

Sobre la Conjetura de Goldbach

Francisco Niño Rojas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2006

Sobre la Conjetura de Goldbach

Francisco Niño Rojas

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Directora
Sofía Pinzón Durán

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2006

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mi Padre Luis Francisco**, por brindarme apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin el hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mi Madre Isabel**, por sus enseñanzas y espíritu luchador.
- **Mis hermanos Humberto, Yaneth y Liliana**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- A mi amor **Luisa Fernanda Martínez Rojas**, por su comprensión, colaboración, confianza y apoyo, fue un motivo e inspiración para la finalización de este trabajo.
- A toda **mi Familia** por su comprensión, colaboración y apoyo incondicional.
- A la profesora **Sofía Pinzón**, por su colaboración y por su acertada orientación para la realización de este trabajo.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera**, que de una u otra manera me apoyaron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: About the Goldbach of Conjecture*

AUTHOR: Francisco Niño Rojas**

KEY WORDS: Conjecture, Goldbach, Prime Number, Combinations, Approximation. .

DESCRIPTION

There are some problems about prime numbers that have more than one demonstration, one of them is the existence of infinite prime numbers, there are others which don not have demonstration yet, it means, they are tested through different ways where they show their veracity, but it is unknown a formal and rigorous demonstration; this kind of problems are called conjectures and a great part of them correspond to the number theory. One of these famous conjectures was formulated in a letter that Christian Goldbach sent to Leonard Euler the 7th of June of 1742 which is known as the well-know "Goldbach Conjecture". "Every even number over two can be writing as addition of two prime numbers".

The chapter one is mainly based on the doctoral thesis "Pupils' conceptions about an open historical question: Goldbach Conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint" where it is carried out a historical count about the origin and the facts around Goldbach Conjecture and it is showed the empiric evidence that has been accumulated through history looking for a rigorous demonstration of the same.

In the chapter two will be extended three results mentioned in the chapter one based on the approximate number of representations of a pair or impair number given as addition of two or three prime numbers respectively. These results are: The Sylvester approximation, the Hardy-Littlewood approximation for the pair case and the Vinogradov Theorem for the impair case. About the last one we will only show some results used in its demonstration.

In the third chapter some conjectures about addition of prime numbers for the even and odd case will be proved, illustrating them with some examples that finally let us to achieve a generalization of the Goldbach Conjecture.

* Monograph.

** Faculty of sciences, School of Mathematics. Sofía Pinzón Durán, Ph. D. in Mathematics.

TITULO: Sobre la Conjetura de Goldbach*

AUTOR: Francisco Niño Rojas**

PALABRAS CLAVES: Conjetura, Goldbach, Número primo, Combinaciones, Aproximación. .

DESCRIPCIÓN

Existen algunos problemas sobre números primos que tienen más de una demostración, uno de estos es la existencia de infinitos números primos, hay otros que no tienen demostración aún, es decir son comprobados por diferentes medios donde muestran su veracidad, pero se desconoce una demostración formal y rigurosa; a este tipo de problemas se les llaman conjeturas y gran parte de ellas corresponden a la teoría de números. Una de estas famosas conjeturas fue formulada en una carta que Christian Goldbach envió a Leonard Euler el 7 de junio de 1742 que se conoce como la celebre “Conjetura de Goldbach”. “*Todo número par mayor que dos se puede escribir como suma de dos números primos*”.

El Capítulo uno esta basado principalmente en la tesis doctoral [10] “*Pupils’ conceptions about an open historical question: Goldbach Conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint.*” donde se realiza un recuento histórico sobre el origen y los hechos alrededor de la Conjetura de Goldbach y se muestra la evidencia empírica que se ha acumulado a través de la historia en busca de una demostración rigurosa de la misma.

En el Capítulo dos se extenderán tres resultados mencionados en el Capítulo uno con base al número aproximado de representaciones de un número par o impar dado como suma de dos o tres números primos respectivamente. Estos resultados son: La aproximación de Sylvester, la aproximación de Hardy-Littlewood para el caso par y el Teorema de Vinogradov para el caso impar. Sobre este último solo mostraremos algunos resultados utilizados en su demostración.

En el tercer Capítulo se evidenciarán algunas conjeturas sobre la adición de números primos para el caso par e impar, ilustrándolas con algunos ejemplos que por último nos permiten llegar a una generalización de la Conjetura de Goldbach.

* Monografía

** Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. Ph.D Sofía Pinzón Durán

Contenido

Introducción	I
1. Conjetura de Goldbach	1
1.1. Historia de la conjetura de Goldbach	1
2. Combinaciones de Goldbach	30
2.1. Teoría aditiva de números	31
2.2. Conjetura “fuerte” de Goldbach	33
2.2.1. Combinaciones impares	33
2.2.2. Formula de aproximación de Sylvester	37
2.2.3. Formula de aproximación de Hardy-Littlewood	41
2.3. Conjetura “débil” de Goldbach	43
2.3.1. Teorema de Vinogradov	43
2.3.2. Funciones aritméticas	45
2.3.3. Sumas de Ramanujan	49
2.3.4. Otros resultados de la función ϕ de Euler	52

2.3.5. Partes Fraccionarias	55
2.3.6. Principio de Dirichlet	58
2.3.7. Fórmula equivalente a $CG_3(n)$	60
3. Generalización de la conjetura	63
3.1. Números pares	63
3.2. Números impares	66
3.3. Conjetura general	70
Bibliografía	72

Introducción

En un primer curso de teoría de números se estudian algunas propiedades sobre los números primos y la trascendencia que tienen estos en algunas áreas específicas de la matemática como el estudio de curvas algebraicas, teoría de códigos, etc. Los números primos han inquietado a los matemáticos desde la antigüedad y han surgido numerosos problemas relacionados con esta área cuyas soluciones han contribuido al desarrollo de la teoría de números y en general de las matemáticas.

Existen algunos problemas sobre números primos que tienen más de una demostración, uno de estos es la existencia de infinitos números primos, hay otros que no tienen demostración aún, es decir son comprobados por diferentes medios donde muestran su veracidad, pero se desconoce una demostración formal y rigurosa; a este tipo de problemas se les llaman conjeturas y gran parte de ellas corresponden a la teoría de números. Una de estas famosas conjeturas fue formulada en una carta que Christian Goldbach envió a Leonard Euler el 7 de junio de 1742 que se conoce como la celebre “Conjetura de Goldbach”.

“Todo número par mayor que dos se puede escribir como suma de dos números primos”.

Las investigaciones realizadas hasta el momento alrededor de este problema nos permiten observar algunos resultados de gran importancia para el desarrollo de las matemáticas. Este trabajo que consta de tres capítulos, a través de los cuales queremos realizar un breve recorrido alrededor de esta conjetura y algunos resultados obtenidos buscando su demostración.

El Capítulo uno está basado principalmente en la tesis doctoral [10] *“Pupils’ conceptions about an open historical question: Goldbach Conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint.”* donde se realiza un recuento histórico sobre el origen y los hechos alrededor de la Conjetura de Goldbach y se muestra la evidencia empírica que se ha acumulado a través de la historia en busca de una demostración rigurosa de la misma. En el Capítulo dos se extenderán tres resultados mencionados en el Capítulo uno con base al número aproximado de representaciones de un número par o impar dado como suma de dos o tres números primos respectivamente. Estos resultados son: La aproximación de Sylvester, la aproximación de Hardy-Littlewood para el caso par y el Teorema de Vinogradov para el caso impar. Sobre este último solo mostraremos algunos resultados utilizados en su demostración.

En el tercer Capítulo se evidenciarán algunas conjeturas sobre la adición de números primos para el caso par e impar, ilustrándolas con algunos ejemplos que por último nos permiten llegar a una generalización de la Conjetura de Goldbach.

Capítulo 1

Conjetura de Goldbach

1.1. Historia de la conjetura de Goldbach

En matemáticas existen muchos problemas sin resolver llamados conjeturas. Algunas de las más famosas están relacionadas con la teoría de números, este tipo de problemas se caracterizan porque sus enunciados los comprende hasta un niño de primeros grados de escuela pero sus demostraciones o son muy complicadas o hasta ahora no existen. Las conjeturas y los problemas abiertos son importantes para el desarrollo de las matemáticas porque mantienen el interés de los investigadores incitándolos a realizar nuevos descubrimientos no solamente sobre el problema inicial, sino también generando otros problemas matemáticos.

Como ya dijimos dentro de la teoría de números existen varias conjeturas; una de estas es la “conjetura de Goldbach”. Esta permanece sin demostrar

desde cuando se planteó, es decir desde hace casi tres siglos. La conjetura de Goldbach dice:

“Todo número par mayor que dos se puede escribir como suma de dos números primos”.

Antes de presentar algunos resultados importantes obtenidos hasta el momento alrededor de esta conjetura, es interesante revisar algunos aspectos de la vida de Goldbach.

Cristian Goldbach nació en 1690 en Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrado, Rusia), y murió en 1764 en Moscú. Hombre de muchos talentos, de buena familia. Viajó extensamente por Europa aprendiendo con científicos de todos los lugares. Fue profesor de matemáticas e historia en San Petersburgo. Goldbach se interesó en campos como las lenguas y las matemáticas, particularmente en la teoría de números, teoría de curvas, cálculo diferencial y teoría de series.

Se relacionó académicamente con muchos pensadores de sus tiempos como Nicolás Bernoulli (1687 – 1748), su joven hermano Daniel (1700 – 1782), Euler (1707 – 1785), y Leibniz (1646 – 1716), a quienes conoció durante sus extensos viajes por Europa manteniendo una correspondencia activa con los mismos, especialmente con Euler. Sus conocimientos y artículos le dieron la oportunidad de servir a la academia de ciencias en San Petersburgo, en 1728 fue a Moscú para ser tutor de Zar Pedro II y en 1742 estaba a cargo de descifrar envíos en el ministerio de asuntos extranjeros.

Él mantuvo una constante comunicación con Euler desde 1729 hasta su muerte en 1764. Al comienzo, la correspondencia fue conducida en latín y continuada así hasta después del retorno de Goldbach a San Petersburgo en

1732, se dio un momento en que él y Euler debieron haberse comunicado casi diariamente. Alrededor de 1740 su comunicación era en alemán pero con algunas palabras francesas traducidas al latín, especialmente en los pasos matemáticos. Su más notorio trabajo en el campo de la teoría de números fue desarrollado en colaboración con Euler.

La conjetura primero fue formulada el 7 de junio 1742 de Goldbach a Euler pero solo fue publicada hasta 1843.

La lectura apasionada de las notas de Fermat sobre la teoría de números, llevó a Goldbach a observar la regularidad evidente de las siguientes particiones:

$$6=3+3 \quad 8=3+5 \quad 10=5+5 \quad 12=5+7 \quad 14=7+7\dots$$

Parecía que cada número par mayor que 6 se podría expresar como la suma de dos números primos impares. Pocas pruebas son apenas suficientes para deducir que la partición de un número par en dos números primos no es única.

$6=3+3$	Sin otra alternativa
$8=3+5$	Sin otra alternativa
$10=3+7$	también: $10 = 5 + 5$
$12=5+7$	Sin otra alternativa
$14=3+11$	también: $14 = 7 + 7$
$16=3+13$	también: $16 = 5 + 11$
$18=5+13$	también: $18 = 7 + 11$
$20=3+17$	también: $20 = 7 + 13$
$22=3+19$	también: $22 = 11 + 11$ y $22 = 5 + 17$.

Por otra parte, si consideramos números pares más grandes, las opciones posibles parecen aumentar. ¿Por qué? ¿Según qué ley? ¿Hay una cierta regularidad en esto? se podría suponer que Goldbach, durante sus incontables pruebas procuró trabajar las tablas del siguiente tipo:

n	3+...	5+...	7+...	11+...	13+...	17+...	19+...	23+...	29+...
6	3+3								
8	3+5	5+3							
10	3+7	5+5	7+3						
12		5+7	7+5						
14	3+11		7+7	11+3					
16	3+13	5+11		11+5	13+3				
18		5+13	7+11	11+7	13+5				
20	3+17		7+13		13+7	17+3			
22	3+19	5+17		11+11		17+5	19+3		
24		5+19	7+17	11+13	13+11	17+7	19+5		
26	3+23		7+19		13+13		19+7	23+3	
28		5+23		11+17		17+11		23+5	
30			7+23	11+19	13+17	17+13	19+11	23+7	
32	3+29				13+19		19+13		29+3.

En la tabla anterior cada fila tiene que ser ocupada por lo menos por una suma de números primos.

A través de la correspondencia con Goldbach, Euler llegó a las obras de Fermat probando y extendiendo gran parte de sus resultados, e incluso resolviendo varias preguntas propuestas por Goldbach.

A través de sus trabajos Euler popularizó la teoría de números como Fermat no lo había conseguido. Inicialmente miraba los trabajos de Fermat con escepticismo y no mostraba mayor interés por estos. Debido a esto en unas de sus cartas enviadas el 7 de junio de 1742 Goldbach escribió a Euler:

“No es inútil prestar atención a asuntos que muy probablemente no tengan una demostración rigurosa. Incluso en el caso de que dichos asuntos resulten ser falsos, con todo esto, se puede dar el descubrimiento a una nueva verdad. La idea de Fermat que todo número de la forma 2^{2^n-1} sea primo no es cierta, pero sería un hecho notable observar que los números de esta forma se pueden representar como suma de dos cuadrados de manera única.”

Aquí Goldbach se refiere al hecho de que Euler ya había probado (1732) que para $n = 5$ el número de Fermat $F_5 = 2^{32} + 1$ no es primo.

Al mismo tiempo Goldbach conjeturó que todo número n que se pueda representar como suma de dos números primos, se puede representar como suma de tantos números primos como se quiera hasta obtener todas las posibles combinaciones menores que n .

Es importante resaltar que Goldbach y Euler consideraban el número 1 como número primo.

Continuando con la carta, Goldbach afirma:

“Después de leer esto encuentro que la conjetura se puede demostrar rigurosamente para el caso $n+1$, si se cumple para el caso n y si $n+1$ se puede representar como suma de dos números primos. La demostración es muy sencilla.

$$4 = \begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 2 \\ 1 + 3 \end{cases} \quad 5 = \begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 2 \\ 1 + 1 + 3 \\ 2 + 3 \end{cases} \quad 6 = \begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\ 1 + 1 + 1 + 3 \\ 1 + 2 + 3 \\ 1 + 5 \end{cases}$$

Parece que cada número mayor que dos se puede representar como suma de tres números primos”.

Esta es la primera formulación de la conjetura de Goldbach. Actualmente (considerando que el número 1 no es primo) se conocen algunas variantes de esta. Cuando los números primos comienzan a partir del 2, la conjetura puede ser formulada de la siguiente manera:

- *“Cada número par es la suma de dos números primos o 1”.*

Una forma más general es:

- *“Cada número par $n > 2$ es la suma de dos números primos. Por lo tanto cada número impar $n > 5$ es la suma de tres números primos”.*

Entre otras variantes de la conjetura tenemos:

- *“Cada número par mayor o igual que 6 es la suma de 2 números primos impares”.*
- *“Cada número entero impar mayor que 17 es la suma exactamente de 3 números primos distintos”.*

Debido a las afirmaciones que hizo Goldbach en esta carta, el 30 de junio del mismo año Euler contesta:

“Para que todo número de la forma $2^{2^n-1} + 1$ se pueda representar como suma de dos cuadrados de manera única, estos números deben ser primos. Ya que estos números son de la forma $4m + 1$. Siempre que sean números primos de esta forma se pueden representar como suma de dos cuadrados de manera única; pero cuando $4m + 1$ no es primo no tiene representación como suma de dos cuadrados o se puede representar como suma de dos cuadrados de mas de una manera, por ejemplo $2^{32} + 1$, que no es primo se puede representar como suma de dos cuadrados de mas de una manera así:

- Cuando a y b se pueden representar como suma de dos cuadrados entonces el producto ab se puede representar como suma de dos cuadrados.
- Si el producto ab y uno de los factores a se puede representar como suma de dos cuadrados, entonces el otro factor b se puede representar como suma de dos cuadrados.

Estos teoremas se pueden demostrar rigurosamente.

Ahora $2^{32} + 1$ se puede representar como suma de dos cuadrados, y como sabemos $2^{32} + 1$ es divisible por $641 = 25^2 + 4^2$.”

Aquí Euler hace referencia a que $2^{32} + 1 = (641)(6700417)$, Es decir $641|2^{32} + 1$ y como 641 así como $2^{32} + 1$ se pueden representar como suma de dos cuadrados, entonces el otro factor también se puede representar como suma de dos cuadrados, Como se muestra a continuación.

Sea $b = pp + qq$, de modo que $2^{32} + 1 = (25^2 + 4^2)(pp + qq)$ entonces

$$\begin{aligned}
 2^{32} + 1 &= 25^2(pp + qq) + 4^2(pp + qq), \\
 &= 25^2pp + 4^2qq + 25^2qq + 4^2pp, \\
 &= (25p)^2 + (4q)^2 + (25q)^2 + (4p)^2, \\
 &= (25p)^2 + 2(25p)(4q) + (4q)^2 + (25q)^2 - 2(25p)(4q) + (4p)^2, \\
 &= [(25p)^2 + 2(25p)(4q) + (4q)^2] + [(25q)^2 - 2(25q)(4p) + (4p)^2], \\
 2^{32} + 1 &= (25p + 4q)^2 + (25q - 4p)^2.
 \end{aligned}$$

Con un razonamiento análogo se obtiene la otra representación:

$$\begin{aligned}
 2^{32} + 1 &= 25^2(pp + qq) + 4^2(pp + qq), \\
 &= 25^2pp + 4^2qq + 25^2qq + 4^2pp, \\
 &= (25p)^2 + (4q)^2 + (25q)^2 + (4p)^2, \\
 &= (25p)^2 - 2(25p)(4q) + (4q)^2 + (25q)^2 + 2(25p)(4q) + (4p)^2, \\
 &= [(25p)^2 - 2(25p)(4q) + (4q)^2] + [(25q)^2 + 2(25q)(4p) + (4p)^2], \\
 2^{32} + 1 &= (25p - 4q)^2 + (25q + 4p)^2,
 \end{aligned}$$

haciendo la reducción doble con $p = 2556$ y $q = 409$, tenemos

$$2^{32} + 1 = 65536^2 + 1^2 = 622664^2 + 20449^2.$$

Por lo tanto $2^{32} + 1$ se puede representar como suma de dos cuadrados por lo menos de dos maneras.

En esta misma carta y en respuesta a la segunda afirmación Euler escribe:

“Que todo número que se puede representar como suma de dos números primos, se puede representar como suma de tantos números primos co-

mo se quiera, puede ser ilustrado y confirmado según las observaciones que usted hace, conociendo que cada número par es una suma de dos números primos. De hecho deje que el número propuesto n sea par; entonces es una suma de tres, y también cuatro números primos, etcétera. Sin embargo si n es un número impar entonces es ciertamente una suma de tres números primos, si $n - 1$ es suma de dos números primos, y por lo tanto también puede ser representado como suma de tantos números primos como se quiera. Sin embargo el que todo número se puede representar como suma de dos números primos lo considero como verdadero, aunque no puedo demostrarlo.”

Posteriormente, en diciembre de 1752 Euler indicó otra conjetura (probablemente sugerida también por Goldbach) que todo número par de la forma $4n + 2$, es la suma de dos números primos de la forma $4m + 1$ donde $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo 1.1.1.

$$10 = 5 + 5 \quad 14 = 1 + 13 \quad 18 = 5 + 13 \quad 22 = 5 + 17 \quad 30 = 1 + 29 = 13 + 17.$$

Lo verifico para los números pares $(4n + 2)$ hasta 110.

Independientemente de Goldbach, el matemático inglés Edward Waring (1734–1798) en su trabajo *Meditations Analytical* (Cambridge, 1776), había indicado la misma conjetura de la siguiente forma: “cada número par es la suma de dos números primos y cada número impar es primo o la suma de tres números primos”.

Por otra parte, se dice que Rene Descartes (1596 – 1650), había indicado en

un manuscrito que cada número par es una suma de 1, 2, o 3 primos.

Es sorprendente la evidencia empírica que se ha acumulado a través de la historia sobre la conjetura de Goldbach. Sin embargo se han encontrado algunas perplejidades sobre la validez de la misma. Una de estas es la que expresa el gran matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) sobre la validez de la conjetura con respecto a números pares suficientemente grandes.

Aunque posteriormente se pueda establecer una prueba completa y rigurosa, la conjetura de Goldbach sigue siendo para los matemáticos desafiadora, excepcional y un problema abierto en la teoría de números.

Como G.H. Hardy (1877 – 1947) dijo durante una conferencia dada el 6 de octubre de 1921 a la sociedad matemática de Copenhague:

“Este problema famoso es probablemente tan difícil como cualesquiera de los problemas sin resolver de las matemáticas”.

Consideremos ahora aquella evidencia empírica que se ha acumulado a través de la historia debido a la conjetura.

En 1855, A. Desboves verificó que cada número par entre 2 y 10000 es una suma de dos números primos por lo menos de dos maneras. Por otra parte indicó que cuando este número par es el doble de un número impar, es al mismo tiempo una suma de dos números primos de la forma $4k + 1$ y una suma de dos números primos de la forma $4k + 3$, donde $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos los números pares 6, 10, 14, 18, 22 que cumplen la condición de ser dobles de números impares. Cada columna indica la representación de cada par como suma de dos números primos de la forma*

$4k + 1$ y suma de dos números primos de la forma $4k + 3$

$2n$	$4k + 1$	$4k + 3$
6	1+5	3+3
10	5+5	3+7
14	1+13	7+7
18	5+13	7+11
22	5+17	3+19.

A. Desboves lo verificó hasta 10000.

En 1894 G. Cantor (1845 – 1918), realizó una tabla en la cual verificó la conjetura para los números hasta 1000.

Ejemplo 1.1.3. Considere $n = 2N = x + y$, donde x y y son números primos tales que $x \leq y$ y donde $v(n)$ denota el número de representaciones de n como suma de dos números primos:

$n = 2N$	x	$v(n)$
10	3,5	2
22	3,5,11	3
34	3,5,11,17	4
40	3,11,17	3
78	5,7,11,17,19,31,37	7
86	3,7,13,19,43	5
100	3,11,17,29,41,47	6
1000	3,17,23,29,47,53,59,71,89,113,137,173,179, 191,227,239,257,281,317;347,353,359,383,401, 431,443,479,491	28

Veamos algunas representaciones de la tabla anterior.

$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11; \quad 40 = 3 + 37 = 11 + 29 = 17 + 23.$$

La tabla de Cantor es interesante porque parece indicar que no sólo la conjetura de Goldbach es probablemente verdad, sino que el valor del $v(n)$, a excepción de algunas oscilaciones, indica un valor que va aumentando a medida que n aumenta.

De 1896 a 1903 A. Aubry verificó también la conjetura de Goldbach para los números de 1002 a 2000. En 1896 R. Haussner la verificó hasta 10000, realizando un sistema de tablas. En su primera tabla siguió las líneas de la tabla de Cantor mostrando en $v(n)$ el número de las representaciones de cada número par n hasta 3000 como una suma de dos números primos, también dando los valores del más pequeño de los dos primos implicados en cada representación. En la segunda tabla él dio valores a $v(n)$ para cada valor de $n = 2N$ menores que 5000, empleando esto y mediante un cómputo adicional afirmó que la conjetura de Goldbach era verdad para todos los números pares hasta 10000.

Mediante estas tablas extensas se buscaba obtener procedimientos directos que permitiera realmente sugerir una manera de demostrar la conjetura. Este método directo significaría restar de cada número par $2N$ todos los números primos $x \leq 2N$ y determinar mediante una tabla cuales diferencias $2N - x$ serían también números primos y así esto significaría que $2N$ fuera representado como suma de dos números primos. Sin embargo, consumió mucho tiempo debido a el hecho de que las diferencias $2N - x$ tuvieron que ser hechas para cada primo $x \leq N$, y observar si el resultado incuriría en un

número primo o no.

Es importante resaltar que estos métodos estaban abiertos a la objeción de algunos medios en su verificación de errores que podrían ocurrir muy fácilmente, excepto por la evaluación directa de los resultados. Sin embargo, Cantor además de Haussner observó en sus tablas una ley evidente con respecto al valor de $v(2N)$. Expresó que para todo números $2N$ divisible por 3, el número $v(2N)$ es un máximo relativo con respecto a los 2 pares anteriores y a los 2 pares siguientes.

Ejemplo 1.1.4. *Tengamos en cuenta los números 42 y 78 que son múltiplos de 3 y los 2 pares anteriores y los 2 pares consecutivos de cada una de ellos.*

$n = 2N$	x	$v(n)$
38	7,19	2
40	3,11,17	3
42	5,11,13,19	4
44	3,7,11,29	4
46	3,5,17,23	4
74	3,7,13,31,37	5
76	3,5,17,23,29	5
78	5,7,11,17,19,31,37	7
80	7,13,19,37	4
82	3,11,23,29,41	5

Vemos que $v(42) = 4$ es mayor o igual que $v(38)$, $v(40)$, $v(44)$, $v(46)$ que son los valores a comparar.

Lo mismo sucede para $v(78) = 7$, que es mayor o igual a cada uno de los valores $v(74)$, $v(76)$, $v(80)$ y $v(82)$.

Por lo tanto $v(42)$ y $v(78)$ son máximos relativos con respecto a los 2 pares anteriores y a los 2 pares siguientes.

Es interesante ilustrar los valores $v(18)$ y $v(30)$ con las características mencionadas anteriormente.

$n = 2N$	x	$v(n)$
14	3,7	2
16	3,5	2
18	5,7	2
20	3,7	2
22	3,5,11	3
26	3,7,13	3
28	5,11	2
30	7,11,13	3
32	3,13	2
34	3,5,11,17	4

Podemos observar que $v(18) = 2$, comparándolo con $v(22) = 3$ no cumple la afirmación anterior. De igual forma sucede con $v(30) = 3$ al comparándolo con $v(34) = 4$. Es decir $v(18)$ y $v(30)$ no son máximos relativos con respecto a los valores a comparar.

Parece ser que si tenemos en cuenta los primos x , y tal que $x < y$, se cumple con la ley mencionada por Cantor a partir de los números pares divisibles

por 3 mayores o iguales que 18. Hicimos verificaciones para los números pares hasta 102, de igual forma se comprobó que para $v(12) = 1$, no se cumple la afirmación de Cantor:

Ejemplo 1.1.5.

$n = 2N$	$x (x < y)$	$v(n)$
8	3	1
10	3	1
12	5	1
14	3	1
16	3,5	2

Vemos que $v(16) = 2$ es suma de dos primos impares diferentes (x, y primos $x + y = 2N, x < y$) por lo tanto $v(12)$ no es un máximo relativo con respecto a los dos números pares anteriores y a los dos números pares siguientes.

Sin embargo Cantor observó de sus tablas estas características para los números pares hasta 1000.

Se podría considerar a-priori ver lo imposible que es determinar una expresión para $v(2N)$ en términos de $2N$. Sin embargo si se hubiera podido demostrar que $v(2N)$ es siempre positivo para cada n , la conjetura de Goldbach habría sido probada. Se hicieron esfuerzos considerables para obtener los valores de $v(2N)$, particularmente cuando N es un número grande.

J. J. Sylvester (1814-1897) Afirio que el número de representaciones de un número par $n = 2N$ suficientemente grande es aproximadamente igual a la

razón del cuadrado de la cantidad de números primos menores que n con el mismo n . Es decir, sea $v(n)$ el número de representaciones de un número par suficientemente grande entonces:

$$v(n) \approx \frac{(\pi(n))^2}{n}$$

donde $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$, que representa la cantidad aproximada de números primos menores o iguales que n (teorema del número primo), entonces $(\pi(n))^2 \approx \frac{n^2}{(\ln n)^2}$. Reemplazando $(\pi(n))^2$ se tiene:

$$v(n) \approx \frac{(\pi(n))^2}{n} \approx \frac{\frac{n^2}{(\ln n)^2}}{n} = \frac{n}{(\ln n)^2}.$$

Entonces:

$$v(n) \approx \frac{n}{(\ln n)^2}.$$

Por lo tanto $v(n)$ es aproximadamente igual al cociente de n con el cuadrado del logaritmo natural de n . En el capítulo 2 se hablara mas detalladamente sobre este resultado.

En 1897 en un artículo [11] Sylvester mencionó que más adelante podría probar la conjetura por un método original e indicó una conjetura más precisa, “cada número de la forma $2n$ es una suma de dos números primos, uno mayor que $n/2$ y el otro menor que $3n/2$ ”; es decir existen números primos $p_1, p_2 \in (\frac{n}{2}, \frac{3n}{2})$ tal que $p_1 + p_2 = 2n$, tal que $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.6. *Consideremos los números pares 20, 28 y 50*

- Para $2n = 20$ se tiene que: $n = 10$; $\frac{n}{2} = 5$; $\frac{3n}{2} = 15$; claramente $7, 13 \in (5, 15)$ y $7 + 13 = 20$.

- Para $2n = 28$ se tiene que: $n = 14$; $\frac{n}{2} = 7$; $\frac{3n}{2} = 21$; es claro que $11, 17 \in (7, 21)$ y $11 + 17 = 28$.
- Para $2n = 50$ se tiene que: $n = 25$; $\frac{n}{2} = \frac{25}{2}$; $\frac{3n}{2} = \frac{75}{2}$; los números primos que me satisfacen la suma con las condiciones dadas son $13, 37 \in (\frac{25}{2}, \frac{75}{2})$ y $13 + 37 = 50$.

Sylvester hizo las verificaciones para los números pares del 2 al 1000.

En 1896 P. Stäckel denotó por G_{2N} al número total de todas las representaciones de un número par $2N$ como suma de dos números primos, pero sin la condición $x \leq y$. Así: $G_{2N} = 2v(2N) - \varepsilon$ donde ε era 1 o 0 según, si N es primo o no.

Ejemplo 1.1.7. Sean $10 = 2(5)$, $34 = 2(17)$ y $100 = 2(50)$

$n = 2N$	x	$v(2N)$
$10=2(5)$	$3, 5$	2
$34=2(17)$	$3, 5, 11, 17, 23, 29, 31$	4
$100=2(50)$	$3, 11, 17, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 97$	6

entonces,

$$G_{2N} = 2v(2N) - \varepsilon$$

$$2(2)-1=3$$

$$2(4)-1=7$$

$$2(6)-0=12$$

Stäckel observó que el valor de G_{2N} dependía de la estructura multiplicativa de $2N$. Por lo tanto, definió P_k como el número de primos impares mayores o iguales que 1 y menores que k (considerando el número 1 como número primo), obteniendo aproximaciones de G_{2N} para los valores grandes de N , en términos de la función ϕ de Euler. Recordemos que para cada entero positivo n , se define $\phi(n)$ como el número de enteros positivos menores o iguales que n y primos relativos con n .

Una de estas aproximaciones es la siguiente:

$$G_{2N} \approx \frac{P_{2n}^2}{\phi(2n)}.$$

Ejemplo 1.1.8. *Consideremos los números pares 10, 100 y 1000.*

- $G_{10} \approx \frac{P_{10}^2}{\phi(10)} \approx \frac{4^2}{4} = 4$
- $G_{100} \approx \frac{P_{100}^2}{\phi(100)} \approx \frac{21^2}{40} = \frac{441}{40} \approx 11$
- $G_{1000} \approx \frac{P_{1000}^2}{\phi(1000)} \approx \frac{144^2}{400} = \frac{20736}{400} \approx 51$

Observemos que las aproximaciones de Stäckel no coinciden con las aproximaciones de Sylvester hechas en el capítulo siguiente. Sin embargo difieren en muy poco.

En 1900 el matemático alemán E. Landau (1877 – 1938) consideró la fórmula de aproximación de Stäckel para G_n como:

$$G_n \approx \frac{n^2}{(\ln n)^2 \phi(n)}.$$

Ejemplo 1.1.9. *Considerando los mismos números del ejemplo anterior tenemos:*

- $G_{10} \approx \frac{10^2}{(\ln 10)^2 \phi(10)} = \frac{100}{(\ln 10)^2 4} \approx 4$
- $G_{100} \approx \frac{100^2}{(\ln 100)^2 \phi(100)} = \frac{10000}{(\ln 100)^2 40} \approx 12$
- $G_{1000} \approx \frac{1000^2}{(\ln 1000)^2 \phi(1000)} = \frac{1000000}{(\ln 1000)^2 400} \approx 52$

Como podemos observar a medida que n aumenta, las aproximaciones de Landau tampoco coinciden con las anteriores. Basándose en esto, el mismo Landau mostró que no había una buena aproximación para obtener el número de representaciones de un número par suficientemente grande como suma de dos números primos.

La conjetura de Goldbach también fue verificada por A. Cunningham para todos los números de un tipo especial hasta 200 millones, y también dio un resumen de la evidencia para la conjetura. En detalle, él utilizó los números de la forma: 2^n ; $2^n \cdot w$; $(4w)^n$; $2 \cdot (2w)^n$; $(2w)^n$; $2^n \cdot (2^n \pm 1)$; $2 \cdot w^n$; $2 \cdot (2^n \pm w)$ donde w denota un número pequeño.

Un punto decisivo en las investigaciones que se desarrollaban sobre la conjetura fue dado por Jean Merlin quien en 1915 fue el primero en llamar la atención hacia los números primos cuya diferencia es 2, es decir, los hoy en día llamados primos gemelos. Mencionó que los números primos usados en la conjetura se podrían determinar por un método análogo a la clásica criba de Eratóstenes. Desafortunadamente, sus métodos generales no fueron resaltados debido a su muerte.

En 1919, empleando el método de Merlin y la criba de Eratóstenes, el matemático noruego Viggo Brun (1885 – 1978) publicó un artículo importante donde expresaba que la serie formada por los recíprocos de los números primos gemelos es convergente y claramente la serie de los recíprocos de todos los números primos es divergente.

En 1920 probó por métodos elementales (es decir, sin usar ideas de funciones analíticas), que cada número par “suficientemente” grande se podría representar como la suma de dos números, cada uno de los cuales era un producto de a lo más 9 números primos (iguales o distintos). Este resultado fue grandioso, ya que ayudó a probar la existencia de infinitas parejas de números cuya diferencia es 2 y cada número de la pareja es un producto de a lo más 9 números primos. El método y los resultados de Brun fueron mejorados por varios matemáticos, como H. Rademacher, T. Estermann y G. Ricci.

Rademacher (1892 – 1969) en 1923, obtuvo un resultado mejor que Brun, probando que cada número par suficientemente grande se podría representar como suma de dos números, cada uno de los cuales contiene a lo más 7 factores primos, contando multiplicidades.

El resultado de Rademacher fue mejorado en 1932 por T. Estermann, que probó que cada número par suficientemente grande era representable como suma de dos números. Cada uno de los cuales es producto a lo más de 6 números primos (iguales o distintos).

G. Ricci (1901 – 1973) en 1937, usando el método de Brun probó que cada número entero suficientemente grande se puede representar como suma de a lo más 67 números primos.

En una conferencia dada el 6 de octubre de 1921 a la sociedad matemática de Copenhague el gran matemático inglés G.H. Hardy dijo:

“La pregunta que les deseo hacer es esta:

¿Es razonable, en el estado actual del conocimiento matemático, esperar obtener una prueba elemental del teorema de Goldbach?”

Si contesto negativamente, como debo, observando todos los esfuerzos realizados hasta el momento, confío en que ustedes no me entenderán mal. No puedo creer que los métodos de Merlin y de Brun sean suficientemente de gran alcance o suficientemente profundos para conducir a una solución del problema.

Están muy lejos del significado que observo sus trabajos como escasos de interés y de valor. Hay mucho en el trabajo de Brun que me parece muy brillante, pienso que algunos de sus teoremas ya tienen su lugar en cada libro de teoría de números. sin embargo debemos tomar las consideraciones que se han hecho a través de la historia y la lógica de nuestro tema.

Recordemos por un momento el teorema del número primo

$(\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n})$, que representa la cantidad aproximada de números primos menores o iguales que n). Es extraño que esté en cualquier clasificación como un teorema más sencillo que la conjetura de Goldbach, de la que no se tiene ninguna prueba elemental y nos podemos preguntar si es razonable contar con una. Ahora sabemos que la conjetura es equivalente a una afirmación sobre una función analítica. La función Zeta de Riemann que dice no tener ningún cero en cierta línea. Una prueba de tal afirmación, independiente de ideas de la teoría de funciones, me parece inverosímil y extraordinaria”.

En 1923, el mismo Hardy y Littlewood, al asumir una prueba de la hipótesis de Riemann, probaron que cada número impar suficientemente grande (es decir, de cierto punto hacia adelante) es la suma de tres números primos impares, y por otra parte obtuvieron una expresión asintótica para el número de tales representaciones. En el siguiente capítulo se profundizara sobre esta afirmación.

En 1930, el matemático ruso L.G. Schnirelmann (1905 – 1938) probó un teorema de existencia, según el cual cada número entero $n \geq 2$ es la suma de a lo mas c números primos. En el mismo año obtuvo la prueba de que todo número natural n puede ser expresado como suma de a lo más 20 números primos.

Después de siete años (1937), otro matemático ruso I.M. Vinogradov (1891 – 1983), demostró que cada número entero impar suficientemente grande se puede escribir como la suma de a lo mas tres números primos, y así cada número entero suficientemente grande es la suma de a lo mas cuatro primos. Esta es otra afirmación que sera profundizada en el siguiente capítulo.

El resultado del trabajo de Vinogradov permitió conocer los cimientos de la conjetura de Goldbach para casi todos los números enteros pares. Sin embargo, Vinogradov no pudo definir rigurosamente el concepto de números suficientemente grandes.

Hasta 1956, uno de sus estudiantes, K.V. Borodzin, encontró que el número

$$33^{3^{15}} \approx e^{e^{16,573}} \approx 3,25 * 10^{6,846,168}$$

(un número que tiene más de seis millones de dígitos) es una cota superior. Si

fueran todos los números impares menores que $33^{3^{15}}$ la suma de tres números primos, entonces la “conjetura débil del Goldbach”(“todo número impar $n > 5$ se puede representar como suma de 3 números primos”) supuestamente sería probada. Posteriormente dicho límite fue reducido a $e^{e^{11,503}} \approx 3,33 * 10^{43,000}$ por Chen y Wang (1989).

En 1940, Pipping verificó la conjetura para cada número $n < 100000$ con la ayuda de un computador. En 1964 P. R. Stein y M. L. Stein la verificaron para cada $n < 10^8$.

En 1947, Atle Selberg produjo otro método de la criba que conduce a un resultado más exacto que el método de Brun en cada caso donde este método se pueda aplicar. Como Wang Yuan preciso “es asombrosamente simple”. Por este trabajo y por su investigación sobre los ceros de la función zeta de Riemann donde demostró que una proporción positiva de sus ceros satisface la hipótesis de Riemann en 1950 Selberg ganó la medalla Fields.

Después de una serie de mejoras importantes en el método y en el resultado de Brun, en 1966 el matemático chino Chen Jing (1933 – 1996) estableció que cada número par suficientemente grande es la suma de un primo más un número que es el producto dos números primos. Es decir que $2\mathbb{N} = p_1 + (p_2 * p_3)$, donde p_1, p_2, p_3 son números primos no necesariamente distintos.

Ejemplo 1.1.10.

$$18 = 3 + (3 * 5); \quad 30 = 5 + (5 * 5); \quad 32 = 11 + (3 * 7); \quad 34 = 19 + (3 * 5).$$

Este resultado es parecido al de la Conjetura de Goldbach ($2N = p_1 + p_2$).

Pero nadie los ha podido relacionar. Sin embargo algunos especialistas dicen que este es el mejor resultado conseguido hasta el momento.

En 1995 O. Ramaré probó que todo número entero par puede ser expresado como suma de a lo mas 6 números primos. En el mismo año Kaniecki probó que asumiendo la hipótesis de Riemman como verdadera que todo número entero impar puede ser expresado como la suma de a lo mas 5 números primos.

La lista de matemáticos que han trabajado (y que están trabajando) sobre la conjetura de Goldbach es considerable, pero parece que las tentativas más eficaces de su búsqueda están basadas en mejorar el método de la criba que después de Bombieri y Chen Jing han dado resultados.

El siguiente cuadro muestra las ultimas verificaciones de la conjetura de Goldbach.

límite	Referencia
$2 * 10^{10}$	Granville (1989)
$4 * 10^{11}$	Sinisalo (1993)
$1 * 10^{14}$	Deshouillers(1997)
$4 * 10^{14}$	Richstein (2001)
$2 * 10^{16}$	Oliveira e Silva (Marzo 24 de 2003)
$6 * 10^{16}$	Oliveira e Silva (Octubre 3 de 2003)
$2 * 10^{17}$	Oliveira e Silva (febrero 5 de 2005)
$3 * 10^{17}$	Oliveira e Silva (diciembre 30 de 2005)

Douglas R. Hofstadter se baso en la conjetura de Goldbach para bosquejar un

diálogo entre Aquiles y la tortuga que son dos caracteres de su libro clásico *Gödel, Escher, Bach: una trenza de oro eterna*. El diálogo está en el capítulo XII (parte II) del libro, y sus personajes son Aquiles y la tortuga. La forma del diálogo se basa sobre las variaciones de Goldberg y su contenido se refiere a algunos problemas de la teoría de números como la conjetura de Goldbach.

En un escrito, el mismo Hofstadter muestra que hay muchas variaciones en teoría de números, tomando en consideración solamente su gama investigadora de números naturales. Con base a esto, pueden haber muchas variaciones, algunas de las cuales conducen a investigaciones finitas, otras a investigaciones infinitas y aún otras a las investigaciones que fluctúan entre las finitas e infinitas. Así pues, la conjetura de Goldbach conduce a una investigación finita, porque si se desea verificar si un número par $2n$ es una suma de dos números primos impares, el procedimiento para hacer tal verificación seguramente terminará, porque números primos tienen que ser buscados en el sistema finito de números primos menores que $2n$.

Considerando, por otra parte, la característica singular de los números pares que Hofstadter llama la característica de la tortuga, conociendo que el número par puede ser expresado como diferencia de dos números primos impares:

Ejemplo 1.1.11. *Tengamos en cuenta los números pares 2, 4, 6, 8*

$$2 = 5 - 3 = 7 - 5 = 13 - 11 = 19 - 17 = \dots$$

$$4 = 7 - 3 = 11 - 7 = 17 - 13 = 23 - 19 = \dots$$

$$6 = 11 - 5 = 13 - 7 = 17 - 11 = 19 - 13 = \dots$$

$$8 = 11 - 3 = 13 - 5 = 19 - 11 = 31 - 23 = \dots$$

Si deseamos verificar un número par $2n$, con o sin tal característica, el procedimiento que se adoptará sería potencialmente infinito, porque se tendría que ampliar la búsqueda sobre todo en el sistema infinito de números primos. Si un número par no tuviera la característica de la tortuga, tendría la característica de Aquiles como dice Hofstadter, entonces no podría ser expresado como diferencia de dos números primos impares.

Hay un tercer tipo de investigaciones, los que podrían ser infinitos o finitos, el cual llamaron problema de Collatz, planteado por el mismo L. Collatz en 1937, también lo llamaron aplicación $3x+1$, el problema $3x+1$, el algoritmo de Hasse, el problema de Kakutani, el algoritmo de Syracuse, el problema de Syracuse, la conjetura de Thwaites, y el problema de Ulam.

Considere la siguiente función, que lleva números enteros positivos a enteros positivos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } x \text{ es par} \\ 3x + 1, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

¿Qué sucede cuando se aplica en varias ocasiones, comenzando con un número entero positivo arbitrario?. Así pues, dado cualquier número, es muy difícil saber por adelantado cuántos números aparecerán antes de llegar a 4, 2, 1 que son los valores finales.

Ejemplo 1.1.12. *si $x = 15$, aplicando el procedimiento resultan los números: 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1*

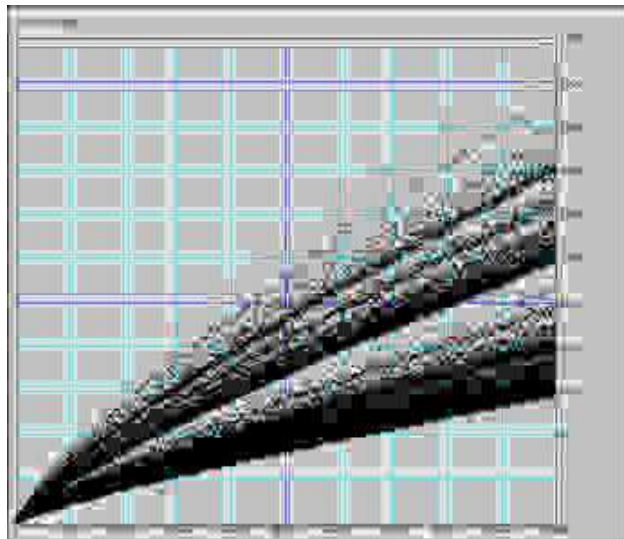
El número más grande alcanzado fue 160, pero es absolutamente plausible pensar que eligiendo otros números se puedan obtener valores mas grandes

antes de empezar a descender. Sin embargo, se ha verificado que siempre es posible llegar a 1 para todos los números $n \leq 3 \cdot 2^{53}$. Los números de la secuencia producidos por el problema de Collatz se conocen a veces como números del granizo, y debido a la dificultad en solucionar este problema, P. Erdos comentó:

“las matemáticas no están todavía listas para afrontar estos problemas”.

Una representación de la conjetura de Goldbach se puede obtener por un diagrama cartesiano, representando los números pares en el eje x y el número de sumas de dos números primos en los cuales un número par puede ser representado en el eje y .

Con la ayuda del computador, dicha representación para los números pares $2k$, tales que $4 < 2k < 100000$, produce una forma muy similar a la de un cometa, llamada *la cometa de Goldbach*.



Un planteamiento diferente de la Conjetura de Goldbach para los números pares mayores o iguales a 6 puede ser el siguiente:

Sea

$$F =: \{x \mid x \text{ es primo}, x > 2\}$$

y sea la función

$$f : F \times F \rightarrow 2\mathbb{N} - \{2, 4\}$$

tal que $f(p, q) = p + q$. Si se pudiera probar rigurosamente que la función f es sobreyectiva, la conjetura de Goldbach sería demostrada.

Seguramente, una manera para probar la conjetura de Goldbach no es la verificación empírica simple, sino una demostración formal de ella.

Uno de los comentarios bromistas hechos sobre la conjetura fue el de H.S. Vandiver (1882 – 1973):

“Si yo volviera a la vida después de mi muerte y hubieran mencionado que el problema habría sido solucionado, moriría nuevamente.”

Parece que un avance verdadero hacia una prueba formal de esta conjetura depende de otro problema abierto, llamado la hipótesis de Riemann la cual afirma que “todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen una parte real de $\frac{1}{2}$ ”. Esta función está dada por $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$, $s > 1$. Debido a esta dependencia y a todos los esfuerzos que se habían hecho hasta el momento sin mayor fortuna, en 1900 en el congreso internacional de matemáticas en París el gran matemático alemán D. Hilbert (1862 – 1943) los pronunció como el octavo problema entre los 23 más famosos de la historia.

Quizás en algún momento estemos en posición para procurar dar una demostración formal a la conjetura de Goldbach (“cada número par es expresable como la suma de dos números primos”) y atacar otros problemas aun sin solución.

Capítulo 2

Combinaciones de Goldbach

Como se mencionó en el capítulo anterior, el matemático inglés Edward Waring (1734–1798) en su trabajo *Meditationes Analyticae* (Cambridge, 1776), había conjeturado lo siguiente: cada número par es la suma de dos números primos y cada número impar es primo o la suma de tres números primos. Además conjeturaba que todo entero positivo es o un cubo o la suma de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 cubos; análogamente conjeturaba que todo entero positivo es o una cuarta potencia o la suma de 2, 3, 4, ..., ó 19 cuartas potencias.

Esta última conjetura se convirtió en teorema gracias al matemático inglés David Hilbert quién en 1909 demostró que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un número $G(k)$ de tal forma que cualquier natural se pueda representar como la suma de a lo más $G(k)$ sumandos, cada uno de los cuales es una k -ésima potencia.

Años después de la demostración de Hilbert, los matemáticos ingleses Hardy y Littlewood obtuvieron una fórmula asintótica para el número de represen-

taciones de un natural N como suma de s sumandos cada uno de los cuales es una k -ésima potencia. Hardy y Littlewood obtuvieron dicha fórmula perfeccionando un método que tuvo su origen en uno de los trabajos conjuntos entre Hardy y Ramanujan sobre el número de representaciones de un natural como suma de cuadrados.

2.1. Teoría aditiva de números

Este tipo de problemas donde se cuestiona la posibilidad de representar cualquier natural como una suma finita de elementos de un subconjunto de los naturales, dio origen a una rama de las matemáticas llamada hoy en día como *teoría aditiva de números*. Una definición formal sobre esto es la siguiente:

Definición 2.1.1. *Dados dos subconjuntos de enteros no negativos A y B , decimos que A es una base de orden s del conjunto B , si todo elemento de B se puede representar como la suma de s elementos del conjunto A , no necesariamente distintos.*

Un ejemplo claro de teoría aditiva de números es el teorema de Lagrange que normalmente se muestra en los cursos básicos de teoría de números; todo entero no negativo es la suma de cuatro cuadrados. En términos de la definición anterior este teorema afirma que los cuadrados son una base de orden 4 del conjunto de los enteros no negativos.

Precisamente “La conjetura de Goldbach” es un viejo problema de teoría aditiva de números.

En la actualidad este problema también es llamado la conjetura “fuerte” de Goldbach (todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos), y para el caso impar se conoce como la conjetura “débil” de Goldbach (todo número impar mayor que 5 se puede expresar como suma de tres números primos).

En términos de la Definición 2.1 la conjetura (débil y fuerte) dice lo siguiente:

Conjetura 2.1.1. *El conjunto de los números primos es una base de orden 2 para el conjunto de los números pares mayores que 2; análogamente el conjunto de los números primos es una base de orden 3 para el conjunto de los números impares mayores que 5.*

Gran parte de los matemáticos creen que la conjetura (versión débil y fuerte) es verdad, por lo menos para los números enteros suficientemente grandes. Se basan en consideraciones estadísticas que se centran en la distribución probabilística de números primos: cuanto mas grande sea el número hay mas maneras de que dicho número sea representado como suma de dos o tres números, y probablemente de que por lo menos una de esas representaciones sea de únicamente números primos.

Los estudios que se han realizado sobre la conjetura de Goldbach están más encaminados a obtener el número de representaciones de un número par o impar como suma de dos o tres números primos respectivamente.

Al investigar las características de dichas representaciones se han derivado varias fórmulas asintóticas, entre estas tenemos la propuesta por Hardy-Littlewood y Sylvester para el caso par y el teorema de Vinogradov para

el caso impar. A continuación hablaremos más detalladamente de estos tres resultados.

2.2. Conjetura “fuerte” de Goldbach

Las fórmulas de aproximación que vamos a estudiar para las representaciones de la Conjetura “fuerte” de Goldbach se derivan utilizando el teorema del número primo y haciendo un acercamiento probabilístico.

Recordemos la fórmula de aproximación propuesta por Sylvester

$$v(n) \approx \frac{n}{(\ln n)^2} . \quad (2.1)$$

Él tiene en cuenta todas las posibles representaciones de un número par dado, como suma de dos números primos, mientras que nosotros tendremos en cuenta esto y a su vez que desde cierto número en adelante se van a repetir estas representaciones.

2.2.1. Combinaciones impares

Para comenzar nos podemos preguntar ¿de cuántas formas diferentes puede cualquier número par n ser expresado como la suma de dos números impares?.

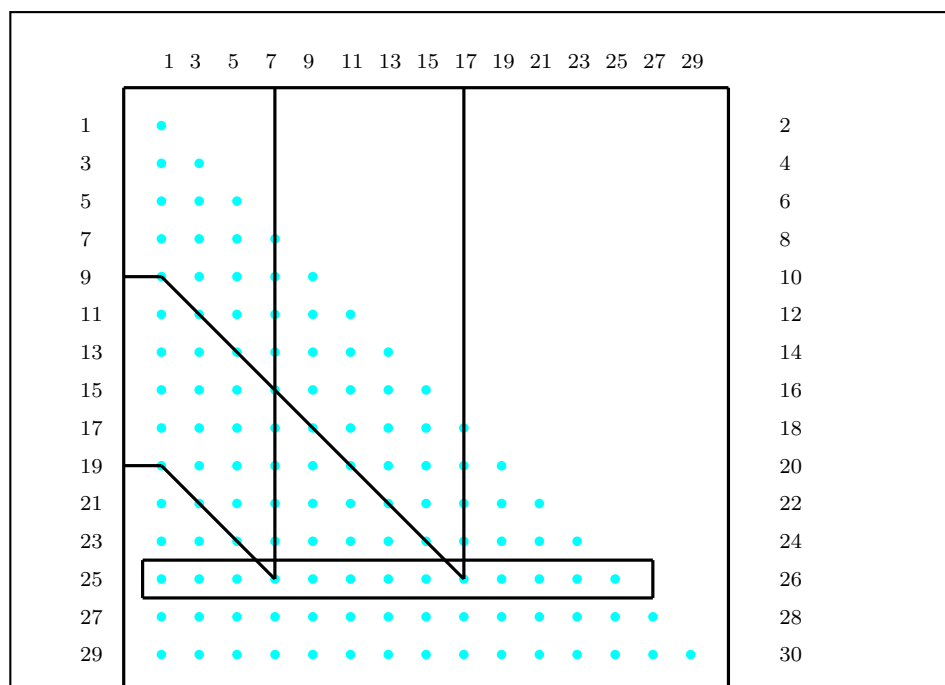
Dado cualquier n , las combinaciones se hallarán de la siguiente manera, asociamos 1 con el número impar inmediatamente inferior a n , 3 con el siguiente

inferior, y así sucesivamente, de la siguiente manera:

$$(1, n - 1), (3, n - 3), (5, n - 5), \dots, (n - 3, 3), (n - 1, 1).$$

Considerando el primer elemento de la combinación diferente al segundo, es fácil ver que cada n se forma de $\frac{n}{2}$ combinaciones.

Representando esta situación en un plano y escogiendo el eje x que representa al primer número y y al segundo, aparecería un diagrama como se presenta a continuación:



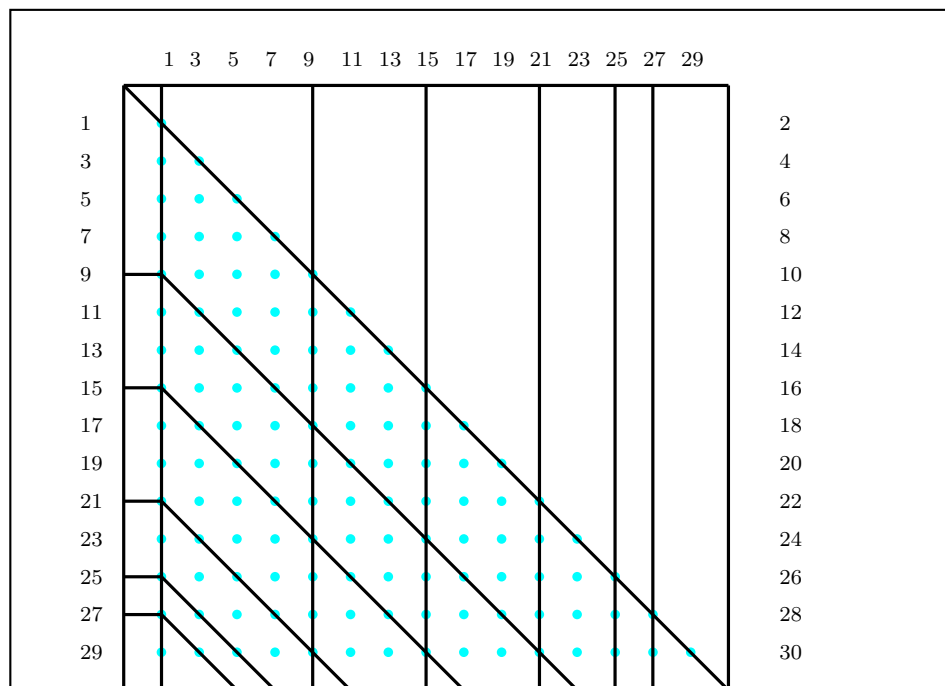
Ejemplo 2.2.1. *El punto de intersección entre las líneas vertical y diagonal corresponde a $(19, 7)$ y la $(9, 17)$ para $n=26$, aquí se observan todas las combinaciones para $n = 26$.*

Ahora veamos aquellas compuestas por dos números primos a las cuales llamaremos $CG_2(n)$. Una definición formal sobre esto es la siguiente:

Definición 2.2.1. *La función partición para la conjetura de Goldbach, $CG_2(n)$, está definida como el número de representaciones de cada entero par n como suma de dos números primos p y q .*

$$CG_2(n) =: \#\{(p, q) | n = p + q, p \leq q\}.$$

Eliminemos todas las combinaciones no válidas es decir, borremos aquellas en la cuales x sea compuesto, uniendo x con líneas verticales y y con líneas diagonales como lo muestra la siguiente figura.



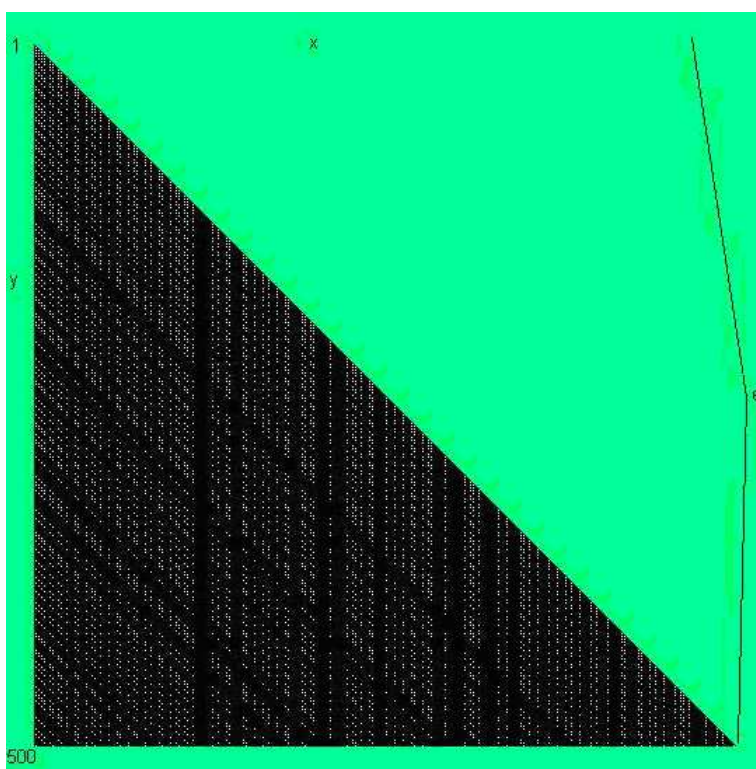
Todos aquellos puntos que permanecen sin marcar son todas las CG_2

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos los pares 30, 26 y 22.*

Según el gráfico $CG_2(30) = 6$, $CG_2(26) = 5$ y $CG_2(22) = 5$.

El gráfico continua a medida que n aumenta, las líneas que hemos hecho continúan hacia el infinito; cada vez que aparece un número primo, se combina con todos los números primos anteriores y siguientes, creando líneas blancas (verticales y diagonales) donde podemos encontrar CG_2 .

En el siguiente gráfico veremos todas las CG_2 para cada n entre 2 y 500.



2.2.2. Formula de aproximación de Sylvester

Después de hacer un análisis gráfico, se mostrara la deducción de la formula de aproximación (2.1) para CG_2 .

Recordemos el Teorema del Número Primo y la definición de eventos independientes:

Teorema 2.2.1.

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Donde $\pi(x)$ es la cantidad aproximada de números primos mayores que 1 y menores o iguales que x .

La demostración de este teorema requiere técnicas sofisticadas de variable compleja que van mas allá del objetivo de este trabajo. No obstante, damos referencia al lector interesado en ver la demostración en [5]

Definición 2.2.2. *Dos eventos A y B son independientes si y solo si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Es decir la probabilidad de que dos eventos sucedan a la vez es el producto de la probabilidad de A y la probabilidad de B .

Si se expresa el Teorema del Número Primo como:

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x},$$

entonces el cociente $\frac{\pi(x)}{x}$ indica la probabilidad de que un número sea primo.

Por la definición anterior la $P(CG_2)$ que cualquier combinación sea CG_2 es

equivalente a la probabilidad de que el primer número sea primo multiplicado por la probabilidad de que el segundo número también lo sea:

$$\begin{aligned} P(CG_2) &\approx \left(\frac{\pi(x)}{x}\right) \left(\frac{\pi(x)}{x}\right) \\ &\approx \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \\ &\approx \frac{1}{(\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3. Sea $x = 1000$, entonces:

$$P(CG_2)(1000) \approx \frac{1}{(\ln 1000)^2} \approx \frac{1}{47,71} \approx 0,021 .$$

Multiplicando este resultado por 1000 que son todas las combinaciones que posee n (Aquí entrarían todas las combinaciones, no solo las formadas por números impares), tendremos alrededor de 21 combinaciones.

Ejemplo 2.2.4. Si $x = 1000000$

$$P(CG_2)(1000000) \approx \frac{1}{(\ln 1000000)^2} \approx 0,005239.$$

Con un razonamiento análogo se obtienen 5239 combinaciones.

Entonces,

$$\frac{1}{(\ln n)^2} \cdot n = \frac{n}{(\ln n)^2} \approx v(n),$$

donde $v(n)$ es la formula de aproximación propuesta por Sylvester.

Pero como mencionamos inicialmente desde cierto número en adelante se empiezan a repetir estas representaciones.

Ejemplo 2.2.5. Sea $C(n) =$ todas las combinaciones posibles para n

$$C(12) = (1, 11); (3, 9); (5, 7); (7, 5); (9, 3); (11, 1)$$

$$C(14) = (1, 13); (3, 11); (5, 9); (7, 7); (9, 5); (11, 3)$$

Se tiene que dividir en dos para obtener un número real de combinaciones $CG_2(n)$ diferentes. Los números dobles de impares se les deben sumar 2 unidades antes de dividir, ya que en esos números en el centro la combinación no se repite. Sin embargo para n suficientemente grande se obtiene una ligerísima diferencia; después de todo $CG_2(n)$ es un número aproximado. Por lo tanto

$$\begin{aligned} CG_2(n) &= \frac{v(n)}{2} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{(\ln n)^2} \\ &\approx \frac{n}{2(\ln n)^2}. \end{aligned}$$

Otra formula de aproximación basada en el teorema del número primo y en consideraciones probabilísticas es la siguiente:

Teorema 2.2.2.

$$G(n) \approx \sum_{k=3}^{n/2} \frac{1}{\ln(k) \ln(n-k)}, \text{ para todo par } n \geq 6.$$

Demostración. Por el teorema de número primo tenemos:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

La probabilidad de que n sea un número primo es:

$$P(n) \approx \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{n - (n-1)} = \frac{1}{n}$$

$$\approx \frac{d}{dx} \frac{x}{\ln x} \Big|_{x=n} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{(\ln n)^2} \approx \frac{1}{\ln n} .$$

Si escogemos un número entero k tal que $3 < k < \frac{n}{2}$, para todo par $n \geq 6$, por la Definición 2.2.2 la probabilidad de que k y $n - k$ sean números primos a la vez es $P(k)P(n - k)$. Como la función partición $CG_2(n)$ cuenta el número de parejas de números primos, Entonces $CG_2(n)$ puede ser aproximado por la suma de las probabilidades $P(k)P(n - k)$ para todo k tal que $3 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

$$\begin{aligned} CG_2(n) &\approx \sum_{k=3}^{n/2} P(k)P(n - k), \quad \text{para todo par } n \geq 6 \\ &\approx \sum_{k=3}^{n/2} \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{1}{\ln(n - k)} \\ &\approx \sum_{k=3}^{n/2} \frac{1}{\ln(k) \ln(n - k)} . \end{aligned}$$

■

El lector interesado en ver la referencia del teorema anterior ver [4]

Como se menciona inicialmente estas aproximaciones se basan en el teorema del número primo y en consideraciones estadísticas centradas en la teoría de las probabilidades. Debido a esto podemos deducir lo siguiente con respecto a las dos aproximaciones obtenidas para $CG_2(n)$:

$$CG_2(n) \approx \sum_{k=3}^{n/2} \frac{1}{\ln(k) \ln(n - k)} \approx \frac{n}{2(\ln n)^2} \quad \text{para todo par } n \geq 6.$$

Sin embargo estas aproximaciones son un poco inexactas ya que ignoran algunas correlaciones entre las probabilidades de k y $n - k$ para que estos

números sean primos. Por ejemplo si k es impar, entonces $n - k$ también es impar, claramente los números impares son mas probables que sean primos que los números pares.

Precisamente referenciando este tipo de cosas surge una formula con una mejor aproximación a las formulas anteriores. Esta formula fue dada por Hardy-Littlewood en 1923.

2.2.3. Formula de aproximación de Hardy-Littlewood

Como se mencionó anteriormente otra formula asintótica para obtener el número de representaciones de un número par dado como suma de dos números primos fue dada por Hardy y littlewood.

Aquí se requiere conocer los valores de todos los números primos que dividen a n ; es decir los números primos p_k , $k = 2, 3, \dots$ tal que $p_k | n$.

Teniendo en cuenta la definición 2.2.1 se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. *Hardy y Littlewood obtuvieron la formula asintótica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{CG_2(n)}{\int_2^n \frac{dx}{(\ln x)^2} \prod_{\substack{k=2 \\ P_k | n}} \frac{P_k - 1}{P_k - 2}} = 2C_2$$

Es decir,

$$CG_2(n) \approx 2C_2 \int_2^n \frac{dx}{(\ln x)^2} \prod_{\substack{k=2 \\ P_k | n}} \frac{P_k - 1}{P_k - 2}$$

Donde $2C_2$ es la constante de los números primos gemelos propuesta por Hardy-Littlewood en una generalización de la conjetura del número primo

gemelo.

Recordemos que p y q son números primos gemelos si p es un número primo y $q = p + 2$ también es un número primo. El primero en llamarlos de esta forma fue P. Stäckel.

Precisamente sobre la existencia de números primos gemelos se postulo la siguiente conjetura:

“Existe un número infinito de primos p tales que $p + 2$ también es un número primo”.

Una generalización de esta conjetura se conoce como “la conjetura de Hardy-Littlewood, que trata sobre la distribución de los números primos gemelos de forma análoga al teorema del número primo.

Sea $\pi_2(x)$ el número de primos $p < x$ tales que $p + 2$ también es un número primo, entonces:

$$\pi_2(x) \approx 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Donde $2C_2$ es la constante de primo gemelo y C_2 se define como:

$$C_2 = \prod_{\substack{p>2 \\ p:\text{primo}}} \left[1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right] = \prod_{\substack{p>2 \\ p:\text{primo}}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = 0,6601618158\dots$$

Entonces,

$$2C_2 = 1,3203236\dots$$

El lector interesado en ver la referencia de la proposición anterior ver [4]

2.3. Conjetura “débil” de Goldbach

Usando el método de Hardy-Littlewood, como se menciono anteriormente en el año de 1937 el matemático ruso Ivan M. Vinogradov, obtuvo una fórmula asintótica para el número de representaciones de un natural como suma de tres números primos. Una aproximación a este método es como sigue:

Sea A un conjunto de enteros no negativos y $C_{A,s}(n)$ el número de representaciones de un $n \in \mathbb{N}$ como suma de s elementos de A , entonces

$$C_{A,s}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta} (f_n(\theta))^s d\theta,$$

donde

$$f_n(\theta) = \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq n}} e^{2\pi i a \theta}.$$

El método de Hardy-Littlewood asegura que para n suficientemente grande, la contribución principal de la integral, proviene de la unión de pequeños intervalos alrededor de fracciones $\frac{a}{q}$ con $(a, q) = 1$ y q no muy grande, mientras que la integral sobre el complemento de la unión de estos intervalos es despreciable.

2.3.1. Teorema de Vinogradov

El teorema de Vinogradov es el resultado más fuerte, que se tiene en dirección a la demostración de la conjetura de Goldbach para el caso impar.

Teorema 2.3.1. (Vinogradov). *Sea $CG_3(n)$ el número de representaciones de un natural n como suma de tres números primos. Entonces, existe una constante positiva C y un entero positivo n_0 , tal que para todo número impar $n > n_0$*

$$CG_3(n) \geq C \frac{n^2}{(\ln n)^3}.$$

Corolario 2.3.1. *Existe un entero positivo n_0 tal que para todo número impar $n > n_0$ existen tres números primos p_1, p_2, p_3 que satisfacen la ecuación*

$$n = p_1 + p_2 + p_3.$$

Nuestro objetivo es mostrar la matemática que se ha utilizado y desarrollado en busca de la demostración de la conjetura impar de Goldbach. En esta sección se presentaran algunos resultados utilizados en la demostración de este teorema ya que la demostración formal sobrepasa las expectativas de este trabajo. Sin embargo se refiere al lector interesado observar dicha demostración en [6].

Antes de describir algunos resultados es importante resaltar la siguiente definición:

Definición 2.3.1. *Dadas dos funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, decimos que $f(x) = O(g(x))$ para indicar que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se halla acotado para $x \geq a$; esto es si existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo $x \geq a$*

Denotemos con $CG_m(n)$ a la cantidad de números primos que hay en la sucesión $\{n - p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_{m-1}\}$ donde los p_i recorren el conjunto

de los números primos menores o iguales que n , para $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$. Si en particular se quiere estimar $CG_2(n)$, se puede proceder como sigue: del teorema de los números primos la sucesión $\{n - p\}_{p \leq n}$ tiene aproximadamente $\frac{n}{\log n}$ elementos, de tal forma que si los números primos están distribuidos uniformemente en la sucesión $\{n - p\}_{p \leq n}$ podríamos esperar que

$$CG_2(n) = O\left(\frac{\frac{n}{\log n}}{\log\left(\frac{n}{\log n}\right)}\right) = O\left(\frac{\frac{n}{\log n}}{\log n - \log(\log(n))}\right) = O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right).$$

Para el caso $CG_3(n)$ la sucesión $\{n - p_3\}_{p_3}$ donde p_3 recorre el conjunto de los números primos menores o iguales que n , tiene aproximadamente $\frac{n}{\log n}$ términos y cada uno de ellos se puede representar como la suma de dos primos $n - p_3 = p_1 + p_2$ un número de veces de orden de $\frac{n}{(\log n)^2}$. Por lo anterior se puede esperar que

$$CG_3(n) = O\left(\frac{n^2}{(\log n)^3}\right)$$

No obstante, el problema central sería demostrar que $CG_3(n) > 0$.

Empecemos por resaltar algunas funciones aritméticas utilizadas en la demostración del teorema de Vinogradov.

2.3.2. Funciones aritméticas

Definición 2.3.2. *Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada una función aritmética.*

Algunas funciones aritméticas utilizadas en la demostración del Teorema de

Vinogradov son:

Definición 2.3.3. *La función de Möbius.* La función μ de Möbius se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mu(1) = 1.$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ con } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ primos diferentes;} \\ 0, & \text{Si } p^2 \mid n \text{ para algún primo } p. \end{cases}$$

Definición 2.3.4. *Un entero positivo d se llama máximo común divisor de dos enteros dados a y b si*

1. d es un divisor de a y b
2. Todo divisor común de a y b es un divisor de d .

El máximo común divisor de a y b se representa como $d = \text{m.c.d.}(a, b)$ y también como $d = (a, b)$.

Definición 2.3.5. *La función divisor.* Dado un número natural n se define $d(n)$ como la cantidad de enteros positivos m tales que $m \mid n$.

Definición 2.3.6. *La función de Euler.* Dado un número natural n se define $\phi(n)$, como la cantidad de enteros m que satisfacen $1 \leq m \leq n$ y $(m, n) = 1$.

Definición 2.3.7. *Una función aritmética se llama multiplicativa si satisface la condición:*

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ tales que } (m, n) = 1$$

Si $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo m, n enteros positivos, entonces f se llama completamente multiplicativa.

Lema 2.3.1. *La función de Möbius es multiplicativa.*

Demostración. Sean m y n enteros tales que $(m, n) = 1$. Podemos escribir $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$ donde $p_i \neq q_j$ para $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, s$. Si $\mu(nm) = 0$ entonces $\alpha_i > 1$ ó $\beta_j > 1$ para alguna i o alguna j y por consiguiente $\mu(n) = 0$ o $\mu(m) = 0$ de tal forma $\mu(m)\mu(n) = 0$.

Si por el contrario $\mu(nm) \neq 0$, entonces $\alpha_i = 1$ y $\beta_j = 1$ para todo i, j y en consecuencia $\mu(m) = (-1)^r$ y $\mu(n) = (-1)^s$. Por lo tanto:

$$\mu(m)\mu(n) = (-1)^r(-1)^s = (-1)^{r+s} = \mu(mn).$$

■

Lema 2.3.2. *La función divisor es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $n = q_1^{\alpha'_1} q_2^{\alpha'_2} \cdots q_s^{\alpha'_s}$ las factorizaciones en primos de m y n respectivamente. Cada divisor d de m y d' de n puede ser escrito de manera única como,

$$\begin{aligned} d &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \\ d' &= q_1^{\beta'_1} q_2^{\beta'_2} \cdots q_s^{\beta'_s} \end{aligned}$$

donde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, 2, \dots, r$ y $0 \leq \beta'_j \leq \alpha'_j$ para $j = 1, 2, \dots, s$. Si $(m, n) = 1$ tenemos que $p_i \neq q_j$ para cualesquiera $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, s$. Por lo tanto, dado que hay $\alpha_i + 1$ elecciones de β_i , tenemos que

$$d(n) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1),$$

y en consecuencia si γ_h es algún α_i o algún β_j tenemos:

$$d(mn) = \prod_{h=1}^{r+s} (\gamma_h + 1) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1) \prod_{j=1}^s (\beta_j + 1) = d(m)d(n),$$

■

Los siguientes resultados serán de gran ayuda mas adelante en algunas demostraciones.

Si m y n son dos enteros positivos que satisfacen, $(m, n) = 1$ y x es tal que $x \equiv m \pmod{n}$, entonces $(x, n) = 1$ y por lo tanto hay $\phi(n)$ clases de equivalencia modulo n tales que cada representante y n son primos relativos.

Definición 2.3.8. *Cualquier conjunto formado por $\phi(n)$ residuos módulo n que son primos relativos a n , cada uno de distinta clase, es llamado sistema completo de residuos módulo n .*

Lema 2.3.3. *Suponga que $k_1, k_2, \dots, k_{\phi(m)}$ es un sistema completo de residuos primos a m y que $k'_1, k'_2, \dots, k'_{\phi(n)}$ es un sistema completo de residuos primos a n donde $(m, n) = 1$. Entonces $k'_i m + k'_j n$, con $i = 1, 2, \dots, \phi(n)$ y $j = 1, 2, \dots, \phi(m)$ es un sistema completo de residuos módulo mn .*

Demostración. Podemos observar que hay $\phi(m)\phi(n)$ números de la forma $k'_i m + k'_j n$. Por otro lado si,

$$k'_i m + k'_j n \equiv k'_h m + k'_l n \pmod{mn}$$

$$k'_i m + k'_j n \equiv k'_h m + k'_l n \pmod{m}$$

$$k'_j n \equiv k'_l n \pmod{m}$$

$$k_j \equiv k_l \pmod{m}$$

y análogamente para

$$k'_i \equiv k'_h \pmod{n}.$$

Ahora, si $(k'_i m + k_j n, mn) > 1$ para algún i y j , entonces existe un número primo p de tal forma que $p|mn$ y $p|(k'_i m + k_j n)$. Como $(m, n) = 1$, entonces p divide únicamente a n ó a m . Si $p|n$ se tiene que $p|k'_i m$ y por lo tanto $p|k'_i$ lo cual no puede ser pues $(k'_i, n) = 1$. De manera análoga si suponemos que $p|m$ llegamos a una contradicción. Por lo tanto los $\phi(m)\phi(n)$ números forman un sistema completo de residuos modulo mn . ■

Lema 2.3.4. *La función de Euler es multiplicativa.*

Demostración. Un sistema completo de residuos primos a mn contiene exactamente $\phi(mn)$ enteros. Por el Lema 2.3.3 si $(m, n) = 1$, entonces los $\phi(m)\phi(n)$ números $km+k'n$ recorren un sistema completo de residuos modulo mn cuando k y k' recorren un sistema completo de residuos modulo m y n respectivamente. Luego $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. ■

2.3.3. Sumas de Ramanujan

Estas sumas son gran importancia en la demostración del teorema de Vinogradov.

Definición 2.3.9. *Sean a y q números enteros con $q \geq 1$. La suma exponen-*

cial

$$c_q(a) = \sum_{m=1}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}}$$

con $(m, q) = 1$ es llamada suma de Ramanujan.

Lema 2.3.5. *La suma $c_q(a)$ es una función multiplicativa de q .*

Demostración. Por el Lema 2.3.3 cada representante de un sistema completo de residuos primos a qq' puede escribirse de manera única como $mq' + m'q$ donde $1 \leq m \leq q$, $1 \leq m' \leq q'$ y $(m, q) = (m', q') = 1$ si $(q, q') = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} c_q(a)c_{q'}(a) &= \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q)=1}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}} \sum_{\substack{m'=1 \\ (m',q')=1}}^{q'} e^{2\pi i a \frac{m'}{q'}} = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,q)=1}}^q \sum_{\substack{m'=1 \\ (m',q')=1}}^{q'} e^{2\pi i a \frac{mq'+m'q}{qq'}} \\ &= \sum_{\substack{m''=1 \\ (m'',qq')=1}}^{qq'} e^{2\pi i a \frac{m''}{qq'}} = c_{qq'}(a). \end{aligned}$$

■

Existe una relación entre las sumas de Ramanujan y la función de Möbius. Pero antes presentaremos dos resultados de gran ayuda para su demostración.

Lema 2.3.6. *Dado un entero positivo n*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Demostración. El resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que $n > 1$ y escribamos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Es la suma $\sum_{d|n} \mu(d)$ los únicos términos

que son distintos de cero vienen de $d = 1$ y de los divisores de n que son productos de primos distintos. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \dots \\
&+ \mu(p_{k-1} p_k) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_k) \\
&= 1 + \binom{k}{1} (-1) + \binom{k}{2} (-1)^2 + \dots + \binom{k}{k} (-1)^k \\
&= (1 - 1)^k = 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.7. *Sea P un entero positivo. si z recorre un conjunto finito de enteros positivos A y $f(z)$ es una función arbitraria de z , entonces*

$$\sum_{\substack{z \in A \\ (z, P) = 1}} f(z) = \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{\substack{z \in A \\ z \equiv 0 \pmod{d}}} f(z).$$

Demostración. Del Lema 2.3.6

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{z \in A \\ (z, P) = 1}} f(z) &= \sum_{z \in A} f(z) \sum_{d|(z, P)} \mu(d) = \sum_{z \in A} f(z) \sum_{d|(z), d|(P)} \mu(d) \\
&= \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{\substack{z \in A \\ d|z}} f(z) = \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{\substack{z \in A \\ z \equiv 0 \pmod{d}}} f(z).
\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.8. *Si $(a, q) = 1$, la suma de Ramanujan satisface*

$$c_q(a) = \mu(q).$$

Demostración. Por el Lema 2.3.7 tenemos

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m, q) = 1}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}} = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv 0 \pmod{d}}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}} = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m=1 \\ m=kd}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}}$$

$$= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m=kd \\ 1 \leq k \leq \frac{q}{d}}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}} = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{k=1}^{\frac{q}{d}} q e^{2\pi i a \frac{kd}{q}}.$$

Si $d = q$ tenemos $\mu(q)e^{2\pi i a k} = \mu(q)$ ya que $e^{2\pi i a k} = 1$. Si $d < q$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{\frac{q}{d}} e^{2\pi i a \frac{kd}{q}} = \frac{e^{2\pi i a \frac{(\frac{q}{d}+1)d}{q}} - e^{2\pi i a \frac{d}{q}}}{e^{2\pi i a \frac{d}{q}} - 1},$$

donde $e^{2\pi i a \frac{d}{q}} - 1 \neq 0$, pues $(a, q) = 1$ y $e^{2\pi i a \frac{(\frac{q}{d}+1)d}{q}} - e^{2\pi i a \frac{d}{q}} = 0$. Por lo tanto

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m, q)=1}}^q e^{2\pi i a \frac{m}{q}} = \mu(q).$$

■

2.3.4. Otros resultados de la función ϕ de Euler

Algunos resultados relacionados con la función ϕ de Euler son de gran importancia en la demostración del teorema de Vinogradov. Entre estos tenemos:

Teorema 2.3.2. *Si p es un número primo y a es un entero positivo entonces*

$$\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$

Demostración. Los enteros positivos menores o iguales que p^a que no son primos relativos con p son precisamente los p^{a-1} múltiplos de p .

$$1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, \dots, p^{a-1} \cdot p.$$

Por lo tanto

$$\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}.$$

En particular, cuando $a=1$ obtenemos la formula $\phi(p) = p - 1$ para cada primo p . ■

Lema 2.3.9. *Sea $f(n)$ una función aritmética multiplicativa. Si*

$$\lim_{p^k \rightarrow \infty} f(p^k) = 0$$

donde p^k recorre la sucesión de todas las potencias de números primos, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0.$$

Demostración. Dado que $\lim_{p^k \rightarrow \infty} f(p^k) = 0$ existe únicamente una cantidad finita de potencias de primos tales que $|f(p^k)| \geq 1$. Sea

$$A = \prod_{|f(p^k)| \geq 1} |f(p^k)|$$

Tomemos $0 < \epsilon < A$. Nuevamente sólo existe una cantidad finita de potencias de primos p^k tales que

$$|f(p^k)| \geq \frac{\epsilon}{A}$$

Para cada potencia p^k que divide a n . Por lo tanto si n es suficientemente grande existe al menos una potencia p^k que cumple $|f(p^k)| \leq \frac{\epsilon}{A}$ y por lo tanto n puede ser factorizado de la siguiente manera:

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{k_i} \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} p_i^{k_i}$$

donde,

$$\begin{aligned} |f(p_i^{k_i})| &\geq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, r \\ 1 > |f(p_i^{k_i})| &\geq \frac{\epsilon}{A} \text{ para } i = r+1, r+2, \dots, r+s \\ |f(p_i^{k_i})| &\leq \frac{\epsilon}{A} \text{ para } i = r+s+1, r+s+2, \dots, r+s+t \text{ y } t \geq 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$|f(n)| = \prod_{i=1}^r |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+1}^{r+s} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} |f(p_i^{k_i})| < A \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^t \leq \epsilon.$$

■

Una consecuencia del lema anterior es el siguiente corolario

Corolario 2.3.2. *Sea $\epsilon > 0$. Entonces, para toda n suficientemente grande tenemos*

$$n^{1-\epsilon} < \phi(n) < n$$

Demostración. De la Definición 2.3.6 es claro que $\phi(n) < n$. Además del Teorema 2.3.2 tenemos $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$ puesto que sólo hay p^{m-1} enteros menores que p^m que no son primos relativos con p^m ; a saber, $p, 2p, \dots, p^{m-1}p$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{p^{m(1-\epsilon)}}{\phi(p^m)} &= \frac{p^{m(1-\epsilon)}}{p^m - p^{m-1}} = \frac{p^{m(1-\epsilon)}}{p^{m-1}(p-1)} \\ &= \frac{pp^{m(1-\epsilon)}}{p^m(p-1)} = \frac{p}{p-1} \frac{p^{m(1-\epsilon)}}{p^m}. \end{aligned}$$

Por otro lado, cada número primo p satisface $\frac{p}{p-1} \leq 2$ y en consecuencia

$$\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{\phi(p^m)} \leq \frac{2}{p^{m\epsilon}}.$$

Considerando ahora el límite cuando $p^m \rightarrow \infty$ tenemos que $\frac{p^{m(1-\epsilon)}}{\phi(p^m)} \rightarrow 0$ y dado que la función $\frac{n^{1-\epsilon}}{\phi(n)}$ es multiplicativa, el resultado se sigue del lema anterior. ■

2.3.5. Partes Fraccionarias

Los resultados presentados a continuación son de gran importancia para una aplicación del método Hardy-Littlewood-Ramanujan a la conjetura impar de Goldbach.

Definición 2.3.10. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\|\alpha\|$ como la distancia de α al entero mas cercano, es decir:

$$\|\alpha\| = \min_{z \in \mathbb{Z}} \{ |z - \alpha| \}.$$

Lema 2.3.10. Para cualquier número real α ,

$$|\operatorname{sen}(\pi\alpha)| = \operatorname{sen}(\pi\|\alpha\|).$$

Demostración. Tenemos que $\alpha = n \pm \|\alpha\|$ para algún n , entonces

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(\pi\alpha)| &= |\operatorname{sen}(\pi(n \pm \|\alpha\|))| \\ &= |\operatorname{sen}(\pi n \pm \pi\|\alpha\|)| \\ &= |\operatorname{sen}(\pi n) \cos(\pi\|\alpha\|) \pm \cos(\pi n) \operatorname{sen}(\pi\|\alpha\|)| \\ &= |\operatorname{sen}(\pi\|\alpha\|)|. \end{aligned}$$

Por la definición de $\|\alpha\|$ se tiene que $\|\alpha\| \in [0, \frac{1}{2}]$ y así obtenemos el resultado deseado. ■

Lema 2.3.11. Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, entonces $2\alpha < \text{sen}(\pi\alpha) < \pi\alpha$.

Demostración.

Consideremos el caso

$$2\alpha < \text{sen}(\pi\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

i) Consideremos $f(\alpha) = \text{sen}(\pi\alpha) - 2\alpha$. Debemos demostrar que $f(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ y que su derivada $f'(\alpha) = \pi \cos(\pi\alpha) - 2$ decrece en $(0, \frac{1}{2})$. Veamos que $f'(\alpha) = \pi \cos(\pi\alpha) - 2$ decrece en $(0, \frac{1}{2})$.

$f''(\alpha) = -\pi^2 \text{sen}(\pi\alpha)$, dado que $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ entonces $\text{sen}(\pi\alpha) > 0$ y así $f'' < 0$, luego $f'(\alpha)$ decrece en este intervalo. Por lo tanto $f'(\alpha)$ decrece de $\pi - 2$ a -2 en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$. Por el Teorema de Bolzano [3] existe una raíz para $\pi - 2$ y -2 en $(0, \frac{1}{2})$. Si $f(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, como f' existe en todo punto del intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y $f(0) = f(\alpha) = f(\frac{1}{2}) = 0$, entonces por el Teorema de Rolle [3], existe al menos un punto $\alpha' \in (0, \alpha)$ tal que $f'(\alpha') = 0$ y existe al menos un punto $\alpha'' \in (\alpha, \frac{1}{2})$ tal que $f'(\alpha'') = 0$. Es decir f' tendría al menos dos ceros en $(0, \frac{1}{2})$, lo cual no puede ser ya que $f'(\alpha)$ decrece en $(0, \frac{1}{2})$. Entonces, o, $f(\alpha) < 0$, o, $f(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Así, basta tomar un punto en $(0, \frac{1}{2})$: $f(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$, luego $f(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ entonces $0 < \text{sen}(\pi\alpha) - 2\alpha$, por lo tanto $2\alpha < \text{sen}(\pi\alpha)$.

ii) Ahora consideremos el caso

$$\text{sen}(\pi\alpha) < \pi\alpha \quad \text{para todo } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Sea $f(\alpha) = \text{sen}(\pi\alpha) - \pi\alpha$; con un razonamiento análogo al anterior se prueba que $f'(\alpha) = \pi \cos(\pi\alpha) - \pi$ decrece de 0 a $-\frac{1}{2}$ en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$. Si $f(\alpha) = 0$

para algún $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, como f' existe en todo punto del intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y $f(0) = 0$; $f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ entonces por el teorema de Rolle existe $\alpha' \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f'(\alpha') = 0$. Es decir f' tendría al menos un cero en $(0, \frac{1}{2})$, lo cual no puede ser pues $f'(\alpha)$ decrece de 0 a $-\pi$ en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$.

Análogamente, basta tomar un punto en $(0, \frac{1}{2})$: $f(\frac{1}{4}) = \frac{2\sqrt{2}-\pi}{4} < 0$. Tenemos que $f(\alpha) < 0$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ entonces $\text{sen}(\pi\alpha) - \pi\alpha < 0$, por lo tanto $\text{sen}(\pi\alpha) < \pi\alpha$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

De *i*) y *ii*) se tiene que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ entonces $2\alpha < \text{sen}(\pi\alpha) < \pi\alpha$. ■

Lema 2.3.12. *Sea β un número real tal que $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, entonces*

$$\sum_{m=1}^N e^{2\pi im\beta} = O(|\beta|^{-1}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^N e^{2\pi im\beta} \right| &= \left| \sum_{m=1}^N e^{(2\pi i\beta)m} \right| = \left| \frac{1 - e^{(2\pi i\beta)N}}{1 - e^{2\pi i\beta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{2\pi i\beta}|} \\ &= \frac{2}{|e^{\pi i\beta} - e^{-\pi i\beta}|} = \frac{2}{|2i \text{sen}(\pi\beta)|} = \frac{1}{|\text{sen}(\pi\beta)|} \\ &= \frac{1}{\text{sen}(\pi\|\beta\|)}. \end{aligned}$$

Y por el lema 2.3.11

$$\frac{1}{\text{sen}(\pi\|\beta\|)} \leq \frac{1}{2\|\beta\|} = \frac{1}{2|\beta|}.$$

■

2.3.6. Principio de Dirichlet

Uno de los resultados de mayor importancia es el llamado principio de Dirichlet. Permite aproximarnos a un número real mediante fracciones con denominador pequeño. Este es clave para la obtención de una fórmula asintótica para el número de representaciones de un natural como suma de tres números primos. Antes mencionemos dos definiciones de nuestro interés

Definición 2.3.11. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, denotamos con $[x]$ a la parte entera de x ; es decir $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x .

Definición 2.3.12. Para cualquier número real α definimos $\{\alpha\}$ la parte fraccionaria de α como: $\alpha - [\alpha]$.

Lema 2.3.13. (Principio de Dirichlet). Sean α y Q números reales, $Q \geq$

1. Existen dos números enteros a y q tales que

$$1 \leq q \leq Q, (a, q) = 1 \text{ y } \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

Demostración. Sea $N = [Q]$ y consideremos $\{q\alpha\}$ para $q = 1, 2, \dots, N$.

Tenemos tres casos:

1. $\{q\alpha\} \in [0, \frac{1}{N+1})$ para algún entero positivo $q \leq N$.
2. $\{q\alpha\} \in [\frac{1}{N+1}, 1)$ para algún entero positivo $q \leq N$.
3. $\{q\alpha\} \in [\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1})$ para todo $q = 1, 2, \dots, N$ y en consecuencia cada uno de los N números $\{q\alpha\}$ está en alguno de los $N - 1$ intervalos.

$$\left[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

- Caso 1. Si $a = [q\alpha]$, entonces

$$0 \leq \{q\alpha\} = q\alpha - [q\alpha] = q\alpha - a < \frac{1}{N+1}$$

y por lo tanto

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ}.$$

- Caso 2. Si $a = [q\alpha] + 1$, entonces

$$\frac{N}{N+1} \leq \{q\alpha\} = q\alpha - a + 1 < 1 = \frac{N+1}{N+1}$$

implica que

$$|q\alpha - a| \leq \frac{1}{N+1}$$

y por lo tanto

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ}.$$

- Caso 3. Si $\{q\alpha\} \in \left[\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1} \right)$ para todo $q = 1, 2, \dots, N$, entonces cada uno de los N números reales $\{q\alpha\}$ está en uno de los $N-1$ intervalos

$$\left[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Por lo tanto, dado que tenemos repartir N números reales en $N-1$ intervalos, entonces existen $i \in [1, N-1]$ y $q_1, q_2 \in [1, N]$ tales que

$$1 \leq q_1 < q_2 \leq N \text{ y } \{q_1\alpha\}, \{q_2\alpha\} \in \left[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1} \right).$$

Sea $q = q_2 - q_1 \in [1, N - 1]$ y $a = [q_2\alpha] - [q_1\alpha]$ entonces

$$\begin{aligned} |q\alpha - a| &= |(q_2\alpha - [q_2\alpha]) - (q_1\alpha - [q_1\alpha])| \\ &= |\{q_2\alpha\} - \{q_1\alpha\}| < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

En los tres casos el número $\frac{a}{q}$ se puede reducir de tal modo que

$$(a, q) = 1.$$

■

2.3.7. Fórmula equivalente a $CG_3(n)$

El objetivo de Vinogradov era obtener una formula asintótica de $CG_n(3)$; es decir, una formula con un margen de error despreciable para n suficientemente grande, que estime cuantas soluciones tiene la siguiente ecuación, donde p_i es un número primo para $i = 1, 2, 3$ y $n \in \mathbb{N}$

$$n = p_1 + p_2 + p_3.$$

A continuación se muestra una formula equivalente a $CG_3(n)$ (el número de representaciones de un número natural como suma de tres primos).

Lema 2.3.14. *Consideremos la suma trigonométrica*

$$S_n(\theta) = \sum_{p \leq n} e^{2\pi i p \theta}, \quad (2.2)$$

donde p es un número primo y θ es un número real, entonces

$$CG_3(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta} S_n^3(\theta) d\theta. \quad (2.3)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta} S_n^3(\theta) d\theta &= \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta} \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq n} e^{-2\pi i \theta (p_1 + p_2 + p_3)} d\theta \\ &= \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq n} \int_0^1 e^{-2\pi i \theta (p_1 + p_2 + p_3 - n)} d\theta \end{aligned}$$

donde

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \theta (p_1 + p_2 + p_3 - n)} d\theta = 0$$

a menos que $n = p_1 + p_2 + p_3$ en cuyo caso vale 1. ■

El Corolario 2.3.1. se reduce a probar, que la integral (2.2) es mayor que cero para cualquier n impar, suficientemente grande. La prueba del Teorema de Vinogradov esta relacionada con la obtención de una buena estimación de la integral (2.2) y en particular de una buena estimación de la suma trigonométrica (2.1). Y precisamente uno de los métodos utilizados para dichas estimaciones es el ya mencionado método de Hardy-Littlewood.

Debido a las investigaciones que se han hecho a través de la historia sobre la conjetura de Goldbach (fuerte y débil), las matemáticas y en especial la teoría de números han logrado grandes descubrimientos.

La relación que tiene la teoría de números con otras ramas como el análisis real y complejo entre otras, han facilitado el desarrollo de mucho resultados.

En busca de la solución a este problema abierto muchos matemáticos han establecido definiciones, teoremas, lemas, corolarios y otras conjeturas de gran importancia para el progreso no solo de la teoría de números sino de la matemática en general.

Es importante resaltar que debido a que la conjetura de Goldbach no ha sido demostrada muchos resultados han sido mostrados pero no formalizados.

Como dijo Goldbach a Euler el 7 de junio de 1742 en la misma carta donde dio a conocer la conjetura “No es inútil prestar atención a aquellos asuntos que muy probablemente no tengan una demostración rigurosa. Incluso en el caso que dichos asuntos resulten ser falsos, con todo esto se puede dar el descubrimiento a una nueva verdad”.

Capítulo 3

Generalización de la conjetura

En este capítulo mostraremos algunas conjeturas concernientes a la representación de números pares e impares como adición de números primos. Las ilustraremos con algunos ejemplos que por último nos ayudaran a obtener una generalización de la conjetura de Goldbach.

3.1. Números pares

A) **Cualquier número entero par n se puede expresar como combinación de dos números primos de la siguiente forma:**

1) $n = p + q$, donde p, q son números primos.

Ejemplo 3.1.1.

$$2 = 7 - 5 = 13 - 11 = \dots;$$

$$4 = 11 - 7 = \dots;$$

$$6 = 13 - 7 = \dots;$$

$$8 = 13 - 5 = \dots;$$

a) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero par de la forma anterior ($n = p - q$, donde p, q son números primos)?

B) Cualquier número entero par n se puede expresar como combinación de cuatro números primos de las siguientes formas:

2) $n = p + q + r - t$, donde p, q, r, t son números primos.

Ejemplo 3.1.2.

$$2 = 3 + 3 + 3 - 7 = 3 + 5 + 5 - 11 = \dots;$$

$$4 = 3 + 3 + 5 - 7 = \dots;$$

$$6 = 3 + 5 + 5 - 7 = \dots;$$

$$8 = 11 + 5 + 5 - 13 = \dots;$$

a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cuatro números primos son diferentes?

b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero par de la forma anterior ($n = p + q + r - t$, donde p, q, r, t son números primos)?

3) $n = p + q - r - t$, donde p, q, r, t son números primos.

Ejemplo 3.1.3.

$$2 = 11 + 11 - 3 - 17 = 11 + 11 - 13 - 7 = \dots;$$

$$4 = 11 + 13 - 3 - 17 = \dots;$$

$$6 = 13 + 13 - 3 - 17 = \dots;$$

$$8 = 11 + 17 - 7 - 13 = \dots;$$

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cuatro números primos son diferentes?
- b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero par de la forma anterior ($n = p + q - r - t$, donde p, q, r, t son números primos)?
- 4) $n = p - q - r - t$, donde p, q, r, t son números primos.

Ejemplo 3.1.4.

$$2 = 11 - 3 - 3 - 3 = 13 - 3 - 3 - 5 = \dots;$$

$$4 = 13 - 3 - 3 - 3 = \dots;$$

$$6 = 17 - 3 - 3 - 5 = \dots;$$

$$8 = 23 - 3 - 5 - 7 = \dots;$$

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cuatro números primos son diferentes?
- b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero par de la forma anterior ($n = p - q - r - t$, donde p, q, r, t son números primos)?

3.2. Números impares

A) Cualquier número entero impar n se puede expresar como combinación de tres números primos de las siguientes formas:

1) Como suma de dos números primos menos otro número primo:

$$n = p + q - r$$

donde p, q, r son números primos (no se incluye la solución trivial: $p = p + q - q$ cuando p es primo).

Ejemplo 3.2.1.

$$1 = 3 + 5 - 7 = 5 + 7 - 11 = 7 + 11 - 17 = 11 + 13 - 23 = \dots;$$

$$3 = 5 + 5 - 7 = 7 + 19 - 23 = 17 + 23 - 37 = \dots;$$

$$5 = 3 + 13 - 11 = \dots;$$

$$7 = 11 + 13 - 17 = \dots;$$

$$9 = 5 + 7 - 3 = \dots;$$

$$11 = 7 + 17 - 13 = \dots;$$

Se presentan las siguientes preguntas:

- ¿Es esta conjetura equivalente con la conjetura de Goldbach (cada número entero impar ≥ 9 es la suma de tres números primos)?
- ¿Esta conjetura es verdadera cuando los tres números primos son diferentes?

c) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($p = p + q - r$ donde p, q, r son primos)?

2) Como un número primo menos dos números primos:

$$n = p - q - r$$

donde p, q, r son números primos.

Ejemplo 3.2.2.

$$1 = 13 - 5 - 7 = 17 - 5 - 11 = 19 - 5 - 13 = \dots;$$

$$3 = 13 - 3 - 7 = 23 - 7 - 13 = \dots;$$

$$5 = 13 - 3 - 5 = \dots;$$

$$7 = 17 - 3 - 7 = \dots;$$

$$9 = 13 - 3 - 5 = \dots;$$

$$11 = 19 - 3 - 5 = \dots;$$

- a) ¿Es esta conjetura equivalente con la conjetura de Goldbach (cada número entero impar ≥ 9 es la suma de tres números primos)?
- b) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los tres números primos son diferentes?
- c) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($p = p - q - r$ donde p, q, r son números primos)?

B) Cualquier número entero impar n se puede expresar como combinación de cinco números primos de las siguientes formas:

3) $n = p + q + r + t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $t \neq u$.

Ejemplo 3.2.3.

$$1 = 3 + 3 + 3 + 5 - 13 = 3 + 5 + 5 + 17 - 29 = \dots;$$

$$3 = 3 + 5 + 11 + 13 - 29 = \dots;$$

$$5 = 3 + 7 + 11 + 13 - 29 = \dots;$$

$$7 = 5 + 7 + 11 + 13 - 29 = \dots;$$

$$9 = 7 + 7 + 11 + 13 - 29 = \dots;$$

$$11 = 5 + 7 + 11 + 17 - 29 = \dots;$$

a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cinco números primos son diferentes?

b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($n = p + q + r + t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $t \neq u$)?

4) $n = p + q + r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $t, u \neq p, q, r$.

Ejemplo 3.2.4.

$$1 = 3 + 7 + 17 - 13 - 13 = 3 + 7 + 23 - 13 - 19 = \dots;$$

$$3 = 5 + 7 + 17 - 13 - 13 = \dots;$$

$$5 = 7 + 7 + 17 - 13 - 13 = \dots;$$

$$7 = 5 + 11 + 17 - 13 - 13 = \dots;$$

$$9 = 7 + 11 + 17 - 13 - 13 = \dots;$$

$$11 = 7 + 11 + 19 - 13 - 13 = \dots;$$

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cinco números primos son diferentes?
- b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($n = p + q + r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $t, u \neq p, q, r$)?
- 5) $n = p + q - r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $r, t, u \neq p, q$.

Ejemplo 3.2.5.

$$1 = 11 + 13 - 3 - 3 - 17 = \dots;$$

$$3 = 13 + 13 - 3 - 3 - 17 = \dots;$$

$$5 = 3 + 29 - 5 - 5 - 17 = \dots;$$

$$7 = 3 + 31 - 5 - 5 - 17 = \dots;$$

$$9 = 3 + 37 - 7 - 7 - 17 = \dots;$$

$$11 = 5 + 37 - 7 - 7 - 17 = \dots;$$

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cinco números primos son diferentes?
- b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($n = p + q - r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $r, t, u \neq p, q$)?
- 6) $n = p - q - r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $q, r, t, u \neq p$.

Ejemplo 3.2.6.

$$1 = 13 - 3 - 3 - 3 - 3 = \dots;$$

$$3 = 17 - 3 - 3 - 3 - 5 = \dots;$$

$$5 = 19 - 3 - 3 - 3 - 5 = \dots;$$

$$7 = 23 - 3 - 3 - 5 - 5 = \dots;$$

$$9 = 29 - 3 - 5 - 5 - 7 = \dots;$$

$$11 = 31 - 3 - 5 - 5 - 7 = \dots;$$

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los cinco números primos son diferentes?
- b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior ($n = p - q - r - t - u$ donde p, q, r, t, u son números primos y $q, r, t, u \neq p$)?

3.3. Conjetura general

Si $k \geq 3$ y $1 \leq s < k$, donde k, s son enteros. Entonces:

- Si k es impar

Cualquier entero impar puede ser expresado como suma de $k - s$ primos (primer conjunto) menos una suma de s primos (segundo conjunto), tal que los primos del primer conjunto son diferentes a los primos del segundo conjunto

- a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los k números primos son diferentes?

b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero impar de la forma anterior?

■ Si k es par

Cualquier entero par puede ser expresado como suma de $k - s$ primos (primer conjunto) menos una suma de s primos (segundo conjunto), tal que los primos del primer conjunto son diferentes a los primos del segundo conjunto

a) ¿Esta conjetura es verdadera cuando los k números primos son diferentes?

b) ¿De cuántas maneras se puede expresar cada número entero par de la forma anterior?

Bibliografía

- [1] APOSTOL Tom M, *Introducción a la teoría analítica de números*. Barcelona, España. Editorial Reverté, 1984.
- [2] APOSTOL Tom M, *Análisis Matemático*. Barcelona, España. Editorial Reverté, 1982.
- [3] BARTLE Robert y SHERBERT Donald. *Introducción al análisis matemático de una variable*, Segunda Edición Editorial Limusa, Mexico, 2002.
- [4] CHIN W. Max S. *On partitions of Goldbach's conjecture*, Cambridge, 2000, Artículo, Cambridge University.
- [5] DICKSON Leonard E. *History of the Theory of Numbers. Vol. 1* Reimpreso por Chelsea, New York, 1952.
- [6] FLORES T. Eratostenes, *Sobre la conjetura impar de Goldbach*, México DF, 2002, Tesis de Pregrado, UNAM.
- [7] JIMENEZ Rafael, GORDILLO Enrique y RUBIANO Gustavo. *Teoría de números para principiantes*, Bogota, Unibiblios, 1999.

- [8] LAUZARA F. Angel. *Combinaciones de Goldbach*, Foros Matemático, La Coruña, España, 2003.
- [9] OLIVERIA S. José. *Introducción a la teoría de números*, Tercera Edición Editorial IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [10] SCIMONE Aldo, *Pupils' conceptions about an open historical question: Goldbach Conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint*, Bratislava, 2003, Tesis doctoral, Comenius University Bratislava.
- [11] SYLVESTER James J. *On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers*, New York, Chelsea Publishing Company, 1897.
- [12] ZACCAGNINI Alessandro, *Variazioni Goldbach: Problemi con numeri primi*, Parma, 1998, Artículo, Conferenza Tenuta per la Mostra "Oltre il Compasso".