



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER



**GRUPO DE ÓPTICA Y
TRATAMIENTO DE SEÑALES**

IMPLEMENTACIÓN OPTICO-DIGITAL DE UN JTC FRACCIONAL

JOSÉ LUIS AGUILAR SIADO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES
BUCARAMANGA
2008**



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER



GRUPO DE ÓPTICA Y
TRATAMIENTO DE SEÑALES

IMPLEMENTACION OPTICO-DIGITAL DE UN JTC FRACCIONAL

JOSE LUIS AGUILAR SIADO

Tesis de grado como requisito para optar al título de Magíster en Física

**Director
Dr. Yezid Torres Moreno**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES
BUCARAMANGA
2008**

AGRADECIMIENTOS

Sinceros agradecimientos a:

La Universidad Industrial de Santander por la formación durante la maestría, y por la oportunidad y la ayuda para llevar a cabo este proceso.

Dr. Yezid Torres Moreno, por la orientación y el apoyo durante el desarrollo de mi trabajo.

El estudiante de Doctorado, Rafael Torres, por toda su colaboración.

El grupo de Profesores y Estudiantes del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales.

Mi familia, los amigos y demás personas, quienes brindaron su apoyo incondicional.

*A mi esposa Roseline Larios y a mi hijo, a
mis Padres, y a mis Hermanos.*

CONTENIDO

Introducción.....	9
1. Marco Teórico.....	11
1.1. La transformación de orden fraccional en sistemas ópticos.....	11
1.1.1. La transformación de Fourier de orden fraccional y los emisores y receptores esféricos centrados.....	11
1.2. Difracción de Fresnel y transformación de Fourier fraccional.....	14
1.3. Convolución y Correlación fraccional.....	16
2. Implementación óptica.....	18
3. Resultados experimentales.....	23
4. Conclusiones y Perspectivas	30
Referencias.....	31

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Fuente puntual iluminando una superficie esférica.....	12
2. Transferencia general por difracción de un emisor cualquiera \mathbf{A}_1 a un receptor cualquiera \mathbf{A}_2	13
3. Transferencia del campo de \mathbf{A} a $D\mathcal{E}$ en la forma de una transformación de Fourier Fraccional.....	15
4. Configuración óptica para el cálculo de la correlación fraccional por transformación de Fourier fraccional conjunta.....	18
5. Función espesor definida sobre un biprisma.....	19
6. Frecuencia espacial para un haz haciendo un ángulo con el eje óptico \mathbf{x}	20
7. Matriz (función chirp bidimensional) multiplicando la imagen capturada por la CCD.....	23
8. Montaje experimental para llevar a cabo la transformada de Fourier de orden Fraccional.....	23
9. (a) Escena de entrada; (b) Intensidad de la transformada para un orden 0.9, de la imagen en (a); (c) Transformación <i>digital</i> de orden -0.9 de la imagen en (b).....	24
10. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Vista tridimensional; (b) Corte transversal.....	25
11. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Escena de entrada; (b) Intensidad de la transformada, digital, para un orden 0.9, de la imagen en (a); (c) Transformación <i>digital</i> de orden -0.9 de la imagen en (b).....	26
12. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) vista tridimensional; (b) corte transversal.....	27
13. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Intensidad de la transformada, para un orden 0,9; (b) Corte transversal de la transformada de orden -0,9 de la imagen en (a).	27
14 (a) Intensidad de autocorrelación fraccional experimental y teórico; (b) Evaluación de la correlación de los resultados experimental y teórico bajo el ajuste Lorentziano	28

TITULO: IMPLEMENTACIÓN OPTICO-DIGITAL DE UN JTC FRACCIONAL¹.

Autor: José Luis Aguilar Siado².

Palabras Claves: Correlador Híbrido, Procesamiento de Señales, Transformada de Fourier fraccional.

Resumen

Un correlador óptico se ha convertido en una de las herramientas más importantes en cuanto a procesamiento de información se refiere, como es el caso de reconocimiento de las formas o patrones, extracción de las características de una imagen y la localización de objetos en una escena determinada. Se hará uso de la generalización de la transformación de Fourier convencional o estándar, teniendo en cuenta la propiedad de varianza al corrimiento que brinda la Transformada de Fourier Fraccional, como también se utilizará la generalización que deja el hecho de usar los emisores esféricos y receptores esféricos en lugar de emisores planos y receptores planos, y basados en una definición alternativa para la convolución fraccional y la correlación fraccional, se lleva a cabo un proceso óptico digital de correlación fraccional (JTC fraccional) el cual nos va a permitir el proceso de correlación de imágenes. La separación entre imágenes a la entrada, corresponde con el orden fraccional. Para la construcción y uso del correlador se utiliza un bi-prisma de Fresnel exactamente junto a las imágenes a correlacionar, el cual nos va a permitir la inclinación de cada imagen, al tiempo que proporciona una fase lineal de valor constante que haga posible la correlación fraccional. Los picos de correlación fraccional son analizados mediante simulación computacional, y luego son comparados con los resultados obtenidos en el procesador óptico digital implementado en el laboratorio.

¹Proyecto de Grado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Director: Dr. Yezid Torres Moreno

TITLE: OPTICAL-DIGITAL IMPLEMENTATION OF A FRACTIONAL JTC³.

Author: José Luis Aguilar Siado⁴.

Key words: Hybrid Correlator, Signal Processing, Fractional Fourier Transform.

Abstract

An optical correlator has turned into a of most important tools for the information processing, such as the pattern recognition concerns, such as recognition of the forms or patterns such as extracting characteristics of a image and location of objects in a determined scene. There will be used generalization of Conventional or Standard Fourier Transform, taking account ownership of the variance shift offered by Fourier Transform Fractional, will also be used generalization that leaves the fact for using the spherical emitters and receivers instead of planes emitters and receivers, and based on an alternative definition for the fractional convolution and correlation, and based on an alternative definition for the fractional convolution and correlation, take place a optical digital process correlation fractional (fractional JTC) which will allow that process correlation images. The separation between images, on the input plane, corresponds with the order fractional. For the implementation of the correlator a bi-prism is exactly just used in front to the correlating images. This will give a constant lineal phase. The peaks of fractional correlation are calculated by simulation, and then they are compared with the results obtained for the hybrid processor implemented.

³Research Work.

⁴Science Faculty, Physic School. Director: Dr. Yezid Torres Moreno

INTRODUCCIÓN

La correlación es una herramienta muy utilizada en diferentes aplicaciones, tales como el reconocimiento de patrones, la extracción de las características o formas de la imagen, la localización de objetos, etc.

Gracias al estudio realizado en el campo de la óptica, y a la extensa búsqueda de nuevos resultados, ha surgido una gama de definiciones sobre la Correlación Fraccional. Una de ellas es la propuesta en Convolución y Correlación Fraccional [2].

En principio, la Transformada de Fourier Fraccional (FRT) fue aplicada por Víctor Namias [4] con el fin de resolver el problema físico del oscilador armónico. Hoy ya se ha llegado al tema de la Correlación fraccional.

Considerando cuidadosamente la propiedad de varianza, al corrimiento de las imágenes, de la transformada de Fourier fraccional, y la flexibilidad que brindan los esquemas actuales, al corrimiento espacial en el plano de entrada y en el plano de salida, es necesario tener a disposición un sistema capaz de correlacionar cualquier tipo de imagen bidimensional.

En este trabajo se ilustrará el esquema transformador de Fourier fraccional que será utilizado; el mismo que permitirá llevar a cabo un proceso de *Correlación de Fourier Fraccional Conjunta (JTC Fraccional)* de las imágenes, y que será descrito paso a paso durante el desarrollo del trabajo. El esquema mencionado brinda una transformación de Fourier fraccional exacta.

La correlación fraccional tiene la propiedad de ser variante al corrimiento, lo cual no siempre es desventaja ya que es utilizable, por ejemplo, si se desea que un objeto sea reconocido cuando está posicionado en cierta área, y rechazado o desechado si no lo está. Usando una nueva definición de correlación fraccional [2], se realizará un filtraje en el dominio espacio-frecuencia espacial.

La posición de la escena, el filtro (referencia), y la salida, estarán limitados por varios parámetros estipulados por el esquema a utilizar, los mismos que darán cuenta de la variación en la altura del pico a la salida.

El plano de entrada estará acompañado por un biprisma el cual nos va a permitir que tanto la escena como la referencia tengan el factor de fase adecuado para lograr obtener una correlación por transformación de Fourier fraccional conjunta.

Un detector cuadrático (cámara CCD) se usará para el registro en intensidad de la información que ha sido transformada fraccionalmente en un orden α , para luego continuar el proceso digitalmente.

Las ventajas de esta nueva definición de correlación fraccional, principalmente, es que cumple con todas las propiedades que han permitido que la correlación sea una de las más interesantes, operacionalmente, en todo el análisis de Fourier. Esta definición además permite llevar a cabo ópticamente un proceso de correlación fraccional a un bajo costo en el laboratorio en donde fácilmente puede adicionarse un factor de fase constante tanto a la escena como a la referencia, usando un biprisma de Fresnel.

1. MARCO TEORICO

En esta primera sección se presenta el uso de los emisores y receptores esféricos como método para el análisis de la transferencia general por difracción desde un emisor cualquiera hasta un receptor cualquiera. Se hace también un análisis sobre la difracción de Fresnel y la transformación de Fourier fraccional y se presenta una definición para la convolución y la correlación fraccional.

En la segunda sección se muestra la implementación óptica para realizar el proceso de correlación óptico-digital de orden fraccional de una imagen.

Por último, se presenta en la tercera sección, los resultados experimentales y los resultados completamente digitales, seguido finalmente por las conclusiones del trabajo.

1.1. LA TRANSFORMACIÓN DE ORDEN FRACCIONAL EN SISTEMAS ÓPTICOS.

1.1.1. La transformación de Fourier de orden fraccional y los emisores y receptores esféricos centrados

En primera instancia, en forma breve, se mirará cuál es el posible esquema óptico para realizar una transformada de Fourier fraccional, FRT.

Si se revisa el enfoque dado a la definición de la transformada de Fourier fraccional, colocando la señal en el espacio de Wigner [9-10], puede darse una interpretación de la FRT. La función de distribución de Wigner es una función bilineal, que se describe simultáneamente mediante las coordenadas espaciales (tiempo) y las frecuencias espaciales (la frecuencia) y puede ser considerada como el espectro de frecuencia local de la señal, es una representación en el espacio el fases que permite indicar la localización (espacial o temporal) de las frecuencias.

En este espacio puede hallarse la relación existente entre una rotación de la función de distribución de Wigner, asociada con la función de entrada, por un ángulo ϕ , con el

grado fraccional P de la señal, de la forma $\phi = \frac{P\pi}{2}$.

Las rotaciones en el dominio de Wigner se pueden interpretar también bajo la ejecución de tres pasos (shearing) [9], uno en dirección $-x$, uno en dirección v , luego uno en dirección x ; donde v corresponde a la frecuencia espacial con dimensiones de $1/\text{longitud}$,

y x corresponde a la coordenada espacial, considerando el caso de señales unidimensionales.

Lo anterior corresponde ópticamente a cualquiera de las dos, la propagación libre de un campo electromagnético monocromático sobre una distancia $z = Rf_1$, o al paso por una lente de focal $f = f_1/Q$, en donde f_1 es una longitud focal arbitraria, y R, Q , son descritas de acuerdo con el sistema utilizado o esquema que es capaz de realizar una transformada de Fourier fraccional (Lohmann I, Lohmann II, o cualquier otro) [9].

Considerando el caso general, el cual es de interés para el desarrollo de este trabajo, en donde se toma en lugar de emisores y receptores planos, emisores y receptores esféricos [6] y se analiza la relación existente entre los campos electromagnéticos monocromáticos en estas superficies y el fenómeno de difracción o propagación ocurrido entre estas.

Sea un emisor esférico A tangente al plano de transmitancia $t(x)$, ver figura (1), y centrado en una fuente puntual, con radio de curvatura $-D$.

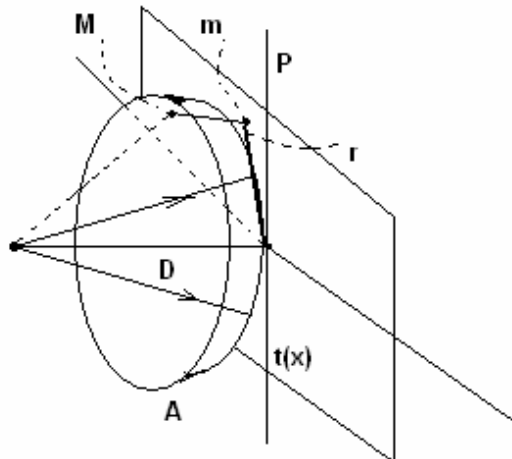


Fig.1. Fuente puntual iluminando una superficie esférica.

Aquí M es un punto sobre la superficie esférica A , y m es un punto sobre la superficie plana P .

Teniendo en cuenta que la amplitud producida por una fuente puntual monocromática sobre una superficie esférica centrada en la fuente, es constante, se puede asumir por normalización, que esta amplitud tiene como valor la unidad.

La amplitud generada por la fuente puntual sobre el plano P , separado de ésta una distancia D , está dada por la amplitud sobre A , multiplicada por un término que incluye una diferencia de fase φ proporcional a la diferencia de camino mM , para cada uno de los puntos en el plano, con $r^2 = x^2 + y^2$, tal que $mM = -r^2/2D$. Luego la diferencia de fase está dada por:

$$\varphi = \frac{2\pi(mM)}{\lambda} = -\frac{\pi r^2}{\lambda D} \quad (1)$$

El término de fase es $\exp[-i\varphi]$, y la amplitud sobre el plano **P** estará dada entonces por:

$$U_p(r) \equiv U_A(r) \exp\left[\frac{i\pi r^2}{\lambda D}\right]$$

$$U_p(r) \equiv \exp\left[\frac{i\pi r^2}{\lambda D}\right] \quad (2)$$

Debe tenerse en cuenta que los puntos **m** y **M** tienen las mismas coordenadas, uno sobre la esfera y otro sobre el plano, aunque los campos electromagnéticos sobre ellos sean diferentes.

Si se tiene en un emisor esférico **A**₁ cuyo vértice es **V**₁ y con radio de curvatura **R**₁, y un receptor **A**₂ de vértice **V**₂ y radio de curvatura **R**₂, situado a la distancia **D** de **A**₁ ($D = V_1V_2$, como se muestra en la figura 2). Sea **B** la esfera de vértice **V**₁, centrada en **V**₂ (con radio **D**) y sea **F** su esfera de Fourier, que es la esfera de vértice **V**₂ y centrada en **V**₁ (con radio **-D**).

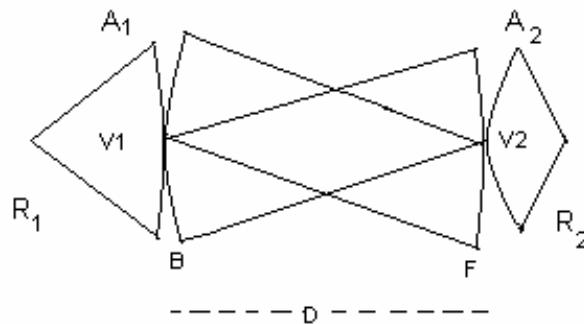


Figure 2. Transferencia general por difracción de un emisor cualquiera **A**₁ a un receptor cualquiera **A**₂

El campo transferido de **A**₁ a **A**₂ está compuesto de tres etapas: primero una transparencia de curvatura de **A**₁ a **B**; luego una transformación de Fourier óptica de **B** a **F**; y por último una transparencia de curvatura de **F** a **A**₂. Como resultado [6] se tiene:

$$U_{A_2}(r') \equiv \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{D}\right) r'^2\right] \int_{R^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_1}\right) r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} r \cdot r'\right] U_{A_1}(r) dr \quad (3)$$

En forma de operadores se puede expresar la transferencia del campo. Estos operadores corresponden a: transparencia de curvatura y transformación de Fourier. Esta última es la que hace pasar de la región alrededor del vértice \mathbf{V}_1 a la región alrededor de \mathbf{V}_2 ; mientras que las transparencias de curvaturas permiten adaptaciones locales de las curvaturas.

Se puede apreciar que \mathbf{r} y \mathbf{r}' corresponden a coordenadas del emisor y receptor, respectivamente.

Es conocido de la literatura que la expresión para la transferencia del campo [13] cuando \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 son planos, está dada por

$$U_{A_2}(r') \equiv \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} r'^2\right] \times \int_{R^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} r \cdot r'\right] U_{A_1}(r) dr, \quad (4)$$

la cual puede deducirse de la ecuación (3) cuando \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 tienden a infinito.

Además es conocido [14] que la forma integral de la transformada de Fourier fraccional de orden α de una función \mathbf{f} es

$$\mathfrak{F}_\alpha[f](\sigma) \equiv \frac{ie^{-i\alpha}}{\text{sen } \alpha} \exp[-i\pi\sigma^2 \cot \alpha] \times \int_{R^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot \alpha] \exp\left[\frac{2i\pi}{\text{sen } \alpha} \sigma \cdot \rho\right] f(\rho) d\rho \quad (5)$$

Se puede verificar que la ecuación (3) se puede escribir como la ecuación (5), para ello debe encontrarse el valor adecuado de α y las variables reducidas apropiadas.

1.2. Difracción de Fresnel y transformación de Fourier fraccional

Si se consideran las ecuaciones (3) y (5) se puede llegar a una expresión para el orden α , de la forma

$$\cot \alpha = \varepsilon \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right), \quad (6)$$

donde el parámetro $\mu = D/R_1$; y $\varepsilon = r^2/\lambda R_1 \rho^2$ es un número real diferente de cero, debido al valor real de la longitud de onda y del radio de curvatura, de forma que $\varepsilon R_1 > 0$; y ρ corresponde a una variable reducida. Ver figura (3).

Se pueden encontrar otras relaciones [6] tales como:

$$\mu = \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}, \quad (7)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \varepsilon^2 (1 - \mu)^2}, \quad (8)$$

y las variables reducidas:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_1}} r, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_1}} (\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha) s \quad (9)$$

Aquí se han tomado como coordenadas r y s para el emisor y el receptor, respectivamente. Los correspondientes radios para estos se ilustran en la figura (3).

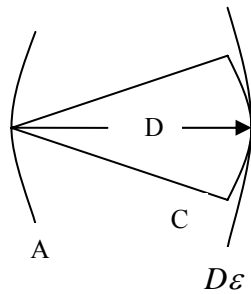


Figura 3. Transferencia del campo de A a $D\varepsilon$ en la forma de una transformación de Fourier fraccional

Al observar el campo precisamente sobre la esfera $D\varepsilon$, tangente a la esfera C , en lugar de observarlo sobre la esfera C , se cumple que

$$\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{1}{D} = \frac{\varepsilon^2 (1 - \mu)}{\mu R_1 [\mu^2 + \varepsilon^2 (1 - \mu)^2]}, \quad (10)$$

luego

$$R_\varepsilon = \frac{D^2 + \varepsilon^2(R_1 - D)^2}{-D + \varepsilon^2(R_1 - D)}; \quad (11)$$

donde R_ε es el radio del receptor D_ε y R_1 es el radio del emisor **A**.

Estas expresiones se obtienen cuando se expresa la difracción de Fresnel en forma de una transformación de Fourier fraccional.

Con la ayuda de estas últimas ecuaciones, relacionando el emisor esférico con una lente de longitud focal **f**, se llega a la siguiente expresión, bastante necesaria para el desarrollo de este trabajo

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{2 - \mu}} \quad (12)$$

En donde ahora $\mu = \frac{x}{f}$, a una distancia de observación **x**, y las variables reducidas son

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{\lambda \varepsilon f}}, \quad \sigma = \frac{s}{\sqrt{\lambda \varepsilon f}} \quad (13)$$

Más adelante se retomará la ecuación (12), aplicándola sobre el sistema óptico a utilizar.

1.3. Convolución y Correlación fraccional

Se ha definido la convolución y la correlación convencional de las funciones **f** y **g**, respectivamente como

$$C(z) = [f * g](z) = \int f(u)g(z-u)du \quad (14)$$

$$\begin{aligned} C'(z) &= [f \otimes g](z) = \int f(u)g^*(u-z)du \\ [f \otimes g](z) &= TF^{-1}\{F(v)G^*(v)\} \end{aligned} \quad (15)$$

Es fácil observar de estas expresiones que la función **g** desplazada al interior de la integral puede ser expresada como la convolución, o la correlación (expresión (15)), de ella misma centrada, con una distribución de Dirac desplazada.

Un trabajo reciente [2] ha definido la convolución fraccional introduciendo una curvatura adicional apropiada en el filtro, indicada en las ecuaciones mediante un correspondiente factor de fase, quedando la expresión en la forma:

$$[f *^\alpha g](z) = \mathfrak{F}^{-\alpha} \left[\mathfrak{F}^\alpha [f] \mathfrak{F}^\alpha [g] e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} \right], \quad (16)$$

Así es posible obtener expresiones en forma de integral similares a la convolución y correlación fraccional, respectivamente, y que se llamarán,

$$[f *^\alpha g](z) = \int f(u) g(z-u) e^{-i2\pi u(z-u) \cot \alpha} du \quad (17)$$

$$[f \otimes^\alpha g](z) = \int f(u) g^*(u-z) e^{i2\pi(u-z) \cot \alpha} du, \quad (18)$$

o en forma equivalente,

$$CVF(z) = [f *^\alpha g](z) = \int f(u) [g *^\alpha \delta(z-u)](u) du \quad (19)$$

$$CRF(z) = [f \otimes^\alpha g](z) = \int f(u) [g *^\alpha \delta(u-z)]^*(u) du \quad (20)$$

En forma equivalente a las ecuaciones (14) y (15), se observa en estas dos últimas expresiones, (ecuaciones 19 y 20), que dentro de la integral la función g está convolucionada, o correlacionada, fraccionalmente, con una distribución de Dirac desplazada. Esto muestra que para el desplazamiento de la función, sólo basta convolucionar esta fraccionalmente con una distribución de Dirac. La expresión (19) será usada para la implementación del esquema óptico a utilizar.

Nace entonces el interrogante sobre cómo llevar a cabo ópticamente esta operación de convolución fraccional, con tal distribución.

2. IMPLEMENTACIÓN ÓPTICA.

Como primera medida se analiza la fase $e^{i2\pi(u-z)\cot\alpha}$ dentro de la integral de la ecuación (18) en donde \mathbf{z} , \mathbf{u} , son variables reducidas, adimensionales, para lo cual \mathbf{z} tendrá su valor recíproco en coordenadas espaciales que definen el desplazamiento en el plano espacial, plano en donde se encuentran tanto la escena como la referencia a correlacionar fraccionalmente, (ver figura 4.). Este valor correspondiente en coordenadas espaciales, tendrá un valor constante para un valor particular de la FRT, de allí que se puede afirmar que $e^{-i2\pi z^2 \cot\alpha}$ es de valor constante.

El término de mayor interés es: $e^{i2\pi u \cot\alpha}$ que corresponde a la fase lineal, que se introduce a las imágenes que serán correlacionadas, para lograr un proceso de correlación fraccional que satisfaga la ecuación (18).

Se propone entonces utilizar un prisma que nos permita adicionar una fase lineal a cada una de las funciones que serán correlacionadas, como se presenta en la figura 4., haciendo corresponder dicha fase con la fase lineal definida en la ecuación (18) del análisis precedente.

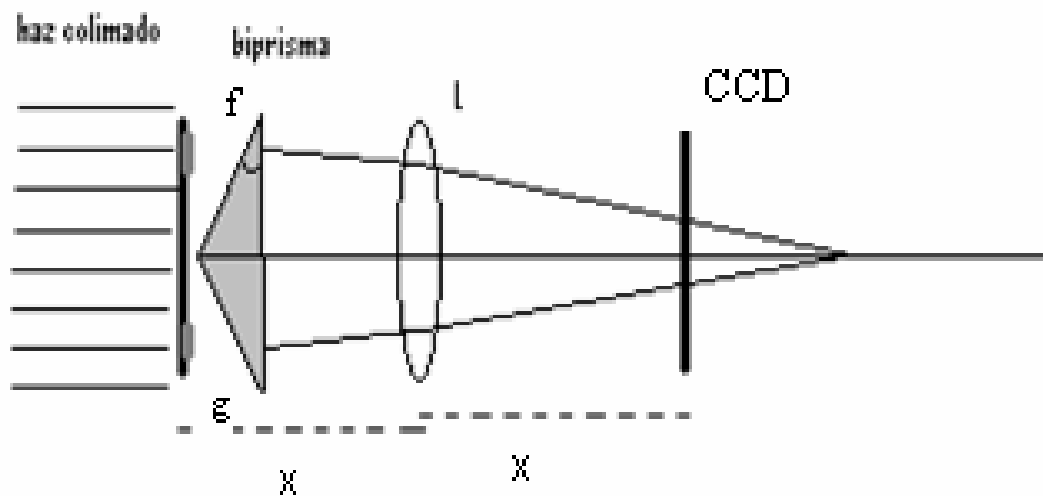


Figura 4. Configuración óptica para la obtención de la correlación fraccional por transformación de Fourier fraccional conjunta.

En la figura 5. Se presenta el esquema geométrico que permite analizar el retardo de fase sufrido por la onda al pasar a través del biprisma, el cual se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= kn\Delta(z) + k(\Delta_0 - \Delta(z)) \\ &= k(n-1)\Delta(z) + k\Delta_0 \end{aligned} \quad (21)$$

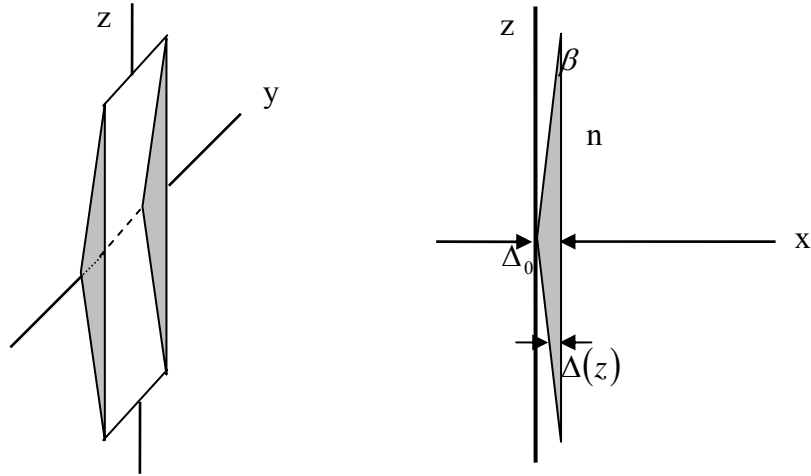


Figura 5. Función espesor definida sobre un biprisma.

Donde n es el índice de refracción del material del biprisma; $kn\Delta(z)$ es el retardo de fase introducido por el biprisma; $k[\Delta_0 - \Delta(z)]$ es el retardo de fase introducido por la región de espacio libre entre los dos planos, o cuña de aire; Δ_0 es el máximo espesor del biprisma sobre el eje x y $\Delta(z)$ es la función espesor en coordenada (z).

El biprisma puede ser representado entonces por una transformación de fase multiplicativa de la forma $t_p(z) = e^{i\varphi(z)}$, para lo cual se tiene

$$t_p(z) = e^{ik\Delta_0} e^{ik(n-1)\frac{z}{m}}, \quad \text{con } z = mx \quad (22)$$

La cantidad m se define como el valor de la pendiente de la recta, sobre la superficie del biprisma, ubicada en un plano x, z , de tal modo que $z = mx$ y $\Delta(z) = \frac{z}{m}$

Se puede también expresar la pendiente como $m = \frac{1}{\tan \beta}$ donde β es el ángulo del biprisma delgado, para el cual se cumple que $\text{sen}\beta \approx \tan \beta \approx \beta$, de donde:

$$t_p(z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\frac{z}{m}} \quad (23)$$

$$t_p(z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\beta(n-1)z} \quad (24)$$

La fase del término $e^{ik\Delta_0}$ se toma como el valor de la fase en $z = 0$ o en la intersección entre los dos planos que conforman el biprisma. Este valor es constante y depende de la longitud de onda de la iluminación y del espesor máximo del biprisma utilizado.

Se enfoca entonces el interés en el término que proporciona la fase a la entrada del biprisma, ecuación (24).

La fase *lineal* que introduce el biprisma es de la forma $e^{i\frac{2\pi\text{sen}\theta}{\lambda}z}$ donde θ es la inclinación introducida sobre el haz y λ la longitud de onda de la luz utilizada. Se puede ilustrar la frecuencia espacial con el esquema de la figura 6.

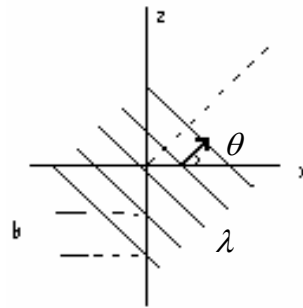


Figura 6. Frecuencia espacial para un haz haciendo un ángulo con el eje óptico x

La inclinación respecto al eje óptico x , producida por el biprisma sobre el haz incidente, está dada por:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{b} = \sigma_z = \frac{\sin \theta}{\lambda} \quad (26)$$

donde σ_z es la frecuencia espacial.

Se usa acá la expresión $\theta = (n - 1)\beta$ si se desea expresar la fase lineal en función de la inclinación producida por el biprisma sobre el haz, en lugar de hacerlo en función de el ángulo del biprisma.

Al hacer una aproximación sobre el ángulo de inclinación del haz, no se limitará el orden fraccional de la transformación a valores pequeños debido a que este orden es único para el biprisma usado, y si se desea variarlo se debe entonces variar la fase introducida por el biprisma lo cual se logra cambiando este o variando de alguna manera β .

Es fácil observar de la ecuación (27) que un aumento en β , o un aumento en $\text{sen}\theta$, permite valores pequeños en el orden fraccional; de igual forma para un valor de θ pequeño es posible tener valores altos en el orden fraccional.

Haciendo la correspondencia entre fases, y recordando que las variables reducidas se expresan $u = u''/\sqrt{\lambda \varepsilon f}$ y $z = z''/\sqrt{\lambda \varepsilon f}$, donde ε está dado por la ecuación (12), f es la focal de la lente a utilizar en el esquema de la figura (4) y λ es la longitud de onda de la iluminación; se obtiene un orden para la transformación fraccional adecuada a un desplazamiento espacial z'' específico:

$$\cos \alpha = \frac{f \text{sen} \theta}{z'' + f \text{sen} \theta} \quad (27)$$

y por último una expresión para la distancia x de la figura 4.,

$$x = f(1 - \cos \alpha) \quad (28)$$

El ángulo θ , que es la inclinación introducida sobre el haz incidente, es una cantidad que depende del valor del ángulo de inclinación del biprisma.

Se puede afirmar que dando un corrimiento adecuado, se obtiene un orden fraccional único para ese corrimiento y una ubicación única de la lente y el plano de detección.

Se analiza entonces qué es lo que la cámara registrará.

Llamando $\mathbf{h}(z)$ a la función de entrada al sistema, la cual está expresada por:

$$h(z) = [f *^\alpha \delta(z - z''')] (z) + [g *^\alpha \delta(z + z''')] (z) \quad (29)$$

o en forma equivalente:

$$h(z) = f(z - z''') e^{-i2\pi z'''(z - z''') \cot \alpha} + g(z + z''') e^{i2\pi z'''(z + z''') \cot \alpha} \quad (30)$$

El valor de z''' corresponde al valor al que se ha ubicado, a lado y lado, tanto la escena como la referencia con respecto a un origen sobre el plano de entrada.

Transformando fraccionalmente la función $\mathbf{h}(z)$, y ubicando una CCD en el plano de salida, se tiene que la información detectada será proporcional a

$$\begin{aligned}
c(z') = & |f_\alpha(z')|^2 + |g_\alpha(z')|^2 + f_\alpha(z')g_\alpha^*(z')e^{-i\frac{2\pi}{\sin\alpha}2z''z'} \\
& + g_\alpha(z')f_\alpha^*(z')e^{i\frac{2\pi}{\sin\alpha}2z''z'}
\end{aligned} \tag{31}$$

Al registro sobre la cámara, debe multiplicarse por un término de fase cuadrática de la forma $e^{i\pi z'^2 \cot\alpha}$, para satisfacer la condición de filtro curvo. Posteriormente se aplica una transformación de Fourier fraccional digital de orden $-\alpha$, obteniendo los tres términos del correlador:

$$C_0(z) = \mathfrak{F}^{-\alpha} \left[\left(|g_\alpha(z')|^2 + |f_\alpha(z')|^2 \right) e^{i\pi z'^2 \cot\alpha} \right] \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
CRF(z) *^\alpha \delta(z - 2z''') e^{-i4\pi z''^2 \cot\alpha} = & [f \otimes^\alpha g]^*(z + 2z''') \\
\times e^{i4\pi z''^2 \cot\alpha} e^{-i4\pi z'' z \cot\alpha}
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
CRF(z) *^\alpha \delta(z + 2z''') e^{-i4\pi z''^2 \cot\alpha} = & [f \otimes^\alpha g](z - 2z''') \\
\times e^{-i4\pi z''^2 \cot\alpha} e^{i4\pi z'' z \cot\alpha}
\end{aligned} \tag{34}$$

Las dos últimas expresiones corresponden a las correlaciones fraccionales cruzadas (la una complejo conjugada de la otra).

Conociendo ya las variables reducidas y el orden de transformación, se crea la matriz para obtener el factor de fase cuadrática $e^{i\pi z'^2 \cot\alpha}$.

Como la imagen capturada por la cámara es de 640x480 es necesario llevar esta a un tamaño NxN debido que el algoritmo utilizado está diseñado para imágenes bidimensionales cuadradas. Acá se ha trabajado con un tamaño de 481x481.

La matriz debe entonces tener estas dimensiones.

En la figura (7) se visualiza la fase cuadrática que debe multiplicar a la imagen capturada por la cámara, antes de llevar a cabo la segunda transformación.

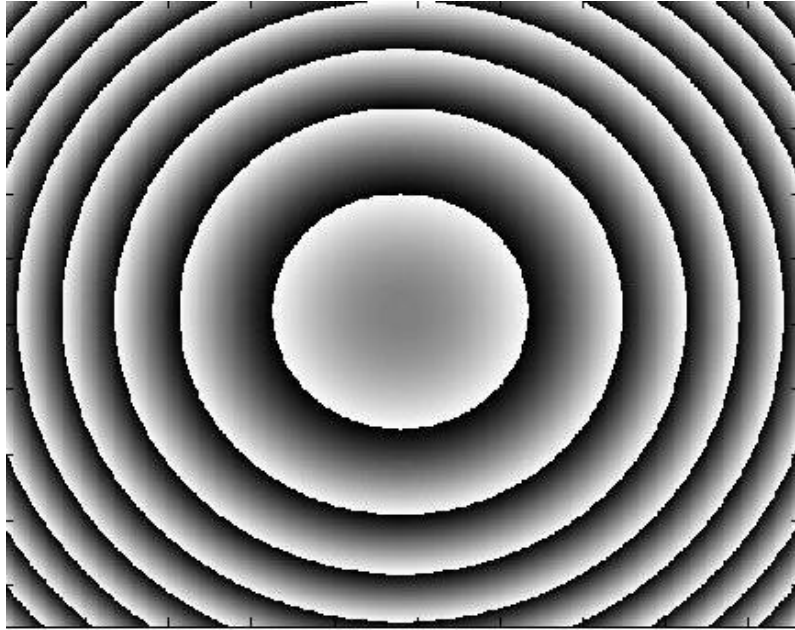


Figura 7. Matriz (función chirp bidimensional) que multiplica la imagen capturada por la CCD

3. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En la figura (8) se muestra el esquema experimental sobre el cual se lleva a cabo la transformación de Fourier fraccional.

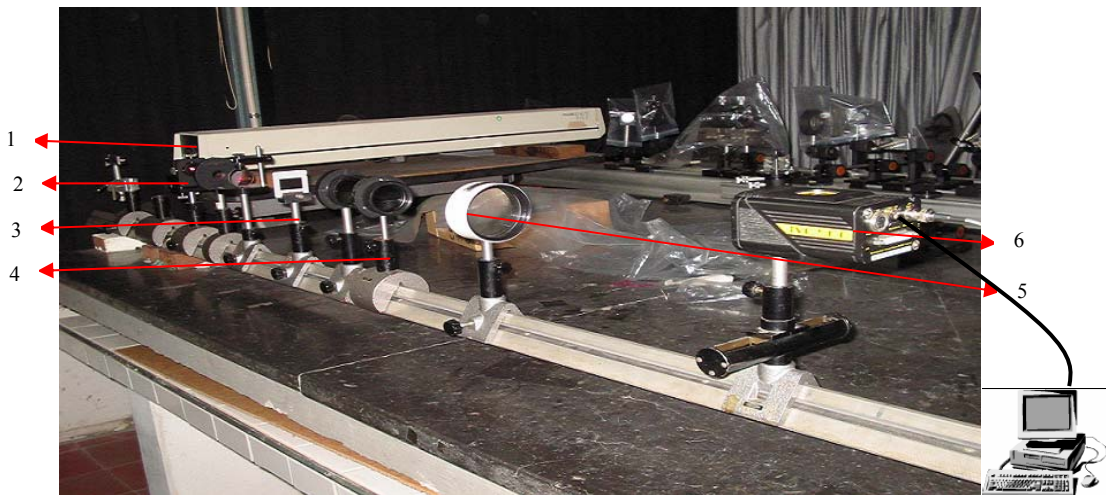


Figura 8. Montaje experimental para llevar a cabo la transformada de Fourier de orden fraccional.

Se ha utilizado para la iluminación un láser de Helio Neón con una longitud de onda de 632,8nm y 60mW (elemento1); seguido de un filtrado espacial, objetivo-pinhole, y un sistema de colimación (elemento 2); el elemento 3 muestra la ubicación de la escena de entrada sobre una lámina de acetato, justo seguido por un biprisma de Fresnel. El ángulo β del biprisma de la figura (5) es calculado después de conocer, experimentalmente, el ángulo de inclinación del haz proporcionado por éste cuando es iluminado por un haz de luz plano. El valor encontrado para este ángulo de inclinación es de $0,42^\circ$; el elemento 4 deja ver el par de polarizadores los cuales hacen las veces de

atenuadores en el momento de la iluminación; El elemento 5 muestra una lente de Fourier de focal 380mm, con el fin de obtener ópticamente la transformación de Fourier de orden fraccional de la escena de entrada; el elemento 6 es la cámara CCD para la adquisición de la intensidad a la salida del dispositivo óptico, del orden fraccional, de la escena de entrada. La cámara utilizada tiene como tamaño de píxel 8,4um(H) y 9,8um(V). Esta cámara está conectada a un computador a partir del cual se llevará a cabo la segunda transformación de orden fraccional $\alpha = -0,9$.

En este experimento se usó el valor de $\alpha = 0,9$, el cual fue calculado de la expresión (27). Con el uso de este valor, se calculó la distancia $x = 31,2\text{cm}$ ilustrada en la figura (4), comprendida entre la ubicación de la escena de entrada y la ubicación de la lente, la cual corresponde también a la distancia entre la lente y la cámara CCD.

En la figura (9a) se puede observar la escena de entrada (dos caracteres similares de tamaño 4mm) al sistema transformador de Fourier fraccional de la figura (8).

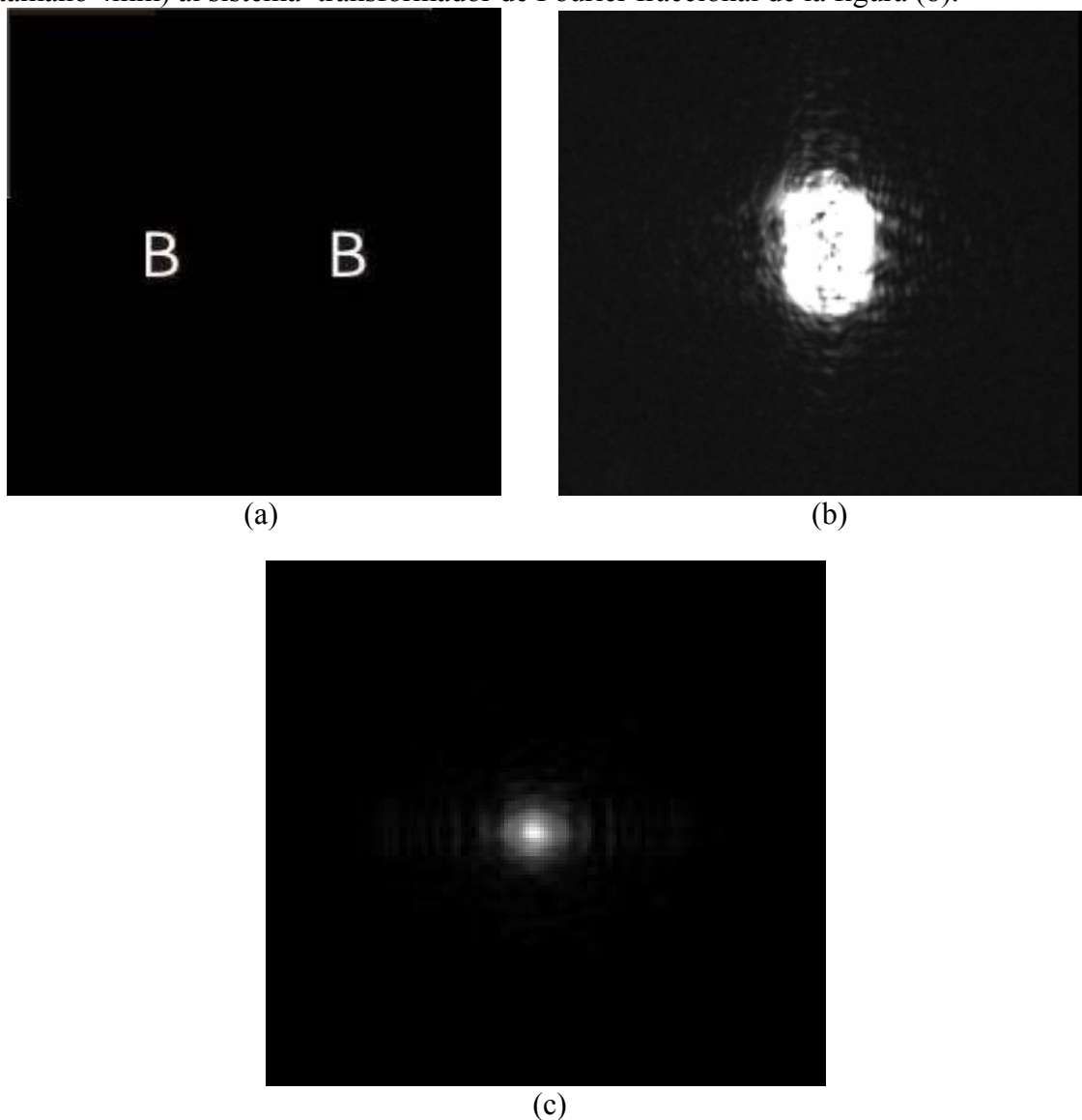


Figura 9. (a) Escena de entrada; (b) Intensidad de la transformada para un orden 0,9, de la imagen en (a); (c) Transformación *digital* de orden -0,9 de la imagen en (b).

Después de transformada, ópticamente, la escena de entrada a un orden particular $\alpha = 0,9$, se hace el registro con la cámara CCD obteniendo así la intensidad de la transformada de la escena para el orden mencionado, como se ilustra en la figura (9b).

Con el registro en intensidad se procede a multiplicar este registro con la matriz (función chirp bidimensional) de la figura (7) y luego se lleva a cabo, digitalmente, la transformada de Fourier de orden fraccional $\alpha = -0,9$ de este resultado; se obtiene lo ilustrado en la figura (9c).

El cálculo de la transformada de Fourier de orden fraccional (FRT) se lleva a cabo usando del algoritmo *frt* (propuesto por J García, D. Mas y R. Dorsch) usando la transformada de Fourier rápida (*fft*).

En la figura (10a), se observa una vista tridimensional de la imagen en (c) de la figura (9); y en la (10b), un corte transversal de la misma.

La figura deja evidenciado el buen resultado del proceso de correlación fraccional óptico-digital, como también deja evidente los picos de autocorrelación de orden fraccional de los elementos en la escena de entrada, correspondiendo así con las expresiones dadas en (33) y (34).

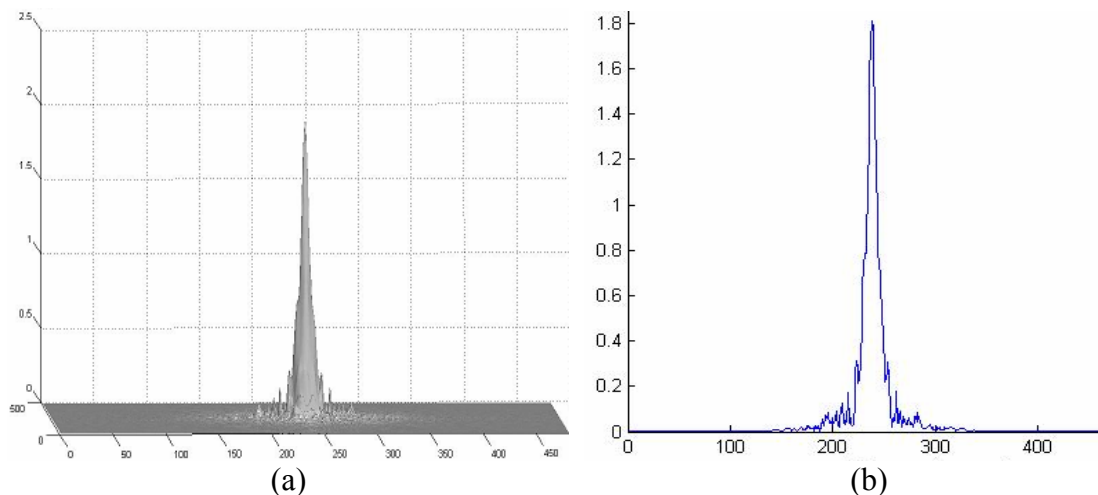


Figura 10. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Vista tridimensional; (b) Corte transversal.

En la figura (11) se ilustra el resultado del proceso de correlación de orden fraccional en forma completamente digital, en el cual se puede observar la autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada.

En la figura (11a) se tiene la escena de entrada (dos caracteres similares de tamaño 4mm) la cual se transforma fraccionalmente a un orden $\alpha = 0,9$. Después de transformada, digitalmente, la escena de entrada a este orden particular, se calcula la intensidad de la transformada, la cual se ilustra en la figura (11b).

Ya obtenido el registro en intensidad se procede a multiplicar este registro con la matriz -función chirp bidimensional- y luego se lleva a cabo, digitalmente, la transformada de Fourier de orden fraccional $\alpha = -0,9$ de este resultado, obteniendo así lo ilustrado en la figura (11c).

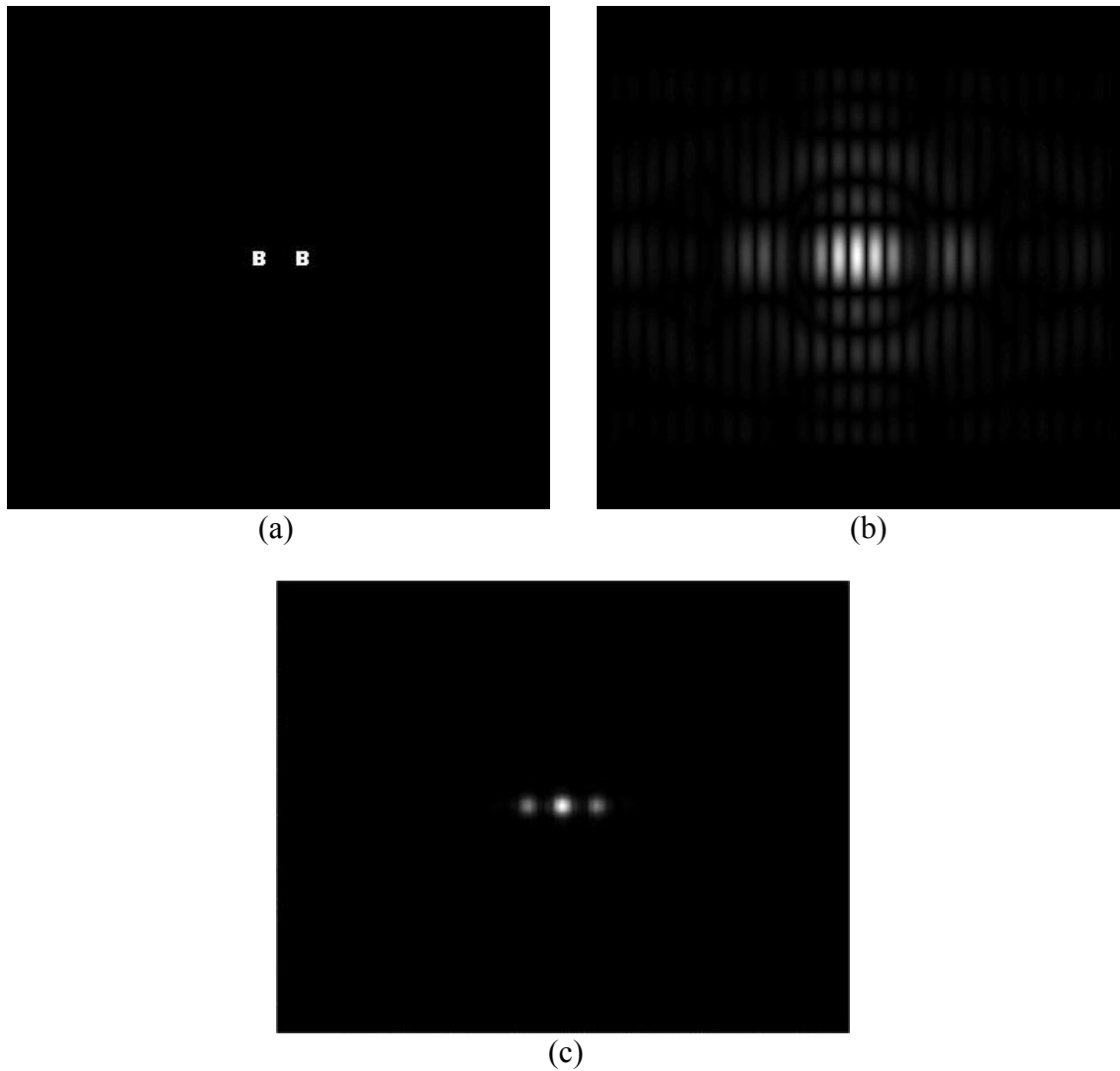


Figura 11. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Escena de entrada; (b) Intensidad de la transformada, digital, para un orden 0,9, de la imagen en (a); (c) Transformación *digital* de orden -0,9 de la imagen en (b).

En la figura (12a), se observa una vista tridimensional de la imagen en (c) de la figura (11); y en la figura (12b), un corte transversal de la misma.

Esta figura deja evidenciado el buen resultado del proceso de correlación fraccional completamente digital, como también deja evidente la existencia de los picos de

autocorrelación de orden fraccional de los elementos en la escena de entrada, los cuales corresponden con las expresiones (33) y (34).

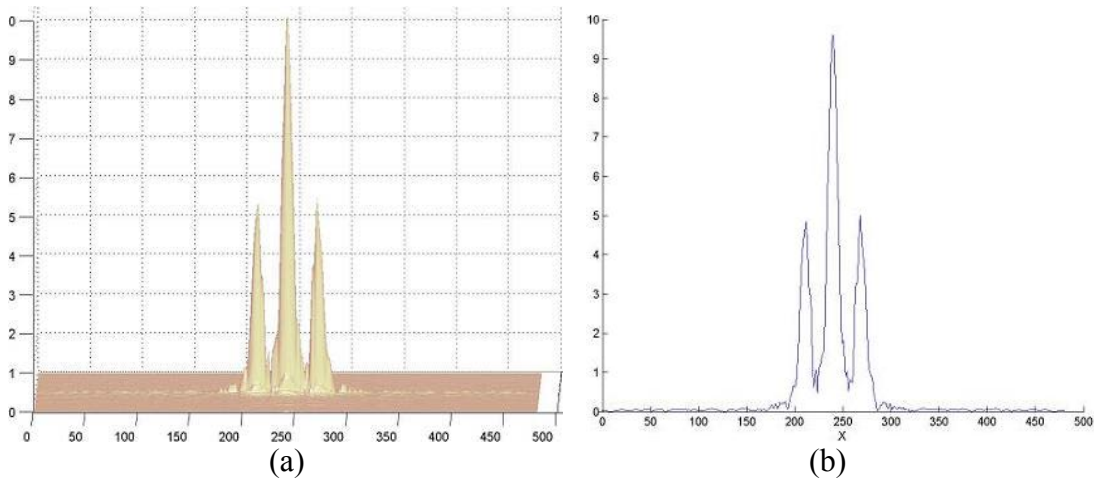


Figura 12. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) vista tridimensional; (b) corte transversal.

En la figura (13) se muestra el resultado de la correlación fraccional para dos caracteres, (dos letras L), de tamaños ligeramente diferentes. Puede observarse aquí que los picos de correlación fraccional no están definidos, debido al escalamiento en los caracteres.

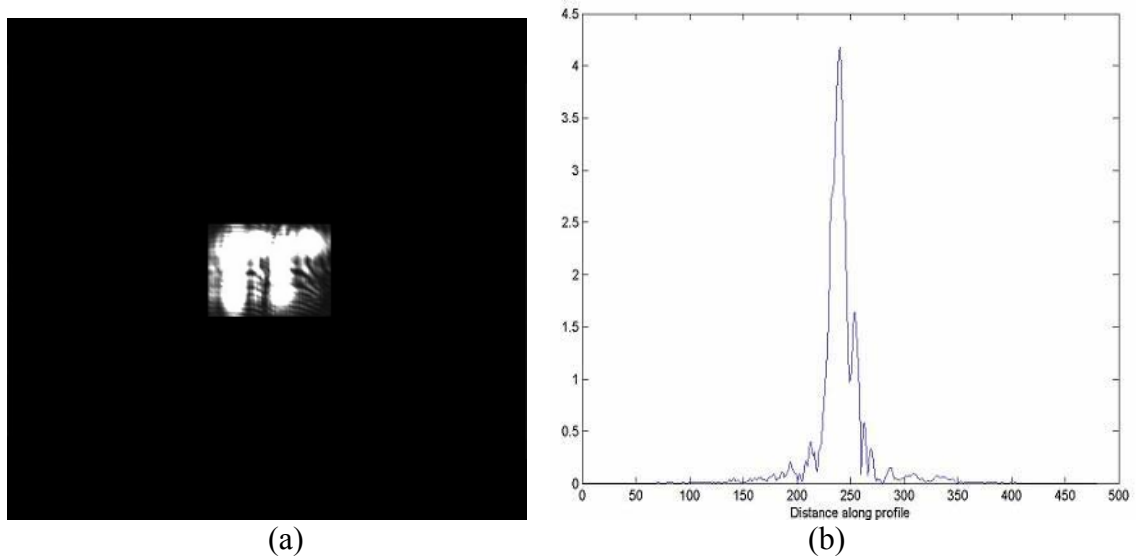
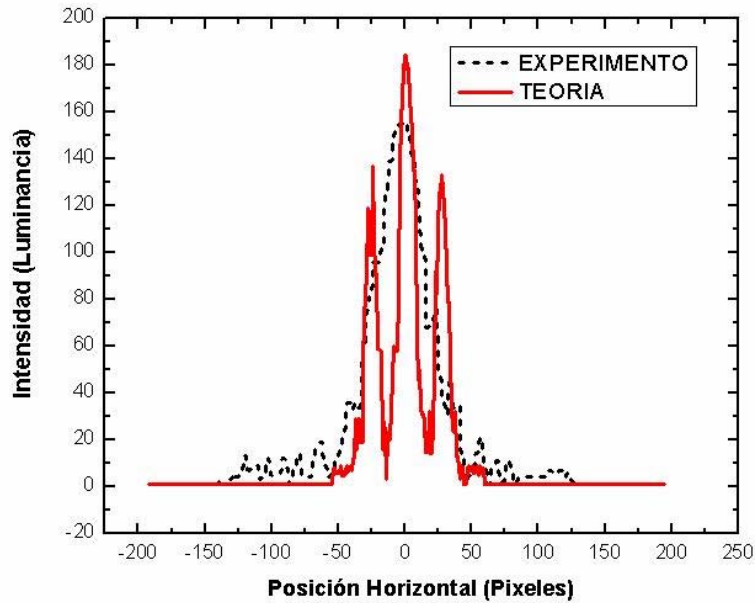


Figura 13. Autocorrelación fraccional de los caracteres en la escena de entrada. (a) Intensidad de la transformada, para un orden 0,9; (b) Corte transversal de la transformada de orden -0,9 de la imagen en (a).

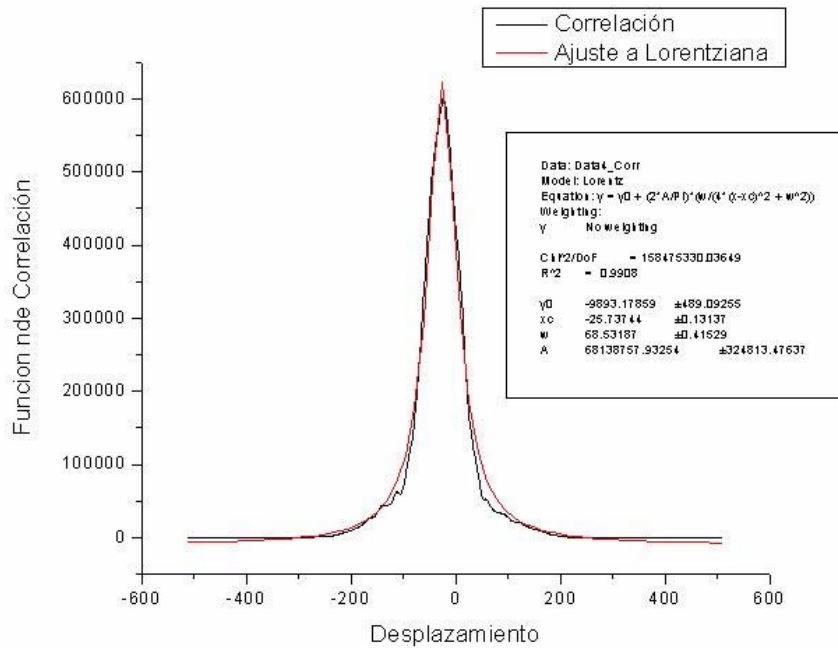
Considerando necesario la valoración de los resultados del sistema, en el cual se llevó a cabo el proceso de correlación de orden fraccional óptico-digital, en relación a los resultados arrojados por un proceso completamente digital (simulación digital), se calcula el error cuadrático medio entre dichos resultados, el cual deja conocer qué tanta confiabilidad tiene uno con respecto al otro. El valor del error obtenido correspondiente

al orden fraccional utilizado $\alpha = 0,9$, es de 0,8. Cabe anotar que el valor obtenido para el error no hace consideraciones de la incidencia de la cámara sobre la emisión que captura.

Se hace entonces necesario evaluar los resultados obtenidos con el fin de mirar qué tan correlacionados están entre sí. La figura (13) muestra los resultados experimental y teórico, y su correlación evaluada bajo el ajuste Lorentziano:



(a)



(b)

Figura 14. (a). Intensidad de autocorrelación fraccional experimental y teórico; (b). Evaluación de la correlación de los resultados experimental y teórico y el ajuste Lorentziano.

Puede entonces afirmarse que la correlación entre resultados es buena, arrojando una aproximación considerable de un 99%.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se introdujo un nuevo esquema experimental para llevar a cabo un proceso de correlación de transformada de Fourier fraccional conjunta. Se presentaron resultados experimentales del proceso de correlación fraccional, los cuales fueron analizados comparativamente con resultados completamente digitales. Se evaluó la correlación de los resultados teórico y experimental con respecto al ajuste Lorentziano, dando como resultado un 99% de aproximación, y se calculó el error cuadrático entre estos resultados, arrojando un valor de 0.8 para un valor de $\alpha = 0,9$.

Un sistema de correlación fraccional como el desarrollado en este trabajo, puede ser aplicado para el uso de reconocimiento de patrones, como un dispositivo operativo de seguridad en la identificación de un objeto en particular, ubicando a la entrada, como en nuestro caso, objetos o imágenes bidimensionales.

Como método de ampliación y mejoramiento del sistema se podría reemplazar el biprisma utilizado, el cual nos restringe a una fase única y por tanto a un orden único, por un elemento que introduzca una fase variable a la entrada, que permita obtener resultados para los diferentes órdenes fraccionales. Un elemento útil sería, por ejemplo, la Pantalla de Cristal Líquido (LCD), adquirida por el Laboratorio de Óptica y Tratamiento de Señales (LOTS) de la Universidad Industrial de Santander.

REFERENCIAS

- [1] A.W. Lohmann, D. Mendlovic, “Fractional joint transform correlator”, *Applied Optics*. 36, 7402-7407 (1997)
- [2] R. torres, Z. Lizarazo, Y. Torres, “Formulación matemática general para la correlación fraccional”, VIII Encuentro Nacional de Óptica, Popayán, Colombia, (2002).
- [3] D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch, A. W. Lohmann, “Optical fractional correlation: experimental results”, *J. Opt. Soc. Am. A*. 12, 1665-1670 (1995)
- [4] V. Namias, “The fractional Order Fourier Transform and its Application to Quantum Mechanics”, *J. Inst. Maths Applics*. 25, 241-265 (1980)
- [5] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A.W. Lohmann, “Fractional Correlation”, *Applied Optics*. 34, 303-309 (1995)
- [6] P. Pellat-Finet, “Lecciones de Óptica de Fourier”, 20 de Mayo de 2003, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia
- [7] S. Granieri, R. Arizaga, E. E. Sicre, “Optical correlation based on the fractional Fourier transform”, *Applied Optics*. 36, 6636-6645 (1997)
- [8] Jianwen Hua, Liren Liu, Guoqiang Li, “Observing the fractional Fourier transform by free-space Fresnel diffraction”, *Applied Optics*. 36, 512-513, (1997)
- [9] A.W. Lohmann, “Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform”, *J. Opt. Soc. Am. A*. 10, 2181-2186, (1993)
- [10] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A.W. Lohmann, “Graded-index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform”, *Applied Optics*. 33, 6188-6193, (1994)
- [11] H. M. Ozaktas, D. Mendlovic, “Fractional Fourier transforms and their optical implementation. II”, *J. Opt. Soc. Am. A*. 10, 2522-2531, (1993)
- [12] P. Andrés, W.D. Furlan, G. Saavedra, A.W. Lohmann “Variable fractional Fourier processor: a simple implementation”, *J. Opt. Soc. Am. A*. 14, 853-858, (1997)
- [13] J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics”, segunda edición, McGraw-Hill. (1996)

- [14] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, "The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing", John Wiley & Sons, Ltd., (2001)
- [15] Y. Bitran, Z. Zalevsky, D. Mendlovic, R. G. Dorsch, "Fractional Correlation Operation: performance analysis", Applied Optics. 35, 297-303 (1996)