EL TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ

YELSIN LEONEL CÁCERES GÓMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2021

EL TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ

YELSIN LEONEL CÁCERES GÓMEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Javier Enrique Camargo García
Doctorado en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

AGRADECIMIENTOS

Por dónde comenzar. Dios, creador del Universo, gracias por un día más de vida, por aquella familia que me brindó su apoyo incondicional en este camino tan tortuoso e incierto, por aquellos amigos, colegas, compañeros de la Universidad Industrial de Santander que soportaron mis constantes abusos, mis tonterías, mis desplantes, por esas zonas refrescantes aledañas a la Universidad, cómo lidiar con tanto ajetreo sin ellas, por aquellas personas que se toparon conmigo en algún instante de mi vida, nada es al azar. En particular, quiero mencionar lo siguiente: Gracias profesor Javier Enrique Camargo García por su infinita paciencia, sus enseñanzas, su colaboración en este proyecto y gracias Sebastián Nicolay Cabas Avendaño por sus consejos, su compañía, su sinceridad.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: EL TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ *

AUTOR: YELSIN LEONEL CÁCERES GÓMEZ **

PALABRAS CLAVE: PROPIEDAD S, MULTIFUNCIONES, EL ESPACIO DE CANTOR, LOCALMENTE CONEXO.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un continuo de Peano es un continuo localmente conexo. Dado un espacio métrico X y $Y \subseteq X$, diremos que Y tiene la propiedad S si para cada $\epsilon > 0$, existen $A_1, ..., A_n$ subconjuntos conexos de Y tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y diám$(A_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Así mismo, diremos que una función $F\colon X \to \mathcal{CL}(Y)$ es semicontinua superiormente en $x_0 \in X$ si para cada abierto V de Y, con $F(x_0) \subseteq V$, existe un abierto U de X, con $x_0 \in U$, tal que $F(x) \subseteq V$ para cada $x \in U$, donde $\mathcal{CL}(Y) = \{A \subseteq Y \mid A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$. En este trabajo daremos una condición necesaria y suficiente para que un continuo sea un continuo de Peano. También, se mostrarán algunas propiedades con respecto a las multifunciones.

En el Capitulo 1, se darán algunos conceptos básicos de topología y las propiedades más relevantes sobre la propiedad S que se usarán posteriormente. En el Capítulo 2 veremos un resultado imprescindible que nos ofrece una manera de construir funciones continuas y sobreyectivas (Teorema General de Funciones). En el Capítulo 3, usaremos las multifunciones para mostrar que el espacio de Cantor es el único compacto métrico, totalmente disconexo y sin puntos aislados. También, probamos que todo métrico compacto es cociente del espacio de Cantor. Finalmente, En el Capítulo 4, se enuncia *El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*, el cual brinda una condición necesaria y suficiente para que un continuo sea un continuo de Peano.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctorado en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE HAHN-MAZURKIEWICZ THEOREM *

AUTHOR: YELSIN LEONEL CÁCERES GÓMEZ **

KEYWORDS: PROPERTY S, MULTIFUNCTIONS, THE CANTOR SPACE, LOCALLY CONNECTED.

DESCRIPTION:

A continuum is a compact, connected, and nonempty metric space. A Peano continuum is a locally connected continuum. Given a metric space X and $Y \subseteq X$, we will say that Y has the property S if for each $\epsilon > 0$, there are $A_1, ..., A_n$ connected subsets of Y such that $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ and diám$(A_i) < \epsilon$ for each $i \in \{1, ..., n\}$. Likewise, we will say that a function $F\colon X \to \mathcal{CL}(Y)$ is upper semicontinuous in $x_0 \in X$ if for every V open of Y, with $F(x_0) \subseteq V$, there is an open U of X, with $x_0 \in U$, such that $F(x) \subseteq V$ for each $x \in U$, where $\mathcal{CL}(Y) = \{A \subseteq Y \mid A \text{ is closed and } A \neq \emptyset\}$. In this work we will give a necessary and sufficient condition for a continuum to be a Peano continuum. Also, some properties will be shown regarding multifunctions.

In Chapter 1, Some basic topology concepts and the most relevant properties of the S property will be given that will be used later. In Chapter 2 We will see an essential result that offers us a way to construct continuous and surjective functions (General Function Theorem). In Chapter 3, we will use the multifunctions to show that the Cantor space is the only metric compact, totally disconnected and without isolated points. Also, we prove that every compact metric is a quotient of the Cantor space. Finally, In Chapter 4, *The Hahn-Mazurkiewicz Theorem* is stated, which provides a necessary and sufficient condition for a continuum to be a Peano continuum.

---

* Bachelor Thesis

** Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

INTRODUCCIÓN

El final del siglo XIX fue un momento emocionante en el mundo matemático. El análisis real se había puesto en pie de manera rigurosa gracias al esfuerzo combinado de muchos matemáticos, por mencionar algunos: Cauchy y Weierstrass. Cauchy y Weierstrass defininieron el concepto de continuidad usando la conocida definición $\varepsilon - \delta$, a saber, una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \mathbb{R}$, con $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Además, una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si lo es en cada punto $x \in \mathbb{R}$. Se suponía que esta definición capturaba la idea intuitiva de una curva ininterrumpida, pero admitía curvas bastante problemáticas (Curva de Weierstrass). Para eliminar el vago concepto de una curva, que generalmente se considera como un objeto continuo, en 1887 Camille Jordan introduce una definición rigurosa de curva continua, a saber, una curva (con puntos extremos) es una función continua cuyo dominio es el intervalo $[0, 1]$. En 1890, sólo tres años después de la definición que precisó Jordan, Peano exhibió la curva que ahora lleva su nombre y la usó para mostrar que una curva continua no puede ser encerrada en una región arbitrariamente pequeña. Este fue un ejemplo temprano de lo que se conoce como fractal. Poco antes, en 1878, George Cantor desarrolló su teoría de conjuntos. Una de las consecuencias impactantes fue que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ tenían la misma cardinalidad. Esto significa que existe una biyección entre ambos conjuntos, que Cantor anotó explícitamente. Este resultado cuestionó las ideas intuitivas sobre el concepto (bastante difícil de alcanzar) de dimensión y una pregunta obvia después del descubrimiento de Cantor fué: ¿podemos encontrar una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, tal que sea continua o incluso suave? La respuesta a esta pregunta resultó ser “no” (un resultado de 1879 por Netto). Sin embargo, se mantuvo abierta durante más de una década si también era imposible encontrar una función continua y sobreyectiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o, estrechamente relacionada, una función $g\colon [0,1] \to [0,1]^2$. Peano sorprendió a la comunidad matemática en 1890 al construir una función continua y sobreyectiva $g\colon [0,1] \to [0,1]^2$, denominada una "curva que llena el plano". Este resultado es históricamente importante, pues hizo que las personas se dieran cuenta de que la continuidad es un concepto muy interesante y que no siempre se comporta como uno esperaría intuitivamente. Por ejemplo, las curvas que llenan el plano muestran que las funciones continuas pueden incrementar la dimensión; resultado muy conflictivo a principios del siglo XX. En este trabajo estudiaremos el *Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*. Este teorema caracteriza los continuos localmente conexos como los continuos que son imagen continua del intervalo cerrado $[0,1]$. Estos continuos también se conocen como *continuos de Peano* en honor a Peano, por su descubrimiento de las curvas que llenan el plano, que mencionamos anteriormente. Nos basaremos en la demostración presentada en [1]. Para este estudio, consideramos las multifunciones como herramienta principal. Esta demostración es diferente, creativa y fácil de entender, comparando con las demostraciones que presentan los libros clásicos de topología general del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Además, mostraremos algunas consecuencias directas de este teorema.

[1] S. B. Jr. NADLER. *Continuum Theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

1. PRELIMINARES

En este capítulo enunciaremos las definiciones y resultados básicos de topología para desarrollar los objetivos de este trabajo. Recordemos que dada una función continua $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos se dice abierta (cerrada) si $f(U)$ es abierto (es cerrado) de Y para cada abierto (cerrado, respectivamente) U de X. El siguiente teorema es fácil de probar y lo tendremos en cuenta en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.0.1. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Recordemos que dos espacios son homeomorfos si existe una función biyectiva tal que tanto la función como su inversa son continuas. La siguiente proposición muestra una condición necesaria y suficiente para que una biyección continua sea un homeomorfismo. Una prueba de ésta se puede consultar en [2].

Proposición 1.0.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y biyectiva. Son equivalentes*

(1) f es un homeomorfismo;

(2) f es abierta;

(3) f es cerrada.

Dada una relación de equivalencia sobre un espacio topológico, existe una manera natural de proveer una topología a la colección de clases inducida por la relación. Esta topología se conoce como topología cociente y la definimos a continuación.

---

[2] & E.J VILLAMIZAR ROA J.E CAMARGO GARCÍA. *Topología General*. 2018.

Definición 1.0.3. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f\colon X \to Y$ una función sobreyectiva. Definimos la topología cociente, denotada por τ_f, como la topología más fina en Y tal que f es continua. En este caso, diremos que Y es un espacio cociente de X.

Ahora, nos interesa determinar cuándo una función continua y sobreyectiva es una función cociente. Una condición la establece la siguiente proposición [2].

Proposición 1.0.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces f es una función cociente.*

En el siguiente ejemplo definimos el espacio de Cantor, el cual abordaremos constantemente en los capítulos subsiguientes.

Ejemplo 1.0.5. *Sea $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donde $\{0,1\}$ tiene la topología discreta. El espacio producto $\mathcal{C}$ se conoce como el espacio de Cantor. Por el Teorema de Tychonoff, $\mathcal{C}$ es compacto. Además, $(\mathcal{C}, d)$ es un espacio métrico, donde d está definida por*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \;\; \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}.$$

Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Considerando

$$[x_1 \dots x_k] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \;\mid\; y_i = x_i, \;\; \forall i \in \{1, \dots, k\}\}, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N},$$

tenemos que $\mathcal{B}_x = \{[x_1 \dots x_k] \;\mid\; k \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de x en $\mathcal{C}$.

No es difícil argumentar que los elementos de la base $\mathcal{B}_x$ definida anteriormente son también cerrados del espacio de Cantor.

A continuación, enunciaremos una proposición fundamental para el desarrollo del presente escrito y la aplicaremos constantemente. Una prueba puede encontrarse en [1].

Proposición 1.0.6. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados, no vacíos, en un espacio métrico compacto X, tal que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ y U es un abierto en X tal que $Z \subseteq U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq U$, para cada $n \geq N$.*

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la Proposición 1.0.6.

Corolario 1.0.7. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados, no vacíos, en un espacio métrico compacto X. Si $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto, diferente del vacío.*

La propiedad S es una condición muy útil cuando estudiamos espacios localmente conexos. Sin embargo, la propiedad S no es muy conocida. A continuación la definimos y probamos algunas propiedades. Una gran cantidad de las definiciones y resultados presentados aquí son tomamos de [1].

Definición 1.0.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Y de X tiene la propiedad S si para cada $\epsilon > 0$, existen $A_1, ..., A_n$ subconjuntos conexos de Y tales que

(1) $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

(2) diám$(A_i) < \epsilon, \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Es claro que $[0,1]$ o $[0,1]^2$ tienen la propiedad S. Más adelante, en el Teorema 1.0.12 mostraremos que un espacio métrico compacto es localmente conexo si, y solo si, tiene la propiedad S. Antes, mostramos algunas propiedades relacionadas con la propiedad S. Recordemos que un espacio topológico es *localmente conexo* si todo punto tiene una base de vecindades abiertas conexas.

Definición 1.0.9. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que X es *conexo en pequeño en* x si cada vecindad de x contiene una vecindad conexa de x. Diremos que X es conexo en pequeño si es conexo en pequeño en todo $x \in X$.

La siguiente proposición nos muestra que la conexidad local y la conexidad en pequeño son condiciones equivalentes si se estudian de manera global. De esta manera, si queremos probar que un espacio es localmente conexo, basta encontrar vecindades conexas arbitrariamente pequeñas en cada punto, no necesariamente abiertas, simplificando el procedimiento.

Proposición 1.0.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

(1) X es localmente conexo en cada $x \in X$ si, y solo si, cada componente de cada conjunto abierto es abierto.

(2) X es conexo en pequeño si, y solo si, X es localmente conexo.

Prueba: (1) Supongamos que X es un espacio localmente conexo en cada $x \in X$. Sea U un abierto y C una componente de U. Veamos que C es abierto. Sea $x \in C$. Como $x \in U$, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subseteq U$. Así, $x \in V \subseteq C$ y C es abierto. Recíprocamente, supongamos que cada componente de cada conjunto abierto es abierto. Sean $x \in X$ y N una vecindad de x. Como N es una vecindad de x, existe un abierto U tal que $x \in U$. Sea V la componente componente conexa de U que contiene x. Por hipótesis, V es abierto y conexo. Además, $x \in V \subseteq U \subseteq N$. Por lo tanto, X es localmente conexo.

(2) Sabemos que la conexidad local implica conexidad en pequeño. Supongamos que X es conexo en pequeño. Sea U abierto de X y C una componente de U. Veamos que C es abierto. Sea $x \in C$. Como X es conexo en pequeño, existe un conexo W tal que $x \in W^\circ$ y $W \subseteq U$. Como C es componente, $W \subseteq C$. Así, $x \in C^\circ$. Como x fue un punto arbitrario, C es abierto. De lo anterior, X es localmente conexo por la parte (1).

□

Diremos que un espacio topológico es un espacio de Peano, si es un espacio localmente conexo. Con el siguiente teorema mostramos que la propiedad S implica conexidad local.

Teorema 1.0.11. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Si* X *tiene la propiedad* S, *entonces* X *es un espacio de Peano.*

Prueba: Veamos que X es conexo en pequeño. Sean $p \in X$ y N una vecindad de p. Como X es un espacio métrico, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{B}\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq N. \tag{*}$$

Como X tiene la propiedad S (ver Definición 1.0.8), existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de X tales que:

(1) $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

(2) diám$(A_i) < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea

$$G = \bigcup \{A_i : p \in \overline{A_i}\}.$$

Veamos que

a) G es conexo;

b) $p \in G^{\circ}$; y

c) $G \subseteq N$.

En efecto,

a) Supongamos que G no es conexo. Entonces existen S y T abiertos en X tales que

(3) $G \subseteq S \cup T$;

(4) $G \cap S \neq \emptyset$ y $G \cap T \neq \emptyset$; y

(5) $S \cap T = \emptyset$.

Como $p \in X$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p \in A_k \subseteq \overline{A_k}$. Note que $A_k \subseteq G$. Por (2), desde que A_k es conexo, tenemos que $A_k \subseteq S$ o $A_k \subseteq T$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A_k \subseteq S$. Por (4), existe $A_j \subseteq G$ tal que

(6) $A_j \subseteq T$;

(7) $p \in \overline{A_j}$.

Por (7), existe una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq A_j$ tal que $x_m \to p$. Por (6), desde que $x_m \to p$, tenemos que $p \in \overline{T}$. Así, $p \in S \cap \overline{T}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, G es conexo.

b) Note que si $G = X$, entonces G es abierto. Caso contrario, supongamos que $p \notin G^\circ$. Entonces $p \in X \setminus G^\circ = \overline{X \setminus G}$. Luego, existe una sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus G$ tal que $y_m \to p$. Note que $p \in G$, $X \setminus G = \bigcup\{A_i \,:\, p \notin \overline{A_i}\}$ y

$$y_m \notin G, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

De esto, como $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus G$, existe una subsucesión $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A_{k_0}$, para algún $A_{k_0} \in \{A_i \,:\, p \notin \overline{A_i}\}$. Como $y_m \to p$, entonces $y_{m_k} \to p$ y $p \in \overline{A_{k_0}}$. Así, $A_{k_0} \subseteq G$, lo cual contradice (**). Por lo tanto, $p \in G^\circ$.

c) Sea $g \in G$. Entonces $g \in A_i$, para algún $A_i \subseteq G$ con $p \in \overline{A_i}$. Note que

$$d(g,p) \leq \text{diám}(\overline{A_i}) = \text{diám}(A_i) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{***}$$

Por (*) y (***), tenemos que $g \in \mathcal{B}(p, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq N$. Como g es arbitrario, se sigue que $G \subseteq N$.

Por a),b) y c), concluimos que existe G una vecindad conexa de p tal que

$$p \in G^{\circ} \subseteq G \subseteq N.$$

Como p es arbitrario, se sigue que X es conexo en pequeño en todo $p \in X$. Por la Proposición 1.0.10, inciso (2), concluimos que X es localmente conexo. $\square$

Es fácil ver que $\mathbb{R}$ es un espacio de Peano que no tiene la propiedad S; sin embargo, en espacios métrico compactos, estos conceptos son equivalentes, como mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 1.0.12. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto no vacío. Son equivalentes:*

(1) X es un espacio de Peano.;

(2) X tiene la propiedad S.

Prueba: Supongamos que X es localmente conexo. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X es localmente conexo, desde que $\mathcal{B}(x, \frac{\epsilon}{2})$ es una vecindad de x, existe $V_x \subseteq X$ abierto y conexo tal que $V_x \subseteq \mathcal{B}(x, \frac{\epsilon}{2})$. Note que la familia

$$\mathcal{C} = \{V_x : x \in X\}$$

es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n} \in \mathcal{C}$ tales que:

(a) $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$;

(b) diám$(V_{x_i}) < \epsilon, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por a), b) y la arbitrariedad de ϵ, concluimos que X tiene la propiedad S. La recíproca es inmediata del Teorema 1.0.11. $\square$

Sean X un espacio topológico, Y un subespacio de X y $A \subseteq Y$. Usaremos la notación $\overline{A}^Y$ o $\overline{A}^X$ para hacer distinción entre la adherencia de A en Y o en X, respectivamente. El siguiente teorema muestra que si un conjunto con la propiedad S le unimos puntos límite, entonces esta unión sigue siendo un conjunto con la propiedad S.

Proposición 1.0.13. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $Y \subseteq X$ tal que Y tiene la propiedad S. Entonces, para cualquier $Z \subseteq X$ tal que*

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y},$$

Z tiene la propiedad S y, por lo tanto, Z es un espacio de Peano.

Prueba: Sean $(X; d)$ un espacio métrico y $Y \subseteq X$ tal que Y tiene la propiedad S. Sea $Z \subseteq X$ tal que

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}.$$

Veamos que Z tiene la propiedad S. Sea $\epsilon > 0$. Como Y tiene la propiedad S, existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de Y tales que

1) $Y = \bigcup_{i=1}^n A_i$;

2) diám$(A_i) < \epsilon, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ahora, sea

$$B_i = \overline{A_i}^Z, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Note que

- $\overline{A_i}^Z = \overline{A_i}^X \cap Z, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $A_i \subseteq Z, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $A_i \subseteq \overline{A_i}^X, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$;

- $A_i \subseteq B_i \subseteq \overline{A_i}^X, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo anterior, B_i es conexo, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq Z.$$

Además,

$$\overline{Y}^Z = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}^Z = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}^Z = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Como $Z \subseteq \overline{Y}^X$, entonces

$$Z \subseteq \overline{Y}^X \cap Z = \overline{Y}^Z = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Así,

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Ahora, note que

$$B_i = \overline{A_i}^Z = \overline{A_i}^X \cap Z \subseteq \overline{A_i}^X.$$

Luego,

$$\text{diám}(B_i) \leq \text{diám}(\overline{A_i}^X) = \text{diám}(A_i) < \epsilon.$$

Así,

1) $Z = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$;

2) diám$(B_i) < \epsilon, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$,

y Z tiene la propiedad S. $\square$

La conexidad local no es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas (ver [2]). Una condición afirmativa la establece el siguiente resultado [2].

Teorema 1.0.14. *Sea $f\colon X \to Y$ una función cociente. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Las cadenas de conjuntos conexos constituyen otra herramienta que usaremos más adelante. A continuación su definición.

Definición 1.0.15. Sea (X, d) un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $S(\epsilon)$-cadena es una colección indexada, finita y no vacía, $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ de subconjuntos de X satisfaciendo:

I) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$;

II) L_i es conexo, para cada $i \in \{1, ..., n\}$;

III) diám$(L_i) < \epsilon \cdot 2^{-i}$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Si $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena, entonces cada $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un eslabón de $\mathcal{L}$. Si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, entonces decimos que $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)$-cadena de x a y. Si $A \subseteq X$, entonces definimos $S(A, \epsilon)$ como sigue:

$$S(A, \epsilon) = \{y \in X \ | \ \text{existe una } \ S(\epsilon)\text{-cadena de algún punto de } \ A \ \text{ a } \ y\}.$$

Observación 1.0.16. De la Definición 1.0.15, si tenemos una $S(\epsilon)$-cadena

$$\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$$

de algún punto de A a y, entonces

$$L_i \subseteq S(A, \epsilon), \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

La propiedad S no es una propiedad hereditaria. Sin embargo, ahora definimos unos subconjuntos especiales que heredan esta propiedad.

Proposición 1.0.17. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces para cualquier subconjunto no vacío A de X, y cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S.*

Prueba: Sean (X, d) un espacio métrico con la propiedad S, A un subconjunto no vacío de X y $\epsilon > 0$. Fijemos un $\delta > 0$. Veamos que

(a) $S(A, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$;

(b) $\mathcal{B}_i$ es conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$;

(c) diám$(\mathcal{B}_i) < \delta$.

En efecto, sean $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}. \tag{1}$$

y

$K = \{y \in S(A, \epsilon) \mid$ existe una $S(\epsilon)$-cadena con a lo más k eslabones de algún punto de A a y$\}$.

Como X tiene la propiedad S, existe una colección finita de subconjuntos conexos, que cubren a X, tales que cada uno tiene diámetro menor que $\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Sean $E_1, \ldots, E_n$ los miembros de esta colección que intersectan a K.

Note que si ningún miembro de la cubierta de X intersecta a K, entonces $K = \emptyset$. Así, como $A \subseteq K$, se sigue que $A = \emptyset$. Lo anterior contradice que $A \neq \emptyset$. En efecto, sea $y \in K$. Como

$$K \subseteq S(A, \epsilon) \subseteq X,$$

existe una elemento de la cubierta de X que tiene a y. Lo anterior contradice que ningún miembro de la cubierta de X intersecta a K. De lo anterior, se tiene lo siguiente:

(2) $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i$;

(3) $E_i \cap K \neq \emptyset$;

(4) E_i es conexo, $\forall i = 1, \ldots, n$;

(5) diám$(E_i) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, \ \ \forall i = 1, \ldots, n.$

Ahora, veamos que

$$E_i \subseteq S(A, \epsilon), \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por (3), existe una $S(\epsilon)$-cadena

$$\{L_1, \ldots, L_t\},$$

con $t \leq k,$ de algún punto de A a un punto de $E_i \cap K$. De (4), (5) y la Definición 1.0.15, tenemos que

$$\{L_1, \ldots, L_t, L_{t+1} = E_i\}$$

es una $S(\epsilon)$-cadena de un punto de A a cualquier punto de E_i (ver Observación 1.0.16). Por la arbitrariedad de i, se sigue el resultado. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\},$ sea $\mathcal{P}_i$ la colección de conjuntos M satisfaciendo:

(7) $M \subseteq S(A, \epsilon)$;

(8) $M \cap E_i \neq \emptyset$;

(9) M es conexo;

(10) diám$(M) < \frac{\delta}{4}$.

Ahora, sea

$$\mathcal{B}_i = \bigcup \mathcal{P}_i, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Note que cada E_i satisface (7)-(10) [(7) por (6), (8) desde que $E_i \neq \emptyset$, (9) por (4) y (10) por (1) y (5)]. Por lo anterior, tenemos que

$$E_i \subseteq \mathcal{B}_i, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

Ahora, veamos que $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ satisfacen (a)-(c). Por (4), (8) y (9), cada $\mathcal{B}_i$ es conexo. Veamos que por (1), (5), (8) y (9), cada B_i tiene diámetro menor que δ. En efecto, sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$. Entonces existen $M_1, M_2 \subseteq \mathcal{B}_i$ tales que $b_1 \in M_1$ y $b_2 \in M_2$. Sean $m_1 \in M_1 \cap E_i$ y $m_2 \in M_2 \cap E_i$. Luego,

$$\begin{aligned} d(b_1, b_2) &\leq d(b_1, m_1) + d(m_1, m_2) + d(m_2, b_2) \\ &< \frac{\delta}{4} + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{4} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado (c). Por (7),

$$\mathcal{B}_i \subseteq S(A, \epsilon), \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Solo nos queda por probar

$$S(A, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i. \tag{**}$$

En efecto, sea $y \in S(A, \epsilon)$. Note que por (2) y (11), tenemos

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i.$$

Luego, para probar (**), suponga que $y \notin K$. Como $y \in S(A, \epsilon)$, existe una $S(\epsilon)$-cadena

$$\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_m\}$$

de un punto de A a y. Como $y \notin K$, entonces $m > k$. Sea

$$H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i.$$

Claramente, por la definición de K, $L_k \subseteq K$. Por (2), tenemos que $L_k \cap E_i \neq \emptyset$, para algún i. Veamos que $H \subseteq \mathcal{B}_i$, esto es, probemos que H satisface (7)-(10). Por la Observación 1.0.16, tenemos

$$\bigcup \mathcal{L} \subseteq S(A, \epsilon).$$

Luego, H satisface (7). Desde que $L_k \cap K \neq \emptyset$, H satisface (8). Por (1) y (2) de la Definición 1.0.15, tenemos

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \text{diám}(L_i)$$

y, por lo tanto, por (3) de la Definición 1.0.15, tenemos

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Luego, por (1), H satisface (10). Así, $H \subseteq \mathcal{B}_i$. Por lo tanto, como $y \in L_m$, se sigue que $y \in \mathcal{B}_i$, esto es, se cumple la condición (a). $\square$

Continuamos mostrando propiedades de los conjuntos $S(A, \epsilon)$.

Proposición 1.0.18. *Sean (X,d) un espacio métrico, A un subconjunto, no vacío, de X y $\epsilon > 0$. Entonces:*

(1) diám$(S(A,\epsilon)) \leq$ diám$(A) + 2\epsilon$;

(2) Si A es conexo, entonces $S(A,\epsilon)$ es conexo;

(3) Si (X,d) tiene la propiedad S, entonces $S(A,\epsilon)$ es un subconjunto abierto de X.

Prueba: Probemos cada uno de los incisos:

(1) Sean $x, y \in S(A,\epsilon)$. Entonces existen $S(\epsilon)$-cadena $\{L_1,\ldots,L_n\}$ desde a_x hasta x, con $a_x \in A$, y una $S(\epsilon)$-cadena $\{C_1,\ldots,C_n\}$ desde a_y hasta y, con $a_y \in A$. Luego,

$$d(x,a_x) \leq \text{diám}\left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon.$$

Análogamente, se puede ver que $d(y,a_y) < \epsilon$. Por lo tanto,

$$d(x,y) \leq d(x,a_x) + d(a_x,a_y) + d(a_y,y) < 2\epsilon + \text{diám}(A),$$

esto es, diám$(S(A,\epsilon)) \leq$ diám$(A) + 2\epsilon$.

(2) Supongamos que A es conexo. Sea $x \in S(A,\epsilon)$. Entonces existe $\{L_1,\ldots,L_n\}$ una $S(\epsilon)$-cadena de x a algún punto de A. Note que $L_1 \cup \ldots \cup L_n \cup A$ es conexo y

$$L_1 \cup \ldots \cup L_n \cup A \subseteq S(A,\epsilon).$$

Como x fue un punto arbitrario de $S(A,\epsilon)$, $S(A,\epsilon)$ es conexo.

(3) Supongamos que X tiene la propiedad S. Sea $y \in S(A,\epsilon)$. Entonces existe una $S(\epsilon)$-cadena

$$\mathcal{L} = \{L_1,\ldots,L_n\}$$

de un punto de A a y. Por otro lado, como X tiene la propiedad S, entonces X es localmente conexo. Luego, existe U abierto conexo en X tal que

$$y \in U \;\; y \;\; \text{diám}(U) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Así,

$$\mathcal{L}_0 = \{L_1, \ldots, L_n, L_{n+1} = U\}$$

es una $S(\epsilon)$-cadena de un punto de A a cualquier punto de U, esto es, $U \subseteq S(A, \epsilon)$ y $S(A, \epsilon)$ es abierto de X.

□

Proposición 1.0.19. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, X es la unión finita de conjuntos conexos, donde cada uno tiene la propiedad S y su diámetro es menor que ϵ; además, esos conjuntos pueden ser elegidos abiertos en X o cerrados en X.*

Prueba: Supongamos que X tiene la propiedad S y $\epsilon > 0$. Por la Definición 1.0.8, existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de X tales que

(a) $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

(b) diám$(A_i) < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por la Proposición 1.0.17 y la Proposición 1.0.18, incisos (2) y (3), tenemos

$$S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right), \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

tiene la propiedad S, son conexos y abiertos. Por la Proposición 1.0.18, inciso (1), tenemos

$$\text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) < \text{diám}(A_i) + 2\left(\frac{\epsilon}{3}\right) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon, \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Observación 1.0.20. La condición de subconjuntos abiertos en la Proposición 1.0.19, puede ser cambiada por subconjuntos cerrados. En efecto, por ser

$$S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right), \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

conexos, entonces

$$\overline{S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)}, \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

es conexo y tiene la propiedad S (ver Proposición 1.0.13). Por la Proposición 1.0.18, inciso (1) y propiedades del diámetro, tenemos

$$\text{diám}\left(\overline{S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)}\right) = \text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) < \epsilon.$$

$\square$

Teorema 1.0.21. *Si (X, d) es un continuo de Peano, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, X es la unión finita de continuos de Peano, donde cada uno tiene diámetro menor que ϵ.*

Prueba: Supongamos que X es un continuo de Peano y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1.0.12, X tiene la propiedad S. Por la Proposición 1.0.19, existe $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos conexos cerrados, donde cada uno tiene la propiedad S y diámetro menor que ϵ. Note que A_i es un continuo, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por el Teorema 1.0.11, concluimos que A_i es un espacio de Peano, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Finalizamos este capítulo con un definición y dos resultados que usaremos en la Parte II.

Definición 1.0.22. Una cadena débil es una colección indexada, finita y no vacía, $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ de conjuntos tales que

$$L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n-1\}.$$

Sea $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ una cadena débil. Entonces decimos que $\mathcal{L}$ es una cadena débil de L_1 a L_n y, si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una cadena de x a y. Cada $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un eslabón de $\mathcal{L}$.

Lema 1.0.23. *Si $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_m\}$ y $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ son cadenas débiles con $C_1 = L_1$, entonces existe una cadena débil $\mathcal{P}$ de C_1 a L_n tal que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$.*

Prueba: Considere

$$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_{2m+n}\},$$

donde

- $P_i = C_i, \ \ 1 \leq i \leq m;$
- $P_{m+i} = C_{m-i+1}, \ \ \forall 1 \leq i \leq m;$
- $P_{2m+i} = L_i, \ \ \forall 1 \leq i \leq n.$

Por lo anterior, es claro que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ es una cadena débil. $\square$

Lema 1.0.24. *Sean S un espacio topológico conexo, $x, y \in S$. Si $\mathcal{C}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados no vacíos de S tal que*

$$\bigcup \mathcal{C} = S,$$

entonces la colección entera $\mathcal{C}$ puede ser indexada para formar una cadena débil de x a y.

Prueba: Como $\bigcup \mathcal{C} = S$, existe $C_1 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_1$. Sea

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} \ \mid \text{existe una } \mathcal{L} \text{ cadena débil de } C_1 \text{ a } C \text{ tal que } \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}\}.$$

Veamos que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. En efecto, considere los conjuntos

$$A = \bigcup \mathcal{C}_0 \text{ y } B = \bigcup \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0.$$

Veamos que cualquier miembro de $\mathcal{C}$, el cual intersecta a un miembro de $\mathcal{C}_0$, es también un miembro de $\mathcal{C}_0$. En efecto, sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \cap W \neq \emptyset$, con $W \in \mathcal{C}_0$. Como $W \in \mathcal{C}_0$, entonces existe

$$\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$$

una cadena débil de C_1 a W, con $L_1 = C_1$ y $W = L_n$, tal que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$. Considere

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \cup \{L_{n+1}\},$$

con $L_{n+1} = C$. Como $C \cap W \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{P}$ satisface la Definición 1.0.22. Por lo anterior, se sigue que $C \in \mathcal{C}_0$. Así, $A \cap B = \emptyset$. Note que

- A y B son cerrados, pues ambos son una unión finita de conjuntos cerrados de S; y
- Como $\bigcup \mathcal{C} = S$, entonces $A \cup B = S$.

Como $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y $C_1 \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$. Como S es conexo, se sigue que $B = \emptyset$. Además, desde que $\emptyset \notin \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$. Por lo anterior, se sigue que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0. \tag{*}$$

Como $y \in S,$ entonces existe $C_1' \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C_1'$. Como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0,$ entonces existe $\mathcal{L}$ una cadena débil de C_1 a C_1' tal que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$. Por el Lema 1.0.23, concluimos el resultado. $\square$

2. MULTIFUNCIONES

En este capítulo estudiaremos propiedades y resultados de multifunciones semicontinuas superiormente para desarrollar los objetivos de este trabajo. Una gran cantidad de las definiciones y resultados presentados en este capítulo los tomamos de NADLER, *Continuum Theory*.

Dado X un espacio topológico, usaremos la siguiente terminología:

- $\mathcal{CL}(X) = \{A \subseteq X \mid A$ es cerrado y $A \neq \emptyset\}$.
- $\mathcal{K}(X) = \{A \subseteq X \mid A$ es compacto y $A \neq \emptyset\}$.
- Si X es un espacio vectorial topológico, $\mathcal{K}_c(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) \mid A$ es convexo$\}$.

No es difícil mostrar las siguientes observaciones.

Observación 2.0.1. Sea X un espacio topológico.

1. Si X es Hausdorff, entonces $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X)$.
2. Si X es compacto, entonces $\mathcal{K}(X) = \mathcal{CL}(X)$.

Definición 2.0.2. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $F\colon X \to \mathcal{CL}(Y)$ es semicontinua superiormente en $x_0 \in X$ si para cada abierto V de Y, con $F(x_0) \subseteq V$, existe un abierto U de X, con $x_0 \in U$, tal que $F(x) \subseteq V$, para cada $x \in U$. Decimos que F es semicontinua superiormente si F es semicontinua superiormente en cada punto de X.

Los siguientes dos resultados sobre funciones semicontinuas superiormente serán usados en la prueba del Teorema 2.0.5 (Teorema General de Funciones), un resultado muy importante para este trabajo.

Proposición 2.0.3. *Sea $F\colon X \to \mathcal{CL}(Y)$ una multifunción semicontinua superiormente tal que $|F(X)| = 1$, para cada $x \in X$. Entonces $g : X \to Y$ definida por $g(x) = y_x$, donde y_x es el único elemento de $F(x)$, es un función continua.*

Prueba: Supongamos que F es semicontinua superiormente, tal que $|F(x)| = 1$, para cada $x \in X$ y veamos que $g : X \to Y$ definida por $g(x) = y_x$, donde y_x es el único elemento de $F(x)$, es un función continua. Sea V abierto en Y y veamos que $g^{-1}(V)$ es abierto en X. Sea $x \in g^{-1}(V)$. Entonces $g(x) \in V$. Note que $F(x) \subseteq V$, pues $g(x) = y_x \in F(x) = \{y_x\}$. Como F es semicontinua superiormente, existe U abierto en X, con $x \in U$, tal que $F(x) \subseteq V$, para cada $x \in U$. Ahora, veamos que $U \subseteq g^{-1}(V)$. Sea $z \in U$. Entonces $F(z) \subseteq V$, esto es, $g(z) = y_z \in V$. Por lo tanto, $z \in g^{-1}(V)$ y g es continua. $\square$

Lema 2.0.4. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n\colon X \to \mathcal{CL}(Y)$ una multifunción semicontinua superiormente, y supongamos que $F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x)$, para todo $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $G : X \to \mathcal{CL}(Y)$ definida por $G(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n(x)$, para todo $x \in X$. Entonces:*

I) G es semicontinua superiormente

II) Si $Y = \bigcup_{x\in X} F_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $Y = \bigcup_{x\in X} G(x)$

Prueba: I) Note que G está bien definida, por el Corolario 1.0.7. Ahora, veamos que G es semicontinua superiormente. Sean $x_0 \in X$ y V abierto en Y, con $G(x_0) \subseteq V$. Como $G(x_0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n(x_0)$ y $F_{n+1}(x_0) \subseteq F_n(x_0),$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.0.6, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(x_0) \subseteq V$, para todo $n \geq N$. Sea $n_0 \geq N$. Como F_{n_0} es semicontinua superiormente, existe U abierto en X, con $x_0 \in U$, tal que $F_{n_0}(x) \subseteq V$, para cada $x \in U$. Note que $G(x) \subseteq F_{n_0}(x)$. Por lo tanto, $G(x) \subseteq V$, para cada $x \in U$ y G es semicontinua superiormente.

II) Probemos que $Y \subseteq \bigcup_{x\in X} G(x)$. Sea $y \in Y$. Como $Y = \bigcup_{x\in X} F_n(x)$, existe $x_n \in X$ tal que $y \in F_n(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \to x_0$, para algún $x_0 \in X$. Veamos que $y \in G(x_0)$. Supongamos que $y \notin G(x_0)$. Considere $U = Y \setminus \{y\}$. Note que U es abierto en Y y $G(x_0) \subseteq U$, pues $y \notin G(x_0)$. Por la Proposición 1.0.6, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m(x_0) \subseteq U$. Como F_m es semicontinua superiormente, existe V abierto en X, con $x_0 \in V$, tal que $F_m(x) \subseteq U$, para cada $x \in V$. Por otra parte, como $x_{n_k} \to x_0$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n_r > m$ y $x_{n_r} \in V$. Note que $F_{n_r}(x_{n_r}) \subseteq F_m(x_{n_r}) \subseteq U$, lo cual contradice que $y \in F_{n_r}(x_{n_r})$. Por lo tanto, $y \in G(x_0)$ y $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$.

□

El siguiente resultado nos ofrece una manera de construir funciones continuas y sobreyectivas. Será usado con bastante frecuencia en la Parte II de este trabajo.

Teorema 2.0.5 (Teorema General de funciones)**.** *Sean X y Y espacios métricos compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n \colon X \to \mathcal{CL}(X)$ una multifunción semicontinua superiormente tal que:*

I) $F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x)$*, para todo* $x \in X$ *y cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

II) $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

III) $\lim_{n \to \infty}$ *diám*$(F_n(x)) = 0$*, para cada* $x \in X$*.*

Entonces existe una función continua y sobreyectiva $f \colon X \to Y$*, donde*

$$f(x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(x),$$

para todo $x \in X$*.*

Prueba: Sea $G \colon X \to \mathcal{CL}(X)$ definida por $G(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(x)$, para cada $x \in X$. Por el Lema 2.0.4, la función G es semicontinua superiormente. Además, como $lim_{n \to \infty}$diám$(F_n(x)) = 0$, para cada $x \in X$, entonces $G(x) = \{y_x\}$, para algún $y_x \in Y$, y cada $x \in X$, pues si existiera $p_x \in G(x)$, con $p_x \neq y_x$, entonces diam$(F_n(x)) \geq d(y_x, p_x) > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\lim_{n\to\infty}$ diam$(F_n(x)) > 0$, lo cual contradice III). Así, por la Proposición 2.0.3, la función $f : X \to Y$ definida por $f(x) = y_x$, para todo $x \in X$, es continua. Ahora, veamos que f es sobreyectiva. Sea $y \in Y$. Como $Y = \bigcup_{x\in X} F_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el Lema 2.0.4, $Y = \bigcup_{x\in X} G(x)$. Luego, existe $x \in X$ tal que $y \in G(x) = \{y_x\}$, para algún $y_x \in Y$. Así, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y_x = y$, esto es, f es sobreyectiva. □

Lema 2.0.6. *Sea* $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, *donde*

- A_i *es compacto*, $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \forall\ i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Entonces existe una función

$$F : [0, 1] \to \mathcal{CL}(Y)$$

semicontinua superiormente tal que

- $Y = \bigcup_{t\in[0,1]} F(t)$;
- *Para todo* $t \in [0, 1]$, *tenemos*
  - $F(t) = A_i$, *para algún* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *ó*
  - $F(t) = A_i \cup A_{i+1}$, *para algún* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Prueba: Sea

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < 1 = t_n$$

una partición del intervalo $[0, 1]$ y defina

$$F : [0, 1] \to \mathcal{CL}(Y)$$

por

$$F(t)=\begin{cases} A_1 & t\in[0,t_1);\\ A_1\cup A_2 & t=t_1;\\ A_2 & t\in(t_1,t_2);\\ A_2\cup A_3 & t=t_2;\\ \vdots & \vdots\\ A_i & t\in(t_{i-1},t_i),\ \ \forall\ i\in\{1,...,n\};\\ A_i\cup A_{i+1} & t=t_i,\ \ \forall\ i\in\{1,...,n-1\};\\ \vdots & \vdots\\ A_{n-1}\cup A_n & t=t_{n-1};\\ A_n & t\in(t_{n-1},1]. \end{cases}$$

Veamos que F es semicontinua superiormente. En efecto,

I) Sean $t=0$ y $V\subseteq Y$ abierto, con $A_1=F(0)\subseteq V$. Entonces $U=[0,t_1)\subseteq[0,1]$ abierto, con $t\in U$, tal que $A_1=F(t)\subseteq V,\ \ \forall\ t\in U$;

II) Sean $t=t_1$ y $V\subseteq Y$ abierto, con $A_1\cup A_2=F(t_1)\subseteq V$. Entonces $U=(\frac{t_1}{2},\frac{t_1+t_2}{2})\subseteq[0,1]$ abierto, con $t\in U$, tal que

- Si $t\in(\frac{t_1}{2},t_1)$, entonces $F(t)=A_1\subseteq A_1\cup A_2\subseteq V$;
- Si $t\in(t_1,\frac{t_1+t_2}{2})$, entonces $F(t)=A_2\subseteq A_1\cup A_2\subseteq V$.

esto es, $F(t)\subseteq V,\ \ \forall\ t\in U$;

III) En general,

- Sean $i\in\{1,\dots,n\},\ \ t\in(t_{i-1},t_i)$ y $V\subseteq Y$ abierto, con $A_i=F(t)\subseteq V$. Entonces $U=(t_{i-1},t_i)\subseteq[0,1]$ abierto, con $t\in U$, tal que $A_i=F(t)\subseteq V,\ \ \forall\ t\in U$;

- Sean $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\; t = t_i$ y $V \subseteq Y$ abierto, con $A_i \cup A_{i+1} = F(t) \subseteq V$. Entonces
$$U = \left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right) \subseteq [0, 1]$$
abierto, con $t \in U$, tal que
    - Si $t \in (\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, t_i)$, entonces $F(t) = A_i \subseteq A_i \cup A_{i+1} \subseteq V$;
    - Si $t \in (t_i, \frac{t_i+t_{i+1}}{2})$, entonces $F(t) = A_{i+1} \subseteq A_i \cup A_{i+1} \subseteq V$.

  esto es, $F(t) \subseteq V, \;\forall\; t \in U$;

IV) Sean $t = 1$ y $V \subseteq Y$ abierto, con $A_n = F(1) \subseteq V$. Entonces $U = (t_{n-1}, 1] \subseteq [0, 1]$ abierto, con $t \in U$, tal que $F(t) \subseteq V, \;\forall\; t \in U$.

Por lo tanto, F es semicontinua superiormente para cada $t \in [0, 1]$.
Ahora, veamos que $Y = \bigcup_{t \in [0,1]} F(t)$. Note que

$$[0, 1] = [0, t_1) \cup \{t_1\} \cup (t_1, t_2) \cup \{t_2\} \cup \cdots \cup \{t_{n-1}\} \cup (t_{n-1}, 1].$$

" $\supseteq$ " Sea $y \in \bigcup_{t \in [0,1]} F(t)$. Entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $y \in F(t)$. Luego,

- Si $t = 0$, entonces $y \in F(t) = A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$;
- Si $t \in (t_{i-1}, t_i)$, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $y \in F(t) = A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$;
- Si $t = t_i$, para algún $i \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $y \in F(t) = A_i \cup A_{i+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$;
- Si $t = 1$, entonces $y \in F(t) = A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$.

Por lo anterior, en cualquiera de los casos, se sigue que $y \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i = Y$.

“ $\subseteq$ ” Sea $y \in Y$. Entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in A_i$. Por como está definida la función F, existe $t \in [0,1]$ tal que $y \in A_i = F(t) \subseteq \bigcup_{t\in[0,1]} F(t)$.

□

En el siguiente resultado, observamos una manera de definir una función continua y sobreyectiva (curva que llena el plano) de $[0,1]$ en $[0,1]^2$. .

Teorema 2.0.7. *Existe una función $f : [0,1] \to [0,1]^2$ continua y sobreyectiva.*

Prueba: Sea $[0,1]^2 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$, donde

- $A_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$;
- $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]^2$;
- $A_3 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$;
- $A_4 = [0, \frac{1}{2}]^2$.

Note que

- A_i es compacto, $\forall\ t \in \{1,2,3,4\}$;
- $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \ \forall\ i \in \{1,2,3\}$.

Por el Lema 2.0.6, existe una función

$$F_1 : [0,1] \to \mathcal{CL}([0,1]^2)$$

semicontinua superiormente tal que

- $[0,1]^2 = \bigcup_{t\in[0,1]} F_1(t)$;
- Para todo $t \in [0,1]$,
  - $F_1(t) = A_i$, para algún $i \in \{1,2,3,4\}$ o

- $F_1(t) = A_i \cup A_{i+1}$, para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.

Considere la partición $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ del intervalo $[0, 1]$ y defina

$$F_1 : [0, 1] \to \mathcal{CL}([0, 1]^2)$$

por

$$F_1(t) = \begin{cases} A_1 & t \in [0, \frac{1}{4}); \\ A_1 \cup A_2 & t = \frac{1}{4}; \\ A_2 & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}); \\ A_2 \cup A_3 & t = \frac{1}{2}; \\ A_3 & t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}); \\ A_3 \cup A_4 & t = \frac{3}{4}; \\ A_4 & t \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$F_1(t) = \begin{cases} A_1 & t = 0; \\ A_4 & t = 1; \\ A_i \cup A_{i+1} & t = \frac{i}{4}, \ \forall \ i \in \{1, 2, 3\}; \\ A_i & t \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}), \ \forall \ i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Como vimos en la prueba del Lema 2.0.6, se sigue que F_1 es semicontinua superiormente. Además, tenemos

$$\text{diám}(F_1(t)) < 1.$$

Para definir F_2, dividimos cada A_i en cuatro cuadrados iguales, esto es, $A_i = \bigcup_{j=1}^{4} A_{ij}$, donde:

- $A_{1,1} = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1]$;
- $A_{1,2} = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$;

- $A_{1,3} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$;
- $A_{1,4} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [\frac{3}{4}, 1]$;
- $A_{2,1} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1]$;
- $A_{2,2} = [\frac{3}{4}, 1]^2$;
- $A_{2,3} = [\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$;
- $A_{2,4} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]^2$;
- $A_{3,1} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$;
- $A_{3,2} = [\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$;
- $A_{3,3} = [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}]$;
- $A_{3,4} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$;
- $A_{4,1} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{4}]$;
- $A_{4,2} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]^2$;
- $A_{4,3} = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$;
- $A_{4,4} = [0, \frac{1}{4}]^2$;

Así, $[0,1]^2 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i = \bigcup_{i=1}^{4} (\bigcup_{j=1}^{4} A_{i,j})$. Note que

- $A_{i,j}$ es compacto, $\forall\ i \in \{1,2,3,4\}$ y $\forall\ j \in \{1,2,3,4\}$;
- $A_{i,j} \cap A_{i,j+1} \neq \emptyset,\ \forall\ i \in \{1,2,3,4\}$ y $\forall\ j \in \{1,2,3\}$.

Por el Lema 2.0.6, existe una función

$$F_2 : [0,1] \to \mathcal{CL}([0,1]^2)$$

semicontinua superiormente tal que

- $[0,1]^2 = \bigcup_{t\in[0,1]} F_2(t)$;
- Para todo $t \in [0,1]$,
  - $F_2(t) = A_{i,j}$, para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$ o
  - $F_2(t) = A_{i,j} \cup A_{i,j+1}$, para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Defina F_2 sobre $[0,\frac{1}{4}]$. Considere una partición $\{\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{4}\}$ sobre $[0,\frac{1}{4}]$ y defina

$$F_2|_{[0,\frac{1}{4}]} : [0,\tfrac{1}{4}] \to \mathcal{CL}([0,1]^2)$$

por

$$F_2(t) = \begin{cases} A_{1,1} & t \in [0,\frac{1}{16}); \\ A_{1,1} \cup A_{1,2} & t = \frac{1}{16}; \\ A_{1,2} & t \in (\frac{1}{16},\frac{1}{8}); \\ A_{1,2} \cup A_{1,3} & t = \frac{1}{8}; \\ A_{1,3} & t \in (\frac{1}{8},\frac{3}{16}); \\ A_{1,3} \cup A_{1,4} & t = \frac{3}{16}; \\ A_{1,4} & t \in (\frac{3}{16},\frac{1}{4}); \\ A_{1,4} \cup A_{2,1} & t = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$F_2(t) = \begin{cases} A_{1,1} & t = 0; \\ A_{1,4} \cup A_{2,1} & t = \frac{1}{4}; \\ A_{1,j} \cup A_{1,j+1} & t = \frac{j}{16},\ \forall\ j \in \{1,2,3\}; \\ A_{1,j} & t \in (\frac{j-1}{16},\frac{j}{16}),\ \forall\ j \in \{1,2,3,4\}. \end{cases}$$

De la misma forma, defina F_2 sobre $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4},1]$. Nuevamente, como vimos en la prueba del Lema 2.0.6, se sigue que F_2 es semicontinua superiormente. Además,

- $[0,1]^2 = \bigcup_{t\in[0,1]} F_2(t)$;

- Para todo $t \in [0,1]$,
    - $F_2(t) \subseteq F_1(t)$, y
    - diám$(F_2(t)) < \frac{1}{2}$.

Continuando inductivamente, definimos una sucesión de funciones $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, verifica lo siguiente:

- F_n es semicontinua superiormente;
- $F_{n+1}(t) \subseteq F_n(t), \ \ \forall \ t \in [0,1]$;
- $[0,1]^2 = \bigcup_{t\in[0,1]} F_n(t)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}$ diám$(F_n(t)) = 0, \ \ \forall \ t \in [0,1]$.

Así, por el Teorema 2.0.5, existe una función continua y sobreyectiva $f : [0,1] \to [0,1]^2$, donde $f(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n(t), \ \ \forall \ t \in [0,1]$. $\square$

3. EL ESPACIO DE CANTOR

En este capítulo estudiamos propiedades del espacio de Cantor. Caracterizamos el espacio de Cantor como el único compacto métrico, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Finalmente, probamos que todo métrico compacto es cociente del espacio de Cantor. Una gran cantidad de las definiciones y resultados presentados en este capítulo los tomamos de [3].

Como definimos en el Ejemplo 1.0.5, el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es el espacio producto $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$\mathcal{C}_k = \{[a_1 \dots a_k] \mid (a_1, \dots, a_k) \in \{0,1\}^k\},$$

donde

$$[a_1 \dots a_k] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \mid y_i = a_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, k\}.$$

Observación 3.0.1. Como $\{0,1\}$ es un espacio discreto, el conjunto

$$[a_1 \dots a_k] = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_i^{-1}(\{a_i\}),$$

es tanto abierto como cerrado.

La siguiente proposición nos será de utilidad en el desarrollo de este capítulo.

---

[3] C. JOSÉ GALAVIZ. “El Conjunto de Cantor”. En: ().

Proposición 3.0.2. *Sea $\mathcal{C}$ el espacio de Cantor. Entonces:*

(1) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_k$ es una partición finita de $\mathcal{C}$ tal que cada elemento de $\mathcal{C}_k$ es abierto y cerrado.

(2) $\mathcal{C}_{k+1}$ refina a $\mathcal{C}_k$. Más aún, si $[a_1 \dots a_k] \in \mathcal{C}_k$, entonces

$$[a_1 \dots a_k] = [a_1 \dots a_k 0] \cup [a_1 \dots a_k 1],$$

donde $[a_1 \dots a_k 0], [a_1 \dots a_k 1] \in \mathcal{C}_{k+1}$.

(3) diám$([a_1 \dots a_k]) \leq \frac{1}{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y cualquier $[a_1 \dots a_k] \in \mathcal{C}_k$.

Prueba: Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces

(1) Como $\{0,1\}^k$ es un conjunto finito, entonces $\mathcal{C}_k$ es finito. Además, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a_1 \dots a_k] \cap [b_1 \dots b_k]$, entonces $x_i = a_i = b_i, \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Por lo anterior, se sigue que $[a_1 \dots a_k] = [b_1 \dots b_k]$. Por la Observación 3.0.1, sabemos que $[a_1 \dots a_k]$ es tanto abierto como cerrado;

(2) Se sigue de la definición de los conjuntos $[a_1 \dots a_k]$.

(3) Sabemos que $(\mathcal{C}, d)$ es un espacio métrico, donde d está definida por

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \ \ \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}.$$

Sea $[a_1 \ldots a_k] \in \mathcal{C}_k$. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a_1 \ldots a_k]$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, se sigue que diám$([a_1 \ldots a_k]) \leq \frac{1}{2^k}$.

$\square$

A continuación introducimos tal vez, la definición más conocida del espacio de Cantor.

Definición 3.0.3. Sea $Z_0 = [0,1]$. Supongamos que dividimos C_0 en tres subintervalos de igual longitud

$$Z_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

y retiramos el tercio medio sin sus extremos, a saber, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Sea

$$Z_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Supongamos que dividimos cada subintervalo de C_1 en tres subintervalos de igual longitud

$$Z_1 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, 1\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

y retiramos el tercio medio sin sus extremos de cada subintervalo, a saber $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Sea

$$Z_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, 1\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

De forma inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$J_{n,i} \;\; y \;\; I_{n,j}$$

como el *i-ésimo* intervalo presente y el j-ésimo intervalo ausente en la iteración n, respectivamente. Por lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$Z_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}.$$

Así, definimos

$$\mathcal{Z} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_n$$

como el *espacio ternario de Cantor*.

Observación 3.0.4. Por la Definición 3.0.3, se sigue que

$$\mathcal{Z} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}.$$

A continuación mostramos que el espacio ternario de Cantor es homeomorfo al espacio de Cantor $\mathcal{C}$, como lo venimos trabajando.

Teorema 3.0.5. *Sea* $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ *definida por*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i}, \;\; \forall x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Entonces:

(1) f *está bien definida;*

(2) f *es inyectiva;*

(3) f *es continua;*

(4) $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{Z}$.

Prueba: En efecto, veamos la prueba de cada inciso:

(1) Si $x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, entonces

$$f((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Por lo anterior, f está bien definida.

(2) Sean $x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $y = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $f(x) = f(y)$. Veamos que $x = y$. Note que

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longleftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(a_i - b_i)}{3^i} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_i - b_i)}{3^i} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Sea $c_i = a_i - b_i, \ \ \forall i \in \mathbb{N}$. Veamos que $c_i = 0, \ \ \forall i \in \mathbb{N}$. Note que

$$-1 \leq c_i \leq 1, \ \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Por inducción (fuerte) sobre i. Note que

(a) Para i=1. Supongamos que $c_1 \neq 0$. Entonces

- Supongamos que $c_1 = 1$. Por (1) y (2), tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i}{3^i} \geq \frac{1}{3} - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6},$$

lo cual es una contradicción.

- Supongamos que $c_1 = -1$. Por (1) y (2), tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = -\frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \leq -\frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3^i} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

lo cual es una contradicción.

Por lo anterior, se sigue que $c_1 = 0$.

(b) Supongamos que

$$c_i = 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(c) Para $i = n+1$. Supongamos que $c_{n+1} \neq 0$. Entonces

- Supongamos que $c_{n+1} = 1$. Por (1), (2) y (b), tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \geq \frac{1}{3^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{2 \cdot 3^k},$$

lo cual es una contradicción.

- Supongamos que $c_{n+1} = -1$. Por (1), (2) y (b), tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = -\frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \leq -\frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = -\frac{1}{3^k} + \frac{1}{2 \cdot 3^k},$$

lo cual es una contradicción.

Por lo anterior, se sigue que $c_{n+1} = 0$. Por inducción matemática (fuerte), concluimos que

$$c_i = 0, \ \ \forall i \in \mathbb{N},$$

esto es, $a_i = b_i, \ \ \forall i \in \mathbb{N}$ y $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(3) Sean $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Por propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Por la Observación 3.0.1, sabemos que el conjunto

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{N+1} \pi_i^{-1}(\{x_i\}). \tag{*}$$

es abierto y contiene a x. Como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{B}_d(x,\delta) \subseteq \mathcal{C}. \tag{**}$$

Por (*) y (**), tenemos

$$y = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_d(x,\delta) \subseteq \mathcal{C} \Longrightarrow b_i = a_i \ \ \forall i = 1,\ldots,N+1. \tag{***}$$

Por (***), se sigue que

$$f(B_d(x,\delta)) \subseteq B\left(f(x), \frac{1}{2^N}\right) \subseteq B(f(x),\epsilon).$$

Por la arbitrariedad de ϵ y x, se sigue que f es continua.

(4) Veamos que

$$f(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{Z}.$$

Para justificar (4), usaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 3.0.6. *Sean $\mathcal{Z} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_n$ el espacio de Cantor y $t \in [0,1] \setminus \mathcal{Z}$. Entonces existe un conjunto finito*

$$\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_{n-1}\} \subseteq \{0,1\}$$

tal que

$$f(a_1,\ldots,a_{n-1},0,1,1,1,\ldots) < t < f(a_1,\ldots,a_{n-1},1,0,0,0,\ldots). \tag{*}$$

Probemos la Afirmación 3.0.6. Por inducción sobre los niveles que conforma el conjunto de Cantor. También, usaremos aquella notación vista en la Definición 3.0.3.

(a) Para $n = 1$, tenemos que $t \in I_{1,1}$. Así, basta tomar $\mathcal{A} = \emptyset$ y observar que

$$f(0, 1, 1, 1, \dots) = \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} = f(1, 0, 0, 0, \dots).$$

(b) Para $n = 2$, tenemos que $t \in I_{2,1}$ o $t \in I_{2,2}$. Luego,

- Si $t \in I_{2,1}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 0\}$ y observar que

$$f(0, 0, 1, 1, , \dots) = \frac{1}{9} < t < \frac{2}{9} = f(0, 1, 0, 0, \dots).$$

- Si $t \in I_{2,2}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 1\}$ y observar que

$$f(1, 0, 1, 1, , \dots) = \frac{7}{9} < t < \frac{8}{9} = f(1, 1, 0, 0, \dots).$$

(c) Para $n = 3$, tenemos que $t \in I_{3,1}$ o $t \in I_{3,2}$ o $t \in I_{3,3}$ o $t \in I_{3,4}$. Luego,

- Si $t \in I_{3,1}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 0, a_2 = 0\}$ y observar que

$$f(0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots) = \frac{1}{27} < t < \frac{2}{27} = f(0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

- Si $t \in I_{3,2}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 0, a_1 = 1\}$ y observar que

$$f(0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots) = \frac{7}{27} < t < \frac{8}{27} = f(0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

- Si $t \in I_{3,3}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 1, a_2 = 0\}$ y observar que

$$f(1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots) = \frac{19}{27} < t < \frac{20}{27} = f(1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

- ∘ Si $t \in I_{3,4}$, entonces basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1 = 1, a_1 = 1\}$ y observar que

$$f(1,1,0,1,1,1,\dots) = \frac{25}{27} < t < \frac{26}{27} = f(1,1,1,0,0,0,\dots).$$

(d) Supongamos que (*) se cumple para $n = k$, esto es, existe un conjunto finito $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \subseteq \{0,1\}$ tal que

$$f(a_1,\dots,a_{k-1},0,1,1,1,\dots) < t < f(a_1,\dots,a_{k-1},1,0,0,0,\dots).$$

(e) Para $n = k+1$ tenemos que $t \in I_{k+1,j}$, para algún $j \in \{1,2,\dots,2^k\}$. Luego,

- ⋄ Si $t \in I_{k+1,j}$, con j impar, entonces por (d) basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_{k-1},a_k = 0\}$ y observar que

$$f(a_1,\dots,a_{k-1},0,0,1,1,1,\dots) < t < f(a_1,\dots,a_{k-1},0,1,0,0,0,\dots).$$

- ⋄ Si $t \in I_{k+1,j}$, con j par, entonces por (d) basta tomar $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_{k-1},a_k = 1\}$ y observar que

$$f(a_1,\dots,a_{k-1},1,0,1,1,1,\dots) < t < f(a_1,\dots,a_{k-1},1,1,0,0,0,\dots).$$

Por Inducción matemática, concluimos que (*) se satisface para cada $n \in \mathbb{N}$. Con esto terminamos la prueba de la Afirmación 3.0.6.

Retomando la prueba del inciso (4). También, usaremos aquella notación vista en la Definición 3.0.3 y la Observación 3.0.4.

Veamos que

$$[0,1] \setminus \mathcal{Z} \subseteq [0,1] \setminus f(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Sea $t \in [0,1] \setminus \mathcal{Z}$. Por la Observación 3.0.4, existen $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$ tales que $t \in I_{n,j}$. Por la Afirmación 3.0.6, existe un conjunto finito $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq \{0, 1\}$ tal que

$$f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, 1, 1, 1, \ldots) < t < f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Por lo anterior, se sigue

$$f((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, 1, 1, 1, \ldots), \;\; \forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

o

$$f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1, 0, 0, 0, \ldots) \leq f((b_n)_{n\in\mathbb{N}}), \;\; \forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Así, $t \in [0,1] \setminus f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Veamos ahora que

$$\mathcal{Z} \subseteq f(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Sea $t \in \mathcal{Z}$. Por la Definición 3.0.3, tenemos que

$$t \in Z_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

(a) Como $t \in Z_1$, entonces $t \in J_{1,1}$ o $t \in J_{1,2}$. Observe que

$$f(0,0,0,\ldots) = 0 \leq t \leq \frac{1}{3} = f(0,1,1,\ldots)$$

o

$$f(1,0,0,\ldots) = \frac{2}{3} \leq t \leq 1 = f(1,1,1,\ldots).$$

Por lo anterior, existe $a_1 \in \{0, 1\}$ tal que

$$f(a_1, 0, 0, \dots) \leq t \leq f(a_1, 1, 1, \dots)$$

(b) Como $t \in Z_2$, entonces $t \in J_{2,1}$ o $t \in J_{2,2}$ o $t \in J_{2,3}$ o $t \in J_{2,4}$. Observe que

$$f(0, 0, 0, 0, \dots) = 0 \leq t \leq \frac{1}{9} = f(0, 0, 1, 1, \dots)$$

o

$$f(0, 1, 0, 0, \dots) = \frac{2}{9} \leq t \leq \frac{1}{3} = f(0, 1, 1, 1, \dots),$$

o

$$f(1, 0, 0, 0, \dots) = \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{7}{9} = f(1, 0, 1, 1, \dots),$$

o

$$f(1, 1, 0, 0, \dots) = \frac{8}{9} \leq t \leq 1 = f(1, 1, 1, 1, \dots).$$

Por lo anterior, existe $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$ tales que

$$f(a_1, a_2, 0, 0, \dots) \leq t \leq f(a_1, a_2, 1, 1, \dots).$$

(c) Continuando inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ tales que

$$f(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \leq t \leq f(a_1, \dots, a_n, 1, 1, \dots).$$

Como la longitud de los intervalos $J_{n,i}$, con $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ tienden a cero, se sigue que

$$\{t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots), f(a_1, \dots, a_n, 1, 1, \dots)]$$

Por lo anterior, desde que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto y f es continua, concluimos que $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = t$ y $t \in f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Así, como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto y [0,1] es Hausdorff, tenemos que f es cerrada. Por los incisos (1), (2), (3) y (4), concluimos que f es un homeomorfismo sobre su imagen. $\square$

Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 3.0.7. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es totalmente disconexo, si para cualquier conexo $A \subseteq X,$ tenemos que A tiene un solo punto.

Definición 3.0.8. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es de dimensión cero o 0-dimensional, si para cada $x \in X,$ existe una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ tal que B es abierto y cerrado, para cada $B \in \mathcal{B}_x$. Esto es equivalente a que exista una base de vecindades con frontera vacía.

El siguiente teorema es muy conocido y muestra que en particular, en los espacios métricos compactos, los totalmente disconexos y los espacios 0-dimensionales son propiedades equivalentes. Una prueba del siguiente resultado se puede consultar en [2].

Teorema 3.0.9. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es 0-dimensional;

(2) X es totalmente disconexo;

(3) Para cada $x, y \in X,$ existe un abierto y cerrado W de X tal que $x \in W \subseteq X \setminus \{y\}$.

Lema 3.0.10. *Sean X un espacio métrico, compacto y totalmente disconexo, y $\epsilon > 0$. Entonces existen cerrados disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de X tales que*

- $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;
- *diám*$(A_i) < \epsilon$.

Prueba: Por el Teorema 3.0.9, X es 0-dimensional. Luego, para cada $x \in X$ existe una abierto y cerrado W_x de X tal que $x \in W_x \subset B(x, \epsilon/2)$. Como X es compacto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ para algunos $x_1, ..., x_n$ en X. Definimos $A_1 = W_{x_1}$, $A_2 = W_{x_2} \setminus A_1$... y $A_n = W_{x_n} \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$. Note que cada A_i es abierto y cerrado. Además, es claro que $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Finalmente, como $A_i \subseteq B(x_i, \epsilon/2)$, diám$(A_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. □

Definición 3.0.11. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es perfecto, si no tienen puntos aislados; esto es, si para cada $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$, tenemos que $U \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Teorema 3.0.12. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) X *es homeomorfo a* $\mathcal{C}$;

(2) X *es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y perfecto.*

Prueba: Como $\mathcal{C}$ es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y perfecto, se sigue que si X es homeomorfo a $\mathcal{C}$, entonces X satisface las propiedades enunciadas.
Recírpocamente, supongamos que X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y perfecto. Veamos que X es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Por el Lema 3.0.10, con $\epsilon = 1$, escribimos $X = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, donde $K_1, \ldots, K_n$ son disjuntos dos a dos y abiertos

y cerrados y de diámetro menor a 1. Por la Proposición 3.0.2, podemos escribir $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, donde $C_1, \ldots, C_n$ son disjuntos dos a dos y abiertos y cerrados. Sea

$$F_1 \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$$

definida por $F_1(t) = K_i$, para $t \in C_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que F_1 está bien definida y como cada C_i es abierto y cerrado, tenemos que F_1 es semicontinua superiormente. Además, $X = \bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_2(t)$. Como K_i es abierto y cerrado, entonces K_i es compacto, tolamente disconexo y perfecto, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Lema 3.0.10, sean $K_1^1, \ldots, K_1^{m_1}, \ldots, K_m^1, \ldots, K_n^{m_n}$ abiertos y cerrados y disjuntos dos a dos de X tales que para cada i,j, tenemos

- $K_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} K_i^j$; y
- diám$(K_i^j) < \frac{1}{2}$.

Luego, $X = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} K_i^j \right)$. Por la Proposición 3.0.2, existen $C_i^1, \ldots, C_i^{m_i}$ abiertos y cerrados de $\mathcal{C}$ tales que $C_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} C_i^j$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, donde además podemos suponer que diám$(C_i^j) < \frac{2}{3}$diám(C_i), para cualesquiera i, j. Definamos

$$F_2 \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$$

por $F_2(t) = K_i^j$, si $t \in C_i^j$. Nuevamente, se verifica que F_2 es semicontinua superiormente y $X = \bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_2(t)$. Además, $F_2(t) \subseteq F_1(t)$, para cada $t \in \mathcal{C}$. Procediendo inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una multifunción semicontinua superiormente $F_n \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$ tal que satifacen las hipótesis del Teorema 2.0.5, y $f \colon \mathcal{C} \to X$ definida por $f(t) = x_t$, donde $\{x_t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(t)$ es una función continua y sobreyectiva.

Veamos ahora que f es inyectiva. Sean $s, t \in \mathcal{C}$ tales que $s \neq t$. Por la construcción de los C_i^j, podemos decir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(t) \neq F_n(s)$, esto es, $F_n(t) \cap F_n(s) = \emptyset$. Así, $f(s) \neq f(t)$ y f es inyectiva. Finalmente, como f está definida entre espacios métricos compactos, f es un homeomorfirmo, por la Proposión 1.0.2. $\square$

Finalizamos este capítulo mostrando que todo métrico compacto es cociente del espacio de Cantor. Para esta prueba usaremos las herramientas desarrolladas en este trabajo.

Teorema 3.0.13. *Sea X un espacio métrico, compacto y diferente del vacío. Entonces existe una función $f\colon \mathcal{C} \to X$ continua y sobreyectiva.*

Prueba: Sea X un espacio métrico, compacto y diferente del vacío. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $A_1 = \{B_1, \ldots, B_{n_1}\}$ una cubieta finita de X tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ tenemos que:

- B_i es cerrado; y
- diám$(B_i) < \frac{1}{2}$.

Como $\{0,1\}^k$ tiene exactamente 2^k puntos, entonces $\mathcal{C}_k$ tiene 2^k elementos. Sea k_1 tal que $2^{k_1} > n_1$. Sea

$$\mathcal{C}_{k_1} = \{C_{k_1}^1, \ldots, C_{k_1}^{2^{k_1}}\},$$

esto es, listamos los elementos de $\mathcal{C}_{k_1}$ y loa representamos por cada $C_{k_1}^i$. Definamos

$$F_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$$

dada por

$$F_1(t) = \begin{cases} B_i & \text{Si } t \in C_{k_1}^i, \text{ y } i \in \{1, \ldots, n_1\}; \\ B_{n_1} & \text{Si } t \in C_{k_1}^i, \text{ y } n_1 < i \leq 2^{k_1}. \end{cases}$$

Como $C_{k_1}^i$ es abierto para cada $i \in \{1, \ldots, 2^{k_1}\}$, se sigue que F_1 es semicontinua superiormente. Además,

- $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i = \bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_1(t)$;
- diám$(F_1(t)) < \frac{1}{2}$.

Note que para cada $i \in \{1, \ldots, n_1\}$, B_i es un espacio métrico, compacto, diferente del vacío. Sea $A_2 = \{B_1^1, \ldots, B_1^{m_1}, \ldots, B_{n_1}^1, \ldots, B_{n_1}^{m_{n_1}}\}$ una cubierta con cerrados de X tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ tenemos

- $\bigcup_{j=1}^{m_i} B_i^j = B_i$;
- diám$(B_i^j) < \frac{1}{2^2}$.

Sean $n_2 = \text{máx}\{m_1, \ldots, m_{n_1}\}$ y $k_2 > k_1$ tal que $2^{k_2 - k_1} > n_2$, esto es, cada elemento de $\mathcal{C}_{k_1}$ se refina por $2^{k_2-k_1}$ elementos de C_{k_2}. Sea $\mathcal{C}_{k_2} = \{C_{k_2}^1, \ldots, C_{k_2}^{2^{k_2}}\}$, donde $C_{k_1}^1 = \bigcup_{j=1}^{2^{k_2-k_1}} C_{k_2^1}, \;\; C_{k_2}^2 = \bigcup_{j=2^{k_2-k_1}+1}^{2^{k_2-k_1+1}} C_{k_2}^j, \ldots, C_{k_1}^{2^{k_1}} = \bigcup_{j=2^{k_2-1}+1}^{2^{k_2}} C_{k_1}^j$. Definamos

$$F_2 \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$$

dada por

$$F_2(t) = \begin{cases} B_1^i & \text{Si } t \in C_{k_2}^i, \text{ y } i \in \{1, \ldots, m_1\}; \\ B_1^{m_1} & \text{Si } t \in C_{k_2}^i, \text{ y } m_1 < i \leq 2^{k_2-k_1}. \end{cases}$$

Como cada $C_{k_2}^i$ es abierto para cada $i\{1, \ldots, 2^{k_2}\}$, entonces F_2 es semicontinua superiormente. Note que para $t \in \mathcal{C}$, tenemos

- $F_2(t) \subseteq F_1(t)$;
- diám$(F_1(t) < \frac{2}{2^2}$.

Además, como A_2 es una cubierta de X, se sigue que $X = \bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_2(t)$. Procediendo inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una multifunción semicontinua superiormente

$$F_n \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CL}(X)$$

tal que para cada $t \in \mathcal{C}$, tenemos

- $F_{n+1}(t) \subseteq F_n(t)$;
- diám$(F_n(t)) < \frac{1}{2^n}$;
- $X = \bigcup_{t \in \mathcal{C}} F_n(t)$.

Por el Teorema 2.0.5, existe una función continua y sobreyectiva. $\square$

4. EL TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ

En este capítulo enunciamos y demostramos el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, objetivo central de este trabajo. Una gran cantidad de las definiciones y resultados presentados aquí son tomamos de [1].

Teorema 4.0.1 (Hahn-Mazurkiewicz)**.** *Sea X un continuo. Entonces, X es un continuo de Peano si, y solo si, existe $f\colon [0,1] \to X$ continua y sobreyectiva.*

Prueba: Supongamos primero que existe una función continua y sobreyectiva $f\colon [0,1] \to X$. Entonces:

(1) Por la Proposición 1.0.1, f es cerrada;

(2) Por la Proposición 1.0.4 y el inciso (1), f es cociente;

(3) Por el Teorema 1.0.14 y el inciso (2), X es localmente conexo.

De lo anterior, X es un continuo de Peano.
Recíprocamente, supongamos que X un continuo de Peano. Encontremos una función $f\colon [0,1] \to X$ continua y sobreyectiva. Por el Teorema 1.0.21 y Lema 1.0.24, existe una cadena débil $\{A_1, ..., A_n\}$ de continuos de Peano en X tal que

1. $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;
2. diám$(A_i) < \frac{1}{2}, \ \forall \ i \in \{1, \ldots, n\}$;
3. $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \ \forall \ i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Escribamos $[0,1]$ como la unión de n subintervalos cerrados $I_1, ..., I_n$ de la forma

$$I_i = [t_{i-1}, t_i], \ \ 1 \leq i \leq n, \ \text{ donde } \ t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

Como es usual, denotaremos $\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}$. Definamos $F_1 \colon [0,1] \to \mathcal{C}(X)$, para cada $t \in [0,1]$, por

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i, & t \in I_i \setminus \{t_{i-1}, t_i\}; \\ A_i \cup A_{i+1}, & t = t_i, i \in \{1, ..., n-1\}; \\ A_1, & t = 0 \ ; \\ A_n, & t = 1 \ . \end{cases}$$

Como vimos en la prueba del Lema 2.0.6, se sigue que F_1 es semicontinua superiormente. Además,

1. $X = \bigcup_{t \in [0,1]} F_1(t)$; y
2. diám$(F_1(t)) < 1$ para cada $t \in [0,1]$.

Ahora, sean $p_1 \in A_1$, $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$, para $i \in \{2, ..., n\}$, y $p_{n+1} \in A_n$. Por el Teorema 1.0.21 y Lema 1.0.24 (aplicado a cada A_i), para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe una cadena débil $\{A_1^i, ..., A_{m(i)}^i\}$ de continuos de Peano en A_i, de p_i a p_{i+1}, que cubre a A_i tal que cada A_j^i es de diámetro menor que $\frac{1}{4}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, escribimos I_i como la unión de $m(i)$ subintervalos $I_1^i, ..., I_{m(i)}^i$ de la forma

$$I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i], \ \ 1 \leq j \leq m(i), \ \ \text{donde} \ \ t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < t_2^i < \cdots < t_{m(i)}^i = t_i.$$

Definamos $F_2\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X)$, para cada $t \in [0,1]$, por

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i, & t \in I_j^i \setminus \{t_{j-1}^i, t_j^i\} \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i, & t = t_j^i,\ \ 0 < j < m(i); \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i, & t = t_0^i,\ \ i \in \{2, ..., n\}; \\ A_1^1, & t = 0; \\ A_{m(n)}^1, & t = 1. \end{cases}$$

Como vimos en la prueba del Lema 2.0.6, se sigue que F_2 es semicontinua superiormente. Además

1. $X = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_2(t);$
2. $F_2(t) \subseteq F_1(t),$ para cada $t \in [0,1];$ y
3. diám$(F_2(t)) < \dfrac{1}{2}.$

Continuando de esta manera, se define F_n tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ satisface:

1. $X = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_n(t);$
2. $F_{n+1}(t) \subseteq F_n(t),$ para cada $t \in [0,1];$ y
3. $\lim\limits_{n \to \infty}$ diám$(F_n(t)) = 0.$

Así, por el Teorema 2.0.5, existe una función continua y sobreyectiva $f\colon [0,1] \to X$. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Recordemos que dada una función $f\colon X \to Y$ entre espacio métricos se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0,$ existe $\delta > 0$ (solo depende de ε) tal que tal que si $x, y \in X,$ con $d(x,y) < \delta,$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$ El siguiente teorema será útil para el último resultado de este trabajo. Una prueba del siguiente resultado se puede consultar en [2].

Teorema 4.0.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacio métricos. Si X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Sea X un espacio vectorial topológico metrizable. Recordemos que un subconjunto A de X se denomina convexo si para cualesquiera par de puntos $x, y \in A$, tenemos que $tx + (1-t)y \in A$, con $t \in (0,1)$. La función $f\colon [0,1] \to X$ definida por $f(t) = tx + (1-t)y$ es continua.
En el siguiente ejemplo definimos el Cubo de Hilbert, espacio que abordaremos en el último resultado de este trabajo.

Ejemplo 4.0.3. *Sea $\mathcal{Q} = [0,1]^{\mathbb{N}}$, el producto numerable del intervalo cerrado $[0,1]$. El espacio producto $\mathcal{Q}$ se conoce como el Cubo de Hilbert. Por el Teorema de Tychonoff, $\mathcal{Q}$ es compacto. Además, $(\mathcal{Q}, d)$ es un espacio métrico, donde d está definida por*

$$d((t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n}, \ \ \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}.$$

El siguiente teorema es muy conocido y muestra en particular, que todo espacio métrico compacto se puede encajar en un subespacio cerrado del Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Una prueba del siguiente resultado se puede consultar en [2].

Teorema 4.0.4. *Sea X un espacio T_1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es regular y 2-numerable;

(2) X es separable y metrizable;

(3) X se puede encajar como un subespacio del Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Finalizamos este trabajo con una consecuencia interesante del Teorema 4.0.1.

Teorema 4.0.5. *Sea Y un continuo. Entonces existe un conjunto numerable de arcos $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $Y \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} l_n)$ es un continuo de Peano.*

Prueba: Sea Y un continuo. Por un lado, sabemos que

(1) Por el Teorema 3.0.13, existe $g\colon \mathcal{C} \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Por el Teorema 4.0.2, g es uniformemente continua;

(2) Como Y es un continuo, Por el Teorema 4.0.4, podemos considerar a Y como un subespacio del Cubo de Hilbert.

Por otro lado, por la Observación 3.0.4, sabemos que

(3) $[0,1] \setminus \mathcal{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$ es una unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, digamos (a_n, b_n), con $a_n, b_n \in \mathcal{C} \subseteq [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$.

Recuerde que un espacio topológico X es un arco si es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$.
Sea $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ la familia numerable de arcos, donde $l_n = [a_n, b_n]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, es la adherencia de los intervalos mencionados en (3). Para cada $t \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$, existen únicos $i \in \mathbb{N}$ y $s \in (0,1)$ tales que $t = (1-s)a_i + s\, b_i$. Sea $Z = Y \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} l_n)$. y defina $f\colon [0,1] \to Z$ como

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t \in \mathcal{C}; \\ (1-s)g(a_i) + s\, g(b_i), & t \notin \mathcal{C} \text{ y } t = (1-s)a_i + s\, b_i,\ i \in \mathbb{N},\ 0 < s < 1. \end{cases}$$

Observe que, desde que g es sobreyectiva, f también es sobreyectiva. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ (solo depende de ε) tal que si $x, y \in \mathcal{C}$, con $|x-y| < \delta_1$, entonces $d(g(x), g(y)) < 3^{-1}\varepsilon$. Defina

(5) $F = \{n \in \mathbb{N} : |b_n - a_n| \geq \delta_1\}$. Observe que, Por (4), F es un conjunto finito;

(6) $A = \text{máx}_{n\in F}\{d(z(a_n), z(b_n))\} \geq 0$;

(7) $D = \text{máx}\{3^{-1}\varepsilon, A\}$;

(8) $\delta = (3D)^{-1}\delta_1\varepsilon \leq \delta_1$.

Supongamos que $x, y \in [0,1]$, con $|x-y| < \delta$. Considere los siguientes casos:

- Supongamos que $x, y \in \mathcal{C}$. Como $\delta < \delta_1$, tenemos que $d(f(x), f(y)) = d(g(x), g(y)) < 3^{-1}\varepsilon$.

- Supongamos que $x, y \in l_n$, con $n \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(s-t)(g(b_n) - g(a_n))|}{2^n} \\ &= |s-t| d(g(b_n), g(a_n)) \\ &= \frac{|x-y|}{|b_n - a_n|} d(z(b_n), z(a_n)) \\ &< \frac{\delta D}{\delta_1} = 3^{-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

- Supongamos que $x, y \in l_n$, con $n \notin F$. Por el caso anterior, desde que $|b_n - a_n| < \delta_1$, tenemos

$$d(f(x), f(y)) = |s-t| d(g(a_n), g(b_n)) \leq d(g(a_n), g(b_n)) < 3^{-1}\varepsilon.$$

- Supongamos que $x \in (a_n, b_n)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, y $y \in \mathcal{C}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b_n \leq y$ (El caso $y \leq a_n$ es similar). Por el caso anterior, tenemos

$$d(f(x), f(y)) = d(f(x), g(y)) \leq d(g(x), g(b_n)) + d(g(b_n), f(y)) < (2)3^{-1}\varepsilon;$$

- Supongamos que $x \in (a_n, b_n)$ y $y \in (a_m, b_m)$, con $n \neq m$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b_n < a_m$. Entonces

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f(b_n)) + d(g(b_n), g(a_m)) + d(f(a_m), f(y)) \\
&\leq 3^{-1}\varepsilon + 3^{-1}\varepsilon + 3^{-1}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo anterior f es continua. De esto, Por el Teorema 4.0.1, concluimos que Z es un continuo de Peano.

$\square$

BIBLIOGRAFÍA

GALAVIZ, C. JOSÉ. “El Conjunto de Cantor”. En: () (vid. pág. 40).

J.E CAMARGO GARCÍA, & E.J VILLAMIZAR ROA. *Topología General*. 2018 (vid. págs. 9, 10, 18, 51, 59, 60).

NADLER, S. B. Jr. *Continuum Theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1992 (vid. págs. 8, 10, 11, 29, 57).