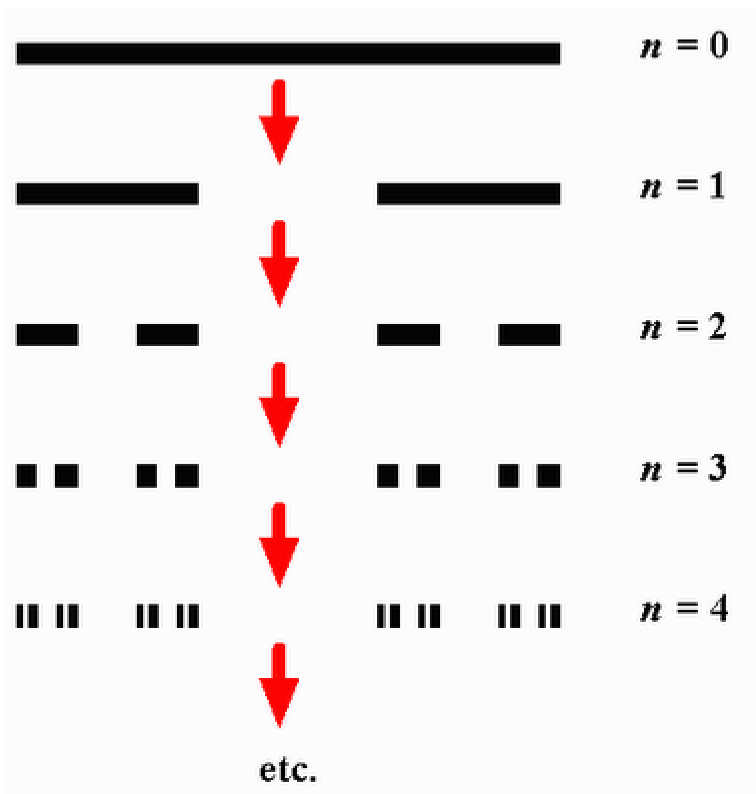
| |
|---|
| **UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER** |
| **FACULTAD DE CIENCIAS** |
| **LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS** |
| **SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II** |

| |
|---|
| **INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS** |

Nombre: ___________________________________________

**GUIA DE TRABAJO 4**

1) Analiza la siguiente figura:



2) Responde las preguntas y justifica tus respuestas:

a) Describe la iteración que se presenta en esta figura

b) Si en n=0 la longitud es 1, ¿Qué longitud tendrá en n=1, n=2, n=3 y n=4?

c) Construye una tabla horizontal en la que se vea la longitud de la figura en las 8 primeras iteraciones

d) Construye una sucesión con los datos de esa tabla.

e) ¿Qué puedes concluir sobre el límite?

***Anexo 6***

**GUÍA # 5**

| |
|---|
| **UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**<br>**FACULTAD DE CIENCIAS**<br>**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**<br>**SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II** |

| |
|---|
| **INTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS** |

Nombre: ___________________________________________

**GUIA DE TRABAJO # 5**

3) Partiendo de un tetraedro de lado *l*=1 desarrolle las siguientes actividades.

a) ¿Cuál es el área superficial de ese tetraedro?

b) Después de la primera iteración, ¿cuál será el área de cada uno de los tetraedros que se generan?

c) ¿Cuál será el área superficial de la figura que resulta en esta primera iteración? ¿Qué sucederá con el valor del área en la segunda iteración?

d) Construye una tabla en la que se pueda ver el valor del área después de cada iteración

e) Si el volumen del tetraedro inicial es $\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$, Calcula el volumen de uno de los 4 tetraedros que se generan después de la primera iteración.

f) ¿A cuanto equivale el volumen de la figura resultante en después de la primera iteración?

g) ¿Cual es el volumen del octaedro desaparece en esta iteración?

h) Construye una tabla en la que puedas ver el numero de tetraedros que se generan después de cada iteración, el volumen de los esos tetraedros y además el volumen de la figura que resulta en cada iteración.

i) ¿Que pasara en la n-esima iteración? ¿a cuanto equivaldrá el volumen? ¿Que representa ese valor?

# 8. BIBLIOGRAFÍA

[1] LORNELL Randi, WESTERBERG Judy. FRACTALS IN HIGH SCHOOL: EXPLORING A NEW GEOMTRY. The Mathematics Teacher. Vol 92, N° 3, 1999, pág. 260 – 269.

[2] CASTRO GRANADOS Fabiola, Geometría Fractal en el Bachillerato. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 1994.

[3] PÉREZ NOLVIS Patricia. Talleres sobre geometría fractal aplicados a grupos de estudiantes de básica secundaria y media. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2005.

[4] ACEVEDO GALVIS Diana María. Fractales en la secundaria: explorando una nueva geometría – Análisis de un artículo. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2008.

[5] ESTRADA William Fernando. Geometría fractal, conceptos y procedimientos para construcción de fractales. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá, 2004.

[6] PICO SÁNCHEZ Wilson. La pirámide de Sierpinski. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 2004.

[7] SILVA Ángela Andrea, Rojas Sarmiento Irene. Sistema Modular Didáctico como apoyo para la enseñanza de la geometría fractal. Tesis de grado. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2008.

[8] MATAJIRA SANABRIA Tania Loreta. Estudio sistemático de la curva de Koch. Monografía. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2006

[9] Teoría cognitiva de Piaget. Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos16/teorias-piaget/teorias-piaget.shtml

[10] El triángulo de Sierpinski. Recuperado de http://fractales.org/?p=45&akst_action=share-this

[11] El conjunto de Cantor. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor