

*Potencialidades de la teoría de Fourier fraccionaria
en el procesamiento de señales EEG*

Autor
LENIN CHINCHILLA ATENCIA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2015

*Potencialidades de la teoría de Fourier fraccionaria
en el procesamiento de señales EEG*

Autor

LENIN CHINCHILLA ATENCIA

Este proyecto es presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ingeniería Electrónica

Directores:

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS
Doctor En Ciencias Naturales (Física)

DANIEL ALFONSO SIERRA BUENO
PhD. en Ingeniería Biomédica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2015

*A Dios por su infinita misericordia, hacia mi y hacia quienes me rodean.
A mi mamá, papá y hermanos por infinitas razones, pero sobre todo por ayudarme a ser
quien soy.*

A mis tíos, mis abuelos, y toda la familia en general.

AGRADECIMIENTOS

A Dios primeramente por permitirme ser quien soy, y nuevamente por su infinita misericordia hacia mi y hacia quienes me rodean.

A mi familia por su ayuda y apoyo.

A mi esposa Jehymi Lorena Rizzo Arevalo y mi hija Valeria, por ser parte de mi motivación y por contribuir a que algunas de mis vivencias hayan quedado en mi memoria como momentos especiales.

A mis directores, los profesores Rafael Ángel Torres Amarís y Daniel Alfonso Sierra Bueno, por su apoyo, paciencia y orientación.

A mi profesor del colegio Humberto Lamus, cuyos consejos han sido de gran ayuda para llevar a cabo mis objetivos.

Índice general

INTRODUCCIÓN	16
1 MARCO TEÓRICO	20
1.1 Señal Analítica	20
1.2 Correlación	21
1.3 Proceso estacionario	21
1.4 Definición integral de la transformada de Fourier fraccionaria de una función . . .	21
1.5 Convolución fraccionaria	22
1.6 Distribución Wigner-Ville(DWV) y sus propiedades	22
1.6.1 Algunas propiedades de la DWV	23
1.7 Distribución α -Wigner-Ville (α -DWV)	25
1.8 Señales aleatorias α -estacionarias	26
1.9 Señales obtenidas a partir de un EEG (Electroencefalograma)	26
1.10 Epilepsia	27
1.10.1 Algunas herramientas utilizadas en el tratamiento de señales EEG	28
2 UN ENFOQUE DE FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO BASADO EN LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA Y SU RELACIÓN CON LA α-DWV	30
2.1 Propiedades de la α -DWV	30
2.1.1 α -DWV en términos del espectro de Fourier fraccionario	30
2.1.2 α -DWV es real	32
2.1.3 α -DWV y las propiedades marginales	33
2.1.4 La α -DWV en asociación con $\mathcal{T}_{\tau,\alpha}[f]$	34
2.1.5 Relación entre la convolución fraccionaria y la α -DWV	34
2.2 Filtrado Variante en el tiempo	36
2.2.1 Simulaciones	37

ÍNDICE GENERAL

3	CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS Y FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO EN SEÑALES EEG ADQUIRIDAS DE PACIENTES EPILÉPTICOS	50
3.1	Descripción de las señales EEG utilizadas	50
3.2	Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo	55
3.3	Características fraccionarias	61
4	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	63
4.1	Conclusiones Generales	63
4.2	Trabajo Futuro	64
	BIBLIOGRAFÍA	65
	ANEXOS	72

Índice de figuras

1.1	Efecto de la traslación fraccionaria sobre la DWV de una función. ${}^f\Omega$ es el soporte de W_f y ${}^f\Omega_{a;\alpha}$ es el soporte de $W_{\mathcal{T}_{a;\alpha}[f]}$, donde $\mathcal{T}_{a;\alpha}$ es el operador traslación fraccionaria definido previamente.	24
1.2	DWV de la convolución y el producto entre dos funciones. Supongase que $g = f + n$ y que los terminos cruzados son obviados para efectos de representación. ${}^f\Omega$ es el soporte de W_f , ${}^h\Omega$ es el soporte de W_h y ${}^n\Omega$ es el soporte de W_n . a) Caso en que la señal f puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución entre h y g , a lo largo de v . b) Caso en que la señal f puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución entre h y g , a lo largo de x . c) Caso en que la señal f no puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución a lo largo de v o de x	25
1.3	Relación entre la DWV y la α -DWV de una función. ${}^f\Omega$ es el soporte de W_f y ${}^f\Omega_\alpha$ es el soporte de W_f^α	26
2.1	DWV and α -DWV de la convolución fraccionaria entre dos señales h y g . ${}^h\Omega$ y ${}^g\Omega$ son los soportes de W_h y W_g respectivamente; ${}^h\Omega_\alpha$ y ${}^g\Omega_\alpha$ son los soportes de W_h^α y W_g^α respectivamente. a) DWV de las señales. b) Representación de la α -DWV de la convolución fraccionaria. c) Representación de la DWV de la convolución fraccionaria.	36
2.2	Ejemplos de trayectorias de filtrado representadas en el espacio tiempo-frecuencia, para el caso en que α varia respecto del tiempo. a) Ejemplo 1. b) Ejemplo 2. c) Ejemplo 3.	37
2.3	DWV de la señal libre de ruido $s(x)$	39
2.4	DWV de la señal con ruido $f(x)$	39
2.5	Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio del tiempo.	40
2.6	Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio de la frecuencia.	40
2.7	α -DWV de la señal con ruido $f(x)$, con $\alpha = -1,5705463$	41
2.8	α -DWV del filtro, $h(x)$, con $\alpha = -1,5705463$	41

ÍNDICE DE FIGURAS

2.9	DWV de la señal filtrada usando convolución fraccionaria.	41
2.10	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio del tiempo. . .	42
2.11	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.	42
2.12	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.	43
2.13	DWV de la señal libre de ruido $s(x)$	44
2.14	DWV de la señal con ruido $f(x)$	45
2.15	Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio del tiempo. .	45
2.16	Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio de la frecuencia.	46
2.17	DWV del filtro, $h(x)$	47
2.18	α utilizado en la convolución fraccionaria entre h y f	47
2.19	DWV de la señal filtrada usando la convolución fraccionaria.	48
2.20	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio del tiempo. . .	48
2.21	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.	49
2.22	Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.	49
3.1	Esquema de localización de electrodos superficiales de acuerdo al sistema internacional 10-20. Las señales de los conjuntos A y B fueron tomadas de todos los electrodos representados. Adaptado de [61].	51
3.2	Esquema de electrodos implantados en forma intracraneal para evaluación prequirúrgica de pacientes epilépticos. Los electrodos de profundidad fueron implantados simétricamente dentro de las formaciones hipocampales (izquierda). Las señales de los conjuntos C y D fueron tomadas de todos los contactos del respectivo electrodo. Los electrodos de gaza fueron implantados en las regiones basal y lateral (medio y derecha) del neocórtex. Las señales del conjunto E fueron tomadas de todos los electrodos representados. Tomado de [3].	52
3.3	Señales EEG en el dominio del tiempo de un individuo sano (A), un paciente durante un intervalo libre de convulsión (D) y un paciente durante actividad convulsiva (E).	53
3.4	DWV de la señal EEG de un individuo sano.	53
3.5	DWV de la señal EEG de un paciente adquirida en un intervalo libre de convulsión.	54
3.6	DWV de la señal EEG de un paciente adquirida durante una convulsión. . . .	54
3.7	DWV de la señal EEG de un paciente adquirida durante una convulsión. . . .	55
3.8	Señales EEG en el dominio del tiempo, las cuales exhiben α -estacionariedad.	56

ÍNDICE DE FIGURAS

3.9	DWV de la señal aleatoria S	57
3.10	Densidad espectral de potencia de la señal aleatoria S	57
3.11	α -DWV de la señal EEG adquirida durante una convulsión.	58
3.12	α -DWV del filtro.	59
3.13	α -DWV de la señal EEG adquirida durante una convulsión, luego de ser filtrada.	59
3.14	DWV de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.	60
3.15	Densidad espectral de potencia de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.	60
3.16	α -DWV de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.	61

Índice de anexos

ANEXO A: Demostración de Ecuación (2.21)	73
ANEXO B: Algoritmos	75
B1: Algoritmo para obtener la α -DWV($aWV2$)	75
B2: Algoritmo para llevar a cabo la convolución fraccionaria (<i>convatNC</i>)	79

Símbolos

x :	Variable asociada al dominio del tiempo
v :	Variable asociada al dominio de la frecuencia
x' :	Variable asociada al dominio fraccionario
V.P.:	Valor principal de Cauchy
i :	Factor imaginario
DWV:	Distribución Wigner-Ville
α -DWV:	Distribución α -Wigner-Ville
\mathfrak{F} :	Transformación de Fourier
\mathfrak{F}_α :	Transformación de Fourier fraccionaria de orden a , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$
F_α :	Transformada de Fourier fraccionaria de orden a , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$
$[f * g](x)$:	Convolución entre las señales f y g
$[f *_\alpha g](x)$:	Convolución fraccionaria de orden α entre las señales f y g , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$,
$\overline{f(x)}$:	Complejo conjugado de la señal f
$W_{f.g}(x, u)$:	Distribución de Wigner-Ville del producto de dos señales en el tiempo f y g
$W_{f*g}(x, u)$:	Distribución de Wigner-Ville de la convolución de dos señales en el tiempo f y g
$W_f^u * W_g$:	Convolución entre las distribuciones de Wigner-Ville de dos señales, f y g , a través de un eje paralelo al eje u

RESUMEN

TÍTULO: Potencialidades de la teoría de Fourier fraccionaria en el análisis de señales EEG.*

AUTOR: LENIN CHINCHILLA ATENCIA**

PALABRAS CLAVES:

Convolución fraccionaria, Distribución α -Wigner–Ville, α -estacionariedad, filtrado variante en el tiempo, señales EEG, análisis de Fourier fraccionario, pacientes epilépticos.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se propone un filtrado variante en el tiempo, con base en la convolución fraccionaria y la Distribución α -Wigner–Ville. Además algunas propiedades de la Distribución α -Wigner–Ville son estudiadas, con el fin de establecer un marco conceptual para el análisis de Fourier fraccionario. Estas propiedades muestran que el análisis de Fourier convencional es un caso particular del análisis que se propone en este trabajo, un aspecto importante, debido a que varias nociones del análisis de Fourier pueden ser ahora extendidas para el análisis de señales no estacionarias. Adicionalmente algunas herramientas basadas en el análisis de Fourier fraccionario, tales como la noción de α -estacionariedad y el filtrado variante en el tiempo propuesto, son aplicadas sobre un conjunto de señales EEG de pacientes epilépticos. Los resultados obtenidos muestran que, a una dinámica particular presente en este tipo de señales EEG, se le pueden asociar características fraccionarias. Tales características permiten diferenciar esta dinámica particular de las que se presentan en otras señales EEG, las cuales tienen como característica en común que provienen de pacientes epilépticos. Finalmente este trabajo concluye mostrando que las herramientas basadas en el análisis de Fourier fraccionario podrían conllevar a un filtrado óptimo, extendiendo así su rango de aplicación y, que el análisis de Fourier fraccionario podría ser una alternativa de solución para abarcar problemáticas asociadas a señales no estacionarias.

*Trabajo de Investigación

**Escuela Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones, Facultad de Ingenierías Físico–Mecánicas, Universidad Industrial de Santander. Directores Ph.D. Rafael Ángel Torres Amarís, Ph.D. Daniel Alfonso Sierra Bueno

ABSTRACT

TITLE: Potentialities of the fractional Fourier theory in the analysis of EEG signals. *

AUTHOR: LENIN CHINCHILLA ATENCIA **

KEYWORDS:

Fractional convolution, α -Wigner-Ville distribution, α -stationarity, time variant filtering, fractional Fourier analysis, epileptic patients.

DESCRIPTION:

In this work, we propose a time variant filtering based on the fractional convolution and the α -Wigner-Ville distribution. Besides, we study some properties of the α -Wigner-Ville distribution, in order to establish a conceptual framework to the fractional Fourier analysis. Those properties reveal that the conventional Fourier analysis is a particular case of the analysis that we pose in this work, an important fact, because several notions of the Fourier analysis can be extended to the analysis of non-stationary signals. Furthermore, we applied on a set of EEG signals, from epileptic patients, some tools based on fractional Fourier analysis, such as the α -stationarity notion and the proposed time-variant filtering. Results show that certain fractional features can be associated to a particular dynamics that is present in this kind of signals. Those features allow differentiating that particular dynamics from others that are present in EEG signals, which have as common feature that are from epileptic patients. Lastly, this work shows that the tools based on fractional Fourier analysis could be aimed to develop an optimal filtering, thus expanding the range of application. Then, the fractional Fourier analysis could be an alternative to solve problems related to non-stationary signals.

*Research Work

**Physical–Mechanical Engineering department, Electrical, Electronics and Telecommunications College, Universidad Industrial de Santander. Advisors Ph.D. Rafael Ángel Torres Amarís, Ph.D. Daniel Alfonso Sierra Bueno

INTRODUCCIÓN

El estudio de las señales EEG ha resultado ser de gran importancia para el entendimiento de los sistemas biológicos a los que se le asocian. Este entendimiento trae consigo un sinnúmero de beneficios en campos como la medicina [1,5–8,36], la tecnología [17,24] entre otras. En el aspecto médico, resalta el diagnóstico de patologías que se hace a partir del análisis de estas señales, las cuales en muchos casos son adquiridas de forma no invasiva, evitando así impactos negativos sobre el individuo. Una de las patologías que han sido estudiadas ampliamente es la epilepsia [1,4,5,9,30,36,47,56], dado que es uno de los desordenes neurológicos más comunes en el mundo. Además, algunas adquisiciones de señales EEG en pacientes epilépticos se hacen de forma intracraneal, con el fin de detectar la región del cerebro donde se origina el evento epiléptico. Este tipo de señales exhiben una dinámica y características cuyo entendimiento son objeto de estudio en la comunidad científica, ya que aportarían información valiosa no sólo para el entendimiento de la epilepsia sino del cerebro en general.

El procedimiento que habitualmente es utilizado para detectar patologías a partir de las señales EEG consiste *grosso modo* en tres etapas; primero las señales son adquiridas, luego se lleva a cabo un procedimiento de filtrado para resaltar la señal de interés. Por último, de esta señal de interés se extraen características, con las cuales un experto médico o mediante el uso de un algoritmo de clasificación se podrá inferir, en caso de existir, la patología asociada.

Cada una de estas etapas son relevantes y presentan desafíos de los cuales surgen temas de gran interés. En lo que respecta al filtrado y análisis, el desafío se plantea a partir de que estas señales se enmarcan dentro de lo que se define como señales no estacionarias [7,9,32]. A pesar que el tratamiento de señales no estacionarias es un problema no resuelto, se han propuesto diversas herramientas para el procesamiento de señales EEG a partir de teorías probadas en otras áreas del conocimiento, entre las que se destacan las basadas en; la teoría de filtrado de kalman [32,45,56,60], teoría de wavelets [34,36,43] y análisis tiempo-frecuencia [51,58,62]. Aunque estas propuestas han representado grandes aportes, aún quedan y aparecen nuevos desafíos, por lo que la búsqueda de alternativas de solución o

de herramientas que complementen a las ya existentes, está vigente.

En años recientes, el análisis de Fourier fraccionario basado en la transformación de Fourier fraccionaria introducida por Namias [33], ha sido propuesto en diferentes áreas, tales como mecánica cuántica [33], óptica [28, 39, 40] y procesamiento de señales no estacionarias [2, 14, 15, 18, 25, 27, 31, 38, 44, 46, 49, 63, 65, 66] entre otros, reflejando así el gran interés que existe en extender esta teoría a diversas aplicaciones y problemas de actualidad. En procesamiento de señales, el análisis de Fourier fraccionario tiene una directa interpretación sobre la representación tiempo-frecuencia de las señales [2, 15, 46], por lo que destaca el hecho que mantiene una descripción armónica del problema, algo que facilita su interpretación.

El análisis de Fourier convencional, o análisis de Fourier simplemente, ha probado ser una herramienta pertinente cuando se abordan problemas asociados a señales estacionarias, cuyo fundamento se basa en el teorema de Wiener–Khinchin [54]. Hay toda una teoría de filtrado y demás herramientas definidas con base en el análisis de Fourier [35] que permiten obtener una descripción armónica del problema, lo cual es de suma importancia dado que permite una interpretación física del mismo. Para el caso de señales no estacionarias este análisis de Fourier deja de ser una herramienta útil, ya que al ser un tratamiento localizado en el dominio de la frecuencia no permite asociar los eventos en el dominio del tiempo con el comportamiento en el dominio de la frecuencia [13]. Debido a esto, el análisis de Fourier no ofrece resultados satisfactorios para el caso de señales no estacionarias. Pero la mayoría de aplicaciones, donde se trabaja con señales reales, requieren de un tratamiento desde un punto de vista no estacionario. A partir de esta necesidad se han orientado esfuerzos para la descripción de una teoría que permita el tratamiento de las señales en dominios fraccionarios [25, 26, 37, 64] intentando así plantear una alternativa de solución con la importante característica de mantener una descripción armónica del problema.

Considerando que muchos de los tratamientos que son llevados a cabo en las señales pueden ser vistos como un filtrado, son varias las propuestas en esta dirección tales como filtrados en dominios fraccionarios [15, 38, 66], filtrado óptimo en un dominio fraccionario [14, 25, 44, 63]. Dado que el estudio del análisis de Fourier fraccionario aplicado al procesamiento de señales es reciente, no se encuentran muchos desarrollos aplicados a señales reales, a excepción, por ejemplo, de algunos aportes en el tratamiento de señales sísmicas [31, 65] y señales biológicas [18, 19, 49]. Esto refleja que los desarrollos teóricos empiezan a ser de utilidad sobre señales reales, dando resultados que permiten contemplarlos como alternativas de solución.

La teoría de filtrado que se desarrolla con base en el análisis de Fourier convencional se plantea a partir de dos operaciones bien definidas que son el producto y la convolución, las

cuales guardan una correspondencia entre un dominio y otro. Siguiendo esta idea, resulta de interés definir una técnica de filtrado con base en este par de operaciones, descritas en un dominio fraccionario, dada la fácil interpretación de estas operaciones y propiedades.

De las propuestas presentadas acerca de filtrados en dominios fraccionarios, destacan los trabajos presentados en [38] y [15] que según lo descrito anteriormente han sido de gran importancia en nuevos desarrollos. Esta técnica de filtrado se desarrolla con base en una operación de producto en un dominio fraccionario pero no es claro el desarrollo de este análisis a partir de una operación de convolución. Es decir no hay una asociación clara de este desarrollo a una operación de convolución bien definida y fácilmente aplicable.

Intentando extender las ideas del análisis convencional de Fourier al dominio fraccionario, en este trabajo se propone un enfoque de filtrado en dominios fraccionarios, que está bien definido a partir de una operación de convolución en un dominio y de producto en un dominio fraccionario, donde el análisis de Fourier estándar resulta ser un caso particular. El desarrollo de esta propuesta se hace a partir de la operación convolución fraccionaria definida en [52] y la distribución α -Wigner-Ville propuesta en [54].

También se muestra que el concepto de α -estacionariedad propuesto en [54] y el filtrado propuesto con base en la convolución fraccionaria, al ser aplicado en señales EEG adquiridas de pacientes epilépticos, permite asociar algunas características diferenciadoras, que posteriormente podrían ser utilizadas con fines médicos. Ya se han planteado trabajos con este propósito [18, 19, 49], los cuales difieren respecto de los que aquí se presentan, en los métodos utilizados. Esto no quiere decir que lo que propone en este trabajo no sea compatible con lo presentado en [18, 19, 49], más bien corresponden a propuestas que ponen en evidencia la pertinencia del análisis de Fourier fraccionario en este tipo de señales, además que pueden complementarse uno a otro.

Este trabajo está organizado como se describe a continuación. En el Capítulo 1 se presentan los conceptos teóricos, es decir, las herramientas ya definidas, que son utilizadas como punto de partida para realizar y argumentar los desarrollos que se presentan en este trabajo. Además de presenta una breve revisión acerca del uso del análisis de Fourier fraccionario en problemas asociados a señales EEG.

En el Capítulo 2, se presentan desarrollos originales de este trabajo como; la demostración de algunas propiedades de la α -DWV, entre las que se destaca su relación con la convolución fraccionaria propuesta en [52]. A partir de esta relación se propone un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución fraccionaria propuesta en [52]. Luego este filtrado es implementado sobre algunas señales ejemplo, mostrando su pertinencia en señales cuyo soporte está a lo largo de caminos curvos en la representación tiempo-frecuencia de las señales. Cabe

aclarar que el problema asociado a escoger y diseñar el filtro no fue estudiado, lo cual no es el objetivo de este trabajo, ya que es un problema independiente que se tratará en trabajos posteriores.

En el Capítulo 3, algunas herramientas que hacen parte del análisis de Fourier fraccionario tales como la noción de α -estacionariedad y el filtrado variante en el tiempo que se propone en el Capítulo 2, son utilizadas para analizar un conjunto particular de señales EEG de pacientes epilépticos. Esto se hace con el fin de proponer el análisis de Fourier fraccionario como alternativa de solución en problemáticas actuales que involucren señales no estacionarias.

Por último, se presentan las conclusiones y se proponen algunos temas para abordar en trabajos futuros.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

A continuación se dará soporte a la idea de por qué el análisis de Fourier fraccionario se plantea como alternativa de solución a problemas relacionados con señales no estacionarias.

Además se realizará una descripción de diversas metodologías existentes para el procesamiento de señales EEG.

1.1. Señal Analítica

La señal analítica está definida de la siguiente manera [12]: Sea $H(\nu)$ la distribución de Heaviside, $f(x)$ una señal, tal que $F(\nu)$ es su transformada de Fourier, y \mathfrak{F}^{-1} es la transformación inversa de Fourier, entonces la señal analítica $f_A(x)$ asociada a la señal $f(x)$ es,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= 2\mathfrak{F}^{-1}[H(\nu)F(\nu)](x), \\ &= f(x) + iV.P. \left[f(x) * \frac{1}{\pi x} \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $V.P.[\dots]$ corresponde al valor principal de Cauchy [20], y está dado por

$$V.P. \left[f(x) * \frac{1}{\pi x} \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{f(x-\tau)}{\tau} d\tau + \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(x-\tau)}{\tau} d\tau \right]. \quad (1.2)$$

Como se nota de (1.1), la señal analítica es en general compleja, y una de sus propiedades importantes es que su transformada de Fourier contiene la información sólo de las frecuencias positivas de la transformada de Fourier de la señal original $f(x)$. Dado que la transformada

1.2 Correlación

de Fourier de una señal real es hermítico, no hay pérdida de generalidad si se trabaja sólo con el espectro asociado a las frecuencias positivas.

1.2. Correlación

Sea $S(x) = \{^w s(x)\}$ una señal aleatoria, donde $^w s(x)$ son el conjunto de posibles realizaciones. Consecuentemente, $S(x_1)$ es una variable aleatoria con valor esperado $E\{^w s(x_1)\}$, donde E es el operador valor esperado. La correlación entre dos variables $S(x_1)$ y $S(x_2)$ puede ser escrita como

$$\Gamma_S(x_1, x_2) = E\{^w s(x_1) \overline{^w s(x_2)}\}, \quad (1.3)$$

la cual es una función de x_1 y x_2 , y $\overline{^w s(x)}$ es el complejo conjugado de $^w s(x)$.

1.3. Proceso estacionario

Un proceso es estrictamente estacionario si su estadística no cambia por desplazamiento del origen del tiempo y es estacionario en el sentido amplio si la media es constante y si la correlación cumple que:

$$\Gamma_S(x_1, x_2) = \Gamma_S(x_1 - x_2). \quad (1.4)$$

En aplicaciones prácticas no interesa encontrar procesos estrictamente estacionarios, por lo que el concepto de estacionariedad aplicado a problemas reales suele restringirse a una estacionariedad en sentido amplio.

1.4. Definición integral de la transformada de Fourier fraccionaria de una función

A continuación se relaciona la definición de la transformada de Fourier fraccionaria de una función, la cual representa el soporte para las herramientas que constituyen el análisis de Fourier fraccionario.

Para una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier fraccionaria se define como [33],

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x') = C_\alpha e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-2i\pi x x' / \sin \alpha} dx, \quad (1.5)$$

1.5 Convolución fraccionaria

donde $C_\alpha = \frac{e^{-i(\mathbb{S}(\sin \alpha)\pi/4 - \alpha/2)}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$. La función $\mathbb{S}(\sin \alpha)$, es el signo de $\sin(\alpha)$. Nótese que de (1.5), con $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se obtiene la transformada de Fourier convencional.

1.5. Convolución fraccionaria

En esta sección se define una importante herramienta para el análisis de señales, la convolución fraccionaria. Esta operación representa el eje central del filtrado que se propone en este trabajo.

El operador traslación fraccionaria [52] se define como

$$\mathcal{T}_{a;\alpha}[f](x) = f(x-a)e^{-2i\pi a(x-a/2)\cot \alpha}, \quad (1.6)$$

el cual corresponde a un desplazamiento tiempo-frecuencia en la dirección dada por el ángulo α , donde $\mathcal{T}_{a;\pi/2} = \mathcal{T}_a$, es el operador traslación convencional, tal que $\mathcal{T}_a[f](x) = f(x-a)$.

Con base en este, la convolución fraccionaria adaptada de [52] es

$$\begin{aligned} [f \underset{\alpha}{*} g](x) &= C_\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathcal{T}_{u;\alpha}[g](x)e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du, \\ &= C_\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)e^{i2\pi u^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi xu \cot \alpha} du, \end{aligned} \quad (1.7)$$

y en el dominio fraccionario

$$\mathcal{F}_\alpha[f \underset{\alpha}{*} g](x') = \mathcal{F}_\alpha[f](x')\mathcal{F}_\alpha[g](x')e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}. \quad (1.8)$$

(1.7) y (1.8) son el soporte teórico para desarrollar un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución fraccionaria.

1.6. Distribución Wigner-Ville(DWV) y sus propiedades

Dado que la DWV se define a partir de la señal analítica asociada a una señal real, se asume que los cálculos que involucran la DWV se realizan con la respectiva señal analítica.

Para una señal aleatoria armonizable $S(x)$, la DWV se define como [54]:

$$W_S(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_S\left(x + \frac{u}{2}, x - \frac{u}{2}\right) e^{-2i\pi uv} du. \quad (1.9)$$

1.6 Distribución Wigner-Ville(DWV) y sus propiedades

Para una realización de S , w_s , la DWV puede ser escrita como

$${}^wW_s(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} w_s\left(x + \frac{u}{2}\right) \overline{w_s\left(x - \frac{u}{2}\right)} e^{-2i\pi u \nu} du, \quad (1.10)$$

o, en términos de su transformada de Fourier, $\mathcal{F}[w_s]$, como

$${}^wW_s(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[w_s]\left(\nu + \frac{u}{2}\right) \overline{\mathcal{F}[w_s]\left(\nu - \frac{u}{2}\right)} e^{2i\pi u x} du. \quad (1.11)$$

De (1.10) se puede mostrar que $W_S(x, \nu) = E\{{}^wW_s(x, \nu)\}$.

1.6.1. Algunas propiedades de la DWV

Las siguientes propiedades [21] se asocian a señales deterministas, tal que para las señales g y h , para las cuales G and H son sus transformadas de Fourier, se encuentra

$$W_g(x, \nu) = \overline{W_g(x, \nu)}, \quad (1.12)$$

es real. La distribución marginal en frecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_g(x, \nu) dx = |G(\nu)|^2, \quad (1.13)$$

es la densidad espectral de energía, y la distribución marginal en tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_g(x, \nu) d\nu = |g(x)|^2, \quad (1.14)$$

es la densidad de energía.

La DWV asociada a $\mathcal{T}_{\tau, \alpha}[f]$ es

$$W_{\mathcal{T}_{\tau, \alpha}[f]}(x, \nu) = W_f(x - \tau, \nu + \tau \cot \alpha), \quad (1.15)$$

corresponde a un desplazamiento en el espacio tiempo-frecuencia (Ver Figura 1.1. En la ilustración se asume una función cuya DWV tiene soporte finito en tiempo y frecuencia.)

1.6 Distribución Wigner-Ville(DWV) y sus propiedades

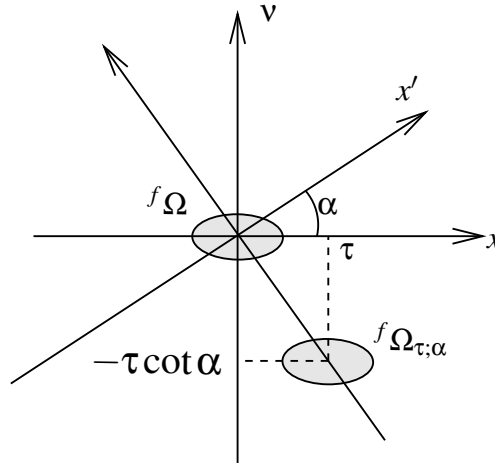


Figura 1.1: Efecto de la traslación fraccionaria sobre la DWV de una función. ${}^f\Omega$ es el soporte de W_f y ${}^f\Omega_{\tau;\alpha}$ es el soporte de $W_{\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f]}$, donde $\mathcal{T}_{\tau;\alpha}$ es el operador traslación fraccionaria definido previamente.

La DWV de un producto de dos funciones

$$W_{h.g}(x, v) = W_h \overset{v}{*} W_g \quad (1.16)$$

corresponde a la convolución de sus respectivas DWVs a lo largo del eje de la frecuencia(Figura 1.2a). También, la DWV de la convolución de dos funciones

$$W_{h*g}(x, v) = W_h \overset{x}{*} W_g \quad (1.17)$$

corresponde a la convolución de sus respectivas DWVs en el eje del tiempo(Figura 1.2b).

Aunque la descripción matemática se hace en términos de las variables x y v , en señales temporales estas corresponden al tiempo y la frecuencia respectivamente.

Dado que el análisis convencional consiste en productos y convoluciones en el tiempo, estas propiedades muestran por qué el análisis que se basa en la teoría de Fourier no permite tratar señales no estacionarias(Figura 1.2c), ya que en términos de la DWV, este es interpretado como convoluciones a través de ejes verticales u horizontales, válido sólo cuando la señal de interés puede ser recuperada con operaciones a través de ejes paralelos al eje del tiempo o al eje de la frecuencia.

Esta herramienta es importante en este trabajo ya que es una representación tiempo-frecuencia que, teóricamente, ofrece una resolución perfecta, aparte que cumple con las distribuciones marginales, mostradas en las ecuaciones (1.13) y (1.14).

1.7 Distribución α -Wigner-Ville (α -DWV)

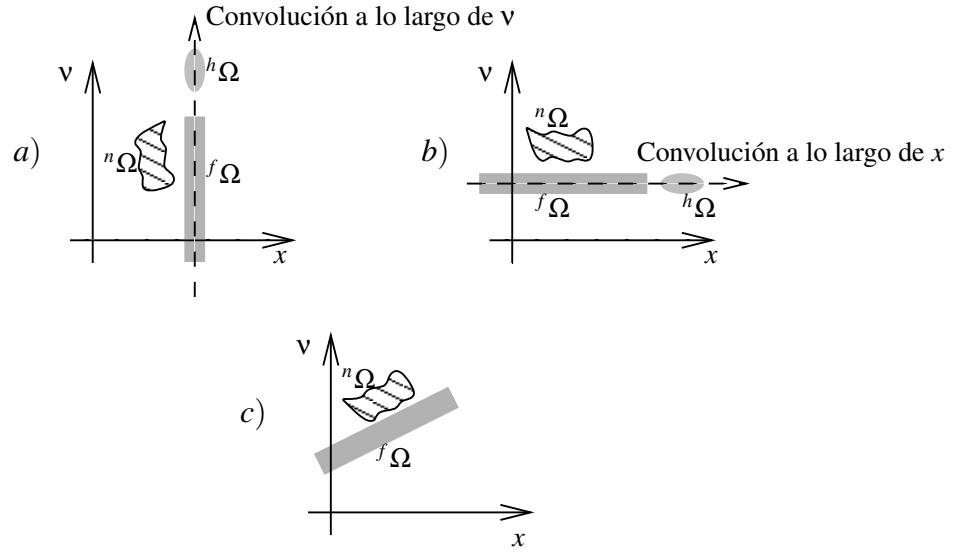


Figura 1.2: DWV de la convolución y el producto entre dos funciones. Supongase que $g = f + n$ y que los terminos cruzados son obviados para efectos de representación. $f\Omega$ es el soporte de W_f , $h\Omega$ es el soporte de W_h y $n\Omega$ es el soporte de W_n . a) Caso en que la señal f puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución entre h y g , a lo largo de v . b) Caso en que la señal f puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución entre h y g , a lo largo de x . c) Caso en que la señal f no puede ser separada de n de forma eficaz, mediante una convolución a lo largo de v o de x .

1.7. Distribución α -Wigner-Ville (α -DWV)

La correlación fraccionaria, Γ_S^α , y la α -DWV, W_S^α , son definidas de acuerdo a [54] como

$$\Gamma_S^\alpha(x_1, x_2) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E \left\{ {}^w f(x_1) \overline{{}^w f(x_2)} e^{2i\pi(x_1 - x_2)x_2 \cot \alpha} \right\}, \quad (1.18)$$

$$W_S^\alpha(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_S^\alpha \left(x + \frac{u}{2}, x - \frac{u}{2} \right) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} e^{-\frac{2i\pi u x'}{\sin \alpha}} du, \quad (1.19)$$

respectivamente, y su relación con (1.9) permite escribirla

$$W_S^\alpha(x, x') = |C_\alpha|^2 C_\alpha W_S \left(x, \frac{x' - x \cos \alpha}{\sin \alpha} \right). \quad (1.20)$$

1.8 Señales aleatorias α -estacionarias

Para $\alpha = \pi/2$, (1.18) y (1.19) son reducidas a (1.3) y (1.9) respectivamente, siendo estas un caso particular. Figura 1.3 muestra que la α -DWV de una función f corresponde a una representación en una base no ortogonal.

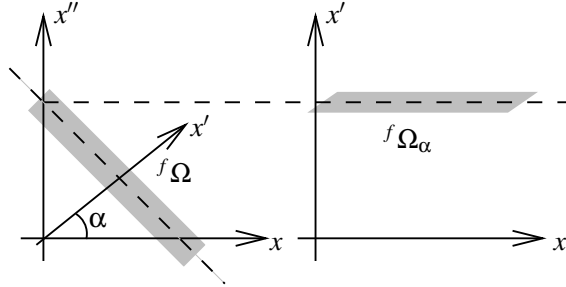


Figura 1.3: Relación entre la DWV y la α -DWV de una función. $f\Omega$ es el soporte de W_f y $f\Omega_\alpha$ es el soporte de W_f^α .

1.8. Señales aleatorias α -estacionarias

Se define que una señal aleatoria es $\alpha(x)$ -estacionaria en sentido amplio, si su DWV es invariante a lo largo de un camino dependiente de x . En el caso particular, en que la α -DWV de una señal aleatoria es independiente de x , o lo que es equivalente, que su DWV esté a lo largo de un eje oblicuo, se dice que es α -estacionaria en sentido amplio [54].

1.9. Señales obtenidas a partir de un EEG (Electroencefalograma)

Fisiológicamente suceden cambios electroquímicos dentro y entre células musculares y nerviosas. Estas células al ser estimuladas provocan un potencial eléctrico que se propaga a través del axón a otras células generando así una reacción en cadena que activa un gran número de células. En conjunto estas células activadas producen un campo eléctrico que se propaga a través del tejido biológico. Estos cambios en el potencial extracelular pueden ser medidos utilizando electrodos superficiales. El registro de estos potenciales según la fuente fisiológica se obtienen mediante EEG(Electroencefalograma), ECG (Electrocardiograma), EMG (Electromiograma) o EGG (Electrogastrograma). Las señales obtenidas a partir de un EEG junto con las señales obtenidas a partir de un ECG, EMG, EGG hacen parte del conjunto

1.10 Epilepsia

de señales bioeléctricas [23]. Por brevedad, a las señales obtenidas por medio de un EEG se les relacionará como señales EEG.

Las señales obtenidas mediante un ECG, EMG, EGG y EEG son utilizadas tanto con fines médicos [48], [34], [41], [50], [49] como meramente científicos [17], [42]. En este trabajo son de especial interés las señales EEG, a partir de las cuales se pueden diagnosticar diversas patologías, tal como la epilepsia. El aporte que se quiere generar consiste, en darle utilidad a una herramienta teórica, buscándole aplicabilidad en señales EEG de pacientes epilépticos. A continuación se dará una descripción de la epilepsia y de diversas herramientas de tratamientos de señales utilizadas sobre señales EEG para el análisis del fenómeno de la epilepsia.

1.10. Epilepsia

Según datos de la OMS (Organización Mundial de la Salud), en el mundo hay aproximadamente 50 millones de personas con epilepsia, donde cerca del 80% de los pacientes proceden de regiones en desarrollo. Este hecho ya es suficiente para justificar cualquier aporte que se quiera generar en esta dirección.

Dado que no se tiene una comprensión total de los fenómenos que se observan, científicamente las leyes que los describen cambian continuamente, por eso la definición que se da de éstos siempre estará incompleta e irá completándose a medida que los hechos revelen nuevas características. Una definición conceptual de epilepsia según [16] es:

La epilepsia es un trastorno cerebral que se caracteriza por una predisposición duradera para generar ataques de epilepsia, y por las consecuencias neurobiológicas, cognitivas, psicológicas y sociales de esta condición. La definición de la epilepsia requiere la ocurrencia de al menos un ataque epiléptico. Un ataque epiléptico es una ocurrencia transitoria de signos y/o síntomas debido a la actividad neuronal anormal excesiva o sincrónica en el cerebro.

El tratamiento clínico de este fenómeno está asociado a la definición de una zona epileptogénica [29] que puede ser considerada como la fuente del desorden neuronal que provocan los ataques epilépticos. Esta zona según estudios clínicos varía en el tiempo haciendo más complicada su identificación y posterior caracterización. Esta y otras dinámicas dan lugar a diferentes tipos de epilepsia [59].

1.10 Epilepsia

1.10.1. Algunas herramientas utilizadas en el tratamiento de señales EEG

Varios trabajos relacionados con el campo de tratamiento de señales intentan generar aportes que mejoren el diagnóstico de este fenómeno a partir de las señales EEG. A continuación se relacionarán algunos resultados que tienen que ver con lo que se pretende en este trabajo.

En [57], se lleva a cabo algo muy similar a lo que se pretende en este trabajo, se podría decir que este trabajo es el punto de referencia para lo que se pretende con esta investigación. En este trabajo muestran lo pertinente de utilizar un análisis tiempo–frecuencia para clasificar señales EEG asociadas a ataques epilépticos, comparando muchos métodos tiempo–frecuencia. La metodología que presentan se resume en tres pasos; primero se obtiene la densidad espectral de potencia de la señal EEG, luego extraen características de la señal segmentada y por último utilizando redes neuronales las clasifican entre las que están asociadas a pacientes epilépticos y las que no. Este trabajo difiere del que se plantea en esta propuesta en que utilizan varias representaciones tiempo–frecuencia incluida la DVW. En este trabajo sólo se pretende trabajar con la DVW y obtener características asociadas al análisis de Fourier fraccionario. Además en esta propuesta no se pretende obtener una clasificación entre individuos que padecen epilepsia y los que no, sino obtener características diferenciadoras entre pacientes epilépticos.

En [18], [19] proponen utilizar el análisis *wavelet* y Fourier fraccionario para obtener características de la señales EEG que permitan una reducción en su dimensionalidad para luego clasificarlas utilizando una máquina de soporte vectorial. Este trabajo guarda similitud con lo que aquí se propone, ya que utiliza el análisis de Fourier fraccionario para obtener características diferenciadoras entre las señales EEG, y las combinan con otras herramientas buscando así reducir la dimensionalidad del problema, facilitando la tarea de clasificación de señales EEG entre individuos sanos y pacientes epilépticos.

En [67] el análisis de Fourier fraccionario es explorado como una herramienta para la detección de señales biomédicas, la cual resulta efectiva en la detección de señales débiles no estacionarias en ruido Gaussiano aditivo. Este trabajo guarda relación con la presente investigación ya que aquí se propone realizar un filtrado basado en la convolución fraccionaria.

En [55] trabajan con VEPs (*Visual evoked Potentials*) que resultan de gran interés en la neurociencia cognitiva y clínica como también en los BCIs (*Brain–computer Interfaces*). Básicamente lo que se hace es captar mediante un EEG la respuesta que se obtiene ante un estímulo visual. El estímulo visual utilizado en este caso es una señal chirp, y lo que se

1.10 Epilepsia

encuentra es que en las mediciones del VEP las características en frecuencia de la señal chirp, utilizada como estímulo, son preservadas. Dado este comportamiento, el análisis de Fourier fraccionario es utilizado para el procesamiento del VEP dado que las señales chirp tienen una muy práctica interpretación desde el análisis de Fourier fraccionario. Lo presentado por el autor en este trabajo no guarda relación directa con lo que se propone en esta investigación.

Hasta aquí se ha intentado poner en evidencia la búsqueda en diferentes direcciones para utilizar el análisis de Fourier fraccionario para abordar problemas asociados con señales EEG y biomédicas en general. Dado que esta búsqueda es reciente y que muchas de las herramientas aun están en la etapa teórica no son muchos los trabajos que se encuentran al respecto, trabajos que muestren resultados sobre problemáticas reales. Intentando dar el paso de la teoría a la práctica, en esta investigación se aborda la aplicabilidad del análisis de Fourier fraccionario en señales reales.

Capítulo 2

UN ENFOQUE DE FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO BASADO EN LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA Y SU RELACIÓN CON LA α -DWV

A continuación algunas propiedades de la α -DWV son estudiadas, en particular su relación con la convolución fraccionaria, que permite proponer una metodología de filtrado variante en el tiempo. Los desarrollos que se muestran en este capítulo son originales de este trabajo y constituyen parte de los resultados obtenidos durante esta investigación. Además, con base en estos resultados se desarrolló el artículo científico [10].

2.1. Propiedades de la α -DWV

2.1.1. α -DWV en términos del espectro de Fourier fraccionario

En relación con algunas propiedades, es útil escribir la α -DWV en términos de la transformada de Fourier fraccionaria de una función, en forma similar en que la definición estándar es formulada en términos de la transformada de Fourier estándar (ver Ecuación (1.11)). Primero se introduce la definición:

2.1 Propiedades de la α -DWV

Definición 1. La función de correlación espectral fraccionaria se define como:

$$\gamma_F^\alpha(x'_1, x'_2) = |C_\alpha|^2 E \left\{ {}^w f_\alpha(x'_1) \overline{{}^w f_\alpha(x'_2)} e^{-2i\pi(x'_1 - x'_2)x'_2 \cot \alpha} \right\}. \quad (2.1)$$

A continuación, el siguiente teorema se cumple:

Teorema 1. Sea $F = \{ {}^w f \}$ una señal aleatoria y ${}^w f_\alpha$ la transformada de Fourier fraccionaria de orden α de una realización ${}^w f$, entonces la α -WVD puede ser escrita en la forma:

$$W_F^\alpha(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_F^\alpha \left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2} \right) e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{\frac{2i\pi x z}{\sin \alpha}} dz. \quad (2.2)$$

Demostración. Para una realización de $F(x)$, i.e., una señal determinista, f , de (1.18) se tiene

$$\Gamma_f^\alpha \left(x + \frac{u}{2}, x - \frac{u}{2} \right) = |C_\alpha|^2 f \left(x + \frac{u}{2} \right) \overline{f \left(x - \frac{u}{2} \right)} e^{2i\pi u \left(x - \frac{u}{2} \right) \cot \alpha}, \quad (2.3)$$

entonces, reemplazando en (1.19) se obtiene

$$W_f^\alpha(x, x') = |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f \left(x + \frac{u}{2} \right) \overline{f \left(x - \frac{u}{2} \right)} e^{2i\pi u x \cot \alpha} e^{\frac{-2i\pi u x'}{\sin \alpha}} du. \quad (2.4)$$

Luego, usando

$$f(x) = \overline{C_\alpha} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(z) e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz, \quad (2.5)$$

y reemplazando (2.5) en (2.4) conduce a (2.6),

$$\begin{aligned} W_f^\alpha(x, x') &= |C_\alpha|^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(x+u/2)^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(z) e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{2i\pi z(x+u/2)/\sin \alpha} dz \\ &\quad \times e^{i\pi(x-u/2)^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_\alpha(w)} e^{i\pi w^2 \cot \alpha} e^{-2i\pi w(x-u/2)/\sin \alpha} dw \\ &\quad \times e^{2i\pi u x \cot \alpha} e^{-2i\pi u x' / \sin \alpha} du \\ &= |C_\alpha|^4 \iint_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(z) \overline{f_\alpha(w)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi z u / \sin \alpha} e^{i\pi w u / \sin \alpha} e^{-2i\pi u x' / \sin \alpha} du \\ &\quad \times e^{i\pi w^2 \cot \alpha} e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x(z-w)/\sin \alpha} dz dw. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De acuerdo con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi \frac{(z-2x'+w)u}{\sin \alpha}} du = 2|\sin \alpha| \delta(z - 2x' + w), \quad (2.7)$$

2.1 Propiedades de la α -DWV

se escribe (2.6) en la forma

$$\begin{aligned}
 W_f^\alpha(x, x') &= 2|\sin \alpha| |C_\alpha|^4 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(2x' - w) \overline{f_\alpha(w)} e^{i\pi w^2 \cot \alpha} e^{-i\pi(2x' - w)^2 \cot \alpha} \\
 &\quad \times e^{2i\pi x(2x' - 2w)/\sin \alpha} dw \\
 &= 2|C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(2x' - w) \overline{f_\alpha(w)} e^{-4i\pi x'^2 \cot \alpha} e^{4i\pi x' w \cot \alpha} \\
 &\quad \times e^{4i\pi x x' / \sin \alpha} e^{-4i\pi x w / \sin \alpha} dw.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Con $z = 2x' - 2w \Rightarrow w = x' - \frac{z}{2}$ y $2x' - w = x' + \frac{z}{2}$, permite escribir

$$\begin{aligned}
 W_f^\alpha(x, x') &= |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{z}{2}\right)} e^{i\pi\left(x' - \frac{z}{2}\right)^2 \cot \alpha} e^{-i\pi\left(x' + \frac{z}{2}\right)^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz \\
 &= |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{z}{2}\right)} e^{-2i\pi x' z \cot \alpha} e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{i\pi z^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz \\
 &= |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{z}{2}\right)} e^{-2i\pi z\left(x' - \frac{z}{2}\right) \cot \alpha} e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

con base en (2.1) y $W_F^\alpha(x, x') = E \left\{ W_f^\alpha(x, x') \right\}$, (2.9) conduce a

$$W_F^\alpha(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_F^\alpha\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) e^{-i\pi z^2 \cot \alpha} e^{\frac{2i\pi x z}{\sin \alpha}} dz, \tag{2.10}$$

lo cual completa la prueba. \square

Observación 1. Con este resultado la α -DWV de una señal puede ser expresada en términos tanto de la función directa, Ecuación (1.19), como de su transformada de Fourier fraccionaria, Ecuación (2.3).

Corolario 1. Reemplazando $\alpha = \pi/2$ en (2.10), (1.11) es obtenida, la cual es la DWV convencional.

2.1.2. α -DWV es real

Dado que la DWV es real, ver (1.12), y corresponde a una distribución de energía, la α -DWV debe permanecer real para preservar una interpretación similar. Por lo que, se calcula el complejo conjugado de (2.9)

$$\overline{W_f^\alpha(x, x')} = |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_\alpha\left(x' + \frac{z}{2}\right)} f_\alpha\left(x' - \frac{z}{2}\right) e^{2i\pi z\left(x' - \frac{z}{2}\right) \cot \alpha} e^{i\pi z^2 \cot \alpha} e^{-2i\pi x z / \sin \alpha} dz, \tag{2.11}$$

2.1 Propiedades de la α -DWV

reemplazando $z = -y$, entonces

$$\begin{aligned}
 \overline{W_f^\alpha(x, x')} &= -|C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{y}{2}\right)} f_\alpha\left(x' + \frac{y}{2}\right) e^{-2i\pi y\left(x' + \frac{y}{2}\right) \cot \alpha} e^{i\pi y^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x y / \sin \alpha} dy \\
 &= |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{y}{2}\right)} f_\alpha\left(x' + \frac{y}{2}\right) e^{-2i\pi y\left(x' + \frac{y}{2}\right) \cot \alpha} e^{i\pi y^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x y / \sin \alpha} dy \\
 &= |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha\left(x' + \frac{y}{2}\right) \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{y}{2}\right)} e^{-2i\pi y\left(x' - \frac{y}{2}\right) \cot \alpha} e^{-i\pi y^2 \cot \alpha} e^{2i\pi x y / \sin \alpha} dy \\
 &= W_f^\alpha(x, x').
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Este último resultado muestra que la α -DWV es real, como la DWV convencional.

2.1.3. α -DWV y las propiedades marginales

las distribuciones marginales son importantes porque proveen información acerca de como la señal está distribuida en una representación tiempo-frecuencia. Usando (2.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f^\alpha(x, x') dx' = |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{z}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{z}{2}\right)} e^{2i\pi x z \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x' z / \sin \alpha} dx' dz, \tag{2.13}$$

dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x' z / \sin \alpha} dx' = \delta\left(\frac{z}{\sin \alpha}\right), \tag{2.14}$$

reemplazándolo en (2.13) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f^\alpha(x, x') dx' = |f(x)|^2, \tag{2.15}$$

la cual coincide con (1.14), i.e., la DWV y la α -DWV tienen la misma distribución marginal temporal.

Ahora, usando (2.9) se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f^\alpha(x, x') dx = |C_\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{f_\alpha\left(x' - \frac{z}{2}\right)} e^{2i\pi x z' \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x z / \sin \alpha} dx dz, \tag{2.16}$$

adaptando (2.14) y reemplazándola en (2.16), conduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f^\alpha(x, x') dx = |f_\alpha(x')|^2. \tag{2.17}$$

Ecuaciones (2.15) y (2.17) implican que la α -DWV es un mapeo de la energía de la señal en

2.1 Propiedades de la α -DWV

un espacio de dos dimensiones.

Observación 2. *Este espacio de dos dimensiones generado a partir de x y x' , los cuales son los dominios del tiempo y fraccionario respectivamente, en relación con las distribuciones marginales, soporta la idea que esta distribución está definida para ejes oblicuos en una representación tiempo-frecuencia, i.e., sobre un sistema de coordenadas no ortogonal.*

2.1.4. La α -DWV en asociación con $\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f]$

La relación entre la traslación fraccionaria y la α -DWV es estudiada. Entonces, a partir de (2.4) para $\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f](x)$, se tiene

$$W_{\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f]}^{\alpha}(x, x') = |C_{\alpha}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \tau + \frac{u}{2}\right) \overline{f\left(x - \tau - \frac{u}{2}\right)} e^{2i\pi u(x-\tau) \cot \alpha} e^{\frac{-2i\pi u x'}{\sin \alpha}} du, \quad (2.18)$$

por lo que

$$W_{\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f]}^{\alpha}(x, x') = W_f^{\alpha}(x - \tau, x'). \quad (2.19)$$

Observación 3. *Mientras que la traslación fraccionaria en asociación con la DWV (1.15) corresponde a un desplazamiento en tiempo y frecuencia, para la α -DWV este desplazamiento es sólo en el eje del tiempo, dado que esta distribución es una representación oblicua. Por lo tanto un desplazamiento en el tiempo en la α -DWV es equivalente a un desplazamiento en tiempo y frecuencia en la DWV estándar.*

2.1.5. Relación entre la convolución fraccionaria y la α -DWV

Algunas propiedades de la convolución fraccionaria relacionadas con sus efectos sobre la α -DWV de dos funciones, son estudiadas.

Teorema 2. *Sea $f = h *_{\alpha} g$ entonces la DWV de f está dada por*

$$W_f(x, \nu) = \int_{\mathbb{R}} W_{\mathcal{T}_{y;\alpha}[h]}(x, \nu) W_{\mathcal{T}_{x-y;\alpha}[g]}(x, \nu) dy, \quad (2.20)$$

la cual es una convolución en dos dimensiones a lo largo de un eje oblicuo (ver Ecuación (1.15)) de las DWVs correspondientes a las funciones h y g .

Demostración. En el Apéndice 4.2, se prueba

$$W_f^{\alpha}(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} W_h^{\alpha}(x - y, x') W_g^{\alpha}(y, x') dy, \quad (2.21)$$

2.1 Propiedades de la α -DWV

y usando (2.19) se escribe

$$W_f^\alpha(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathcal{T}_{y;\alpha}[h]}^\alpha(x, x') W_{\mathcal{T}_{x-y;\alpha}[g]}^\alpha(x, x') dy. \quad (2.22)$$

Considerando la relación entre la α -DWV y la DWV estándar, Ecuación (1.20), se puede escribir(2.21) en la forma

$$W_f\left(x, \frac{x' - x \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \int_{\mathbb{R}} W_h\left(x - y, \frac{x' - x \cos \alpha + y \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) W_g\left(y, \frac{x' - y \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) dy. \quad (2.23)$$

Por medio de la sustitución $v = \frac{x' - x \cos \alpha}{\sin \alpha}$ se tiene

$$W_f(x, v) = \int_{\mathbb{R}} W_h(x - y, v + y \cot \alpha) W_g(y, v + (x - y) \cot \alpha) dy, \quad (2.24)$$

y en términos de (1.15) se obtiene

$$W_f(x, v) = \int_{\mathbb{R}} W_{\mathcal{T}_{y;\alpha}[h]}(x, v) W_{\mathcal{T}_{x-y;\alpha}[g]}(x, v) dy, \quad (2.25)$$

lo cual completa la prueba. □

Esa es una generalización directa de la Ecuación (1.17), la cual se puede sintetizar como

$$W_{h *_\alpha g}(x, v) = W_h *_\alpha W_g, \quad (2.26)$$

la convolución entre W_h y W_g a lo largo de un trayecto oblicuo orientado por el ángulo α .

Corolario 2. *Las ecuaciones (2.22) y (2.25) si $\alpha = \pi/2$ conducen a (1.17).*

Observación 4. *Los resultados (2.22) y (2.25) muestran que la convolución fraccionaria $f = h *_\alpha g$, en la representación de Wigner-Ville (Figura 2.1a), corresponde a una convolución en dos dimensiones entre las dos α -DWVs, W_h^α y W_g^α , a lo largo del eje x (Figura 2.1b), la cual es equivalente a una convolución en dos dimensiones entre las dos DWVs estándar, W_h y W_g , a lo largo de un trayecto oblicuo definido por el ángulo α (Figura 2.1c). Por lo que, esta propiedad es utilizada para implementar un filtrado tiempo-frecuencia basado en la convolución fraccionaria.*

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

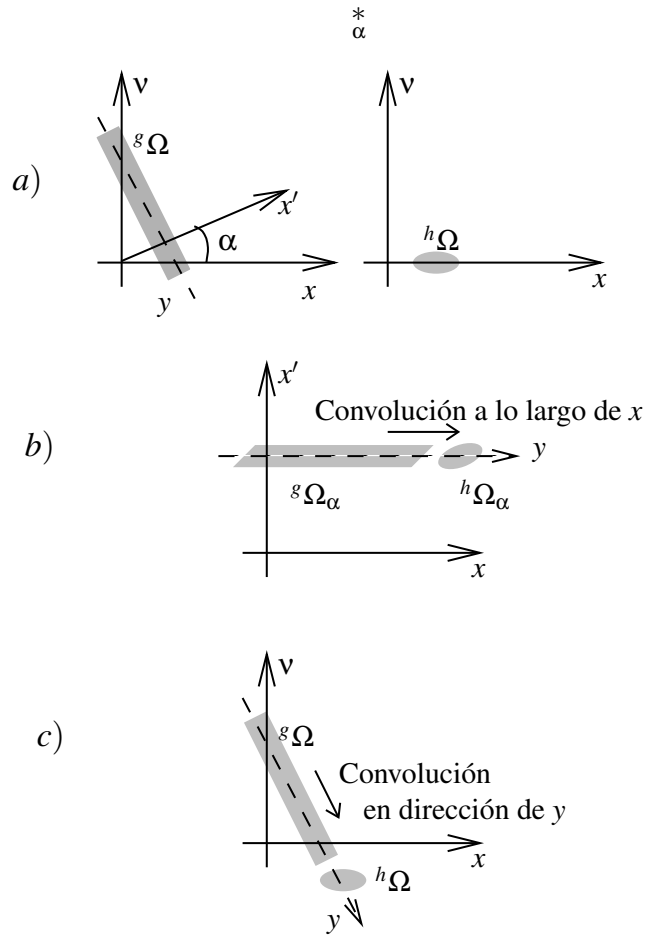


Figura 2.1: DWV and α -DWV de la convolución fraccionaria entre dos señales h y g . $h\Omega$ y $g\Omega$ son los soportes de W_h y W_g respectivamente; $h\Omega_\alpha$ y $g\Omega_\alpha$ son los soportes de W_h^α y W_g^α respectivamente. a) DWV de las señales. b) Representación de la α -DWV de la convolución fraccionaria. c) Representación de la DWV de la convolución fraccionaria.

2.2. Filtrado Variante en el tiempo

A partir de la Ecuación (2.21) se propone un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución fraccionaria. El procedimiento consiste fundamentalmente en:

- ❖ Determinar el filtro que permita un buen índice de desempeño en el filtrado (a definir según la finalidad del filtrado).
- ❖ Obtener el parámetro α para llevar a cabo la convolución fraccionaria.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

El valor de α se determina a partir de la α -DWV de la señal a filtrar. Se parte de la hipótesis de que existe un valor de α para el cual la señal cumple con la noción de α -estacionariedad descrita en [53]. Encontrado este valor se lleva a cabo la convolución a este orden, que según lo muestra la Ecuación 2.21 puede ser interpretado como un filtrado variante en el tiempo, ya que es implementado a lo largo de un eje oblicuo en el espacio tiempo-frecuencia. Para el caso descrito anteriormente se tiene que el filtrado se hace con un valor de α constante, lo cual permite establecer que la señal cumple con la noción de α -estacionariedad. Pero el parámetro α puede variar describiendo trayectorias no lineales de filtrado en el espacio tiempo-frecuencia. Algunos ejemplos de estas trayectorias pueden ser vistos en la Figura 2.2. En este caso no hay forma bien definida de obtener α , sin embargo, una manera podría ser por medio de un filtrado óptimo (ver Hlawatsch *et al.* [22]). Este tópico es dejado como un trabajo futuro y no es considerado acá.

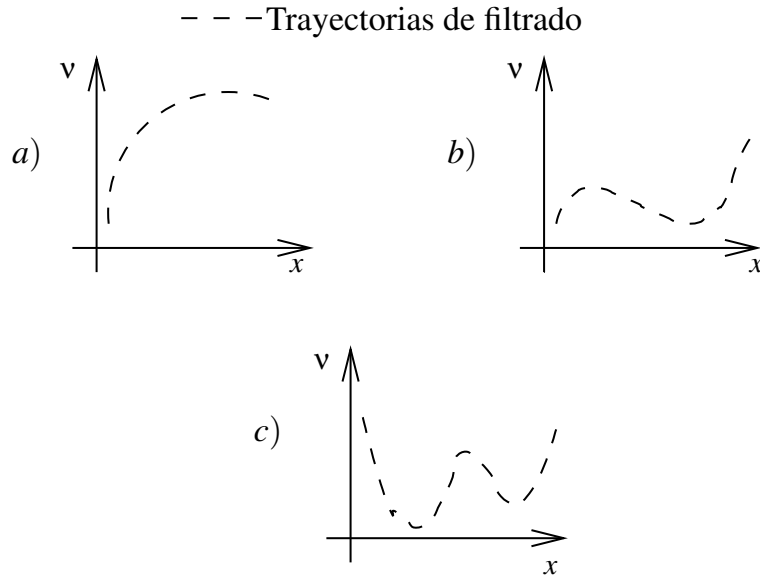


Figura 2.2: Ejemplos de trayectorias de filtrado representadas en el espacio tiempo-frecuencia, para el caso en que α varía respecto del tiempo. a) Ejemplo 1. b) Ejemplo 2. c) Ejemplo 3.

2.2.1. Simulaciones

A continuación se relacionarán algunas simulaciones ilustrando la forma de implementar el filtrado descrito anteriormente. Aquí el filtro utilizado es una señal gaussiana. Para escoger este filtro se consideró una señal con soporte compacto en los dominios de tiempo y

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

frecuencia, aproximadamente. Notar que los resultados pueden ser mejor, ya que es posible que otro tipo de filtro provea un mejor desempeño en el filtrado. Pero como fue mencionado anteriormente, el problema de escoger el filtro no fue estudiado, ya que no es el objetivo de este trabajo.

Ejemplo 1

La señal libre de ruido es,

$$s(x) = A \sin(10\pi x^2 + 20\pi x), \quad (2.27)$$

la cual está contaminada con ruido descrito por:

$$n(x) = e^{-100(x-0,5)^2} \cos(60\pi x) + e^{-100(x-1,5)^2} \cos(20\pi x), \quad (2.28)$$

por lo que la señal a filtrar está dada por $f(x) = s(x) + n(x)$.

En la Figura 2.3 se muestra la DWV de la señal libre de ruido. En la Figura 2.4 se muestra la DWV de la señal con ruido. En las figuras 2.5 y 2.6 se muestra la señal libre de ruido en comparación con la señal con ruido, en los dominios del tiempo y frecuencia respectivamente. De lo que se observa en las figuras 2.4 a 2.6, es de esperar que los filtrados basados en la teoría convencional de Fourier no ofrezcan una forma efectiva de separar lo que se considera señal de interés del ruido, lo cual se deriva de las ecuaciones (1.16) y (1.17).

En la Figura 2.7 se observa la α -DWV de la señal $f(x)$ a un orden $\alpha = -1,5705$, esto muestra $s(x)$ cumple la noción de α -estacionariedad [53]. Nótese que esta señal aparece sobremuestreada en un factor de 2, esto es para mitigar los efectos de *aliasing* que se producen al implementar la convolución fraccionaria, debido a los productos con señales tipo chirp utilizados para llevarla a cabo [37]. El procesamiento se realiza con la señal sobremuestreada, luego el resultado final es submuestreado, obteniendo así a la salida las mismas muestras que a la entrada.

En la Figura 2.8 se muestra la distribución α -DWV del filtro. Esta señal está descrita por $h(x) = -100e^{x^2} \cos(20\pi x)$. Según la Ecuación (2.21) al llevar a cabo la convolución fraccionaria entre las señales f y h a un orden $\alpha = -1,5705$, la distribución α -DWV de este resultado corresponde a la convolución a lo largo de x entre las distribuciones α -DWVs de las señales f y g , Figura 2.7 y Figura 2.8, respectivamente.

En la Figura 2.9 se muestra la DWV de la señal recuperada, es decir el resultado de realizar la convolución fraccionaria entre f y h con $\alpha = -1,5705$. Aquí se puede ver que el

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

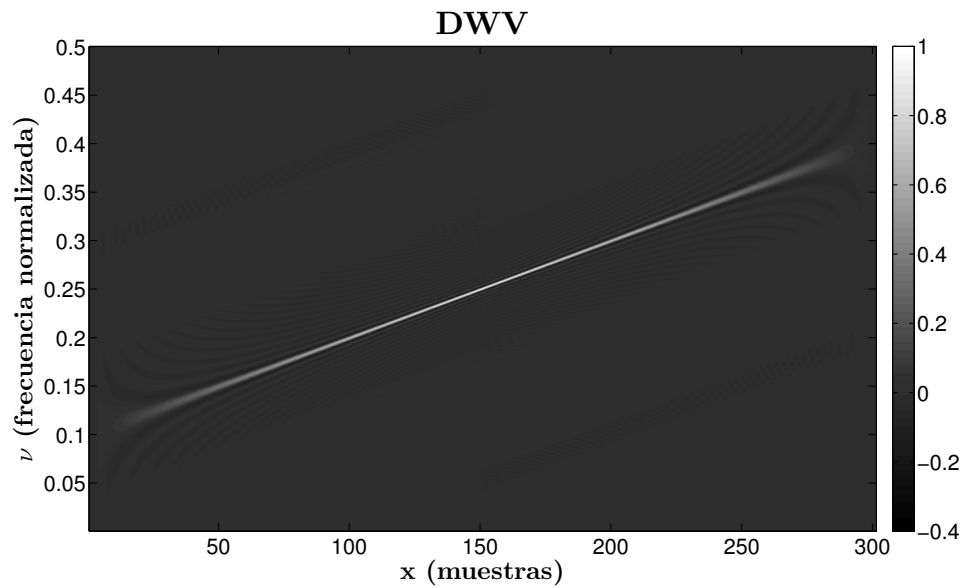


Figura 2.3: DWV de la señal libre de ruido $s(x)$.

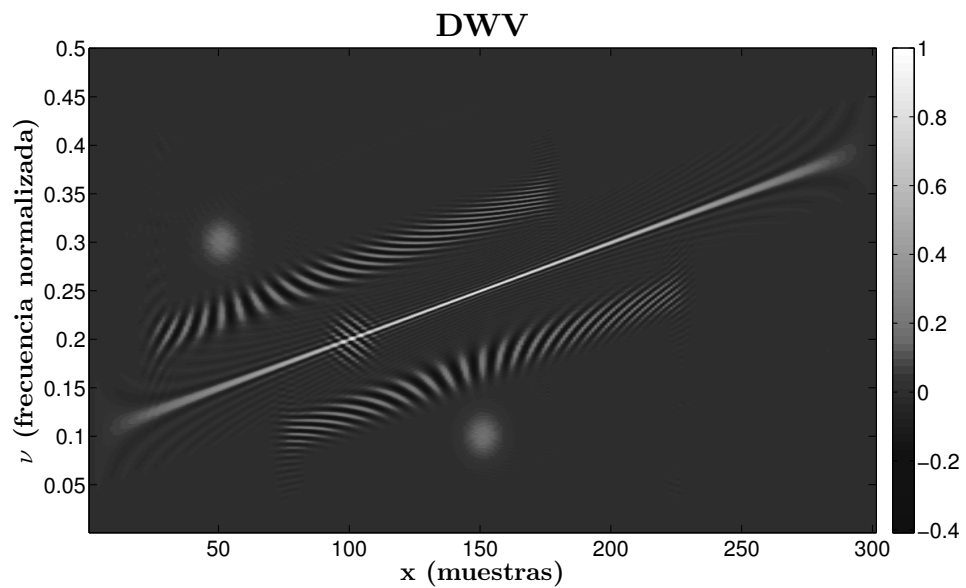


Figura 2.4: DWV de la señal con ruido $f(x)$.

ruido ha sido separado de la señal de interés. Esto refleja que la convolución fraccionaria, en este caso, ofrece la posibilidad de separar el ruido de la señal de interés de forma efectiva. Además este filtrado corresponde a un filtrado variante en el tiempo, dado que se hace a lo largo de un eje oblicuo en la DWV, como puede ser interpretado de la Figura 2.4.

En las Figura 2.10 se muestra una comparación en el dominio del tiempo, de la señal

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

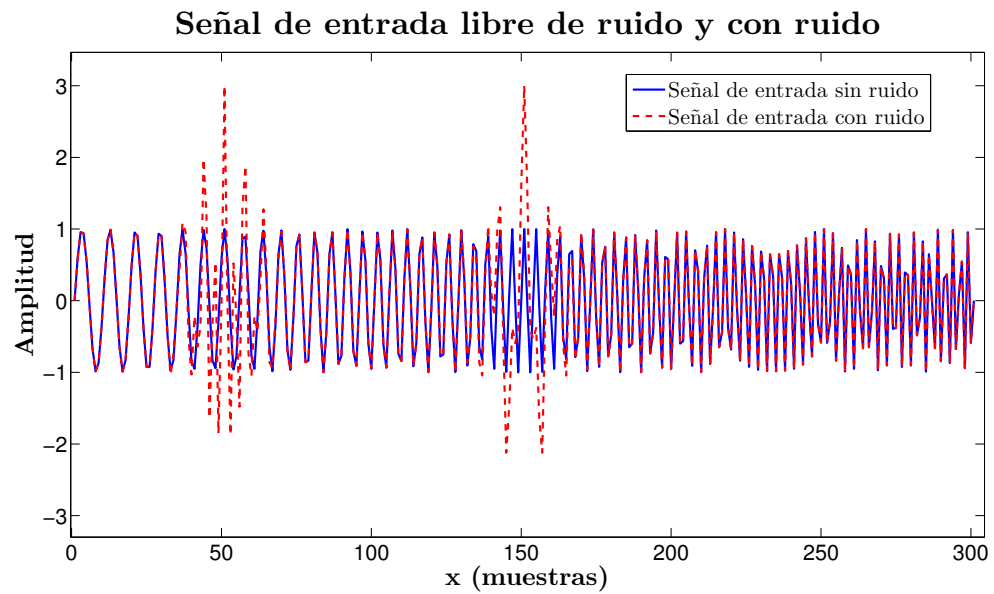


Figura 2.5: Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio del tiempo.

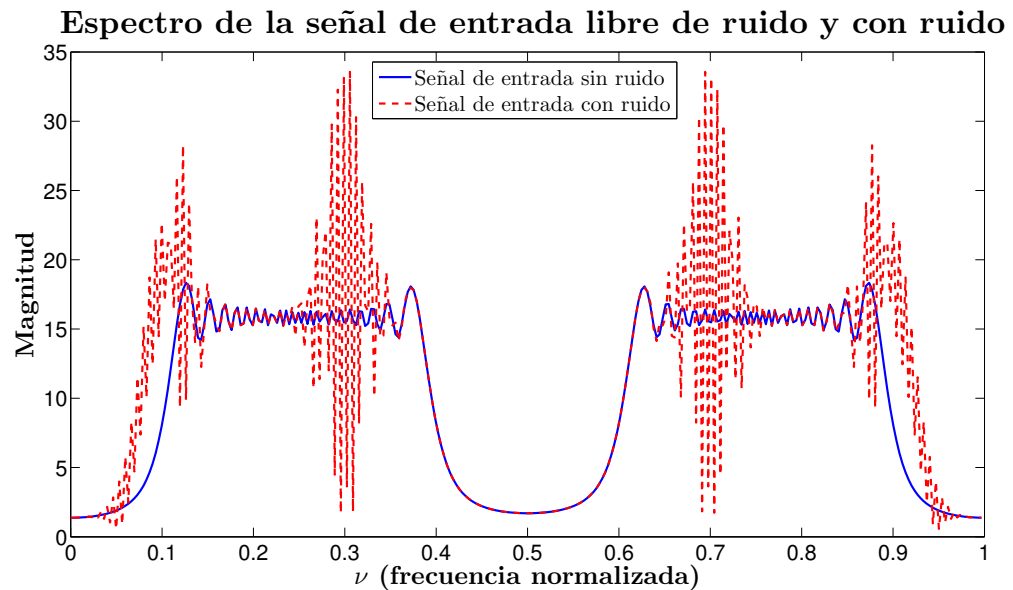


Figura 2.6: Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio de la frecuencia.

a recuperar sin ruido, s , y la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria. En las figuras 2.11 y 2.12 se muestra una comparación en el dominio de la frecuencia, entre la señal a recuperar sin ruido, s , y la señal recuperada por medio de la convolución fraccionaria.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

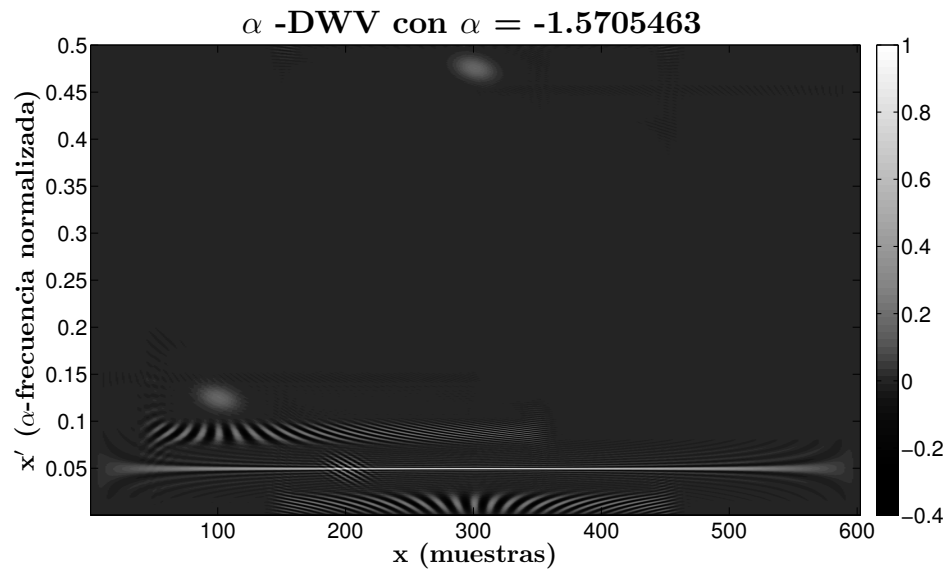


Figura 2.7: α -DWV de la señal con ruido $f(x)$, con $\alpha = -1,5705463$.

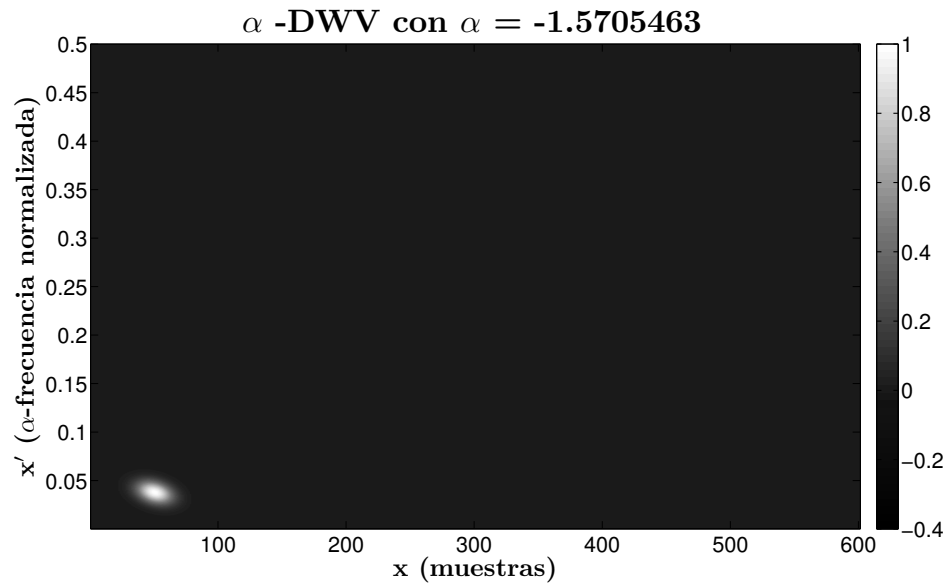
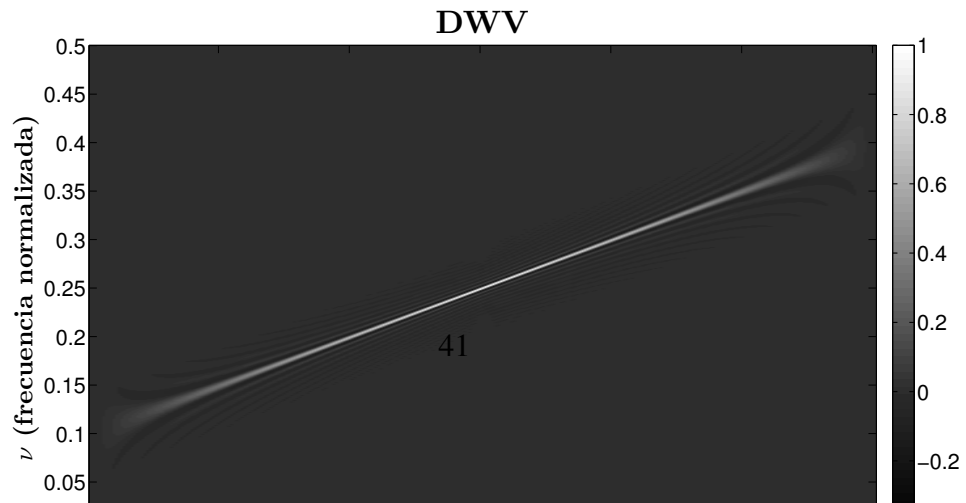


Figura 2.8: α -DWV del filtro, $h(x)$, con $\alpha = -1,5705463$.



2.2 Filtrado Variante en el tiempo

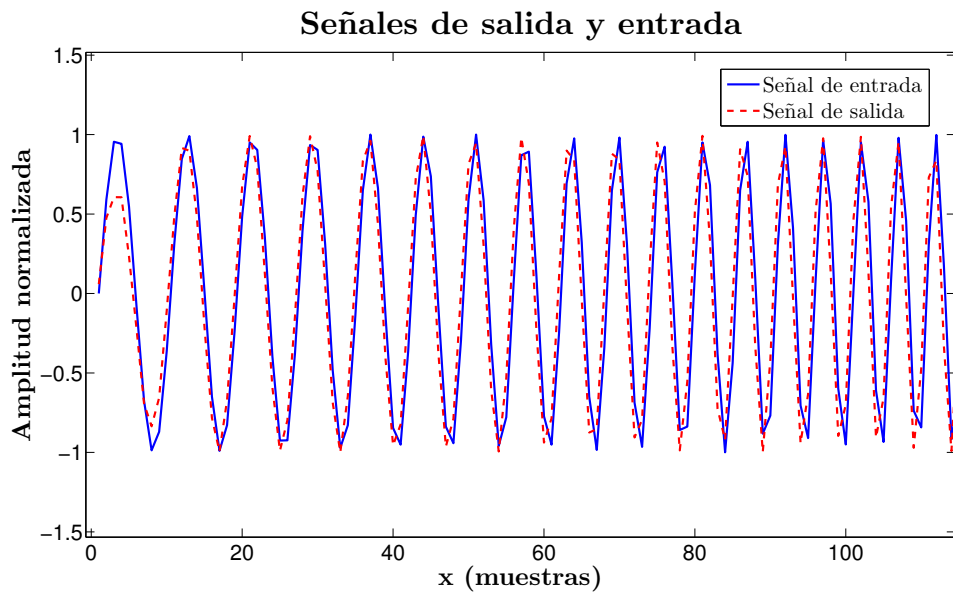


Figura 2.10: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio del tiempo.

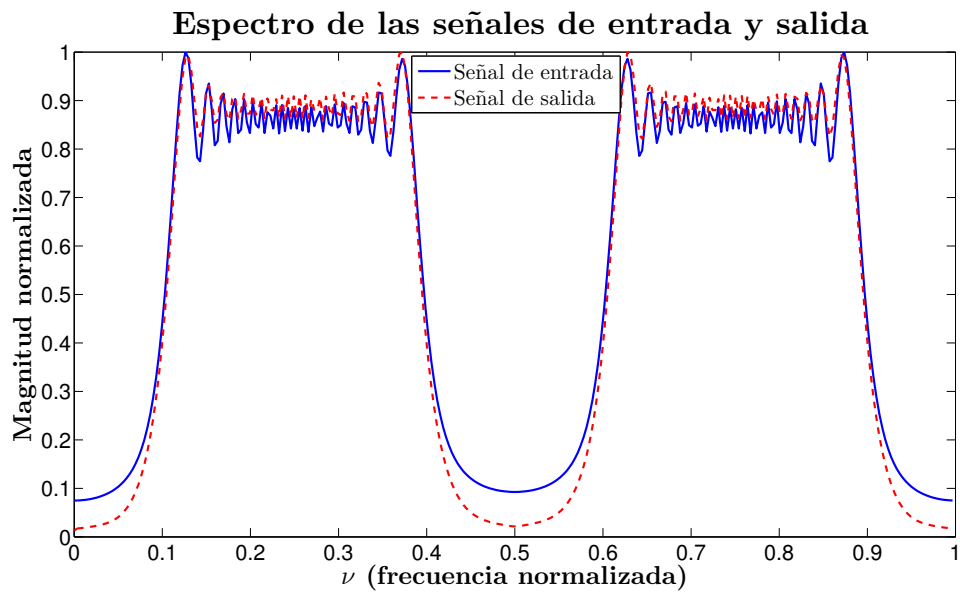


Figura 2.11: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

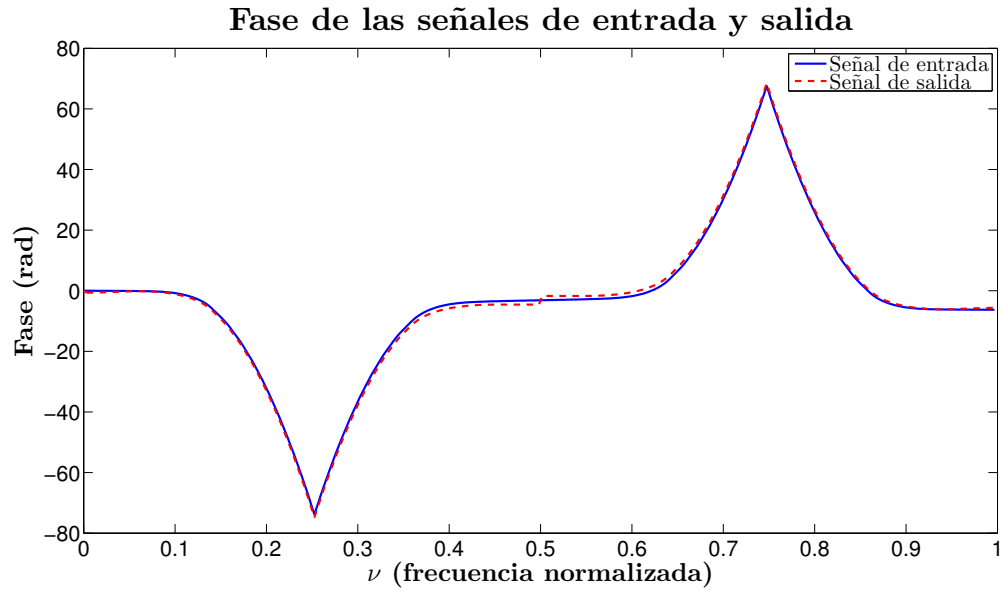


Figura 2.12: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.

Como se observa de los resultados anteriores, la señal que resulta del filtrado no es totalmente coincidente con la señal a recuperar. Esto se explica a partir de que la señal a recuperar no es de soporte compacto, como se ve en la Figura 2.11. Por lo que al utilizar la señal gaussiana como filtro, ésta atenúa considerablemente componentes que están fuera de la banda donde se concentra la mayor parte de energía de la señal. Otra causa es el ventaneo presente en las señales.

Ejemplo 2

En el ejemplo anterior se desarrolló el filtrado a partir de un α constante. Un caso de interés ya que estas señales cumplen con la noción de α -estacionariedad. Pero el filtrado no se restringe a este tipo de señales, este filtrado también se puede llevar a cabo para el caso en que α sea variante en el tiempo. Las señales que exigen este filtrado son aquellas cuya DWV no está a lo largo de un eje oblicuo en el espacio tiempo-frecuencia, sino a lo largo de una curva, como por ejemplo las señales de radar.

En este ejemplo la señal libre de ruido está dada por

$$s(x) = \sin\left(\frac{4\pi x^3}{3}\right), \quad (2.29)$$

y el ruido es

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

$$n(x) = e^{-100(x-1)^2} \cos(40\pi x) + e^{-100(x-3)^2} \cos(10\pi x). \quad (2.30)$$

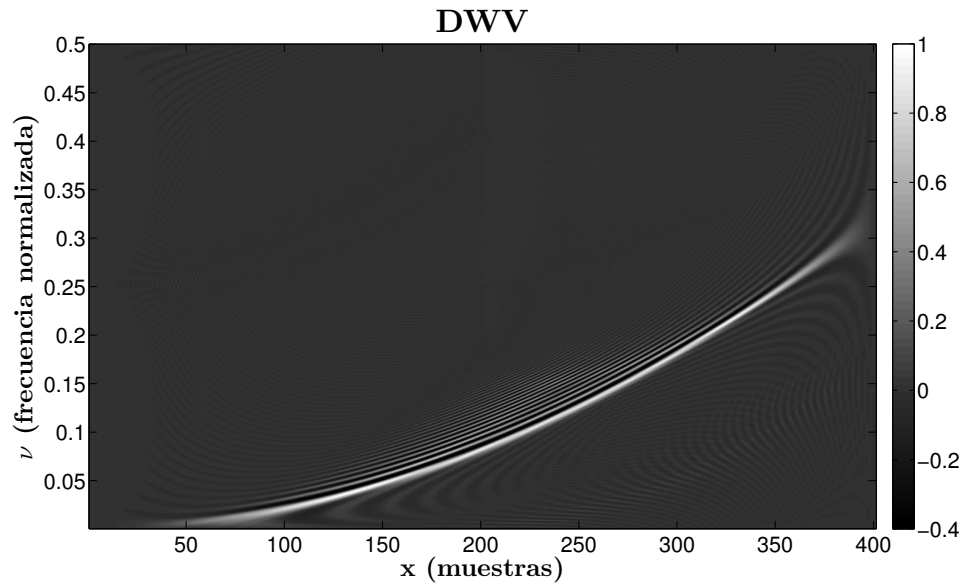


Figura 2.13: DWV de la señal libre de ruido $s(x)$.

De esta forma, la señal a filtrar es $f(x) = s(x) + n(x)$. En la Figura 2.13 se muestra la DWV de la señal libre de ruido. En la Figura 2.14 se muestra la DWV de la señal con ruido. En las figuras 2.15 y 2.16 se muestra la señal libre de ruido en comparación con la señal con ruido, en los dominios del tiempo y frecuencia respectivamente.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

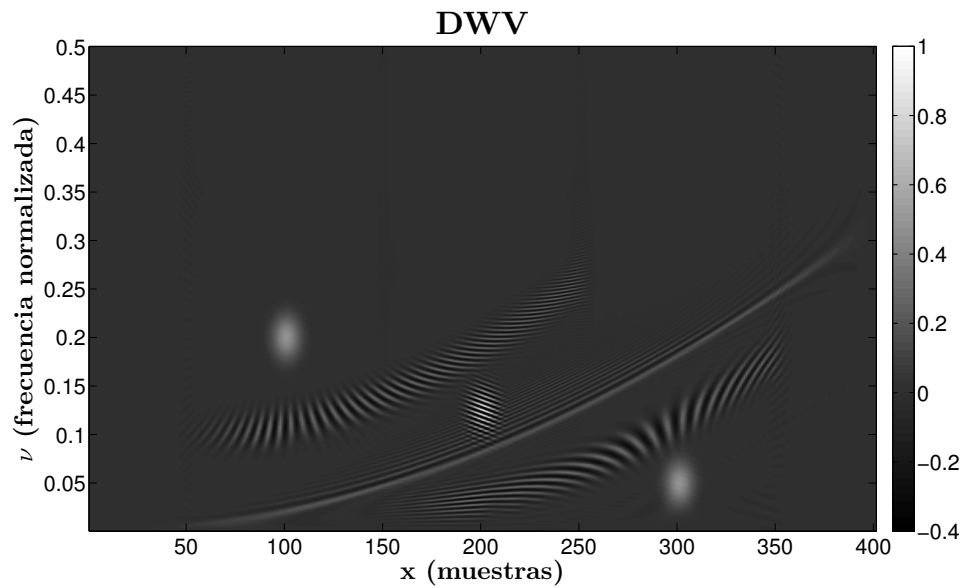


Figura 2.14: DWV de la señal con ruido $f(x)$.

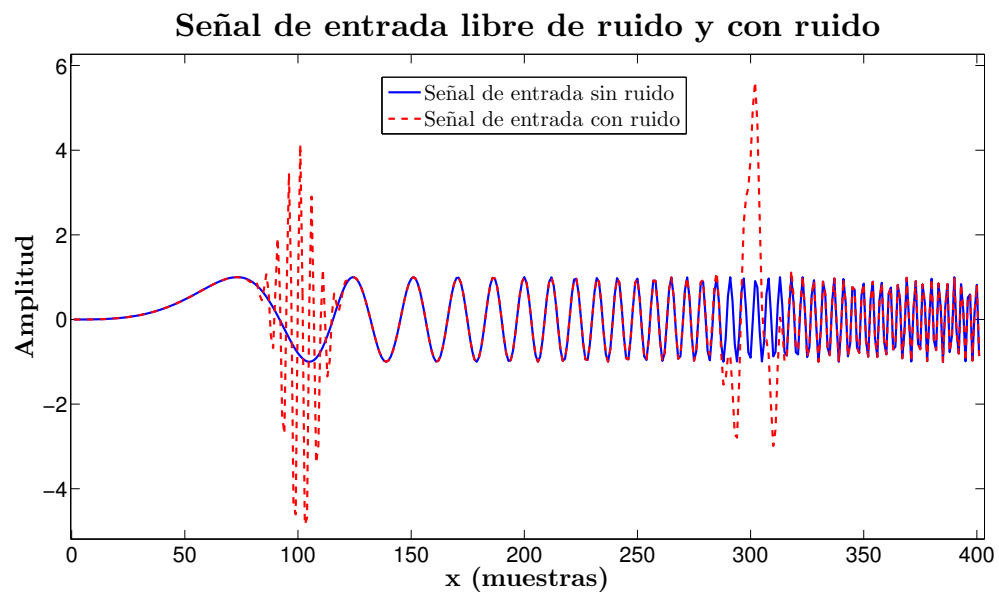


Figura 2.15: Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio del tiempo.

Como en el ejemplo anterior, en las figuras 2.14 a 2.16 se ve que los filtrados basados en la teoría convencional de Fourier no ofrecen una forma efectiva de separar lo que se considera señal de interés del ruido. Pero, por medio de una convolución fraccionaria entre f y h , con un α variante en el tiempo, es posible seguir una trayectoria curva en el filtrado, para separar la

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

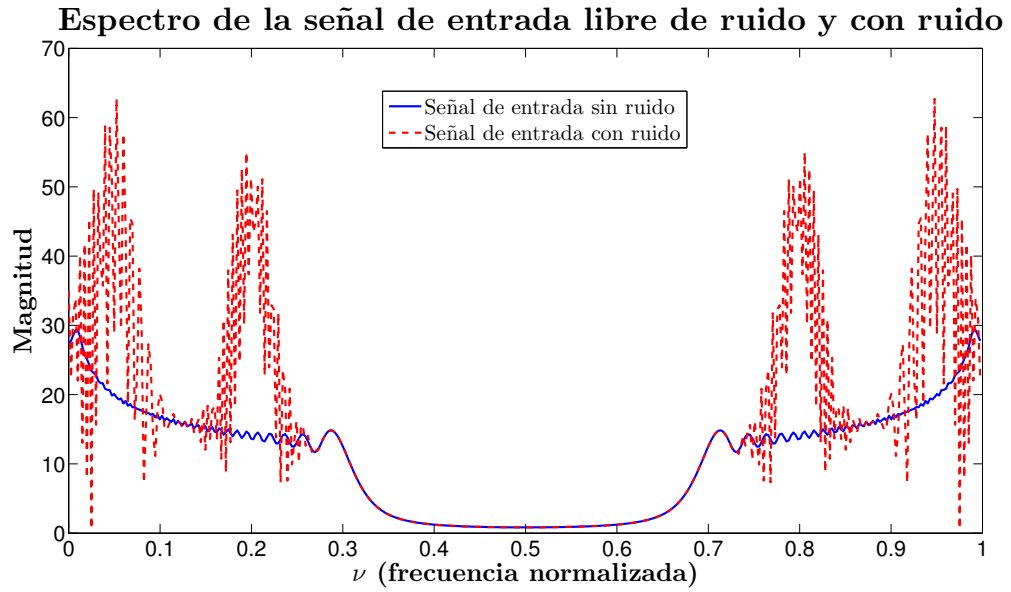


Figura 2.16: Señal libre de ruido, $s(x)$, y señal con ruido $f(x)$, en el dominio de la frecuencia.

señal de interés del ruido. Esto muestra que la convolución fraccionaria, como en el ejemplo anterior, ofrece la posibilidad de separar el ruido de la señal de interés de forma efectiva.

En la Figura 2.17 se muestra la DWV de la señal que es utilizada como filtro. Esta señal corresponde a una gaussiana de la forma $h(x) = -100e^{x^2}$. En la Figura 2.18 se muestra el α que es utilizado para realizar el filtrado mediante la convolución fraccionaria entre h y f . Como se observa, el valor de α varía respecto del tiempo.

Cabe aclarar que el α , en este caso, se obtiene a partir de mediciones sobre la DWV, en un procedimiento de prueba y error, tomando como punto de partida la fase de la señal analítica asociada a s . Con esta fase se obtiene la frecuencia instantánea, la cual es comparada con el argumento de la traslación fraccionaria, esta comparación permite ajustar los parámetros que resultan en una trayectoria cercana a la deseada.

Para evitar este procedimiento, se podría plantear un filtrado óptimo para obtener α , como se mencionó anteriormente.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

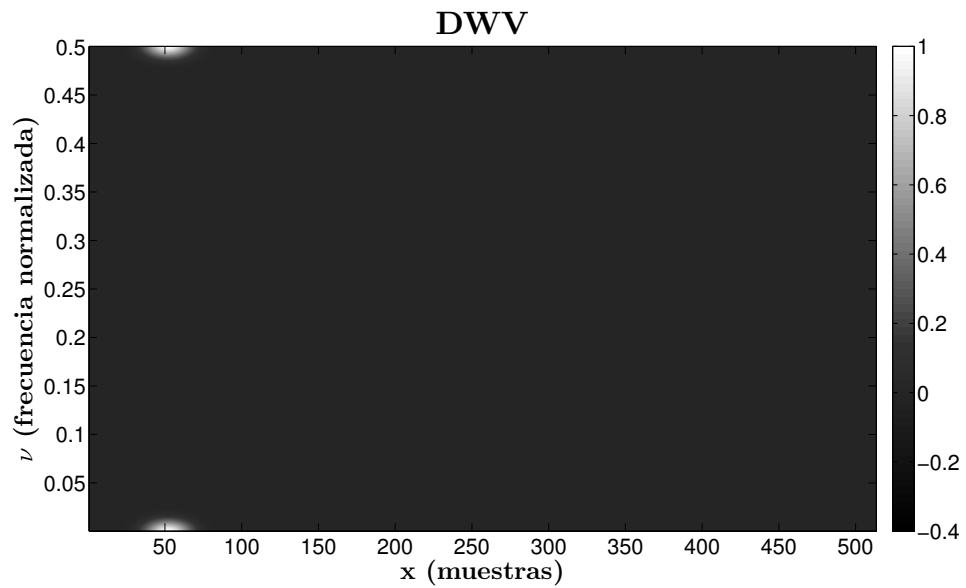


Figura 2.17: DWV del filtro, $h(x)$.

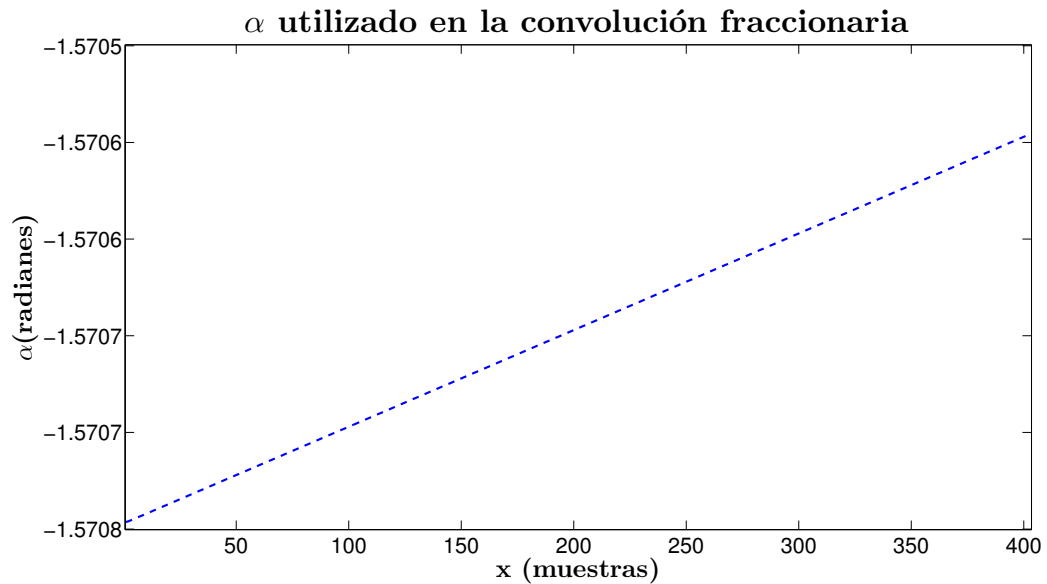


Figura 2.18: α utilizado en la convolución fraccionaria entre h y f .

En la Figura 2.19 se muestra la DWV de la señal recuperada, es decir, el resultado de realizar la convolución fraccionaria entre f y h con $\alpha(x)$. Aquí se puede ver que el ruido ha sido separado de la señal de interés.

En la Figura 2.20 se muestra una comparación en el dominio del tiempo, entre la señal a

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

recuperar sin ruido, s , y la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria.

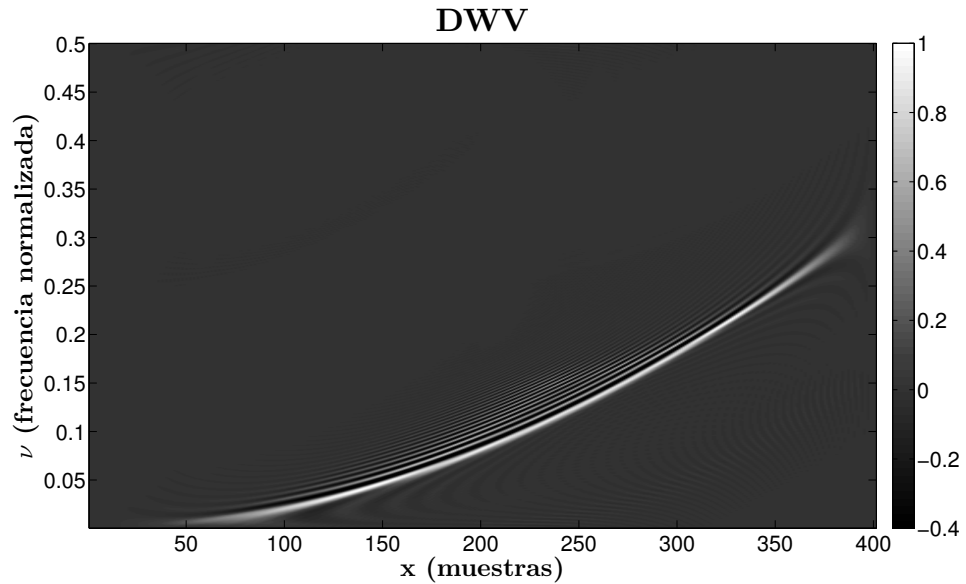


Figura 2.19: DWV de la señal filtrada usando la convolución fraccionaria.

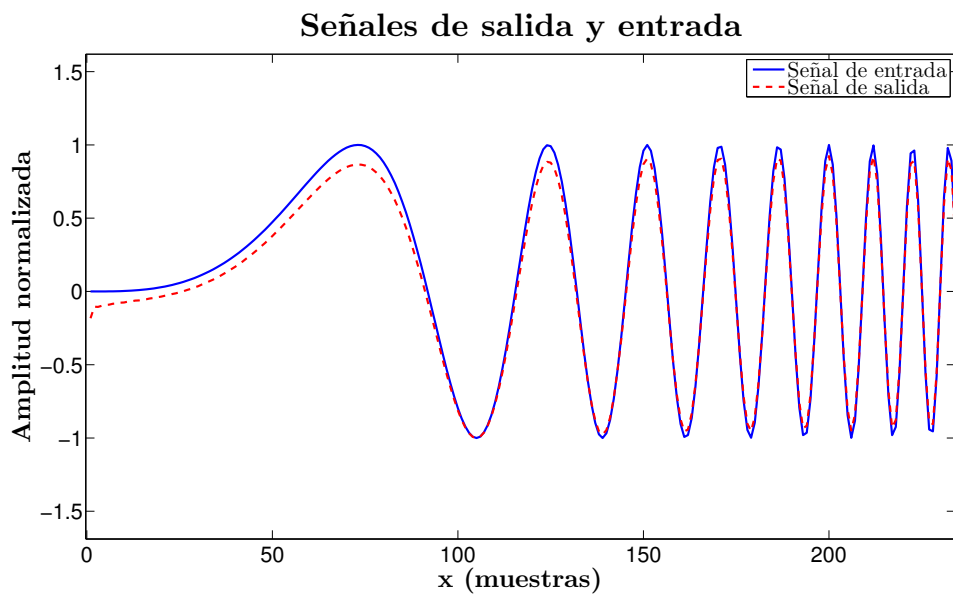


Figura 2.20: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio del tiempo.

En las figuras 2.21 y 2.22 se muestra una comparación en el dominio de la frecuencia, entre la señal a recuperar sin ruido, s , y la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria.

2.2 Filtrado Variante en el tiempo

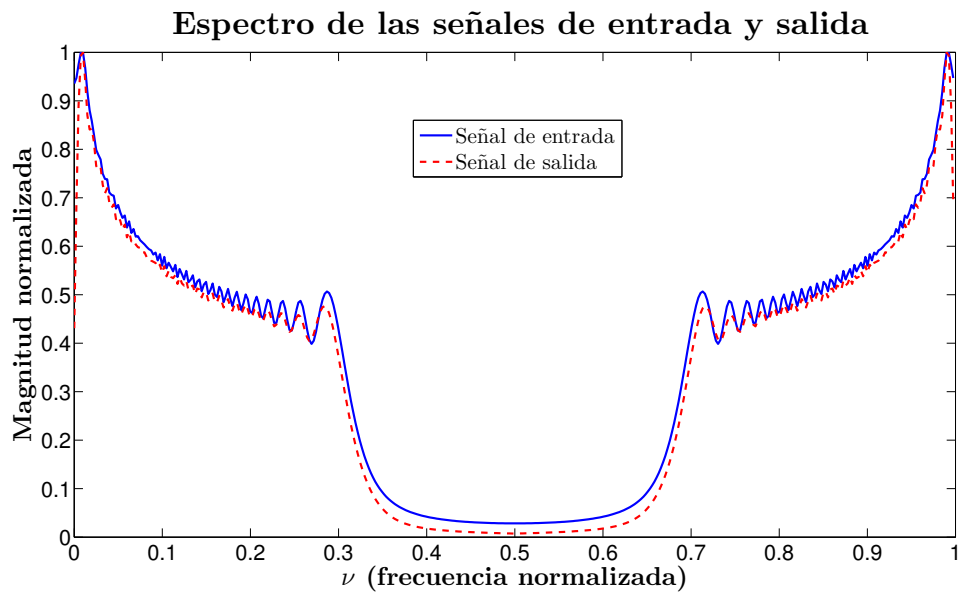


Figura 2.21: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.

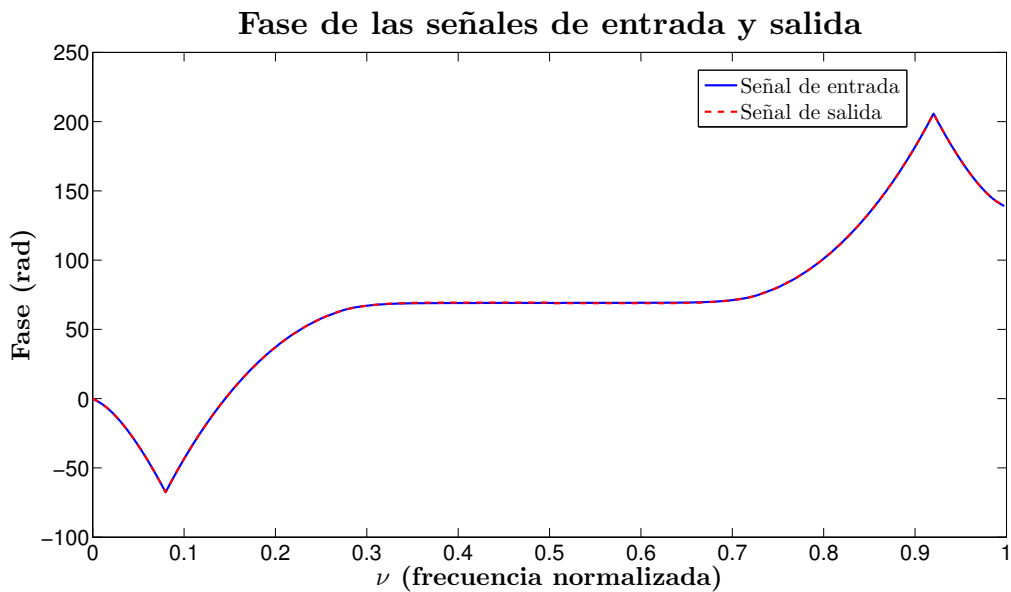


Figura 2.22: Señal de entrada libre de ruido y señal de salida, en el dominio de la frecuencia.

Como en el ejemplo anterior, las figuras 2.20 a la 2.22 muestran que la señal resultante del filtrado no es totalmente coincidente con la señal original. Las causas han sido previamente mencionadas.

Capítulo 3

CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS Y FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO EN SEÑALES EEG ADQUIRIDAS DE PACIENTES EPILÉPTICOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos con señales EEG reales. Se describen las señales utilizadas y luego los resultados que se obtienen al aplicar los métodos presentados anteriormente. Además, con base en estos resultados se desarrollo el artículo científico [11].

3.1. Descripción de las señales EEG utilizadas

Las señales EEG utilizadas fueron tomadas de *Andrzejak et. al.* y se encuentra descritas en [3]. Esta base de datos contiene 5 conjuntos de señales, etiquetadas de A–E, cada conjunto contiene 100 segmentos de 23,6s de duración y con una frecuencia de muestreo, utilizada durante la adquisición, de 173.61 Hz. El conjunto A (Ojos abiertos) y B (Ojos cerrados) corresponden a registros EEG superficiales, adquiridos de 5 voluntarios sanos. Las señales de los conjuntos A y B fueron registradas utilizando un esquema de localización de electrodos superficiales estandarizado (*ver* Figura 3.1). El conjunto D corresponde a un registro dentro de la zona epileptogénica y el conjunto C a un registro en la formación hipocampal del hemisferio opuesto del cerebro. Los conjuntos C y D contienen sólo actividad medida durante

3.1 Descripción de las señales EEG utilizadas

intervalos libres de convulsiones, mientras el conjunto E sólo contiene actividad convulsiva. La disposición de los electrodos para el registro de las señales EEG en los pacientes se presenta en la Figura 3.2.

Cabe aclarar, que para el propósito de este trabajo, las señales utilizadas fueron submuestreadas en un factor de 2, ya que la información a analizar se encontraba entre 0-40 Hz. Esto con el fin de reducir tiempo de cómputo en el procesamiento.

Además, las señales fueron normalizadas siguiendo

$$f_n = \frac{f - \mu_f}{\sigma_f}, \quad (3.1)$$

donde f_n corresponde a la señal f normalizada, μ_f es el valor medio de f y σ_f la desviación estándar de f . Esta normalización se hace con el fin de comparar señales de la misma naturaleza.

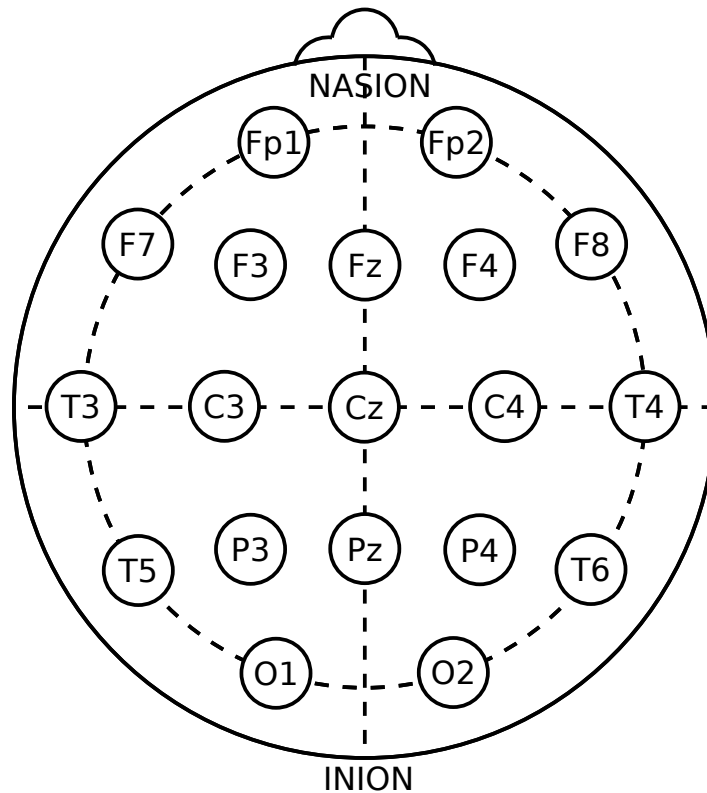


Figura 3.1: Esquema de localización de electrodos superficiales de acuerdo al sistema internacional 10-20. Las señales de los conjuntos A y B fueron tomadas de todos los electrodos representados. Adaptado de [61].

3.1 Descripción de las señales EEG utilizadas

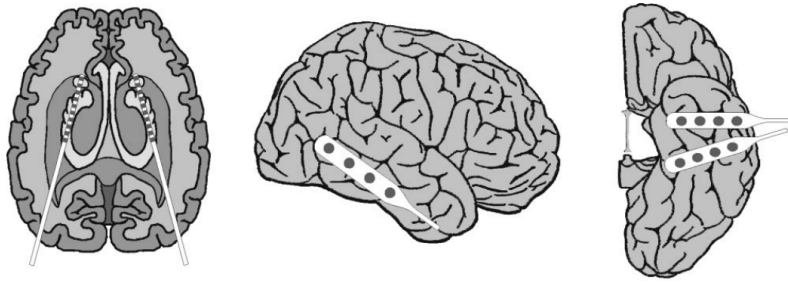


Figura 3.2: Esquema de electrodos implantados en forma intracraneal para evaluación prequirúrgica de pacientes epilépticos. Los electrodos de profundidad fueron implantados simétricamente dentro de las formaciones hipocámpales (izquierda). Las señales de los conjuntos C y D fueron tomadas de todos los contactos del respectivo electrodo. Los electrodos de gaza fueron implantados en las regiones basal y lateral (medio y derecha) del neocórtex. Las señales del conjunto E fueron tomadas de todos los electrodos representados. Tomado de [3].

En la Figura 3.3 se muestran algunas señales EEG en el dominio del tiempo correspondiente a: un individuo sano (A), un paciente durante un intervalo libre de convulsión (D), y un paciente durante actividad convulsiva (E). Se aprecia de esta figura las diferentes dinámicas asociadas a estas señales, algo que es de interés analizar dada la información que aportaría en el entendimiento del cerebro.

3.1 Descripción de las señales EEG utilizadas

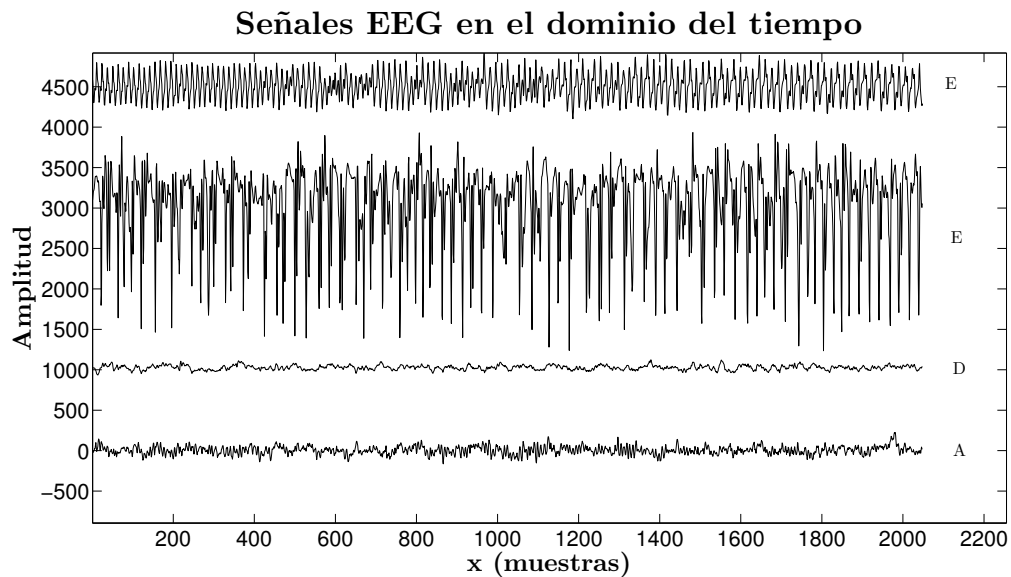


Figura 3.3: Señales EEG en el dominio del tiempo de un individuo sano (A), un paciente durante un intervalo libre de convulsión (D) y un paciente durante actividad convulsiva (E).

En las figuras 3.4 a 3.7 se muestra la DWV de las señales mostradas en la Figura 3.3. En la Figura 3.4 se muestra la DWV de la señal EEG de un individuo sano (A). La Figura 3.5 muestra la DWV de la señal EEG de un paciente en un intervalo libre de convulsión (D).

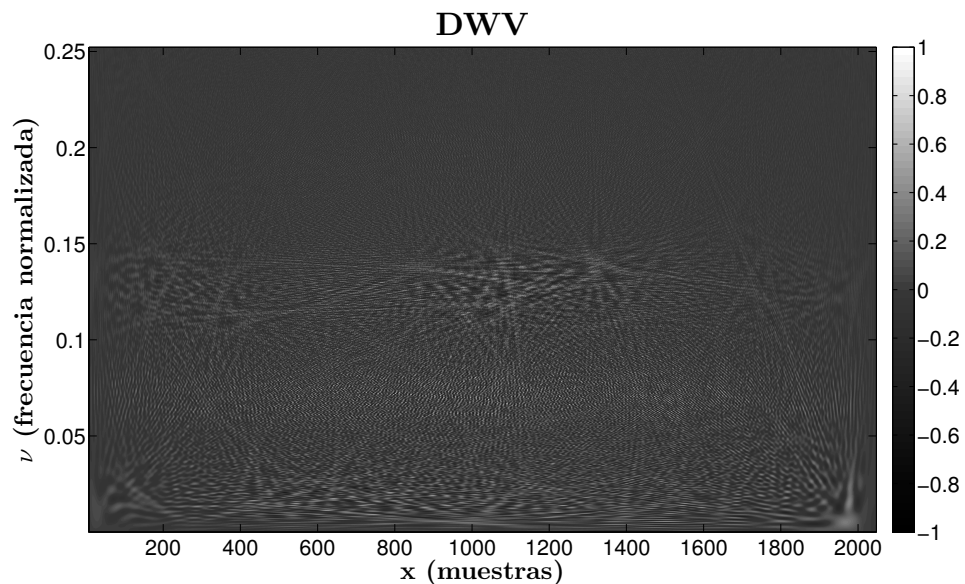


Figura 3.4: DWV de la señal EEG de un individuo sano.

3.1 Descripción de las señales EEG utilizadas

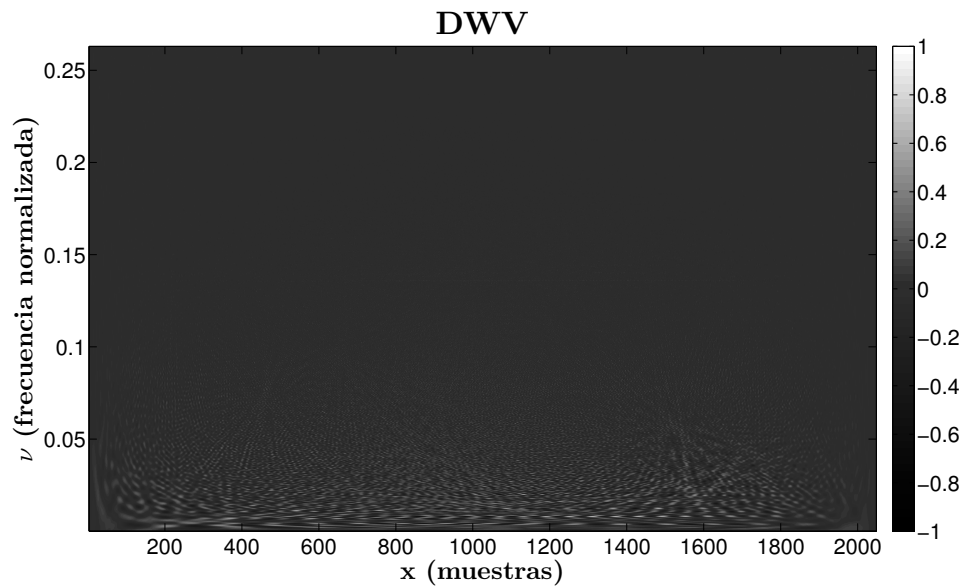


Figura 3.5: DWV de la señal EEG de un paciente adquirida en un intervalo libre de convulsión.

Las figuras 3.6 y 3.7 muestran la DWV de la señal EEG de pacientes epilépticos durante actividad convulsiva (E). En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se nota una alta entropía de la señal, sus componentes se notan algo dispersas, a diferencia de lo que se observa en la Figura 3.7, donde se refleja una tendencia clara en el comportamiento de la señal.

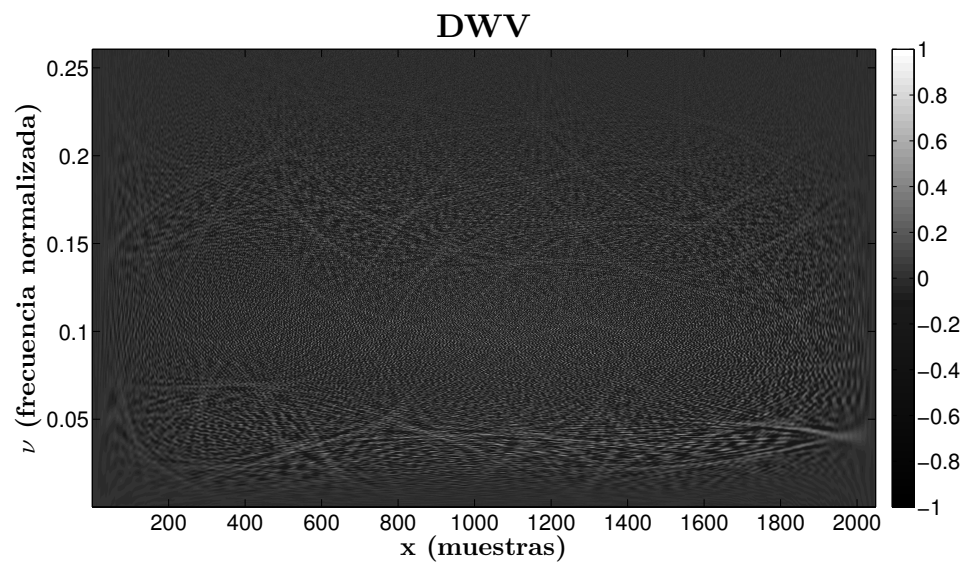


Figura 3.6: DWV de la señal EEG de un paciente adquirida durante una convulsión.

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

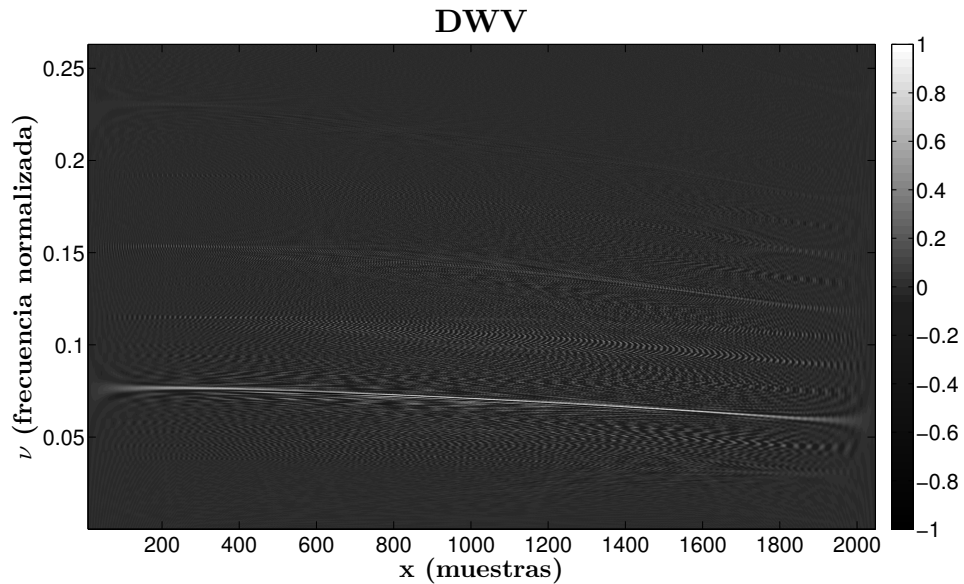


Figura 3.7: DWV de la señal EEG de un paciente adquirida durante una convulsión.

Esta tendencia observada en la Figura 3.7 es la que permite asociar que este tipo de señal guarda relación con el concepto de α -estacionariedad.

3.2. Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

Las señales EEG sobre las cuales se obtuvieron resultados destacables, corresponden a señales tomadas de pacientes epilépticos durante actividad convulsiva, conjunto E.

Por medio de las herramientas descritas anteriormente con base en el análisis fraccionario, se mostrará que algunas señales EEG de pacientes epilépticos, registradas durante actividad convulsiva, se ajustan a lo que previamente se define como una señal aleatoria α -estacionaria en sentido amplio. El número total de señales registradas en pacientes durante un evento de convulsión corresponde a 100, las cuales fueron tomadas de 5 pacientes. No se tiene información acerca de la señal que corresponde a cada paciente, ya que según nos manifestó el autor, para el propósito inicial por el cual fueron analizadas estas señales, esta información no se requería. Además, téngase en cuenta que los procedimientos aquí descritos, se llevan a cabo con la señal analítica, por lo que la señal en el dominio del tiempo corresponde a la parte real de esta.

En la Figura 3.8 se muestran algunas de las señales en el dominio del tiempo, las cuales

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

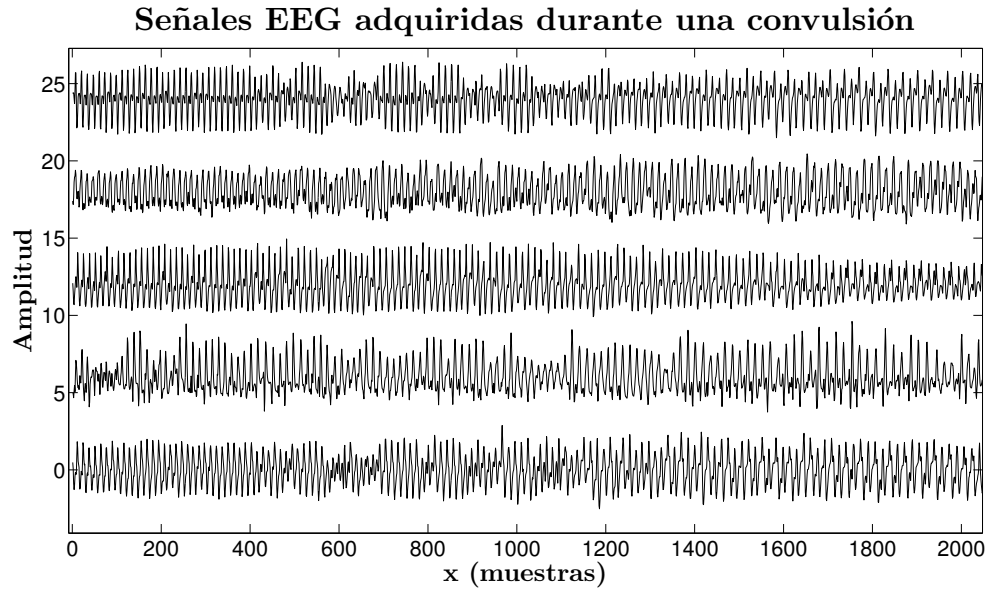


Figura 3.8: Señales EEG en el dominio del tiempo, las cuales exhiben α -estacionariedad.

exhiben el comportamiento mostrado en la Figura 3.7. Aproximando este conjunto de 20 realizaciones como una señal aleatoria S , se obtiene su DWV mediante la ecuación $W_S(x, \nu) = E\{W_s(x, \nu)\}$, siendo S la señal aleatoria y s sus realizaciones. Este resultado es mostrado en la Figura 3.9, donde se observan dos componentes, una de mayor intensidad que otra y que marcan una tendencia similar. En la Figura 3.10 se muestra la densidad espectral de potencia de la señal S , obtenido a partir del resultado de la Figura 3.9 mediante la Ecuación (1.13). Dado este comportamiento, se plantea la hipótesis que existe un α asociado a la α -DWV de la señal S , para el cual se cumple la noción de α -estacionariedad en un sentido amplio.

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

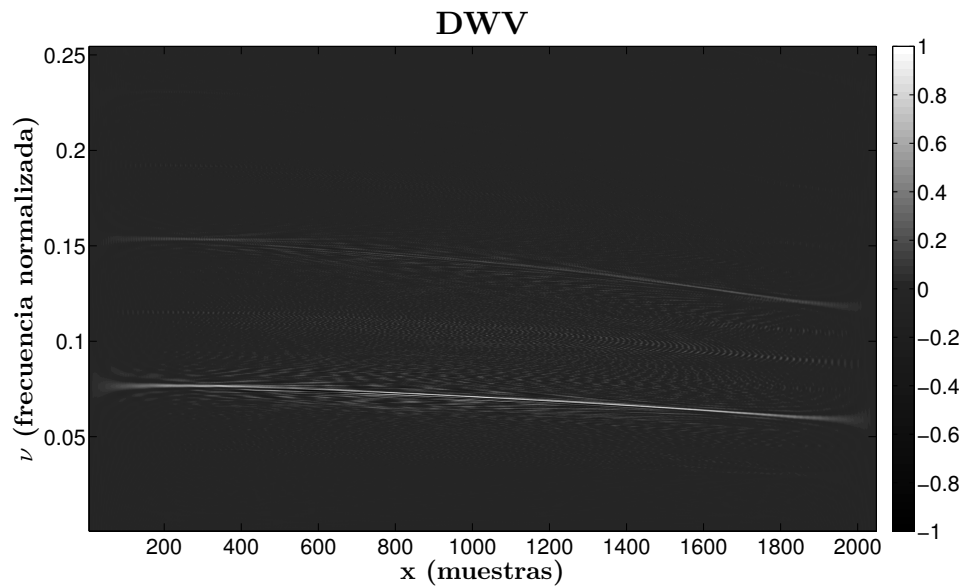


Figura 3.9: DWV de la señal aleatoria S .

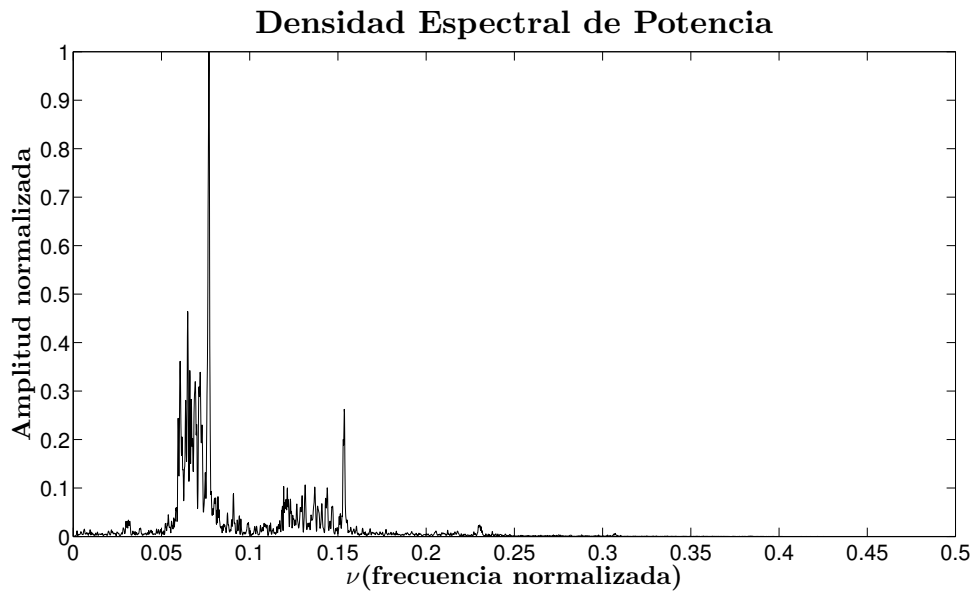


Figura 3.10: Densidad espectral de potencia de la señal aleatoria S .

A continuación se realiza la búsqueda del parámetro α en un procedimiento de prueba y error, pero únicamente sobre la componente que resalta en la Figura 3.9, la cual contiene aproximadamente un 67% de la energía de la señal aleatoria S , valor calculado a partir del resultado mostrado en la Figura 3.10. Esta búsqueda se hace sobre una de las realizaciones de

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

la señal S , luego, encontrado este valor de α , se lleva a cabo un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución fraccionaria, propuesto en el capítulo anterior. Para extraer esa componente de interés, este mismo filtrado es aplicado a todas las realizaciones de S , para luego hallar su α -DWV mediante $W_S^\alpha(x, x') = E\{^w W_S^\alpha(x, x')\}$. En la Figura 3.11 se muestra la α -DWV para una realización de S .

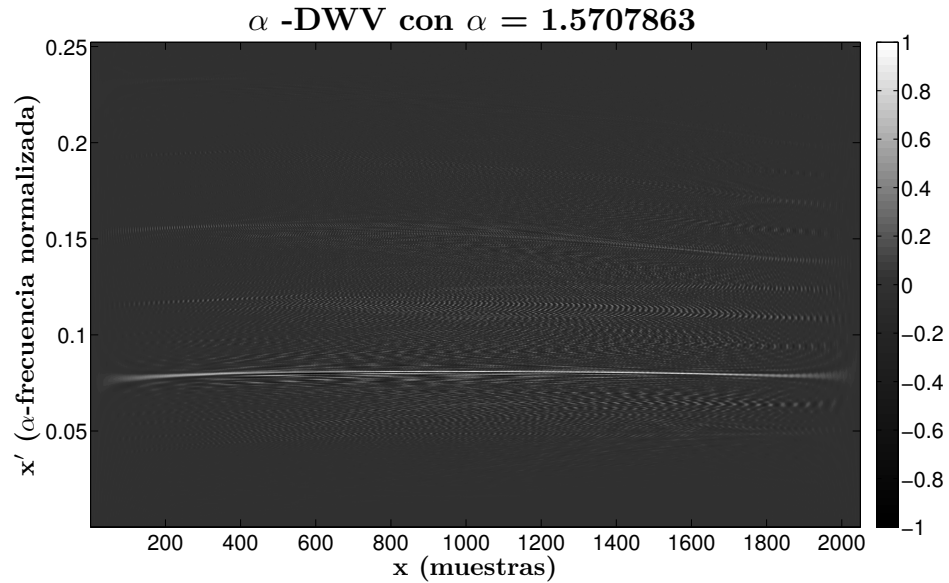


Figura 3.11: α -DWV de la señal EEG adquirida durante una convulsión.

Se observa que para el valor de $\alpha = 1,5707863$ se refleja la noción de α -estacionariedad en la señal S , mostrado anteriormente. Luego de esto, se intenta extraer la componente que se destaca en la señal, esto se hace mediante el filtrado variante en el tiempo propuesto en el capítulo anterior, dado que este filtrado resulta natural para señales que cumplen la noción de α -estacionariedad.

Para realizar el filtrado, se escoge como filtro una señal de la forma $h(x) = e^{-10r^2} e^{i12,8\pi x}$. Dado que la escogencia del filtro para este tipo de filtrado es un problema de estudio, la única característica considerada es que el filtro sea una señal aproximadamente de soporte compacto. En la Figura 3.12 se muestra la α -DWV de la señal h al orden $\alpha = 1,5707863$, para el cual se evidencia la noción de α -estacionariedad de la señal S .

La α -DWV de la señal obtenida luego de filtrar, se muestra en la Figura 3.13, aquí se observa que las componentes no deseadas son reducidas considerablemente.

Luego de filtrar todas las realizaciones de S , se obtiene nuevamente la DWV de S y su densidad espectral de potencia, los cuales se muestran en las figuras 3.14 y 3.15 respectivamente.

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

Aquí se observa que el filtrado realizado logra separar la componente deseada.

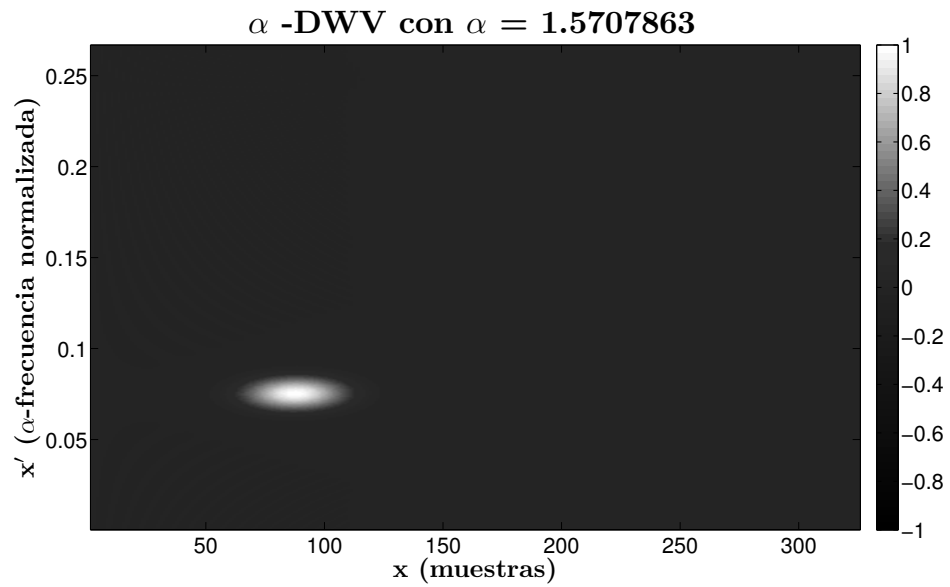


Figura 3.12: α -DWV del filtro.

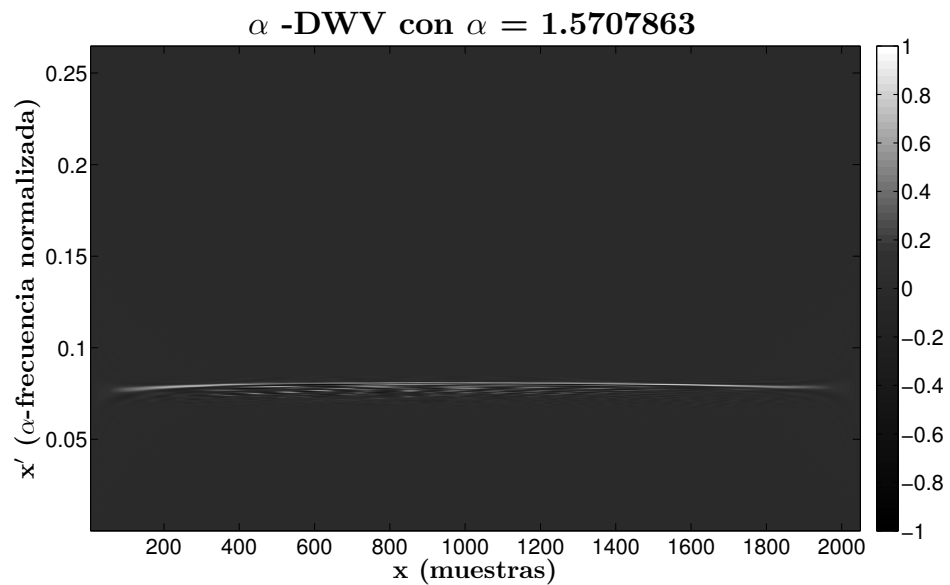


Figura 3.13: α -DWV de la señal EEG adquirida durante una convulsión, luego de ser filtrada.

3.2 Noción de α -estacionariedad y filtrado variante en el tiempo

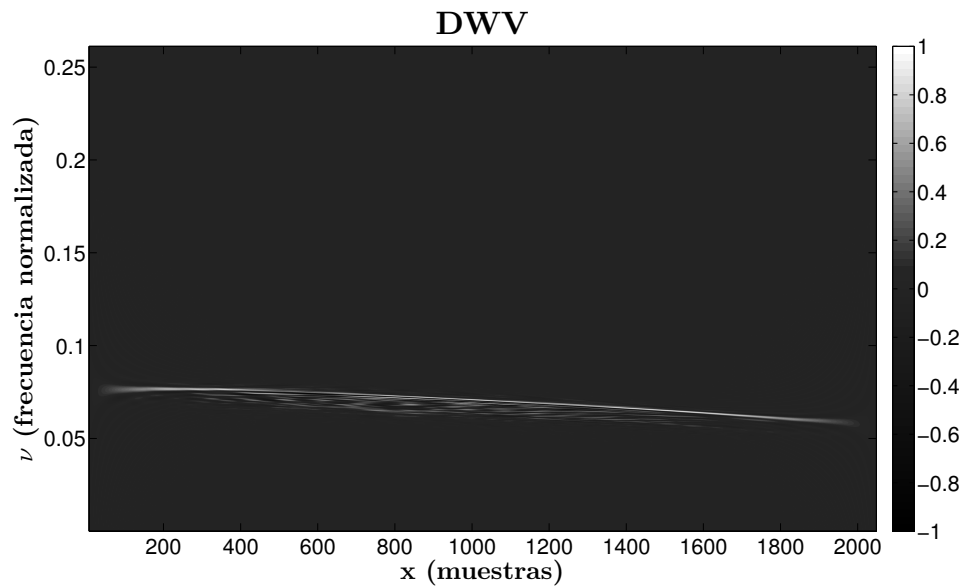


Figura 3.14: DWV de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.

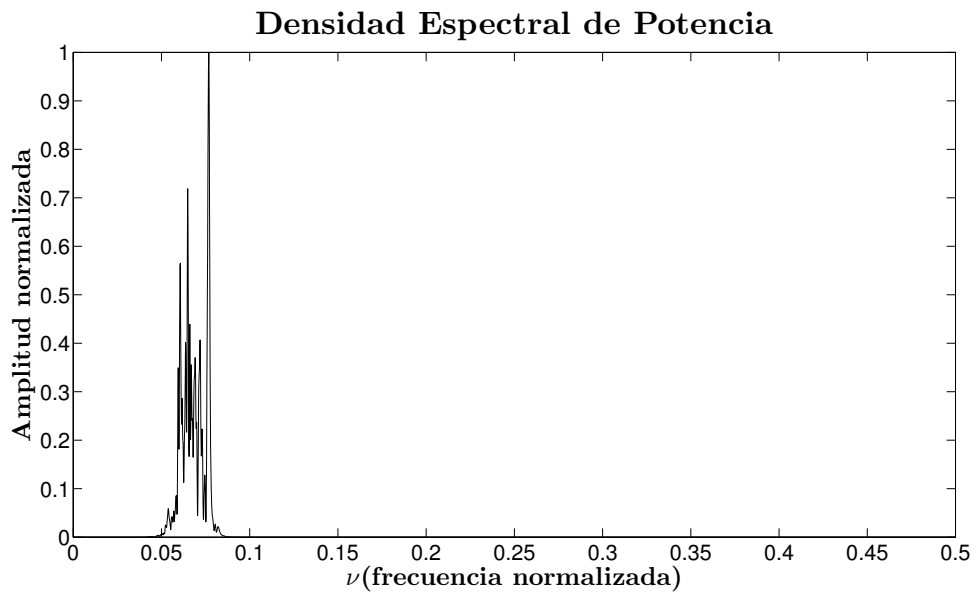


Figura 3.15: Densidad espectral de potencia de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.

Ahora, a partir del procedimiento descrito anteriormente, se obtiene la α -DWV de S , la cual se presenta en la Figura 3.16.

3.3 Características fraccionarias

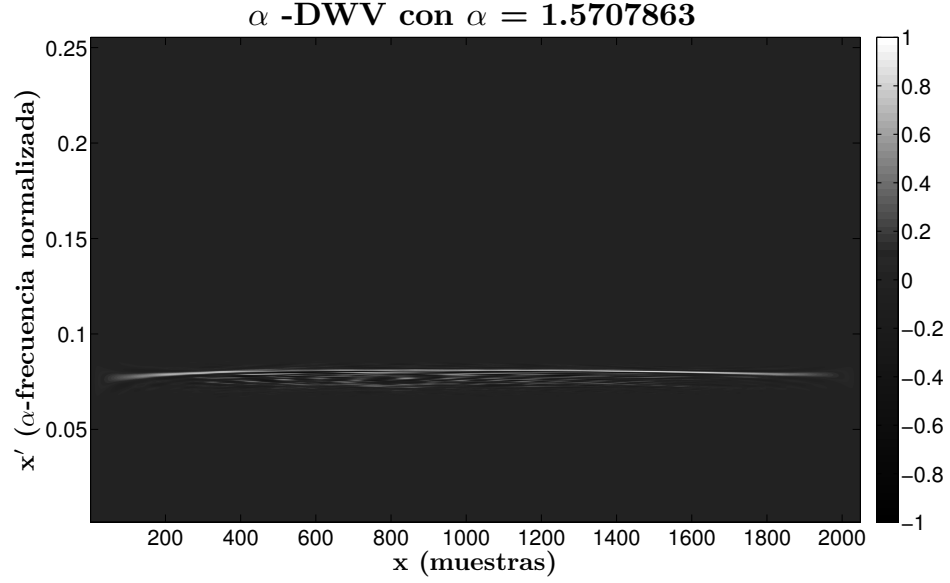


Figura 3.16: α -DWV de la señal S obtenida a partir de sus realizaciones filtradas.

3.3. Características fraccionarias

A partir de los resultados mostrados en la Figura 3.16 se mide $m_{1\alpha} = E \{x'\}$ y $m_{2\alpha} = E \{x'^2\} - (E \{x'\})^2$, que corresponden al primer y segundo momento estadístico en el dominio fraccionario, respectivamente, los cuales corresponden a

$$m_{1\alpha} = E \{x'\} = \frac{1}{\|S_\alpha(x')\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \|S_\alpha(x')\|^2 x' dx', \quad (3.2)$$

y

$$m_{2\alpha} = E \{x'^2\} - (E \{x'\})^2 = \frac{1}{\|S_\alpha(x')\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \|S_\alpha(x')\|^2 x'^2 dx' - (E \{x'\})^2, \quad (3.3)$$

siendo

$$\|S_\alpha(x')\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_S^\alpha(x, x') dx. \quad (3.4)$$

Los valores obtenidos son, $m_{1\alpha} = 0,078193664$ y $m_{2\alpha} = 2,84101757 \times 10^{-5}$. Donde $m_{2\alpha}$ puede ser interpretado como un ancho efectivo de la banda en donde se concentra la señal en la α -DWV. Con esto se tienen dos características fraccionarias asociadas a esta dinámica del

3.3 Características fraccionarias

cerebro; el orden α y $m_{1\alpha}$ asociado con $m_{2\alpha}$.

Con base en estos resultados se pueden plantear varias hipótesis, entre las que se destacan por ejemplo,

- ❖ La noción de α -estacionariedad asociada a la señal estudiada, permitiría caracterizar un tipo de epilepsia, dada su particular dinámica.
- ❖ Si este comportamiento puede registrarse en EEG superficiales adquiridas durante intervalos libre de convulsiones, la α -estacionariedad podría ser una característica complementaria a las ya existentes, útil para diagnosticar la epilepsia.
- ❖ El hallazgo asociado a que la α -estacionariedad se relaciona a procesos que suceden en el cerebro, podría ayudar al entendimiento de este sistema, algo que hoy en día es planteado como un desafío.

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

4.1. Conclusiones Generales

En este trabajo se demostró que la α -DWV puede ser formulada en términos de la densidad espectral de potencia fraccionaria. Con esto, se estudian los efectos de la convolución fraccionaria en esta representación. Por lo tanto, se demuestra que $W_{h *_{\alpha} g}(x, \nu) = W_h *_{\alpha} W_g$, corresponde a una convolución entre W_h y W_g a lo largo de una trayectoria oblicua, en el espacio tiempo frecuencia, orientada por el ángulo α . Luego, con base en las propiedades de la convolución fraccionaria y su relación con la DWV ha sido propuesto un filtrado variante en el tiempo, aplicable para señales no estacionarias. El hecho de que el filtrado se basa en una operación de convolución puede que no sea novedoso, sin embargo, los resultados muestran que el parámetro α proporciona una manera de implementar técnicas de filtrado a lo largo de diferentes trayectorias en el espacio $t - f$. Esta característica hace el filtrado propuesto muy apropiado para el tratamiento, por ejemplo, de señales de tipo chirp tales como las encontradas en aplicaciones de radar.

Aunque el filtrado representa una convolución a lo largo de un eje oblicuo en el espacio $t - f$, es importante aclarar que la convolución fraccionaria se realiza en el dominio del tiempo y no directamente en el dominio de la DWV. La importancia de esto radica en el hecho de que esto asegura que las señales resultantes respetan el principio de incertidumbre de Heisenberg-Gabor.

El filtrado propuesto es directo para las señales que exhiben α -estacionariedad, sin embargo, su aplicación no se reduce a este tipo de señales, como se ilustra en los ejemplos. Así, en

4.2 Trabajo Futuro

el caso de señales cuyas DWVs corresponden a trayectorias curvas, el tratamiento presentado aquí puede ser adaptado mediante la implementación de α , como una función del tiempo.

El filtrado variante en el tiempo que se propone en este trabajo, que está soportado en las propiedades de la α -DWV y la traslación fraccionaria en asociación con la convolución fraccionaria, constituye la base para un análisis de señales mediante la transformada de Fourier fraccionaria.

En este trabajo se muestra la pertinencia del análisis de Fourier fraccionario en el estudio de una de las dinámicas asociadas al cerebro relacionadas con la epilepsia. Aunque no se obtienen resultados concluyentes con respecto al aspecto médico, se destaca el hecho de que unas herramientas teóricas bien fundamentadas, permiten obtener características diferenciadoras de un conjunto de señales bien particular. Además, el filtrado variante en el tiempo propuesto es implementado sobre estas señales, que junto a los otros resultados dan soporte a la idea que los desarrollos teóricos presentados en este trabajo puedan ser utilizados para analizar señales reales y no quedan reducidos únicamente a una descripción matemática.

4.2. Trabajo Futuro

Un desarrollo importante es el estudio de los filtros que pueden ser utilizados en la metodología de filtrado que se propone en este trabajo.

Es de interés también, explorar el uso de algoritmos de optimización para determinar el parámetro α , lo que daría paso a un enfoque de filtrado óptimo variante en el tiempo. Esto es un trabajo de gran interés para diversas aplicaciones, tales como el procesamiento de señales de radar.

Se propone profundizar en la idea de utilizar el análisis de Fourier fraccionario para describir sistemas, por ejemplo, trabajar en el desarrollo teórico que permita entender claramente, qué tipo de sistemas pueden ser caracterizados mediante una convolución fraccionaria.

Otro trabajo a considerar, consiste en estudiar la posibilidad de implementar el filtrado variante en el tiempo en tiempo real, mediante una determinada configuración de *Hardware*, analizando diferentes aspectos tales como; tiempos de procesamiento, complejidad y su viabilidad para diversas aplicaciones donde pueda resultar de interés.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AL-OMAR, S., KAMALI, W., KHALIL, M., AND DAHER, A. Classification of EEG signals to detect epilepsy problems. In *2013 2nd International Conference on Advances in Biomedical Engineering* (Sept. 2013), Ieee, pp. 5–8.
- [2] ALMEIDA, L. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transactions on Signal Processing* 42, 11 (1994), 3084–3091.
- [3] ANDRZEJAK, R., LEHNERTZ, K., MORMANN, F., RIEKE, C., DAVID, P., AND ELGER, C. Indications of nonlinear deterministic and finite-dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state. *Physical Review E* 64, 6 (Nov. 2001), 061907.
- [4] ANDRZEJAK, R. G., SCHINDLER, K., AND RUMMEL, C. Nonrandomness, nonlinear dependence, and nonstationarity of electroencephalographic recordings from epilepsy patients. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 86 (2012).
- [5] ANSARI-ASL, K., BELLANGER, J. J., BARTOLOMEI, F., WENDUNG, F., AND SENHADJI, L. Time-frequency characterization of interdependencies in nonstationary signals: Application to epileptic EEG. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 52 (2005), 1218–1226.
- [6] AZIM, M. R., HAQUE, S. A., AMIN, M. S., AND LATIF, T. Analysis of EEG and EMG signals for detection of sleep disordered breathing events. In *ICECE 2010 - 6th International Conference on Electrical and Computer Engineering* (2010), pp. 646–649.
- [7] BOASHASH, B., BOUBCHIR, L., AND AZEMI, G. Time-frequency signal and image processing of non-stationary signals with application to the classification of newborn EEG abnormalities. In *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, ISSPIT 2011* (2011), pp. 120–129.

BIBLIOGRAFÍA

- [8] CHE WAN FADZAL, C. W. N. F., MANSOR, W., LEE, Y. K., MOHAMAD, S., MOHAMAD, N., AND AMIRIN, S. Comparison between characteristics of eeg signal generated from dyslexic and normal children. In *2012 IEEE-EMBS Conference on Biomedical Engineering and Sciences, IECBES 2012* (2012), pp. 843–846.
- [9] CHEN, L., ZHAO, E., WANG, D., HAN, Z., ZHANG, S., AND XU, C. Feature extraction of EEG signals from epilepsy patients based on Gabor Transform and EMD decomposition. In *Proceedings - 2010 6th International Conference on Natural Computation, ICNC 2010* (2010), vol. 3, pp. 1243–1247.
- [10] CHINCHILLA, L., SIERRA, D. A., AND TORRES, R. A time-variant filtering approach for non-stationary random signals based on the fractional convolution. *Signal Processing 119* (2016), 92 – 101.
- [11] CHINCHILLA, L., TORRES, R., AND SIERRA, D. A. . A time-variant filtering approach for non-stationary random signals based on the fractional convolution. *Biomedical Signal Processing and Control*, submitted, 2015.
- [12] COHEN, L. *TIME-FREQUENCY ANALYSIS*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [13] COHEN, L. *Time-frequency analysis / Leon Cohen*. Prentice Hall PTR Englewood Cliffs, N.J, 1995.
- [14] DURAK, L., AND ALDIRMAZ, S. Adaptive fractional Fourier domain filtering. *Signal Processing 90*, 4 (Apr. 2010), 1188–1196.
- [15] ERDEN, M., KUTAY, M., AND OZAKTAS, H. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing 47*, 5 (1999), 1458–1462.
- [16] FISHER, R., ACEVEDO, C., AND ARZIMANOGLU, A. An Operational Clinical Definition of Epilepsy. *Epilepsia 55*, 4 (2014), 475–482.
- [17] GANDHI, V. , ARORA, V. ; BEHERA, L. ; PRASAD, G. ; COYLE, D.H. ; MCGINITY, T. A Recurrent Quantum Neural Network model enhances the EEG signal for an improved brain-computer interface. In *Assisted Living 2011, IET Seminar on* (2011), pp. 1–6.

BIBLIOGRAFÍA

- [18] GUERRERO-MOSQUERA, C. Dimensionality reduction for EEG classification using Mutual Information and SVM. In *Machine Learning for Signal Processing (MLSP), 2011 IEEE International Workshop on* (2011), pp. 0–5.
- [19] GUERRERO-MOSQUERA, C. AND VERLEYSEN, M. AND VAZQUEZ, A.N. EEG feature selection using mutual information and support vector machine: A comparative analysis. In *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2010 Annual International Conference of the IEEE* (Aug 2010), pp. 4946–4949.
- [20] HILDEBRAND, F. *Advanced Calculus for Engineers*. New York: Prentice-Hall, 1949.
- [21] HLAWATSCH, F., AND BOUDREAUX-BARTELS, G. Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE Signal Processing Magazine* 9, 2 (Apr. 1992), 21–67.
- [22] HLAWATSCH, F., MATZ, G., KIRCHAUER, H., AND KOZEK, W. Time-frequency formulation, design, and implementation of time-varying optimal filters for signal estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on* 48, 5 (May 2000), 1417–1432.
- [23] JHON D. ENDERLE, J. D. B. *INTRODUCTION TO BIOMEDICAL ENGINEERING*, 3 ed. ELSEIVIER, 2012.
- [24] KIGUCHI, K., AND HAYASHI, Y. Motion estimation based on EMG and EEG signals to control wearable robots. In *Proceedings - 2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, SMC 2013* (2013), pp. 4213–4218.
- [25] KUTAY, M., OZAKTAS, H., ANKAN, O., AND ONURAL, L. Optimal filtering in fractional fourier domains. *Signal Processing, IEEE Transactions on* 45, 5 (May 1997), 1129–1143.
- [26] LIN, Q., RAN, T., SIYONG, Z., AND YUE, W. Adaptive time-varying filter for linear fm signal in fractional fourier domain. In *Signal Processing, 2002 6th International Conference on* (Aug 2002), vol. 2, pp. 1425–1428 vol.2.
- [27] LING, B. W.-K., HO, C. Y.-F., YANG, Z., SUBRAMANIAM, S. R., GEORGAKIS, A., AND DAI, Q. Mask operations in discrete fractional Fourier transform domains with nearly white real valued wide sense stationary output signals. *Digital Signal Processing* 27 (Apr. 2014), 57–68.

BIBLIOGRAFÍA

- [28] LOHMANN, A. W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A* 10 (oct 1993), 2181 – 2186.
- [29] LÜDERS, H. O., NAJM, I., NAIR, D., WIDDESS-WALSH, P., AND BINGMAN, W. The epileptogenic zone: general principles. *Epileptic disorders : international epilepsy journal with videotape* 8 Suppl 2, August (Aug. 2006), S1–9.
- [30] MEIER, R., DITTRICH, H., SCHULZE-BONHAGE, A., AND AERTSEN, A. Detecting epileptic seizures in long-term human EEG: a new approach to automatic online and real-time detection and classification of polymorphic seizure patterns. *Journal of clinical neurophysiology : official publication of the American Electroencephalographic Society* 25 (2008), 119–131.
- [31] MIAH, K. H., AND POTTER, D. K. Geophysical Signal Parameterization and Filtering Using the fractional Fourier Transform. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7, 3 (Mar. 2014), 845–852.
- [32] MORBIDI, F., GARULLI, A., PRATTICHIZZO, D., RIZZO, C., AND ROSSI, S. Application of Kalman filter to remove TMS-induced artifacts from EEG recordings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 16 (2008), 1360–1366.
- [33] NAMIAS, V. The fractional order transform and its application to quantum mechanics. *Institute of Mathematics and its Applications* 25, 3 (1980), 241–265.
- [34] OCAK, H. Optimal classification of epileptic seizures in EEG using wavelet analysis and genetic algorithm. *Signal Processing* 88, 7 (July 2008), 1858–1867.
- [35] OPPENHEIM, A., WILLSKY, A., AND NAWAB, S. *Signals and Systems*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice-Hall International, 1997.
- [36] ORHAN, U., HEKIM, M., OZER, M., AND PROVAZNIK, I. Epilepsy diagnosis using probability density functions of EEG signals. In *2011 International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications* (2011), pp. 626–630.
- [37] OZAKTAS, H., ARIKAN, O., KUTAY, M., AND BOZDAGT, G. Digital computation of the fractional Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing* 44, 9 (1996), 2141–2150.

BIBLIOGRAFÍA

- [38] OZAKTAS, H., BARSHAN, B., ONURAL, L., AND MENDLOVIC, D. Filtering in fractional Fourier domains and their relation to chirp transforms. In *Proceedings of MELECON '94. Mediterranean Electrotechnical Conference* (1994), IEEE, pp. 77–79.
- [39] OZAKTAS, H. M., AND MENDLOVIC, D. Fractional Fourier optics. *J. Opt. Soc. Am. A* 12 (Apr. 1995), 743 – 751.
- [40] PELLAT-FINET, P., AND BONNET, G. Fractional order Fourier transform and Fourier optics. *Opt. Comm.* 111 (1994), 141 – 154.
- [41] POP-JORDANOVA N, P.-K. D. Autism - genetics, electrophysiology and clinical syndromes. *Prilozi* 35, 1 (2014), 133–46.
- [42] QI, W. EOG Artifacts Removal in EEG Measurements for Affective Interaction with Brain Computer Interface. In *2012 Eighth International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing* (2012), pp. 471–475.
- [43] RAMARAJU, P. V., ANOGJNAAURORA, N., AND RAO, V. M. Relevance of wavelet transform for taxonomy of EEG signals. In *ICECT 2011 - 2011 3rd International Conference on Electronics Computer Technology* (2011), vol. 3, pp. 466–470.
- [44] RAN, Q., AND YUE, W. Adaptive Filtering in Fractional Fourier Domain. In *2005 IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications* (2005), vol. 2, IEEE, pp. 1033–1036.
- [45] SALIS, C., MALISSOVAS, A., BIZOPOULOS, P., TZALLAS, A., ANGELIDIS, P., AND TSALIKAKIS, D. Denoising simulated eeg signals: A comparative study of emd, wavelet transform and kalman filter. In *Bioinformatics and Bioengineering (BIBE), 2013 IEEE 13th International Conference on* (Nov 2013), pp. 1–4.
- [46] SEJDIĆ, E., DJUROVIĆ, I., AND STANKOVIĆ, L. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments. *Signal Processing* 91, 6 (June 2011), 1351–1369.
- [47] SHEN, C.-P., CHAN, C.-M., LIN, F.-S., CHIU, M.-J., LIN, J.-W., KAO, J.-H., CHEN, C.-P., AND LAI, F. Epileptic Seizure Detection for Multichannel EEG Signals with Support Vector Machines. In *2011 IEEE 11th International Conference on Bioinformatics and Bioengineering* (2011), pp. 39–43.

BIBLIOGRAFÍA

- [48] SIERRA, D. A. Extracción de Características Fractales de la Señal de Variabilidad de Frecuencia Cardíaca en Pacientes con Accidente Cerebrovascular y Análisis de su Viabilidad. In *XVI SIMPOSIO DE TRATAMIENTO DE SEÑALES, IMÁGENES Y VISIÓN ARTIFICIAL* (2011), pp. 1–7.
- [49] SUBRAMANIAM, S. R., HON, T. K., GEORGAKIS, A., AND PAPADAKIS, G. Fractional fourier-based filter for denoising elastograms. *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Annual Conference 2010* (Jan. 2010), 4028–31.
- [50] TANAKA H, H. K. Electroencephalography, a potential biomarker for early diagnosis of dementia. *Nihon Rinsho* 72, 4 (2014), 675–80.
- [51] TANEI, N., FUNASE, A., NAKATANI, H., YAGI, T., CICHOCKI, A., AND TAKUMI, I. Relationship between saccade to EEG signals in time-frequency domain. In *Proceedings of the 3rd International IEEE EMBS Conference on Neural Engineering* (2007), pp. 362–365.
- [52] TORRES, R., PELLAT-FINET, P., AND TORRES, Y. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. *Signal Processing* 90 (June 2010), 1976 – 1984.
- [53] TORRES, R., AND TORRES, E. Fractional fourier analysis of random signals and the notion of α -stationarity of the wigner-ville distribution. *Signal Processing, IEEE Transactions on* 61, 6 (2013), 1555–1560.
- [54] TORRES, R., AND TORRES, E. Fractional Fourier Analysis of Random Signals and the Notion of α -Stationarity of the Wigner - Ville Distribution. *IEEE Transactions on Signal Processing* 61, 6 (Mar. 2013), 1555–1560.
- [55] TU, T., XIN, Y., GAO, X., AND GAO, S. Chirp-modulated visual evoked potential as a generalization of steady state visual evoked potential. *Journal of neural engineering* 9, 1 (Feb. 2012), 016008.
- [56] TZALLAS, A. T., OIKONOMOU, V. P., AND FOTIADIS, D. I. Epileptic spike detection using a Kalman filter based approach. In *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference* (2006), vol. 1, pp. 501–504.

BIBLIOGRAFÍA

- [57] TZALLAS, A. T., TSIPOURAS, M. G., AND FOTIADIS, D. I. Epileptic seizure detection in EEGs using time-frequency analysis. *IEEE transactions on information technology in biomedicine : a publication of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society* 13, 5 (Sept. 2009), 703–10.
- [58] VARNER, J., ROHRBAUGH, J. W., SIREVAAG, E., PACKINGHAM, K., AND STERN, J. Time-frequency signal analysis applied to eeg signals associated with eye blinks. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 1996. Bridging Disciplines for Biomedicine. Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE* (Oct 1996), vol. 3, pp. 1013–1014 vol.3.
- [59] VARSAVSKY, A., MAREELS, I., AND COOK, M. *Epileptic Seizures and the EEG: Measurement, Models, Detection and Prediction*. Taylor & Francis, 2010.
- [60] WALTERS-WILLIAMS, J., AND LI, Y. Comparison of extended and unscented Kalman filters applied to EEG signals. In *2010 IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering, CME2010* (2010), pp. 45–51.
- [61] WIKIPEDIA, T. F. E. 10–20 system (eeg). [Online; accessed 28-April-2015].
- [62] YE, N., WANG, X., AND SUN, Y. Independent component analysis and time-frequency method for noisy eeg signal analysis. In *Signal Processing, 2006 8th International Conference on* (2006), vol. 4, pp.–.
- [63] ZALEVSKY, Z., AND MENDLOVIC, D. Fractional Wiener filter. *Applied optics* 35, 20 (July 1996), 3930–6.
- [64] ZAYED, A. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters* 5, 4 (Apr. 1998), 101–103.
- [65] ZHAI, M.-Y. Seismic data denoising based on the fractional Fourier transformation. *Journal of Applied Geophysics* 109 (Oct. 2014), 62–70.
- [66] ZHANG, F., TAO, R., AND WANG, Y. Matched Filtering in Fractional Fourier Domain. In *2012 Second International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control* (Dec. 2012), IEEE, pp. 1–4.
- [67] ZHANG, Y., ZHANG, Q., AND WU, S. Biomedical signal detection based on fractional fourier transform. In *Information Technology and Applications in Biomedicine, 2008. ITAB 2008. International Conference on* (May 2008), pp. 349–352.

ANEXOS

ANEXO A: Demostración de Ecuación (2.21)

Para $f(x) = [h *_{\alpha} g](x)$, de (1.5) y (1.7) se encuentra que

$$\mathcal{F}_{\alpha}[f](x') = f_{\alpha}(x') = h_{\alpha}(x')g_{\alpha}(x')e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}. \quad (1)$$

Reemplazando (1) en (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} W_f^{\alpha}(x, x') &= |C_{\alpha}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi z x' \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} h_{\alpha}\left(x' + \frac{z}{2}\right) g_{\alpha}\left(x' + \frac{z}{2}\right) e^{-i\pi\left(x' + \frac{z}{2}\right)^2 \cot \alpha} \\ &\quad \times \overline{h_{\alpha}\left(x' - \frac{z}{2}\right) g_{\alpha}\left(x' - \frac{z}{2}\right) e^{i\pi\left(x' - \frac{z}{2}\right)^2 \cot \alpha}} dz \\ &= |C_{\alpha}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\alpha}\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{h_{\alpha}\left(x' - \frac{z}{2}\right)} \\ &\quad \times g_{\alpha}\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{g_{\alpha}\left(x' - \frac{z}{2}\right)} e^{-4i\pi x' z \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Usando

$$H_{\alpha}(x', z) = h_{\alpha}\left(x' + \frac{z}{2}\right) \overline{h_{\alpha}\left(x' - \frac{z}{2}\right)}, \quad (3)$$

y, con base en (2.9) y (1.5) se escribe

$$|C_{\alpha}|^2 H_{\alpha}(x', z) e^{-2i\pi z \left(x' - \frac{z}{2}\right) \cot \alpha} = \mathcal{F}_{\alpha} \left[\overline{C_{\alpha}} W_h^{\alpha}(x, x') e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \right], \quad (4)$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned} H_{\alpha}(x', z) &= e^{2i\pi z \left(x' - \frac{z}{2}\right) \cot \alpha} e^{i\pi z^2 \cot \alpha} \times \int_{-\infty}^{\infty} W_h^{\alpha}(x, x') e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-2i\pi x z / \sin \alpha} dx \\ &= e^{2i\pi x' z \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} W_h^{\alpha}(x, x') e^{-2i\pi x z / \sin \alpha} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora, usando (5) en (2)

$$\begin{aligned}
W_f^\alpha(x, x') &= |C_\alpha|^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} W_h^\alpha(y, x') W_g^\alpha(v, x') e^{4i\pi x' z \cot \alpha} e^{-2i\pi y z / \sin \alpha} e^{-2i\pi v z / \sin \alpha} \\
&\quad \times e^{-4i\pi x' z \cot \alpha} e^{2i\pi x z / \sin \alpha} dz dy dv \\
&= |C_\alpha|^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} W_h^\alpha(y, x') W_g^\alpha(v, x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi(y+v-x)z / \sin \alpha} dz dy dv, \tag{6}
\end{aligned}$$

luego usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi(y+v-x)z / \sin \alpha} dz = |\sin \alpha| \delta(y + v - x), \tag{7}$$

se llega a

$$W_f^\alpha(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} W_h^\alpha(x - v, x') W_g^\alpha(v, x') dv. \tag{8}$$

ANEXO B: Algoritmos

A continuación se presentan los algoritmos desarrollados para obtener la α -DWV y la DWV, llevar a cabo la convolución fraccionaria entre otros. Cabe aclarar que estos algoritmos fueron propuestos en el lenguaje de programación Matlab.

B1: Algoritmo para obtener la α -DWV($aWV2$)

```
function y=aWV2(x,a,printf,language)

% alpha Wigner--Ville Algorithm

% function to obtain alpha-WVD where WVD is a particular case, for a=1. The
% variables are:
%
% x--> Input analyitc signal
%
% a--> Order of the alpha-WVD
%
% printf--> Option to print. 1 if you want to print the alpha-WVD,
%           otherwise won't print.
%
% lenguaje--> Languaje of labels. 'es' for Spanish languaje, and
%           'en' for English languaje.
%

N=length(x);

x1=x;
```

```

x2=x(N:-1:1)';

alpha=a*pi/2;

Maux=2*N-1;

M=abs(round(Maux/sin(alpha)));

if mod(M,2)==0

    M=M+1;
    dif=M-Maux;

    az=dif/2;

else

    dif=M-Maux;

    az=dif/2;

end

limit=(M-1)/2;
m=0:M-1;

maux=zeros(M,N);
maux2=zeros(M,N);

vall=exp(4i*pi*m*cot(alpha));
k=0:M-1;

aux=ones(1,M);

for n=0:N-1

```

```

x1_aux=[zeros(1,N-1-n+az) x1 zeros(1,n+az)].*(aux);
x2_aux=[zeros(1,n+az) (x2).' zeros(1,N-1-n+az)];

maux(:,n+1)=x1_aux.*x2_aux;
maux2(:,n+1)=exp(2i*pi*limit.*k/M).*(exp(-4i*pi*limit*n*cot(alpha)));

    aux=val1.*aux;

end

if printf==1

    y=real(maux2.*fft(maux));

    axisx=1:N;
    axisy=1:M;

    fnorm=abs(max(max(y(axisy,axisx))));

    figure,imagesc(axisx,axisy/(2*M),y/fnorm),axis 'xy';

    if a~=1

        if strcmp(language,'en')

            title(['\bf $\mathbf{\alpha}$ -WVD with $\mathbf{\alpha}$ = ',...
                num2str(alpha,8)],'FontSize',30,'Interpreter','latex');
            xlabel('\bf $\mathbf{x}$ (samples)','FontSize',24,...
                'Interpreter','latex'),...
            ylabel('\bf $\mathbf{x}^{\prime}$...
                (normalized $\mathbf{\alpha}$-frequency)'...
                ,'FontSize',24,'Interpreter','latex');
        else

            title(['\bf $\mathbf{\alpha}$ -DWV con $\mathbf{\alpha}$ = ',...
                num2str(alpha,8)],'FontSize',30,'Interpreter','latex');

```

```

        xlabel('\bf $\mathbf{x}$ (muestras)', 'FontSize', ...
        24, 'Interpreter', 'latex'), ...
        ylabel('\bf $\mathbf{x}^{\prime}$ ...
        ($\mathbf{\alpha}$-frecuencia normalizada)', ...
        'FontSize', 24, 'Interpreter', 'latex');

    end

else

    if strcmp(language, 'en')

        title('\bf WVD', 'FontSize', 30, 'Interpreter', 'latex');
        xlabel('\bf $\mathbf{x}$ (samples)', 'FontSize', 24, ...
        'Interpreter', 'latex'), ...
        ylabel('\bf $\mathbf{\nu}$ (normalized frequency)', ...
        FontSize', 24, 'Interpreter', 'latex');
    else

        title('\bf DWV', 'FontSize', 30, 'Interpreter', 'latex');
        xlabel('\bf $\mathbf{x}$ (muestras)', 'FontSize', 24, ...
        'Interpreter', 'latex'), ...
        ylabel('\bf $\mathbf{\nu}$ (frecuencia normalizada)', ...
        'FontSize', 24, 'Interpreter', 'latex');

    end

end

set(gca, 'fontsize', 20);
colormap(gray)

else

```

```
y=real (maux2.*fft (maux) );  
  
end
```

B2: Algoritmo para llevar a cabo la convolución fraccionaria *(convatNC)*

```
function convfrac=convatNC(f,g,a)  
  
% Function to perform the fractional convolution between two signals f and  
% g with an constant and time-variant alpha.  
%  
% f and g --> de functions to perform the convolution  
%  
% a ---> is the parameter that describes the trajectory of convolution, if  
% is constant the path is linear, if os time variant the path is a  
% curve.  
%  
  
Ng=length(g);  
Nf=length(f);  
  
N=Nf+Ng-1;  
  
alpha=(pi/2)*ones(1,N);  
  
if Ng>Nf  
  
    alpha(1:Ng)=a;
```

```

else

    alpha(1:Nf)=a;

end

lim=(Ng-1)/2;
f_aux=[f zeros(1,Ng-1)];

g_aux=zeros(N,N);

for j=1:lim+1

    pot1=-2i*pi*(0:j+lim-1)*(j-1)*cot(alpha(j));
    pot2=2i*pi*((0:j+lim-1).^2)*cot(alpha(j));

    C=exp(-1i*(sign(sin(alpha(j)))*pi/4-alpha(j)/2))/sqrt(abs(sin(alpha(j))));
    g_aux(1:j+lim,j)=(C*C)*g(j+lim:-1:1).*exp(pot1+pot2);

end

aux=2;
for j=lim+2:N-lim

    pot1=-2i*pi*(aux-1:Ng+aux-2)*(j-1)*cot(alpha(j));
    pot2=2i*pi*((aux-1:Ng+aux-2).^2)*cot(alpha(j));

    C=exp(-1i*(sign(sin(alpha(j)))*pi/4-alpha(j)/2))/sqrt(abs(sin(alpha(j))));
    g_aux(aux:aux+Ng-1,j)=(C*C)*g(Ng:-1:1).*exp(pot1+pot2);

    aux=aux+1;

```

end

prod=f_aux*g_aux;

convfrac=prod(1:Nf);