EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

YADIRA BALLESTEROS SANTOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2017

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

YADIRA BALLESTEROS SANTOS

Trabajo de grado para optar por el título de
Magíster en Pedagogía

Asesor
JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2017

A Dios,

por haberme mostrado su infinito amor y misericordia, y dado las fuerzas para alcanzar una nueva meta en mi vida.

A mis padres,

por enseñarme el valor de la constancia, el amor propio,
por darme todo su amor y sacrificarse por mí toda su vida.

A mis Hijos,

por su comprensión y apoyo,
y por ser inspiración en todos mis proyectos.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación Nacional por hacerme partícipe del programa “Becas para la Excelencia”, sin su apoyo no habría sido posible alcanzar una nueva meta de formación.

A la Universidad Industrial de Santander por estampar un sello imborrable de exigencia académica en mi formación.

A mi director de proyecto, el Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, por sus enseñanzas. Para él mi admiración y respeto.

A mis 42 compañeros de la cohorte XIX, por compartirme su amistad a lo largo de estos dos años.

Y muy especialmente a mis compañeros Maestros de la Institución donde laboro por compartir el sacrificio de tener horarios ajustados para facilitar mi desplazamiento a la Universidad, y a la Rectora por su apoyo incondicional.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE GRÁFICAS

LISTA DE ESQUEMAS

Pág.

LISTA DE ILUSTRACIONES

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TÍTULO: EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA.*

AUTOR: YADIRA BALLESTEROS SANTOS**

PALABRAS CLAVE: RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, HABILIDADES DE RAZONAMIENTO, GEOGEBRA.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo de investigación, orientado bajo el enfoque cualitativo, fue realizado con el propósito de observar cómo se potencian habilidades de razonamiento (explicación, elaboración de conjeturas, justificación, demostración) a través de actividades mediadas por el software de geometría dinámica (SGD) GeoGebra y cómo esto se convierte en un escalón para lograr superar dificultades en el proceso de Resolución de Problemas de un grado sexto de un colegio rural del departamento de Santander.

A partir del diagnóstico se hizo una doble caracterización de los estudiantes: por niveles de Razonamiento según el modelo Van Hiele, y por el tipo de demostración que realizan teniendo en cuenta las categorías definidas por Fiallo. Lo anterior con el fin de orientar el diseño de la estrategia de intervención.

Dicha estrategia consistió en la aplicación de una secuencia didáctica organizada según las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele bajo un enfoque de Resolución de Problemas y cuyas actividades combinan la utilización de material concreto y el uso del SGD GeoGebra, en problemas diseñados por la docente investigadora, o de construcción por parte de los estudiantes.

Analizados los datos, se obtiene un buen balance pues a pesar del corto tiempo de intervención (3 meses), se percibe que sí se potencian habilidades del razonamiento, pese a la dificultad que tienen los niños para expresarse oralmente y por escrito. La combinación del enfoque de resolución de problemas, el uso de GeoGebra y la constante petición de la docente a sus estudiantes, de justificar sus respuestas, son una terna perfecta, si de potenciar habilidades se trata.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Maestría en Pedagogía. Asesor Jorge Enrique Fiallo Leal Doctor en Didáctica de las Matemáticas

ABSTRACT

TITLE: MATHEMATICAL REASONING IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT[*]

AUTHOR: YADIRA BALLESTEROS SANTOS[**]

KEY WORDS: MATHEMATICAL REASONING, REASONING ABILITIES, GEOGEBRA

DESCRIPTION:

This research work, guided under the qualitative approach, was done with the goal of observing how reasoning abilities are improved (explanation, conjectures elaboration, justification, demonstration) through activities performed by the dynamic geometry software (SGD) GeoGebra and how this becomes into a step to overcome difficulties in the Sixth grade's problems resolution from a rural school in the department of Santander.

Starting from the diagnosis a double characterization was made by the students: by reasoning levels according to the Van Hiele model and by the demonstration type that goes by the defined categories by Fiallo. The above with the purpose of guiding the intervention strategy design.

The strategy consisted on the application of a didactic sequence organized according to the Learning Phases of Van Hiele's model, and under a qualitative approach on problems resolution which its activities combine the use of concrete material and the use of GeoGebra in problems designed by the researcher teacher or by the students.

After the data was analyzed, a good balance is obtained, due to the short time of intervention (three months) it is perceived that reasoning abilities are improved, although the children's difficulty to express themselves orally and written. The combination of the problems resolution's approach, the use of GeoGebra and the constant request from the teacher to the students to justify their answers, are a perfect trio on improving abilities.

---

[*] Degree work

[**] Faculty of Human Sciences. Master's Degree in Pedagogy. Advisor Jorge Enrique Fiallo Leal Doctor in Mathematics Didactics

INTRODUCCIÓN

"*Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!*"[1]. Tal vez este título que enmarca el documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas pase desapercibido para muchos, pero no para los docentes, quienes con su vocación cada día responden a este reto.

Un reto que implica concebir la enseñanza de las matemáticas desde varias ópticas puesto que con el tiempo esto ha cambiado y es así que hoy no solo aportan al desarrollo de capacidades de razonamiento lógico, como se concebía el siglo pasado, sino también contribuyen a una educación de calidad para todos. Desde las aulas esto es posible si se crean contextos de aprendizaje diseñados acorde a las necesidades y debilidades de los estudiantes.

Es así que frente a la dificultad para solucionar problemas en un grado sexto de un colegio rural de Santander, se plantea esta investigación en la que se pregunta cómo solucionarla. En este documento, de cinco capítulos, se presenta todo el estudio.

En el primer capítulo, se abarca lo concerniente al problema que se plantea, con su justificación y objetivos.

En el segundo, el marco de referencia, se hace un recorrido bibliográfico alrededor de trabajos realizados con respecto a la enseñanza de la geometría, el proceso de razonamiento y sus habilidades, el Software de Geometría Dinámica en la región, Colombia y el mundo. Además de la fundamentación teórica correspondiente.

---

[1] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL DE COLOMBIA. Estándares básicos de competencias Matemáticas [en línea]. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. 2006. p. 1. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Por otra parte, el capítulo tres contiene la metodología utilizada, se describen los participantes y el escenario, cómo se dio la recolección de datos y el proceso metodológico. Es aquí donde se describe la estrategia que se aplicó en la intervención, la secuencia Didáctica, *"Un ambiente GeoGebra, para potenciar el razonamiento matemático*".

En el capítulo cuatro, se presenta el análisis e interpretación de los resultados del diagnóstico, de la secuencia didáctica y de la prueba final. En cada uno de estos momentos, se caracterizó a los estudiantes teniendo en cuenta las categorías definidas en Fiallo[2].

Para finalizar, en el capítulo 5 se presentan los hallazgos más sobresalientes en cuanto al proceso de razonamiento y sus habilidades, y otros aspectos observados en los estudiantes y aportados por ellos.

En el apartado dedicado a los anexos, se muestran soportes relacionados con el trabajo realizado, además, se anexa en discos compactos, videos que evidencian la aplicación de la secuencia.

---

[2] FIALLO, Jorge. Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis Doctor en Matemáticas. Valencia: Universidad de Valencia. España: 2011.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En cumplimiento del artículo 78 de la Ley 115 de 1994, el Ministerio de Educación Nacional publicó la serie Lineamientos Curriculares como documentos orientadores de reflexión, análisis y ajustes al currículo de todas las áreas. Específicamente los lineamientos para el área de matemáticas, están orientados a "la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana"[3].

En coherencia con lo anterior, es visible que uno de los aspectos fundamentales del desarrollo y conocimiento de las matemáticas es la resolución de problemas y desde los Lineamientos Curriculares se afirma, "debe ser el eje central del currículo del área, (…) deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos"[4]. Esto es reiterado en los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, en el que se define que existen dos facetas del conocimiento matemático: la formal y la práctica, que dan idea de lo que es ser competente matemáticamente y uno de los aspectos es la *solución de problemas.* Es así que la *solución de problemas,* está en coherencia tanto vertical como horizontal en cada uno de los tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional[5].

---

[3] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá, 1988. p. 7.
[4] Ibíd., p. 52.
[5] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares básicos de competencias en matemáticas [en línea]. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. 2006. [Citado el 18 de Agosto de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

En el colegio rural Nuestra Señora de Fátima, del departamento de Santander se evidencian dificultades en este proceso. Indagando con docentes de la sección primaria de la Institución expresan que “solucionar problemas es el gran problema de las matemáticas”, pues es reiterativo encontrar en los estudiantes dificultad para analizar enunciados, debido a que utilizan operaciones al azar, no relacionan el problema con la realidad, el cálculo mental es pobre y de forma consecuente, la lógica también. Dificultades que son reportadas por Polya quien expresa que, “la laguna más frecuente al resolver un problema es quizá la incompleta comprensión del problema, producto de una falta de concentración”[6].

La dificultad para solucionar problemas se evidencia en los resultados de la Prueba Saber 2014, en la que el proceso “Resolución” (al igual que otros), presentan DEBILIDAD. (Ver anexo A).

En los Lineamientos Curriculares se plantea

> los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y, *luego** aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia “estos problemas de aplicación” se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo[7].

Si bien es cierto, la resolución de problemas implica aplicar cierta información, también lo es establecer conjeturas, descubrir, inventar y comunicar nuevas ideas, y comprobar esas ideas a través de la argumentación y la reflexión crítica. “Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento

---

[6] POLYA, George. How To Solve It? [Cómo plantear y resolver problemas]. Traducido por Julian Zugazagoitia. México: Trillas. 1965. p. 81.
* La cursiva es propia y se utiliza para resaltar el momento en que se aplica el proceso resolución de problemas
[7] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas, Op. cit., p. 24.

matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas… De manera general, entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión”[8].

En los resultados de las pruebas saber del año 2014, el grado quinto del colegio mencionado, además de presentar dificultad en el proceso de resolución, también lo presenta en el proceso de razonamientos. Conviene entonces, fortalecer el proceso de razonamiento y por ende, mejorar la resolución de problemas; pero, ¿cómo hacer esto?

El proceso de razonamiento, tiene que ver con justificar, hacer conjeturas, argumentar, predecir, formular hipótesis. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se encuentran algunas actividades que se podrían aplicar intencionadamente, sin embargo, “el conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo que difícilmente otro campo de las matemáticas abarca un espectro tan amplio de dimensiones”[9].

Indagando con los docentes de la sección primaria, acerca de los contenidos que, aunque están contemplados en el plan de estudios, por diversas circunstancias no se alcanzan a enseñar o profundizar en el año escolar, la mayoría de ellos admiten que la Geometría es la unidad que casi siempre se planea para el último período académico y no se alcanza a enseñar por falta de tiempo, otros, se justifican en que no tienen la formación disciplinar en Geometría, o que es una rama que no dominan y por esto no se dedican a ella como sí lo hacen con la Aritmética. Estas afirmaciones por parte de las docentes de la sección primaria se

---

[8] Ibíd., p. 54
[9] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales [en línea]. Colombia. 2004. p. 2. [Citado el 18 de julio de 2017]. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

reflejan en los resultados de las pruebas saber 2104, en los que el componente Geométrico, en el grado quinto es “débil” y en el grado noveno es “muy débil”. (Ver anexo A)

En el análisis comparativo realizado a los resultados de las pruebas saber de 3°, 5° y 9° (ver anexo A), de los años 2014 y 2015, se puede concluir de forma general, que el *promedio* indica un progreso similar al de la Entidad Territorial Certificada, y la *desviación estándar* (aunque disminuye en comparación con el año 2014), revela un bajo número de estudiantes que presentan las pruebas y/o heterogeneidad entre los resultados de los estudiantes. Aspectos totalmente coherentes al ser analizados al interior de cada grupo evaluado.

En su afán por buscar soluciones al respecto, la Institución en su Plan de Mejoramiento Institucional ha establecido un plan de acción en el que considera la implementación de pruebas tipo Saber, el análisis de una pregunta diaria, el fortalecimiento de la lectura y la implementación novedosa de Tecnologías de la Información y la Comunicación. En esa búsqueda de soluciones, es pertinente analizar cómo se está abordando la enseñanza de la Geometría, la resolución de problemas y el razonamiento en las prácticas de aula, así como considerar “el potencial formativo que brindan las tecnologías computacionales, específicamente los sistemas computacionales gráficos y algebraicos”[10] e incorporarlas en la enseñanza de la *Geometría*, que es un eje potenciador de los pensamientos matemáticos, pero que por dar prioridad a la enseñanza del pensamiento numérico, no se está dedicando el tiempo suficiente para enseñarla.

[10] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales, Op cit., p. 23.

1.1 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La situación expuesta en las líneas anteriores, genera cuestionamientos como:

¿Por qué no han sido suficientes los esfuerzos realizados por las docentes en su afán de mejorar los resultados académicos de sus estudiantes?

¿De qué manera potenciar el inventario tecnológico existente en el colegio Nuestra Señora de Fátima en las prácticas de enseñanza?

¿Cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes para solucionar problemas matemáticos?

¿En qué estado se encuentran las habilidades necesarias para resolver problemas, en los estudiantes de grado sexto?

¿Son suficientes los contenidos geométricos, con los que culminan los estudiantes en grado quinto, para el inicio de la secundaria?

Las posibles respuestas a los interrogantes, llevan al planteamiento de una pregunta de investigación:

¿De qué manera mejorar la resolución de problemas geométricos potenciando las habilidades del proceso de razonamiento en un ambiente de Geometría Dinámica, de los estudiantes del grado sexto de un colegio rural oficial del departamento de Santander?

1.2 JUSTIFICACIÓN

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se planea puede ser modesto; pero si desafía su curiosidad pone en juego las facultades inventivas, y si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter"[11].

A través de los años, los docentes han visto cambios en la educación como la concepción misma de aprendizaje, qué se evalúa o cómo enseñar. Todo ello como producto de las necesidades de aprendizaje, cambiantes en nuestra cultura. Dicho de otra manera y parafraseando a Pozo[12], cada cultura demanda sus propias necesidades de formación y educación y nuestro país no es ajeno a ello.

Esas necesidades en nuestro país (y más allá de sus fronteras), son motivo de análisis por parte del Estado, y es así como desde el Ministerio de Educación se hacen grandes esfuerzos por

> Lograr una EDUCACIÓN DE CALIDAD, que forme mejores seres humanos, ciudadanos con valores éticos, competentes, respetuosos de lo público, que ejercen los derechos humanos, cumplen con sus deberes y conviven en paz. Una educación que genere oportunidades legítimas de progreso y prosperidad para ellos y para el país. Lograr una educación competitiva, pertinente, que contribuya a cerrar brechas de inequidad y en la que participa toda la sociedad[13].

---

[11] POLYA, George. How To Solve It? [Cómo plantear y resolver problemas]. Traducido por Julian Zugazagoitia. México: Trillas. 1965. p. 81.

[12] POZO, Juan Ignacio. Sobre las relaciones entre el conocimiento cotidiano de los alumnos y el conocimiento científico: del cambio conceptual a la integración jerárquica. En: Enseñanza de las Ciencias 17, 1999.

[13] COLOMBIA, MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Misión, Propósito Superior y Visión [en línea]. 2016. párr. 1-2 . [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-89266.html

Para lograr su misión, el Ministerio de Educación Nacional lleva a cabo iniciativas como estímulos para los mejores estudiantes, inversiones en tecnología, en el bienestar de la niñez de nuestro país y en la formación para docentes. Esta última, la más reciente iniciativa del Ministerio, Becas para la Excelencia, busca mejorar las prácticas educativas de los docentes pues considera que “la formación de maestría contribuye al desarrollo profesional de los maestros, incidiendo en las capacidades de los estudiantes para ser exitosos en la vida y en el bienestar y desarrollo personal de maestros y maestras”[14].

Los docentes, quienes no son ajenos a la causa y como actores del proceso de enseñanza y de aprendizaje, desde su formación y experiencia contribuyen, en esta ocasión, al cumplimiento de la misión mediante los proyectos de investigación que se pondrán en ejecución como requisito para optar al título de Magíster en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander. En el caso particular que concierne a este proyecto, apunta a mejorar la resolución de problemas geométricos potenciando las habilidades del proceso de razonamiento en un ambiente de geometría dinámica.

Por esto es importante mejorar el proceso de resolución de problemas geométricos, además porque “desarrolla en el alumno la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas"[15], por esto el profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica[16]. Por otra parte Samper, Camargo y Leguizamón[17] plantean que se debe posibilitar un

---

[14] Ibíd., párr. 3.
[15] RESNICK, Lauren y FORD, Wendy. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona, España: Paidós & M.E.C. 1990. p.23
[16] POLYA, Geroge. How To Solve It? [Cómo plantear y resolver problemas]. Tarducido por Julian Zugazagoitia. México: Trillas. 1965.
[17] SAMPER, Carmen; CAMARGO, Leonor y LEGUIZAMÓN, Cecilia. Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. En: Colección: cuadernos de matemática educativa [en línea], 2003, no. 6. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://asocolme.org/publicaciones-asocolme/coleccion-cuadernos-de-matematica-educativa

ambiente propicio para el razonamiento en la clase de Geometría, puesto que a partir de la expresión de diversas formas argumentativas se favorece en el estudiante su capacidad de establecer relaciones entre conceptos, dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos, comunicar, en forma convincente, argumentar. Así, "se reivindica el papel de la geometría en la escuela como elemento prioritario para el desarrollo del razonamiento"[18].

Fruto de fortalecer el proceso de razonamiento, es su manifestación "en el potencial de los estudiantes para desarrollar problemas, enfrentar situaciones nuevas y crear sus propias investigaciones"[19] y se subraya, el rol del docente a la hora de optar por el ambiente de aprendizaje. Ambiente mediado por las nuevas tecnologías, gracias a su vertiginoso auge. Es así que, "han surgido nuevas herramientas para el trabajo tanto en geometría como en su enseñanza que es importante conocer y utilizar para poner a tono los métodos pedagógicos con las nuevas posibilidades de aproximación cognitiva que la sociedad nos brinda"[20].

Una de esas nuevas posibilidades es la utilización de Software de Geometría Dinámica (SGD), cuyo potencial es reconocido por varios autores. Según Gutiérrez y Jaime[21], promueve el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes y el aprendizaje de la demostración; Mariotti[22] afirma que los ambientes de geometría dinámica son entornos favorables para el desarrollo del razonamiento geométrico. Hanna[23] plantea que la capacidad gráfica de este tipo

---

[18] Ibíd., p. 59.
[19] Ibíd., p. 60.
[20] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales, Op cit., p. 23.
[21] GUTIÉRREZ, Ángel y JAIME, Adela. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. En: PNA [en línea], 2015 vol. 9, no. 2, pp. 53-83. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf
[22] MARIOTTI, A. Proof and proving in mathematics, citado por MOLINA, Oscar; LUQUE, Carolina y ROBAYO, Alejandro. Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. En: TED: Tecné, Episteme y Didaxis, [en línea], 2014, no. 35 [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/2723/2462
[23] HANNA, G. Proof, explanation and exploration, citado por MOLINA Op. cit., p. 47.

de software "(…) ha alentado a los estudiantes a conjeturar y justificar en geometría".

La capacidad del arrastre, función del SGD, persigue objetivos como: comprobar si la construcción es correcta, descubrir propiedades de la figura, elaborar una conjetura, y validar una conjetura; es por esto que le aporta a la solución de problemas pues permite, según Gutiérrez[24] la exploración: búsqueda de regularidades; establecer conjeturas: identificación de propiedades; la verificación en ejemplos; la demostración empírica: convicción; y la demostración deductiva: propiedades abstractas.

Hoy existen variedad de SGD y en la búsqueda y selección del más conveniente, "GeoGebra" es uno de ellos, ya que es un software libre que ha sido utilizado en investigaciones en la educación básica primaria y secundaria, media y universitaria y en todas ellas se han beneficiado los procesos estudiados. Es así que, por ejemplo, se creó el Instituto Geogebra en Cantabria, España y desde allí se ha difundido el uso del software entre los maestros como un efectivo recurso metodológico en el aula.

Por todo lo anterior, desde el fortalecimiento de la resolución de problemas, del proceso de razonamiento geométrico y desde una metodología mediada por *GeoGebra*, esta investigación se convierte en una gran oportunidad para contribuir con el mejoramiento de la Calidad de la Educación en Colombia, y por qué no, la calidad de vida de las comunidades permeadas con este tipo de prácticas.

[24] GUTIÉRREZ, Op. cit., p. 56.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General. Fortalecer la resolución de problemas geométricos potenciando las habilidades del proceso de razonamiento matemático en un ambiente de Geometría Dinámica de los estudiantes de grado sexto del colegio Nuestra Señora de Fátima del municipio de Jordán, departamento de Santander.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Determinar el estado actual de la enseñanza y los aprendizajes de la Geometría con respecto a la resolución de problemas de los estudiantes objeto de análisis.
- Diseñar y aplicar una secuencia didáctica mediada con el software de geometría dinámica GeoGebra para potenciar el proceso de razonamiento en la solución de problemas geométricos.
- Analizar los resultados de la propuesta didáctica aplicada, con respecto al proceso de Razonamiento en la Resolución de Problemas de los estudiantes de grado sexto del colegio Nuestra Señora de Fátima del municipio de Jordán, departamento de Santander.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio e investigación acerca de la Resolución de Problemas se ha abordado desde diferentes contextos y escenarios. Para el caso concreto de esta investigación, se aborda desde el ambiente de instrucción mediado por herramientas tecnológicas, desde el análisis de habilidades de Razonamiento y desde la enseñanza de la Geometría.

2.1.1 A Nivel Internacional. Santos[25] investigó las formas de razonamiento que construyen los estudiantes al trabajar actividades de resolución de problemas en ambientes de instrucción que fomentan el uso de herramientas digitales. A partir de ello señala que cuando se utilizan herramientas computacionales los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas, además no solo facilitan la implementación de las estrategias, sino también potencian o extienden el repertorio de las heurísticas[26]. El uso de estas herramientas, influyen directamente en la *conceptualización*, en forma de interactuar con los problemas y como consecuencia incide en el desarrollo de una teoría que explique las competencias de los estudiantes. Moreno, Armella y Santos-Trigo establecen "que el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes, consecuencia de

[25] SANTOS, Manuel. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. 2008. [en línea]. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2SantosTrigo.pdf.
[26] Ibíd., p. 22.

ello, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación"[27].

Es claro que, hablar de razonamiento está asociado al desarrollo de otras habilidades como argumentar y explicar, entre otras. Para Mata-Pereira y Da Ponte[28] dichas habilidades han sido objeto de análisis, como *generalización, representación y significación*. Es precisamente de este estudio que afirman que en la formulación de generalizaciones en la mayoría de las situaciones, los estudiantes siguen un carácter inductivo de razonamiento, pero también se producen situaciones de razonamiento abductivo o la naturaleza de las generalizaciones son más deductivas. Los procesos de razonamiento están estrechamente relacionados con el significado y el uso de diversas representaciones, no parece limitar los procesos de pensamiento de los estudiantes.

Así como tampoco es limitado el uso de las nuevas tecnologías. Cuesta[29] en su investigación con un niño con dificultades de aprendizaje (dos años de atraso escolar), observó que al estimular su razonamiento utilizando tableros digitales y programas compatibles, las áreas de matemáticas y lenguaje mejoran, pero especialmente su razonamiento lógico-matemático. La inclusión de las TIC en el proceso educativo del niño se ha convertido en un pilar pedagógico que le ofrece múltiples ventajas y ha supuesto "un pequeño pero contundente paso hacia delante en el dominio de estas tecnologías como instrumento enriquecedor de las labores pedagógicas"[30].

---

[27] MORENO-ARMELLA, Luis y SANTOS-TRIGO, Manuel. Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country, Citado por SANTOS, Manuel Op cit., p.7.
[28] PONTE, João Pedro; MATA-PEREIRA, Joana y QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. En: Quadrante, 2013, vol. 22, no 1, p. 55-81.
[29] CUESTA, Hector, AGUIAR, Maria y MARCHENA, Rosa. Desarrollo de los razonamientos matemáticos y Verbal a través de las TIC: descripción de una experiencia educativa. En: Revista de Medios y Educación. N° 46. Enero 2015 pp. 1133-8482.
[30] Ibíd., p. 49.

Por su parte, Ellis[31] realizó un trabajo en el que se analizó cómo influye el uso de los ejemplos en la exploración de conjeturas y justificaciones apropiadas. Teniendo en cuenta las características de los ejemplos usados, lograron realizar una categorización según el tipo y el uso dado a estos. Concluyen que el uso estratégico y reflexivo de ejemplos puede apoyar el desarrollo de pruebas matemáticamente apropiadas.

2.1.2 A nivel Nacional. Desde la enseñanza de la Geometría, se ha estudiado el r*azonamiento*, uno de los procesos simultáneos al proceso de resolución de problemas. Samper, Camargo y Leguizamón realizaron un estudio, cuyo propósito fue "presentar alternativas didácticas para la enseñanza de la geometría buscando mostrar cómo se pueden realizar innovaciones en el aula escolar, a través de actividades de distinta índole, que contribuyen al desarrollo del razonamiento y a un mejor aprendizaje de la geometría"[32], proponiendo tareas de *conceptualizar, investigar y demostrar*. Con esta caracterización, diseñaron cuatro estudios investigativos encaminados a determinar el tipo de razonamiento que se activa en cada tarea y los mecanismos para favorecerlo, bien sea razonamiento inductivo, deductivo o formal.

Bajo la tutoría de Samper, Toro[33] trabajó una propuesta de enseñanza bajo un enfoque de actividad demostrativa para enseñar los contenidos de geometría con el uso del software Cabrí, mediante ejercicios, tareas y problemas que invitaban a explorar regularidades, conjeturar y justificar. Recurrió al modelo de Toulmin para caracterizar los argumentos encontrados. No solo realizó una aproximación

---

[31] ELLIS, Amy, et al. 2012. Middle School Students' Example Use in Conjecture Exploration and Justification. The annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo.
[32] SAMPER, Op cit., p. 5.
[33] TORO, Jorge. Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo. Tesis de Maestría Educación Matemática. Medellín: Universidad de Medellín. 2014.

significativa al contenido del curso sino que desarrolló habilidades argumentativas en sus estudiantes.

Por su parte Samper, Camargo y Leguizamón[34] dice que la aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica se favorece, si se combinan secuencias de problemas de construcción geométrica relacionados entre sí, el uso de un programa de geometría dinámica para la resolución de los problemas y la mediación semiótica del profesor.

No solo en el pensamiento geométrico se ha hecho investigación sobre el razonamiento, también en el numérico. Durango[35] en su estudio propuso la evolución de procesos de razonamiento, los niveles y dimensiones de la comprensión en el campo aritmético. El autor concluye que los estudiantes, a partir de las explicaciones y argumentaciones que realizan otros compañeros son activos a la hora de socializar de manera verbal sus razonamientos, dichos razonamientos evolucionan cuando se propician espacios para el debate y la socialización de los procesos que se llevan a cabo en la mente del estudiante. En su trabajo, Durango invita a los docentes a generar más espacios en los que un estudiante socialice sus ideas, las argumente y realice conjeturas.

2.1.3 A Nivel Regional. En nuestra región, aún no son muchos los estudios que de manera explícita se realizan con el fin de potenciar las habilidades del proceso de razonamiento con la utilización de la tecnología. Sin embargo, muy valiosas son las que a continuación se señalan.

---

[34] SAMPER, Op cit., p. 5.

[35] DURANGO, John y RIVERA, Gladys. Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de educación básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo. En: Educación científica y tecnológica, 2013, edición especial. Bogotá, D.C.

Acosta[36] en su estudio, resalta el rol de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, que sirven de guía para el diseño de secuencias de enseñanza y su aplicación al diseño de actividades utilizando SGD. El software lo considera como un medio adecuado para que la interacción de los alumnos produzca efectivamente un aprendizaje, posibilitando al profesor el utilizar las experiencias personales de los alumnos para darle sentido al saber que desea enseñar.

Por su parte, Fiallo[37] desde su estudio por medio de la implementación de unidades de enseñanza por descubrimiento guiado con el Software de Geometría Dinámico Cabrí, aporta información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas. Su trabajo es un aporte original y novedoso que incluye las demostraciones empíricas o inductivas que no se ha tenido en cuenta en las investigaciones de la unidad cognitiva, dado que en dichas investigaciones el término demostración incluye únicamente las demostraciones deductivas que conducen a la construcción de un teorema. Fiallo[38] desde el inicio del estudio de las razones trigonométricas, incita al estudiante a la exploración, análisis y *visualización* a través de Cabrí de las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas para que planteen sus propias conjeturas y construyan sus *propias demostraciones*. La invitación a la demostración la hace a través de la solicitud continua de *explicaciones*.

[36] ACOSTA, Martin. Enseñando transformaciones geométricas con Software de Geometría Dinámica. 2010. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Memorias del 11° encuentro colombiano de Matemática Educativa. Bogotá: CENGAGE Learning 2010.
[37] FIALLO, Op. cit., p. 11.
[38] FIALLO, Op. cit., p. 11.

2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En coherencia con los objetivos planteados en esta investigación, los referentes son delimitados a la Resolución de Problemas, el Razonamiento y la utilización del Software de Geometría Dinámica GeoGebra en el aula.

2.2.1 Resolución de problemas. "La resolución de problemas es dominio de estudio que ha influido notablemente en las agendas de investigación en educación matemática y en las propuestas del currículum matemático y las prácticas de instrucción"[39].

Son varias las elaboraciones que se han realizado acerca del concepto Resolución de Problemas. Lesh y Zawojewski, por ejemplo, definen la resolución de problemas como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones – y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas"[40].

Ahora, es oportuno validar a "el verdadero impulsor del proceso de resolución de problemas"[41] George Polya, quien dice que un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata[42].

> El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la

---

[39] SANTOS, Op. cit. p.1.
[40] LESH, R y ZAWOJEWSKI, J. Problem solving and modeling. In F. K. Lester , Jr. (Ed.). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing. 2007. pp. 782
[41] MOLERO APARICIO, María. Como resolver problemas de Geometría [en línea]. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: https://docslide.us/documents/resolver-problemas-de-geomertria.html
[42] POLYA, George Op cit., p. 101.

> imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas; hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos[43].

Polya[44] en sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos: 1. Entender el problema. 2. Configurar un plan. 3. Ejecutar el plan. 4. Mirar hacia atrás.

2.2.2 PROCESO DE RAZONAMIENTO

"En las clases en las que se animan a los alumnos a exponer lo que piensan y en las que cada uno contribuye a evaluar el pensamiento de otros, se proporciona un rico ambiente para el aprendizaje del razonamiento matemático"[45].

En los estándares básicos de competencias en matemáticas, se afirma que el desarrollo del *razonamiento* lógico se apoya en materiales y contextos que permitan al estudiante desde los primeros grados de enseñanza percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas, dar explicaciones coherentes, proponer interpretaciones y

---

[43] MORENO PÁEZ, Jimmy Alejandro. Comparación de Estrategias Didácticas de Trabajo en Equipo y Solución de Problemas según George Pólya en la Enseñanza del Teorema de Pitágoras, para el mejoramiento del aprendizaje de matemáticas en octavo. Tesis e Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad de los Llanos. 2015. P. 21

[44] MIELES, Mónica. Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. En: Escenarios, 2012, vol. 10, no 2, p. 19.

[45] National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Traducción de Manuel Fernández. Sevilla 2003. p. 61.

respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Ese razonamiento luego trabaja directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones[46].

Así pues, se considera que el razonamiento es un proceso clave en la resolución de problemas.

> Muchas veces no hay manera de conseguir que los estudiantes comprendan algún concepto nuevo; otras veces parece que éstos, "se saben" los conceptos o propiedades que el profesor les acaba de introducir, pero sólo son capaz de usarlos en ejemplos idénticos a los resueltos con la ayuda del profesor; también ocurre, especialmente en enseñanza media, que los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado[47].

Esta situación, fue motivación para que los esposos Pierre y Dina Van Hiele, se dedicaran a analizar el porqué de ello, y a partir de sus estudios crearan un modelo educativo que hoy sigue vigente. En Algarín y Fiallo[48], se explica desde los niveles de razonamiento y se describe la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal. Es característico del modelo el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje propio de cada uno de los niveles, además, el paso de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente Nivel:

---

[46] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Estándares básicos de competencias en matemáticas, Op cit. p. 9.
[47] GUTIÉRREZ, Ángel y JAIME, Adela. Op cit., p. 303.
[48] ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. En: Revista Científica, 2013, p. 56-60.

Nivel 1 Reconocimiento:

> los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo[49]. Describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos, no hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007)[50].

Nivel 2 Análisis

> Los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen las propiedades necesarias del concepto[51]. Describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas[52], realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico[53].

Nivel 3 Deducción informal

> Los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto[54]. Usan cualquier tipo de definición (Gutiérrez, 2007). Realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual,

---

[49] BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J. Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. citado por ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[50] GUTIÉRREZ, A. Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría, citado por ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[51] BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J., Op cit. 63.
[52] GUTIÉRREZ, A. Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría, citado por ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[53] ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[54] BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J. Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. citado por ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.

experimento mental transformativo y experimento mental estructurado[55].

Nivel 4 Deducción Formal:

> El estudiante razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas[56]. Admite la existencia de definiciones equivalentes, puede demostrar la equivalencia de definiciones[57]. Realizan demostraciones de tipo deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurada[58].

Como bien lo expone el MEN en sus estándares de competencias matemáticas, el desarrollo del razonamiento lógico permite establecer regularidades y relaciones; hacer *predicciones* y conjeturas; justificar o refutar esas *conjeturas*; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con *argumentos* y razones. Estas descripciones son evidencia de cuán fortalecido se encuentran el razonamiento (inductivo, abductivo o deductivo) en un estudiante y qué tipo aplica en determinadas ocasiones. A continuación, se presenta en detalle algunas de esas habilidades:

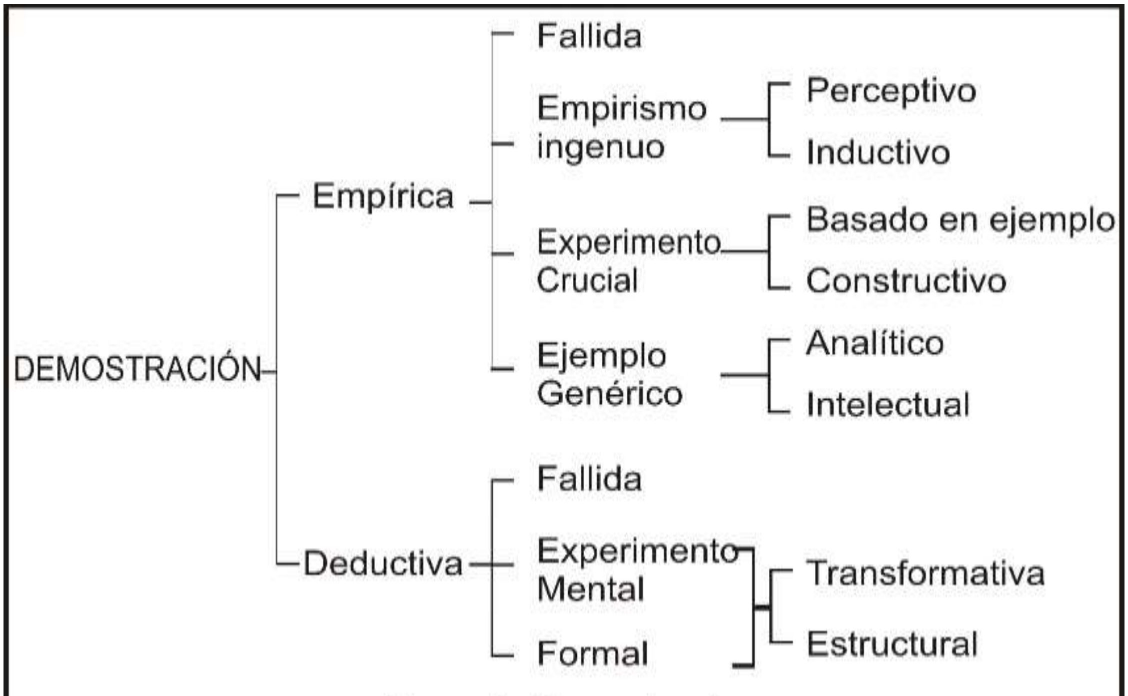
2.2.2.1 Demostración. El objetivo de esta investigación radica en potenciar habilidades propias de la demostración, entonces esta se considera como “un proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática”59.

---

[55] ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[56] BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J.op. cit. 63.
[57] GUTIÉRREZ, A. Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría, citado por ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[58] ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique, Op cit. 63.
[59] FIALLO, Op. cit., p. 7

Según esta definición, en Fiallo[60] se plantean los siguientes tipos de demostración (esquema 1) que permiten describir y analizar las respuestas de los estudiantes a problemas y además son los utilizados para la categorización y análisis en esta investigación.

Esquema 1 Tipos de demostraciones



Tipos de Demostraciones
Jorge Fiallo L.

- **Demostraciones Empíricas**, caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal (quizás el único) elemento de convicción: Los estudiantes establecen conjeturas después de haber observado regularidades en uno o más ejemplos; utilizan los ejemplos, o las relaciones observadas en ellos, para justificar la verdad de su conjetura. Cuando la conjetura se incluye en la declaración de un

[60] FIALLO, Op. cit., p. 11.

problema, los estudiantes sólo tienen que construir ejemplos para comprobar la conjetura y justificarla[61].

Dependiendo de la forma en que se seleccionan los ejemplos, se diferencian dos clases:

- *Empirismo ingenuo inductivo (EII)*, cuando la conjetura se justifica al demostrar que es verdadera en uno o varios ejemplos, generalmente seleccionados sin un criterio específico. La comprobación puede implicar la percepción de elementos visuales o táctiles (tipo perceptual) o también puede implicar el uso de elementos matemáticos o relaciones encontradas en ejemplos (tipo inductivo).

- *Experimento Crucial*: cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo específico para generalizar; los estudiantes asumen que la conjetura es siempre verdadera si es cierto en este ejemplo[62].

Dependiendo de cómo se utiliza el ejemplo, se distinguen dos tipos de experimento crucial:

- *Basado en ejemplo:* cuando la demostración se basa sólo en la existencia de un ejemplo o la falta de contraejemplos.

- *Constructivo*: la demostración se centra en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de obtener el ejemplo.

---

[61] MARRADES, Ramón y GUTIÉRREZ, Ángel. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. En: Educational studies in mathematics, 2000, vol. 44, no 1, p. 87-125.
[62] FIALLO, Op. cit., p. 11.

- *Ejemplo Genérico*: cuando en la demostración se usa un ejemplo específico, visto como una característica representativa de su clase y hace explícitas razones abstractas para determinar la veracidad de una conjetura por medio de operaciones o transformaciones en el ejemplo. Se distinguen dos tipos de Ejemplos Genéricos:

    - *Analítico:* la demostración se basa en las propiedades observadas empíricamente en el ejemplo o en elementos auxiliares.

    - *Intelectuales:* cuando la demostración se basa en la observación empírica del ejemplo, pero utiliza principalmente propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.

- *Respuesta Fallida:* cuando los estudiantes usan estrategias empíricas para resolver un problema de demostración pero no logran conjeturar correctamente, o demostrar. O aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura o no se puede inferir nada de sus respuestas.

- **Demostraciones Deductivas,** Caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones metales y deducciones lógicas. Se distinguen tres tipos:

    - *Experimento mental: c*uando se usa un ejemplo específico para ayudar a organizar la demostración y dependiendo del experimento, las demostraciones pueden ser:

    - *Transformativo* se basan en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a determinar qué transformaciones son convenientes. Las transformaciones pueden basarse en imágenes mentales espaciales, en el hombre simbólico o en la construcción de objetos.

Estructurado son secuencias de deducciones lógicas derivadas de los datos del problema y definiciones de axiomas o teoremas aceptados. El papel del ejemplo (si se usa) es ayudar a organizar los pasos en las deducciones.

- *La deducción formal*: cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. Es, por lo tanto, el tipo de demostración matemática formal que se encuentra en el mundo de los investigadores de matemáticas. También podemos encontrar los dos tipos de demostraciones: El experimento mental, transformativo y estructural, ya definidos anteriormente.

- *Fallida*: cuando los estudiantes usan estrategias deductivas para resolver problemas de demostración pero no logran elaborar una conjetura correcta o elaboran una conjetura correcta pero fallan al proporcionar una justificación.

2.2.2.2 Argumentar. En Camargo[63], se plantea que el concepto de argumentar depende del escenario donde se dé. Uno durante la exploración, formulación y socialización de una conjetura, y el otro en el proceso de creación de su demostración. En el primero se refiere a “esgrimir razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad de un

---

[63] CAMARGO, Leonor. Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Valencia. España. 2010

enunciado, establecer un cierto grado de certeza de éste y postularlo como candidato para hacer una demostración"[64].

> Las razones o puntos de vista pueden ser manifestaciones verbales, visuales, numéricas o de cualquier índole. Una argumentación consiste de uno o más argumentos conectados coherentemente, pero no necesariamente deductivamente. En el segundo, se refiere a "esgrimir razones o puntos de vista, identificar enunciados o proponer referentes teóricos, en pro de una afirmación, con el objeto de buscar ideas que conformarán la demostración matemática del enunciado[65].

En las anteriores conceptualizaciones hay similitud con lo afirmado por Pedemonte[66] que dice que el primer paso en la argumentación es la expresión de un punto de vista y concluye a partir de cierto número de datos (Generaliza). El objetivo de argumentar es convencer[67] y de obtener la adhesión del interlocutor al buen fundamento de lo que se sostiene.

2.2.2.3 Conjeturar. "Las conjeturas matemáticas son proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas, son establecidas tras observaciones; éstas se suponen ciertas o no, pero no poseen una prueba ni refutación hasta el momento de su elaboración"[68.]

Boero[69], plantean que la conjetura es asumida como un proceso, el cual abarca la exploración de la situación problema, identificación de regularidades, identificación

---

[64] DUVAL, R. Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la Demonstration, citado por CAMARGO, Op cit. p. 52
[65] Ibíd., p. 52.
[66] PEDEMONTE, B. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematics, 2007, vol 66, pp23 - 41.
[67] FIALLO, Op. cit., p. 11.
[68] PARRA ZAPATA, Mónica Marcela, et al. Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 2010, no 29.
[69] BOERO, P. The approach to conjecturing and proving: cultural and educational choices Citado por PARRA ZAPATA, Op cit., p. 71.

de condiciones bajo las cuales tales regularidades ocurren, identificación de argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida, entre otros.

2.2.2.4 Explicar. Es la capacidad que tiene un estudiante para exponer la descripción del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando el porqué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento. Cuando los alumnos intercambian sus ideas y las sometan a críticas reflexivas, agudizan su habilidad para criticar y seguir los argumentos de otros. Así mismo, desarrollan una comunicación más clara y coherente de sus comprensiones utilizando explicaciones verbales, notaciones y representaciones matemáticas[70.]

2.2.2.5 Justificar. "Hace referencia a las actividades y procesos en los que el estudiante emplea argumentos matemáticos para validar los enunciados. Aquí se incluyen las pruebas y las demostraciones. Pero no siempre proceden de una demostración"[71.]

2.2.2.6 Generalizar. Mason expone que "la generalización es usualmente tomada como una actividad inductivamente empírica en la cual uno acumula muchos ejemplos y detecta el patrón"[72.]

---

[70] PARADA, Sandra-Evely; CONDE, Luis-Alexander y FIALLO, Jorge. Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. Boletim de Educação Matemática, 2016, vol. 30, no 56.
[71] PARRA ZAPATA, Op cit., p. 70.
[72] MASON, J. Expressing generality and roots of algebra citado por VILLA-OCHOA, Jhony. El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. Tecnológicas, 2006, no 16, p. 142.

"Y como cualquier proceso sugiere el desarrollo de una serie de habilidades (ver, decir, y registrar) que dan sentido a dicho proceso y en algunos casos se convierten en criterios para categorizar los distintos razonamientos que en él se pueden encontrar"[73]. Ver, hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación. Decir, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras esto que se ha reconocido. Registrar, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita[74].

2.2.2.7 Refutar. Lakatos dice:

> Las refutaciones matemáticas se dan cuando el estudiante debate con razones o argumentos una proposición que se quiere probar. Para ello debe exponer de una manera clara y precisa sus argumentos, las razones que lo apoyan, y concluir reafirmando su propia tesis. Entre las refutaciones aparecen los contraejemplos que son casos particulares de un enunciado, que debilita la cuantificación universal de un enunciado conjeturado por un estudiante[75].

2.2.3 Software de geometría dinámica, GeoGebra. En el libro de pensamiento geométrico y tecnologías computacionales se define un programa de geometría dinámica (SGD) como un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador y que el usuario puede agarrar con el ratón y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella76.

---

[73] Ibíd. p. 142.
[74] Ibíd. p. 142.
[75] LAKATOS, Irme. Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Citado por PARRA ZAPATA, Op cit., p. 72.
[76] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales, Op cit., p. 23.

Esta es la característica que le asigna su mayor potencialidad: La prueba del arrastre, y que a diferencia del dibujo a lápiz y papel, la construcción se hace dinámica, las figuras se mueven y sus propiedades están presentes en todas las posibles posiciones que tome. Esta posibilidad de visualización solo lo permite un entorno de Geometría Dinámica que debe tener "dos principios fundamentales: *dudar de lo que se ve, y ver más de lo que se ve*"[77].

En la internet son varios los SGD que se ofrecen, entre ellos GeoGebra que es de acceso libre y se utiliza en todos los niveles educativos. Apoya los procesos de enseñanza de las matemáticas de forma innovadora. GeoGebra juega un papel fundamental como recurso heurístico en cada una de las etapas que estructuran la estrategia

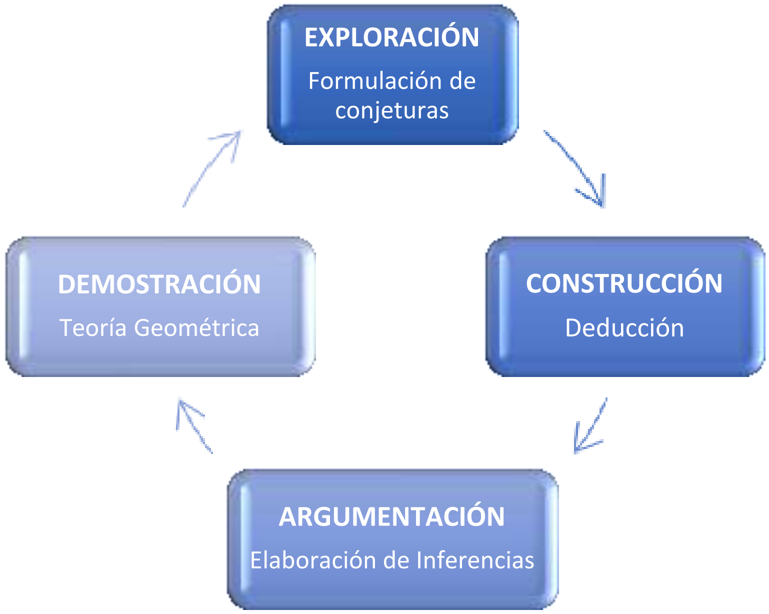
En este mismo documento del Ministerio de Educación, se pone de manifiesto que las construcciones geométricas realizadas en un SGD, permiten a los estudiantes superar las limitaciones de la percepción presentes en un dibujo y lograr una generalización a partir de las propiedades del mismo. A partir de su exploración y reflexión surgen o se organizan procesos deductivos, constituyéndose en la semilla de la argumentación que da pie a la demostración. Dicha exploración conduce de manera natural a la elaboración de conjeturas y validaciones, a la realización de predicciones. Esta experiencia sirve para desarrollar las habilidades mentales que posibilitarán acceder posteriormente al estudio formal de la geometría.

Para aprovechar al máximo el potencial del software, en actividades de validación, es necesario conjugar cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático. (Esquema 2)

---

[77] Ibíd., p. 2.

Esquema 2 Potencial de los SGD



La *exploración* surge al intentar enfrentarse a la solución de un problema y que da pie a la formulación de **conjeturas** para generar estrategias de solución, la *construcción*, pone en evidencia las propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la **deducción**, la *argumentación* se constituye en un mecanismo para validar afirmaciones dentro del contexto en el que se está trabajando, a partir de la **elaboración** de **inferencias** de carácter deductivo y *la demostración* con la cual, las proposiciones geométricas se incorporan a una **teoría geométrica**[78].

2.2.4 Fases de aprendizaje del modelo Van Hiele. Estas fases orientan el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel de razonamiento a otro. Dentro de este modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el

[78] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales, Op cit., p. 23.

estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente[79].

Las fases de aprendizaje son las siguientes:

- ***Fase de Información***: Se acerca (informa) al estudiante al nuevo tema a estudiar. Se parte de los conocimientos previos y de su nivel de razonamiento con respecto a dicho tema. Además, debe conocer los tipos de problemas que va a resolver, los métodos y materiales que se utilizarán.

- ***Fase de Orientación dirigida*:** Se guía al estudiante mediante actividades y problemas para que descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas del nuevo conocimiento, de manera progresiva.

- ***Fase de Explicitación***: El estudiante debe intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que ha obtenido, intercambiar sus experiencias y *discutir* sobre ellas con el docente y compañeros. Esto para afianzar el lenguaje técnico que corresponde al tema que se estudia. Esta fase no es fija y puede considerarse como una fase transversal a todas las fases de aprendizaje y presente en todas las actividades planteadas. Entonces puede no haber actividades diseñadas expresamente para esta fase.

- ***Fase de Orientación libre***: Aquí se consolida el aprendizaje pues el estudiante utiliza lo adquirido para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores, y tal vez, un poco más complejos, donde se planteen nuevas

[79] JAIME PASTOR, Adela. La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1994, vol. 1, no 1, p. 85-94.

relaciones o propiedades. El profesor debe limitar al máximo su ayuda al estudiante en la resolución de problemas.

- ***Fase de Integración***: se plantean actividades en las que el estudiante integra esos nuevos conocimientos con los que ya tenía. Los organiza. El docente puede presentar el resumen de los contenidos estudiados[80].

2.2.5 Mapas conceptuales Una de las prácticas que se observa en la enseñanza en general, es la transmisión de contenidos y para las necesidades de esta generación de estudiantes eso no es suficiente. Más aun cuando la desmotivación de ellos hace que ni siquiera contenidos quieran aprender.

Una manera creativa y realmente significativa de "almacenar" dichos contenidos es la utilización de los mapas conceptuales. Ausubel[81] afirma que ese almacenamiento debe llegar adecuadamente a la estructura cognitiva del estudiante para hacer uso de ellos en cualquier momento.

Un mapa conceptual es un organizador mental que según Novak y Gowin[82] tiene por objeto representar relaciones significativas entre conceptos, en forma de proposiciones, ayudan a organizar el conocimiento para organizarlos, y aunque su uso ha sido privilegiado en unas áreas del conocimiento más que en otras, hay investigaciones acerca de su uso en el área de matemáticas.

---

[80] Ibíd., p. 12.
[81] AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph Donal y HANESIAN, Helen. Psicología de la educación. México: Trillas, 1988.
[82] NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob. Aprendiendo a aprender. Trad. J. Campanario. Barcelona, España: Martínez Roca. Libros universitarios y profesionales. 1988

Por ejemplo, Pérez[83] integró los mapas conceptuales en un curso de cálculo a nivel universitario con lo que buscaba desarrollar destrezas de inducción y deducción. O Galán[84] quien le hizo un rastreo a investigaciones en este tema.

En esta investigación los mapas conceptuales se utilizan con el objetivo de visualizar todo un contenido, congruencia de triángulos, en una sola estructura adaptada para niños de 11 años.

2.2.6 Temática objeto de enseñanza. El contenido matemático alrededor del cual se desarrolló esta propuesta de investigación es el de Congruencia de Triángulos. Y para contextualizar, se inicia por recordar que:

- Un triángulo es la porción de plano limitados por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección son los vértices y se nombran con letras mayúsculas.
- Los segmentos determinados son los lados del triángulo.
- Los lados forman los ángulos interiores que se nombran por las letras de los vértices. El lado opuesto a un ángulo, se nombra con la misma letra pero en minúscula. Un triángulo tiene elementos: 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices[85].

---

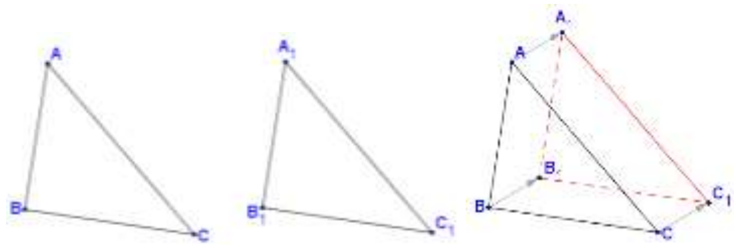
[83] PÉREZ, Mauricio. Un Marco para Pensar Configuraciones Didácticas en el Campo del Lenguaje, en la Educación Básica. En: La didáctica de la lengua materna. Estado de la discusión en Colombia. Bogotá. 2005.

[84] GALÁN, Eduardo. GRANELL, Ramón y HUERTA, Pedro. Los mapas conceptuales es la educación matemática: antecedentes y estado actual de la investigación [en línea]. VI Simposio de la SEIEM. 2002. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: http://funes.uniandes.edu.co/1403/1/Granell2003Los_SEIEM_225.pdf

[85] BALDOR, Aurelio. Geometría plana y del espacio. Vigésima reimpresión. México. Publicaciones Culturales. 2004. P. 54.

Pero ¿qué es congruencia de triángulos?

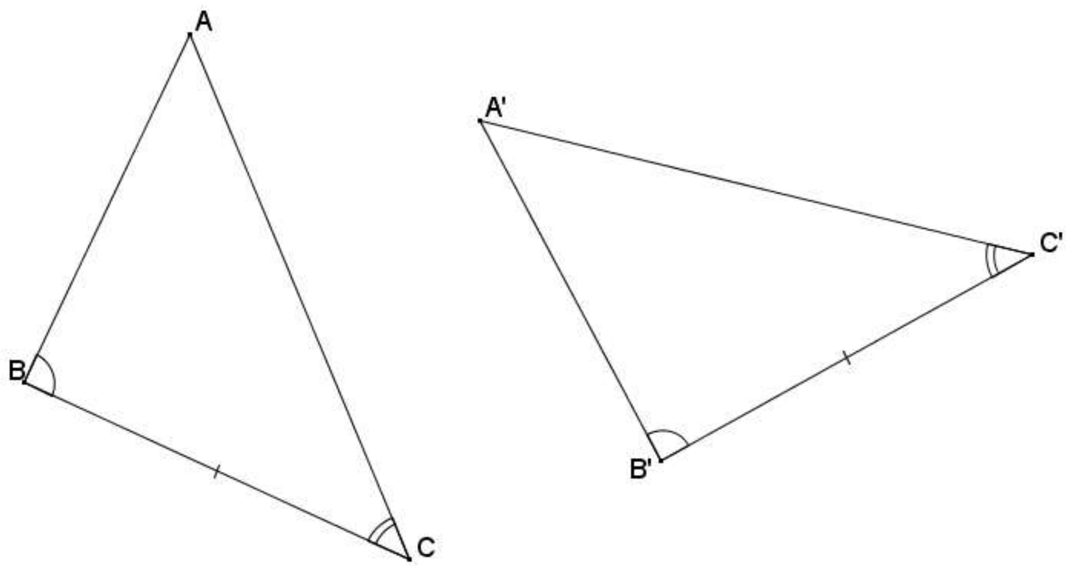
Dos triángulos son congruentes si superpuestos coinciden.



Criterios de Congruencia de Triángulos[86]:

- Dos triángulos son iguales (congruentes) si tienen un lado igual y respectivamente iguales los ángulos adyacentes a ese lado. Criterio ALA

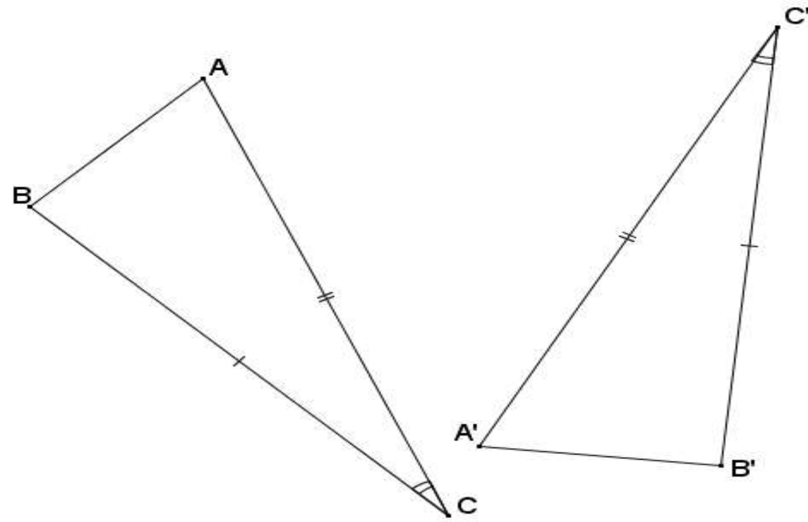
Figura 1. Criterio ALA



- Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, respectivamente iguales

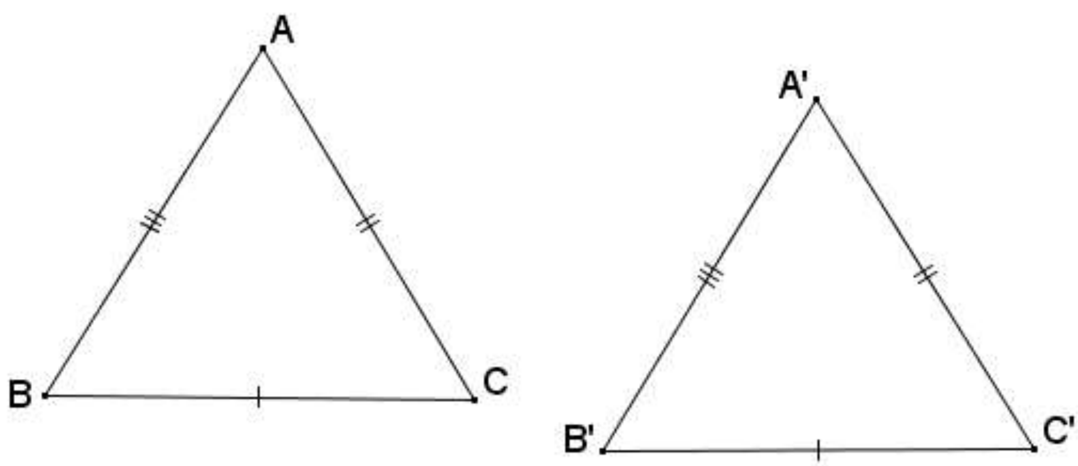
[86] Ibíd., p. 64

Figura 2. Criterio LAL



- Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados respectivamente iguales

Figura 3. Criterio LLL



2.3 MARCO LEGAL

Este trabajo de investigación se sustenta legalmente en la Constitución Política de Colombia de 1991 que en su artículo 67 expresa que la "Educación es un Derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura"[87].

Una educación con unos fines muy claros establecidos en la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, en su artículo 5°. Para esta investigación fue pertinente tener en cuenta de manera específica los siguientes:

> 5. La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.
> 7. El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones.
> 9. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.
> 13. La promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo[88].

Los objetivos de este estudio impulsan el cumplimiento de estos fines desde el aula de clase. Por ejemplo, el razonamiento no solo mejora para la clase de matemáticas, la constante petición al estudiante por parte del maestro de siempre

---

[87] ASAMBLEA NACIONAL CONSTITUYENTE. Constitución política de Colombia. 2da Ed. Legis. 1991. Art. 67.

[88] COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 115 de 1994(febrero 8): Ley General de educación. Diario Oficial No. 41.214 de 8 de febrero de 1994. Santafé de Bogotá, D.C.

justificar sus respuestas, podría convertirse en un hábito que trascienda a todas las áreas del conocimiento.

La verificación de los aprendizajes de los estudiantes se enmarca en la Ley 1290 de 2009, que en su artículo 3 señala los propósitos de la Evaluación entre ellos, "Identificar las características personales, intereses, ritmos de desarrollo y estilos de aprendizaje del estudiante para valorar sus avances"[89]. Este propósito se evidencia en el derecho que tiene el estudiante a "Ser evaluado de manera integral en todos los aspectos académicos, personales y sociales"[90].

El Ministerio de Educación Nacional desde su documento de Lineamientos Curriculares de 2008, invita a las instituciones a organizar el currículo de Matemáticas por Procesos, y para esta investigación se ha materializado en la práctica. Se ha hecho énfasis en el proceso de razonamiento; y resolución y planteamiento de problemas.

Así mismo, se tuvo en cuenta el documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para organizar la planeación en el aula.

En este estudio también ha sido marco de referencia legal, la coyuntura de que Colombia no tenga lugares privilegiados en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés). "La prueba de matemáticas está enfocada en determinar la habilidad de los estudiantes para

---

[89] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Decreto No. 1290 Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media. Art. 3.
[90] Ibíd., art. 12.

formular, usar e interpretar las matemáticas como herramienta para explicar y predecir eventos relacionados con la vida real”[91].

En este informe además se estima que dichos resultados dependen en gran medida del trabajo que realizan los docentes en el aula y que, “tanto padres como profesores pueden mejorar el desempeño de niños y jóvenes, desarrollando en ellos buenos hábitos de estudio y enseñándoles estrategias efectivas de aprendizaje, entre otros[92].

Por lo anterior, puede decirse que *Un ambiente GeoGebra, para potenciar el razonamiento matemático* es una de aquellas estrategias efectivas de aprendizaje.

---

[91] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. Síntesis de Resultados PISA [en línea]. 2015. [Citado el 13 de Febrero de 2017]. Disponible en internet: http://www2.icfesinteractivo.gov.co

[92] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. Resumen Ejecutivo Colombia en PISA 2015 [en línea]. Bogotá D.C., noviembre de 2016. [Citado el 13 de Febrero de 2017]. Disponible en internet: http://www2.icfesinteractivo.gov.co

3. METODOLOGÍA

3.1 ENFOQUE METODOLÓGICO

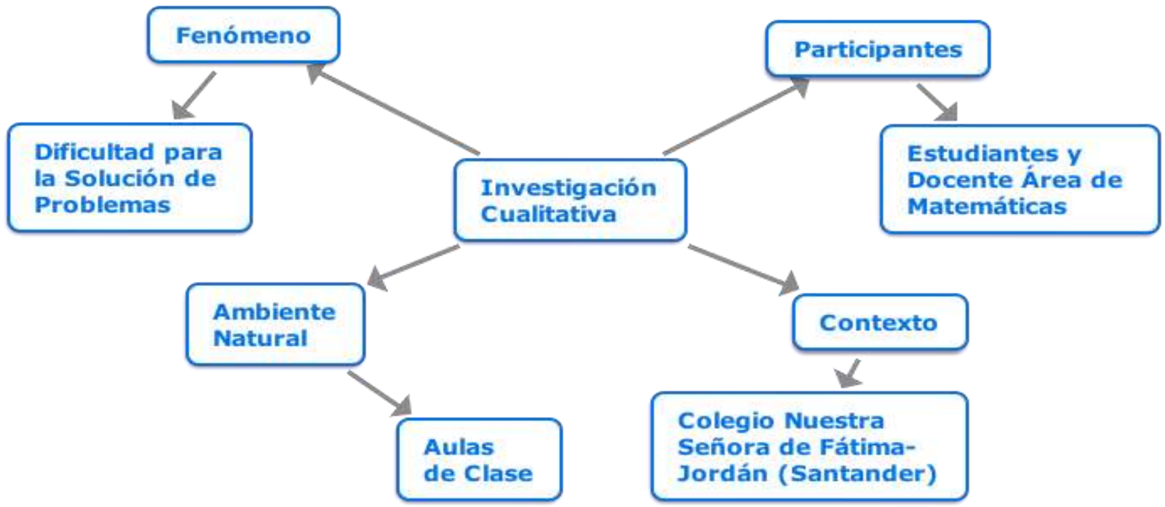
Esta investigación se realizó desde un enfoque Cualitativo, puesto que esta busca comprender y profundizar fenómenos desde la perspectiva de los participantes en su ambiente natural y en relación con el contexto[93].

El fenómeno abordado es la dificultad para solucionar problemas geométricos, desde el punto de vista de las habilidades del pensamiento, como el razonamiento, y del uso dado a las tecnologías computacionales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, con Software de Geometría Dinámica (SGD).

Participaron 27 estudiantes de grado sexto del colegio Nuestra Señora de Fátima, del municipio de Jordán y su docente del área de Matemáticas (investigadora), en su ambiente natural, sus espacios de aprendizaje en los que desarrollan habitualmente las clases.Lo expuesto, se visualiza en el esquema 3:

[93] HERNÁNDEZ, Roberto; HERNÁNDEZ COLLADO, Carlos; BAPTISTA, Pilar y CASAS PÉREZ, Luz. Metodología de la Investigación [en línea]. México: McGraw-Hill, 2014. [Citado 10 de marzo 2015]. Disponible en: https://books.google.com.co/books?id=llzVMRMlA28C&printsec=frontcover&source= gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

Esquema 3. Enfoque Cualitativo



Este estudio es cualitativo, también entre otros aspectos, porque es un proceso que se alimenta continuamente, de y en la confrontación permanente de realidades, donde las hipótesis no se preestablecen sino que emergen y evolucionan, y los hallazgos o descubrimientos se validan por consenso o por interpretación de evidencias[94].

3.2 DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación en el aula permite a los docentes desde su propia experiencia, identificar las problemáticas que aquejan su labor y realizar mejoras que transformen las prácticas educativas. Por esto, y en coherencia con los propósitos de esta investigación, el diseño metodológico utilizado fue el de Investigación Acción. Bajo este diseño, según Elliott[95] se realiza una reflexión sobre problemas

---

[94] SANDOVAL, Carlos. Investigación Cualitativa. Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social. Módulo 4. ICFES, 1996.

[95] ELLIOTT, Jhon. El cambio educativo desde la Investigación Acción [en línea]. Madrid: Morata S.L, 1993. p. 88. Disponible en: https://books.google.com.co/books?isbn=8471123835

prácticos cotidianos vividos por el profesorado y tiene como objeto, ampliar la comprensión de los docentes sobre ellos, para encaminar así, acciones que modifiquen esta situación.

Teniendo en cuenta el modelo propuesto por Elliott[96], se identifica una idea inicial, se reconoce la situación, se plantea un plan general, se desarrolla la primera fase de la acción, implementándola y supervisando la acción y sus efectos. Al finalizar el primer ciclo, se revisa la idea general y el plan propuesto para poder iniciar con la segunda fase de la acción, y así sucesivamente.

3.3 PARTICIPANTES Y ESCENARIOS

El reconocimiento del contexto es fundamental en cualquier investigación, dado que la recolección de los datos ocurre en el ambiente natural y cotidiano de los participantes[97]. El escenario donde El *Razonamiento Matemático en un ambiente de Geometría Dinámica* se llevó a cabo, es la sede A de este colegio oficial rural de Santander, ofrece todos los grados desde preescolar hasta undécimo a 160 estudiantes de nivel socioeconómico 1 y 2. Desde su creación, ya son quince promociones, aproximadamente 100 estudiantes graduados han salido a ser parte de una sociedad productiva, sin embargo, la relación de número de egresados – número de profesionales, no ha sido significativa. En el proyecto de vida de muchos de estos jóvenes no es prioridad continuar sus estudios universitarios. Esta situación es un factor que ha influido considerablemente en el rendimiento académico de sus estudiantes y por esto la institución posibilita acciones que promuevan cambios positivos con respecto a esta realidad como es el caso de esta investigación.

---

[96] Ibíd., p. 88.

[97] HERNÁNDEZ, Op. cit. p. 134.

Para el caso de este estudio cualitativo, se tomó una población de 27 estudiantes de Sexto grado (10 niñas y 17 niños) del año escolar 2016 y cuyas edades oscilan entre los 11 y 12 años, provenientes de seis escuelas diferentes donde realizaron quinto de primaria. Esta población fue tomada de forma no probabilística, pues no se busca generalizar resultados y además, se deja abierta la posibilidad de ajustarla en cualquier momento del estudio dado a la capacidad de recolección y análisis, y a la saturación de categorías; la selección fue realiza por *conveniencia*[98], ya que la docente investigadora tiene el acceso y la disponibilidad permanente con el grupo en este año escolar: 2016, y para dar continuidad en los grados escolares siguientes.

3.4 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Tomando como punto de partida el hecho que los medios de generación y recolección de información, en cada una de las etapas de la investigación cualitativa no son iguales[99], y con el objeto de recolectar la mayor información con miras a concretar los objetivos de este estudio, se utilizó las siguientes técnicas e instrumentos:

Tabla 1. Técnicas e instrumentos

Técnica	Instrumento
Observación Participante	**Diario de Campo.**
Cuestionario	**Test de Diagnóstico y Prueba Final**
Análisis de documentos	**- Fichas de trabajo de los estudiantes.** **- Grabaciones de audio y video.**
Secuencia Didáctica	**Secuencia Didáctica.**
Entrevista Semiestructurada	**Entrevista**

[98] HERNÁNDEZ, Op. cit. p. 134.
[99] SANDOVAL, Op. cit. p. 14.

- **Observación Participante:**

En este estudio, el docente investigador también cumple la función de ser el docente de aula y "debe combinar la profunda implicación personal con cierto distanciamiento"[100]. Por esto el registro de lo observado, se realizó con la mayor objetividad en el *diario de campo*, con el apoyo de grabaciones de video, puesto que el tiempo en clase no permitía tomar el mayor número de observaciones, y percepciones más específicas y pertinentes al estudio.

- **Cuestionario**

Se trata de un test escrito administrado en grupo. Los 27 estudiantes reunidos en su aula de clase, respondieron a 20 preguntas cerradas de las cuales 10 se complementaron con su justificación, es decir, también eran abiertas. El cuestionario fue aplicado con el fin de identificar los contenidos geométricos que poseen los estudiantes del grado sexto, su nivel de razonamiento y las dificultades que presentan para resolver problemas de tipo geométrico, al inicio y al final de la intervención (ver Anexo B).

- **Análisis de documentos:**

  - *Grabaciones en video*: Como se dijo líneas atrás, casi todas las sesiones de clase fueron grabadas como apoyo a la observación participante; de estas grabaciones se usaron sus transcripciones para realizar el análisis respectivo. Este es un material es válido y fiable para su posterior interpretación y reinterpretación[101].

---

[100] CARRERAS, Juan Sáez. El educador social. EDITUM, 1993. P. 286.
[101] MCKERNAN, James. Investigación – Acción y curriculum. Métodos y discursos para profesionales reflexivos. Madrid: Morata, 1996, p. 199.

- *Capturas de pantalla en video:* el trabajo realizado en GeoGebra en cada uno de los computadores fue capturado mediante el software *aTube Catcher,* este, manipulado por los mismos estudiantes. Por ello, luego de revisar los videos se evidencia el daño de algunos. Situación que no impidió realizar análisis pues el material obtenido fue suficiente.

- *Fichas de trabajo de los estudiantes:* fueron el producto de once de las actividades realizadas por los 27 estudiantes, algunas realizadas de forma individual, otras, de forma grupal. Estas fueron escaneadas y luego transcritas para su correspondiente análisis.

- **Secuencia Didáctica:**

Pérez[102] considera una secuencia didáctica como una organización de acciones e interacciones relacionadas entre sí, intencionales, orientadas al aprendizaje que permiten identificar sus propósitos, sus condiciones de inicio, desarrollo y cierre, los procesos y resultados involucrados. Sin embargo, una secuencia no es necesariamente lineal ni de carácter rígido.

Teniendo en cuenta lo anterior y las fases de aprendizaje del modelo de razonamiento de Van Hiele, se realizó el diseño de la secuencia didáctica *Un ambiente GeoGebra, ¡para potenciar el razonamiento matemático!*

Estas fases orientan el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel de razonamiento a otro. Aunque éste no es el propósito de la secuencia, sí se

[102] PÉREZ, Mauricio, Op cit. p. 12

aprovecha el potencial que las fases promueven. Para el caso específico de este estudio, las actividades de la Secuencia Didáctica aplicada fueron diseñadas para potenciar habilidades específicas del proceso de Razonamiento como la conjetura y la justificación. Estas fases de aprendizaje de Van Hiele son explicadas en el marco teórico.

3.5 ASPECTOS ÉTICOS

Teniendo en cuenta los criterios éticos establecidos en McKernan[103] esta investigación cuenta con el aval de la institución donde se desarrolló. Partiendo de ello, se informó a los estudiantes del grado a estudiar sobre algunas generalidades del proyecto, estos a su vez transmitieron el mensaje a sus padres quienes dieron su consentimiento (Ver anexo C) para la utilización de la información obtenida.

Por otra parte, con el fin de proteger los derechos de los participantes y garantizar la confidencialidad de los datos obtenidos a través de los instrumentos, no se utilizaron los nombres propios de los estudiantes. Se codificaron con la letra E y un número aleatorio entre 1 y 28. El estudiante E23 fue retirado de la institución. Los archivos generados fueron guardados en discos compactos y entregados a la Universidad.

3.6 PROCESO METODOLÓGICO.

Teniendo en cuenta el modelo de Elliott[104], que tiene como punto de partida el modelo cíclico de K. Lewin (Planificación, identificación de hechos y ejecución), esta investigación fue realizada en tres momentos: Planificación, en el que se

---

[103] Ibíd., 199
[104] ELLIOTT, Op cit. p. 88.

diseñó el diagnóstico y la estrategia; acción o intervención en el aula, y evaluación de la acción o la reflexión.

3.6.1 Planificación. Este proceso se llevó a cabo en tres etapas:

- **Etapa 1: Documentación.** En esta etapa se realizó la búsqueda de la documentación relacionada con el objeto de estudio, en este caso, sobre “El Razonamiento Matemático en un ambiente de Geometría Dinámica”. A partir de esta búsqueda, se establecieron las bases para llevar a cabo la etapa de diagnóstico.

- **Etapa 2: Diagnóstico:** Se aplicó una prueba tipo *Test*, adaptada por Fiallo[105] cuya estructura, de 20 preguntas, permite establecer el nivel de razonamiento del estudiante, teniendo en cuenta que cada nivel se apoya en el anterior, es decir, que no es posible encontrarse en nivel 2 sin la capacidad de razonamiento del primer nivel (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Tabla 2 Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Fuente: GUTIÉRREZ, Angel y JAIME, Adela. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional.

[105] FIALLO, Jorge. El Modelo de Van Hiele en la Enseñanza de los deslizamientos en el Plano de la Geometría de Sexto Grado. Tesis Maestría en matemáticas. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 1996.

Además se estableció el estado en que se encontraban los conocimientos geométricos (Saberes previos). De este test, se seleccionaron 6 preguntas que debían *justificarse*, es decir, cada estudiante explicaba el porqué de su respuesta. Así se identificaron los tipos de razonamiento que presentaban. Los estudiantes fueron informados con anticipación de la manera en que se desarrollaría la investigación, y sus padres dieron su consentimiento.

Para la aplicación del diagnóstico, se reunieron los 27 estudiantes en su aula de clase y se les explicó que este no afectaría su desempeño académico en el área de Matemáticas. La prueba no estuvo condicionada al tiempo, porque interesaba que fuera terminada totalmente; para ello los estudiantes gastaron entre dos horas y media y tres horas, en dos días diferentes.

Para el análisis del diagnóstico, los estudiantes fueron codificados desde E1 hasta E27, y sus respuestas, transcritas y organizadas en tablas. Luego se establecieron las categorías. Este análisis se presenta en el capítulo siguiente.

El test aplicado en el diagnóstico también fue aplicado al finalizar la intervención, con el fin de hacer un seguimiento del progreso o no del proceso de razonamiento de los estudiantes, objetivo de esta investigación.

- **Etapa 3: Diseño de la Estrategia.** Teniendo en cuenta los resultados de la prueba diagnóstica, se diseñó una secuencia didáctica (Ver Anexo E) basada en el enfoque de Resolución de Problemas y desarrollada en un ambiente mediado por GeoGebra. Fue organizada teniendo en cuenta las fases de Aprendizaje del modelo de razonamiento de Van Hiele; estas orientan el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel de razonamiento a otro. Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente[106]. Sin embargo, este no es el propósito de esta secuencia, ya que lograr el paso de un nivel inferior a uno superior en un tema puede requerir de muchas actividades que posiblemente duren todo el año escolar Las fases se tuvieron en cuenta como una forma didáctica de organizar las actividades en cinco momentos para abordar los criterios de congruencia de triángulos.

Estas fases fueron ya expuestas en el numeral 2.4 *de* este documento y cada una de ellas fue analizada, se observó el tipo de razonamiento matemático utilizado por los estudiantes teniendo en cuenta las categorías de demostración establecidas.

Por otra parte, el planeamiento de las actividades de la Secuencia en cada una de las fases contienen implícitamente lo citado por el MEN en su documento Lineamientos Curriculares, con respecto a que el Razonamiento tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar[107].

---

[106] GUTIÉRREZ, op. cit., p. 12.
[107] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas, Op. cit., p. 24.

3.6.2 La intervención en el aula. Durante tres meses se realizó la observación de los estudiantes inmersos en la aplicación de la Secuencia Didáctica, *"Un ambiente GeoGebra, para potenciar el razonamiento matemático"*. La secuencia se aplicó con el fin de que, con la mediación de GeoGebra, se potenciara el Razonamiento de los estudiantes y así procurar superar las dificultades en el proceso de resolución de problemas en la institución.

Hubo actividades en las que se necesitó más tiempo por sesión debido a que el traslado de los computadores portátiles desde el aula de informática hasta el salón y viceversa, y su distribución entre los estudiantes, requerían un poco más de tiempo.

Cada estudiante trabajó en un computador en forma individual y a la vez en un grupo de trabajo de 4 integrantes. La mayoría de las actividades se trabajaron en los mismos grupos, otras en forma individual. Las sesiones fueron grabadas con la cámara web de un computador y el trabajo individual fue capturado en cada uno de los equipos portátiles con el programa libre "aTube Catcher". En algunas actividades se hicieron grabaciones de audio con el grabador de sonidos de los portátiles. El trabajo de los estudiantes se realizó en computadores portátiles con el uso del Software de Geometría Dinámica GeoGebra y en guías de trabajo escrito.

3.6.3 Evaluación de la acción. De acuerdo con Hernández[108] la aproximación cualitativa evalúa el desarrollo natural de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación de la realidad. Por esto, la secuencia fue en sí misma una constante evaluación, en cada fase, en cada sesión, desde el punto de vista de la docente investigadora.

---

[108] HERNÁNDEZ, Op. cit. p. 134.

Para conocer el punto de vista de los estudiantes, al finalizar la aplicación se realizó una entrevista (Anexo M) a cada grupo, cuyo análisis se condensa en el capítulo de conclusiones

4. ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta el objetivo de este estudio cualitativo, en este capítulo se realiza un análisis sobre cómo los razonamientos de los estudiantes, evidenciados desde la aplicación de la prueba diagnóstica, son potenciados con la intervención (secuencia didáctica) apoyada con el software GeoGebra. Así mismo, se analiza la prueba final y se detallan algunas variaciones que favorecieron o no, el proceso de Razonamiento.

4.1 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

A partir de las respuestas suministradas por los estudiantes, se establecieron los contenidos geométricos que poseen, se determinó su nivel de razonamiento y se distinguieron los tipos de razonamientos que poseen. Así se ubicaron en el sistema de categorías de análisis, propuesto por Fiallo[109] y expuesto en el marco teórico.

El test aplicado estaba estructurado en cinco bloques temáticos (paralelismo, perpendicularidad, polígonos, ángulos y triángulos) de cuatro preguntas cada uno, para un total de 20 preguntas. Se pidió a los estudiantes justificar algunas de las preguntas.

Para la organización de la información obtenida, una a una, las respuestas fueron leídas en cada bloque de preguntas, se registraron los datos en una hoja de Excel y se asignaron colores de acuerdo al nivel de razonamiento en que se ubicaban según el test. (Ver anexo D)

[109] FIALLO, Op. cit., p. 11.

Así, si el estudiante (E) respondió correctamente las cuatro preguntas del bloque, se considera que se encuentra en el nivel de Deducción Formal; si son correctas la pregunta 1, 2 y 3, su nivel es de Deducción Informal; con 1 y 2 correctas, su nivel es de Análisis y si 1 es correcta, se ubica en nivel de Reconocimiento. La docente investigadora consideró que de no responder correctamente a ninguna de las preguntas, quiere decir que el estudiante aún no alcanza el nivel. Esto se sintetiza en el siguiente cuadro.

Tabla 3. Colores que describen el nivel de razonamiento

Responde correctamente a todas las preguntas	DEDUCCIÓN FORMAL
Responde correctamente las tres primeras preguntas	DEDUCCIÓN INFORMAL
Responde correctamente las dos primeras preguntas	ANÁLISIS
Solo responde bien la primera pregunta	RECONOCIMIENTO
Todas las respuestas son incorrectas	NO ALCANZA NIVEL

En el anexo D se muestran una a una las preguntas y sus respuestas.

De esa organización se permitió establecer los niveles de razonamiento que poseen los estudiantes y la estructura conceptual (conceptos geométricos) con la que cuentan y que es la base con la que se inicia esta investigación.

4.1.1 Niveles de Razonamiento del grado Sexto

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
Paralelismo	DF	DF	NA	DI	NA	DF	DF	NA	A	DI	NA	NA	DF	R
Perpendicu-laridad	DF	DF	NA	NA	NA	DF	NA	DF	NA	NA	NA	NA	A	NA
Ángulos	R	NA	R	NA	NA	DI	DI	A	R	NA	R	A	R	R
Polígonos	A	DF	A	A	A	A	R	R	A	A	A	R	R	DF
Triángulos	DI	DI	DI	NA	DI	R	R	A	DI	R	A	A	DF	R

DF: Deducción Formal; **DI**: Deducción informal; **A**: Análisis; **R**: Reconocimiento; **NA**: No alcanza Nivel

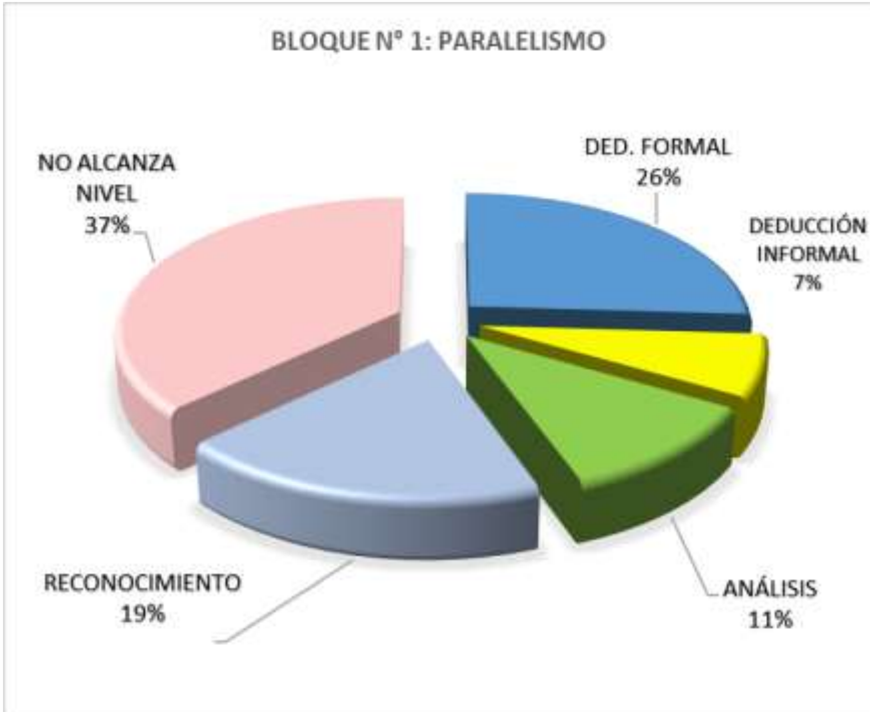
	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
Paralelismo	NA	R	R	A	NA	NA	NA	A	R	DF	DF	R	NA
Perpendicu-laridad	R	NA	NA	DF	NA	NA	NA	NA	NA	DF	DF	NA	NA
Ángulos	R	A	R	R	R	NA	A	A	R	DF	DI	R	NA
Polígonos	A	A	R	R	A	R	R	DF	R	A	DF	R	R
Triángulos	A	R	R	DF	R	R	R	R	R	R	A	R	NA

DF: Deducción Formal; **DI**: Deducción informal; **A**: Análisis; **R**: Reconocimiento; **NA**: No alcanza Nivel

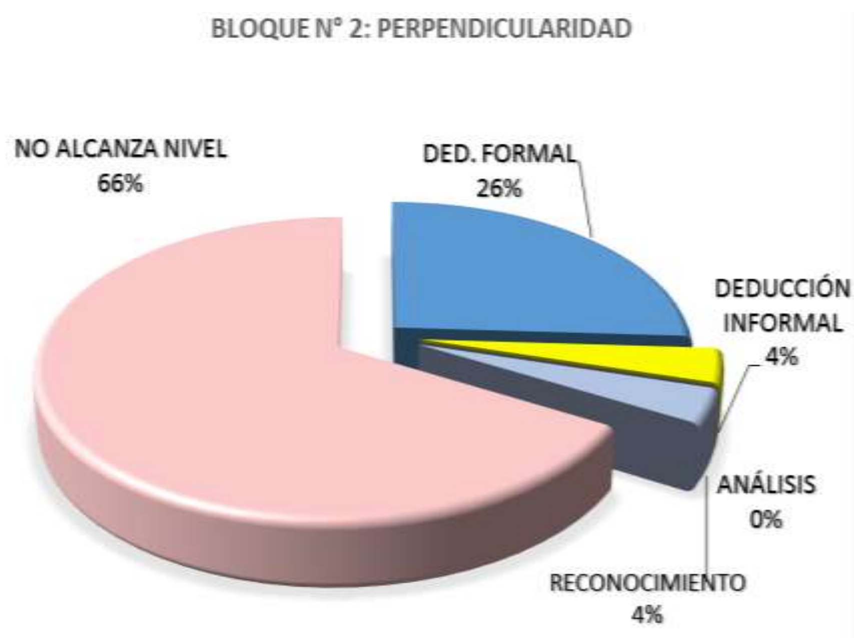
Se puede establecer que la mayoría de los estudiantes del grado sexto se encuentran en nivel 1 (reconocimiento) y 2 (análisis). Sin embargo, preocupa el hecho que un porcentaje muy significativo de estudiantes (37%), no cuentan con una base conceptual sólida en el área de Geometría puesto que no alcanzan Nivel en dos o más bloques temáticos propuestos, frente a los estudiantes que en todas las temáticas alcanzan nivel (20%).

En términos de porcentajes estos resultados se muestran en las gráficas 1 a 5:

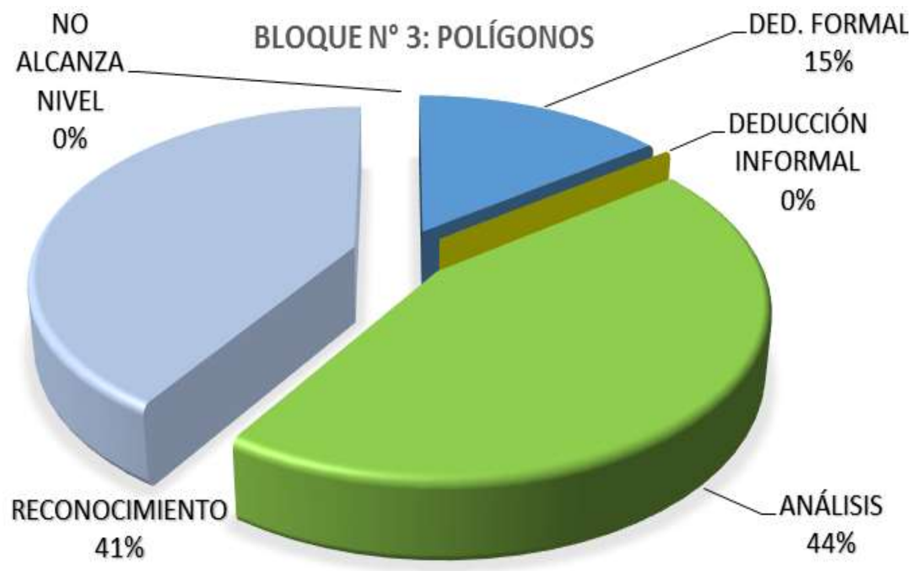
Gráfica 1. Bloque No. 1 Paralelismo



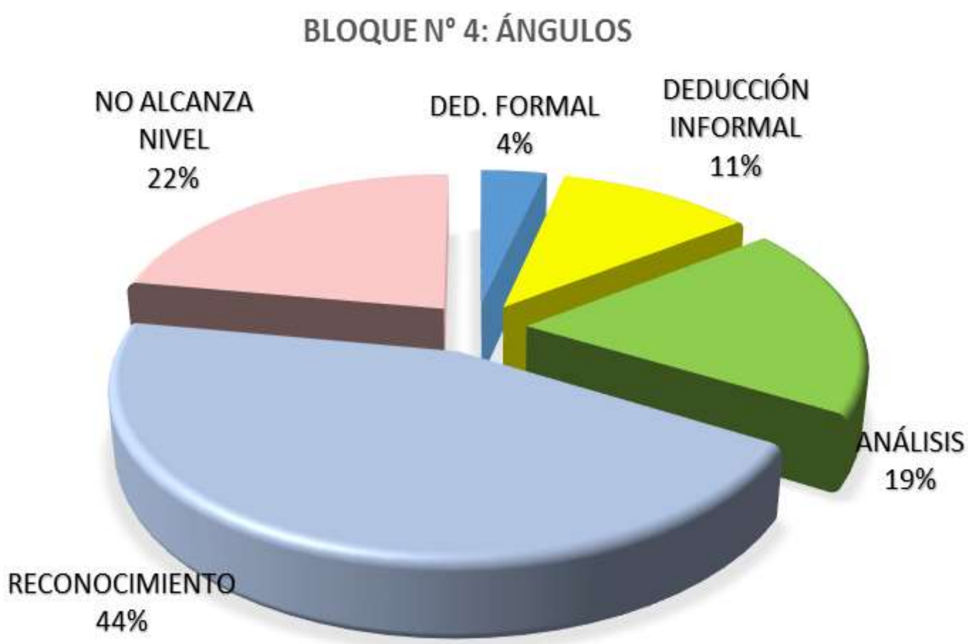
Gráfica 2. Bloque No. 2 Perpendicularidad



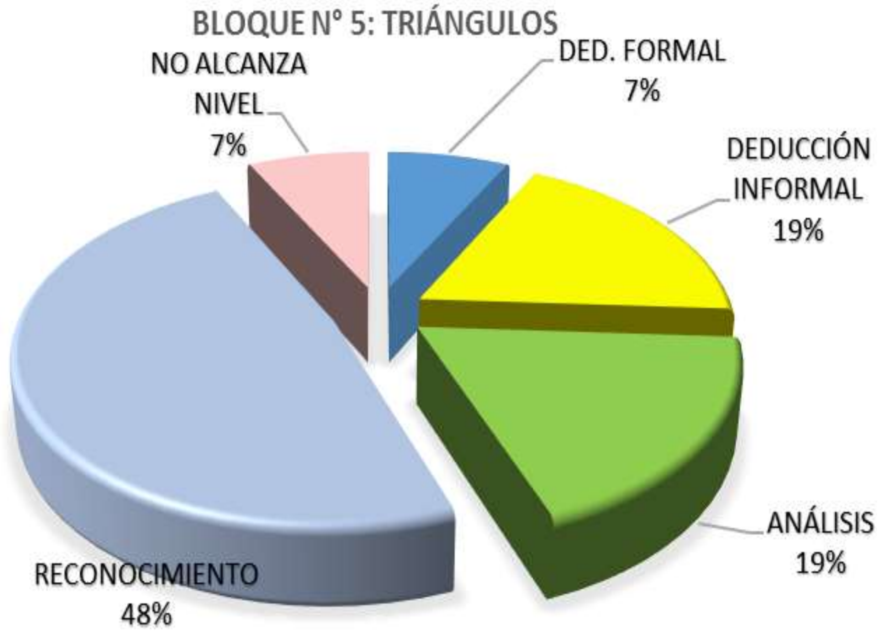
Gráfica 3. Bloque No. 3 Polígonos



Gráfica 4. Bloque No. 4 Ángulos



Gráfica 5. Bloque No. 5 Triángulos



4.1.2 Estructura conceptual. Los resultados de la prueba aplicada evidencia gran debilidad en los contenidos geométricos tratados, particularmente “paralelismo” y “perpendicularidad”, donde es mayor el porcentaje de estudiantes que no alcanzan un nivel de razonamiento. También, se observa menor debilidad en la temática “polígonos” porque todos los alumnos tienen algún nivel de razonamiento concentrados en los dos primeros niveles (85%), y la temática “triángulos” porque solo dos estudiantes no alcanzan nivel, y un 67% está en los dos primeros niveles.

Es de anotar con mayúscula, que la estructura conceptual con que cuentan los estudiantes del grado sexto de este colegio rural, (se anotó en el numeral 4.1.1), es muy débil. Es por eso que, la intervención (Secuencia Didáctica) que se propuso, NO se basó en las grandes debilidades, sino atendiendo a aquellos contenidos donde hay mayor fortaleza y donde se infiere mayor homogeneidad de grupo. Además porque se tuvo en cuenta el tiempo destinado para la intervención.

4.1.3 Razonamientos de los estudiantes. El test aplicado en este diagnóstico está estructurado de tal forma que cada pregunta determina un nivel específico de razonamiento (según el modelo de Van Hiele), y según las justificaciones a las respuestas dadas, se determina el tipo de demostración que presentan según Fiallo[110]. Esto se resume en el siguiente cuadro:

Tabla 4. Demostraciones esperadas

N° Pregunta	Nivel que determina (Modelo Van Hiele)	Tipo de demostración esperado (Fiallo, 2011)
1, 5, 9, 13, 17	Reconocimiento	No hay demostración
2, 6, 10, 14, 18	Análisis	•Empírico Ingenuo •Experimento crucial basado en ejemplo •Experimento crucial constructivo •Ejemplo Genérico Analítico
3, 7, 11, 15, 19	Deducción Informal	•Ejemplo Genérico Intelectual •Experimento mental transformativo •Experimento mental Estructurado
4,8,12,16,20	Deducción Formal	•Deductiva Formal Transformativa •Deductiva Formal Estructurada

Es por lo anterior que en coherencia con el modelo de Van Hiele, las respuestas 1, 5, 9, 13, 17 no son analizadas pues en el nivel de Reconocimiento no hay razonamientos, los estudiantes no realizan demostraciones (Gutiérrez, 2007). Por otra parte, las preguntas del test que más se ajustan a un enfoque de resolución de problemas y que permiten un mayor análisis por parte del estudiante para establecer conjeturas y demostrarlas son las 4, 8, 12, 16 y 20. Entonces se analiza a los estudiantes que alcanzaron el nivel de Deducción Formal (Ver anexo F), es decir, a quienes respondieron correctamente las cuatro preguntas de un bloque temático. De esta manera se valoran y destacan los razonamientos utilizados por los estudiantes del grupo estudiado, y se caracterizan teniendo en cuenta los tipos de demostraciones propuestos por Fiallo[111]:

[110] FIALLO, Op. cit., p. 11.
[111] FIALLO, Op. cit., p. 11.

Resultados de la Pregunta N° 4

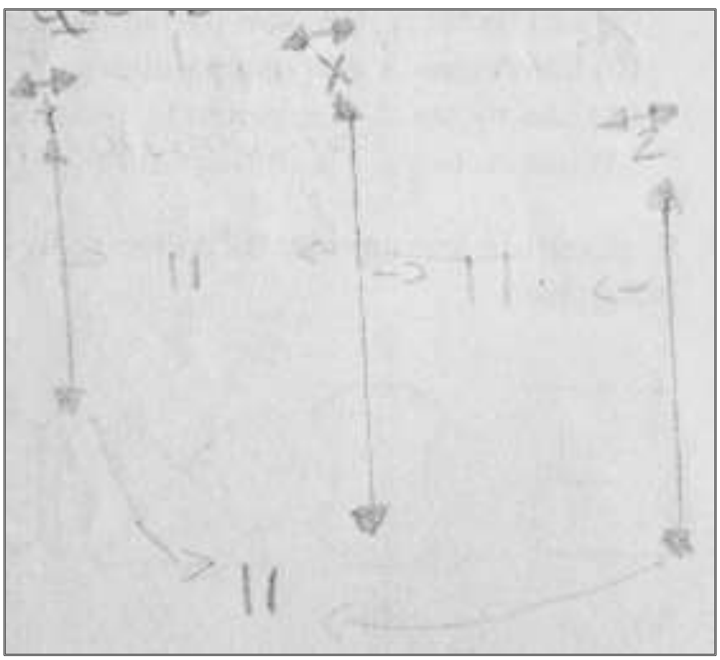
Si la recta t es paralela a la recta x y la recta x es paralela a la recta z se puede decir que:

(a) Las rectas t y z son perpendiculares.
(b) Las rectas t y z se cortan.
(c) Las rectas t y z son paralelas.
(d) Las rectas t y z forman un ángulo de 45º.

En esta pregunta, 7 de los 27 estudiantes alcanzaron el nivel de Deducción Formal. La manera como explicaron sus respuestas es variada. Así por ejemplo:

E1 realiza un gráfico (ilustración 1) donde evidencia su interpretación del enunciado. En su justificación enuncia una propiedad de las rectas paralelas que extrae a partir de lo que ve: Si $t \parallel x$ y $x \parallel z$ entonces $t \parallel z$

Ilustración 1. Dibujo realizado por E1



El tipo de demostración del estudiante es un Experimento Crucial Constructivo.

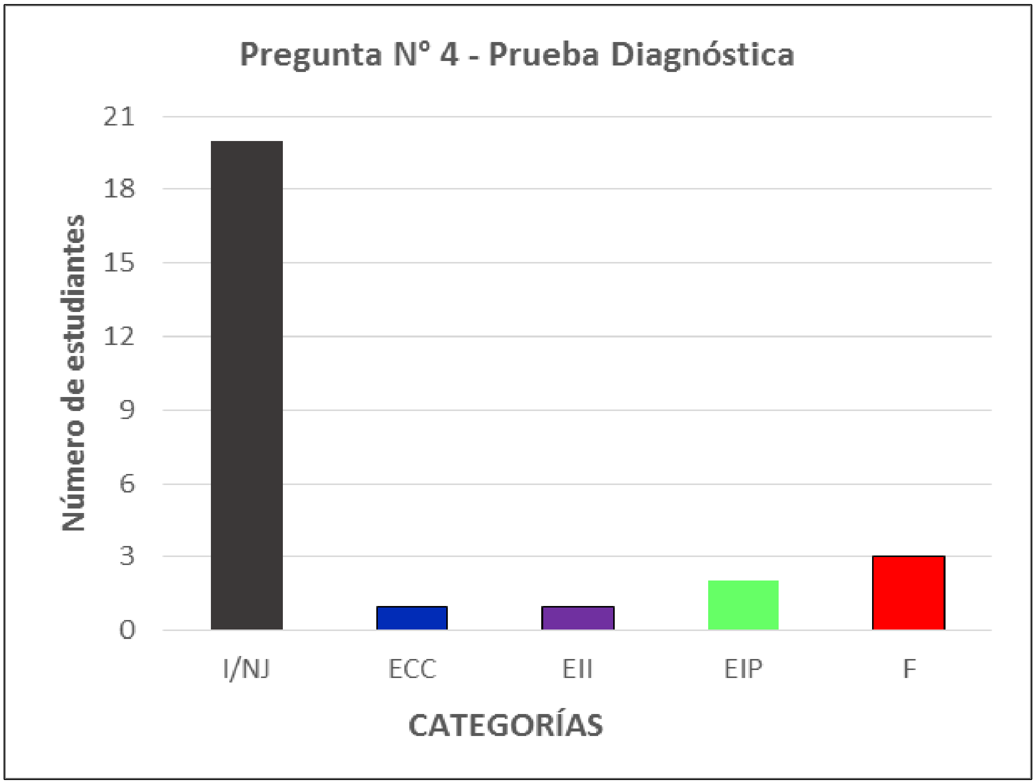
E25 por su parte, generaliza esta misma propiedad, utiliza simbología propia del tema pero no permite evidenciar cómo la obtuvo: "$t \parallel x$ *y* $x \parallel z$, $z \parallel t$". La docente investigadora infiere que no es producto del recuerdo ya que en este grado no se ha visto esta propiedad. El estudiante realiza una demostración de tipo Empirismo Ingenuo Inductivo (EII).

E13 y **E26**, enuncian propiedades de las rectas paralelas de manera suelta sin mayor explicación. Es por esto que se determina que sus demostraciones son de tipo Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP)

E6 en cambio, repite la respuesta seleccionada sin realizar alguna justificación: *"t y z son paralelas"*, **E7**, en su intento por justificar presenta una idea que no es coherente con la pregunta o no evidencia de dónde la obtiene: *"La recta t y z son paralelas porque haci las veamos horizontales o verticales nunca se van a cortar",* y **E2** es incoherente en su explicación: *"Se quedan a la misma distancia y cada vez se van ajuntando y se choca".* Estos tres estudiantes se ubican en el tipo de demostración Deductiva Fallida (DF).

En la gráfica 6 se presenta el resumen de los resultados a la pregunta 4.

Gráfica 6. Resultados Pregunta No. 4 Prueba Diagnóstica



Resultados de la Pregunta N° 8

Si las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t se puede decir que :

(a) Las rectas *x* y *s* son perpendiculares.

(b) Las rectas *x* y *s* son paralelas.

(c) Las rectas *x* y *s* tienen la misma distancia.

(d) Las rectas *x* y *s* forman un ángulo de 45º

La mayoría de los estudiantes (20) erraron a esta pregunta y solo 7 alcanzaron el nivel. Sin embargo, sus justificaciones dejan entrever inseguridad, no hay coherencia. Es un intento Fallido por realizar su demostración. Solo E27, trata de explicar y lo hace partiendo del enunciado e infiriendo la respuesta. Por esto su demostración es de tipo Empirismo Ingenuo Inductivo (EII).

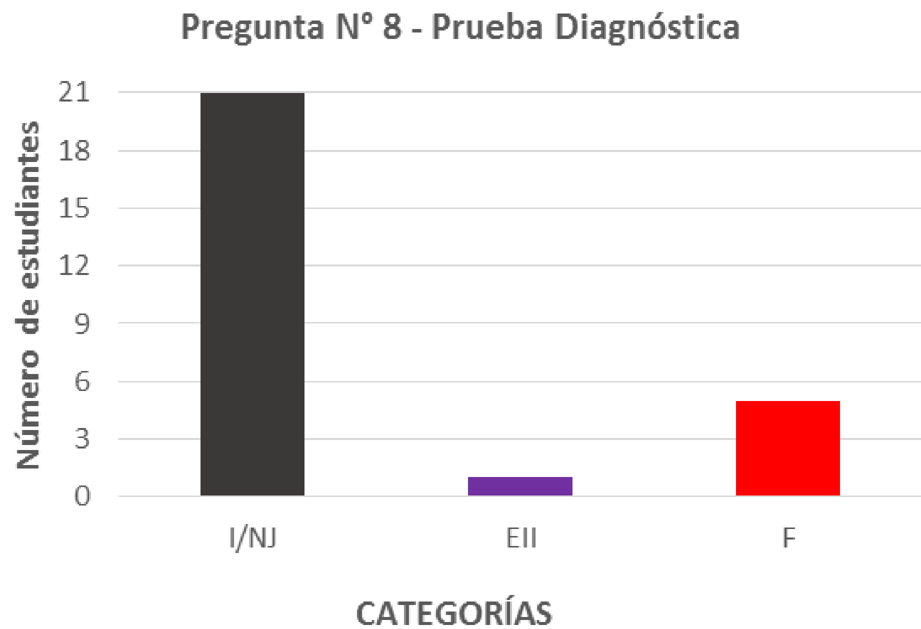
En la gráfica se muestran las justificaciones dadas y el tipo de demostración que presentan.

Tabla 5. Justificaciones pregunta N° 8

Cód.	**Justificación**	Dem
E_1:	La recta *x* se cortaría con la *s*	F
E_2:	Porque al pasar por la recta *t* se hacen perpendiculares	F
E_6:	Porque un recta perpendicular y una paralela forman un ángulo de 90° grados	F
E_8:	No justificó	I/NJ
E_{18}:	Pues yo escogí la mejor y me gustó	F
E_{26}:	Si t y z son perpendiculares z y t son perpendiculares también	F
E_{27}:	Porque en la pregunta se dice que las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t por lo tanto también es perpendicular a la recta s.	EII

Y en general, el panorama que refleja esta pregunta es el que se muestra en la siguiente gráfica:

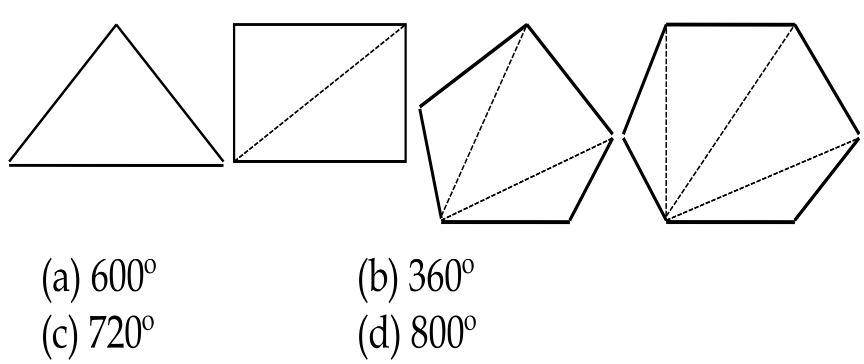
Gráfica 7. Resultados Pregunta No. 8 Prueba Diagnóstica



Resultados de la Pregunta N° 12

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados; la de un cuadrilátero es 360 grados; de un pentágono es 540 grades, de un hexágono es:

Ilustración 2. Pregunta N°. 12



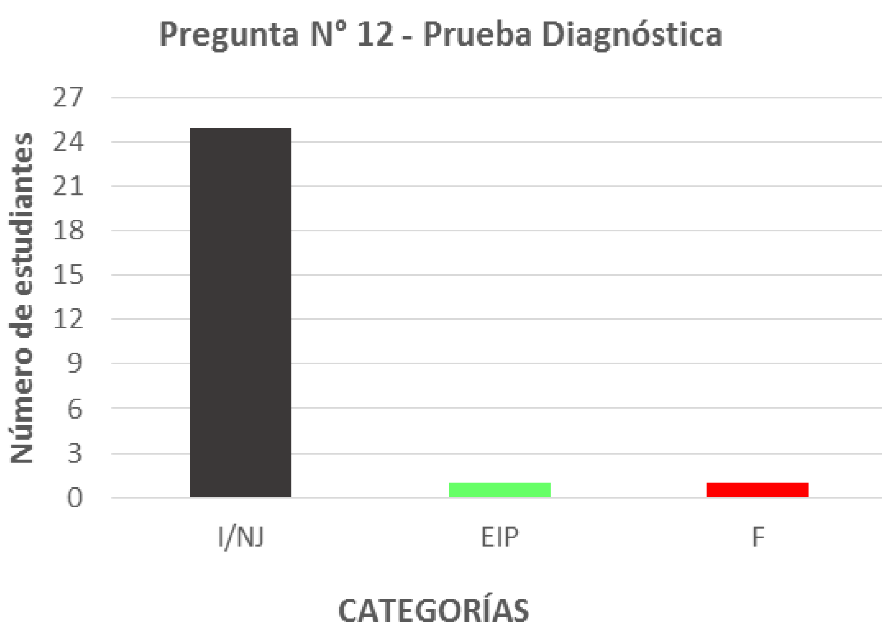
Según el modelo de Van Hiele, el estudiante que responde correctamente a esta pregunta, evidencia el nivel de Deducción Formal en la temática Polígonos. Se destaca que solo 4 estudiantes alcanzaron este nivel y a pesar de esto, en las respuestas se evidencia gran debilidad en sus explicaciones. Solo E_2 interpreta el enunciado de la pregunta y generaliza una secuencia, aunque no lo expresa tan fluidamente como se quisiera en este nivel. E2 realiza una demostración tipo Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP).

Así las cosas, esta pregunta tuvo estos resultados:

Tabla 6. Respuestas Pregunta N° 12

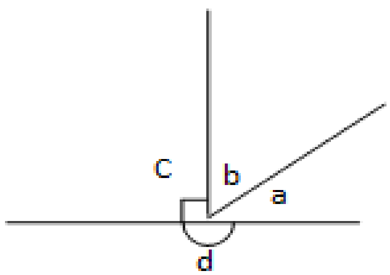
E_2:	c	Cada vez va aumentando 180°
E_{14}:	c	Tiene 5 lados
E_{22}:	c	No se como aserla
E_{26}:	c	No justifica

Gráfica 8. Resultados Pregunta N°. 12 Prueba Diagnóstica



Resultados de la Pregunta N° 16

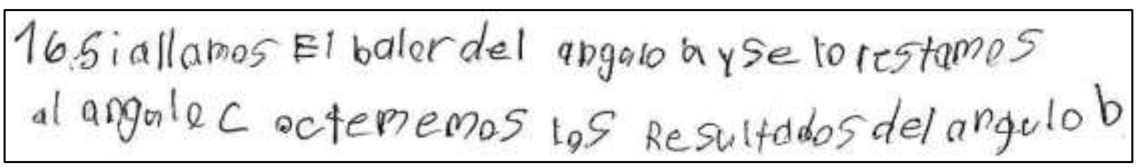
En el siguiente gráfico para conocer el valor del ángulo *b* sólo hasta saber:



(a) La medida del ángulo a
(b) La medida del ángulo c
(c) La medida del ángulo d
(d) Un ángulo de media vuelta equivale a 180 grados

Esta pregunta fue errada o no justificada por 26 estudiantes. Se destaca que solo E_{25} alcanzó este nivel y la forma en la que realiza la explicación para justificar es:

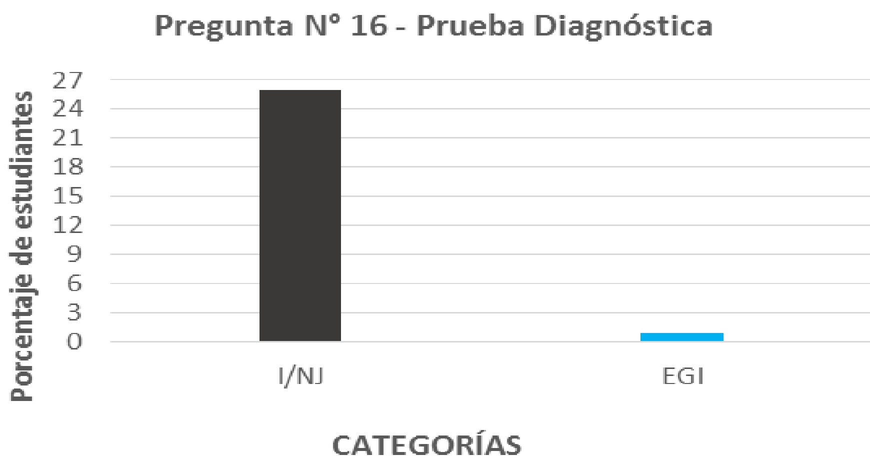
Ilustración 3. Justificación E25


16. Si allamos El baler del angolo a y se lo restamos al angulo C octememos los Resultados del angulo b

Aun cuando utiliza la sustracción en vez de la adición y omite el ángulo *d,* deja implícito que identifica el ángulo *c* de 90° y que la suma de *c, b* y *a* es 180°. Esta respuesta evidencia una demostración tipo Ejemplo Genérico Analítico.

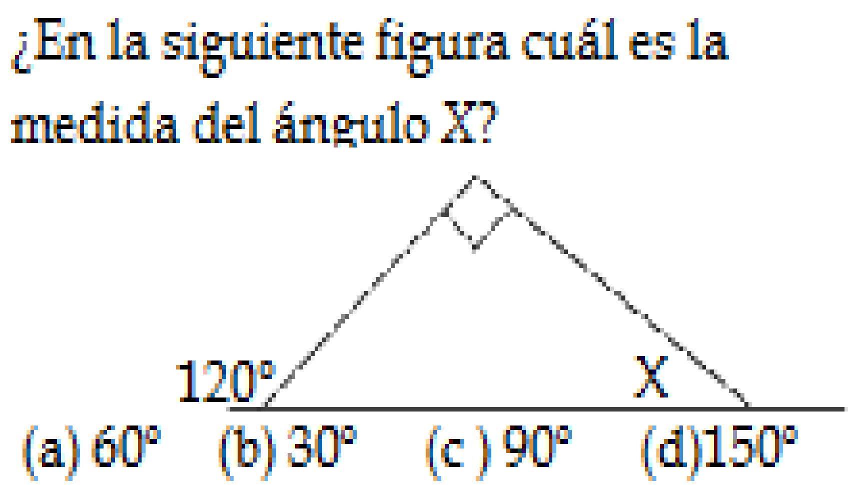
En resumen, los estudiantes fueron categorizados como se presenta en la gráfica 9:

Gráfica 9. Resultados Pregunta No. 16 - Prueba diagnóstica



Resultados de la Pregunta N° 20

Gráfica 10. Pregunta N° 20

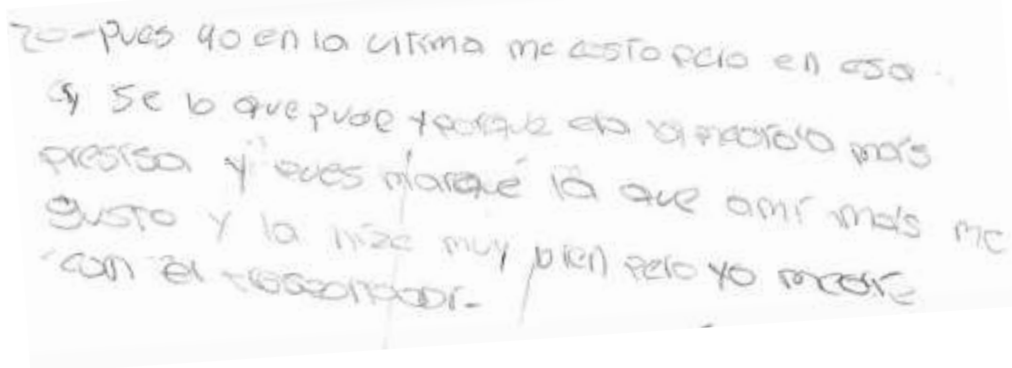


Solo dos estudiantes alcanzan el nivel y pese a esto, los resultados obtenidos en el test diagnóstico, no son coherentes.

Ellos son E_{13}:


20 : No se al cuar.

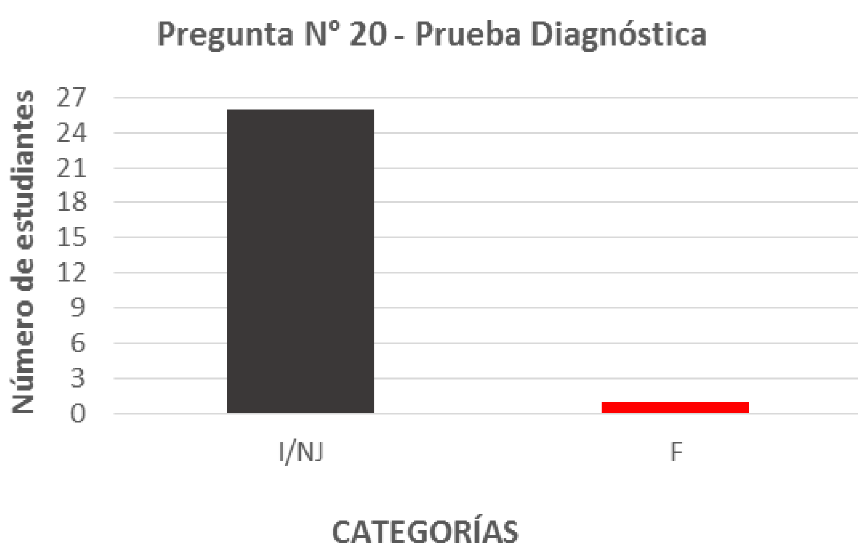
E18:


20 - pues yo en la ultima me esforcio en esa. y se lo que pude porque era la pregunta más presisa y pues marqué la que amí más me gusto y la hize muy bien pero yo marqué con el resaltador.

Por esto se ubican en el tipo Deductivo Fallido

El desempeño en esta pregunta se resume en el siguiente gráfico

Gráfica 1. Resultados Pregunta No. 20 Prueba Diagnostica



4.1.4 Fortalezas y dificultades encontradas. A través de la observación, organización y comparación de las respuestas dadas en estas cinco preguntas, se percibe que la débil estructura conceptual de los estudiantes afecta sus razonamientos pues a medida que las preguntas requieren mayor conocimiento geométrico, se devela más esta gran debilidad.

En el afán de responder, son muchos los estudiantes que lo hacen sin justificar o expresan que actúan al azar. Es así que se puede establecer que son más las dificultades que las fortalezas que se presentan:

- ***Dificultades:***

    - Estructura conceptual débil.
    - Así los estudiantes no entiendan las preguntas, las responden sin imprimir en ellas lógica. Esto permite establecer que la habilidad de Explicación, también es débil.
    - Muchas de las explicaciones son incoherentes gramatical y matemáticamente. Es casi nulo el uso de un lenguaje geométrico.
    - Se deduce que los pocos conceptos geométricos que poseen los estudiantes son aprendidos de memoria y no son usados en otros contextos para interiorizarlos, y para hacer que el niño piense.
    - Las respuestas de los estudiantes se convierten en conjeturas que para muchos no les importa determinar su validez.
    - Son muy frecuentes los argumentos de convicción externa[112].
    - En varias de las justificaciones a las preguntas, no se emplearon procesos matemáticos, solo sus “conocimientos”.

---

[112] HAREL, Guershon y SOWDER, Larry. Student´s proof schemes: Results from explratory studies. En SCHOENFELD, A. H., KAPUT, J. y DUBINSKY, E. (Eds). Reseach in collegiate mathematics education Vol. III, pp. 234 – 283. Providence, EE.UU: American Mathematical Society. 1998.

- ***Fortalezas:***

  - Hay buenos signos de que la generalización (al nivel del grado sexto) puede ser una habilidad en algunos estudiantes.
  - Gran número de estudiantes son resueltos a explicar para justificar, ya sea desde su firme convicción de que lo están haciendo bien, o que, así quede mal, hay que explicar.

4.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Como se ha expuesto anteriormente, la secuencia didáctica fue organizada en cinco fases teniendo en cuenta las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Gráfica 12. Fase de Explicación

En cuatro de las cinco fases se diseñaron actividades cuyo propósito es potenciar habilidades del razonamiento y así fortalecer el proceso de Resolución de problemas. Así que estas son diseñadas bajo dicho enfoque. La fase de explicitación no tiene actividades específicas, esta se desarrolla de manera transversal en la secuencia.

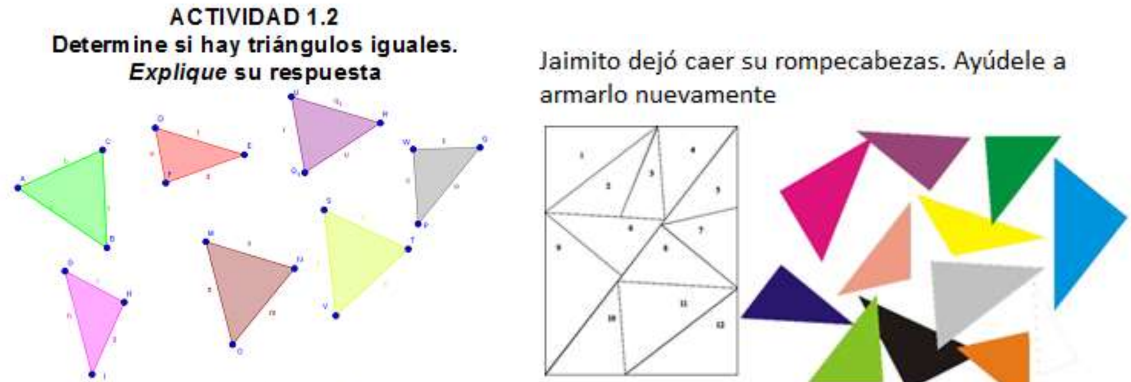
Para el análisis de la Secuencia Didáctica aplicada se tuvo en cuenta:

- Las características de cada una de las fases del modelo de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).
- Que la mayoría de los estudiantes solo reconocen formas (nivel de reconocimiento) y otros pocos, identifican propiedades sin relacionarlas entre ellas (nivel de Análisis).
- Que el modelo de razonamiento de Van Hiele, explica que se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas[113].
- Que si bien es cierto, los estudiantes en el nivel de reconocimiento no hacen demostraciones, sí se analiza cómo las actividades aplicadas y la utilización del software promueven habilidades como la explicación, la justificación, el establecimiento de conjeturas, y según su forma de razonar se hace una caracterización.

4.2.1 Análisis Fase de Información. La exploración de los presaberes de los estudiantes, sus formas de razonar y la introducción a la temática a abordar se desarrolló mediante la implementación de cuatro actividades (Act. 1.1 no es actividad de aprendizaje sino de motivación). Pasando por una actividad individual, socialización de la misma, exposición de conclusiones y un trabajo grupal. Todo esto con el fin de, además de promover habilidades de razonamiento, concluir que dos triángulos son iguales si tienen los tres lados iguales y si tienen la misma forma y tamaño.

[113] GUTIÉRREZ, Op cit., p. 31.

Gráfica 13. Actividades 1.2 y 1.4



Elaboración propia, realizada en Geogebra

En el paso por la actividad 1.2, se logró que todos establecieran sus primeras *conjeturas* (Ver anexo G), a partir de la exploración visual y perceptiva de imágenes fijas, o de mediciones con regla o compás como así lo hicieron 22 de los 26 estudiantes que hicieron la actividad (E15 estuvo ausente) para establecer si habían o no triángulos iguales. Y la medida se convierte en su única *justificación*. Esto es propio de un *Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP)*.

Tabla 7. Trascripciones de los estudiantes

E_2:	*"Al medir los triángulos café MNO y verde ABC con la regla tenían la misma medida y desde un principio también pensé que eran iguales y sé que son iguales por su longitud y medida. El rosado HIG el naranja DEF y el gris PQW no son iguales porque sus medidas o longitudes por ningún lado coinciden y no son idénticas. El café MNO y el verde claro STV son iguales porque son igual número de medición y de longitud otra cosa puede ser sus ángulos que miden igual. Los triángulos MNO, STV y ABC son completamente iguales porque ya lo saque al saber que el café y el verde son iguales y el café y el verde claro también medí el verde y el verde claro entonces el triángulo MNO ABC y STV son iguales. El triángulo MNO y QRU no son iguales porque sus medidas lo comprueban y sus ángulos también. El triángulo ABC Y QRU parecen iguales pero al observarlos largas líneas y otras cortas y no son iguales"*
E_{26}:	*"Los triángulos (A,B,C) (M,N,O) y (S,T,V) son iguales porque al medirlos todos con el compás sus resultados fueron iguales y al medirlos con la regla estos fueron los resultados: En el triángulo (A,B,C) el resultado de sus lados es: a: 4½, b: 4 y 3 milímetros y c: 4½ y 3 milímetros. El triángulo (D,E,F) su resultado es: d: 4 cm, e: 3 cm y 4 cm y 3 milímetros. El triángulo (URQ) su resultado es: u: 4 cm y 2 milímetros, r: 3½ y q_1: 4 cm y 3 milímetros. El triángulo (W,QP) su resultado es: w: 4½ cm, q: 3½ cm y 2 milímetros, p: 3cm y 4 milímetros. El triángulo (STV) su resultado es: s:4½ cm, t: 4½ y 3 milímetros, v: 4cm y 3 milímetros"*

Sin embargo, unos establecieron que habían 2 triángulos iguales, otros cuatro, otros ninguno. La conjetura verdadera es que hay tres triángulos iguales, pero esto lo verificarán más adelante en otra actividad. Por el momento, cada quien está convencido de que su respuesta es la correcta. Aquí los estudiantes se ubican en el tipo de *Demostración Fallida (DF).*

En la tabla 8 se muestran algunos ejemplos:

Tabla 8. Ejemplos Demostración Fallida

E_7:	*"Los triángulos M,N,O y S,T,V son iguales porque tienen un lado que mide 4 y medio tienen otro que pasa 2 líneas más allá del 4 cm y el otro lado llega casi a los 5cm. Los otros no son iguales porque tienen medidas distintas"*
E_{21}:	*"5 triángulos miden lo mismo son ABC GHI MNO STV PWQ Los 2 triángulos que no median lo mismo y los ángulos no son y guales"*
E_{13}:	*"Cuatro triángulos son iguales El ABC el MNO el STV, el QRS porque sus lados son de la misma longitud. Los otros tres tienen sus lados desiguales Los triángulos a simple vista se ven igual ósea el ABC MNO STU QRS pero al medirlos el ABC no miden sus lados iguales El MNO mide igual al ABC y al STV pero el QRS todos sus lados si son iguales es un triángulo regular. Un triángulo empieza en un punto luego una recta y después un triángulo (coloca símbolos y una carita feliz)"*

Hubo dos estudiantes que determinaron la igualdad en términos de su clasificación teniendo en cuenta la longitud de sus lados o amplitud de sus ángulos.

Tabla 9. Trascripción de los estudiantes

E_{25}:	*"Los triángulos ABC, MNO y STV son iguales porque son isoceles tienen 2 lados iguales y uno es de diferentes medidas y al igual que URQ_1. Los triangulos GHI y DFE son triángulos escalenos, tienen todos sus lados de diferente longitud. El triángulo PQR es un triangulo rectángulo"*
E_1:	*"Todos los triángulos son iguales en que ninguno tiene todos sus lados iguales y por esos son isósceles. El triángulo ABC y el MNO tienen ángulos iguales. El triángulo DEF y el PQW son triángulos rectángulos isósceles"*

Contrario a otros estudiantes que sin tomar medidas, o sin explicar de dónde provienen sus medidas, establecen su *conjetura* y la *justifican*, encontrando incoherencias en estas. Estas demostraciones son de tipo *Empírico Fallido (F).*

En la tabla 10 estas se muestran:

Tabla 10. Trascripción de estudiantes

E_{14}:	*"Porque el triángulo tiene tres lados con cada punto y hay dos triángulos higuales y hay triángulos tiene de 90° de cada lao y también son unos diferentes y también tienen de 80°"*
E_{18}:	*"Yo de mi parte digo que es el triangulo amarillo con el verde por mis miradas que estuve mirando de todos los triángulos vi que estos eran iguales y por eso las marque porque están iguales y todos sus lados yo los vi que eran exactos pues yo nos medí porque se me olvidó traer lo exacto con mi visión lo vi que no eran echos porque lo que sobran no me parece pero en los computadores cuando nosotros nos toco hacer los triángulos no pusimos a medir los triangulos y se movían para todos los lados estaba mal y pero como se me olvido traer el compa o el trasportador no puedo desifran con visión están los otros triángulos están mal. "*

En el inicio de aplicación de esta secuencia Didáctica se encuentra que la invitación a "escribir" fue bien recibida por los estudiantes, pues lo hacen a pesar de sus imprecisiones, errores, incoherencias, concepciones, pero es el comienzo de una larga tarea en aras a mejorar el proceso de razonamiento.

A pesar de tener un buen inicio escribiendo los razonamientos, otra cosa es comunicarlos, discutirlos, *refutarlos* en forma oral y grupal. La actividad 1.3 consistió en intercambiar ideas acerca de las respuestas a la actividad 1.2 y generar una conclusión (Act.1.4). Para registrar su diálogo se colocó una grabadora de audio de algunos computadores en cada grupo (Ver anexo I). Pero al realizar la revisión de ellos, fue casi imposible escuchar, por una parte, por el bajo volumen de voz de algunos integrantes, y por otra, por el ruido que se generó por el alto volumen de otros.

Los estudiantes, tal vez, no trabajan con frecuencia en equipo. Se habla poco tiempo acerca de la temática y luego se abre espacio a la tertulia.

Empero de esto, se logra obtener el diálogo de la docente investigadora (DI) y el grupo formado por E3, E16, E19 y E24:

[2] **- *E3***: *Sí profesora yo sí dije porque aquí hay dos iguales, este y este (Señalando en la hoja)*
[3] – ***DI***: *Sí pero por qué*
[4] **- *E16***: *Sí pero hay una cosa que no los hace iguales, que son los puntos, ¿laaaa orientación? Y el nombre*
[5] – ***DI***: *Por qué, uno se llama cómo?*
[6] **- *E16***: *Uno se llama ABC, otro se llama MNO*
[7] – ***DI:*** *ah bueno, entonces ¿usted dice que no son iguales por el nombre? ¿O que sí son iguales?*
[8] **- *E16***: *No son iguales*
[9] **- *DI***: *No son iguales? ¡Listo! Distinto a E9, ella dice que sí hay triángulos iguales ¡Hablen! (La docente se retira del grupo)*
(Hay mucha interferencia; se perdió el audio por unos segundos.)
[10] **- *E19***: *Pero es que los puntos no importan!*
[11] **- *E3***: *No importan los nombres!*
[12] **- *E16***: *No, Síiiiiiiiiiiii. Digamos que usted se llama Javier, ¿ella se va a llamar Javier?*
[13] **- *E19***: *Y las medidas!!!*
[14] **- *E3***: *Es que los nombres no importan. En los triángulos no. Las que importan son las medidas.*
[15] – ***E16:*** *Usted escribió lo mismo que yo. El verde y el café son iguales.*
[16] **- *E3:*** *Sólo esos dos(juegan con el micrófono del pc)*
[17] **- *E3:*** *Qué concluye usted!*
[18] – ***E19:*** *que son iguales el verde y el café, que es ABC y MNO, y los cinco que quedan son diferentes.*

Es de notar que E3 y E19 intentan convencer a E16 de que se encuentra en un error. Y lo logra, como se infiere más adelante en la exposición de conclusiones. E3 le *refuta* a E16 y lo hace desde su propia experiencia con la toma de medidas a los triángulos pero no realizan nuevas mediciones para darse cuenta que no son dos sino tres los triángulos iguales. A su vez E16 le refuta a E3 y lo hace haciendo uso de un contraejemplo pero que no goza de claridad ni de fundamento matemático.

Tímidamente E19 intenta expresar que lo que E16 expresa no es correcto. Mientras E24 observa, pero no habla.

En cada grupo se eligió un estudiante encargado de exponer las conclusiones obtenidas de la conversación al interior del grupo. La exposición fue grabada con un celular y transcrita (Ver Anexo H).

En esta actividad sobresalió E13, quien se tomó la palabra y casi dejó sin argumentos a sus compañeros, pues para ellos, ya estaba todo dicho.

Ilustración 4. Exposición de estudiantes

E13 *explica* cómo se convenció de que eran tres y no dos los triángulos iguales.

*[2] - **E13**: Pues en mi grupo encontramos tres triángulos iguales pero yo tengo uno más que para mí es igual.*

*[3] - **DI**: ¿Por qué es igual?*

*[4] - **E13**: Pues miden sus lados iguales entonces es igual a los otros tres, aunque me di de cuenta que el que yo dije que era igual, sus tres lados para mí miden igual perooo no a los otros porque los otros tres miden, miden 3, 4 y 3 y el mío mide 3, 3 y 3, o sea que no es igual a los otros*

*[5] - **DI**: O sea, se convenció de que solo hay tres triángulos iguales*

*[6] - **E13**: Sí*

*[7] - **DI**: Y cuál es el criterio para establecer que sean iguales, ¿por qué son iguales?*

*[8] - **E13**: Porque los tres miden igual sus lados*

*[9] - **DI**: Por la longitud de sus lados. Muéstrele a sus compañeros cuáles serían esos tres triángulos, nómbrelos.*

*[10] - **E13**: (Volteando la hoja hacia sus compañeros) ehhhh, el ABC, MNO y STV.*

En cambio, E1 parece haber explorado otras estrategias para determinar si había triángulos iguales, pero no las desarrolló.

*[13] - **DI**: Bueno. ¿Alguno de ustedes además de medir lados, midió ángulos? ¿**E1**?*

*[14] – **E1**: No. Hoy solo lo hicimos a simple vista, pero no usamos nada*

*[15] - **DI**: (terminando la idea del estudiante) …ningún instrumento de medición para hacerlo. Pero ustedes habían establecido que porque tenían ángulos iguales….*

*[16] – **E1**: pues así a simple vista se veía que eran iguales, pero parece que no, hay unos más corticos de 90°, otros más…*

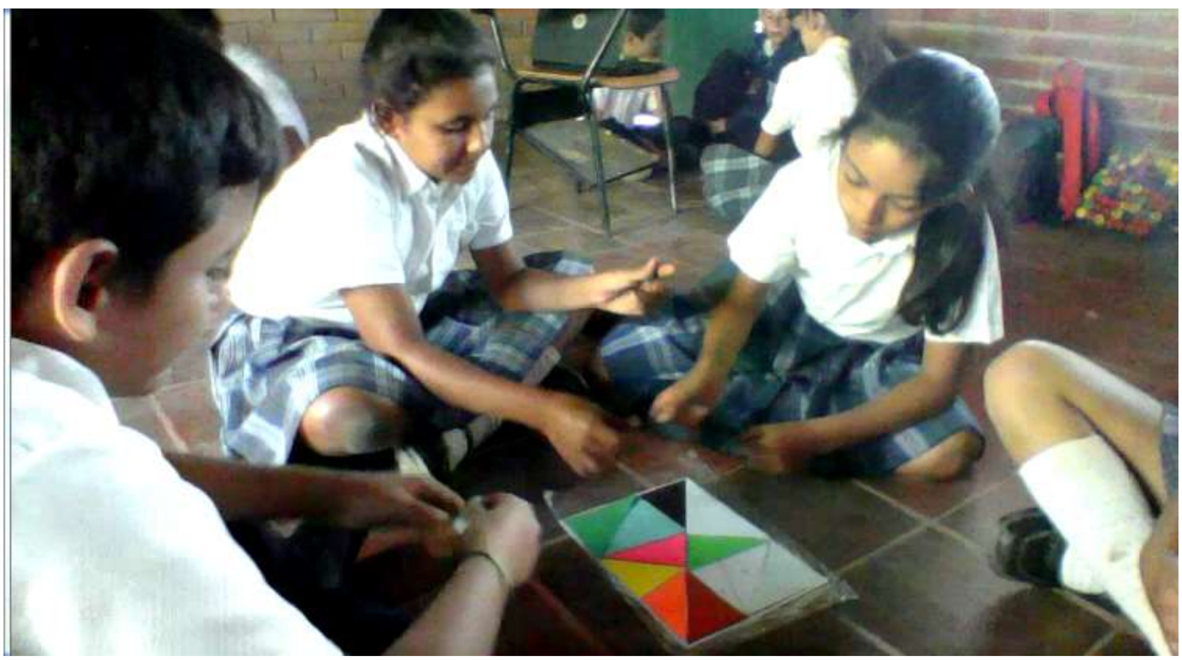
Al paso por la actividad 1.4 se realiza una actividad muy sencilla pero que conducía a los estudiantes a reafirmar lo que han estado concluyendo acerca de los triángulos congruentes: dos triángulos son congruentes si sus tres lados son iguales esto es, si tiene la misma forma y tamaño.

Reunidos en grupos, sentados en el suelo, la docente investigadora explica a los estudiantes la actividad, mientras va colocando cámaras que apuntan a los grupos (Algunos videos se dañaron).

Los estudiantes no gastan más de dos minutos armando el rompecabezas, luego vino la socialización.

Ilustración 5. Actividad de grupo

GRUPO 1: E2, E4, E5 y E11



La docente investigadora se acerca al grupo e inicia una charla con ellos con el fin de que quede establecidas las propiedades enunciadas anteriormente, además de promover la comparación entre objetos para hallar regularidades.

[1] ***DI****: ¿Tuvieron alguna dificultad para armar?*

[2] ***E2*** *(Con la cabeza y con una voz suave dice) No*

[3] ***DI :*** *(Entre mucho ruido) ¿Qué tuvieron en cuenta para ubicar cada figura?*

*[****E2****….] (No se escucha su intervención, hay mucho ruido)*

[4] ***DI*** *Y me dice aquí E5 algo muy importante, ¿qué tuvieron en cuenta?*

[5] ***E5:*** *La forma*

[6] ***DI: ¿****Y qué más?*

[7] ***E4 :*** *El tamaño*

[8] ***DI:*** *Y el tamaño, muy bien. ¿Podrían haber pensado que este triángulo, ehhh, fueraaaa, aquí?* (señalando dos triángulos diferentes, uno verde y uno azul)

[unos mueven la cabeza diciendo que sí, otros que no]

[9] ***DI: ¿****Si lo llegaron a pensar?*

[10] ***E2:*** *[moviendo la cabeza, con duda dice que sí]*

[11] ***DI: ¿****Por qué E2?*

[12] ***E2:*** *[no se alcanza a escuchar por el ruido, pero DI les repite la pregunta, insistiéndoles en los triángulos]*

[13] ***E11:*** *No porque el triángulo verde está muy grande para este lugar* (señalando el lugar donde se encuentra el triángulo azul)

[14] ***DI:*** *Entonces nuevamente pasa aquí lo que dijo E5, muy importante su aporte, debemos tener en cuenta el tamaño y la forma. ¿Tomamos medidas de ángulos y lados?*

[los niños dicen con la cabeza que no]

4.2.2 Análisis Fase de Orientación Dirigida. Esta fase de 5 actividades (2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5) se propuso con los objetivos de deducir y comprender los criterios de congruencia de triángulos: LLL, ALA, LAL; y potenciar en los estudiantes el establecimiento de conjeturas y su demostración.

Objetivos que se logran a diferente escala en los estudiantes.

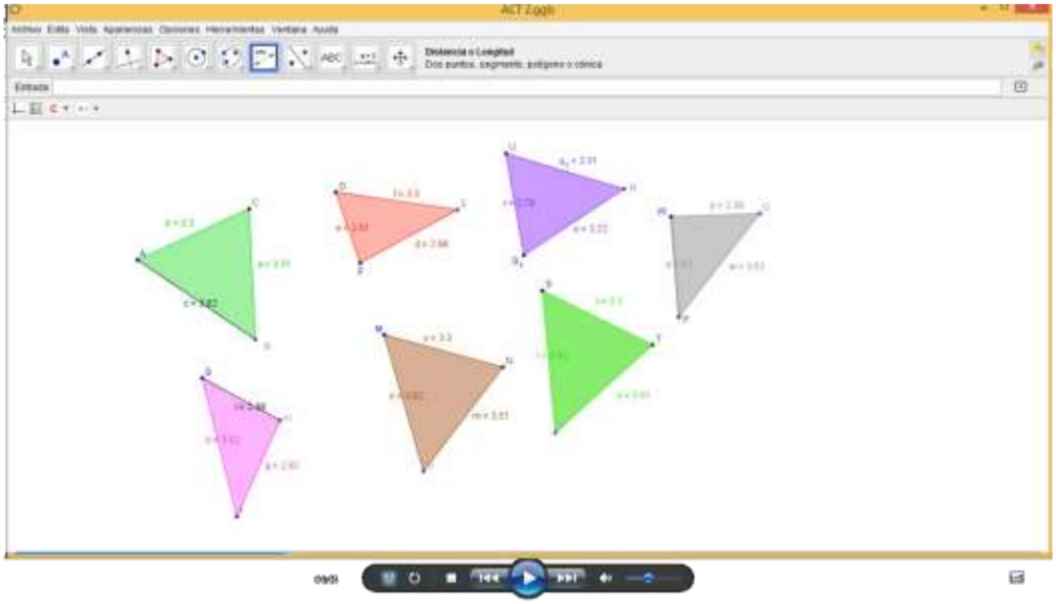
En la actividad **2.1** es por primera vez que los estudiantes se enfrentan a trabajar con GeoGebra en esta secuencia, puesto que anteriormente ya lo han explorado. Para iniciar, hubo que copiar el archivo de GeoGebra que se iba a manipular en la clase en los 27 computadores (con la ayuda de estudiantes de otro curso). Luego se dieron las instrucciones para abrir el programa aTube Catcher para grabar las pantallas de los computadores y poder ver luego con más detalle lo que hacen en clase.

Abierto el archivo de GeoGebra se inicia la actividad. Se les pidió que manipularan el archivo con el fin de determinar si las conjeturas que habían formulado en la actividad 1.3 eran ciertas o no. Sin haberles dicho qué hacer específicamente, la mayoría utilizó las herramientas de GeoGebra para medir la longitud de los lados.

Se aprecia que el tipo de demostración que los estudiantes usan es el *Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP)* igual que en la actividad 1.2, solo que esta vez lo hacen con la ayuda de GeoGebra.

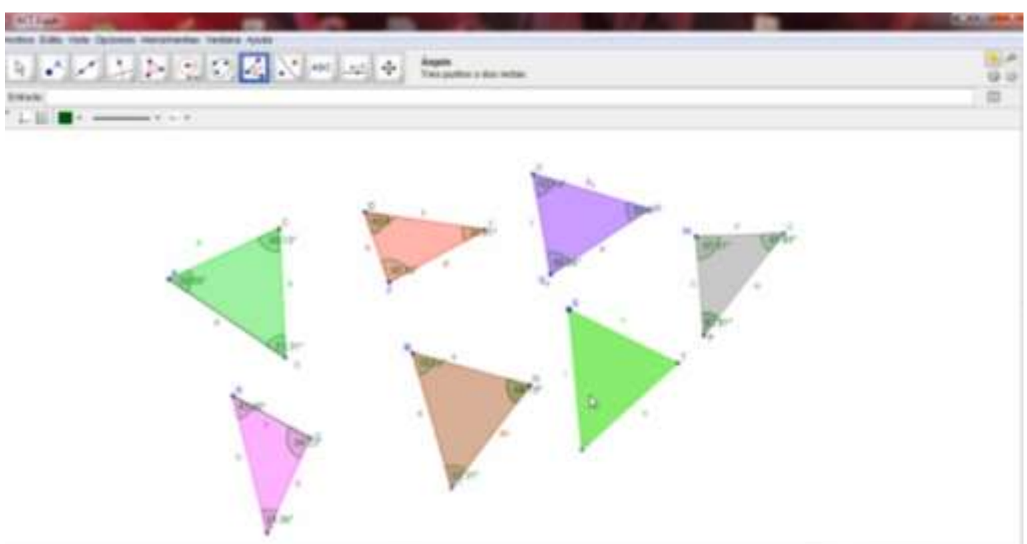
Algunos estudiantes no partieron de sus conjeturas, tuvieron que medir *todos* los triángulos para verificarlas.

Ilustración 6. Pantallazo de Word tomado de video capturado en el software a Tube Catcher Grupo 2 conformado por E9, E10, E18, E28



Algunos instintivamente llegaron a la herramienta que les permitió medir la amplitud de los ángulos.

Ilustración 7. Pantallazo tomado de video capturado en el software aTube Catcher grupo 4 conformado por E3, E16, E19, E24



El grupo 5 conformado por E6, E7, E12 y E25, en un comienzo sin dudarlo utilizó el compás, pero luego de unos momentos se sintieron inseguros de lo que estaban haciendo y acudieron a la medición de ángulos. Otros, quienes no sabían qué hacer, vieron de algún compañero y repitieron lo que hacían. Sin embargo, hubo grupos que no finalizaron la actividad.

Finalizada la actividad, se pudo concluir que había tres triángulos iguales porque sus tres lados eran iguales, y además lograron observar que los tres ángulos también lo eran. Esto lo debían escribir y sólo el grupo 5 lo hizo, a continuación se observa los cambios con respecto a lo que habían escrito la primera vez E7 y E25.

Tabla 11. Finalización de la Actividad

E_7:	*"Los triángulos M,N,O y S,T,V son iguales porque tienen un lado que mide 4 y medio tienen otro que pasa 2 lineas mas allá del 4 cm y el otro lado llega casi a los 5cm. Los otros no son iguales porque tienen medidas distintas"*	**E_{25}**:	*"Los triángulos ABC, MNO y STV son iguales porque son isoceles tienen 2 lados iguales y uno es de diferentes medidas y al igual que URQ_1. Los triangulos GHI y DFE son triángulos escalenos, tienen todos sus lados de diferente longitud. El triángulo PQR es un triangulo rectángulo"*
G_5:	*"Los triángulos ABC, MNO y STV son iguales o isoceles. Los otros no son iguales porque tienen medidas distintas"*		

Se propuso la actividad **2.2** que debía ser explicada por escrito y verbalmente en los grupos de trabajo.

Ilustración 8. Actividad 2.2

No demoraron mucho en hacerlo. Los grupos establecieron que solo se podía armar un triángulo, a excepción del grupo 4.

A continuación los aportes de cada grupo:

Tabla 12. Trascripción de los estudiantes Act. 1.4

Grupo	Elaboraciones en el grupo
1	**E_8, E_{22}, E_{27}**: *Solamente se puede formar un triángulo porque se isieron diferentes triángulos y al final salia el mismo*
2	**E_9, E_{10}, E_{18},E_{28}:** *Colocando los pitillos en formas diferentes siempre dando el mismo triangulo. Pues acolocar lo pitillos daran el mismo triangulo.*
3	**E_2, E_{11}, E_5, E_4, E_{13}:** *Uno solo en diferentes posiciones arman muchos pero es igual.*
4	**E_{19}, E_3, E_{20}, E_{16}, E_{24}:** *Se pueden hacer 4 triangulos. ¿por que?*
5	**E_{25}, E_{12}, E_6, E_7:** *Uno porque no importa en la forma que este ni el tamaño.*
6	**E_{26}, E_{21}, E_{14}, E_{17}:** *1 porque todos los que se arman son el mismo que se iso al principio pues se hacen con las mismas medidas lo único que cambia es la dirección en la que se haga*

E1 y E15 no asistieron, sus compañeros de grupo fueron redistribuidos en otros.

Los estudiantes generalizan, con la ejecución de la actividad propuesta, una propiedad de los triángulos, así son inducidos a realizar demostraciones de tipo *Ejemplo Genérico Analítico (EGA).*

El grupo 4, quien estableció que se podían hacer 4 triángulos, fue invitado a construirlos nuevamente. La docente tomó dos hojas blancas y dibujó a lapicero dos de los triángulos que iban construyendo. Luego las tomó en el aire a contraluz y las superpuso. Así los estudiantes se dieron cuenta que sólo se construía uno solo.

Ilustración 9. Comprobando Conjeturas

Pantallazo tomado de video "Act 2.2" capturado en aTube Catcher.

La secuencialidad de los niveles es una de las características del modelo de Van Hiele y por esto puede decirse que el grado de complejidad de las actividades hasta ahora analizadas es bajo. Y aun así, algunos estudiantes ya encontraron dificultades para razonar. La siguiente actividad (Act. **2.3**) exigió un poco más por parte de los estudiantes al pedirles que *construyeran a lápiz y papel*.

Construir en una hoja de papel blanca (no cuadriculada) dos triángulos ABC y DEF con AB = DE y BC = EF. Luego de dibujados responda: ¿Son Congruentes los triángulos?

Fueron varias las veces en que la docente investigadora tuvo que repetir la instrucción a los niños para orientarlos. Por una parte, es la primera vez que se enfrentan a una construcción geométrica y por otra, se dispusieron a construir dos triángulos iguales y esa no era la actividad. Sin embargo, por ensayo y error se lograron la mayoría de construcciones.

Ilustración 10. Explicación por parte de estudiante

Se hizo necesaria la explicitación del criterio LAL y para ello E25, quién tomó la palabra, realizó en el tablero un dibujo de dos triángulos en donde el ángulo comprendido entre dos lados era diferente (su diferencia era muy poca). Al preguntar a los estudiantes si eran congruentes esos triángulos en coro todos dijeron que sí. Pero se tomó como instrumento de medición una hoja blanca y se tomó la medida del tercer lado. Nuevamente se realizó la misma pregunta, a lo que todos en coro dijeron que No.

La construcción permitió realizar demostraciones de *tipo Empírico Ingenuo* en varios estudiantes

Ilustración 11. ejemplo E25

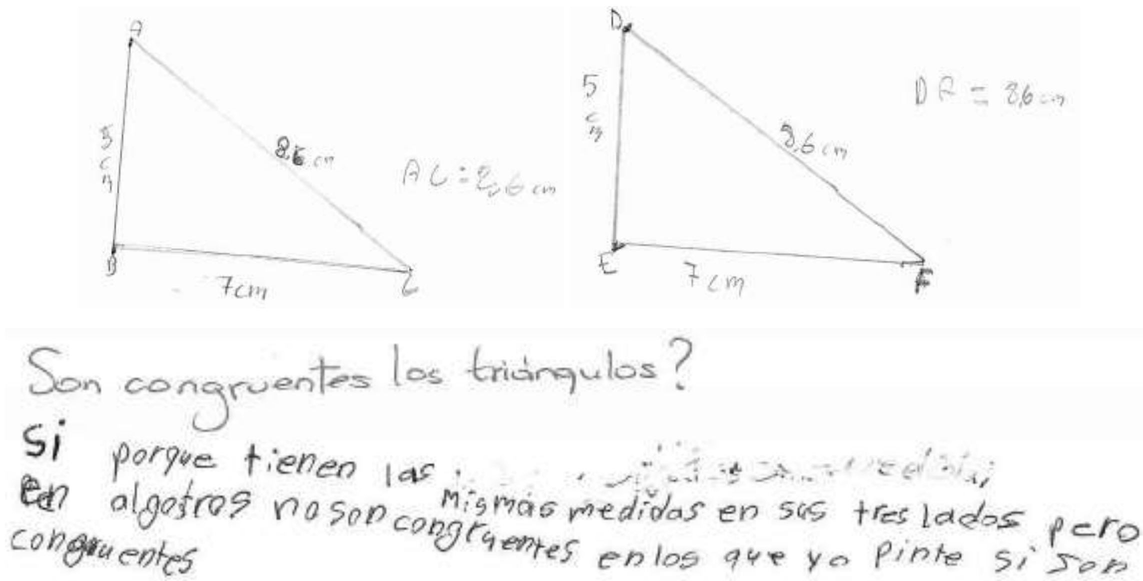
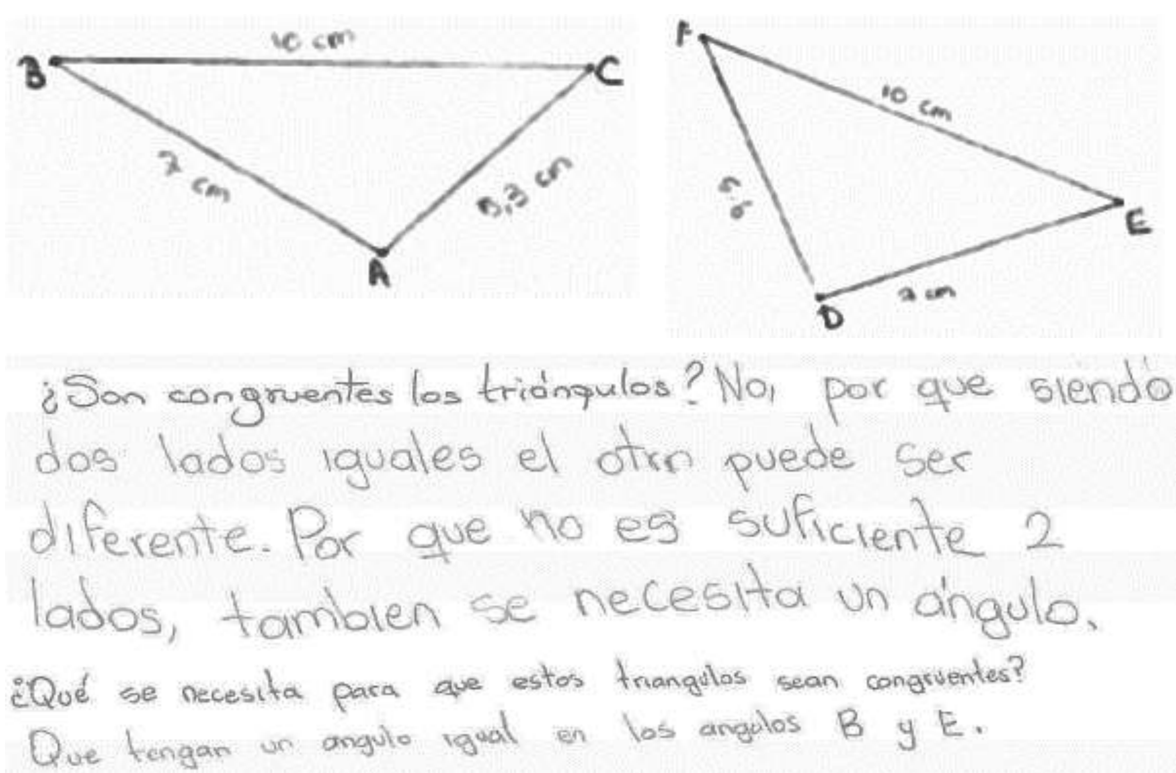


Ilustración 12. Ejemplo E1



A pesar de tener construcciones y haber tomado medidas, hubo *Deducciones Fallidas (DF*) en varios estudiantes:

Ilustración 13. Ejemplo E28

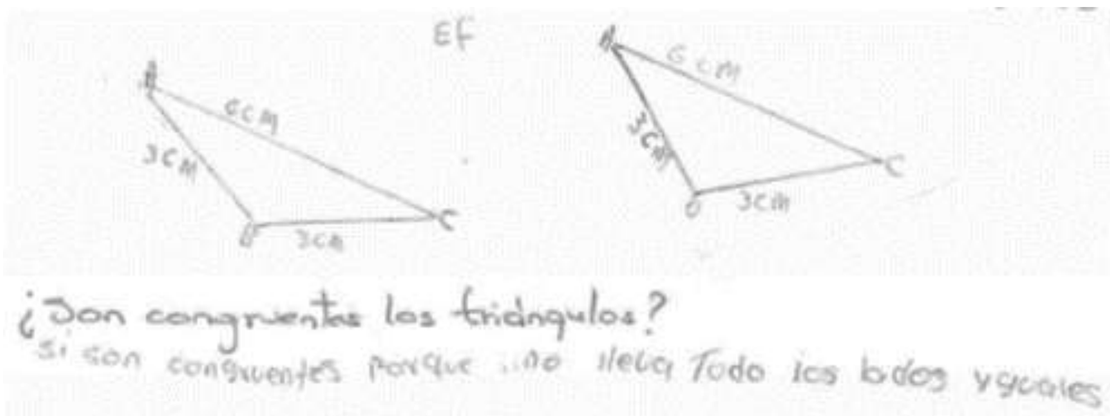
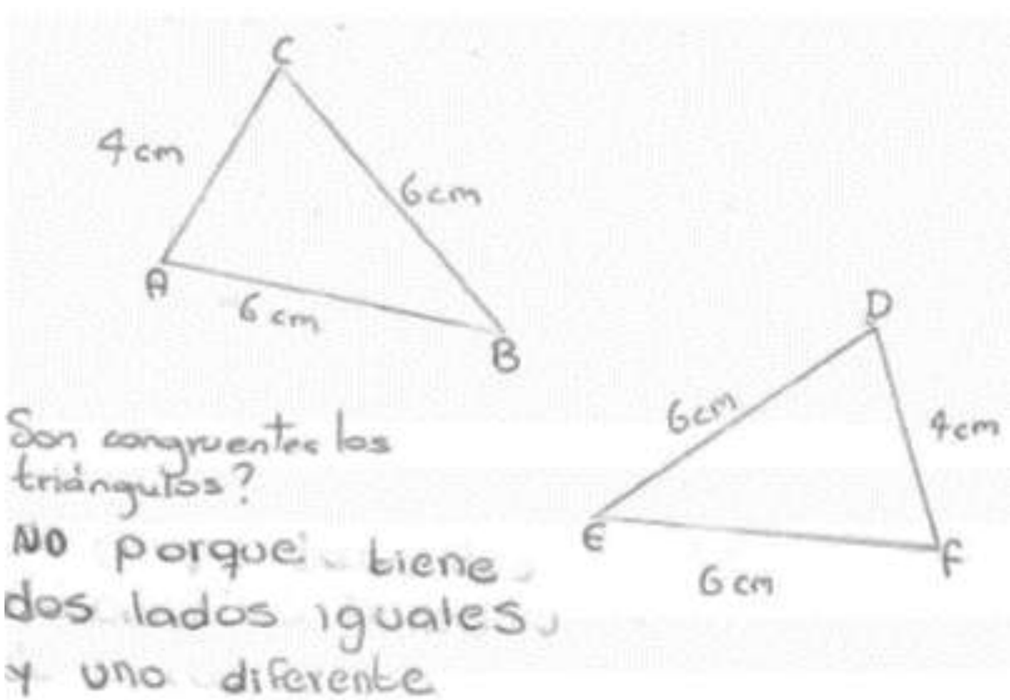


Ilustración 14. Ejemplo E6

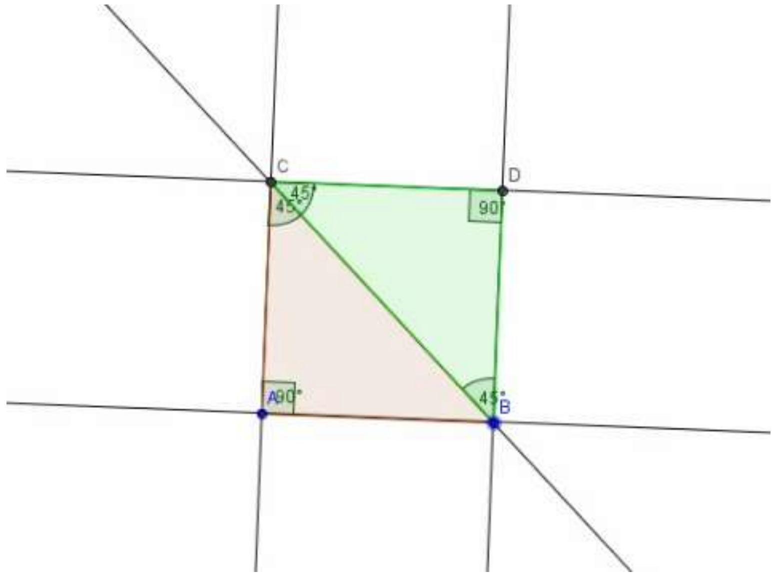


La docente viendo las situaciones que se presentaron en la construcción a lápiz y papel quiso explorar cómo lo harían en GeoGebra, y entonces programó para una sesión posterior, la construcción de dos triángulos iguales. Esta actividad no estaba programada en la Secuencia Didáctica.

Es así como se realizó esta modificación. Las actuaciones de los estudiantes fueron muy buenas, pues la gran dificultad que esta actividad les permitió ser aún más exigentes con sus razonamientos, la *exploración* fue máxima, los desaciertos aún más, y al final fueron pocos los estudiantes que CONSTRUYERON DOS TRIÁNGULOS CONGRUENTES, lográndolo luego de un sinnúmero de intentos y de recibir valiosa orientación por parte de la docente investigadora. (Este día faltaron varios estudiantes a causa de fuertes lluvias)

Por ejemplo, en el grupo compuesto por E7 y E25, E25 logró realizar una demostración de tipo *Ejemplo Genérico Intelectual (EGI)*:

Ilustración 15. Demostración de tipo Ejemplo genérico Intelectual (EGI)



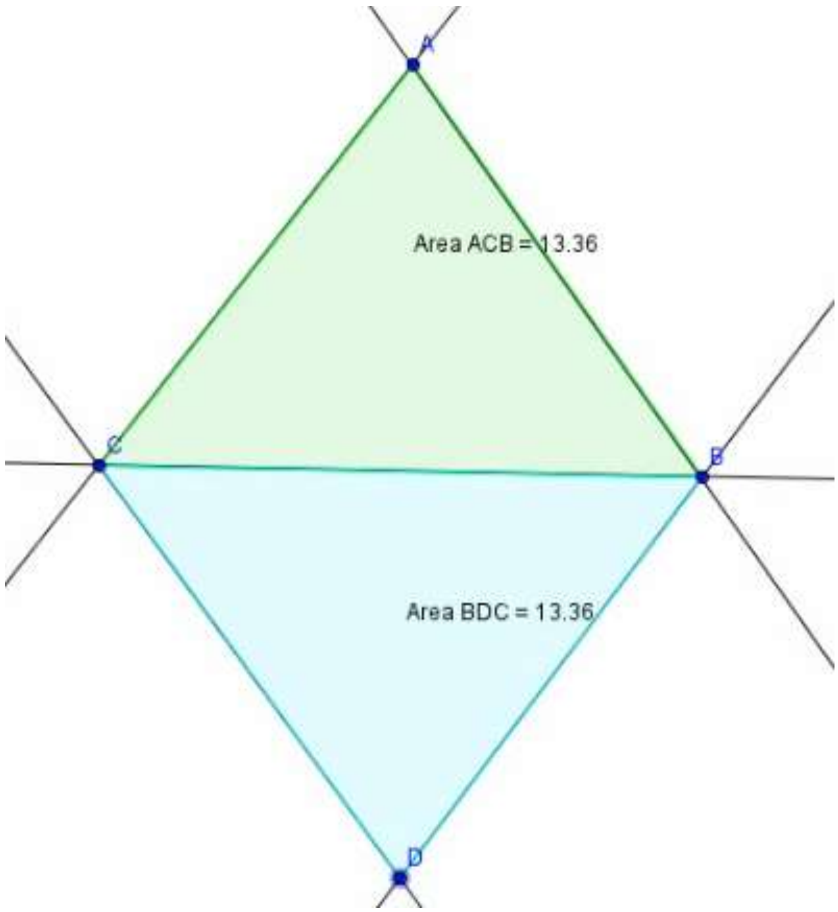
Inició su construcción a partir de un cuadrado, trazó una de sus diagonales y midió sus ángulos. Con la prueba del arrastre estuvo completamente seguro de que su construcción era correcta. Se dio este diálogo (video “2.4” min 7:17) en el que realizó la demostración bajo la condición que le coloca su maestra, por primera vez, se realiza sin el uso de medidas, parte de las propiedades de la figura:

[1] DI: Bueno y ¿cómo comprobamos, así sin tomar medidas ni nada, cómo comprobamos que son iguales?
[2] E25: Profesora porque un cuadrado tiene todos sus lados iguales, ¿no?, entonces este es igual a este y este es igual a este (refiriéndose a lados en ambos triángulos) *entonces este es igual a este y este igual a este, y este mismo* (mostrando la diagonal) *es igual para los dos, entonces de longitud sí están iguales*
[3] DI: haber lo diferenciamos con colores[.….] ¡Muy bien!

Así sus compañeros ven lo que hace y lo copian.

La mayoría de los estudiantes lograban tener triángulos iguales tratando de acomodar las medidas a conveniencia, por ejemplo E26 construye la siguiente figura:

Ilustración 16. Figura lograda por E26



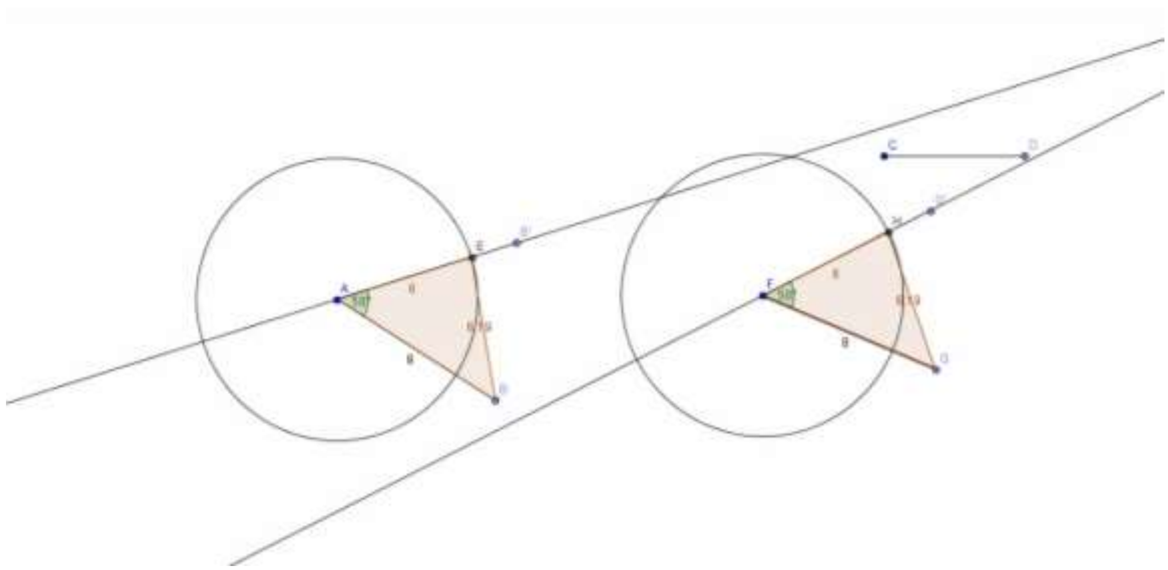
En el intento por cumplir con la construcción, hace visible el valor del área, observa que son muy cercanas y la acomoda hasta lograr verlas igual, además no tiene en cuenta la prueba del arrastre que es una de las potencialidades de GeoGebra. La docente fue quien lo hizo caer en cuenta cuando movió el punto B y se desfiguró lo hecho (Video Act 2.3.1 (2), min 12:30)

Lo anterior se trata de un tipo de demostración *Deductiva Fallida (DF)*

Ahora bien, en la actividad **2.4** (así como en la anterior), se proponía hacer comprensivo el criterio LAL. La transcripción de lo realizado se muestra en el anexo J

A pesar de tener bastante dificultad, los estudiantes trabajaron en su totalidad, lograron realizar las construcciones, ya fuera por su propio esfuerzo, o mirando a algún compañero. Por ejemplo E20, luego de casi una hora logró tener esta construcción, que permitía ver dos triángulos iguales pero que aplicando la prueba del arrastre se develaba su error.

Ilustración 17. Ejemplo de E20



Además de trabajar en GeoGebra los estudiantes dejaron por escrito sus conclusiones. Por ejemplo E1 y E25 comprenden muy bien la tarea asignada, realizan correctamente la construcción y se ve reflejado en su respuesta.

Tabla 13. Trascripción de Estudiantes

E_1:	*"Para que 2 triangulos (ABC – DEF) sean congruentes necesitamos la medida de dos de sus lados y ángulo comprendido entre ellos. Con 2 lados y un angulo comprendido entre ellos es suficiente para que sean congruentes"*
E_{25}:	*"Que para que dos triángulos sean congruentes necesitan x lo menos 2 de sus lados tengan la misma medida y también el angulo comprendido entre ellos sea el mismo. Pero si nada mas tenemos las dos medis de dos de sus lados y no tenemos el angulo esacto no serán congruentes"*

A diferencia de E13, que aunque permite deducir que realizó correctamente la actividad, aún no se convence de lo que hizo, pues hace suposiciones.

Tabla 14. Trascripción de estudiantes

E_{13}:	*"Fueron congruentes porque tuvieron dos medias y un angulo en cambio si no nos dan el angulo pues* ***supongo*** *que no es congruentes.* *Cuando me das las dos medidas y el angulo puedo saber que son congruentes y me vota la tercera medida y se que ay un angulo comprendido entre ellos"*

Otros estudiantes hacen referencia a las herramientas que les proporciona GeoGebra y a los procedimientos que hicieron, en su intento por expresar sus conclusiones.

Por ejemplo: E6 hace una comprensión del proceso en el que para construir dos triángulos congruentes, se construye uno y a partir de él se trasladan o copian sus medidas para construir el otro.

Tabla 15. Comprensión del Estudiante E6

E_6:	*"2 triangulos son congruentes si se cambia de distinta medida los dos a la vez. Ellos pueden ser congruentes si se* ***traslada*** *una media a la otra"*

E26 realiza una conclusión sobre la forma en que realizó la construcción pero no sobre la temática.

Tabla 16. Conclusión del Estudiante E6

E_{26}:	*"Que mi triangulo cuando lo construi no tuve en cuenta el punto que decía "punto de objeto" y cuando me lo indicaron lo pude construir correctamente y el que había contruido primero lo no vi el el otro repetia su movimiento"ó*

Más enriquecedor fue para E15, quien logró hacer una comparación entre dos construcciones y lo que esto le enseñó.

Tabla 17. Comparación del Estudiante E15

E_{15}:	*"Que si nos dan dos lados y un angulo podemos saver los otros dos angulos y el otro lado para poder sacar un triangulo congruentes y podemos sacar copia con el compas para hací uno mismo y los angulos que isismos hay son congruentes porque nos dieron un angulo y dos lados y **los de que días no eran congruentes porque si nos dieron los lados pero el angulo no**"*

A pesar de todo el esfuerzo que realizan algunos estudiantes, no hacen comprensible los nuevos conceptos, presentan dificultad para escribir coherentemente como es el caso de E18, y E21

Tabla 18. Dificultades de los Estudiantes E18 y E21

E_{18}:	*"Yo no tuve en cuenta los angulos y la recta fija que uno le tiene que escribir 6 cm o 10 cm eso yo casi no lo tuve en cuenta y la línea a y B la trasaba con C y D y hay formaba un triangulo pero me quedaba mal y utilize la recta figa. Los congruentes son los que los triángulos son iguales"*
E_{21}:	*"Los triángulos congruentes salen mucho triángulos de la misma manera y los demás yo primero puse tres puntos trace las líneas des úes con el polígono sabrie des pues medi los angulos después con el compas asemos en el polígono ase el mismo triangulo"*

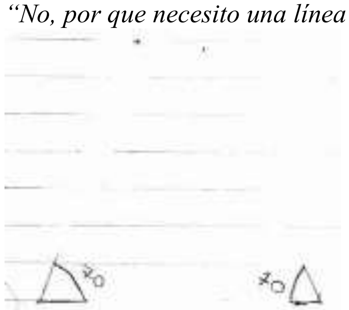
Se realizó un momento de explicitación para hacer comprensible el criterio LAL pues no todos (como se puede observar en las transcripciones) lo habían interiorizado.

De manera similar se dan los razonamientos en la actividad **2.5**, ya que en esta, tienen la posibilidad o no, de usar GeoGebra para responder.

La dificultad que se generó al interior de cada uno de los grupos fue muy interesante. La docente por varias ocasiones leyó el problema. Algunos dibujaban líneas sin darse cuenta que no se pedían, que por el contrario, la línea era parte de la respuesta. Al final se logra la comprensión del criterio ALA. (Los aportes de todos los estudiantes se muestran en el anexo K).

El establecimiento de la conjetura y su demostración se señala a continuación en ejemplos de los estudiantes que afirmaron que NO era posible:

Tabla 19. Demostración realizada por tres estudiantes

E$_1$:	*"No, por que necesito una línea que este entre los 2 ángulos".* 
E$_{10}$:	*"No. Hace falta la línea de base porque sin linias no se puede pero si tuviera mas que sea un lado y los dos angulos se podría construir un triangulo".*
E$_{25}$:	*"No: porque también hase falta una línea donde se intersecte con los dos angulos".*

Estos tres estudiantes realizan un Experimento Crucial Constructivo

Por su parte, 8 de los 27 estudiantes afirmaron que Sí era posible realizar la construcción. Esa fue su conjetura y así intentaron demostrarlo:

Tabla 20. Demostración realizada por dos estudiantes

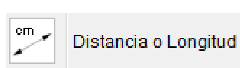
E_{19}:	*"Si es posible construir dos triángulos congruentes entre sí porque todos sus lados son sus medidas dan 180 y esa es la respuesta y yo digo que sí.".*
E_5:	*"Si se puede porque usted pone 2 puntos en cualquier lado luego uso la herramienta ángulo dada su amplitud y le oprime a un punto y luego pone otro punto t le sale un cuadrito y escribimos el número por ejemplo 67.18° le oprime ok y le sale.".*

Estos estudiantes realizaron una demostración de tipo *Empirismo Fallida (F).*

A través de la aplicación de las cinco actividades y el apoyo de GeoGebra se logra la comprensión de los criterios de congruencia de triángulos y se potencia el razonamiento de los estudiantes, haciéndolo demostrar en todo momento sus conjeturas.

4.2.3 Análisis fase de Orientación Libre. En esta fase se plantearon situaciones en las que los estudiantes aplicaron lo aprendido, es decir, los criterios de congruencia de Triángulos. Cada uno según sus capacidades y aprovechamiento de las sesiones de clase. Se hace ante preguntas que inducen al establecimiento de conjeturas cuya respuesta no puede ir sin una *explicación*. Así es como se potencian las habilidades de conjeturación y explicación en estas y todas las actividades de esta secuencia didáctica.

Para lograrlo, las cuatro actividades de esta fase se desarrollaron en GeoGebra, y en su diseño se tuvo en cuenta que para mejorar sus razonamientos se debía restringir un poco el uso de la medida. Es así que se inhabilitaron las herramientas de medición 

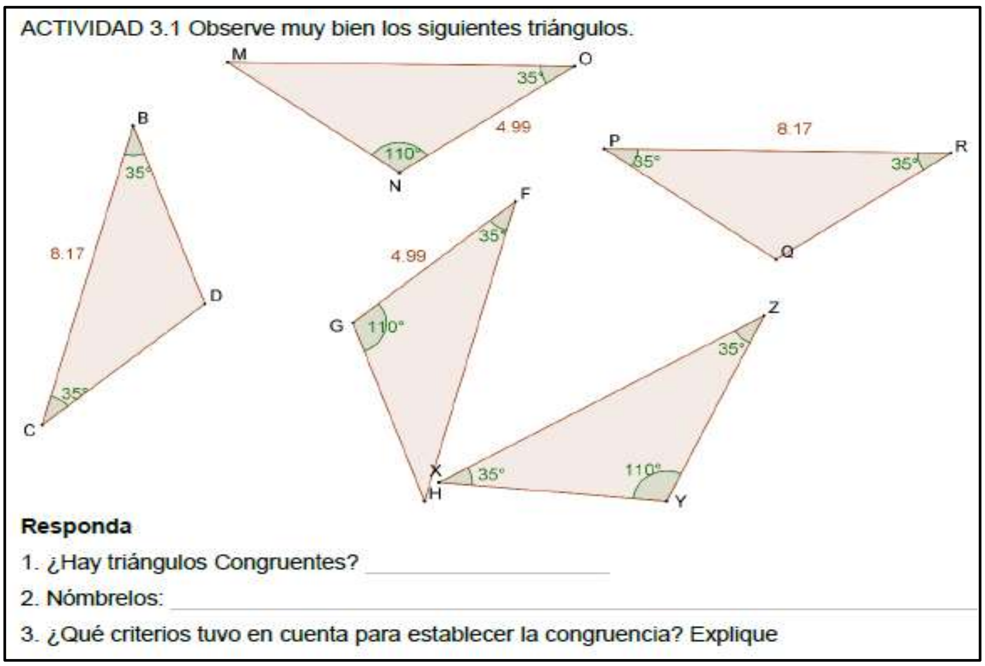
y 

. Los estudiantes no podían utilizarlas porque no eran visibles. Además se combinan razonamientos luego de observar imágenes fijas (hojas de trabajo) y dinámicas (GeoGebra).

Desde la actividad 3.1 a la 3.4 se evidencia el refinamiento del razonamiento de algunos estudiantes y la gran dificultad cognitiva y de escritura que persiste en otros. Aunque su lenguaje no es formal, los estudiantes están realizando un proceso que los impulsa a mejorar su forma de razonar.

En esta parte del análisis se presenta un seguimiento a tres de los estudiantes que establecieron correctamente sus conjeturas, en cada una de las preguntas de esta fase, y de otros que lo hicieron pese a su escasa habilidad escritora.

Figura 4. Actividad 3.1 en GeoGebra



Los estudiantes son E1, E24 y E25, quienes en la actividad 3.1 procedieron como se muestra en la tabla 21.

Tabla 21. Conjeturo y lo Demuestro Act 3.1

Acti-vidad	**CONJETURO Y LO DEMUESTRO**		
	Estudiante E1	**Estudiante E24**	**Estudiante E25**
ACT 3.1	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: $BCD \cong PQR$, $MNO \cong FGH$ 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *"1. BCD PQR* *1 Conozco 1 lado y 2 ∡ adyacentes.* *2 Conozco 3 angulos y 1 lado* *3 Conozco 3 angulos* *2. $MNO \cong FGH$* *1 Conozco 1 lado y ∡ adyacente* *2 Conozco 3 angulos y 1 lado* *3 Conozco 3 angulos* *Todos los triángulos son congruentes.* *Conozco 3 angulos y 2 lados"*	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: $MNO \cong PQR$, $BCD \cong FGH$ 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *El triángulo $MNO \cong PQR$ por que. conozco 2 lados y ∡ el comprendido entre ellos.*	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: $CBD \cong PRQ$, $MNO \cong FGH$. 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *"Todos los triángulos son iguales ya que tienen todos sus lados iguales y todos sus angulos"* *$CBD \cong MNO$, PQR, FGH, XYZ conosco 3 lados y 3 angulos.*

Los tres estudiantes hacen afirmaciones teniendo en cuenta medidas que aunque no estaban escritas en las figuras, hicieron algunos rayados en sus hojas de trabajo suponiendo que como los triángulos tenían ángulos iguales, también tendrían lados iguales; se podrían deducir, por ejemplo, que eran triágulos isósceles y que "a lados iguales, ángulos iguales" o viceversa.

E1 y E25 concluyen que todos los triángulo son iguales y utilizan notación matemática. Además no tuvieron en cuenta que el triángulo XYZ solo muestra ángulos y esa información no es suficiente para establecer relaciones de congruencia.

En la pregunta 3, ninguno expresa algún criterio de conguencia aprendido en clase con lenguaje matemático. Ambos están en lo correcto y sin embargo cada uno lo expresa de diferentes formas. Es lo que en el modelo de Van Hiele se llama, niveles de perfección. Además porque cada uno apropia un lenguaje matemático según su desempeño académico en el aula de clase.

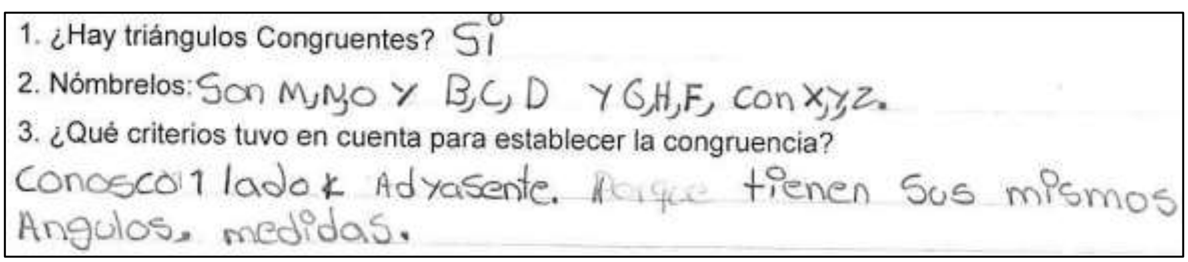
E24, estableció relación de congruencia solo en dos triángulos y sí establece el criterio LAL, pero no se puede establecer el origen de sus conjeturas, pues en la hoja de trabajo escribió solo valores de ángulos. Aunque la afirmación es correcta, no se dio cuenta que habían más triángulos congruentes.

En esta actividad los estudiantes en mención, elaboraron demostraciones de tipo Empirismo Ingenuo Inductivo (EII), que se percibe en el producto más no en el proceso ya que no se tuvieron datos de este.

Por otra parte, hubo estudiantes que dan muestra de mayor debilidad en la habilidad de explicación, pues no solo en esta actividad se evidencia sino en las siguientes, como se muestra más adelante.

Aquí, E27 por ejemplo,

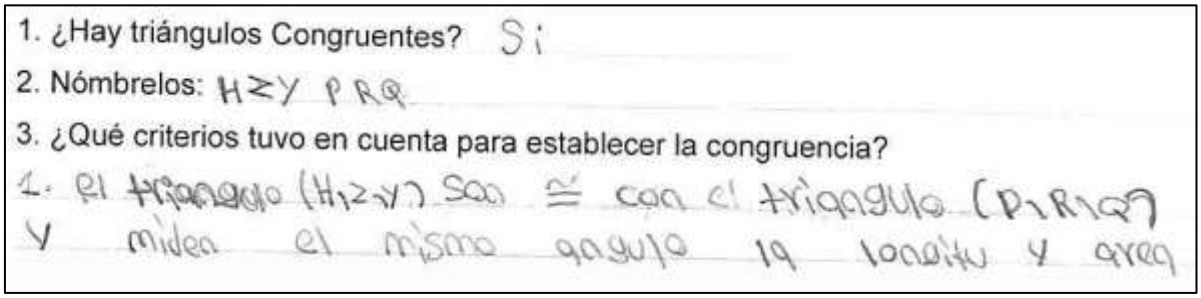
Ilustración 18. Explicación débil E27



1. ¿Hay triángulos Congruentes? Si
2. Nómbrelos: Son M,N,O y B,C,D y G,H,F, con X,Y,Z.
3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia?
Conosco 1 lado k Adyasente. Porque tienen sus mismos Angulos. medidas.

O E21,

Ilustración 19. Explicación débil E21



1. ¿Hay triángulos Congruentes? Si
2. Nómbrelos: HZY PRQ
3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia?
1. el triangulo (H,Z,Y) son ≅ con el triangulo (P,R,Q) y miden el mismo angulo la longitu y area

Luego de observar imágenes fijas en la actividad anterior, en la actividad 3.1.1 observaron imágenes en movimiento y respondieron las mismas preguntas anteriores más la siguiente: ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? ____ ¿Por qué?

Tabla 22. Conjeturo y lo Demuestro Act. 3.1.1

Acti-vidad	**CONJETURO Y LO DEMUESTRO**		
	Estudiante E1	**Estudiante E24**	**Estudiante E25**
ACT 3.1.1	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: *ABC≅MNO, ABC≅PQR, ABC≅FGH, MNO≅PQR, MNO≅FGH , PQR≅FGH* 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *1. Veo 2 ángulos y 1 lado* *2. conozco 3 ángulos y 2 lados* 4. ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? “*Sí”*. ¿Por qué? *“Porque en la actividad anterior había escrito que todos los triángulos eran congruentes y en GeoGebra me di cuenta que solo 4 son congruentes*”.	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: *BCD, MON, GFH, RPQ* 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *“Yo pienso que son congruentes con los mismos ángulos y la misma medida de lados”.* 4. ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? “*Sí”*. ¿Por qué? *“Sí por que todos los ángulos no heran iguales*”	1. ¿Hay triángulos congruentes? *Sí* 2. Nómbrelos: *BCD≅MNO, PQR, FGH.* 3. ¿Qué criterios tuvo en cuenta para establecer la congruencia? Explique: *Conosco 1 lado y ∡ ayacente BCD≅MNO PQR, FGH. Las construsiones MNO, PQR, FGH dependen de la construsion BCD. Mientras que la costrusion XYZ no depende de ninguna otra costrución.* 4. ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? “*Sí”*. ¿Por qué? *“Porque las contrucioness MNO, PKR, FGH estan costruidos a base del triangulo BCD. Mientras que las costrusio XYZ es independiente*”

Los estudiantes manipularon en GeoGebra, el archivo que observaron en la hoja de trabajo en la actividad anterior. El uso del software permite a los niños establecer diferencias pues las construcciones son dinámicas. Aplican los dos principios fundamentales del SGD: *dudar de lo que se ve, y ver más allá de lo que se ve.* Validaron sus conjeturas y reconocieron que el triángulo XYZ no guardaba ninguna relación de congruencia con los otros y que su construcción no dependía de los otros triángulos. La notación matemática de E1 mejora al tratar de nombrar los triángulos congruentes y siguen sin hacer mención de los criterios de congruencia.

Cabe resaltar que todos los estudiantes establecieron relaciones de congruencia, algunos no incluyeron el triángulo XYZ pero no lo explicaron y que la mayoría encontró la diferencia de observar una imagen fija a una dinámica.

Pese a esto, hay alumnos que persisten en sus dificultades. Se muestran en la ilustración 20 y 21.

Ilustración 20. Dificultad E27

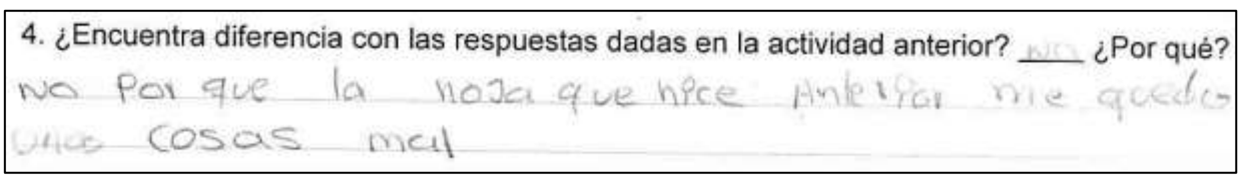
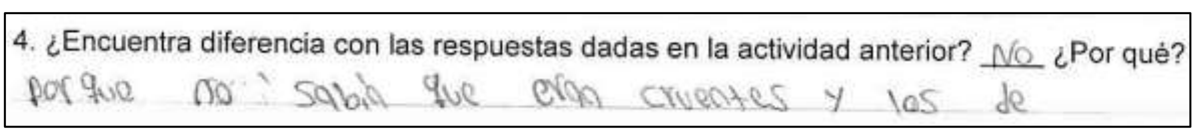

4. ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? no ¿Por qué?
no por que la hoja que hice anterior me quedo unas cosas mal

Ilustración 21. Dificultad E21


4. ¿Encuentra diferencia con las respuestas dadas en la actividad anterior? No ¿Por qué?
porque no sabia que eran cruentes y los de

En estos estudiantes, es una constante a pesar de la intencionalidad de las actividades y que la mayoría de estudiantes aprehende.

En el paso por la actividad 3.2, la mayoría de los estudiantes aplicaron sus conocimientos geométricos para explicar su conjetura y así sus demostraciones fueron mejor elaboradas:

Figura 5. Actividad 3.2 en GeoGebra

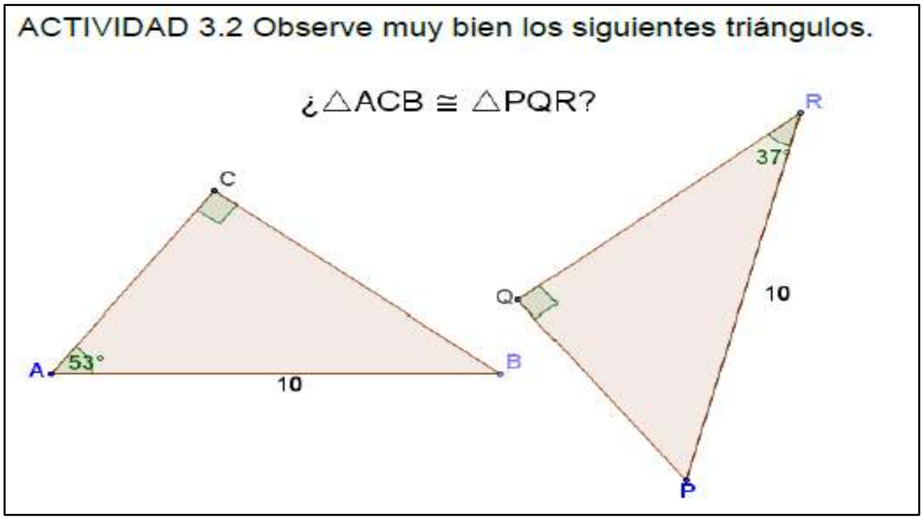


Tabla 23. Conjeturo y lo Demuestro Act. 3.2

Acti-vidad	CONJETURO Y LO DEMUESTRO		
	Estudiante E1	**Estudiante E24**	**Estudiante E25**
ACT 3.2	¿∆ACB ≅ ∆PQR? *Sí* ¡Explique! *Por que veo 3 ángulos y 1 lado, y sumando los 3 ángulos da 180°. En el triángulo ABC conozco 2 ángulos uno de 90° y uno de 53° y en el △PQR también conozco 2 uno de 37° y otro de 90°, entonces los dos triángulos tienen un ángulo en común de 90°, al igual que un lado de 10cm*	¿∆ACB ≅ ∆PQR? *Sí* ¡Explique! *Por que el ángulo A es ≅ con el ángulo P y por que el triángulo ABC es igual a PRQ por que el triángulo PRQ es el mismo que ABC y conozco 2 ángulos y un lado conozco un ALA entre A y C.*	¿∆ACB ≅ ∆PQR? *Sí* ¡Explique! *Por que nos deja ver un angulo de 90° una medida de uno de sus lados. Un angulo de 53° (A) y al octener dos de sus ∡ podemos concluir que el tercer angulo es de 37°. El criterio que establesi para concluir que son ≅ es el ALA.*

Para el establecimiento de la conjetura era necesario saber que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180° y así lo hicieron, afirmaron que

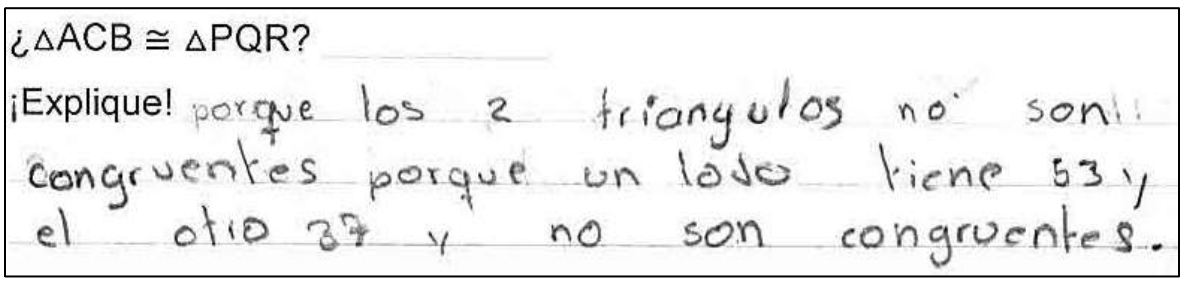
△ACB y △PQR sí son congruentes y explican haciendo evidente la comprensión del criterio ALA.

Aunque E1, no termina la idea de manera coherente, junto con E24 y E25 realizan demostraciones de tipo Analítico Experimento Mental Estructurado porque usan propiedades matemáticas para justificar sus afirmaciones ayudados por el arrastre en GeoGebra para comprobar y convencerse de su validez..

Con todo y lo anterior, persiste la dificultad en cuanto al contenido y en cuanto a la habilidad de *Explicar*. Por ejemplo, los estudiantes E14 y E21:

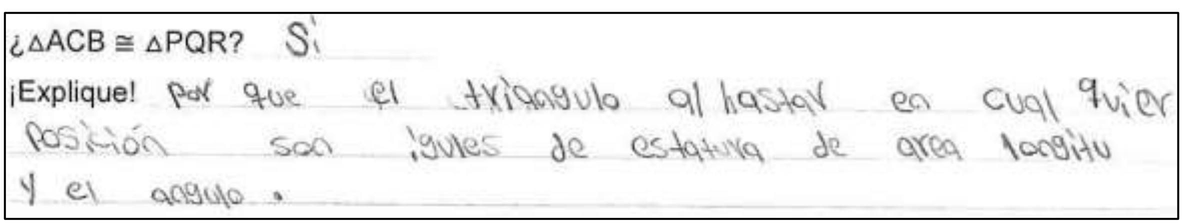
E14

Ilustración 22. Explicación Débil E14


¿△ACB ≅ △PQR?

¡Explique! porque los 2 triangulos no son congruentes porque un lado tiene 53 y el otio 37 y no son congruentes.

Ilustración 23. Explicación Débil E21


¿△ACB ≅ △PQR? Si

¡Explique! por que el triangulo al hastar en cual quier posición son igules de estatura de area longitu y el angulo.

Ahora se observa el desempeño de los estudiantes en la actividad 3.3:

Figura 5. Actividad 3.3

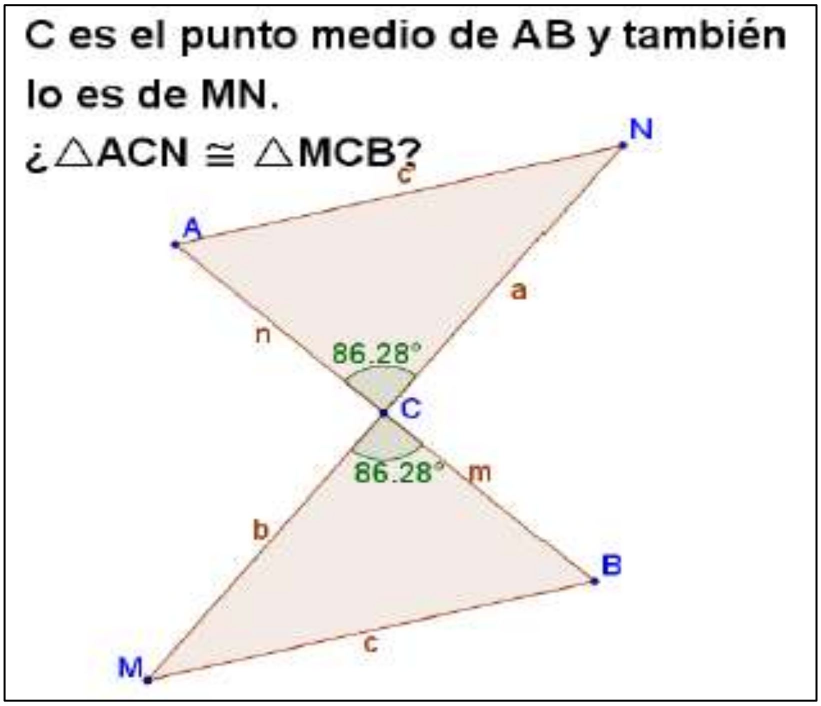


Tabla 24. Conjeturo y lo Demuestro Act. 3.3

Actividad	CONJETURO Y LO DEMUESTRO		
	Estudiante E1	**Estudiante E24**	**Estudiante E25**
ACT 3.3	¿∆ACN ≅ ∆MCB? <u>*Sí*</u> ¡Explique! *El lado c y el lado c' son lados paralelos. △ANC y el △MBC tienen un ∡ en común. Como el punto c es el punto medio de n y m, a y b tienen que medir la misma longitud. Entonces el lado c o el lado c' salen solos.* *Criterio: LAL (lado, ángulo lado)*	¿∆ACN ≅ ∆MCB? <u>*Sí*</u> ¡Explique! *Por que como parte del punto C los dos miden igual y esta entre los dos triángulos están hechos por las mismas medidas y también están hechos con el punto c por que si movemos el punto c los dos triángulos se mueven y pueden cambiar medidas y sigen siendo ≅*	¿∆ACN ≅ ∆MCB? <u>*Sí*</u> ¡Explique! *xque si c es el punto medio de AB y MN, n y m tienen que ser de la misma medida x que c es el punto medio y lo mismo pasa con b y a por eso todos los lados son iguales.* *El ∡ A es ≅ al ∡ B ya que si c es el punto medio de AB y MN los lados nm y ba y también los lados c y c'.* *Y para saber que ANC y MCB son ≅ grasias al criterio L.A.L*

Esta fue una de las actividades que más generó dificultad dado que la única medida que se dio fue la de los ángulos ACN y MCB. Continuamente expresaban que no se podía solucionar porque no tenían medidas de lados, otros tomaron medidas. La docente tuvo que repetir por varias ocasiones las orientaciones, llevando a los estudiantes a entender que el problema tenía una información muy importante, que estaba ahí, que la leían pero que ellos no la veían. Era la del punto medio C.

Los tres estudiantes, luego de una larga jornada, lo comprendieron y lo expresaron según su habilidad escritora. E1 y E25 hacen evidente el criterio LAL que efectivamente era al que se quería llegar. E24 en sus letras intenta explicarlo (se interpreta) y hace alusión a su experiencia con el software.
Los tres realizan demostraciones de tipo Experimento Mental Estructurado porque usan propiedades matemáticas para justificar sus afirmaciones, ayudados por el arrastre en GeoGebra para comprobar y convencerse de su validez

Ahora bien, los estudiantes E21 y E18 presentan gran dificultad para expresarse por escrito y más aún al utilizar un lenguaje matemático. Estas se observan en la ilustración 24 y 25

Ilustración 24. Justificación escaneada E21

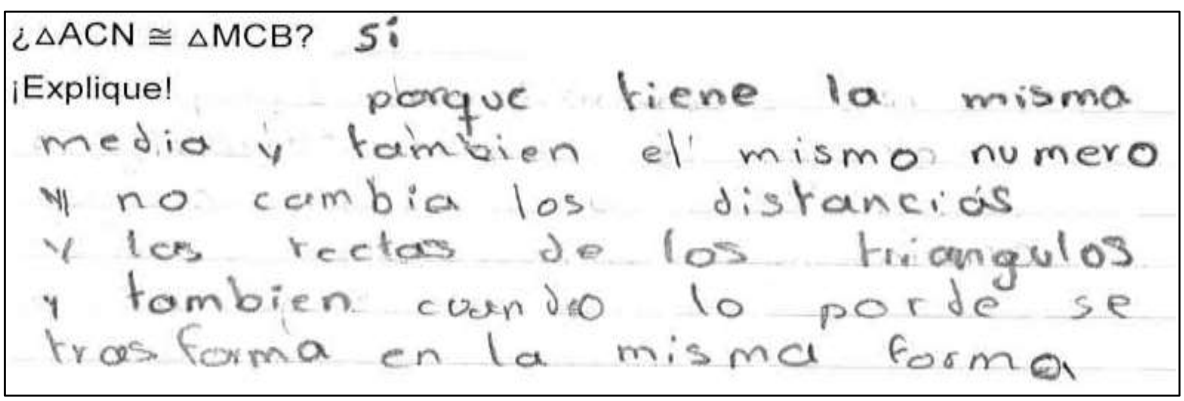
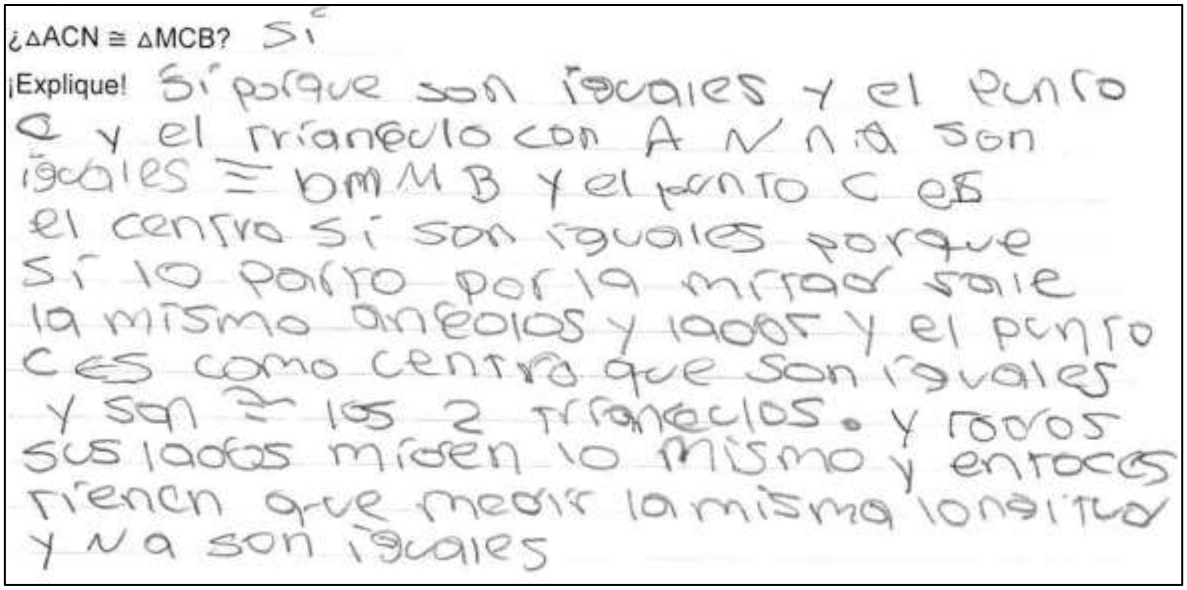

¿$\triangle ACN \cong \triangle MCB$? sí
¡Explique! porque tiene la misma medio y tambien el mismo numero y no cambia los distancias y las rectas de los triangulos y tambien cuando lo porde se trasforma en la misma forma

Ilustración 25. Justificación escaneada E18



¿ΔACN ≅ ΔMCB? Si

¡Explique! Si porque son igvales y el punto C y el triangulo con A N M A son igvales ≅ bm M B y el punto C es el centro si son iguales porque si lo parto por la mitad sale la mismo angolos y lados y el punto C es como centro que son iguales y son ≅ los 2 triangulos. y todos sus lados miden lo mismo y entoces tienen que medir la misma longitud y N a son iguales

Sin embargo, al interpretar sus letras, puede decirse que logran hacer una demostración tipo Ejemplo Genérico Analítico (EGA) porque usan propiedades generales observadas en la construcción dinámica, pero tienen dificultades al comunicarlas en el lenguaje matemático

Ya en la actividad final, la 3.4, los estudiantes solo manipularon el archivo en GeoGebra y establecieron sus conjeturas:

Figura 6. Actividad 3.4

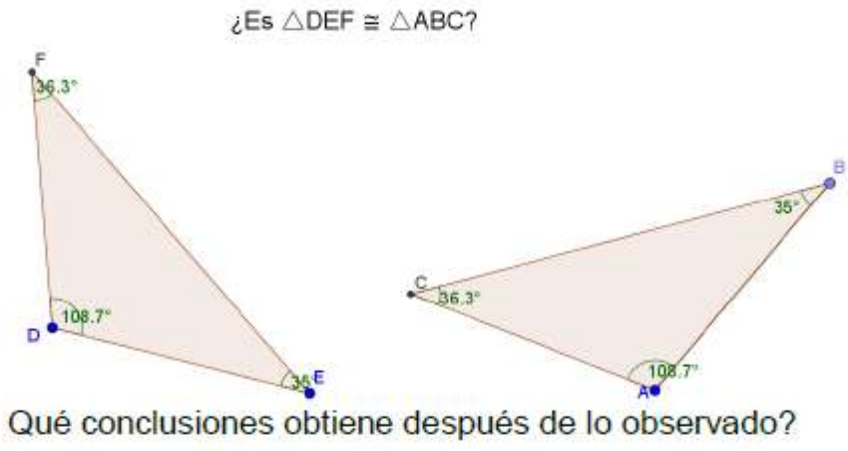


Tabla 25. Conjeturo y lo Demuestro Act. 3.4

Acti-vidad	CONJETURO Y LO DEMUESTRO		
	Estudiante E1	**Estudiante E24**	**Estudiante E25**
ACT 3.4	Qué conclusiones obtiene después de lo observado? *Los dos triángulos (ABC –DEF) no son congruentes por que al manipularlos en GeoGebra cambian de tamaño.* *No tiene ningún criterio (LLL, LAL, ALA)*	Qué conclusiones obtiene después de lo observado? *No son congruentes por que a simple vista no son iguales por que no hay criterios y al moverlos no cambian los ángulos y solo se puede mover*	Qué conclusiones obtiene después de lo observado? *Pues que el triangulo ABC cambia su posision mientras que cuando manipulo un punto del triangulo DEF cambia el tamaño tanto no cambian sus angulos*

Conjeturan correctamente que no hay congruencia entre los dos triángulos y su explicación difiere de uno a otro, se hicieron entender expresando que "*no hay criterios*" y referenciando lo que observaron en el software.

Se esperaba que los estudiantes, antes de manipular el archivo, determinaran que a partir del conocimiento de los tres ángulos no es posible establecer relaciones de congruencia, pero ninguno lo hizo. Solo la imagen dinámica les permitió explicar su conjetura, no desde el contenido aprendido.

Estos estudiantes realizaron demostraciones de tipo Experimento Crucial basado en ejemplo (ECB).

4.2.4 Análisis Fase de Integración. Esta fase consistente en completar un mapa conceptual, tenía el propósito de hacer que el estudiante adquiriera una visión general del nuevo contenido. En este grado (y tal vez a nivel de Primaria), los niños aún no conocían este instrumento.

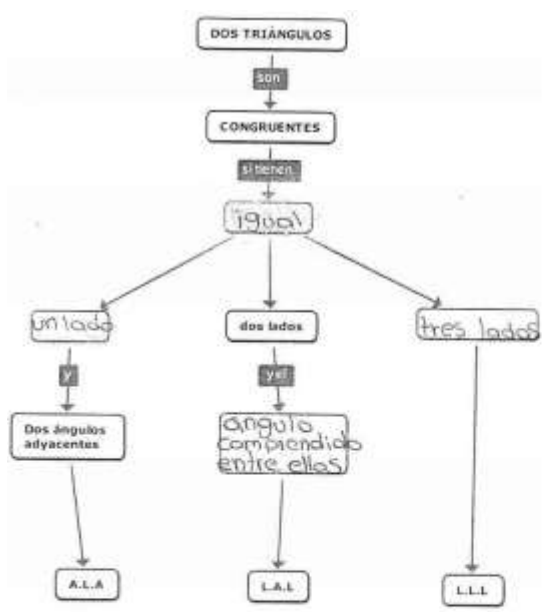
Por esto les causó bastante dificultad y a pesar de que la docente les explicó cómo debía diligenciarse por varias ocasiones, hubo niños que no lo terminaron, o lo hicieron incorrectamente.

En un mapa conceptual las ideas se leen de arriba hacia debajo de manera coherente pero con la dificultad que algunos tienen para escribir y explicar, esto se hace aún más complicado.

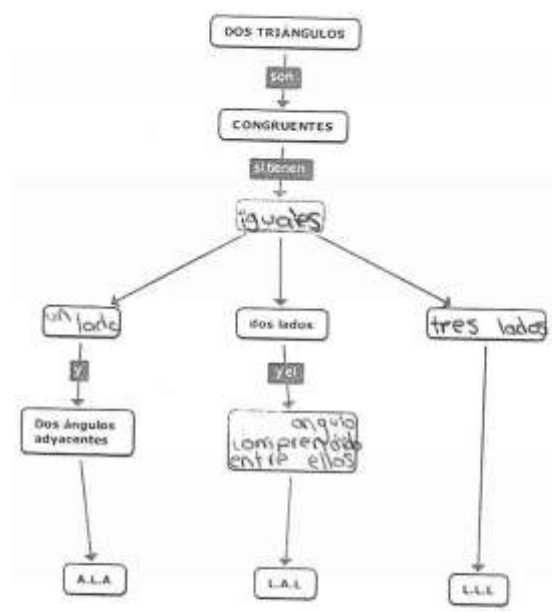
A continuación dos ejemplos correctos:

Esquema 4. Mapas Conceptuales realizados por estudiantes

E6



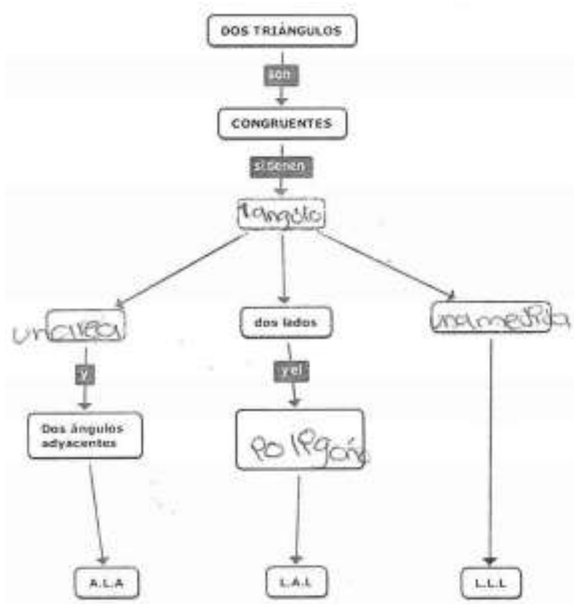
E2



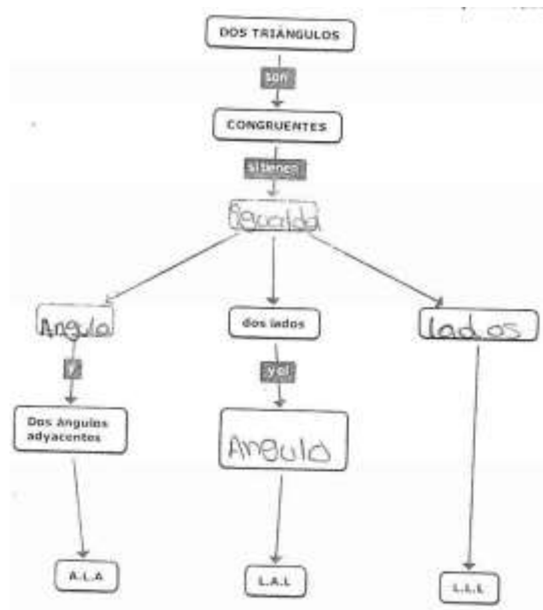
Y dos ejemplos de los 9 que lo hicieron de manera incorrecta o incompleta

Esquema 5. Mapas Conceptuales realizados por los estudiantes

E19:



E27



4.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA FINAL

El análisis de la prueba final realizada por los estudiantes del grado sexto de un colegio rural del departamento de Santander permite determinar en qué medida la Intervención realizada, por medio de una Secuencia Didáctica mediada por el uso de GeoGebra, permitió potenciar habilidades de razonamiento (explicar, conjeturar, justificar, demostrar) para mejorar las debilidades en la resolución de problemas presentada en el diagnóstico.

La prueba final aplicada fue la misma que la prueba inicial y su análisis se realizó de manera similar: se establecieron los niveles de razonamiento que presentan los estudiantes según el modelo de Van Hiele, y se caracterizaron según el tipo de demostración que evidencian cuando justifican sus respuestas.

4.3.1 Niveles de Razonamiento. A continuación se muestran tablas que comparan los resultados de la prueba inicial con la final, en cada uno de los bloques temáticos:

Tabla 26. Niveles de Razonamiento (Modelo Van Hiele)

		INICIAL	FINAL
Paralelismo	DED. FORMAL	7	15
	DEDUCCIÓN INFORMAL	2	5
	ANÁLISIS	3	1
	RECONOCIMIENTO	5	2
	NO ALCANZA NIVEL	10	4

		INICIAL	FINAL
Perpendi-cularidad	DED. FORMAL	7	6
	DEDUCCIÓN INFORMAL	1	0
	ANÁLISIS	0	2
	RECONOCIMIENTO	1	0
	NO ALCANZA NIVEL	18	19

		INICIAL	FINAL
Polígonos	DED. FORMAL	4	7
	DEDUCCIÓN INFORMAL	0	0
	ANÁLISIS	12	12
	RECONOCIMIENTO	11	4
	NO ALCANZA NIVEL	0	4

		INICIAL	FINAL
Ángulos	DED. FORMAL	1	7
	DEDUCCIÓN INFORMAL	3	4
	ANÁLISIS	5	1
	RECONOCIMIENTO	12	14
	NO ALCANZA NIVEL	6	1

		INICIAL	FINAL
Triángulos	DED. FORMAL	2	3
	DEDUCCIÓN INFORMAL	5	5
	ANÁLISIS	5	4
	RECONOCIMIENTO	13	15
	NO ALCANZA NIVEL	2	0

Según el test aplicado se evidencia el escalonamiento de nivel por parte de algunos estudiantes y el retroceso de otros, situación que puede deberse a varios factores (que no se analizaron). Estas diferencias numéricas se confrontaron con las justificaciones a sus respuestas y se realizó un análisis a quienes lograron el nivel de Deducción Formal, es decir, respondieron correctamente a las preguntas 4, 8, 12, 16 y 20.

4.3.2 Proceso de Razonamiento. Como se expresó en el párrafo anterior, el siguiente análisis se realiza teniendo en cuenta a quienes se ubicaron en el nivel de Deducción Formal. En el anexo L se puede observar el comportamiento de todos los estudiantes en las dos pruebas.

Pregunta N° 4: Paralelismo

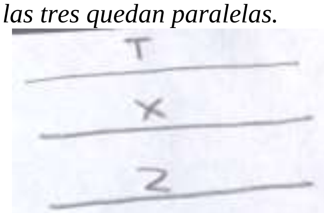
En este bloque de preguntas solo dos estudiantes dejaron sin justificar sus respuestas. Y quienes habían respondido incorrectamente o que no justificaron sus respuestas en la prueba inicial lo hicieron en la prueba final con demostraciones *Deductivas Fallidas (DF),* como los casos siguientes:

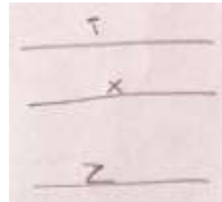
Tabla 27. Pregunta N° 4 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_3:	b	*Las rectas se deben cortar porque la x es paralela a la z y la l no*	I/NJ	c	*Porque la x t son paralelas pero la t con la z no son paralelas son perpendiculares porque se chocan*	DF
E_8:	c	No justificó	I/NJ	c	*Son paralelas la t y z porque ellas jamas se unirán ni se cortar porque las paralelas jamas se cortan*	DF
E_{11}:	a	*Si t es ∥ a x y x es paralela a z entonces t es ∥ a z*	I/NJ	c	*Porque t y x son paralelas x y z tanbien t y z son perpendiculares porque no quedan en la misma linea*	DF
E_{22}:	b	*Porque la t y la z se cortan*	I/NJ	c	*Porque las 2 son paralelas y no se cruzan*	DF

Por otra parte, los estudiantes E2 y E6, habían demostrado Fallidamente en la prueba inicial, y ahora se apoyan en una gráfica construida por ellos mismos, para realizar su justificación.

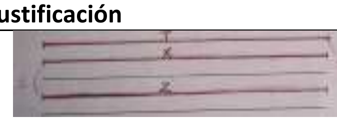
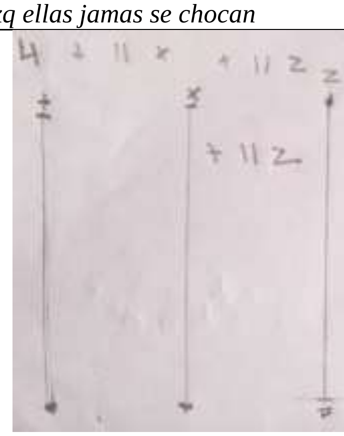
Tabla 28. Pregunta N° 4 – Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_2:	c	*Se quedan a la misma distancia y cada vez se van ajuntando y se choca.*	DF	c	*Porque t es una línea recta y pasa una más abajo que es x a una distancia entonces t y x son paralelas y más debajo de la x pasa la otra y todas las tres quedan paralelas.* 	ECC

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E6:	c	*t y z son paralelas*	DF	c	*Son paralelas porque nunca se cortan aunque se prolonguen* 	ECC

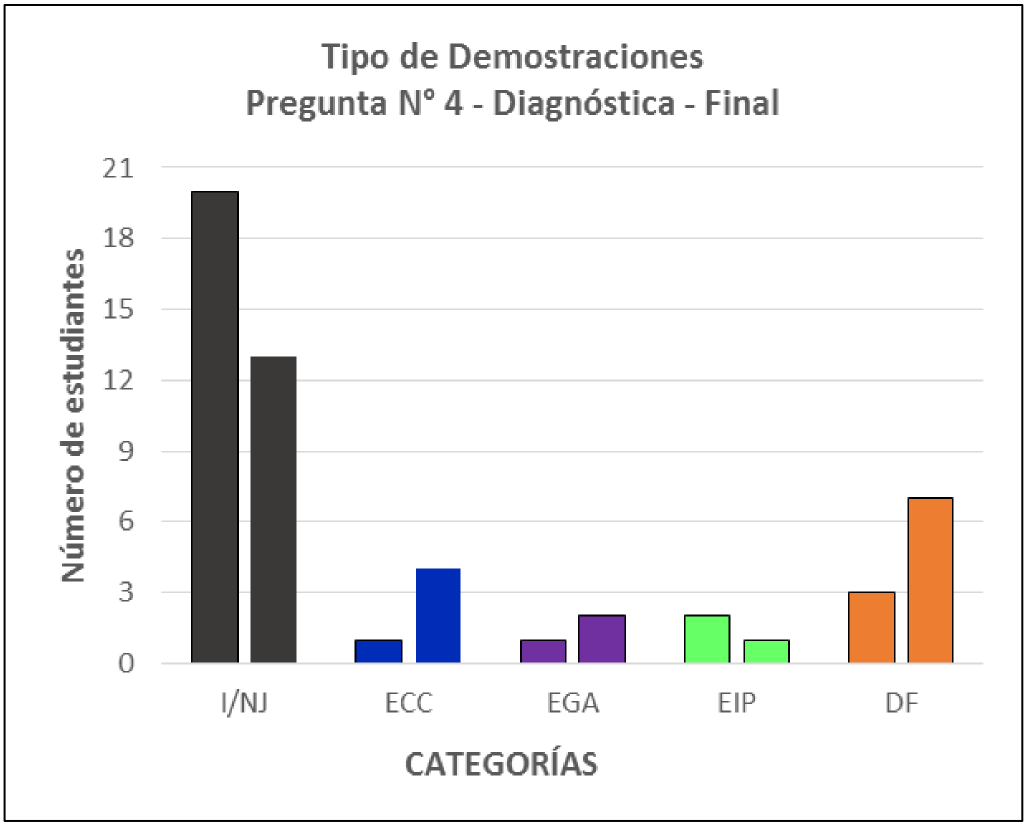
Estudiantes que habían realizado algún otro tipo de demostración, se mantuvieron en la misma forma de razonar, E13 lo expresó con otra propiedad y E25 se apoyó en una gráfica para apoyar su demostración y mejorarla.

Tabla 29. Pregunta N° 4 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E1:	c		ECC	c		ECC
E13:	c	*Van en la misma dirección*	EIP	c	*xq ellas jamas se chocan*	EIP
E25:	c	$t \parallel x$ *y* $x \parallel z, z \parallel t$	EII	c	 *Porqué al ser paralela la t y la x y x con z la t es paralela a z.*	ECC

A continuación, la gráfica muestra una visión general del comportamiento de todos los estudiantes en esta pregunta tanto en la prueba inicial como en la final.

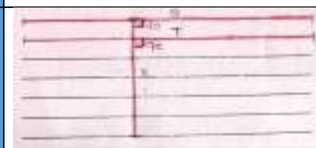
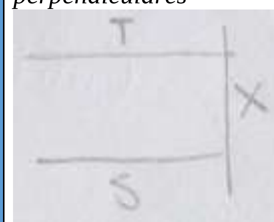
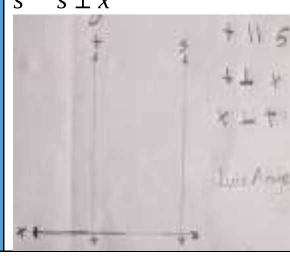
Gráfica 14. Tipo de Demostraciones Pregunta N° 4



Pregunta N° 8: Perpendicularidad

Solo 5 niños obtuvieron nivel de Deducción Formal y su comportamiento frente a esta pregunta se dio de manera similar a la anterior: quienes habían errado en la respuesta, ahora obtuvieron nivel pero su demostración es Fallida, quienes habían hecho su demostración Fallida ahora mejoran, realizando de tipo Empírico Ingenuo o Experimento Crucial.

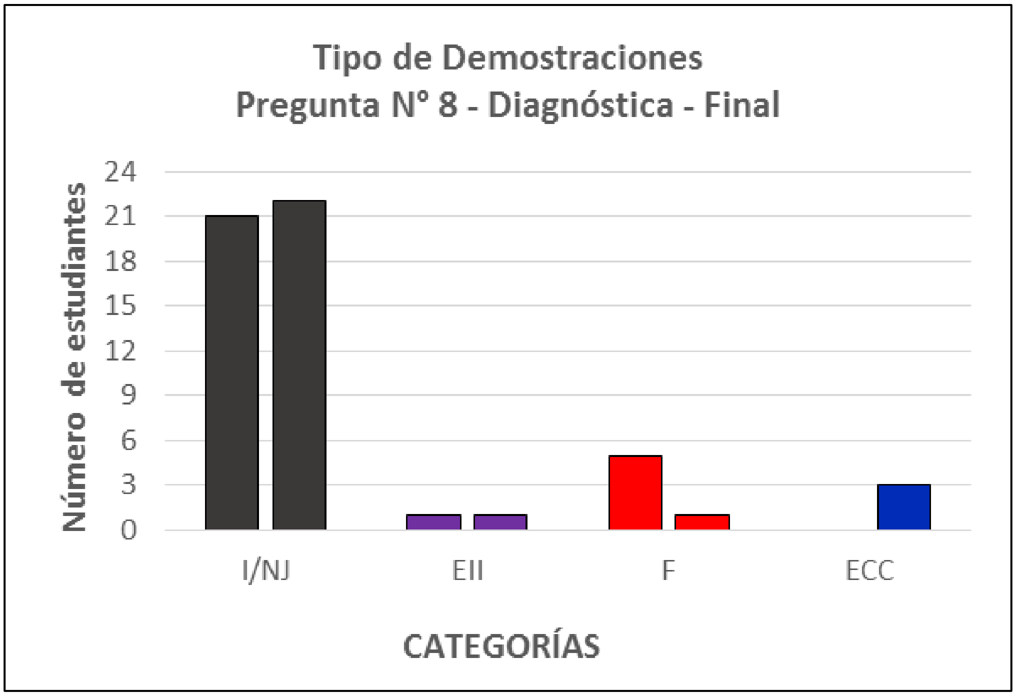
Tabla 30. Pregunta N° 8 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL				PRUEBA FINAL		
		Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_{11}:		c	*Si x es perpendicular a t x = también es perpendicular a s*	I/NJ	a	*Son paralelas porque quedan en la misma linea*	DF
E_{1}:		a	*La recta x se cortaría con la s*	F	a		ECC
E_{2}:		a	*Porque al pasar por la recta t se hacen perpendiculares*	F	a	*Porque la reta T queda como una línea y la recta s es otra línea paralela con la otra y la x se atraviesa y queda s y x perpendiculares* 	ECC
E_{26}:		a	*Porque en la pregunta se dice que las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t por lo tanto también es perpendicular a la recta s.*	F	a	*Porque las rectas t, s son paralelas y cuando la recta x se cruza forma una línea perpendicular con la recta s.*	EII
E_{25}:		a	*Si t y z son perpendiculares z y t son perpendiculares también*	F	a	*Porque al ser* $\perp$ *la t y x y la t* $\parallel$ *s* *s* $\perp$ *x* 	ECC

II/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; DF: Deductiva Fallida

De manera general, en la siguiente gráfica se muestra la actuación de todos los estudiantes en esta pregunta en las dos pruebas.

Gráfica 15. Tipo de Demostraciones Pregunta N° 8



Pregunta N° 12: Polígonos

Solo un estudiante, de quienes alcanzaron el nivel de Deducción formal, no justificó. Los otros seis lo hicieron presentando demostraciones de tipo Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP). Su justificación se basa en la regularidad que encuentran y en la ayuda gráfica pero no lo *generalizan*.

Hay que aclarar que aunque en la prueba inicial se observa que los estudiantes marcaron la clave correcta, debían haber respondido correctamente a todas las preguntas para alcanzar el nivel de Deducción formal. Por esto fueron categorizados en Incorrecta o No justifica (I/NJ). Estos estudiantes en la prueba Final lograron el nivel y además realizaron sus demostraciones.

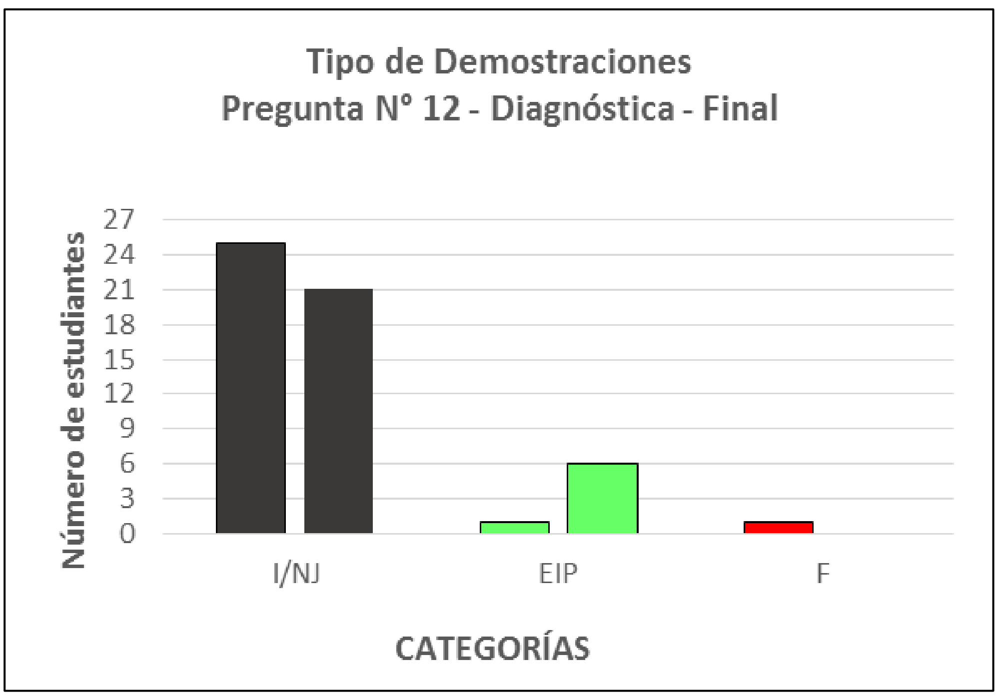
A continuación se presenta una tabla donde se comparan las justificaciones realizadas por estos estudiantes.

Tabla 31. Pregunta N° 12 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_2:	c	*Cada vez va aumentando 180°*	EIP	c	*Porque van teniendo mas vértices entonces van sumando 180 y entonces el pentágono es de 540 mas 180 igual a 720*	EIP
E_6:	c	*Va avanzando de 180 + 540 es 720*	I/NJ	c	*540° le suma 180° da 720°*	EIP
E_7:	c	*Va aumentando de 180 en 180*	I/NJ	c	*Porque va aumentando de 180° en 180°*	EIP
E_{16}:	c	*La puse a la londra tolondra*	I/NJ	c	*Porque se van sumando de a 180°*	EIP
E_{20}:	c	*Porque el hexágono tiene 720°*	I/NJ	c	*Ban de ciento ochenta a ciento ochenta*	EIP
E_{25}:	c	*Porque dentro del exagono se muestran 4 tiangulos 180° x 4 720°*	I/NJ	c	*540° + 180° = 720°*	EIP

Y la gráfica 17, se muestra la manera como se caracterizaron los estudiantes en esta pregunta.

Gráfica 16. Tipo de Demostraciones Pregunta N° 12



Pregunta N° 16: Ángulos

Estudiantes que respondieron incorrectamente a la pregunta en la prueba inicial, muestran ahora en la final respuestas correctas logrando con eso ubicarse en el nivel de Deducción Informal. Poco a poco se nota que los estudiantes tienen más voluntad y argumentos para justificar sus respuestas, sin embargo, en su intento por hacerlo, realizan demostraciones tipo Deductiva Fallida.

En la tabla que se muestra a continuación se puede percibir aquello:

Tabla 32. Pregunta N° 17 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_5:	a	*No justifica*	I/NJ	a	*Porque si sabemos la medida del angulo a y la del angulo b son 90° y si le quitamos la medida de la a pues nos da la de la d.*	DF
E_{15}:	d	*No justifica*	I/NJ	a	*Porque hasta saber cual es el angulo a podemos saber el angulo d*	DF
E_{17}:	c	*No justifica*	I/NJ	a	*Hasta no saber la medida del ángulo A no podemos saber cual es la medida del ángulo b*	DF
E_{18}:	c	*Pues hay habían bastantes yo esa me quedo pero la respondí con mucha delicadeza y me puse a medir todos los ángulos y me dio eso.*	I/NJ	a	*Porque al no saber la medida del angulo a no sabemos la c y b*	DF
E_{22}:	d	*No se como reprecentarla*	I/NJ	a	*Porque al saber la medida del angulo a se puede saber la medida del angulo b*	DF

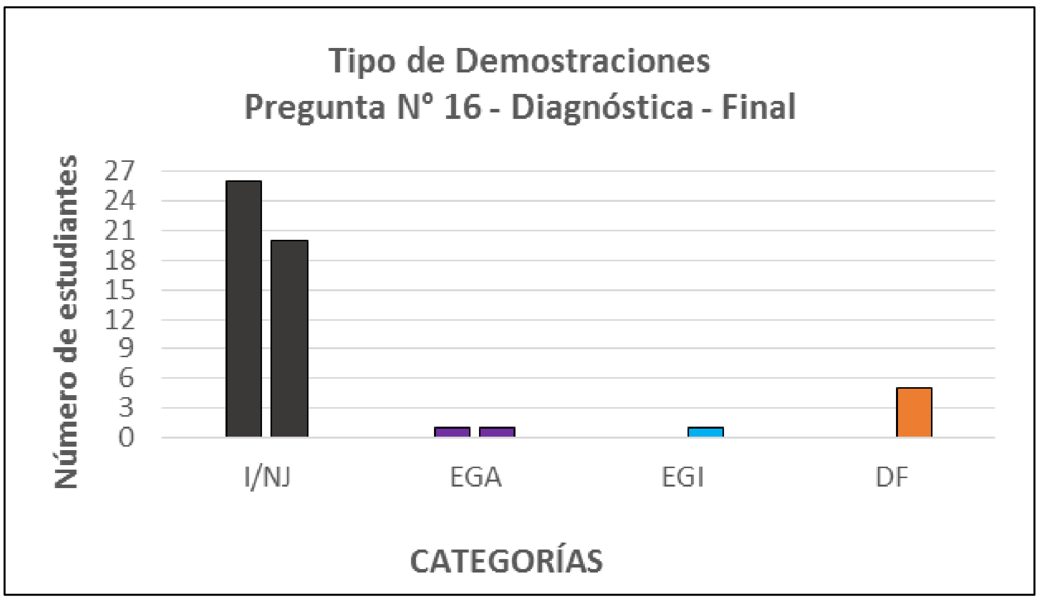
Por su parte, dos estudiantes logran realizar una demostración tipo Ejemplo Genérico. Las justificaciones de E25 están basadas en propiedades que recuerda (EGI) y aunque E2 lo explica de forma similar, su estructura insinúa que hay propiedades que descubre en el gráfico dado (EGA).

Tabla 33. Pregunta N° 18 - Prueba Final

Estud	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	**Justificación**	**Dem**	**Rta**	**Justificación**	**Dem**
E_2:	**a**	*Porque al medir con el transportador es la misma medida*	I/NJ	**a**	*si sabemos que el angulo c es recto entonces es de 90 entonces necesitamos la medida del angulo a y cuando la sepamos sumamos 90 mas lo que mide el angulo a y lo que hace falta es lo del angulo b.*	EGA
E_{25}:	**a**	*Si allamos el balor del angulo a y se lo restamos al angulo c, octenemos los resultados del angulo b.*	EGA	**a**	*El ∡c es de 90° el ∡ d 180° y si calculamos el valor de ∡a sabremos el balor del ∡b x que al sumar el ∡a con el ∡b dara la suma 90°*	EGI

De forma gráfica, así fue el comportamiento de todos los estudiantes en esta pregunta:

Gráfica 17. Tipo de Demostraciones Pregunta N° 16



Pregunta N° 20: Triángulos

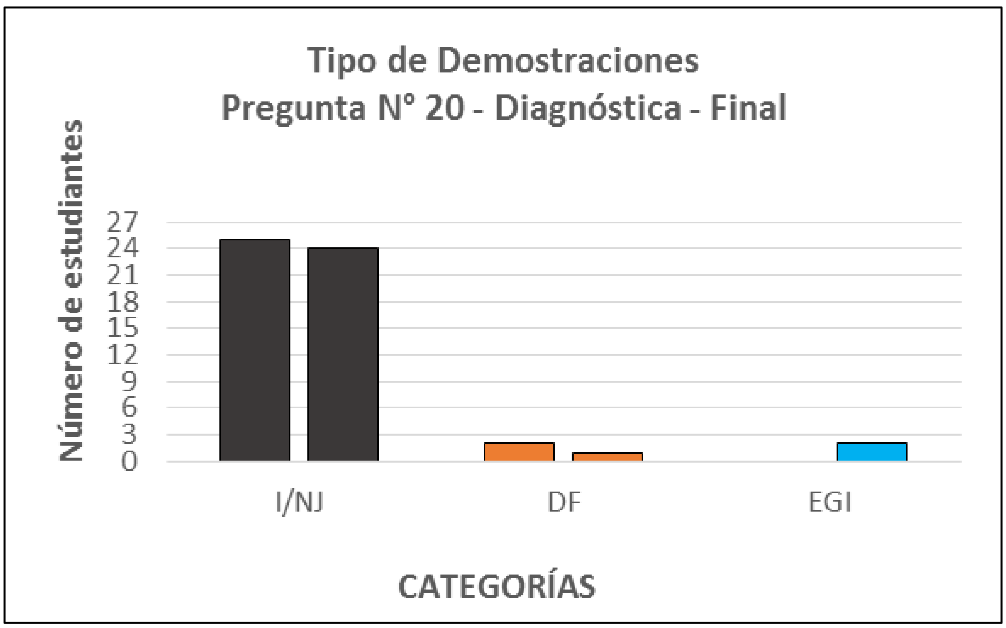
Solo tres estudiantes alcanzaron el nivel de Deducción Formal. En la prueba inicial lo habían logrado dos. Aquí se observan mejores demostraciones aunque en su intento, E6 realiza una demostración Deductiva Fallida al asegurar que el ángulo interno es 60° porque es la mitad del ángulo externo. Mientras que E1 y E25 estructuran su demostración desde propiedades que conocen y en su redacción lo manifiestan. Estas demostraciones y la comparación con lo sucedido en la prueba inicial, se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 34. Pregunta N°20 - Prueba Final

Estud.	PRUEBA INICIAL			PRUEBA FINAL		
	Rta	Justificación	Dem	Rta	Justificación	Dem
E_1:	a	*180° - 120° = 60° y esos dos ángulos eran iguales*	I/NJ	b	*Porque la suma de los tres ángulos interiores debe sumar 180°, un ángulo mide 90°, otro 60 y 90 + 60 = 150, 180 - 150 = 30*	EGI
E_{25}:	a	*No justifica*	I/NJ	b	*120 es un angulo esterno y el angulo interno debe ser de 60° y 60° + 90° = 150 y 180 – 150 = 30 El ∡x es de 30°.*	EGI
E_6:	d	*Porque 120 x 60 da 720*	I/NJ	b	*La mitad de 120 es 60° y el angulo de 90° + 60° = 150° - 180° = 30°*	DF

A continuación el panorama general de todos los estudiantes en esta pregunta:

Gráfica 18. Tipo de Demostración Pregunta N° 20



A manera de conclusión se puede observar que, como se afirma en Fiallo[114], se espera que un estudiante en el nivel de Análisis (según el modelo de Van Hiele) realice demostraciones de tipo Empírico Ingenuo, Experimento Crucial (basado en ejemplo y Constructivo) y Ejemplo Genérico Analítico y pues, eso es precisamente lo que se observa en los estudiantes analizados a pesar de que el test los ubica en el nivel de Deducción Formal.

[114] FIALLO, Op. cit., p. 11.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas de *El Razonamiento Matemático en un ambiente de Geometría Dinámica,* en el que su objetivo estuvo centrado en potenciar habilidades del proceso de razonamiento a través de la utilización de GeoGebra para fortalecer la resolución de problemas geométricos.

Uno de los objetivos de esta investigación fue determinar el estado actual de la enseñanza y los aprendizajes de la geometría con respecto a la resolución de problemas. Finalizado el estudio, se concluye:

- Los estudiantes evidencian gran debilidad en los contenidos geométricos debido al escaso tiempo dedicado por la docente a la enseñanza de la geometría. Eso a su vez afecta el proceso de resolución de problemas ya que no hay cimientos sólidos que ayuden a construir argumentos matemáticos.

- Los argumentos utilizados por los estudiantes, son en su mayoría de convicción externa, según lo define Harel y Sowder[115].

- A los estudiantes les cuesta realizar justificaciones, desconocen la posibilidad de realizar verificaciones a sus conjeturas. No poseen una estrategia para resolver problemas.

- Otro de los propósitos de este estudio fue diseñar y aplicar una secuencia didáctica (SD) mediada con GeoGebra. Con respecto a esta, se concluye:

[115] HAREL, Op cit., pp. 234.

- La SD: “Un ambiente GeoGebra, ¡para potenciar el razonamiento matemático!” que conjugó el uso del software con la constante petición de explicaciones a los estudiantes y la implementación de las Fases de Aprendizaje del modelo de Van es una terna que realmente contribuyó a potenciar el proceso de Razonamiento.

- GeoGebra está en el pensamiento de los niños y ha hecho que su estructura mental también sea dinámica. Esto se refleja, por ejemplo, cuando a lápiz y papel dibujan triángulos rotados, en posiciones diferentes a las que acostumbraban hacerlos. Otra forma que evidencia la influencia del uso de GeoGebra es la proyección de líneas en sus dibujos, como si lo estuvieran haciendo en el software. La gran mayoría de estudiantes diferencian un dibujo de una construcción geométrica y tienen presente las propiedades de dicho objeto.

- El uso de los computadores hizo que los estudiantes estuvieran motivados y dispuestos al aprendizaje.

- Los estudiantes manifiestan “q*ue es muy buena <u>su</u> idea de trabajar matemáticas con computadores, así aprendemos que los computadores no es solamente una herramienta para jugar también ahí podemos aprender cosas buenas*”

- El concepto de “*clases normales*” para los estudiantes está lejos de lo que vivieron en la intervención y por esto “*hemos aprendido mucho más de los que hubiéramos aprendido en una clase normal”*

- El acercamiento que han tenido los estudiantes hacia la solución de problemas se ha quedado en "ejercicios de aplicación" como los denomina Polya[116]. Es así que, el rol de la docente en el aula es primordial para implementar la constante solicitud de explicaciones ya sea oral o por escrito, es decir para crear un ambiente natural abierto al razonamiento. Hacer que esto sea un proceso gradual porque para los niños se les hace difícil *"responder las preguntas"**.

Y para finalizar, otro propósito de esta investigación fue analizar los resultados de la SD aplicada en el proceso de razonamiento. Así se concluye:

- La mayoría de los estudiantes evidenciaron mejora en el proceso de razonamiento puesto que el uso del software ha potenciado habilidades como demostración, explicación, justificación, establecimiento de conjeturas y aunque no usan un lenguaje matemático formal, se auscultan signos de refinamiento en sus demostraciones que el maestro se encargará de refinar con un trabajo constante.

- Los estudiantes del grado sexto de esta institución rural realizan demostraciones de tipo Empírico Ingenuo, Experimento Crucial (basado en ejemplo y Constructivo), Ejemplo Genérico Analítico y Experimento Mental Estructurado gracias a la constante solicitud de explicaciones, elaboración de conjeturas y a la exploración en GeoGebra.

[116] POLYA, George Op cit., p. 101.
*Opinión de un estudiante obtenida en entrevista anexo 12

6. LIMITACIONES

Frente a un grupo numeroso, es difícil analizar en todos los estudiantes el proceso que realizan. Una estrategia para lograr observarlos es la postura de cámaras en el salón y el trabajo en hojas donde todo el tiempo deben escribir; sin embargo, tanta escritura les produce "*aburrimiento*" y las cámaras les produce más temor para hablar del que ya tienen

Difícilmente logra generarse un ambiente de discusión debido a que los estudiantes no hablan entre sí y escasea el trabajo colaborativo, les pareció difícil porque en palabras de ellos *"no coincidíamos en las ideas"**[117]

Se evidencia una gran debilidad en la competencia escritora de los niños. Muchos de sus registros tuvieron que ser interpretados o simplemente no fueron transcriptos.

Transcripción de entrevista realizada a estudiantes

7. RECOMENDACIONES

Caracterizar a los estudiantes según sus formas de pensar permitió establecer la evolución que han tenido. Este logro en niños de grado sexto, cuyas edades oscilan entre 11 y 12 años, es una inmensa satisfacción para la docente porque así es que realmente se valora el trabajo realizado por sus estudiantes. Se recomienda seguir implementando en sus clases la metodología usada en la intervención.

Incluir en el plan de Mejoramiento de la institución una revisión al plan de área de Matemáticas de la institución intervenida para hacer un rediseño en el que se evidencie una nueva metodología que involucre el enfoque de Resolución de Problemas, el trabajo por procesos matemáticos, y la inclusión de las tecnologías computacionales

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

_______. Síntesis de Resultados PISA [en línea]. 2015. [Citado el 13 de Febrero de 2017]. Disponible en internet: http://www2.icfesinteractivo.gov.co

_______. Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis Doctor en Matemáticas. Valencia: Universidad de Valencia. España: 2011.

________. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En: Teoría y práctica en educación matemática, 1990, p. 295-384.

________. Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele, Universidad de Valencia, Tesis Doctoral. 1993.

________. Estándares básicos de competencias Matemáticas [en línea]. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. 2006. p. 1. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

________. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá, 1988.

________. Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales [en línea]. Colombia. 2004. p. 2. [Citado el 18 de julio de 2017]. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

________. Resumen Ejecutivo Colombia en PISA 2015 [en línea]. Bogotá D.C., noviembre de 2016. [Citado el 13 de Febrero de 2017]. Disponible en internet: http://www2.icfesinteractivo.gov.co

_________. Decreto No. 1290 Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media.

ACOSTA, Martin. Enseñando transformaciones geométricas con Software de Geometría Dinámica. 2010. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Memorias del 11° encuentro colombiano de Matemática Educativa. Bogotá: CENGAGE Learning 2010.

ALGARÍN, Danny y FIALLO, Jorge Enrique. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. En: Revista Científica, 2013.

ASAMBLEA NACIONAL CONSTITUYENTE. Constitución política de Colombia. 2da Ed. Legis. 1991.

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph Donal y HANESIAN, Helen. Psicología de la educación. México: Trillas, 1988.

BALACHEFF, Nicolás. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. una empressa docente [en línea]., 2000 [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/

BALDOR, Aurelio. Geometría plana y del espacio. Vigésima reimpresión. México. Publicaciones Culturales. 2004.

CAMARGO, Leonor. Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Valencia. España. 2010

CARRERAS, Juan Sáez. El educador social. Editum, 1993.

COLOMBIA, MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Misión, Propósito Superior y Visión [en línea]. 2016. párr. 1-2. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-89266.html

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 115 de 1994(febrero 8): Ley General de educación. Diario Oficial No. 41.214 de 8 de febrero de 1994. Santafé de Bogotá, D.C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Becas para la excelencia docente [en línea]. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://190.248.55.4/excelencia_docente/excelencia_docente

CUESTA, Hector; AGUIAR, Maria y MARCHENA, Rosa. Desarrollo de los razonamientos matemáticos y Verbal a través de las TIC: descripción de una experiencia educativa. En: Revista de Medios y Educación. N° 46. Enero 2015 pp. 1133-8482.

DURANGO, John y RIVERA, Gladys. Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de educación básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo. En: Educación científica y tecnológica, 2013, edición especial. Bogotá, D.C.

ELLIOTT, Jhon. El cambio educativo desde la Investigación Acción [en línea]. Madrid: Morata S.L, 1993. p. 88. Disponible en: https://books.google.com.co/books?isbn=8471123835

ELLIS, Amy et al. 2012. Middle School Students' Example Use in Conjecture Exploration and Justification. En: The annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo.

FIALLO, Jorge. El Modelo de Van Hiele en la Enseñanza de los deslizamientos en el Plano de la Geometría de Sexto Grado. Tesis Maestría en matemáticas. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 1996.

GALÁN, Eduardo. GRANELL, Ramón y HUERTA, Pedro. Los mapas conceptuales es la educación matemática: antecedentes y estado actual de la investigación [en línea]. VI Simposio de la SEIEM. 2002. [Citado 20 abr 2016].isponible en Internet: http://funes.uniandes.edu.co/1403/1/Granell2003Los_SEIEM_225.pdf

GUTIÉRREZ, Angel y JAIME, Adela. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. En: PNA [en línea], 2015, vol. 9, no. 2, pp. 53-83. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf

GUTIÉRREZ, Ángel. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. Teoría y práctica en educación matemática, 1990.

HAREL, Guershon y SOWDER, Larry. Student´s proof schemes: Results from explratory studies. En SCHOENFELD, A. H., KAPUT, J. y DUBINSKY, E. (Eds). Reseach in collegiate mathematics education Vol. III, pp. 234 – 283. Providence, EE.UU: American Mathematical Society. 1998.

HERNÁNDEZ, Roberto; HERNÁNDEZ COLLADO, Carlos; BAPTISTA, Pilar y CASAS PÉREZ, Luz. Metodología de la Investigación [en línea]. México: McGraw-Hill, 2014. [Citado 10 de marzo 2015]. Disponible en: https://books.google.com.co/books?id=llzVMRMlA28C&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. Reporte de Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9°. Tomado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

JAIME PASTOR, Adela. La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1994, vol. 1, no 1, p. 85-94.

LESH, R y ZAWOJEWSKI, J. Problem solving and modeling. In F. K. Lester , Jr. (Ed.). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing. 2007. pp. 782

MARIOTTI, A. Proof and proving in mathematics, citado por MOLINA, Oscar; LUQUE, Carolina y ROBAYO, Alejandro. Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. En: TED: Tecné, Episteme y Didaxis, [en línea], 2014, no. 35 [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/2723/2462

MARRADES, Ramón y GUTIÉRREZ, Ángel. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. En: Educational studies in mathematics, 2000, vol. 44, no 1, p. 87-125.

MCKERNAN, James. Investigación – Acción y curriculum. Métodos y discursos para profesionales reflexivos. Madrid: Morata, 1996, p. 199.

MIELES, Mónica. Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. En: Escenarios, 2012, vol. 10, no 2, p. 19.

MOLERO APARICIO, María. Como resolver problemas de Geometría [en línea]. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: https://docslide.us/documents/resolver-problemas-de-geomertria.html

MOLINA, Oscar; LUQUE, Carolina y ROBAYO, Alejandro. Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. En: TED: Tecné, Episteme y Didaxis, [en línea], 2014, no. 35 [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/2723/2462

MORENO PÁEZ, Jimmy Alejandro. Comparación de Estrategias Didácticas de Trabajo en Equipo y Solución de Problemas según George Pólya en la Enseñanza del Teorema de Pitágoras, para el mejoramiento del aprendizaje de matemáticas en octavo. Tesis e Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad de los Llanos. 2015. P. 21

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Traducción de Manuel Fernández. Sevilla 2003.

NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob. Aprendiendo a aprender. Trad. J. Campanario. Barcelona, España: Martínez Roca. Libros universitarios y profesionales. 1988

PARADA, Sandra-Evely; CONDE, Luis-Alexander y FIALLO, Jorge. Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. Boletim de Educação Matemática, 2016, vol. 30, no 56.

PARRA ZAPATA, Mónica Marcela, et al. Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 2010, no 29.

PEDEMONTE, B. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematics, 2007, vol. 66, pp. 23 - 41.

PÉREZ, Mauricio. Un Marco para Pensar Configuraciones Didácticas en el Campo del Lenguaje, en la Educación Básica. En: La didáctica de la lengua materna. Estado de la discusión en Colombia. Bogotá. 2005.

POLYA, George. How To Solve It? [Cómo plantear y resolver problemas]. Traducido por Julian Zugazagoitia. México: Trillas. 1965.

PONTE, João Pedro; MATA-PEREIRA, Joana y QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. En: Quadrante, 2013, vol. 22, no 1, p. 55-81.

POZO, Juan Ignacio. Sobre las relaciones entre el conocimiento cotidiano de los alumnos y el conocimiento científico: del cambio conceptual a la integración jerárquica. En: Enseñanza de las Ciencias 17, 1999.

RESNICK, Lauren y FORD, Wendy. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona, España: Paidós & M.E.C. 1990. p.23

SAMPER, Carmen; CAMARGO, Leonor y LEGUIZAMÓN, Cecilia. Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. En: Colección: cuadernos de matemática educativa [en línea], 2003, no. 6. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://asocolme.org/publicaciones-asocolme/coleccion-cuadernos-de-matematica-educativa

SANDOVAL, Carlos. Investigación Cualitativa. Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social. Módulo 4. ICFES, 1996.

SANTOS, Manuel. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. 2008. [en línea]. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2SantosTrigo.pdf.

TORO, Jorge. Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo. Tesis de Maestría Educación Matemática. Medellín: Universidad de Medellín. 2014.

VILLA, Jhony. El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. Revista Tecnológicas N° 16. VILLA-OCHOA, Jhony. El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. En: Tecno lógicas [en línea], 2006, no 16. [Citado el 18 de Mayo de 2017]. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1182/

ANEXOS

Anexo A. Resultados Pruebas Saber

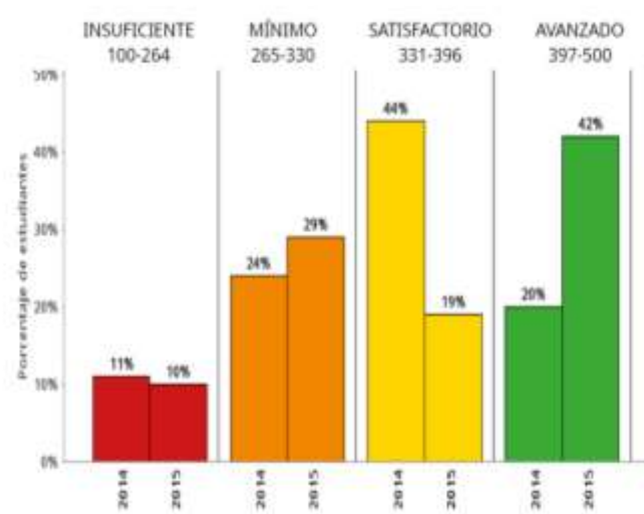
EL ANÁLISIS COMPARATIVO PRUEBAS SABER AÑO 2014 – 2015, GRADO TERCERO

Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en matemáticas

1. Número de estudiantes evaluados en cada año consultado. Matemáticas - tercer grado

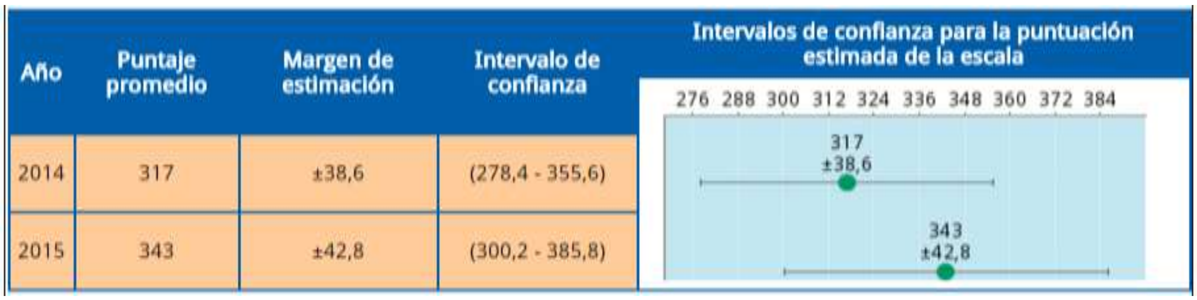
Año	Número de estudiantes evaluados
2014	9
2015	13

2. Comparación de los porcentajes de estudiantes según niveles de desempeño para cada año consultado. Matemáticas - tercer grado



NIVEL	DIFERENCIA ENTRE LA DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL SEGÚN NIVELES DE DESEMPEÑO 2015 – 2014- GRADO TERCERO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
INSUFICIENTE	- 1	Incremento	Progreso
MÍNIMO	5	Incremento	Progreso
SATISFACTORIO	-25	Decremento	Progreso
AVANZADO	16	Incremento	Progreso

Comparación de los puntajes promedio y los márgenes de estimación



Año	Puntaje promedio	Margen de estimación	Intervalo de confianza	Intervalos de confianza para la puntuación estimada de la escala
2014	317	±38,6	(278,4 - 355,6)	317 ±38,6
2015	343	±42,8	(300,2 - 385,8)	343 ±42,8

RESULTADO	DIFERENCIA ENTRE EL PROMEDIO Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR 2015 – 2014. GRADO TERCERO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
PROMEDIO	26	Superior	Progreso
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	4,2	Superior	Retroceso

FORTALEZAS Y DEBILIDADES RELATIVAS - GRADO TERCERO			
2014		FORTALEZA	DEBILIDAD
COMPETENCIAS	Razonamiento	Fuerte	
	Comunicación		Débil
	Resolución		Muy débil
COMPONENTES	Numérico-Variacional	Constante	
	Geométrico – métrico	Fuerte	
	Aleatorio		Débil

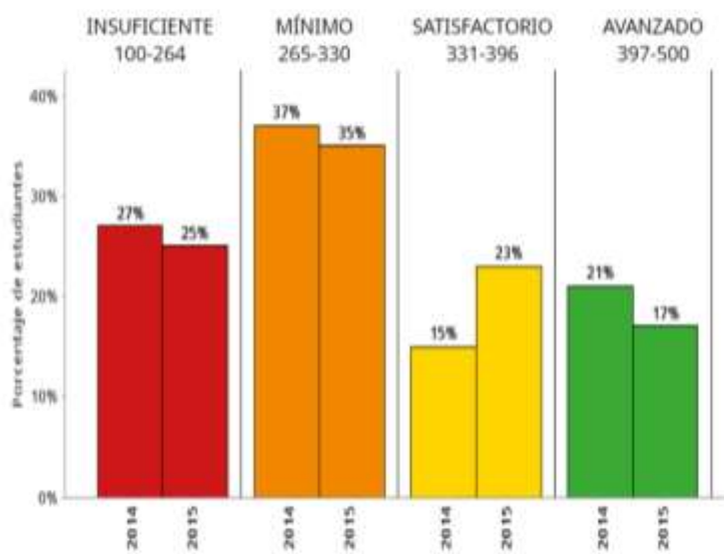
EL ANÁLISIS COMPARATIVO PRUEBAS SABER
AÑO 2014 – 2015, GRADO QUINTO

Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año:

1. Número de estudiantes evaluados en cada año consultado. Matemáticas - quinto grado

Año	Número de estudiantes evaluados
2014	17
2015	16

2. Comparación de los porcentajes de estudiantes según niveles de desempeño para cada año consultado. Matemáticas - quinto grado



NIVEL	DIFERENCIA ENTRE LA DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL SEGÚN NIVELES DE DESEMPEÑO 2015 – 2014 GRADO QUINTO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
INSUFICIENTE	-2	Decremento	Progreso
MÍNIMO	-2	Decremento	Progreso
SATISFACTORIO	8	Incremento	Progreso
AVANZADO	-4	Decremento	Retroceso

Comparación de los puntajes promedio y los márgenes de estimación

3. Puntajes promedio y márgenes de estimación del establecimiento educativo para cada año consultado. Matemáticas - quinto grado

Año	Puntaje promedio	Margen de estimación	Intervalo de confianza	Intervalos de confianza para la puntuación estimada de la escala
2014	332	±30,2	(301,8 - 362,2)	
2015	323	±17,6	(305,4 - 340,6)	

RESULTADO	DIFERENCIA ENTRE EL PROMEDIO Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR 2015 – 2014 GRADO QUINTO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
PROMEDIO	-9	Superior	Retroceso
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	-12.6	Superior	Retroceso

FORTALEZAS Y DEBILIDADES RELATIVAS GRADO QUINTO			
2014		FORTALEZA	DEBILIDAD
COMPETENCIAS	Razonamiento		Muy débil
	Comunicación		Débil
	Resolución	Fuerte	
COMPONENTES	Numérico-Variacional		Débil
	Geométrico – métrico		Débil
	Aleatorio		Débil

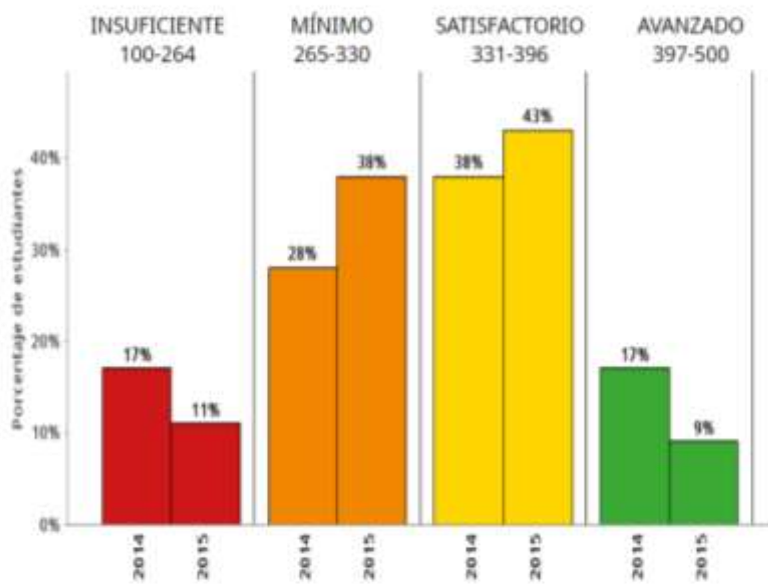
EL ANÁLISIS COMPARATIVO PRUEBAS SABER AÑO 2014 – 2015, GRADO NOVENO

Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año:

1. Número de estudiantes evaluados en cada año consultado. Matemáticas - noveno grado

Año	Número de estudiantes evaluados
2014	12
2015	11

2. Comparación de los porcentajes de estudiantes según niveles de desempeño para cada año consultado. Matemáticas - noveno grado



El análisis a nivel institucional muestra los siguientes resultados

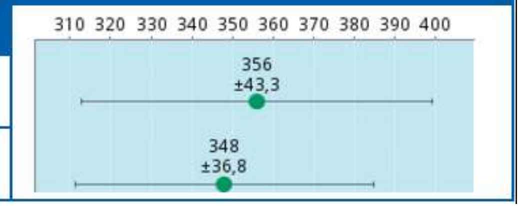
NIVEL	DIFERENCIA ENTRE LA DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL SEGÚN NIVELES DE DESEMPEÑO 2015 – 2014 GRADO NOVENO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
INSUFICIENTE	-6	Decremento	Progreso
MÍNIMO	10	Incremento	Progreso
SATISFACTORIO	5	Incremento	Progreso
AVANZADO	-8	Decremento	Retroceso

Comparación de los puntajes promedio y los márgenes de estimación

3. Puntajes promedio y márgenes de estimación del establecimiento educativo para cada año consultado. Matemáticas - noveno grado

Año	Puntaje promedio	Margen de estimación	Intervalo de confianza
2014	356	±43,3	(312,7 - 399,3)
2015	348	±36,8	(311,2 - 384,8)

Intervalos de confianza para la puntuación estimada de la escala



RESULTADO	DIFERENCIA ENTRE EL PROMEDIO Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR 2015– 2014 GRADO NOVENO		
	DIFERENCIA	SIGNIFICADO	VALORACIÓN
PROMEDIO	-8	Superior	Retroceso
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	- 6,5	Inferior	Progreso

FORTALEZAS Y DEBILIDADES RELATIVAS GRADO NOVENO			
2014		FORTALEZA	DEBILIDAD
COMPETENCIAS	Razonamiento	Fuerte	
	Comunicación		Muy débil
	Resolución		Débil
COMPONENTES	Numérico-Variacional		Muy Débil
	Geométrico – métrico		Muy Débil
	Aleatorio	Fuerte	

Anexo B. Prueba Diagnóstica

EXPLORO MIS NIVELES DE RAZONAMIENTO

NOMBRE: ______________________________ GRADO SEXTO FECHA: __________

En cada uno de los enunciados se presentan cuatro opciones de respuesta, sólo una de ellas es correcta. Analice la pregunta y marque con una X la respuesta correcta.

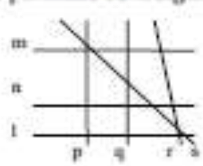
1. De los siguientes pares de rectas, ¿Cuáles son paralelas?

(a) (b) (c) (d)

2. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumple en las rectas paralelas?

(a) Al cortarse forman un ángulo recto (90°)
(b) Se cortan entre sí.
(c) Van en la misma dirección.
(d) Son siempre horizontales.

3. Las rectas paralelas de la siguiente figura son:

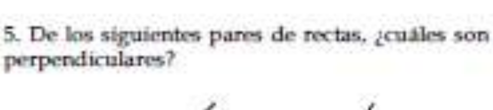


(a) m y n ; n y l ; m y l ; p y q.
(b) m y n ; n y l ; q y r ; p y s .
(c) m y l ; p y q ; s y n; r y s.
(d) m y s ; s y p ; m y p ; p y q.

4. Si la recta t es paralela a la recta x y la recta x es paralela a la recta z se puede decir que:

(a) Las rectas t y z son perpendiculares.
(b) Las rectas t y z se cortan.
(c) Las rectas t y z son paralelas.
(d) Las rectas t y z forman un ángulo de 45°.

5. De los siguientes pares de rectas, ¿cuáles son perpendiculares?

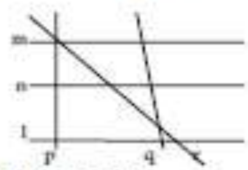


(a) (b) (c) (d)

6. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumple en las rectas perpendiculares?

(a) Al cortarse forman un ángulo recto (90°)
(b) La distancia entre las dos siempre es la misma.
(c) Van en la misma dirección.
(d) Son siempre horizontales.

7. Las rectas perpendiculares de la siguiente figura son:

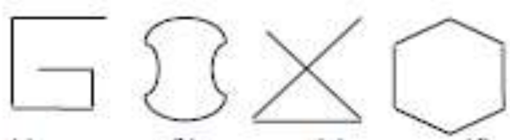


(a) m y m ; m y p ; m y r.
(b) m y l ; l y q ; r y q .
(c) p y l ; p y q ; p y r.
(d) m y p ; n y p ; l y p.

8. Si las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t se puede decir que :

(a) Las rectas x y s son perpendiculares.
(b) Las rectas x y s son paralelas.
(c) Las rectas x y s tienen la misma distancia.
(d) Las rectas x y s forman un ángulo de 45°

9. ¿Cuál de las siguientes figuras representa un polígono?



(a) (b) (c) (d)

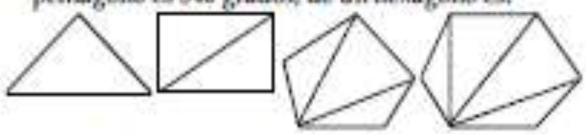
10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para todo polígono?

(a) Tiene lados curvos.
(b) El número de lados es igual al número de vértices .
(c) Es una figura abierta.
(d) A un vértice llegan más de dos lados.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Todo cuadrado es rectángulo.
(b) Todo rectángulo es cuadrado.
(c) Un cuadrilátero tiene cinco lados.
(d) Un triángulo tiene cuatro ángulos.

12. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados; la de un cuadrilátero es 360 grados ; de un pentágono es 540 grados, de un hexágono es:



(a) 600° (b) 360°
(c) 720° (d) 800°

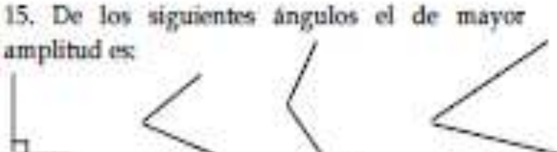
13. ¿Cuántos ángulos internos tiene la siguiente figura?

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 5

14. Las partes de un ángulo son:

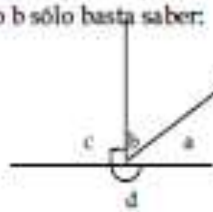
(a) Dos lados.
(b) un lado y un vértice.
(c) Un vértice y dos lados.
(d) Un vértice.

15. De los siguientes ángulos el de mayor amplitud es:



(a) (b) (c) (d)

16. En el siguiente gráfico para conocer el valor del ángulo b sólo basta saber:



(a) La medida del ángulo a
(b) La medida del ángulo c
(c) La medida del ángulo d
(d) Un ángulo de media vuelta equivale a 180 grados.

17. ¿Cuál de los siguientes polígonos es un triángulo?

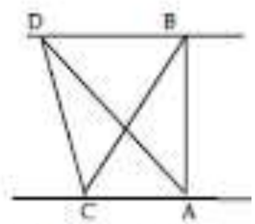
(a) (b) (c) (d)

18. Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene dos lados iguales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera en todo triángulo isósceles?

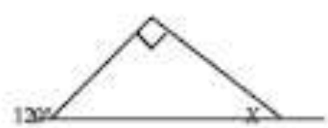
(a) Los tres lados tienen la misma medida.
(b) La medida de un lado es el doble de la medida del otro.
(c) Los tres ángulos tienen la misma medida.
(d) Tienen por lo menos dos ángulos con la misma medida.

19. Los dos triángulos ABC y ADC de la siguiente figura están entre dos rectas paralelas . Si el área del triángulo ABC es de 8 cm cuadrados ¿Cuál es el área del triángulo ADC?

(a) 8 cm^2
(b) 10 cm^2
(c) 16 cm^2
(d) 4 cm^2



20. ¿En la siguiente figura cuál es la medida del ángulo X?



(a) 60° (b) 30°
(c) 90° (d)150°

Anexo C. Consentimiento informado

Colegio Nuestra Señora de Fátima
Jordán – Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Educación – Maestría en Pedagogía
Bucaramanga

INVESTIGACIÓN: *EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA*

CONSENTIMIENTO INFORMADO

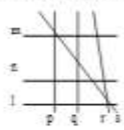
Yo ____ identificado(a) con cédula de ciudadanía N° _____________, autorizo de manera libre y voluntaria, la utilización de la información recogida durante los meses de julio a noviembre de 2016, de mi hijo (a) ____________________________ identificado con _______________________, producto de la investigación realizada por la docente Yadira Ballesteros Santos y orientada por la Universidad Industrial de Santander para el *Fortalecimiento de la resolución de problemas geométricos potenciando las habilidades del proceso de razonamiento matemático en un ambiente de Geometría Dinámica,* de los estudiantes del grado sexto del Colegio Nuestra Señora de Fátima del municipio de Jordán.

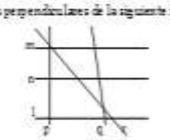
He sido informado (a), de que la información obtenida en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento y que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento.

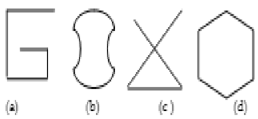
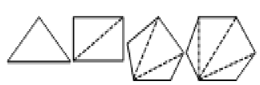
.____________________________________
C.C.

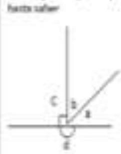
Fecha: ________________________

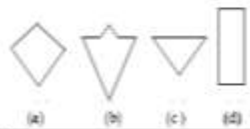
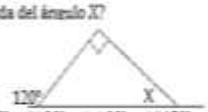
Anexo D. Tablas de Resultados Individuales Prueba Diagnóstica

RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA																												
PARALELISMO	RTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
1. De los siguientes pares de rectas, ¿Cuáles son paralelas?  (a) (b) (c) (d)	B	B	B	D	B	D	B	B	C	B	B	C	A	B	B	C	B	B	B	N	C	C	B	B	B	B	B	C
2. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumple en las rectas paralelas? (a) Al cortarse forman un ángulo recto (90°) (b) Se cortan entre sí. (c) Van en la misma dirección. (d) Son siempre horizontales	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C	B	A	C	B	C	B	B	C	A	B	A	C	B	C	C	A	B
3. Las rectas paralelas de la siguiente figura son:  (a) myn; nyl; myl; pyq. (b) myn; nyl; qyr; pys. (c) myl; pyq; syr; rys. (d) mys; syp; myp; pyq.	A	A	A	A	A	A	A	A	D	D	A	D	D	A	C	A	A	A	D	C	D	D	-	A	A	A	A	D
4. Si la recta t es paralela a la recta x y la recta x es paralela a la recta z se puede decir que: (a) Las rectas t y z son perpendiculares. (b) Las rectas t y z se cortan. (c) Las rectas t y z son paralelas. (d) Las rectas t y z forman un ángulo de 45º.	C	C	C	B	D	-	C	C	C	B	A	A	B	C	A	D	A	D	C	C	A	C	B	B	C	C	A	B

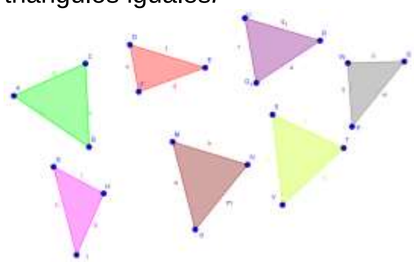
RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA																												
PERPENDICULARIDAD	RTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
9. De los siguientes pares de rectas, ¿cuáles son perpendiculares?  (a) (b) (c) (d)	A	A	A	C	C	D	A	C	A	C	C	D	D	A	C	A	B	C	A	C	C	B	C	C	A	A	B	C
6. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumple en las rectas perpendiculares? (a) Al cortarse forman un ángulo recto (90º) (b) La distancia entre las dos siempre es la misma. (c) Van en la misma dirección. (d) Son siempre horizontales.	A	A	A	-	B	A	A	A	A	A	A	D	C	A	A	D	A	A	A	D	A	B	-	A	A	A	B	A
7. Las rectas perpendiculares de la siguiente figura son:  (a) m y m ; m y p; m y r. (b) m y l ; l y q; r y q. (c) p y l; p y q ; p y r. (d) m y p ; n y p; l y p.	D	D	D	B	C	D	D	D	D	D	D	C	B	A	A	C	D	C	D	B	A	C	D	B	D	D	D	B
8. Si las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t se puede decir que : (a) Las rectas x y s son perpendiculares. (b) Las rectas x y s son paralelas. (c) Las rectas x y s tienen la misma distancia. (d) Las rectas x y s forman un ángulo de 45º	A	A	A	B	B	-	A	A	A	A	A	C	A	-	A	C	A	A	A	C	B	B	C	-	A	A	B	A

RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA																												
POLÍGONOS	RTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
9. ¿Cuál de las siguientes figuras representa un polígono?  (a) (b) (c) (d)	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para todo polígono? (a) Tiene lados curvos. (b) El número de lados es igual al número de vértices. (c) Es una figura abierta. (d) A un vértice llegan más de dos lados.	B	B	B	B	B	B	B	C	D	B	B	B	A	D	B	B	B	D	A	B	A	A	B	D	B	B	D	A
11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? (a) Todo cuadrado es rectángulo. (b) Todo rectángulo es cuadrado. (c) Un cuadrilátero tiene cinco lados. (d) Un triángulo tiene cuatro ángulos.	A	B	A	B	-	C	B	A	A	C	D	D	B	D	A	B	C	B	B	C	A	C	A	B	B	A	C	C
12. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados; la de un cuadrilátero es 360 grados ; de un pentágono es 540 grados, de un hexágono es:  (a) 600° (b) 360° (c) 720° (d) 800°	C	C	C	C	-	C	C	C	B	B	C	C	D	-	C	C	C	C	D	C	C	B	C	C	C	C	D	D

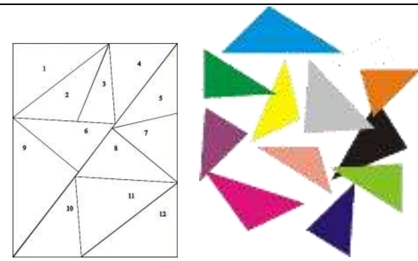
RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA																												
ÁNGULOS	RTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
13. ¿Cuántos ángulos internos tiene la siguiente figura?  (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5	D	D	B	D	-	C	D	D	D	D	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	B	D	D	D	D	D	D	A
14. Las partes de un ángulo son: (a) Dos lados. (b) un lado y un vértice. (c) Un vértice y dos lados. (d) Un vértice.	C	B	D	D	-	C	C	C	C	A	A	A	C	A	A	D	C	A	B	B	A	C	-	A	C	C	A	C
15. De los siguientes ángulos el de mayor amplitud es:  (a) (b) (c) (d)	C	C	C	A	-	A	C	C	A	C	C	A	D	C	A	A	A	C	D	D	C	D	A	C	C	C	A	C
16. En el siguiente gráfico para conocer el valor del ángulo b sólo basta saber  (a) La medida del ángulo a (b) La medida del ángulo c (c) La medida del ángulo d (d) Un ángulo de media vuelta equivale a 180 grados	A	A	A	A	-	A	C	D	C	-	A	D	B	A	C	D	D	C	C	A	D	A	D	-	A	C	B	D

RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA																												
TRIÁNGULOS	RTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E24	E25	E26	E27	E28
17. ¿Cuál de los siguientes polígonos es un triángulo?  (a) (b) (c) (d)	C	C	C	C	-	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B
18. Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene dos lados iguales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera en todo triángulo isósceles? (a) Los tres lados tienen la misma medida. (b) La medida de un lado es el doble de la medida del otro. (c) Los tres ángulos tienen la misma medida. (d) Tienen por lo menos dos ángulos con la misma medida.	D	D	D	D	-	D	A	C	D	D	A	D	D	D	A	D	A	C	D	A	A	C	-	A	B	D	C	C
19. Los dos triángulos ABC y ADC de la siguiente figura están entre dos rectas paralelas. Si el área del triángulo ABC es de 8 cm cuadrados ¿Cuál es el área del triángulo ADC? (a) 8 cm² (b) 10 cm² (c) 16 cm² (d) 4 cm² 	A	A	A	A	-	A	A	A	C	A	A	-	B	B	A	C	A	B	A	A	B	B	C	D	B	B	C	C
20. ¿En la siguiente figura cuál es la medida del ángulo X?  (a) 60º (b) 30º (c) 90º (d) 150º	B	A	C	A	-	C	D	D	B	D	B	-	C	B	C	A	D	D	B	D	B	C	D	A	A	D	D	C

Anexo E. Planeación de la Secuencia Didáctica (SD)

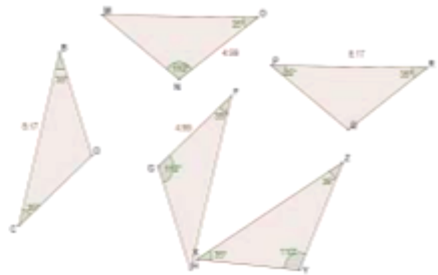
SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
INFORMACIÓN	Identificar y utilizar algunos presaberes de los estudiantes, para refinarlos y encaminarlos al nuevo conocimiento.	22 agosto	**1.1** Realizaré un momento de motivación y disposición para el aprendizaje de algunas propiedades de los triángulos (Presaberes) y les contaré de la constante utilización del software GeoGebra en lo sucesivo de las clases de geometría.		
	Generalizar una propiedad de los triángulos	22 agosto 2 horas	**1.2** Entregaré a cada estudiante una fotocopia con la siguiente imagen. De manera individual y por escrito deberán determinar si hay triángulos iguales. 	Permitir a los estudiantes que apliquen sus saberes previos. Por esto se espera que de manera intuitiva el estudiante determine que sí hay triángulos iguales y cuáles son los criterios que tuvo en cuenta para elegirlos; o que determine que no los hay. En los dos casos, el estudiante **explicará** sus respuestas.	Los razonamientos de los estudiantes se verán reflejadas en demostraciones empíricas (Empirismo ingenuo Perceptivo) ya que puede haber respuestas como, que los triángulos son iguales porque: - Tienen el mismo tamaño (luego de medirlos) - Coloco uno encima del otro y salen exactos. - Todos son triángulos. - Tienen lados cuyas medidas son iguales - Los ángulos parecen o son iguales O demostraciones Fallidas como, que los triángulos no son iguales porque: - Tienen nombres y colores distintos - La medida de los tres lados no

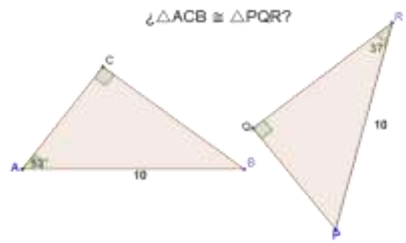
SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
					son iguales - Están en sitios diferentes - Están 'volteados' o "al revés"
			1.3 Reunidos en grupos de cuatro estudiantes, discutirán sobre sus respuestas y luego harán una puesta en común, para así establecer algunas conclusiones (Conjeturas por parte de los estudiantes).	Plantear **conjeturas** y por medio de la conversación grupal construir **argumentos** que permitan validarlas o no Concluir que "dos triángulos son iguales si tienen iguales los tres lados".	Un representante de cada grupo expondrá sus conjeturas. Estaré atenta a ellas y no realizaré aclaraciones. A no ser que se genere un error deba corregir en el momento Se prevé que haya estudiantes que no quieran hablar al interior del grupo, o a la hora de exponer sus ideas. Llegar a la conclusión a la que espera llegar.
			1.4 Jaimito dejó caer su rompecabezas. Ayúdele a armarlo nuevamente. A cada grupo de estudiantes le entregaré varios triángulos en papel de colores, recortados, para que los reorganicen sobre una base en donde se encuentran dibujados y enumerados	Promover la habilidad de Generalización. Consolidar la propiedad: "dos triángulos son congruentes porque tienen la misma forma y tamaño".	Los estudiantes conversarán acerca de los colores de los triángulos que utilizaron para cubrir determinado espacio. Al superponer triángulos sobre la base, los estudiantes establecerán diferencias y similitudes entre las figuras (Presaberes). Se fijarán que hay algunos triángulos congruentes (término que poco a poco se empieza a usar), porque se puede utilizar dos triángulos de diferente color sobre el mismo número. Expresarán sus argumentos (comunican) en la consecución del

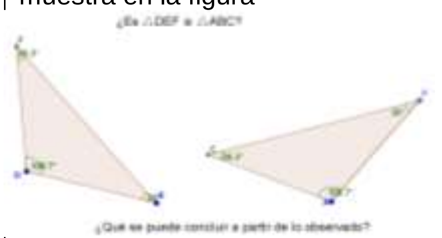
SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
					resultado. Las mediciones y comparaciones serán las estrategias utilizadas, por esto se esperan Demostraciones de tipo Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP) Se prevé que haya preguntas e inquietudes de estudiantes, y que en su momento solucionaré.
ORIENTACIÓN DIRIGIDA	Lograr la generalización de los criterios de congruencia de triángulos Llevar al estudiante paulatinamente a estructurar mejor la forma de realizar sus demostraciones.		**2.1** Copiaré en todos los computadores, la construcción realizada en GeoGebra (imagen de la actividad 1.2) y orientaré a los estudiantes para comprobar si las conjeturas elaboradas anteriormente son verdaderas o falsas. Esto lo realizarán en grupos de a 4 estudiantes, pero cada uno trabajará en su equipo portátil.	Lograr la comprensión del criterio LLL. Promover el planteamiento de conjeturas. Lograr generalizaciones	Los estudiantes pueden partir de conceptos o utilizar elementos del triángulo para expresar sus demostraciones. Así, muy seguramente superpongan triángulos, tomen medidas de sus lados y/o de sus ángulos, con las herramientas de GeoGebra. Tal vez haya estudiantes que no perciban en la actividad 1.2 que ΔABC, ΔMNO y ΔSTV son iguales. Otros, quizás su percepción visual les permita resolver sin tener ningún otro argumento para justificar sus respuestas. Por el nivel de razonamiento en que se encuentran, muy seguramente utilizarán frecuentemente la medición. Poco a poco las actividades le obligarán a utilizar otras estrategias.
			2.2 Reunidos en grupos de trabajo, repartiré a cada uno tres pitillos de diferentes tamaños cada uno para	Concluir que con tres longitudes se determina UN	Tal vez para algunos grupos de trabajo, esto sea muy fácil (y así lo es) pero se prevé que algún grupo

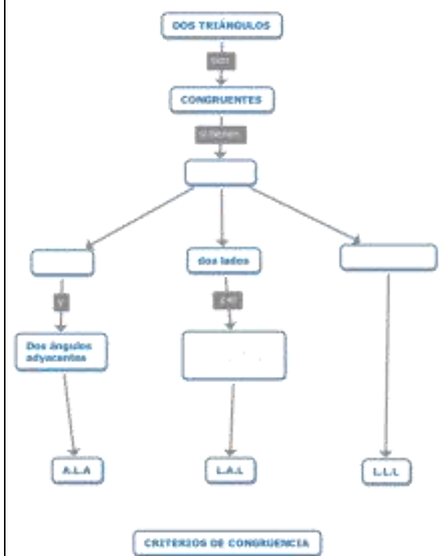
SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
			que construyan triángulos y respondan: ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con las longitudes dadas? *Expliquen* sus respuestas por escrito y verbalmente.	SOLO TRIÁNGULO, además de determinar la medida de sus ángulos.	responda que se puede formar más de un triángulo. En este caso, pediré a algún estudiante de dicho grupo que los construya nuevamente y explique su respuesta. Puedo dibujar los triángulos que el estudiante forme, en hojas blancas y luego superponerlos al contra luz. Así se podrá concluir que solo se forma UN triángulo. La experimentación con material concreto permitirá afianzar esta propiedad.
			2.3 Construir en una hoja de papel blanca (no cuadriculada) dos triángulos ABC y DEF con AB = DE y BC = EF. Luego de dibujados responder: ¿Son Congruentes estos triángulos?	Mediante esta actividad se espera que el estudiante minimice el uso de la medida, o al menos que aprenda que no siempre es necesario realizar mediciones.	En la construcción se puede presentar varios casos. - Que dibujen los lados, teniendo en cuenta siempre un mismo ángulo entre ellos. - Que establezcan que la forma y el tamaño de los triángulos dibujados no necesariamente constituyen dos triángulos congruentes. - Que intenten dibujar los tres lados iguales sin tener en cuenta el ángulo comprendido entre ellos, solo con mediciones a ensayo y error. Y luego ante la pregunta, ¿son congruentes los triángulos construidos?, pueden darse las conjeturas: SI o NO con las correspondientes demostraciones.

SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
					Si la respuesta es NO, preguntaré: ¿Qué se debe tener en cuenta para que sean congruentes? Los estudiantes se darán cuenta que es necesario tener un ángulo comprendido entre los lados, para realizar la construcción. Hasta entonces se explicita el Criterio L A L
			2.4 Construir en GeoGebra dos triángulos iguales de lados 8 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 50°. Construir en GeoGebra dos triángulos iguales de lados 10 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 110°. - ¿Qué se puede concluir con respecto a las construcciones realizadas?	Establecer conjeturas y comprobarlas Llegar a la comprensión del criterio LAL.	Esta construcción es un poco compleja puesto que el resultado será que al mover un punto de uno de un triángulo, AMBOS, permanecerán iguales. Entonces puede darse que al lograr construir uno, lo repitan de la misma manera. Por esto se les insistirá en la utilización de la prueba del arrastre. Les orientaré hasta que se percaten de la utilización del compás que les permitirá trasladar las semirrectas que forman los lados del triángulo; así una construcción dependerá de la otra y al mover un punto de un triángulo se moverá de igual forma el otro.
			2.5 Responder (por escrito): ¿Es posible construir dos triángulos congruentes entre sí, teniendo como única información dos de los ángulos de uno de los triángulos? (puede apoyarse de GeoGebra*)*	Realizar construcciones Comprender el criterio ALA	La exploración en GeoGebra o la construcción con lápiz y papel permitirá que saquen conclusiones. Se espera que los estudiantes expresen que no se pueden construir. Que es necesario conocer

SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
					al menos el lado comprendido entre los dos ángulos. Así se explicita el criterio ALA
ORIENTACIÓN LIBRE	Promover la generalización y el refinamiento de las demostraciones. Las actividades diseñadas tendrán inhabilitadas las herramientas de medición de lados y ángulos.		**3.1**  Entregaré fotocopias en la que aparece la imagen anterior y la pregunta: Establecer si en la imagen hay triángulos congruentes. Explicar la respuesta (¿Qué criterios se tuvieron en cuenta para dar la respuesta?)	Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para el establecimiento de conjeturas y su demostración.	Los estudiantes deberán tener en cuenta algunas propiedades: - La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°. - En los triángulos isósceles, a lados iguales, ángulos iguales y viceversa - Los criterios de congruencia de triángulos. A partir de la imagen fija, podrían: Calcular intuitivamente el valor de los ángulos que hacen falta y a partir de ello decir que todos los triángulos son congruentes entre sí o que son el mismo. - Establecer que MNO≅FGH y que BCD≅PRQ teniendo en cuenta el criterio ALA - Expresar que a partir de lo anterior entonces todos sean congruentes entre sí. - Discriminar el triángulo XYZ porque no muestra alguna longitud de lados Luego explorarán en GeoGebra este mismo archivo y se espera que los estudiantes: - Concluyan la congruencia entre MNO≅FGH≅BCD≅PRQ

SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
					- Determinen que $\triangle XYZ$ no establece relación de congruencia con ningún otro triángulo porque: Conocer tres ángulos no es criterio o porque sencillamente al manipularlo no tiene las mismas medidas que los demás
			3.2 Presentaré a los estudiantes en una fotocopia la actividad que se muestra en la figura.  Deberán justificar la respuesta. Luego, explorarán en GeoGebra este mismo archivo y comprobarán sus conjeturas	Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para el establecimiento de conjeturas y su demostración.	Los estudiantes calcularán el valor del ángulo que falta y así establecerán que Sí son congruentes por el criterio ALA Espero que haya pocos estudiantes que a pesar de todo el trabajo realizado justifiquen incorrectamente. Sin embargo, luego de explorar en GeoGebra, espero que todos lo hagan mejor.
			3.3 En fotocopia, entregaré a cada estudiante la actividad mostrada en la figura.	Establecer generalizaciones. Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para el establecimiento de conjeturas y su demostración.	Espero que los estudiantes señalen que C siendo punto medio de AB y MN, determina que n=a y que m=b. Esta es una generalización que hará entender que en ocasiones no se necesitan números para establecer medidas. De lograr dicha generalización, encontrarán que $\triangle ACN \cong \triangle MCB$ Para verificar sus conjeturas, los estudiantes manipularán en

SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
			 *¡Justifique su respuesta!*		GeoGebra la construcción que se muestra en la imagen.
			3.4 Los estudiantes manipularán en GeoGebra la construcción que se muestra en la figura  Responder: ¿Qué se puede concluir a partir de lo observado?	Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para el establecimiento de conjeturas y su demostración.	Espero que antes de iniciar la exploración en el archivo, respondan que conocer los tres ángulos no es criterio de Congruencia y por tanto No son congruentes O que al moverlos, lo determinen a partir de la visualización de la construcción.

SD: UN AMBIENTE GEOGEBRA, ¡PARA POTENCIAR EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO!					
FASE	**OBJETIVO DE LA FASE**	**FECHA/ TIEMPO**	**ACTIVIDAD**	**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**	**LO QUE ESPERO DE LOS ESTUDIANTES**
INTEGRACIÓN	Adquirir una visión general del nuevo contenido		**4.1** En fotocopias, les presentaré a los estudiantes el mapa conceptual para que sea completado con las, ideas que hacen falta 		

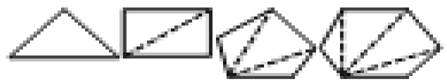
Anexo F. Transcripción de respuestas de los estudiantes - Diagnóstico

JUSTIFICACIONES A PREGUNTA 4		
Si la recta *t* es paralela a la recta *x* y la recta *x* es paralela a la recta *z* se puede decir que: (a) Las rectas *t* y *z* son perpendiculares. (b) Las rectas *t* y *z* se cortan. (c) Las rectas *t* y *z* son paralelas. (d) Las rectas *t* y *z* forman un ángulo de 45º.		
Clave correcta: **c**		
		Porque….
E_1:	c	*Lo explica correctamente por medio de un gráfico*
E_2:	c	Se quedan a la misma distancia y cada vez se van ajuntando y se choca.
E_3:	b	Las rectas se deben cortar porque la *x* es paralela a la *z* y la *l* no
E_4:	d	“No la entendí”
E_5:	-	No respondió
E_6:	c	*t* y *z* son paralelas
E_7:	c	La recta *t* y *z* son paralelas porque así las veamos horizontales o verticales nunca se van a cortar.
E_8:	c	No justificó
E_9:	b	Las paralelas
E_{10}:	a	Las perpendiculares forman un ángulo de 90°
E_{11}:	a	Si t es ll a x y x es paralela a z entonces t es ll a z
E_{12}:	b	Se cortan en un punto
E_{13}:	c	Van en la misma dirección
E_{14}:	a	*t* y *s* son perpendiculares
E_{15}:	d	Porque una es paralela y otra perpendicular
E_{16}:	a	Que van por la misma dirección y se cortan formando un punto
E_{17}:	d	Porque al medir me da un ángulo de 45°
E_{18}:	c	Porque la t y z fueron las escogí y por eso me gusta esa pregunta
E_{19}:	c	Porque se cruzan entre sí y siempre y siempre miden igual
E_{20}:	a	Porque la recta t y z son perpendiculares entre si
E_{21}:	c	Porque la reta t y z son paralelas
E_{22}:	b	Porque la t y la z se cortan
E_{24}:	b	No justificó
E_{25}:	c	t ll x y x ll z, z ll t
E_{26}:	c	Porque las dos son paralelas
E_{27}:	a	Porque se unen
E_{28}:	b	No justificó

JUSTIFICACIONES A PREGUNTA 8		
Si las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t se puede decir que: (a) Las rectas x y s son perpendiculares. (b) Las rectas x y s son paralelas. (c) Las rectas x y s tienen la misma distancia. (d) Las rectas x y s forman un ángulo de 45°		
Clave correcta: a		
		Porque….
E_1:	a	La recta *x* se cortaría con la *s*
E_2:	a	Porque al pasar por la recta *t* se hacen perpendiculares
E_3:	b	Son paralelas porque nunca se chocan porque *x* y *t* son perpendiculares
E_4:	b	"No la entendí"
E_5:	-	No Justificó
E_6:	a	Porque un recta perpendicular y una paralela forman un ángulo de 90° grados
E_7:	a	Porque al chocarse forman un ángulo de 90° y no importa si son horizontales o verticales
E_8:	a	No Justificó
E_9:	a	Son letras que tienen la misma distancia
E_{10}:	a	No escribió nada
E_{11}:	c	Si x es perpendicular a t x = también es perpendicular a s
E_{12}:	a	Van a la misma dirección
E_{13}:	-	No escribió nada
E_{14}:	a	Porque x y s forman una perpendicular
E_{15}:	c	Porque la t y s son paralelas
E_{16}:	a	Que la recta x y s son perpendiculares entre sí
E_{17}:	a	Las rectas x y s pueden ser paralelas o perpendiculares
E_{18}:	a	Pues yo escogí la mejor y me gustó
E_{19}:	c	Porque las dos son paralelas y miden igual
E_{20}:	b	Porque las rectas x y s son paralelas entre sí
E_{21}:	b	Porque las retas t y s son retas
E_{22}:	c	Midiéndolos si son iguales
E_{24}:	-	No escribe nada
E_{25}:	a	Si t y z son perpendiculares z y t son perpendiculares también
E_{26}:	a	Porque en la pregunta se dice que las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t por lo tanto también es perpendicular a la recta s.
E_{27}:	b	Porque no se unen
E_{28}:	a	No Justificó

JUSTIFICACIONES A PREGUNTA 12

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados; la de un cuadrilátero es 360 grados ; de un pentágono es 540 grados, de un hexágono es:

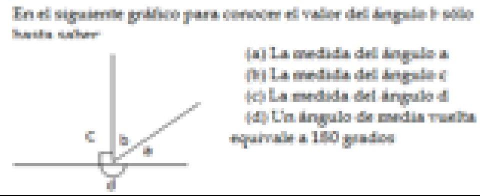


(a) [illegible] (b) [illegible]
(c) [illegible] (d) [illegible]

Clave correcta: c

		Porque…
E_{1}:	c	La secuencia va sumando 180°
E_{2}:	c	Cada vez va aumentando 180°
E_{3}:	c	De a 180 grados suma 360 más 180 540 más 180 son 720° grados.
E_{4}:	-	No justifica
E_{5}:	c	Si sumo 180 y 180 me da 360 y 360 es igual a 720
E_{6}:	c	Va avanzando de 180 + 540 es 720
E_{7}:	c	Va aumentando de 180 en 180
E_{8}:	b	No justifica
E_{9}:	b	Un "exagono" según la medida es de 360° por lo menos de esa cantidad
E_{10}:	c	Cada uno es mayor por 180 entonces el hexágono mide 720
E_{11}:	c	Le sumamos 180 4 veces
E_{12}:	d	Un hexágono tiene más vértices que un cuadrilátero y un triángulo
E_{13}:	-	No justifica
E_{14}:	c	Tiene 5 lados
E_{15}:	c	No justifica
E_{16}:	c	La puse a la londra tolondra
E_{17}:	c	No justifica
E_{18}:	d	En la que hice la suma de las cosas estas a mí de mi parte me gustó
E_{19}:	c	Porque tien el peso 720
E_{20}:	c	Porque el hexágono tiene 720°
E_{21}:	b	Porque mide más
E_{22}:	c	No se como aserla
E_{24}:	c	No justifica
E_{25}:	c	Porque dentro del exagono se muestran 4 tiangulos 180° x 4 720°
E_{26}:	c	No justifica
E_{27}:	d	No se decir la respuesta
E_{28}:	d	No justifica

JUSTIFICACIONES A PREGUNTA 16

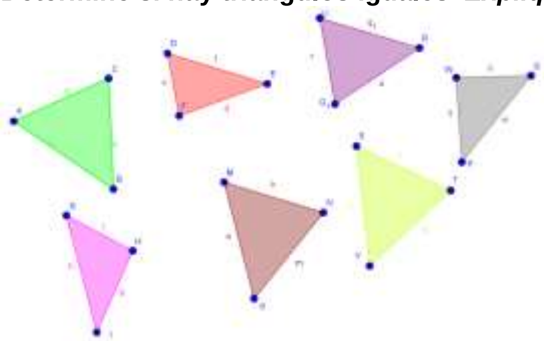


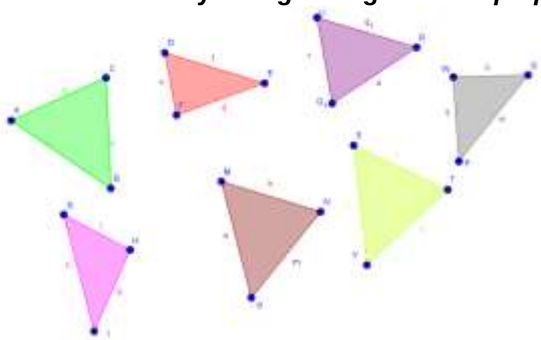
Clave correcta: a

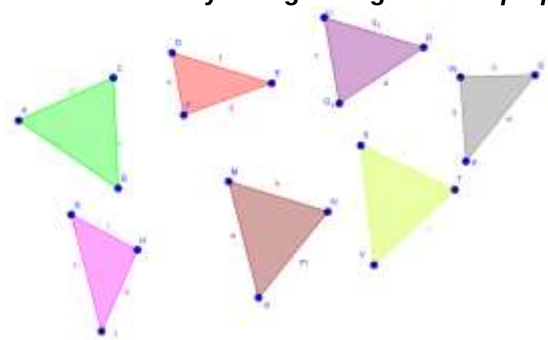
		Porque....
E_1:	a	El ángulo C mide 90° y sabiendo cuánto mide el ángulo *a* se le puede restar
E_2:	a	Porque al medir con el transportador es la misma medida
E_3:	a	Porque tengo que saber cuánto mide el *a* para saber el *b*
E_4:	-	No justifica
E_5:	a	No justifica
E_6:	c	Porque al medir con el transportador debe mirar la letra *c*
E_7:	d	Porque para saber el valor de un triángulo se necesita saber cuánto mide la vuelta equivale a 180°
E_8:	c	No justifica
E_9:	-	"No sé"
E_{10}:	a	No justifica
E_{11}:	d	No justifica
E_{12}:	b	Con la línea c se guía para hacer la línea b
E_{13}:	a	Al saber la medida del ángulo a me dice al mismo tiempo la medida del ángulo b
E_{14}:	c	Porque un ángulo recto….
E_{15}:	d	No justifica
E_{16}:	d	No justifica
E_{17}:	c	No justifica
E_{18}:	c	Pues hay habían bastantes yo esa me quedo pero la respondí con mucha delicadeza y me puse a medir todos los ángulos y me dio eso.
E_{19}:	a	Para que se emplea una nueva ruta
E_{20}:	d	Porque el ángulo es medida de 180
E_{21}:	a	No justifica
E_{22}:	d	No se como reprecentarla
E_{24}:	-	No justifica
E_{25}:	a	Si allamos el balor del angulo a y se lo restamos al angulo c, octenemos los resultados del angulo b.
E_{26}:	c	No justifica
E_{27}:	b	No se el porqué
E_{28}:	d	

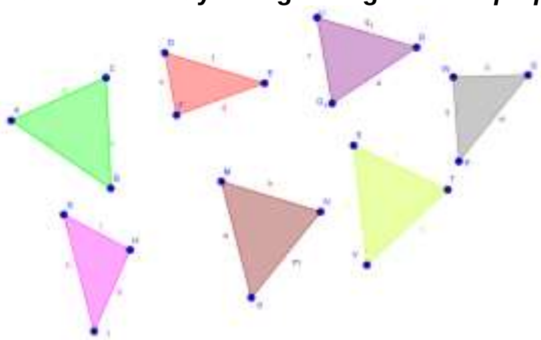
JUSTIFICACIONES A PREGUNTA 20		
¿En la siguiente figura cuál es la medida del ángulo *X*?  (a) 60° (b) 30° (c) 90° (d)150°		
Clave correcta: a		
		Porque…
E_1:	b	180° - 120° = 60° y esos dos ángulos eran iguales
E_2:	c	No justifica
E_3:	b	Porque el ángulo recto es de 90° grados y un poquito más abierto que la figura es de 60° y porque lo medí y me dio 30°
E_4:	-	Porque está formado por un ángulo de 90°
E_5:	c	No justifica
E_6:	d	Porque 120 x 60 da 720
E_7:	d	No justifica
E_8:	b	No justifica
E_9:	b	30° dio la medida
E_{10}:	b	No justifica
E_{11}:	-	No justifica
E_{12}:	c	Cuando se traza una línea de esa forma es un ángulo de 90°
E_{13}:	b	No sé, al azar
E_{14}:	c	No justifica
E_{15}:	a	No justifica
E_{16}:	d	A la loca
E_{17}:	d	No justifica
E_{18}:	b	Pues yo en la ultima me costo pero en esa y se lo que pude porque era la ……. más precisa y pues marqué la que amí más me gusto y la hize muy bien pero yo medí con el transportador.
E_{19}:	d	Porque su angulo es un poco mas ancho que el otro
E_{20}:	b	Porque la medida es 30°
E_{21}:	c	No justifica
E_{22}:	d	Porque los medí
E_{24}:	a	Medí con el transportador
E_{25}:	a	No justifica
E_{26}:	d	No justifica
E_{27}:	d	No se la respuesta
E_{28}:	c	No justifica

Anexo G. Transcripciones de Respuestas Actividad 1.2

ACTIVIDAD 1.2 **Determine si hay triángulos iguales. *Explique* su respuesta** 	
E_1:	Todos los triángulos son iguales en que ninguno tiene todos sus lados iguales y por esos son isósceles. El triángulo ABC y el MNO tienen ángulos iguales. El triángulo DEF y el PQW son triángulos rectángulos isósceles.
E_2:	Al medir los triángulos café MNO y verde ABC con la regla tenían la misma medida y desde un principio también pensé que eran iguales y se que son iguales por su longitud y medida. El rosado HIG el naranja DEF y el gris PQW no son iguales porque sus medidas o longitudes por ningún lado coinciden y no son idénticas. El café MNO y el verde claro STV son iguales porque son igual numero de medición y de longitud otra cosa puede ser sus angulos que miden igual. Los triángulos MNO, STV y ABC son completamente iguales porque ya lo saque al saber que el café y el verde son iguales y el café y el verde claro también medi el verde y el verde claro entonces el triangulo MNO ABC y STV son iguales El triangulo MNO y QRU no son iguales porque sus medidas lo comprueban y sus angulos también El triangulo ABC Y QRU parecen iguales pero al observarlos largas líneas y otras cortas y no son iguales
E_3:	(WQP) es igual a (HGI) porque su medida es igual. (MNO) y (STV) son iguales por que su medida y longitud es menor a 180° (el Abc y (URQ) y (DEF) no son iguales porque su medida no es igual ni su longitud. los triángulos no son iguales porque unos tienen medidas iguales los otros no sus lados son iguales unos pero otros lados no son iguales y que sus grados no son iguales ni su longitud.
E_4:	los triangulos iguales son mno, es igual a stv porque si los mido me da lo mismo los otros no miden lo mismo porque no son igualese
E_5:	Si hay triángulos igulales estos son los igaules., M,N,O y el S,T,V los otros no son iguales porque el m,n,o mide por todos sus lados 4cm y medio y el s,t,v también mide 4 cm y medio. en cambio los otros miden mas o otros miden menos solo el m,N,o y el s,t,v.
E_6:	Los triángulos A,B,C y M,N,O y S,T,V son iguales o isósceles.
E_7:	Los triángulos M,N,O y S,T,V son iguales porque tienen un lado que mide 4 y medio tienen otro que pasa 2 lineas mas allá del 4 cm y el otro lado llega casi a los 5cm. Los otros no son iguales porque tienen medidas distintas
E_8:	el triangulo C,AB no es igual porque la b mide 4 y 3 cm la c mide 4 y 4 cm c mide 5cm el angulo d,E, y F no es igual porque la F es mas larga que los otros la d es la misma que el otro y el otro es mas pequeño el angulo U R y Q tanpoco es igual la u y Q se parecen pero la otra es mas pequeña el angulo W Q y P el w es mas largo que los otros el Q es mas largo que el otro y el otro es mas pequeño el agulo G H I el H es mas largo que los otros el I es mas pequeño y el g es un poquito mas

ACTIVIDAD 1.2 **Determine si hay triángulos iguales. *Explique* su respuesta** 	
	grande que el I el angulo m n o el N es mas grandee que el m es mas grande que el o y el o es mas pequeño el angulo s t v el t es mas grande que el s y el s es mas grande que el v y el v era el mas pequeño.
E_{9}:	MNO y STV son iguales tienen las mismas mediadas dan iguales en la misma cantidad SO esos dos el resto no son iguales diferentes medidas hay unas grandes pequeñas mediana. A y C en la línea b miden casi igual a D y E línea f lados casi iguales pero en los otros lados no tienen la misma medida. W y Q p lado iguales con G y H lado i son iguales por ese lado. hay lados iguales otros no hay unos esactos triángulos hisosceles.
E_{10}:	Son iguales los triangulos m,n,o y s,t,v porque los lados m,o es igual a s,v porque miden igual y el lado o,n es igual a v,t y m,n es igual a T,s porque miden la misma. Son iguales los triangulos W,Q,P y D,E,F y G,H,i son iguales porque tienen un lado que miden 90° y los otros más de 180°. Son iguales los triángulos A,B,C , m,n,o , S,T,V y U,Q,R son iguales porque todos miden más de 180°
E_{11}:	Son iguales los triángulos ABC y STV porque tienen la misma media son iguales los triangulos GHI y DEF y PQW son iguales porque tiene las mismas medidas y los lados son iguales triángulos son MNO y URQ son iguales.
E_{12}:	hay dos triángulos iguales que son mon a,b,c y s,v,t porque todos sus tres lados son iguales y tienen la misma medida hay tres triángulos que no son iguales que son G,I,h D,I,E y W,P,Q porque sus medidas no son iguales. A,b,v y u,q,v tampoco son iguales porques sus medidas son muy distintas
E_{13}:	Cuatro triángulos son iguales El ABC el MNO el STV, el QRS porque sus lados son de la misma longitud. Los otros tres tienen sus lados desiguales Los triángulos a simple vista se ven igual osea el ABC MNO STU QRS pero al medirlos el ABC no miden sus lados iguales El MNO mide igual al ABC y al STV pero el QRS todos sus lados si son iguales es un triángulo regular. Un triangulo empieza en un punto luego una recta y después un triángulo (coloca símbolos y una carita feliz)
E_{14}:	Porque el triangulo tiene tres lados con cada punto y hay dos triángulos higuales y hay triángulos tiene de 90° de cada lao y también son unos diferentes y también tienen de 80°
E_{15}:	No realizó la prueba
E_{16}:	El triángulo verde oscuro con el café son iguales por que: Todos sus lados son iguales pero ay una cosa donde no son iguales es en los puntos que los nombran son distintos por que en el triangulo verde oscuro las letras son ABC y el triangulo café las letras son: N,O,M. Los otros 5 triangulos no son iguales por que sus lados son distintos y las letras son en desorden y distintas y todos los cuadros tienen las letras en mayúsculas y minúsculas.

<table>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDAD 1.2
Determine si hay triángulos iguales. Explique su respuesta
</td></tr>
<tr><td>E_{17}:</td><td>1. ¿hay triángulos que tengan la misma medida? ¿Por qué? No porque cada triangulo tiene su distinta medida
2. ¿Porque decimos que un triangulo es igual a otro? Porque sus tres líneas miden la misma medida
3. ¿Hay líneas que tengan la misma medida de otro? ¿Cuáles son? Si desde la A hasta la B y de la M hasta la O</td></tr>
<tr><td>E_{18}:</td><td>Yo de mi parte digo que es el triangulo amarillo con el verde por mis miradas que estuve mirando de todos los triángulos vi que estos eran iguales y por eso las marque porque están iguales y todos sus lados yo los vi que eran exactos pues yo nos medí porque se me olvidó traer lo exacto con mi visión lo vi que no eran echos porque lo que sobran no me parece pero en los computadores cuando nosotros nos toco hacer los triángulos no pusimos a medir los trangulos y se movían para todos los lados estaba mal y pero como se me olvido traer el compa o el trasportador no puedo desifran con visión están los otros triángulos están mal.</td></tr>
<tr><td>E_{19}:</td><td>Rta: no son iguales porque todos son de diferentes medidas y sus angulos no son correctos unos miden mas que otros y ellos no son iguales también tienen formas unos pequeños y otros grandes pero todavía no estoy segura pero creo que no por que hay unos que miden mas que otros y otros miden menos que los otros pero no son iguales tienen tamaño, forma y medidas diferentes y el triángulo a,B,C no es igual al p,W,Q tienen medidas diferentes no son iguales. El triangulo G,H,i con el triangulo O,N,m tampoco tiene diferentes medidas unos son isoceles y otros equiláteros y con diferentes medidas.
el triangulo Q,R,U. y el s,t,v. los dos tienen sus medidas diferentes no son sus medidas iguales uno tiene medidas cortas y otras tienen medidas largas y todos tienen diferente medida y hay otros voy a ver sus medidas. D,E,F: y el P,Q,W sus lados son de longitud sus medidas son diferentes.</td></tr>
<tr><td>E_{20}:</td><td>Si porque el triangulo ABC con el STV tiene todos sus lados iguales y también el triangulo URQ con el MNO tiene todos los angulos y medidas
Tambien el GHI con el triangulo que tiene nombre como WQP porque tiene bien echos los iguales.
Los otros triángulos no porque no tiene medidas angulos y longitos iguales
Aquí able por que si casi es todos son iguales de longitud anchitud amplitud y longitud con su medida
Ahora boy hablar de los que no porque no tiene ni amplitud ni longitud ni anchitud ni angulos iguales</td></tr>
<tr><td>E_{21}:</td><td>5 triangulos miden lo mismo son ABC GHI MNO STV PWQ
Los 2 triangulos que no median lo mismo y los angulos no son y guales.</td></tr>
<tr><td>E_{22}:</td><td>El triangulo ABC con el MNO son iguales porque tiene la misma medida aunque distinta forma. El triangulo ABC y el STV son iguales en forma y tamaño. MNO con STV porque son convexos menores a 90°. URQ con STV porque son convexsos.</td></tr>
<tr><td>E_{24}:</td><td>El triangulo verde oscuro el triángulo café son iguales en todos sus tres lados y midiendo</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 1.2 **Determine si hay triángulos iguales. *Explique* su respuesta** 	
	con el compas los dos miden 260°
E_{25}:	Los triángulos ABC, MNO y STV son iguales porque son isoceles tienen 2 lados iguales y uno es de diferentes medidas y al igual que URQ_1. Los triangulos GHI y DFE son triángulos escalenos, tienen todos sus lados de diferente longitud. El triángulo PQR es un triangulo rectangulo.
E_{26}:	Los triángulos (A,B,C) (M,N,O) y (S,T,V) son iguales porque al medirlos todos con el compás sus resultados fueron iguales y al medirlos con la regla estos fueron los resultados: En el triangulo (A,B,C) el resultado de sus lados es: a: 4½, b: 4 y 3 milimitros y c: 4½ y 3 milimitros. El triangulo (D,E,F) su resultado es: d: 4 cm, e: 3 cm y 4 cm y 3 milimitros. El triangulo (URQ) su resultado es: u: 4 cm y 2 miliemtros, r: 3½ y q_1: 4 cm y 3 milimitros. El triángulo (W,QP) su resultado es: w: 4½ cm, q: 3½ cm y 2 milimetros, p: 3cm y 4 milimetros. El triangulo (STV) su resultado es: s:4½ cm, t: 4½ y 3 milimetros, v: 4cm y 3 milimetros.
E_{27}:	Los triángulos (M,N,O) y (S,T,V) y (A,B,C) porque tienen sus tres mismas medidas los triángulos.
E_{28}:	Profe yo no entendí M,N,O y el s,t,v si son iguales midiéndoles las caras

Anexo H. Transcripción de exposición de conclusiones Actividad 1.3

*[1]- **DI**: Bueno vamos a escucharnos. Ustedes cuando van a hablar, van a hacer referencia a los nombres de cada triángulo, si se quieren apoyar de la hoja, pues muestran a sus compañeros, y entre ustedes, si hay alguno de ustedes que no esté de acuerdo con lo que su compañero está hablando, toma la palabra. ¿Listo? E13 le doy la palabra.*

*[2] - **E13**: Pues en mi grupo encontramos tres triángulos iguales pero yo tengo uno más que para mí es igual.*

*[3] - **DI**: ¿Por qué es igual?*

*[4] - **E13**: Pues miden sus lados iguales entonces es igual a los otros tres, aunque me di de cuenta que el que yo dije que era igual, sus tres lados para mí miden igual perooo no a los otros porque los otros tres miden, miden 3, 4 y 3 y el mío mide 3, 3 y 3, o sea que no es igual a los otros*

*[5] - **DI**: O sea, se convenció de que solo hay tres triángulos iguales*

*[6] - **E13**: Sí*

*[7] - **DI**: Y cuál es el criterio para establecer que sean iguales, ¿por qué son iguales?*

*[8] - **E13**: Porque los tres miden igual sus lados*

*[9] - **DI**: Por la longitud de sus lados. Muéstrele a sus compañeros cuáles serían esos tres triángulos, nómbrelos.*

*[10] - **E13**: (Volteando la hoja hacia sus compañeros) ehhhh, el ABC, MNO y STV.*

*[11] - **DI**: ¿alguno de ustedes quiere apoyar lo que dice María? O quiere refutar o exponer algo en lo que no esté de acuerdo? ¿Qué dice **E2**, alguna otra cosa que haya detectado en los triángulos para establecer si son iguales o no?*

*[12] - **E2**: No, nosotros dijimos lo mismo que dijo E13.*

*[13] - **DI**: Bueno. Alguno de ustedes además de medir lados, ¿midió ángulos? **E1**?*

*[14] – **E1**: No. Hoy solo lo hicimos a simple vista, pero no usamos nada, nnn*

*[15] - **DI**: (terminando la idea del estudiante) ...ningún instrumento de medición para hacerlo. Pero ustedes habían establecido que porque tenían ángulos iguales….*

*[16] – **E1**: pues así a simple vista se veía que eran iguales, pero parece que no, hay unos más corticos de 90°, otros más…*

*[17] - **DI**: Qué dice **E10**? E10 encontró algo muy particular en el grupo, cierto? Qué pasó en el grupo?*

*[18] - **E10**: Pues que E9 y yo teníamos las mismas respuestas…..*

*[19] - **DI**: (ayudando al estudiante para que se exprese)…... ¿y sus otros dos compañeros? (Risas de E10 y otros niños)…. ¿No? ¿Y no hicieron por convencerlos de que ustedes tenían razón?*

*[20] - **E10**: (más risas y con la cabeza dice que no)*

*[21] - **DI**: (le da la palabra a otra estudiante). **E7**, ¿cuál es su aporte del grupo?*

*[22] - **E7**: Ehhhh, los triángulos ABC, MNO y STV son iguales*

*[23] - **DI**: ¿Por qué? Qué criterio permite establecer esa conclusión?*

*[24] - **E7**: Que cada uno de sus lados son iguales, su longitud es igual.*

*[25] - **DI**: …la longitud de sus lados, ¿cierto? ¿Qué dice E26?*

*[26] - **E26**: Profesora, estamos de acuerdo con la aportación de E13 y E7. Los triángulos ABC, MNO y STV son iguales*

*[27] - **DI**: ¿cuál es el criterio?*

*[28] - **E7**: …que al medirlos y todo, sus ángulos todos son iguales.*

*[29] - **DI**: En este grupo, en el grupo que representa E24, E16 tenía una apreciación muy particular, la recuerda E24?*

*[30] - **E24**: (Dice no con la cabeza y le da risa pero no habla) (murmuraciones de parte de estudiantes……..)*

*[31] - **DI**: E16 decía que no eran iguales porque…. Lograron convencer a E16 de lo contrario? O siguieron con esa idea? (murmuraciones de estudiantes incitando a E24 para que hable, pero no lo consiguen)*
E16 decía que los triángulos no eran iguales porque uno se llamaba ABC, el otro se llamaba MNO, es decir que porque tienen diferente nombre
(Esto ocasiona mucha risa y burla de parte de los estudiantes)

*[32] - **DI**: E15, por qué le causa risa?*

[33] - ***E15****: porque ninguno va a tar con los mismos nombres.*

[34] - ***DI****: O sea, no importa que tengan diferentes nombres para que sean iguales. Pero por qué no importa?*

[35] - ***E15****: porque pueden tener otros nombres y si miden lo mismo pues son…..(terminando la idea)*

[36] - ***DI****: ¿Qué dice E25? (E25 pide la palabra)*

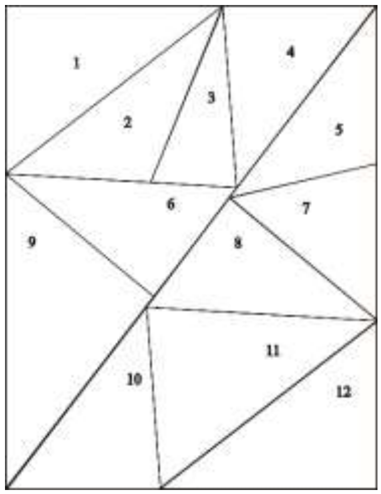
[37] - ***E25****: que el nombre de los ángulos no importa, de los triángulos no importa* (corrige) *porque uno le puede colocar el nombre que uno desee.*

[38] - ***DI****: Para todos. Importa que un vértice de un triángulo tenga una dirección diferente a la de otro para decir si son iguales o no? (murmullos). Haber por qué?*

[39] - ***E13*** *(Pide la palabra): porque para mí el triángulo es triángulo sea como sea, mirando para cualquier lado.*

[40] - ***DI****: ¿Qué dicen ustedes, si tiene razón E13?*
(La mayoría de los niños dicen Sí con el movimiento de la cabeza)

Anexo I. Transcripción actividad 1.4 Armar el rompecabezas



Inicié por organizar los grupos de trabajo sentados en el suelo y ubicando las cámaras de los computadores de forma que todos sean grabados. Luego les expliqué que la actividad consiste en armar un rompecabezas que solo tiene triángulos, que es muy sencilla y que no tomará mucho tiempo solucionarlo; y que luego de terminada la actividad se hará un conversatorio a cerca de los colores de los triángulos que utilizaron para cubrir los espacios enumerados

Trabajaron por espacio de dos minutos cuando el primer grupo ya había terminado. Pasé por cada uno de los grupos conversando sobre lo que hicieron, pero mientras, los otros charlaban perdiendo tiempo. Sin embargo, al interior de cada grupo cada conversación llevó a concluir que los triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Luego cuando quise revisar cada uno de los videos del grupo, solo sirvieron dos.

GRUPO 1: E2, E4, E5 y E11

El grupo inició el trabajo y lo desarrolló correctamente, pero algo particular que se destaca en este grupo es que no conversan entre sí, solo entablan comunicación con miradas o gestos. La docente investigadora se acerca al grupo e inicia una charla con ellos:

[1] **DI**: *¿Tuvieron alguna dificultad para armar?*
[2] ***E2*** *(Con la cabeza y con una voz suave dice) No*

[3] ***DI :*** *(Entre mucho ruido) Qué tuvieron en cuenta para ubicar cada figura?*

*[**E2**….] (No se escucha su intervención, hay mucho ruido)*

[4] ***DI*** *Y me dice aquí E5 algo muy importante, qué tuvieron en cuenta?*

[5] ***E5:*** *La forma*

[6] ***DI:*** *Y qué más?*

[7] ***E4 :*** *El tamaño*

[8] ***DI:*** *Y el tamaño, muy bien. Podrían haber pensado que este triángulo, ehhh, fueraaaa, aquí? (señalando dos triángulos diferentes, uno verde y uno azul)*
[unos mueven la cabeza diciendo que sí, otros que no]

[9] ***DI:*** *Si lo llegaron a pensar?*

[10] ***E2:*** *[moviendo la cabeza, con duda dice que sí]*

[11] ***DI:*** *Por qué E2?*

[12] ***E2:*** *[no se alcanza a escuchar por el ruido, pero DI les repite la pregunta, insistiéndoles en los triángulos]*

[13] ***E11:*** *No porque el triángulo verde está muy grande para este lugar (señalando el lugar donde se encuentra el triángulo azul)*

[14] ***DI:*** *Entonces nuevamente pasa aquí lo que dijo E5, muy importante su aporte, debemos tener en cuenta el tamaño y la forma. ¿Tomamos medidas de ángulos y lados?*
[los niños dicen con la cabeza que no]

GRUPO 2: E14, E17, E21 y E26

Al igual que el grupo anterior, casi no se da comunicación entre ellos.
Solo se escuchan murmuraciones: *"No, ese no va ahí, es muy grande"*. *"No, es este"*.

Cada uno toma una ficha (triángulo) y simplemente la coloca en la base donde se está armando.

Cuando la docente se acerca al grupo, resulta esta conversación.

[1] ***DI****: ¿Tuvieron alguna dificultad para armar?*
[Con la cabeza y en coro dicen que no]

[2] ***DI :*** *Estaba sencillo?*

[3] ***E26:*** *Jácil!*

[4] ***DI: ¿****Tuvieron algo en cuenta para poderlo lograr fácilmente?*

[5] ***E17 :*** *Ehh…, pues íbamos midiendo, o sea, qué tanto grande eran los triángulos y se iba mirando si era.. por ejemplo este (señalando un triángulo), lo grande, lo íbamos midiendo a ver en qué casilla quedaba bien.*

[6] ***DI:*** *Bueno, lo grande. Y eso qué característica es en un objeto, decir si es grande o pequeño? Cómo se llama esa característica.*

[7] ***E26 :*** *¡Tamaño!*

[8] ***DI:*** *¡El tamaño! ¿Cierto? ¿Pudieron llegar a pensar que esta ficha (señalando un triángulo azul claro, por ejemplo, cupiera aquí (señalando el triángulo azul oscuro)? [dicen casi en coro, un No rotundo]*

[9] ***DI:*** *No, ¿cierto? Además del tamaño, qué más podemos percibir? [los estudiantes quedan en silencio, entonces la docente repite varias veces la pregunta, y agrega…]. Qué podemos comparar en ellos dos (señalando el triángulo blanco y el azul oscuro), por ejemplo.*

[10] ***E26:*** *Que tienen diferente forma!*

[11] ***E17:*** *Y diferente medida.*
[Hay un estudiante que no ha hablado]

[12] ***DI:*** *E14, por qué son de diferente forma, entonces, estos dos triángulos?*

[13] ***E14:*** *No sé (luego de un silencio)*

[14] ***DI:*** *O es que son iguales?*
[15] ***E14:*** *No*

[16] ***DI:*** *Entonces por qué son de diferente forma? ¿Quiere manipularlos? (la docente quita los triángulos de la base y se los da a E14). ¿Cómo sé que tiene diferente forma? ¿En qué nos fijamos?*

[17] ***E14:*** *¿En la medida?*

[18] ***DI:*** *La medida nos determina el tamaño*

[19] ***E14:*** *Los lados*

[20] ***DI:*** *Los lados….. en qué sentido?*

[21] ***E26:*** *[lo interrumpe], [habla pero no se escucha]*

[22] ***DI:*** *Ahhhh, hablamos entonces del tipo de triángulo. Porque un isósceles es un triángulo que tiene qué?*

[23] ***E14:*** *Todos sus lados iguales?*

[24] ***DI:*** *¿Todos?*

[25] ***E26:*** *No, dos*

[14] ***DI:*** *Qué tal tener dos triángulos uno grande y uno pequeño y ambos sean isósceles! Sí? Entonces no lo podríamos determinar así no más. Ahora vamos a socializar y lo vamos a deducir.*

Luego de pasar por cada uno de los grupos y escuchar sus apreciaciones y orientar la conversación de manera que se llegara a la conclusión esperada, inicié la socialización:

[1] ***DI:*** *Listo, ahora, vamos a ver si todos lo armaron de la misma forma. Haber…. Qué color, por ejemplo, tiene el triángulo que colocaron en el lugar N° 1?*
CORO Verde!!

[2] ***DI:*** *Todos?*

[3] ***E25:*** *Noooo, yo tengo verde*
[risas]

[4] ***DI:*** *(Tomando tres triángulos y mostrando a los estudiantes). Tenemos tres colores: Verde biche, verde claro y verde oscuro. Entonces ¿cuál tienen?*
CORO: unos dicen verde oscuro (la mayoría), otros, verde claro.

[5] ***DI:*** *Venga E13 y me ayuda acá….. Entonces yo escojo los triángulos; cuál de estos dos va en el 1 (dirigiéndose a E13)? Porque unos dicen que el verde oscuro, otros que el verde claro….*

[6] ***E13:*** *Profe me los permite? (compara los dos triángulos sobre la base numerada)*
CORO: (murmuran…. [“Juntos”]

[7] ***E13:*** *Sí, juntos.*

[8] ***DI:*** *Y …¿por qué será que encajan juntos?*
CORO: [¡porque tienen la misma medida!….]

[9] ***DI:*** *Tomó alguna medida?*

[10] ***E13:*** *No profe pero el que los hizo……*

[11] ***DI:*** *Utilizó la regla?*

[12] ***E17:*** *(gritando) Son iguales!*

[13] ***E13:*** *El que los hizo tuvo la grandiosa idea de hacerlos así.*

[14] ***DI:*** *O sea, (señala a sí misma)*

[15] ***E9:*** *Solo cambiaron de color*
[risas]

[16] ***DI:*** *Pero aquí no necesitamos una escuadra, una regla o transportador para medir lados y ángulos. ¿Cómo lo logramos saber?*

[17] ***E26:*** *El compás*

[18] ***DI:*** *¿Lo utilizaron aquí?*
CORO: Noooo.

[19] ***DI:*** *¿Qué utilizaron?*

[20] ***E13:*** *¿La visualidad?*

[21] ***E13:*** *La misma hojita para ubicarlos (señalando la base de los triángulos numerados)*

[22] ***DI:*** *Y ¿qué hacemos en esa hojita?*

[23] ***E13*** *(y otros niños)**:** *¡Colocarlos que cuadre bien!*

[24] ***DI:*** *Ahh, entonces unos llegaron y dijeron, ay!! Este va aquí (colocando un triángulo sobre la base numerada, al azar), en el 3.*

[25] ***E24:*** *Buscar la forma del triángulo*

[26] ***E3:*** *Y el tamaño*

[27] ***DI:*** *Y el tamaño, entonces es ilógico de pronto pensar que esta pueda ir en el 3, verdad? Bueno muy bien. Los dos los comparamos, nosotros hicimos una comparación de mi triángulo con la base y establecemos que puede ir tanto en uno, tanto el verde oscuro como el verde claro. Y entonces dónde va el otro verde?*

[28] ***E13, E17, E24, E25,*** *(a la vez)**:** En el 12*
[……….]

[29] ***DI:*** *entonces podemos decir que el triángulo 1 y el 12 son….*
CORO: iguales

[30] ***E22:*** *La misma jodaaaa*

[31] ***DI:*** *Vamos a cambiar esa palabra iguales por CONGRUENTES. Entonces decimos que son triángulos Congruentes. […] Qué color tiene el triángulo número 9?*
CORO: El biche!!!…. El blanco!!!

[32] ***E26:*** *Biche!!! El blanco va en el 6!*
(DI coloca el triángulo biche sobre la base numerada con el 9 para hacerle ver a E26 que está errado)

[33] ***E26:*** *Ahhhh,*

[34] ***DI:*** *Está despistado E26! Lo tenía al revés?*

[35] ***E26:*** *no sabe cómo lo tamos mirando profesora!*

[36] ***DI:*** *Ahhhh, uno está viendo el 6 y el otro el 9. Pero la numeración está en un solo sentido!! Bueno, entonces en el 9 va ….el blanco.*

[37] ***E16:*** *Y en el 6 va el verde biche.*
[38] ***DI:*** *Y no podría ir en el 8? […] (los estudiantes miran, comparan y determinan que sí).*

[39] ***E13:*** *Profe si casan!*

[40] ***DI:*** *Entonces el triángulo 6 y el triángulo 8 son….*
CORO: Congruentes

[41] ***DI:*** *Porque tienen la misma forma y el mismo tamaño*
[.....]

[42] ***DI:*** *En triángulo número 10, ¿cuál color colocaron?*

[43] ***E25:*** *El cajé*

[44] ***E27:*** *El rojo*

[45] ***E17:*** *el cajé*

[46] ***DI:*** *Hagamos la aclaración, uno es café oscuro y el otro café claro.*

[47] ***E26:*** *Profesora, a mí me salieron dos iguales*

[48] ***DI:*** *A alguien más? Y dónde los colocaron*

[49] ***E126:*** *En el 4 y en el 10.*

[50] ***DI:*** *El 4 y el 10 son congruentes? Compruébenlo! Qué podríamos hacer?*

[51] ***E25:*** *Intercambiarlos de puesto*

[52] ***DI:*** *Muy bien E25. [....] ¿Y otra forma cuál es?*

[53] ***E13:*** *Colocar uno sobre el otro*

[54] ***DI:*** *(colocando uno sobre el otro) Los comparamos y ahí está, que son congruentes. Entonces yo lo puedo colocar en el 4 o en el 10. María hágale preguntas a sus compañeros sobre los triángulos que les hacen falta [....].*

[55] ***E13:*** *[...] ¿Qué color va en el 3?*

[56] ***E10:*** *Este (mostrando el triángulo azul oscuro)*
CORO: Sí, ¡ese! ¡Azul oscurísimo!

[33] ***DI:*** *Hay algún otro igual a ese?*
CORO: nooooo, es único.

[33] ***DI:*** *¿Qué color va en el 5?*

Así por los siguientes 15 minutos, transcurre la clase hasta finalizar.

Anexo J. Transcripción de elaboraciones de los estudiantes, actividad 2.4

ACTIVIDAD 2.4 * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 8 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 50°. * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 10 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 110°. **A partir de lo anterior, responda:** 1. ¿Qué puede concluir con respecto a las construcciones realizadas? ______	
E_1:	Para que 2 triangulos (ABC – DEF) sean congruentes necesitamos la medida de dos de sus lados y ángulo comprendido entre ellos. Con 2 lados y un angulo comprendido entre ellos es suficiente para que sean congruentes.
E_2:	Pues que referente a las conclusiones del tema que un triangulo para construirlos solo con sus lados no es congruente y un triangulo con sus lados y angulo si son congruentes. Otra conclusión seria que al construir dos triángulos congruentes no tenía en cuenta que al pasar las mediad de una a otra se desformaban por no poner los puntos y al hacer eso no salía la medida. También yo dije que con solo los dos lados y sin el angulo podría ser congruente per mis compañeros (algunos) al realizar el triangulo no sale y hay supe que al unir dos mediad o dos líneas el angulo que unía las dos líneas formaban un angulo que no dejaban en el tablero y la otra salía sola.
E_3:	Los triángulos son congruentes porque tienen todos angulos comprendidos entre ellos y otros no.
E_4:	Estos son congruentes porque tiene la misma medida
E_5:	Que si nos dan 2 medidas por ejemplo 4 y 5 la tercera saldrá cualquier otra medida
E_6:	2 triangulos son congruentes si se cambia de distinta medida los dos a la vez. Ellos pueden ser congruentes si se traslada una media a la otra
E_7:	Que si solamente nos dan 2 medidas por ejemplo 5 y 3 la tercer medida será cualquier otro entonces si construimos dos iguales con las medidas pueden tener medidas y triángulos distintos, pero si nos dan 2 medidas y un angulo para construir 2 seran iguales, o congruentes, porque ay un ángulo comprendido entre los dos lados
E_8:	Constuimos triángulos congruentes en geogebra uno tuvimos que hacer uno que media 10 cm y 4 cm y 1.17 y el otro que era igual congruente. Yo alas primera ves me iba mal me explicaron y me fue mejor.
E_9:	Porque para que dos triángulos sean congruentes tienen que tener los lados y angulos podrían ser congruentes donde dos traingulos fuerah exatamente iguales los otro no porque no les tomabanos medidas ni con los angulos y los lados.

ACTIVIDAD 2.4

* Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 8 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 50°.

* Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 10 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 110°.

A partir de lo anterior, responda:

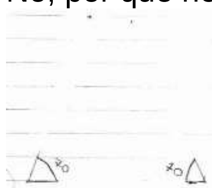
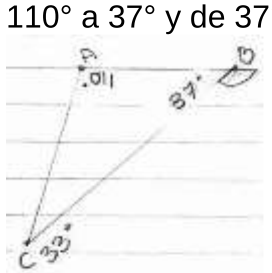
1. ¿Qué puede concluir con respecto a las construcciones realizadas? ________________

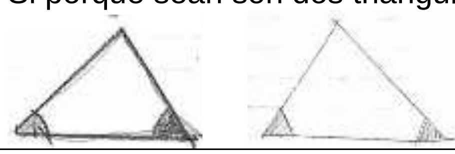
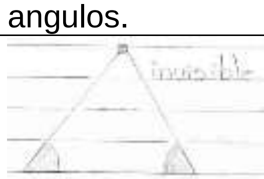
	Los triángulos 110° y 4°cm fueron y guales tomándoles medidas y midiendo angulos y dieron igual.
E$_{10}$:	Pues que no es tan difisil construir dos triángulos congruentes cuando tienen 2 lados y un angulo hay se puede constuir y para mi no fue tan difisil construirlos El ángulo es el que esta comprendido entre los dos interseciones.
E$_{11}$:	Conclui que midiendo con el trasportados sus medidas y sus angulos son iguales ejplo puse tres puntos con el transportados lo medi y dad igual
E$_{12}$:	Uno hace un triangulo con sus medidas y lado lo debido. hace otro triangulo exactamente igual mueve un punto de un angulo el que sea y el otro también se mueve son congruentes x que tiene dos medidas iguales. Para saber si esos dos triángulos son iguales debemos sacarles todas sus medidas para saber si están iguales y si son conguruentes.
E$_{13}$:	Fueron congruentes porque tuvieron dos medias y un angulo en cambio si no nos dan el angulo pues supogo que no es congruentes. Cuando me das las dos medidas y el angulo puedo saber que son congruentes y me vota la tercera medida y se que ay un angulo comprendido entre ellos.
E$_{14}$:	mueno lo primo quedo cosntruir unos cuadrados y son lo misma media para iba para ago y es el numero correcto y los angulon son los 3 lados de 60° grados para hacer el triangulo no entendia y me explicaron y a los 20minutos ya entendia y ya fue [illegible]
E$_{15}$:	Que si nos dan dos lados y un angulo podemos savar los otros dos angulos y el otro lado para poder sacar un triangulo congruentes y podemos sacar copia con el compas para hací uno mismo y los angulos que isismos hay son congruentes pporque nos dieron un angulo y dos lados y los de que días no eran congruentes porque si nos dieron los lados pero el angulo no.
E$_{16}$:	Que los triángulos son congruentes porque tienen una medida y un tamaño, forma. El triangulo que tiene 8 cm y 6 cm es congruente porque se puede

ACTIVIDAD 2.4 * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 8 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 50°. * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 10 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 110°. **A partir de lo anterior, responda:** 1. ¿Qué puede concluir con respecto a las construcciones realizadas? ________	
	contruir con una herramienta que nos confirma que si son congruentes por eso los angulos son comprendido entre ellos. Y el triangulos 10 cm y 4 cm también es lo mismo pero con distintas medidas.
E_{17}:	Cuando estaba haciendo los dos primeros triángulos hacía las líneas luego utilizaba el compas y el primero si lo hacia bien pero el segundo siempre me había salido mal porque el compras no lo había puesto bien y ellos dos si eran congruentes. Los del computador si son congruentes porque dio la misma medida y los mismos ángulos. Los que isismos en la ogita no eran congruentes porque no teníamos un angulo ni tampoco una medida.
E_{18}:	Yo no tuve en cuenta los angulos y la recta fija que uno le tiene que escribir 6 cm o 10 cm eso yo casi no lo tuve en cuenta y la línea a y B la trasaba con C y D y hay formaba un triangulo pero me quedaba mal y utilize la recta figa. Los congruentes son llos que los triángulos son iguales.
E_{19}:	Yo puedo concluir que: que podemos que un angulo congruente tiene 2 angulos iguales y 1 decigual y aprendimos que es un angulo congruente y yo aveces me equibocama y no podía hacerla pero como todo. Las utilizamos con todas las herramientas para construir un triangulo que diera 50° en su medida otro que diera 110° y otro que tuviera 70° y asi podemos hacer el triangulo que nos piden. Con las herramientas: el compas, recta que pasa por dos lados.
E_{20}:	Que en la primera construcción me di de cuenta q' no eran congruentes x q' no tenian los angulos ni la medida. En la segunda construcción si tenia y eran congruentes x q' si teníamos los angulos y las medidas y eran congruentes. Y este q' icimos si teníamos todos los angulos y las medidas.
E_{21}:	Los triángulos congruentes salen mucho triángulos de la misma manera y los demás yo primero puse tres puntos trace las líneas des úes con el polígono sabrie des pues medi los angulos después con el compas asemos en el polígono ase el mismo triangulo
E_{22}:	Al primero puedo concluir que son congruentes porque 2 medidas iguales, el segundo es congruente porque las medidas son iguales aunque tenían distinta forma.
E_{24}:	Que si solamente nos dan 2 medidas por ejm 6 y 2 la tercera medida será

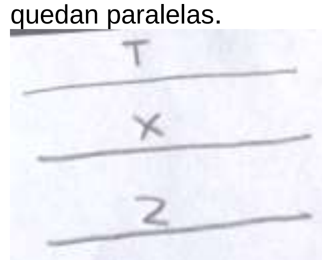
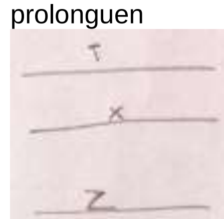
ACTIVIDAD 2.4 * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 8 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 50°. * Construir dos triángulos iguales utilizando el programa GeoGebra de lados 10 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos que mida 110°. **A partir de lo anterior, responda:** 1. ¿Qué puede concluir con respecto a las construcciones realizadas? ______	
	cual quier otro. Si construimos dos triángulos según sus medidas no serán congruentes.
E_{25}:	Que para que dos triángulos sean congruentes necesitan x lo menos 2 de sus lados tengan la misma medida y también el angulo comprendido entre ellos sea el mismo Pero si nada mas tenemos las dos medis de dos de sus lados y no tenemos el angulo esacto no serán congruentes
E_{26}:	Que mi triangulo cuando lo construi no tuve en cuenta el punto que decía “punto de objeto” y cuando me lo indicaron lo pude construir correctamente y el que había contruido primero lo no vi el el otro repetia su movimiento.
E_{27}:	Que todos los traingulos eran de la misma forma, para hacer los triángulos que isimos en las claces. El computador tenia que tener geogebra, tenia unas errameintas.
E_{28}:	Los triángulos son congruentes.

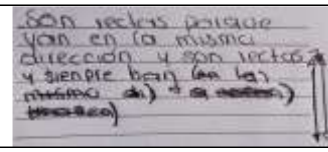
Anexo K. Transcripción de elaboraciones de los estudiantes, actividad 2.5

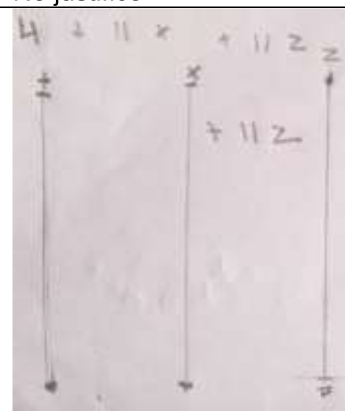
ACTIVIDAD 2.5 **¿Es posible construir dos triángulos Congruentes entre sí, teniendo como única información dos de los ángulos de uno de los triángulos? Explique. (puede apoyarse de Geogebra)** _______________	
E$_1$:	No, por que necesito una línea que este entre los 2 ángulos. 
E$_2$:	No se puede por que hace falta las líneas para que el triángulo pueda tener un triangulo congruente y las líneas del triangulo siempre se necesitan las líneas porque al borrar los puntos que son como la línea el angulo se borra.
E$_3$:	No porque sin rayas o vértices no se puede hacer los angulos.
E$_4$:	Sí. Porque solo se neseitaria poner el otro angulo y aser el otro triangulo.
E$_5$:	Si se puede por que usted pone 2 puntos en cualquier lado luego uso la herramienta ángulo dada su amplitud y le oprime a un punto y luego pone otro punto t le sale un cuadrito y escribimos el número por ejemplo 67.18° le oprime ok y le sale.
E$_6$:	No. Porque es nesesario utilizar lieneas en 2 ángulos que me piden de 110° a 37° y de 37° a 33° y de 33° a 110°.  
E$_7$:	No porque se necesitarían líneas porque una construcción se hace a partir de líneas y puntos.
E$_8$:	No son congruentes porque se hace el primer triangulo y el segundo y no son congruentes porque no daban medidas higules porque por milésimas no daban y uno el primero 90 y el otro midia 40.17 an que no son congruentes.
E$_9$:	Sí porque es posible construir dos triángulos congruentes entre si con ayuda de geogebra que pueden construir triángulos
E$_{10}$:	No. Hace falta la línea de base porque sin linias no se puede pero si tuviera mas que sea un lado y los dos angulos se podría construir un triangulo.

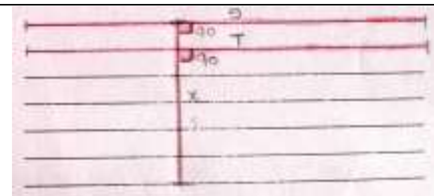
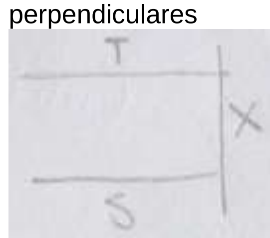
ACTIVIDAD 2.5 **¿Es posible construir dos triángulos Congruentes entre sí, teniendo como única información dos de los ángulos de uno de los triángulos? Explique. (puede apoyarse de Geogebra)**	
E11:	No es congruente necesito una línea que pase por los 2 puntos
E12:	No x si tiene dos medidas iguales no se puede sacar la otra medida que hace falta toca tener todas las medidas de las tres líneas para poder aser el triangulo.
E13:	No. Hace falta la medida de una línea para poderlo formar bien y esa línea empieza en un punto del triangulo.
E14:	Si porque sean son dos triángulos y tienen la misma midada 
E15:	No porque se requieren los lados A y B para poder hacer el triangulo
E16:	No se puede por que al trazar dos líneas se forma un angulo y no se puede hacer un angulo si líneas porque las líneas es como la base.
E17:	Hace falta la línea de base porque sin líneas no se puede construir pero si tuviera masquesea un lado y los dos ángulos se podría construir un triangulo.
E18:	Sí porque uno construye triángulos y uno mide los ángulos y mira si da lo mino número y con el compas uno lo puede nacer.
E19:	Si es posible construir dos triángulos congruentes entre si porque todos sus lados son sus medidas dan 180 y esa es la respuesta y yo digo que si.
E20:	Si si se puede construir 2 triangulos congruentes según las medidas q´ den y se puede utilizar bastantes utilez.
E21:	No porque sin líneas no se puede aser un triangulo porque nose puede poner el angulo.
E22:	Si se pueden porque se pueden con cualquier angulo construir triángulos, con distinta medida etc.
E24:	No porque al copiar dos ángulos el tercero no sale la medida del primer ángulo.
E25:	No: porque también hase falta una línea donde se intersecte con los dos angulos.
E26:	 NO. Porque se requieren de líneas y puntos se necesita una línea que una los dos ángulo y un punto vértice donde se encuentren la otras dos líneas que vienen de los ángulos pa formar el triangulo.
E27:	No porque no se podía trazar las lineas
E28:	No porque se requieren de linias y puntos.

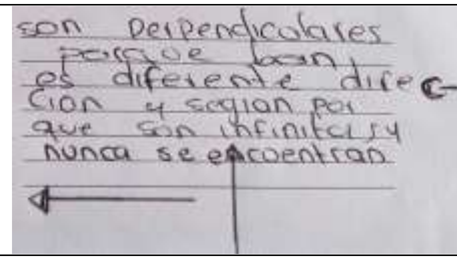
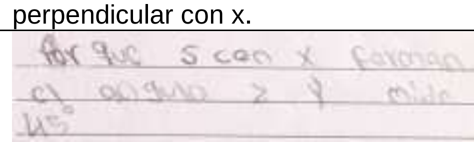
Anexo L. Tabla comparativa Diagnóstico – Prueba Final

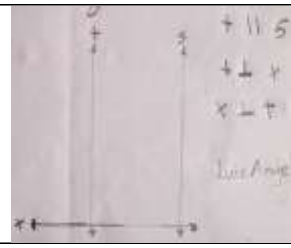
COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 4						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
E_1:	**c**		ECC	**c**		ECC
E_2:	**c**	Se quedan a la misma distancia y cada vez se van ajuntando y se choca.	DF	**c**	Porque t es una línea recta y pasa una más abajo que es x a una distancia entonces t y x son paralelas y más debajo de la x pasa la otra y todas las tres quedan paralelas. 	ECC
E_3:	**b**	Las rectas se deben cortar porque la *x* es paralela a la *z* y la *l* no	I/NJ	**c**	Porque la x t son paralelas pero la t con la z no son paralelas son perpendiculares porque se chocan	DF
E_4:	**d**	"No la entendí"	I/NJ	**c**	Las rectas t y z son paralelas se cusan entre si	DF
E_5:	**-**	No justificó	I/NJ	c	La recta t y z son paralelas porque van para el mismo lado	I/NJ
E_6:	**c**	*t* y *z* son paralelas	DF	c	Son paralelas porque nunca se cortan aunque se prolonguen 	ECC
E_7:	**c**	La recta *t* y *z* son paralelas porque así las veamos horizontales o verticales	DF	**c**	Las rectas t y z son paralelas porque pueden estar verticales o	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 4							
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			RESPUESTAS PRUEBA FINAL			
Cód	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
		nunca se van a cortar.			horizontales y son paralelas, nunca se cortan, si se unen.	
E8:	c	No justificó	I/NJ	c	Son paralelas la t y z porque ellas jamas se unirán ni se cortar porque las paralelas jamas se cortan	DF
E9:	b	Las paralelas	I/NJ	c		DF
E10:	a	Las perpendiculares forman un ángulo de 90°	I/NJ	c	Porque si la recta t es paralela a la x y la x es paralela a la z entonces la recta t es paralela a la z porque van asia el mismo lado	EGA
E11:	a	Si t es ‖ a x y x es paralela a z entonces t es ‖ a z	I/NJ	c	Porque t y x son paralelas x y z tanbien t y z son perpendiculares porque no quedan en la misma linea	DF
E12:	b	Se cortan en un punto	I/NJ	a	Si la recta t con x y x son paralelas y la t y la z se cruzan	I/NJ
E13:	c	Van en la misma dirección	EIP	c	xq ellas jamas se chocan	EIP
E14:	a	*t* y *s* son perpendiculares	I/NJ	a	No justificó	I/NJ
E15:	d	Porque una es paralela y otra perpendicular	I/NJ	a	Porque las paralelas juntan van para el mismo lado	I/NJ
E16:	a	Que van por la misma dirección y se cortan formando un punto	I/NJ	c	No justificó	I/NJ
E17:	d	Porque al medir me da un ángulo de 45°	I/NJ	a	Porque ellas casi nunca no se van a cortar entre si	I/NJ
E18:	c	Porque la t y z fueron las escogí y por eso me gusta esa pregunta	I/NJ	a	Porque las retas t Jy z si son perpendiculares	I/NJ
E19:	c	Porque se cruzan entre sí y siempre y siempre miden igual	I/NJ	d	Porque las rectas t y z son paralelas ninguna se cruza	I/NJ
E20:	a	Porque la recta t y z son perpendiculares entre si	I/NJ	c	Porque si la recta t es paralela con x y x es paralela con z entonses t es también paralela con z	EGA
E21:	c	Porque la reta t y z son paralelas	I/NJ	a	Porque t y z son retas que comienzan de un solo punto	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 4						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
					y son infinitas.	
E_{22}:	**b**	Porque la t y la z se cortan	I/NJ	**c**	Porque las 2 son paralelas y no se cruzan	DF
E_{24}:	**b**	No respondió	I/NJ	**c**	No justificó	I/NJ
E_{25}:	**c**	t ǁ x y x ǁ z, z ǁ t	EII	**c**	 Porqué al ser parlalela la t y la x y x con z la t es paralela a z.	ECC
E_{26}:	**c**	Porque las dos son paralelas	EIP	**a**	Porque las rectas t, x, z son paralelas y ninguna se cruza	I/NJ
E_{27}:	**a**	Porque se unen	I/NJ	**a**	Son paralelas porque miden lo mismo	I/NJ
E_{28}:	**b**	No justificó	I/NJ	**c**	Porque las rectas se crusan.	DF
I/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; DF: Deductiva Fallida						

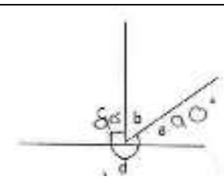
COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 8						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód.	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
E_1:	**a**	La recta *x* se cortaría con la *s*	F	**a**		ECC
E_2:	**a**	Porque al pasar por la recta *t* se hacen perpendiculares	F	**a**	Porque la reta T queda como una línea y la recta s es otra línea paralela con la otra y la x se atraviesa y queda s y x perpendiculares 	ECC
E_3:	**b**	Son paralelas porque nunca se chocan porque *x* y *t* son perpendiculares	I/NJ	**a**	Porque la recta s se cortan con la recta y por eso son perpendiculares entre ellas	I/NJ
E_4:	**b**	“No la entendí”	I/NJ	**a**	Las rectas x y s son perpendiculares entre si porque no se unen ni se cortan	I/NJ
E_5:	**-**		I/NJ	**a**	Las rectas x y s son perpendiculares porte se cruzan entre si y no van para el mismo lado	I/NJ
E_6:	**a**	Porque un recta perpendicular y una paralela forman un ángulo de 90° grados	F	**d**	Porque la recta x y s al unirse forman un angulo de 90° 	I/NJ
E_7:	**a**	Porque al chocarse forman un ángulo de 90° y no importa si son horizontales o verticales	I/NJ	**a**	Las rectas x y s son perpendiculares porque si están así  la recta x y la t y la s se van prolongando y la recta x alcanzaría a la s y serian perpendiculares.	I/NJ
E_8:	**a**		I/NJ	**b**	Las rectas x y s son perpendiculares porque ellas se chocan	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 8							
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			RESPUESTAS PRUEBA FINAL			
Cód.	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
E_9:	**a**	Son letras que tienen la misma distancia	I/NJ	**d**		I/NJ
E_{10}:	**a**	No escribió nada	I/NJ	**a**	Porque si la recta t y s son paralelas a la x y la x es perpendicular a la t entonse la recta x con la s es perpendicular porque se crusan.	I/NJ
E_{11}:	**c**	Si x es perpendicular a t x = también es perpendicular a s	I/NJ	**a**	Son paralelas porque quedan en la misma linea	DF
E_{12}:	**a**	Van a la misma dirección	I/NJ	**a**	Porque la recta x y y son iguales y tiene misma medida.	I/NJ
E_{13}:	**-**	No justificó	I/NJ	**a**	xq se chocan la x y s	I/NJ
E_{14}:	**a**	Porque x y s forman una perpendicular	I/NJ	_		I/NJ
E_{15}:	**c**	Porque la t y s son paralelas	I/NJ	**b**	Porque ellas se cortan entre sí	I/NJ
E_{16}:	**a**	Que la recta x y s son perpendiculares entre sí	I/NJ	**a**	No justificó	I/NJ
E_{17}:	**a**	Las rectas x y s pueden ser paralelas o perpendiculares	I/NJ	**a**	Porque las rectas perpendiculares se cortan entre sí.	I/NJ
E_{18}:	**a**	Pues yo escogí la mejor y me gustó	F	**a**	Porque en toces las rectas la a sí son y por eso siempre es hací	I/NJ
E_{19}:	**c**	Porque las dos son paralelas y miden igual	I/NJ	**d**	Porque ellas se cruzan y forman un ángulo se pueden cruzar entre si mismas	I/NJ
E_{20}:	**b**	Porque las rectas x y s son paralelas entre sí	I/NJ	**a**	Porque la recta t y s son paralelas entonces como la x es perdendicular con la t, tiene que ser que x es perpendicular con x.	I/NJ
E_{21}:	**b**	Porque las retas t y s son retas	I/NJ	**a**		I/NJ
E_{22}:	**c**	Midiéndolos si son iguales	I/NJ	**d**	Porque las dos son perpendiculares y se cruzan formando un angulo de 39°	I/NJ
E_{24}:	**-**	No justificó	I/NJ	**a**		I/NJ
E_{25}:	**a**	Si t y z son	I/NJ	**a**	Porque al ser ⊥ la t y x y la t ∥ s s ⊥ x	ECC

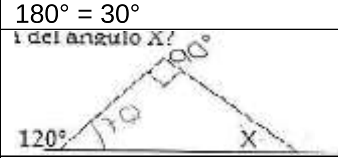
COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 8						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód.	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
		perpendiculares z y t son perpendiculares también				
E$_{26}$:	**a**	Porque en la pregunta se dice que las rectas t y s son paralelas y la recta x es perpendicular a la recta t por lo tanto también es perpendicular a la recta s.	F	**a**	Porque las rectas t, s son paralelas y cuando la recta x se cruza forma una línea perpendicular con la recta s.	EII
E$_{27}$:	**b**	Porque no se unen	EII	**b**	Porque tienen diferente medida	I/NJ
E$_{28}$:	**a**		I/NJ	**a**	Son las que se cortan y no tiene fin.	I/NJ
I/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; DF: Deductiva Fallida						

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 12						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			RESPUESTAS PRUEBA FINAL		
Cód.	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
E_1:	c	La secuencia va sumando 180°	I/NJ	c	Por que 540+180=720	I/NJ
E_2:	c	Cada vez va aumentando 180°	EIP	c	Porque van teniendo mas vértices entonces van sumando 180 y entonces el pentágono es de 540 mas 180 igual a 720	EIP
E_3:	c	De a 180 grados suma 360 más 180 540 más 180 son 720° grados.	I/NJ	c	Van subiendo de 180° en 180°	I/NJ
E_4:	-	No justifica	I/NJ	c	Porque al sumar los angulos da eso	I/NJ
E_5:	c	Si sumo 180 y 180 me da 360 y 360 es igual a 720	I/NJ	c	Si sumamos 180 + 180 es 360 y 360 + 180 es 540 y 540 + 180 me da 720 y así se saca el resultado	I/NJ
E_6:	c	Va avanzando de 180 + 540 es 720	I/NJ	c	540° le suma 180° da 720°	EIP
E_7:	c	Va aumentando de 180 en 180	I/NJ	c	Porque va aumentando de 180° en 180°	EIP
E_8:	b	No justifica	I/NJ	c	Porque la medida de exsagono es de 720	I/NJ
E_9:	b	Un “exagono” según la medida es de 360° por lo menos de esa cantidad	I/NJ	a	Porque es la medida correcta de un exsagono	I/NJ
E_{10}:	c	Cada uno es mayor por 180 entonces el hexágono mide 720	I/NJ	c	Si el pentágono la suma de los angulos interiores es de 540 entonces el hexágono se le suma 180° y da 720°	I/NJ
E_{11}:	c	Le sumamos 180 4 veces	I/NJ	c		I/NJ
E_{12}:	d	Un hexágono tiene más vértices que un cuadrilátero y un triángulo	I/NJ	c	ban de 180	I/NJ
E_{13}:	-	No justifica	I/NJ	c	No justifica	I/NJ
E_{14}:	c	Tiene 5 lados	I/NJ	c	No justifica	I/NJ
E_{15}:	c	No justifica	I/NJ	d	Porque los angulos internos es de 150	I/NJ
E_{16}:	c	La puse a la londra tolondra	I/NJ	c	Porque se van sumando de a 180°	EIP
E_{17}:	c	No justifica	I/NJ	d	Sus ángulos internos miden 150 cada uno	I/NJ
E_{18}:	d	En la que hice la suma de las cosas estas a mí de mi parte me gustó	I/NJ	c	Porque tiene cada lado interno de 150 grados	I/NJ
E_{19}:	c	Porque tien el peso 720	I/NJ	a	Porque esa la medida correcta de un hexagono	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 12						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód.	Rta	**Justificación**	Dem	Rta	**Justificación**	Dem
E_{20}:	**c**	Porque el hexágono tiene 720°	I/NJ	**c**	Ban de ciento ochenta a ciento ochenta	EIP
E_{21}:	**b**	Porque mide más	I/NJ	**d**	Los lados son mas anchos y el angulo es aun mallor	I/NJ
E_{22}:	**c**	No se como aserla	I/NJ	**c**	Al sumar todos sus angulos da 720	I/NJ
E_{24}:	**c**	No justifica	I/NJ	**c**	Al sumar 540 mas 180 es igual 720	I/NJ
E_{25}:	**c**	Porque dentro del exagono se muestran 4 tiangulos 180° x 4 720°	I/NJ	**c**	540° + 180° = 720°	EIP
E_{26}:	**c**	No justifica	I/NJ	**c**	Cada vez va aumentado de a 180 y 540 + 180 de 720	I/NJ
E_{27}:	**d**	No se decir la respuesta	I/NJ	**c**	Porque mide 720°	I/NJ
E_{28}:	**d**	No justifica	I/NJ	**A**	No justifica	I/NJ
I/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; DF: Deductiva Fallida						

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 16						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			RESPUESTAS PRUEBA FINAL		
Cód.	**Rta**	**Justificación**	**Dem**	**Rta**	**Justificación**	**Dem**
E_1:	**a**	El ángulo C mide 90° y sabiendo cuánto mide el ángulo *a* se le puede restar	I/NJ	**a**	Por que el angulo c se sabe que es de 90° y el d de 180°	I/NJ
E_2:	**a**	Porque al medir con el transportador es la misma medida	I/NJ	**a**	si sabemos que el angulo c es recto entonces es de 90 entonces necesitamos la medida del angulo a y cuando la sepamos sumamos 90 mas lo que mide el angulo a y lo que hace falta es lo del angulo b.	EGA
E_3:	**a**	Porque tengo que saber cuánto mide el *a* para saber el *b*	I/NJ	**a**	La medida del angulo a	I/NJ
E_4:	**-**	No justifica	I/NJ	**a**	porque al medir el angulo a da el resultado de b	I/NJ
E_5:	**a**	No justifica	I/NJ	**a**	Porque si sabemos la medida del angulo a y la del angulo b son 90° y si le quitamos la medida de la a pues nos da la de la d.	DF
E_6:	**c**	Porque al medir con el transportador debe mirar la letra *c*	I/NJ	**b**	Si el una línea esta recta de 90° uno sabe la medida	I/NJ
E_7:	**d**	Porque para saber el valor de un triángulo se necesita saber cuánto mide la vuelta equivale a 180°	I/NJ	**a**	 La medida de ángulo c es de 90° el angulo D mide 180° faltaría del angulo A la medida para saber la del b	I/NJ
E_8:	**c**	No justifica	I/NJ	**a**	Porque el angulo a mide 50° y el b tanbie	I/NJ
E_9:	**-**	"No sé"	I/NJ	**b**	El angulo c es el mas grande que el angulo ab	I/NJ
E_{10}:	**a**	No justifica	I/NJ	**a**	No justifica	I/NJ
E_{11}:	**d**	No justifica	I/NJ	**a**		I/NJ
E_{12}:	**b**	Con la línea c se guía para hacer la línea b	I/NJ	**a**	Si toma la del angulo a sale la del angulo b	I/NJ
E_{13}:	**a**	Al saber la medida del ángulo a me dice al mismo tiempo la medida del ángulo b	I/NJ	**a**	No justifica	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 16						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód.	**Rta**	**Justificación**	**Dem**	**Rta**	**Justificación**	**Dem**
E_{14}:	**c**	Porque un ángulo recto…..	I/NJ	**c**	Es el mas grande	I/NJ
E_{15}:	**d**	No justifica	I/NJ	**a**	Porque hasta saber cual es el angulo a podemos saber el angulo d	DF
E_{16}:	**d**	No justifica	I/NJ	**a**	No justifica	I/NJ
E_{17}:	**c**	No justifica	I/NJ	**a**	Hasta no saber la medida del ángulo A no podemos saber cual es la medida del ángulo b	DF
E_{18}:	**c**	Pues hay habían bastantes yo esa me quedo pero la respondí con mucha delicadeza y me puse a medir todos los ángulos y me dio eso.	I/NJ	**a**	Porque al no saber la medidad del angulo a no sabemos la c y b	DF
E_{19}:	**a**	Para que se emplea una nueva ruta	I/NJ	**b**	Porque si mido me va a dar iguales las medidas	I/NJ
E_{20}:	**d**	Porque el ángulo es medida de 180	I/NJ	**a**	La medida del angulo el angulo se saca de la línea que lo conduse	I/NJ
E_{21}:	**a**	No justifica	I/NJ	**a**	Mide 90 grados y la longitu	I/NJ
E_{22}:	**d**	No se como reprecentarla	I/NJ	**a**	Porque al saber la medida del angulo a se puede saber la medida del angulo b	DF
E_{24}:	**-**	No justifica	I/NJ	**-**	No justifica	I/NJ
E_{25}:	**a**	Si allamos el balor del angulo a y se lo restamos al angulo c, octenemos los resultados del angulo b.	EGA	**a**	El ∡c es de 90° el ∡ d 180° y si calculamos el valor de ∡ a sabremos el balor del ∡ b x que al sumar el ∡a con el ∡b dara la suma 90°	EGI
E_{26}:	**c**	No justifica	I/NJ	**_**	No justifica	I/NJ
E_{27}:	**b**	No se el porqué	I/NJ	**a**	Porque por la medida	I/NJ
E_{28}:	**d**	No justifica	I/NJ	**_**	No justifica	I/NJ
I/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; DF: Deductiva Fallida						

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 20						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			**RESPUESTAS PRUEBA FINAL**		
Cód.	**Rta**	**Justificación**	**Dem**	**Rta**	**Justificación**	**Dem**
E_1:	a	180° - 120° = 60° y esos dos ángulos eran iguales	I/NJ	b	Porque la suma de los tres ángulos interiores debe sumar 180°, un ángulo mide 90°, otro 60 y 90 + 60 = 150, 180 - 150 = 30	EGI
E_2:	c	No justifica	I/NJ	b	Porque hay un angulo de 90° y hay un ángulo exterior para que sumen 180° faltan 60 y 90 más 60 me da 150 y 30 = 180	I/NJ
E_3:	a	Porque el ángulo recto es de 90° grados y un poquito más abierto que la figura es de 60° y porque lo medí y me dio 30°	I/NJ	b	Porque el angulo x es de 30 porque 60° no puede porque suma 180° y el de arriba se pasa osea que mide 30°	I/NJ
E_4:	-	Porque está formado por un ángulo de 90°	I/NJ	b	Porque al medir 50 con los otros angulos 180 o 360	I/NJ
E_5:	c	No justifica	I/NJ	b	Porque 120 + 30 + 40 = 180	I/NJ
IE_6:	d	Porque 120 x 60 da 720	I/NJ	b	La mitad de 120 es 60° y el angulo de 90° + 60° = 150° - 180° = 30°	DF
E_7:	d	No justifica	I/NJ	a		I/NJ
E_8:	b	No justifica	I/NJ	d	Porque al medir co el transportador da 150°	I/NJ
E_9:	d	30° dio la medida	I/NJ	d	Porque si el otro angulo es 120° el otro es 150°	I/NJ
E_{10}:	b	No justifica	I/NJ	b	Porque el angulo A el de aguera mide 120 entonces el de adentro mide 60° y el B mide 90° entonces sumando 90° + 60° da 150° entos el C mide 30°	I/NJ
E_{11}:	-	No justifica	I/NJ	d	Al sumar da 360 grados	I/NJ
E_{12}:	c	Cuando se traza una línea de esa forma es un ángulo de 90°	I/NJ	c	Hay en esa esquina sale un angulo de 90°	I/NJ
E_{13}:	b	No sé, al azar	DF	_	No justificó	I/NJ
E_{14}:	c	No justifica	I/NJ	a	Tiene el angulo de 60.	I/NJ
E_{15}:	a	No justifica	I/NJ	d	Porque si sumamos el angulo de 120 con el de 90 y otro que aga falta para llegar a los 360 es el de 150	I/NJ
E_{16}:	d	A la loca	I/NJ	_	No justificó	I/NJ

COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS PRUEBAS PREGUNTA N° 20						
	RESPUESTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA			RESPUESTAS PRUEBA FINAL		
Cód.	**Rta**	**Justificación**	**Dem**	**Rta**	**Justificación**	**Dem**
E_{17}:	d	No justifica	I/NJ	d	Porque si sumamos el ángulo de 90° y el de 120° nos da 210 y más 150 es 360.	I/NJ
E_{18}:	b	Pues yo en la ultima me costo pero en esa y se lo que pude porque era la ……. más precisa y pues marqué la que amí más me gusto y la hize muy bien pero yo medí con el transportador.	DF	d	Porque el angulo de arriba cuando sumamos 90° y 120° nos da 210° y le sumamos 150° grados t nos da 360	I/NJ
E_{19}:	d	Porque su angulo es un poco mas ancho que el otro	I/NJ	a	Porque al mirar da la forda de una angulo de 60° grados y esa es la medida del angulo x	I/NJ
E_{20}:	b	Porque la medida es 30°	I/NJ	b	El angulo x de cada uno mide con todos mide 180°	I/NJ
E_{21}:	c	No justifica	I/NJ	c	Porque: la otra osea	I/NJ
E_{22}:	d	Porque los medí	I/NJ	b	Porque al medirse con el transportador da 30°	I/NJ
E_{24}:	a	Medí con el transportador	I/NJ	a	Es de 60° porque si un ángulo mide 120 y el otro es de 90°	I/NJ
E_{25}:	a	No justifica	I/NJ	b	120 es un angulo esterno y el angulo interno debe ser de 60° y 60° + 90° = 150 y 180 – 150 = 30 El ∡x es de 30°.	EGI
E_{26}:	d	No justifica	I/NJ	a	Al sumar 120 mas 60 me da como resultado 180° grados	I/NJ
E_{27}:	d	No se la respuesta	I/NJ	a	Porque lo sumo y mide 180°	I/NJ
E_{28}:	c	No justifica	I/NJ	a	No justifica	I/NJ
I/NJ: Incorrecta / No justifica; F: Empírica Fallida; EII: Empirismo ingenuo Inductivo; EIP: Empirismo Ingenuo Perceptivo; ECA: Experimento Crucial Analítico; ECC: Experimento Crucial Constructivo; EGA: Ejemplo Genérico Analítico; EGI: Ejemplo Genérico Intelectual; DF: Deductiva Fallida						

Anexo M. Entrevista de Estudiantes

Colegio Nuestra Señora de Fátima
Jordán – Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Educación – Maestría en Pedagogía

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

Apreciado estudiante:
De antemano agradezco su participación activa en el proyecto: *El razonamiento matemático en un ambiente de geometría dinámica*. Y como parte del mismo, les solicito diligenciar la siguiente entrevista de la manera más objetiva posible.

¿Cómo les han parecido las clases de matemáticas en los últimos meses, a propósito de la ejecución del proyecto?

Muy buenas, hemos aprendido mucho mas de lo que hubieramos aprendido en una clase normal.
Todos colaboramos de igual manera y sin enfrentarnos por ninguna idea.

¿Qué ha sido lo más difícil para ustedes en la aplicación del proyecto de la docente Yadira Ballesteros?

Pues aveces en los computadores habian cosas que se nos hacia dificil hacer, aveces no coincidiamos en las ideas.

¿Qué recomendaciones harían a la docente, con respecto al uso de tecnologías computacionales en las clases de matemáticas?

Que es muy buena su idea de trabajar matematicas con computadores, asi aprendemos que los computadores no es solamente una herramienta para jugar también ahí podemos aprender cosas buenas.

¡MUCHAS GRACIAS!

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA