CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SITUACIONES CONCRETAS

LIZETH CAROLINA YARA HOYOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SITUACIONES CONCRETAS

LIZETH CAROLINA YARA HOYOS

Trabajo de grado para obtener el título de
Licenciado(a) en Matemáticas

DIRECTOR:
CARLOS ARTURO BAUTISTA DUQUE
ESP. En Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

A Dios, mi amparo y fortaleza.

A mi madre, que gracias a su amor,
esfuerzo y dedicación,
pude alcanzar esta meta.

A William quien me ha
dado incondicionalmente
su amor y su apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A Dios quien es mi refugio y mi guía.
A Mayra, Jerly, Johan y Jhon quienes contribuyeron
a que este trabajo se hiciera realidad.
A la profesora Joanne, por su apoyo y confianza.
A Carlos Bautista mi director de proyecto, por su paciencia,
dedicación y por sus orientaciones.
A mi madre, por brindarme su apoyo y amor
incondicional.
A los profesores por sus enseñanzas impartidas que han contribuido
en mi formación como persona y como profesional.
A mis amigos, quienes con su apoyo y compañía,
hicieron amena mi vida universitaria.
A William, por su amor, ternura y sus palabras
de aliento.
A Michaell y Maria Isabel que me apoyaron en momentos difíciles.
A Daniel, por su apoyo al inicio de esta investigación.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO: CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SITUACIONES CONCRETAS[*].

AUTOR: YARA HOYOS, Lizeth Carolina[**]

PALABRAS CLAVES:
1. Pensamiento variacional. 2. Situaciones concretas. 3. Representación de función
4. Conceptualización

La pregunta clave de esta investigación fue ¿Cuáles situaciones concretas permiten mejorar la conceptualización de Función Lineal?

Esta investigación tiene como objetivo diseñar y aplicar situaciones concretas a estudiantes de noveno grado, que permitan mejorar la conceptualización de la función lineal. Se llevo a cabo en el Instituto Minca, Institución Pública del Municipio de Floridablanca con 28 estudiantes a los cuales se aplicaron siete actividades, dos preliminares, cuatro talleres centrales y una evaluación como actividad final. Para el análisis de los datos se tomó la información de cuatro estudiantes. La metodología usada fue el estudio cualitativo de casos. Para el análisis de cada caso, se hizo una triangulación teniendo en cuenta las teorías de los autores referenciados para esta investigación, la información de los estudiantes y la percepción de la autora.

Una de las conclusiones es que las situaciones concretas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ayudan a los estudiantes en la construcción de los conceptos matemáticos. En esta investigación, las situaciones concretas permitieron que los estudiantes las modelaran y realizaran distintas representaciones de la Función Lineal. En términos generales, los resultados de esta investigación mostraron que el uso de las situaciones concretas ayudó a la conceptualización de la Función Lineal.

---

[*] Trabajo de Grado
[**] Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Director: Carlos Arturo Bautista Duque, Especialista En Educación matemática.

SUMMARY

TITLE: CONCEPTUALIZATION OF LINEAL FUNTION TROUGHT CONCRETE SITUATIONS*

AUTHOR: YARA HOYOS, Lizeth Carolina**.

KEY WORDS:
1. Thought variational. 2. Concrete situations. 3. Representation of funtions
4. Conceptualization.

The key question of this investigation was: what concrete situations enable to improve the conceptualization of lineal funtion?

This investigation has as objetive design and apply concrete situations to 9° grade students, It enable to improve the conceptualization of lineal funtion. It occurred at the Instituto Minca, a public institution of Floridablanca with 28 students, they applied seven activities, two preliminares, four analysis activities and one exam such as final activity. For analysis case, It took the information of four students. The methodology used was the study of cualitive case. For analysis of each case, It made a triangulation having in mind the theory of aknowledged autors of this investigation, the information of the students and the perception of the author.

One of the conclutions is that concrete situations in teaching-learning of mathematic help to the students in the construction of mathematical concepts. In this investigation, concrete situations enabled to the students to model and realize different representations of lineal funtion. In general terms, the result of this investigation showed the used of concrete situations help to the conceptualization of lineal funtion.

---

* Work of Grade.
** College of Sciences. School of Mathematics. Degree in Mathematics. Director: Carlos Arturo Bautista Duque, Specialist in Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

En la experiencia como docente he aprendido que el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemática no es tan fácil; surgen interrogantes a los que se les debe buscar respuestas y dificultades que se convierten en retos y oportunidades para diseñar estrategias de enseñanza - aprendizaje, y entender las distintas variables que intervienen en aquellos procesos, cuyo control en varias ocasiones parece que se nos escapa de las manos.

Una de las dificultades más marcadas en este proceso de enseñanza-aprendizaje, es el desinterés de los estudiantes por las matemáticas, esto se refleja en la apatía que muestran en las clases, lo que generalmente causa un desempeño y rendimiento no muy satisfactorio.

De esta dificultad surgen dos interrogantes: *¿Cómo lograr que el estudiante le encuentre sentido a las matemáticas? y ¿Cómo lograr que el estudiante comprenda las matemáticas?*, interrogantes que hoy día son la base de un gran número de teorías e investigaciones alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes es el objetivo que como docentes debemos proponernos, pues cuando nuestros estudiantes logran comprender un determinado concepto, logran asociarlo de igual manera con las características más relevantes de dicho concepto y puede a través de ellas, modelar situaciones y fenómenos de la naturaleza.

En el “Servicio Social Educativo y Práctica Docente I”[1] observé que la mayoría de los estudiantes no logran comprender los conceptos matemáticos por causa de muchos factores que intervienen en ese proceso de comprensión. Uno de esos factores se debe a que dichos conceptos son enseñados a los estudiantes sin mostrar la aplicabilidad o conexión que estos tienen en diversas situaciones y en los fenómenos de la naturaleza. Lo preocupante de esto es que si este concepto es base de otro, el estudiante tendrá más dificultades para comprender los siguientes conceptos, sobre todo si este involucra al anterior.

Este es el caso del concepto de función, para el cual se vienen construyendo las nociones desde el grado quinto de primaria, pero que pese a esto, cuando se empieza a formalizar en el grado noveno los estudiantes muestran dificultades en su concepción, que se debe al parecer, a las bases poco sólidas de los diferentes conceptos que están relacionados con la construcción del concepto de función.

Así, las diversas investigaciones en Educación Matemática relacionadas con el concepto de función, han detectado serias dificultades de comprensión y errores conceptuales tanto de los estudiantes como de los mismos profesores (Cuevas & Díaz, 2002).

El concepto de función se considera como uno de los temas más importantes en la matemática y también fuera de ella; esto se debe a que a través de las funciones se puede explicar o modelar diferentes fenómenos de la naturaleza. Según los Principios y Estándares para la Educación Matemática para la etapa de 9 - 12 años, se deben capacitar a los estudiantes para comprender patrones, relaciones y funciones. El interés de esta investigación se centra en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la función lineal, ya que el modelo lineal es uno de los más

[1] Materia de la carrera Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, en la cual se realiza una práctica docente durante cuatro meses.

importantes en matemáticas, pues permite estudiar problemas de la ciencia que se comportan linealmente y aproximar a otros, cuyo modelo no es lineal.

Es a partir de las dificultades que presenta la comprensión y formación del concepto de función lineal y a su vez de los errores conceptuales a los que conllevan estas dificultades, que surgió la pregunta base de esta investigación: *¿Qué situaciones concretas permiten mejorar la conceptualización de función lineal?* Cuestionamiento que lleva a trazar el siguiente objetivo general: *Diseñar y aplicar situaciones concretas, en estudiantes de noveno grado, que permitan mejorar la conceptualización de función lineal.* Como objetivos específicos se proponen los siguientes:

Identificar las nociones de función lineal en los estudiantes.
Diseñar situaciones concretas que faciliten la conceptualización de función lineal.
Aplicar situaciones que favorezca el proceso enseñanza-aprendizaje de la función lineal.
Evaluar el progreso de los estudiantes y el impacto causado tanto por la aplicación de las situaciones como por la metodología empleada.

Buscando cumplir con estos objetivos, en la experiencia de aula, se realizaron diferentes actividades con los estudiantes del grado nueve uno del Instituto Minca, Institución Pública del Municipio de Floridablanca. La intensidad horaria semanal en el área de Matemáticas, es de tres sesiones de 90 minutos cada una.

Por otro lado, el grupo de estudiantes con el que se realizó la investigación consta de 28 jóvenes, cuya edad oscila entre los 13 y 18 años en su gran mayoría provenientes de los estratos 1 y 2. Cabe resaltar que aunque todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de desarrollar las actividades propuestas, se escogió entre ellos una pequeña muestra piloto de cuatro estudiantes[2], a quienes se observaron con mayor detenimiento e interés, y de ellos se obtuvo este informe de investigación.

Los estudiantes observados fueron los siguientes:

Jerly Paola Rivera Pico (15 años)
Callada, responsable, se caracterizaba por su agrado y concentración que manifestaba en la clase de matemáticas.

Johan Donaldo León Carreño (16 años)
Dinámico, participativo y muy comprometido con lo que hace. Mostraba habilidades en matemáticas.

Jhon Reynaldo López Herrera (14 años)
Tímido, se preocupaba por preguntar cuando no entendía y se esforzaba por terminar las actividades.

Mayra Alejandra Avendaño Manrique.
(15 años) Espontanea, participativa, alegre, comprometida con lo que hace, líder. Manifestaba el agrado por la materia.

[2] Los protagonistas de este trabajo, dieron la autorización para publicar sus nombres.

Finalmente, los resultados de esta investigación se presentarán en cuatro capítulos; así:

En el primer capítulo: "*EMPRENDIENDO EL CAMINO"*, se presenta el marco teórico tenido en cuenta para la investigación. Además se comenta la metodología empleada, las actividades propuestas y cómo se llevó a cabo la recolección de datos.

En el segundo capítulo: *"RELATANDO LA EXPERIENCIA"*, se presenta cada una de las actividades realizadas que fueron base fundamental para la observación y toma de datos de esta investigación. En esta se narra el desarrollo de cada una de las actividades que se aplicaron con los estudiantes sin realizar análisis de los resultados.

En el tercer capítulo: *"LOS PROTAGONISTAS Y EL ANÁLISIS",* se presentan los resultados de los cuatro casos que se tomaron para efectos de esta investigación, los cuales se analizaron basándose en los aportes de los autores que sustentan este trabajo y nuestra propia interpretación.

En el cuarto capítulo: *"CONCLUSIONES"*, se plasma todos los pensamientos y aportes que se consideran importantes surgidos durante esta investigación, esperando sea de gran utilidad en la búsqueda de una enseñanza y aprendizaje significativos.

EMPRENDIENDO EL CAMINO

Alrededor del tema de la enseñanza de las funciones hay varios estudios e investigaciones que reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, lo que conduce con frecuencia a falsas interpretaciones de conocimientos matemáticos que dependen de la comprensión del concepto de función (Selden, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Norman, 1992).

Para emprender esta investigación se realizó un análisis basado en la revisión histórica de los conceptos que permitiera identificar los obstáculos epistemológicos[3] del concepto de función, obstáculos que son propios al concepto y no así a las particularidades en los procesos de enseñanza, que además, son propios de la construcción de una cultura y son obstáculos objetivos para nuevos modos de conocer.

En esta dirección y vinculado a las concepciones de los estudiantes, Bell y Janvier (1981) fueron tal vez los primeros en identificar en los estudiantes algunas concepciones y habilidades al trabajar con el concepto de función. De Cotret (1985) a partir de elementos históricos, realiza el primer análisis epistemológico para dar una explicación de fenómenos de aula. Años más tarde Sierpinska (1992) reporta los obstáculos de la construcción del concepto de función con carácter de epistemológicos.

[3] Obstáculos identificados en la génesis histórica de un concepto; concepto introducido por Brosseau en 1983 a la Didáctica de las Matemáticas (citado en Ruiz, 1998)

Posteriormente, Ruiz (1998) añade a la componente epistemológica y a la cognitiva, la componente didáctica de un escenario particular. Entre sus resultados más significativos, se encuentra que las concepciones en el estudiante están determinadas por las concepciones históricas ligadas a la noción de función, por el estatus que se le da dentro de los programas oficiales y en la forma como el concepto de función es presentado en los libros de texto y por el profesor que imparte clase.

En cuanto a la evolución del concepto a través de la historia, uno de los trabajos más importantes, que ha sido utilizado como fuente de información en varias investigaciones dedicadas al concepto de función y desde luego para este trabajo, es el de Youschkevitch (1976). En este trabajo el autor ofrece consideraciones sobre tres etapas: el mundo antiguo, la edad media y el periodo moderno, que a su modo de ver, son las principales en el desarrollo de la noción de función hasta mediados del siglo XIX.

Las investigaciones sobre estudios de epistemología histórica de las matemáticas, ponen de relieve cómo el análisis de la evolución conceptual es un instrumento muy útil para las investigaciones didácticas. Tal es el caso de Sierpinska (1992) quien reporta los obstáculos de la construcción del concepto de función, pero con carácter de epistemológicos:

1. Los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.
2. Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números; la proporcionalidad es diferente de la igualdad.
3. Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.

4. Lo más importante de la matemática es proveerse de un cálculo poderoso que permita a los científicos resolver sus problemas.
5. Los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en el mismo sus longitudes, su área o su volumen.

Sierpinska no solo identificó los obstáculos, también caracterizó las concepciones de los estudiantes en:

Concepción primitiva: cuando una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una línea.

Concepción de razón o proporción: cuando en el desplazamiento de puntos sobre el plano, la nueva posición se puede describir en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo.

Visión sintética: cuando una función se identifica como su representación en el plano. Las funciones son pensadas como objetos geométricos y se clasifican de acuerdo con la forma de esos objetos.

Tabla numérica: cuando una función viene dada por su tabla de valores.

Expresiones algebraicas: cuando una función se identifica por su ecuación.

Visión analítica de la curva: cuando la función es un ente abstracto en unos ejes de coordenadas.

Relación funcional: cuando existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

Seguidamente Sierpinska (1992), presenta cuatro categorías de los actos de entendimiento de un concepto matemático y diecinueve categorías que se pueden determinar en la comprensión del concepto de función. Dichas categorías son las siguientes:

I. Identificación (de un objeto entre varios objetos).

II. Discriminación (entre dos objetos, detectando diferencias y propiedades relevantes).

III. Generalización (extender el orden de las aplicaciones, abrir posibilidades de interpretación y descubrimiento).

IV. Síntesis (la percepción de hechos aislados se pueden organizar en un todo consistente).

Categorías que se pueden determinar en la comprensión del concepto de función:

1. La identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea es un problema práctico para resolver.
2. La identificación de regularidades en las relaciones entre cambios es un medio de tratar los cambios.
3. La identificación de los objetos que cambian.
4. Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático (en términos de cantidades conocidas y desconocidas y en términos de variables y constantes).
5. Discriminación entre variables dependiente e independiente.
6. Generalización y síntesis de la noción de número.
7. Discriminación entre número y cantidad.
8. Síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función.
9. Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan para describir su ley.
10. Discriminación entre definiciones y descripciones de objetos.
11. Síntesis de la concepción general de la función como un objeto.
12. Discriminación entre los conceptos de función y relación.
13. Discriminación entre las nociones de función y sucesión.
14. Discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones.

15. Discriminación entre los diferentes significados de la representación de funciones y las funciones mismas.
16. Síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones.
17. Generalización de la noción de variable.
18. Síntesis de los "roles" de la noción de función y de causa.
19. Discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

Sierpinska añade a su investigación que también son importantes factores tales como:

La motivación, los estudiantes deben estar interesados en explicar los cambios, para así encontrar regularidades entre ellos.

Los contextos introductorios, las funciones expresadas en forma analítica deben aparecer en primer lugar como herramientas para modelizar ciertas situaciones de la vida real o científicas.

Los contextos de desarrollo, los métodos de interpolación se deben usar para desarrollar la noción de función.

La comprensión de la noción de función, los estudiantes deben ser capaces de identificar no sólo aquello que cambia sino también cómo cambia.

Los prerrequisitos, es necesario un cierto grado de conocimiento algebraico para abordar la noción de funciones.

Las representaciones, los estudiantes deben tener la oportunidad de adquirir cierta flexibilidad en el uso de diferentes modos de expresión y de representación.

Las definiciones, la introducción de la definición de función teórico-conjuntista como un grado especial de relación no está justificada ni desde un punto de vista didáctico ni epistemológico. La definición de Dirichlet en la cual una función es un caso especial de una relación, es suficiente para el nivel secundario.

La metodología, La discusión en clase de las similitudes y diferencias entre las relaciones causales y las relaciones funcionales pueden contribuir a la comprensión de ambas nociones.

En cuanto a las investigaciones acerca de las concepciones de los alumnos, Dubinsky y Harel (1992) describen las concepciones de los alumnos sobre la noción de función en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas:

La concepción de función como acción implica que el alumno requiere de instrucciones precisas, como por ejemplo el empleo de fórmulas algebraicas de la función para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella.

Una concepción como proceso significa el tener una idea más dinámica, poder pensar en la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas. Esta etapa requiere la coordinación de varias acciones.

La concepción de objeto se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan.

Lograr la concepción de esquema involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuáles pertenecen a cada esquema.

Las conclusiones de Dubinsky y Harel giran en torno a la cuestión de cómo los estudiantes están situados en cuanto a las concepciones de acción y de proceso, y la complejidad de pasar de una concepción a otra debido a ciertas restricciones, como por ejemplo la restricción debida a su concepción de lo que es una función.

Acerca de las nociones de función en los estudiantes, Ruiz (1998) realiza un estudio didáctico alrededor de la noción de función, contemplando en forma sistémica su génesis epistemológica, el estatus que recibe en la enseñanza y el desarrollo de las concepciones en los estudiantes, y que son referidas a este objeto matemático.

En el análisis epistemológico del concepto de función, Ruiz-Higueras identifica diferentes concepciones asociadas a la evolución histórica de esta noción:

Obstáculos a nivel de creencia y convicciones

1) Obstáculo de la concepción estática: La idea más primitiva de función estaba contenida en las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables. No obstante, durante mucho tiempo, los matemáticos consideraban a los entes matemáticos como estáticos y a las magnitudes físicas como variables. Las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas eran interpretadas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas.
2) Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números: Actualmente asociamos de manera muy natural a cualquier magnitud una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego, magnitudes y números eran objetos distintos. Los números eran discretos mientras que las magnitudes eran continuas. Esta disociación llevó a no observar las leyes físicas como funciones matemáticas.

Obstáculos a niveles de esquema de pensamiento

3) Obstáculo de la razón o proporción: Desde los griegos y hasta el siglo XV, la proporción se escribía de forma discursiva y no como una igualdad en forma de fracciones. El aspecto funcional de la proporción quedó completamente oculto.
4) Obstáculo de la homogeneidad de las variables: La homogeneidad conducía siempre a comparar magnitudes de la misma naturaleza y esto impedía encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes.
5) Obstáculo de la concepción geométrica de las variables: Los matemáticos griegos construyeron un álgebra geométrica cuyos elementos primarios eran los segmentos. Con ellos definieron todas las operaciones del cálculo. La suma se interpretaba como la adición de segmentos; la diferencia como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo; el producto de dos segmentos condujo a la representación bidimensional de un rectángulo; el producto de tres segmentos daba un paralelepípedo y el producto de un número mayor de segmentos no podía considerarse; la división sólo era posible bajo la condición que la dimensión del dividendo fuera mayor que la dimensión del divisor.

Obstáculos a nivel de conocimiento teórico

6) Obstáculo de la concepción algebraica: La simbolización algebraica hizo que apareciese otro nuevo obstáculo en el desarrollo del concepto de función. Se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que podían ser descriptas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones.
7) Obstáculo de la concepción mecánica de curva: Posteriormente, el desarrollo del concepto de función estaría acompañado de la noción de

curva. Pero en un principio las curvas no fueron consideradas como gráficos de la relación funcional sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento (curvas mecánicas).

La componente didáctica de la investigación de Ruiz contempla la noción de función como objeto a enseñar, como objeto de enseñanza y como objeto enseñado; lo que permite analizar cómo "vive" el objeto función en el sistema de enseñanza y aportar elementos y fenómenos didácticos relacionados con el proceso de transposición didáctica[4] de este concepto.

Con base en los aportes hechos por los autores consultados (Sierpinska, Ruiz, Bell y Javier, entre otros) y teniendo en cuenta los obstáculos identificados en la construcción del concepto de función, las concepciones de los estudiantes y pensando en una estrategia para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal se ha planteado la pregunta que guía este trabajo de investigación: *¿Qué situaciones concretas permiten mejorar la conceptualización de función lineal?*

Se aplicaron las situaciones concretas como estrategia de enseñanza-aprendizaje de la función lineal, pensando en que las matemáticas sólo tendrán sentido para los estudiantes si éstos llegan a asimilar conceptos, elaborar significados y realizar aplicaciones e interpretaciones, en este caso relacionados con el concepto de función lineal.

Pensando en dar respuesta a la anterior pregunta y teniendo en cuenta los objetivos que se quieren cumplir en esta investigación, se plantea una metodología enmarcada en el análisis de estudio de cuatro casos específicos. Para el análisis de los datos se abordó una investigación cualitativa de tipo

[4] Se llama transposición didáctica al proceso por el que un saber se convierte en un objeto de enseñanza.

fenomenológico-hermenéutico puesto que el proceso del proyecto se caracterizaba por ser un proceso centralizado en el estudiante, además de que se consideran las interpretaciones de los estudiantes, junto con la interpretación de los investigadores y al contexto, como los elementos más importantes a tener en cuenta.

La información de la investigación fue recopilada por medio de diversas técnicas y fuentes tales como: talleres, diario de campo, socialización de las actividades aplicadas en clase, grabaciones y la observación directa por parte del investigador.

En cuanto al tema de interés a desarrollar “función lineal”, este se realizó en el horario de clases de matemáticas establecidas por la institución y las actividades que se aplicaron en el transcurso de la experiencia, fueron las siguientes:

Actividades preliminares: *“Trabajando y aprendiendo”* (Ver anexo1) y *“Conozcamos algo de historia”* (Ver anexo 2). El propósito de estas actividades era identificar las nociones de función lineal de los estudiantes y darles a conocer un poco de historia a cerca de las funciones.

Actividades de verificación, diseñadas a partir de situaciones concretas: *“Trabajando con varillas”*, (Ver anexo 3) *“Aprendiendo con resortes”* (Ver anexo 4), *“Midiendo el agua”* (Ver anexo 5) y *“Midiendo el agua II”* (Ver anexo 6). Estas actividades se trabajaron con el fin de acercar a los estudiantes al concepto de función lineal, tratando de que estas actividades fueran representativas e interesantes para ellos.

“Poniendo en práctica mi aprendizaje” (Ver anexo 7) fue la evaluación que se les hizo a los estudiantes, para tenerla en cuenta para el cierre de notas del período

junto con los talleres trabajados anteriormente y para mirar si los talleres aplicados cumplieron con el objetivo propuesto.

Una vez culminada la aplicación de las actividades, se inició el análisis de los datos. Para tal fin se realizó el análisis de la información correspondiente a los cuatro estudiantes previamente seleccionados, comenzando por la revisión de las actividades aplicadas, la observación directa sobre ellos, el diario de campo y las entrevistas obtenidas de estos estudiantes, entre otras.

Para el análisis de cada uno de los casos, se hizo una triangulación teniendo en cuenta tres aspectos: puntos de vista planteados por los autores quienes le dan sustento teórico a la investigación; la información recolectada de los estudiantes; la percepción, opinión y conclusiones de la autora

RELATANDO LA EXPERIENCIA

A continuación se darán a conocer las diferentes situaciones vividas en cada una de las actividades aplicadas, las cuales fueron indispensables para la observación e interacción con los estudiantes y para la toma de datos. Cada actividad se realizó con un objetivo específico, el cual se mencionarán con mayor énfasis en la descripción respectiva de cada una de las actividades.

La experiencia se inició con la aplicación de la primera actividad preliminar titulada “Trabajando y aprendiendo” (Ver anexo 1). Esta actividad consistió en presentar a los estudiantes una situación de la vida cotidiana en el contexto de la construcción, la cual ayudaría a detectar las nociones sobre función lineal que traían consigo los estudiantes.

Esta actividad se desarrolló a través de una presentación animada en Power Point Para hacer la actividad un poco más dinámica se hizo que el grupo personificara la historia, y fueron los mismos estudiantes quienes escogieron a sus compañeros para que hicieran el papel de: los hermanos (Pablo y Emilio) el ingeniero y el narrador.

Esta actividad preliminar se realizó los días 18 y 25 de febrero, y el 4 de marzo de 2009. A través de ella los estudiantes tuvieron el primer contacto con el tema a estudiar (Función Lineal) en esta investigación, así mismo se identificaron algunos obstáculos presentados en los estudiantes alrededor de la comprensión y la concepción de función lineal, así como el manejo de ciertos conocimientos básicos requeridos para ello. Uno de los obstáculos identificados en el desarrollo de esta actividad, fue detectado en el momento en que se solicitó a los estudiantes graficar en el plano cartesiano los datos registrados en la tabla que habían completado; y aunque gran parte de ellos reconoció que los valores correspondientes al tiempo debían ubicarse en el eje x, y los valores correspondientes a la cantidad de ladrillos pegados debían ubicarse en el eje y (mostrando con ello de alguna manera la noción de relación de dependencia); esta situación permitió observar que aún había dificultad para identificar variables y además la relación de dependencia entre las mismas

En el desarrollo de esta actividad, hubo tres tipos de gráficos: algunos estudiantes unían los puntos desde cero (el origen), otros los unían pero no desde el origen sino a partir del primer dato tabulado en la tabla y los demás solo ubicaron los puntos correspondientes a las parejas ordenadas. Se les explicó a los estudiantes que el origen se conoce como las coordenadas en el plano $(0, 0)$.

Se concluyó junto a los estudiantes que la gráfica que se formaba en el momento de ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano, era otra manera de representar una función, ya que esta también la podemos considerar como un conjunto de puntos en el plano que cumplen ciertas condiciones. Esta representación permite ver características como el hecho de obtener una línea recta trazada desde el origen, en el cual para cada valor en x (el tiempo en este caso) tiene un valor en y (ladrillos pegados), lo que permite interpretar dentro de la situación que el punto $(0,0)$ indica que para un tiempo igual a cero no se tendría ningún ladrillo pegado.

Por otro lado, al socializar las respuestas dadas por los estudiantes para cada ítem trabajado, y escuchar sus aportes se evidenció que hay diferentes formas de dar solución a determinada situación y que todos organizan sus ideas de manera diferente, esto destaca que el individuo (en este caso el estudiante) aprende de diversas maneras.

Luego de esta primera actividad se determinaron los cuatro estudiantes que se tendrían en cuenta para la recolección y el análisis de datos. Los criterios tenidos en cuenta para ello fueron los siguientes:

1- Opinión de la profesora titular. Ella sugirió a Jerly, quien es una niña de un rendimiento normal pero que mantiene buena actitud y disposición de trabajo en clase.
2- Participación en clase. Por este criterio se escogió a Johan, quien es un estudiante que se destaca por sus aportes.
3- El interés mostrado al realizar la actividad. Por este criterio se escogió a John, quien se mostró interesado durante el desarrollo de la actividad.
4- Actitud. Mayra fue escogida por este criterio, ya que aunque desarrolló la actividad, se observó apática y desinteresada.

Un resultado positivo que se evidenció en el desarrollo de la actividad preliminar, fue el hecho de que la metodología presentada en clase captó la atención de los estudiantes. Lo anterior se pudo observar debido a los comentarios hechos por los mismos, como que la clase era diferente pues normalmente las clases de matemáticas eran realizadas de manera tradicional, era bueno hacer uso de otros recursos como la tecnología, además de que la actividad les dio la oportunidad de participar en clase, les permitió buscar diferentes soluciones a las preguntas que alrededor de ella se plantearon. Este hecho llevó a pensar que la metodología y las actividades planteadas ayudarían a alcanzar los objetivos propuestos.

La segunda actividad preliminar "*Conozcamos algo de historia"* (Ver anexo 2) realizada el día 6 de marzo de 2009, tenía como objetivo dar a conocer a los estudiantes la evolución del concepto de función a través de la historia.

Esta actividad fue orientada a través de una guía que contenía un resumen de la evolución del concepto de función, tomado del trabajo realizado por Youschkevitch (1976). Este autor muestra el desarrollo de la noción del concepto de función hasta mediados del siglo XIX presentando la historia a través de tres grandes períodos de tiempo: el mundo antiguo, la edad media y la edad moderna.

Los especialistas en didáctica están de acuerdo en que para enseñar un concepto hay que conocerlo profundamente, y por supuesto cuanto más complejo es dicho concepto más habrá que estudiarlo en sus distintas facetas. Este es el caso del concepto de función que junto a la dificultad de su definición se añade la complejidad de su simbolismo y de su representación, de sus modelos y la amplia gama de sus aplicaciones. Buscando que los estudiantes establecieran la conexión del concepto de función, se diseñó la segunda actividad preliminar.

Para el desarrollo de la actividad (la cual se realizó en la cancha del colegio) se pidió a los estudiantes que se formaran en grupos de tres, luego con base en la lectura realizada respondieron cinco preguntas a cerca de la historia de las funciones; por último realizaron un mapa conceptual el cual se socializó posteriormente en el salón de clases.

Ya en la socialización, los estudiantes comentaron que la profesora anteriormente los había puesto a realizar una exposición acerca de la historia de las funciones, así que con la lectura que realizaron complementaron lo visto. Con este trabajo se cerró el ciclo de actividades que se habían propuesto como preliminares en la introducción del tema de funciones.

Los principios y estándares de la educación matemática hacen referencia a que el estudio de patrones y relaciones debería centrarse en patrones asociados a funciones lineales, que se originan cuando hay una tasa de cambio constante. De manera que los estudiantes deberían resolver problemas en los que se usen tablas, graficas, expresiones verbales y expresiones simbólicas para representar y examinar funciones y patrones de cambio.

En este mismo sentido, Sierpinska (1992) considera que una buena forma de motivar a los estudiantes en el inicio del estudio de funciones, es interesarlos en explorar la variación por medio de situaciones problemáticas relacionadas con fenómenos de cambio de la vida practica, antes de enfrentarlos a la definición formal o a ejemplos y ejercicios de funciones elementales que cobran poco significado en ellos. Otro de los aspectos claves en el estudio de función, son sus formas de representación, al respecto Sierpinska (1992, p.56) considera:

> "Diferentes representaciones de funciones son usadas, de las cuales tablas, graficas y formula analítica son las más conocidas y usadas, al menos en la escuela. La conciencia de las limitaciones de cada una de estas representaciones y de cada hecho que estas representan y el concepto general del mismo son ciertamente condiciones fundamentales de la comprensión de funciones"

Con base en el análisis de las actividades preliminares - en las que se identificaron en los estudiantes algunas nociones a cerca de la función lineal - y los autores consultados, se diseñaron las actividades básicas en aras de alcanzar los objetivos propuestos para dar respuesta a la pregunta planteada.

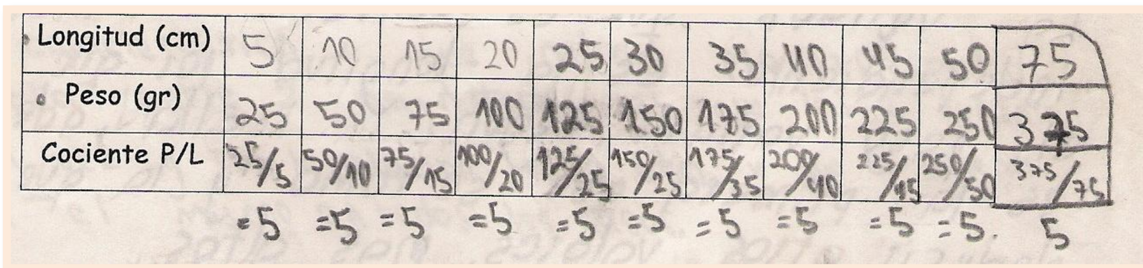
Teniendo en cuenta la información obtenida del trabajo realizado hasta el momento, se diseñó la primera actividad titulada *"Trabajando con varillas"* (Ver anexo 3). Esta tenía como objetivo que los estudiantes reconocieran la proporcionalidad directa entre dos magnitudes en un contexto determinado, mirar las estrategias de cálculo utilizadas por ellos, la identificación del factor de proporción y el análisis de su significado.

El razonamiento proporcional está estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo. A través del razonamiento proporcional se pueden modelar situaciones que involucren distintos niveles de igualdad, distintos niveles de las variables y transformaciones e invariantes. Las anteriores son algunas de las razones por las que se diseñó la actividad *"Trabajando con Varillas"*.

Los lineamientos curriculares del área de matemáticas hacen referencia a los núcleos conceptuales del pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos; menciona entre ellos que "los modelos matemáticos de tipo variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo, la proporcionalidad cobra especial significado". (MEN, 1998, p.72).

La actividad se aplicó los días 11, 13 y 18 de marzo de 2009. Para el desarrollo de la misma se trabajó en grupos de a tres, a cada grupo se le entregó 5 varillas de diferentes longitudes $(5,10, 15, 20\ y\ 25\ cm)$ e igual diámetro, una regla o un metro y una gramera (para calcular la masa de las varillas). Los estudiantes iniciaron con la lectura de la guía e inmediatamente comenzaron con el desarrollo de ésta.

En el inicio de la actividad los estudiantes interactuaron con las varillas, el metro o la regla y la gramera; medían las varillas y luego hallaban su masa. La información que obtenían en esta primera parte, la registraban en una tabla de valores. En el momento de llenar la tabla se le dijo a los estudiantes que en la segunda fila no era peso si no masa (error de digitación del taller).



Longitud (cm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	75
Peso (gr)	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	375
Cociente P/L	25/5	50/10	75/15	100/20	125/25	150/25	175/35	200/40	225/45	250/50	375/75
	=5	=5	=5	=5	=5	=5	=5	=5	=5	=5.	5

Figura 1: Tabla realizada por un estudiante

Durante el proceso de la toma de medidas de las masas de cada una de las varillas, los estudiantes observaron que para cada varilla la masa iba a ser 5 veces su longitud, es decir, si para las varillas de 5, 10 y 15 cm de longitud, les correspondía una masa de 25, 50 y 75 gr respectivamente; para las varillas de 20, 25 y las demás, sus masas serían de 100, 125, etc. Además, también notaron que las masas de las longitudes de las varillas que sumaron, eran el equivalente a la suma de las masas de cada varilla. Ningún grupo tuvo en cuenta que sucedía con la masa si no se tomaba ninguna varilla, hecho que se puede ver en la tabla anterior.

Los estudiantes registraron los valores de la longitud de la varilla, y la masa de la misma en la tabla presentada en la guía; adicionalmente se les pidió que calcularan el cociente entre la masa y la longitud de la varilla. Al calcular dicho cociente obtenían como resultado una constante de valor 5, a lo que la mayoría expresó que el cociente siempre daba 5.

Uno de los aspectos relevantes surgidos en el desarrollo de este taller ocurrió en el momento en el cual se preguntó a los estudiantes a cerca de las magnitudes que variaban y de las que permanecían constantes. A continuación se presentan algunas respuestas dadas.

> *“El cociente permanece constante, porque al dividir P/L es el mismo resultado. Varían la longitud y la masa porque aumentan cada vez más y más”*

> *“La constante es la longitud y la que varía es la masa, la longitud nos da algo exacto y la masa es el resultado de la longitud”.*

En esta parte se aclaró a los estudiantes que las magnitudes son características de los cuerpos que pueden ser medibles. Se dio ejemplos como: la longitud; medida en cm, m, km, etc.; la masa, medida en gramos o en kg; la talla, medida en cm; el tiempo, medido en segundos, minutos y horas; el volumen, la temperatura, etc. Por consiguiente, no se debe considerar el cociente *P/L* como una magnitud.

Otro hecho importante ocurrió al dar solución al séptimo punto, en el cual se decía: *A partir del gráfico, ¿puedes estimar los pesos de varillas cuyas longitudes son:* $1\,cm$, $3{,}5\,cm$, $4\,cm$, $8\,cm$, $13\,cm$ *y* $18\,cm$*?* La mayoría dio solución a esta pregunta utilizando regla de tres; solo unos pocos lo hicieron a partir del gráfico; en vista de ello se explicó cómo podían estimar las masas de esas varillas utilizando el gráfico.

Algunos estudiantes afirmaron que era más rápido calcularlas haciendo uso de la regla de tres, de manera que para la octava pregunta la mayoría la aplicó para calcular las masas correspondientes de una varilla de 30cm, 55cm y 80cm. Se destaca el hecho de que algunos se dieron cuenta que al multiplicar el cociente entre la masa y la longitud por la longitud les daba la masa así que para obtenerla hacían el producto de 5 por 30, 5 por 55 y 5 por 80.

En la décimo quinta pregunta se les pedía analizar: *¿Cómo es la forma de la expresión algebraica que expresa la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales?* A lo cual las respuestas más comunes fueron las siguientes:

> *"Eje x = longitud, eje y = masa."*
> *"$y = mx$, o $y = ax$"*
> *"$y = x$"*

Al socializar las respuestas se llegó a la conclusión de que lo escrito en la primera expresión no hacia referencia a una expresión algebraica, pues solo designa la magnitud que iría en cada eje, es decir, cual será la variable dependiente y cual la independiente. La segunda respuesta fue para todos la expresión algebraica que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales donde m es una constante que para el caso específico de la situación trabajada en clase era $m = 5$; en la última expresión escrita por algunos estudiantes, se concluyó que la expresión no era correcta pues, su estructura no expresaba la verdadera relación entre las dos variables, ya que la igualdad hacia referencia a que siempre la masa era igual a la longitud.

A través del taller se logró que los estudiantes observaran y comprendieran la relación entre la proporcionalidad y la función lineal.

Teniendo en cuenta que con la primera actividad se había logrado construir el modelo lineal $y = mx$ haciendo uso de la proporcionalidad directa, se quería que la segunda actividad titulada *"Aprendiendo con resortes"* (ver anexo 4) se centrara en construir el modelo lineal afín $y = mx + b$ con el objetivo de poder utilizarlo como herramienta de predicción, además analizar una situación de función lineal que no pasara por el origen. Se hizo énfasis en el hecho de que si la variable independiente es cero, no necesariamente la dependiente debe ser cero.

Esta actividad se realizó los días 20, 25, 27, y 31 de marzo, y el primero y 14 de abril de 2009. En la aplicación de este taller surgieron varios aspectos relevantes. Inicialmente para la toma de datos los estudiantes formaban grupos de maras para penderlos del resorte, y hallar cuánto se había deformado el resorte con cada una de las diferentes masas. La masa de cada grupo de maras la calculaban teniendo en cuenta que cada mara tenía aproximadamente 5 gramos.

Figura 2: Indicaciones de la actividad
"Aprendiendo con resortes"

Algunos estudiantes registraban la nueva longitud del resorte más no hallaban cuánto se había deformado es decir, cuánto se había estirado así que la mayoría debió registrar nuevamente los datos. Cabe resaltar que todos los grupos tenían datos diferentes.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
Masa (gr)	50	65	85	105	125
Longitud (cm)	3	5	8,3	11,2	14,4

Figura 3: Tabla realizada por un estudiante.

Luego de que los estudiantes registraron los datos, se pedía que realizaran el gráfico de la longitud del resorte respecto a la masa en la hoja milimetrada. La idea de trabajar en la hoja milimetrada, era porque en las actividades realizadas anteriormente se había notado que a los estudiantes se les dificultaba trabajar a escala. Sin embargo y a pesar de que en forma individual se explicaba el uso de la hoja, a varios estudiantes se les olvidaba trabajar a escala y debían elaborar el gráfico nuevamente.

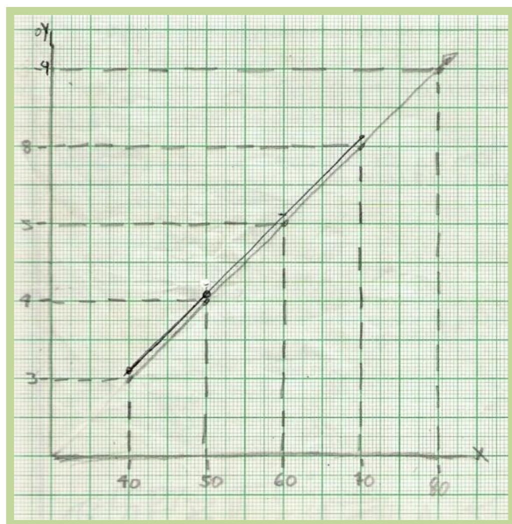
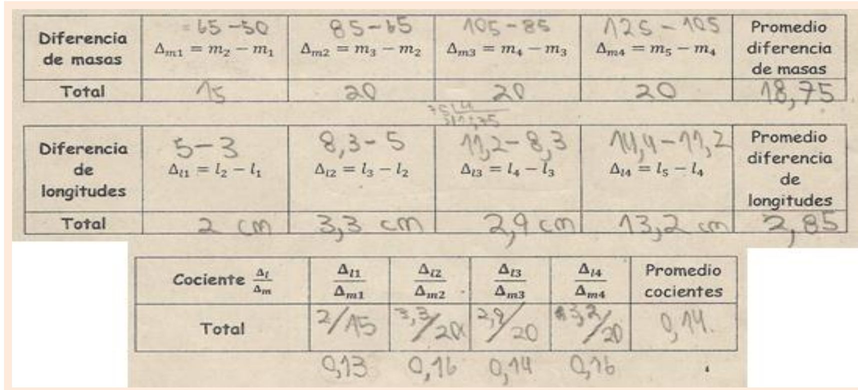


Figura 4: gráfico realizado por un estudiante

En la figura 4 se aprecia que en el eje x la distancia de 0 a 40 valía lo mismo que la distancia de 40 a 50. El estudiante no tuvo en cuenta que en el primer caso la distancia valía $40cm$ y en el segundo la misma distancia tomaba el valor de $10cm$. En el eje y también cometió el mismo error, no hizo uso de la escala.

En el octavo punto se pedía a los estudiantes calcular las diferencias de masas, las diferencias de longitudes y el cociente entre las diferencias de longitudes sobre las diferencias de masas, y que los registraran en las tablas.



Diferencia de masas	$=65-50$ $\Delta_{m1}=m_2-m_1$	$85-65$ $\Delta_{m2}=m_3-m_2$	$105-85$ $\Delta_{m3}=m_4-m_3$	$125-105$ $\Delta_{m4}=m_5-m_4$	Promedio diferencia de masas
Total	15	20	20	20	18,75

Diferencia de longitudes	$5-3$ $\Delta_{l1}=l_2-l_1$	$8,3-5$ $\Delta_{l2}=l_3-l_2$	$11,2-8,3$ $\Delta_{l3}=l_4-l_3$	$14,4-11,2$ $\Delta_{l4}=l_5-l_4$	Promedio diferencia de longitudes
Total	2 cm	3,3 cm	2,9 cm	13,2 cm	2,85

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$	Promedio cocientes
Total	2/15	3,3/20	2,9/20	3,2/20	0,14
	0,13	0,16	0,14	0,16	

Figura 5: tabla realizada por un estudiante.

Cuando se llego a esta parte del taller hubo cierta confusión en los estudiantes; inicialmente preguntaron qué significado tenían los triángulos en la tabla. Se les explicó que Δ era una letra mayúscula del alfabeto griego llamada Delta, pero, que en matemáticas significaba el incremento o cambio de un punto a otro y que esos cambios se obtenían calculando las diferencias entre dos valores próximos, que para la situación que estábamos trabajando eran las diferencias entre cada una de las masas y cada una de las longitudes.

Después de haber calculado las diferencias de masas y de longitudes, en la última columna de cada tabla se pedía el promedio de las diferencias mencionadas anteriormente. Ninguno de los estudiantes recordaba que era promedio, así que a medida que pedían ayuda, se daban ejemplos como: si se les pregunta, "*¿cuál es la edad que representa a los estudiantes de noveno, ustedes que dirían?", o ¿Cuál es el color favorito de las niñas de noveno?, ¿Cuál es el deporte favorito de los niños de noveno?*

Para la primera pregunta contestaban que la edad representativa sería de 15 años porque la mayoría tenía esa edad. Luego se explicó como se hallaba un promedio con el primer ejemplo que se les había mencionado, para ello se preguntó la edad a cada integrante del salón y se hizo el respectivo cálculo.

En la figura cinco se pueden apreciar los cálculos del estudiante para llenar cada una de las tablas, también se observa que las diferencias de masas y las diferencias de longitudes no fueron constantes es por ello que se pidió a los estudiantes hallar el promedio para tener un valor representativo de cada una de estas diferencias, porque se tenía presente que podían haber errores de medición teniendo en cuenta las condiciones en las que se había realizado la actividad.

La última tabla en la cual los estudiantes registraban el cociente de cada una de las diferencias, se llenó con el objetivo de hallar la constante que permitiría construir el modelo lineal afín para la situación trabajada.

En el noveno punto del taller se pedía a los estudiantes interpretar geométricamente las diferencias de masas y las diferencias de longitudes.

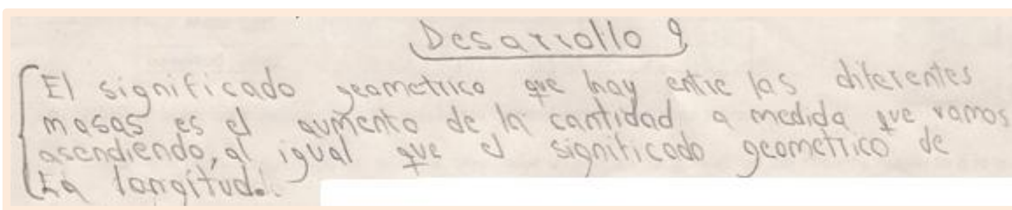

Desarrollo 9
El significado geometrico que hay entre las diferentes masas es el aumento de la cantidad a medida que vamos ascendiendo, al igual que el significado geometrico de la longitud.

Figura 6: respuesta dada por un estudiante.

En la figura nueve se observa la respuesta dada por un estudiante, él interpreta las diferencias de masas como el aumento de una masa a otra, e igual para las diferencias de longitudes. Las preguntas 10, 11 y 12 se contestaban con las tablas realizadas anteriormente, esta parte se trabajó con el fin de que los estudiantes interpretaran aritmética y geométricamente el cociente hallado entre las magnitudes involucradas en la situación.

La décimo tercera pregunta fue tal vez la que mas causó dificultad en los estudiantes, en esta se pedía encontrar una expresión algebraica que permitiera calcular la distancia que se deforma el resorte de acuerdo a una masa determinada, se pedía que tuvieran en cuenta las respuestas dadas en el numeral 11 y 12. Esta parte fue orientada en cada grupo de trabajo.

Después de escuchar las respuestas de los estudiantes a cerca del promedio del cociente se comentaba a los estudiantes que ese promedio podía ser representado simbólicamente, dado que para la situación que se estaba trabajando ya se había calculado el valor, pero que este valor en otra situación podía cambiar, por ejemplo en la situación de las varillas ese cociente tomaba el valor de cinco.

En esta parte algunos estudiantes dijeron que nombrarían simbólicamente el promedio del cociente como c, luego se decía que para calcular c se tenía una expresión que se había utilizado anteriormente. Entonces $c=\frac{l_2-l_1}{m_2-m_1}$, donde los valores de l eran los de la variable dependiente. Por lo tanto, estos se podían escribir cómo y_2-y_1, y los valores de m correspondían a los valores de la variable independiente así que estos podían escribirse como x_2-x_1, así que remplazando en la expresión que se había escrito anteriormente se tenía que: $c=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Uno de los estudiantes afirmó que para obtener una expresión que modelara determinada situación, se buscaba hallar el valor de y, y que con la expresión dada no era posible pues habían dos y, ante la reflexión del estudiante se comentó que la expresión $c=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se podía escribir como $c=\frac{y-y_1}{x-x_1}$, y que con esta ecuación se podría despejar y, entonces:

$$c(x-x_1)=y-y_1$$

$$c(x-x_1)+y_1=y$$

Johan mencionó que c se podía remplazar por k o por m porque era un valor constante. Así que $y=m(x-x_1)+y_1$. Encontrada la expresión los estudiantes debían calcular el estiramiento del resorte para las masas que habían utilizado anteriormente e ir registrándolos en una nueva tabla que se les daba en el numeral 14, se les recomendó tomar como y_1 la primera longitud (deformación) del resorte registrada en la primera tabla que habían llenado.

Los estudiantes se dieron cuenta de que utilizando la expresión algebraica encontrada, esta permitía ajustar los datos a un comportamiento lineal pues argumentaban que los datos registrados en la nueva tabla se parecían a los registrados anteriormente con la diferencia de que ahora siempre se tenia el mismo cociente y no era necesario calcular un promedio. Por último, los alumnos realizaron el gráfico con los nuevos valores para la variable independiente y lo compararon con el primer grafico realizado en el numeral nueve.

La socialización de este taller se llevó a cabo en dos clases pues el nivel de dificultad era mayor que en el taller de las varillas.

A manera de conclusión los estudiantes mencionaron que habían aprendido a obtener expresiones con las cuales se pudieran obtener resultados exactos. Además, para calcular el cociente este siempre se hacía con dos coordenadas seguidas es decir, a la que se encontraba en la posición final se le restaba la posición anterior.

Reflexionando a cerca de la experiencia en la aplicación del taller “aprendiendo con resortes” (Ver anexo 4), confirmamos que obtener un modelo en general, como la formula que expresa la relación funcional, presenta importantes dificultades de aprendizaje. Obtener el modelo que cumple una determinada función es en definitiva abstraer lo esencial en aquella función y eso no es tarea fácil.

En esta experiencia la obtención del modelo lineal que permitiera obtener el estiramiento del resorte implicó de mucho tiempo y dedicación, en especial porque en las situaciones trabajadas era más sencillo encontrar la constante, mientras que en esta se necesitó de otros conceptos matemáticos como el concepto de promedio, en este sentido resultó enriquecedor porque se estaban trabajando el pensamiento variacional y el aleatorio.

Con las situaciones trabajadas hasta el momento se había trabajado la función lineal en todas sus formas de expresión, verbal, tabular, gráfica, y expresión algebraica, pero hacía falta trabajar características muy importantes implicadas en una función como lo es el dominio y el recorrido. Es por eso que la tercera actividad "Midiendo el agua" (ver anexo 5) tomada y adaptada de la experiencia realizada por Burgos y Camacho[5] (2007) tenía como objetivos: afianzar el concepto de pendiente de una recta e identificar el dominio y recorrido de una función en una situación en particular, estudiar, analizar y hallar el modelo matemático que relaciona el volumen del agua con su altura a partir de una situación concreta. Esta actividad se realizó los días 15, 21, 22 y 24 de abril de 2009.

Para el desarrollo de la actividad se utilizó una probeta, una jeringa y una cinta métrica pegada a la probeta. Primero con la jeringa se midió $1\,ml$ de agua y se vació en la probeta, luego se observó cual era la altura del agua dentro de la probeta que fue $2\,mm$, se siguió observando la altura con $3\,ml$, $13\,ml$, $18\,ml$, $25ml$, $33ml$, y $42ml$. A medida que se realizaba el experimento los estudiantes se daban cuenta que por cada mililitro de agua que se echara dentro de la probeta la altura del agua subía $2\,mm$.

[5] Autores de la Tesis de grado: Mapas conceptuales: Estrategia metacognitiva en el aprendizaje de función y función lineal.

Después de haber tomado los datos los estudiantes empezaron a responder el taller. En la primera pregunta, en la cual los estudiantes debían identificar cuales eran las magnitudes que intervenían en la situación, la mayoría logró identificar que las magnitudes eran volumen y altura. En cuanto a cómo variaban las magnitudes, algunos daban como respuesta que las dos magnitudes iban aumentando; otros, que las dos variaban, pero no explicaban como, y muy pocos observaron que los milímetros aumentaban el doble de los mililitros.

Un aspecto relevante se puedo identificar en el momento en el cual se pregunta a los estudiantes por el gráfico obtenido; todos escribieron que una línea recta. En la siguiente pregunta: *¿Cuál es la condición que hace que el gráfico tome esta forma?* Se notó que a los estudiantes se les dificultó responderla, y no todos se dieron cuenta cuál era la condición. Algunas respuestas dadas por ellos son las siguientes:

> "*Porque las dos variables aumentan al mismo tiempo".*
> *"Que la pareja coincide con las dos y por eso obtuve una línea recta."*
> *"Toma esa forma porque las dos variables aumentan al mismo tiempo."*
> *"La condición para que el gráfico tome esa forma es que los milímetros van aumentando a medida que van aumentando los mililitros."*
> *"La posición de los puntos según la longitud y el volumen."*
> *"Porque la variable dependiente aumenta el doble de la independiente."*
> *"Que mientras que el volumen aumenta la longitud va a ser siempre el doble."*

En el siguiente punto se pedía a los estudiantes calcular los cocientes, el cual era 2 y se les preguntaba: *geométricamente, ¿Qué significado tiene el cociente?,* con esta pregunta se buscaba acercar a los estudiantes al término de pendiente, indispensable para la construcción de un modelo de función lineal. Algunas respuestas dadas por ellos son:

"*El cociente es como la forma en la que se inclina la recta.*"
"Que aumenta el doble y es una constante."
"Que es una pendiente."
"Es lo que hace que la longitud aumente el doble."
"El cociente es lo que determina la inclinación de una pendiente."

Seguidamente los estudiantes debían escoger un punto de la grafica y explicar que significado tenia ese punto en el contexto de la situación. Se observaron respuestas como:

"*Que la longitud es el doble del volumen.*"
"Coordenada (13, 26) que tomamos 13 ml con la jeringa y la vaciamos en la probeta y tuvo una altura de 26 mm."
"(25, 50) que a 25 ml le corresponden 50 mm."
"(25, 50) una magnitud es el doble de la otra"

En la decima pregunta del taller, los estudiantes debían escribir una regla que se cumpliera para cualquier punto de la gráfica de acuerdo a la situación. Con esta pregunta se trabajaba la función en su forma verbal. Algunos estudiantes en esta parte expresaron la regla mediante la formula para calcular y.
Encontrar la expresión algebraica que modelara la situación se le facilitó a los estudiantes gracias a las experiencias de clase con las situaciones trabajas anteriormente, donde la expresión que relacionaba las magnitudes era: $y = 2x$

Pensando en trabajar el concepto de dominio y recorrido se planteó el treceavo punto. En cuánto a la mínima cantidad de agua que podía haber dentro de la probeta, los estudiantes decían que era cero, es decir, no echar agua; y para calcular la máxima cantidad de agua, llenaban la probeta hasta el tope máximo y el valor que obtenían era el de la altura $239\, mm$, pero como ellos sabían que la altura era doble del volumen, hacían la división para saber la cantidad de agua que había dentro de la probeta $119{,}5\ ml$, así que la mínima cantidad de agua era $0\ ml$ y la máxima $119{,}5\ ml$.

Luego de haber hallado la mínima y máxima cantidad de agua debían hallar la mínima y máxima altura, para la cual los estudiantes asociaron que sí no había agua, no podía haber altura y la máxima altura ya la habían calculado $239\ mm$; entonces, la mínima era $0\ mm$ y la máxima $239\ mm$.

Seguidamente, el 28, 29 de abril y el 5 de mayo de 2009, se aplicó la cuarta actividad "Midiendo el agua II" (ver anexo 6) con esta se quería retomar el modelo de función lineal que no pasa por el origen, es decir, de la forma $y = kx$ y que además tuviera pendiente negativa. Se trabajó en el hecho de que para un valor de cero en la variable independiente, la variable dependiente no necesariamente también debía serlo.

En la solución del taller los estudiantes nuevamente trabajaron la función lineal en todas sus formas. Un aspecto importante por destacar es que en el momento de graficar dos estudiantes realizaron su gráfico de tal forma que parecía que estuviera en el segundo cuadrante del plano cartesiano con la diferencia que en el eje x los valores no eran negativos sino positivos. A estos estudiantes se les preguntó porqué graficaban de esa forma, a lo cual argumentaban que en este caso las magnitudes iban disminuyendo. Ante la respuesta se explicó que no era de esa forma, pues una magnitud aumentaba y la otra disminuía y que las dos magnitudes eran positivas, que un gráfico tomaba esa forma cuando los valores en el eje x eran negativos pero que en este caso no lo eran.

También se resaltó el dominio y recorrido de la función. En la socialización se destacó el hecho de que para los estudiantes cada término de la expresión $y = -2x + 220$ representaba algo, Mayra explicaba:

> *"La y para este caso representa la altura del agua dentro de la probeta, y $k = -2$ es porque por cada mililitro que se sacaba de la probeta la altura del agua disminuía en $2cm$, la x representa los mililitros que se sacaban y 220 es necesario en la expresión pues la situación partía de que dentro de la probeta había agua y que esa era la altura tenía $220mm$."*

Finalmente, aplicamos la evaluación, la cual nombramos "Poniendo en práctica mi aprendizaje" (ver anexo 7), esta fue de manera escrita, y con ella se buscaba que los estudiantes aplicaran todo lo aprendido con los talleres, para modelar las situaciones que allí se les presentaban.

La evaluación se planeó para un tiempo de 100 minutos. Constaba de 4 puntos. En el primero se quería que el estudiante identificara cual de las situaciones que allí se le mencionaban se podía modelar mediante una función lineal y cuales no, en el segundo ítem se pedía graficar, tabular, hallar expresión algebraica identificar el dominio y recorrido de la situación. Para el tercer ítem se buscaba que el estudiante creara una situación con los datos que se le mostraban y por último una grafica en la cual el estudiante debía interpretar y extraer información de ella.

La evaluación se realizó el día viernes 8 de mayo de 2009, y a causa de la pérdida de clases debida a las diferentes actividades del colegio dentro de su cronograma, la socialización y corrección se pudo llevar a cabo el día 27 de mayo.

“LOS PROTAGONISTAS Y EL ANÁLISIS”

En este capítulo se presenta el análisis de las actividades aplicadas durante el proceso de instrucción, que tenían como propósito dar respuesta a la pregunta que impulsó esta investigación y que además permitió observar y caracterizar los diferentes conceptos que de función lineal tenían los estudiantes.

El análisis presentado en este capítulo, plasma la evolución sobre los conceptos de función lineal que los estudiantes adquirieron durante el proceso, además permite conocer, las dificultades que dentro del mismo se presentaron para poder llegar a una concepción clara de Función Lineal.

La actividad preliminar “Trabajando y aprendiendo” (Ver anexo 1), fue realizada con el fin de identificar y caracterizar las diferentes nociones que alrededor de la Función Lineal, traían los estudiantes en el momento de iniciar esta experiencia; y que a su vez, sirvió como punto de partida para diseñar las diferentes actividades que se aplicaron y ayudaron al estudiante a precisar este concepto. A continuación se presenta la introducción a la historia que se creó para llevar paso a paso el desarrollo de la actividad preliminar.

“Pablo y Emilio son dos hermanos en busca de empleo, que desean iniciar sus estudios profesionales y colaborar con los gastos de su casa. Después de pasar varias hojas de vida, los llamaron de la constructora MARVAL, la cual está realizando un proyecto de vivienda en Floridablanca. Los contratan como obreros y el ingeniero encargado de la obra les indica lo que deben hacer. Una vez asignados los cargos se ubicaron en su sitio de trabajo y comenzaron con su

labor. Después de unas horas, Pablo y Emilio se dan cuenta de que cada uno de ellos puede pegar 20 ladrillos en una hora. Los hermanos siguieron trabajando de la misma manera durante 5 horas".

Teniendo en cuenta la situación expuesta anteriormente, se plantearon preguntas que permitieron observar las nociones que alrededor de conceptos como variable, dependencia, transformación, sucesión, proporcionalidad y patrones, (necesarios para la construcción del concepto de función), que tenían consigo los estudiantes, y el manejo de los diferentes lenguajes de representación (modelación) tales como descripción verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula o ecuación (expresión algebraica). *"Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables" Azcárate y Deulofeu (1990)*

A continuación se presentan las respuestas dadas a las dos primeras preguntas: *¿Cuántos ladrillos crees que han pegado los hermanos? Y ¿Cómo lo supo Pablo?*

> *Mayra: "Los hermanos han pegado 200 ladrillos, porque* $\frac{20\times 5}{100}$ *;* $\frac{100\times 2}{200}$*"*
>
> *Johan: "Han pegado 200, pues cada uno ha pegado 100 porque se suman 20 ladrillos de cada uno por hora y se multiplican por 5".*
>
> *Jhon: "Entre los dos pegaron 200 ladrillos, porque 20 + 20 por hora son 40 ladrillos entre los dos, entonces* $100 + 100 \times 5$ *son 200 ladrillos entre los dos".*
>
> *Jerly:* No responde, porque se encontraba fuera del aula de clases.

En la respuesta dada por Jhon, el estudiante tiene la idea del patrón que describe la situación pues se da cuenta que al sumar los 20 ladrillos que cada uno pega, le daría como resultado 40 y luego este valor lo multiplica por 5; pero al momento de escribirlo no lo expresa correctamente pues al realizar el cálculo $100 + 100 \times 5$ da como resultado 600. En la entrevista que se le hizo a Jhon para que explicara su respuesta dejo claro que la respuesta era 200 ladrillos, que lo que él quería decir era que cada uno en las 5 horas pegaba 100 ladrillos y que entre los dos serian 200. Se le hizo ver al estudiante que su razonamiento era correcto pero que al momento de escribirlo no lo había hecho de la manera correcta y se le explicó el porque

Los estudiantes, a excepción Jerly, representan la situación a través de multiplicaciones. Es importante tener en cuenta que las estructuras multiplicativas muestran la estrecha e íntima relación entre la multiplicación y la proporcionalidad, como se menciona en los lineamientos curriculares: *"Los contextos de variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo" (MEN, 1998, p.74)*

Las respuestas dadas por los estudiantes muestran su interpretación de la situación, teniendo en cuenta que a medida que transcurre el tiempo (horas trabajadas por los hermanos), el número de ladrillos pegados debe aumentar, lo que muestra una idea de variabilidad. Utilizan la multiplicación para calcular la cantidad de ladrillos que se habían pegado en ese lapso de tiempo.

Como tercer punto se pidió a los estudiantes que completaran la siguiente tabla:

HORA	LADRILLOS PEGADOS
1	40
2	80
3	
4	
5	200
6	
7	280
8	
9	

Figura 7: Tabla 1 actividad "trabajando y aprendiendo"

HORA	LADRILLOS PEGADOS
1	40
2	80
3	120
4	160
5	200
6	240
7	280
8	320
9	360

Figura 8: Tabla 1 completada por los estudiantes. Actividad "trabajando y aprendiendo"

Enseguida se realizaron las siguientes preguntas: *¿Qué ventajas tiene esa tabla? ¿Se habría podido hacer de otra manera? Si o no ¿Cómo?* Los estudiantes completaron la tabla correctamente. A continuación se muestran las respuestas de los estudiantes a las preguntas anteriores:

	¿Qué ventajas tiene esa tabla?	***¿Se habría podido hacer de otra manera? Si o no ¿Cómo?***
Mayra	*Nos ayuda a determinar cuantos ladrillos pueden pegar los hermanos en ciertas horas.*	*Si, en un plano cartesiano.*
Johan	*Pues que así tiene claro cuantos ladrillos pegan diarios.*	*Tal vez sí, pero esta es la forma más clara y concreta. En un diagrama de barras.*
Jhon	*La tabla tiene la ventaja de cuantos ladrillos se pegan en determinada hora y los datos se entienden mejor.*	*Si, plano cartesiano y diagrama de barras.*
Jerly	No responde	No responde

Tabla que muestra las respuestas de los estudiantes a las preguntas anteriores.

En las respuestas dadas por Mayra, Johan y Jhon se observa que descubren la forma que les permite describir el número de ladrillos pegados a medida que trascurre el tiempo. Los estudiantes completaron la tabla correctamente haciendo uso de la multiplicación. Además los estudiantes manifestaron encontrar en las tablas una forma más clara y ordenada de representar los datos, cuando se socializó ese punto en el aula de clases

Las tablas permiten representar funciones de dos formas diferentes; como primera opción permite visualizar la relación de dependencia existente entre las magnitudes relacionadas, es decir, ayuda a los estudiantes en la identificación de las variables dependiente e independiente al observar e interpretar cómo cambia una variable en función de la otra.

Como segunda opción ayuda a establecer de una manera más clara un modelo algebraico que describa la situación, ayudando a identificar la dependencia entre variables. Esta representación tiene un poco más de dificultad debido a que los estudiantes deben tener un poco más de conocimiento y manipulación de las variables, para poder construir un modelo algebraico. *"… Los obstáculos relativos a la determinación de la fórmula de una función son mucho mayores que los problemas de traducción algebraica de un nivel de complejidad similar. Así, a pesar de haber encontrado una ley simple que relaciona dos variables, muchos alumnos son incapaces de formular la ley en un sistema de símbolos algebraicos aceptable"* (Azcarate y Deulofeu, 1990).

En el quinto punto se preguntó a los estudiantes: *¿crees que los ladrillos pegados están en función del tiempo? Si o no y ¿por qué?* Esta pregunta se formuló con el objetivo de observar si el concepto de función les era familiar; para ello el estudiante debía identificar que la situación podía ser determinada matemáticamente por el modelo de una función y más específicamente, por un modelo de función lineal.

La representación de una función se puede hacer a través de la descripción verbal, en la cual el lenguaje natural permite dar una visión detallada y generalmente cualitativa de la relación funcional, de allí el interés en el planteamiento de la pregunta anterior, pues el estudiante para poder describir la situación, debe reconocer e identificar como varían las magnitudes relacionadas en ella. Esto lo sustentan autores como Azcarate y Deulofeu al afirmar que *"…debemos considerar en primer lugar, la descripción verbal, que utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de* *la relación funcional y a la cual nos referimos cuando queremos interpretar los restantes lenguajes, de un nivel simbólico mayor." (pág. 62)*

A la pregunta anterior (*¿crees que los ladrillos pegados están en función del tiempo? Si o no y ¿por qué?)* los estudiantes respondieron:

Mayra: *"Si, porque a medida que van transcurriendo las horas van pegando más ladrillos"*

Johan: *"Si, porque cada hora aumentan los ladrillos pegados."*

Jhon y Jerly no respondieron la pregunta, cuando se les interrogó a cerca del porque no habían dado respuesta, dijeron lo siguiente:

Jerly: *"No entiendo lo que quiere decir ladrillos pegados en función del tiempo".*

Jhon: *"No entiendo la pregunta, ¿cómo así función del tiempo?, ¿Qué es función?"*

Al analizar las respuestas de Mayra y Johan se observa que logran identificar la dependencia entre las dos variables (horas – cantidad de ladrillos pegados), al observar que cuando aumenta el tiempo los ladrillos pegados también deben aumentar, es decir, las identifican como magnitudes correlacionadas, pero no describen cómo es una magnitud respecto a la otra, esto es, como están variando dichas magnitudes.

En las respuestas de Jhon y Jerly, se observa que para ellos el término función no esta asociado con los demás conceptos con los que se relaciona, como variable, dependencia e independencia, relación y entre otros pues no tuvieron en cuenta como se relacionaban las variables para poder responder la pregunta.

Las preguntas *¿Cuál es el gráfico obtenido por los hermanos*, y *¿Qué características tiene este gráfico?* buscaban que el estudiante representara gráficamente la situación en el plano cartesiano, teniendo en cuenta la tabla que habían completado. Las graficas cartesianas son una herramienta muy útil para expresar la dependencia entre dos variables, lo que permite observar si los estudiantes realmente tienen claro la dependencia entre las variables involucradas en la situación.

El conocimiento del lenguaje gráfico, es decir, la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas, permite establecer las relaciones existentes entre las magnitudes representadas, pero al mismo tiempo su conocimiento es un instrumento mediante el cual pueden construirse nuevos conceptos, como dominio y recorrido de una función.

A continuación se muestran las representaciones cartesianas hechas por los estudiantes:

Mayra: ¿Qué características tiene este gráfico?
"Al unir los puntos se forma una línea recta diagonal, a medida que va aumentando el tiempo van aumentando la cantidad de ladrillos"

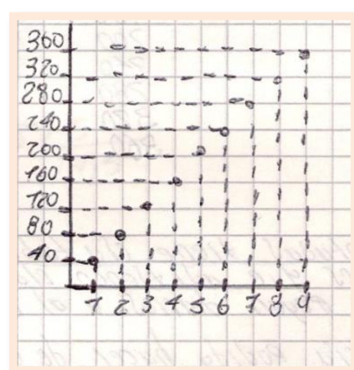


Figura 9: gráfico realizado por Mayra

Johan: ¿Qué características tiene este gráfico?

"Que sale una línea recta identificando cuánto tiempo y cuántos ladrillos se pegan en cada hora"

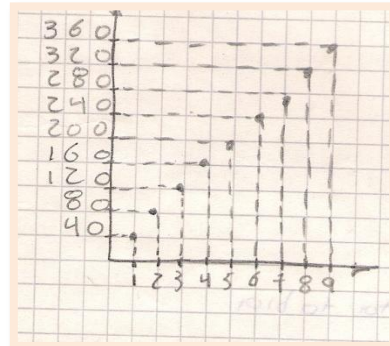


Figura 10: gráfico realizado por Johan

Jhon: ¿Qué características tiene este gráfico?

"Plano cartesiano"

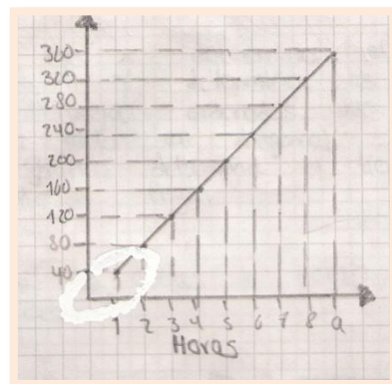


Figura 11: gráfico realizado por John

Jerly: No realizó el gráfico, pero si dio la siguiente respuesta:

"El gráfico nos permite ver la cantidad de ladrillos pegados y en que tiempo"

En las respuestas dadas por los estudiantes se identifica que tienen la concepción de creer que una función es lineal porque el gráfico da una línea recta característica que identifica a una función lineal, que le permite al estudiante a través de ella, llenar alguna tabla de valores, expresar con sus palabras lo que ocurre con las variables y hasta hallar un modelo algebraico para modelar la situación de forma general.

Mayra, Johan y Jhon ubicaron correctamente el tiempo en el eje x y la cantidad de ladrillos pegados en el eje y, estableciendo una escala para el eje x de uno en uno y en el eje y de cuarenta en cuarenta mostrando una buena graduación de los ejes. Los gráficos de Mayra y Johan tienen en común que ninguno de los dos unió los puntos, lo que se traduce en que solo tenían en cuenta los datos tabulados y no asociaron que entre cada pareja ordenada de puntos estaban presentes mas parejas ordenadas con su tiempo en x y un valor de cantidad de ladrillos en y. Lo que muestra que los estudiantes no tienen la concepción de la continuidad de una función.

Jhon trazó la línea uniendo los puntos que había ubicado en el plano, sin tener en cuenta el origen. Al parecer no interpreta el origen como el punto en el cual los hermanos no han iniciado a pegar los ladrillos, es decir, el momento en el que el tiempo es cero y el número de ladrillos es igualmente cero.

La pregunta *¿Será que existe alguna expresión que dado el tiempo nos permita determinar exactamente cuántos ladrillos hemos pegado? ¿Si o no? Escríbela si la conoces*, tenía como objetivo identificar si los estudiantes podían hallar el modelo algebraico para la situación planteada. En esta ocasión era de gran importancia el conocimiento del lenguaje algebraico por parte de los estudiantes, pues debían representar variables dentro de la expresión, teniendo en cuenta la relación de dependencia existente entre ellas.

Era importante que los estudiantes a través de las gráficas cartesianas observaran características generales de la función como la relación entre las variables, crecimiento, dominio, recorrido y continuidad, características que se pueden observar en la gráfica cartesiana de una función, como la afirman Azcarate y Deulofeu: *"…la gráfica permite ver las características globales de la función (variaciones y periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad,* *máximos y mínimos, periodicidad, etc.) también determinables a partir de la ecuación (cuando es posible establecerla a partir de métodos elementales)"*

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta se muestran a continuación:

Mayra:

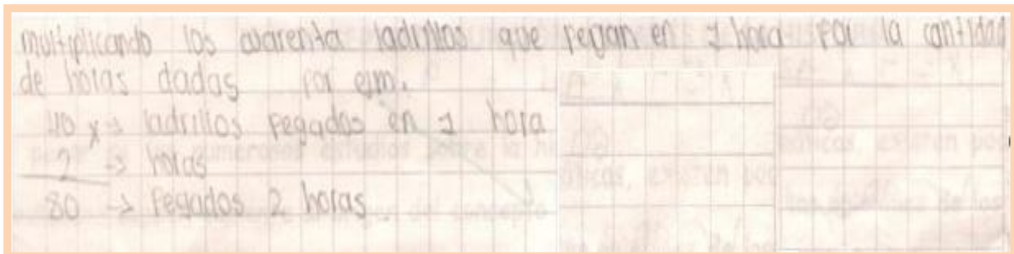

multiplicando los cuarenta ladrillos que pegan en 1 hora por la cantidad de horas dadas por ejm.
40 x → ladrillos pegados en 1 hora
2 → horas
80 → pegados 2 horas

Figura 12: Respuesta dada por Mayra

En esta respuesta se observa que Mayra tiene claro como debe hallar el número de ladrillos pegados por los hermanos a determinada hora; esto lo hace multiplicando los 40 ladrillos que los hermanos pegan por el número de horas que ya han trabajado. Se puede ver claramente que Mayra tiene un buen modelo matemático de la situación, aunque no logra expresar algebraicamente (es decir, por medio de una ecuación), dicho modelo. Cabe anotar que el modelo de Mayra para la situación es correcto, pues tuvo en cuenta la proporcionalidad y la dependencia que había entre las variables.

Johan:

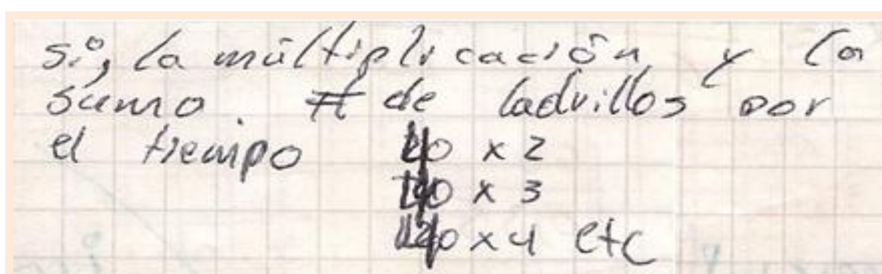

si, la multiplicación y la suma. # de ladrillos por el tiempo
40 x 2
40 x 3
40 x 4 etc

Figura 13: Respuesta dada por Johan

En la respuesta dada por Johan se puede observar que cuando hace referencia a la suma es para hallar la cantidad de ladrillos pegados por los hermanos en una hora. Luego la multiplicación de 40 por 2, o por 3, o por 4 muestra que cuarenta permanece fijo y que el que cambia es el tiempo. Cuando Johan escribe la palabra etc., destaca el hecho de que ha observado que el tiempo puede ser cualquiera, mostrando una buena aproximación a hallar el modelo que le permitirá calcular la cantidad de ladrillos dado cualquier tiempo.

Jerly y Jhon no respondieron la pregunta, lo que indica que no hallaron el modelo algebraico para la situación. Cuando se les preguntó el motivo, dijeron que no sabían como hallar una expresión que permitiera calcular los ladrillos dado cualquier tiempo, que eso les parecía muy difícil. Luego cuando se socializó la pregunta para todos y se dieron cuenta que no era tan difícil como ellos pensaban.

Teniendo en cuenta el análisis descrito para la actividad preliminar “Trabajando y aprendiendo”, se puede concluir que:

Los estudiantes tenían la concepción de creer que una función es lineal sólo porque el gráfico en el plano cartesiano da como resultado una línea recta, sin tener en cuenta que su gráfica debe pasar por el origen. Por otro lado no asocian la función con otros aspectos ligados a la función lineal, como por ejemplo, la relación entre variables, la proporcionalidad directa, dependencia, la identificación del dominio y recorrido, entre otros.

Además, los estudiantes tampoco tenían en cuenta las diferentes representaciones de una función como tabla de valores, expresión algebraica y expresión verbal.

Uno de los obstáculos más acentuados, fue la dificultad de identificar las variables presentes en las diferentes situaciones y la forma como se encuentran relacionadas, obstáculo que no permite a los estudiantes construir un concepto claro de función lineal.

No se evidencia en el trabajo realizado que los estudiantes tengan la noción y el afianzamiento del concepto de dominio y recorrido de la función.

Luego del análisis realizado a la actividad preliminar se analizaran a continuación las actividades de verificación.

La primera actividad de verificación "Trabajando con varillas" (ver anexo 3), buscaba que los estudiantes reconocieran la proporcionalidad directa entre dos magnitudes, identificaran el modelo que describía la situación, y utilizaran las diferentes representaciones de una función.

En el proceso de construcción de conceptos alrededor de la función lineal se plantea una actividad en la cual los estudiantes deben con las varillas y la gramera tomar datos para la realización del taller. Dentro del taller se planteaba la siguiente pregunta: "¿Existe *alguna relación entre las magnitudes (longitud, masa) involucradas en la situación? Justifica tu respuesta".* A continuación se muestran las respuestas dadas por los estudiantes.

> *Mayra: "Si, porque para hallar el cociente se requiere de las 2"*
>
> *Johan: "Si, porque a mayor longitud mas grande será el peso del objeto"*
>
> *Jhon: "Si porque para hallar el cociente se requiere de las dos"*

Jerly: "Que tanto la longitud y el peso aumentan, el cociente no es alterado"

En las respuestas se observa que Mayra, Johan y Jhon no identifican como se relacionan las magnitudes involucradas en la situación, ya que consideran que las variables se relacionan sólo por el hecho para calcular un cociente, más no por la forma que la longitud influye en la masa, es decir que la masa va a depender de la longitud. Jerly al parecer logra identificar que las magnitudes se correlacionan directamente, que para la situación dada si la longitud aumenta la masa también, además al realizar el cociente entre las dos magnitudes este es constante, Jerly menciona que no es alterado (propiedad de la magnitudes directamente proporcionales).

En la pregunta: *"¿Cuáles magnitudes permanecen constantes y cuáles varían? Justifica tu respuesta"* se buscaba que los estudiantes además de afianzar el reconocimiento de las magnitudes presentes en la situación y de si variaban o no, reconocieran la relación existente entre dichas magnitudes.

Mayra: "el cociente al dividir la masa por la longitud da el mismo resultado así que es constante. Varían la longitud y la masa porque van aumentando".
Johan: "permanece constante el cociente, varia la longitud y la masa porque el cociente siempre será el mismo".

Jhon: "el cociente se mantiene constante: porque al dividir P/L es el mismo resultado, varían la longitud y la masa porque aumentan cada vez mas"

Jerly: "el cociente sigue siendo 5, la masa y la longitud varían"

En general los estudiantes no tuvieron en cuenta que una magnitud es la característica de un cuerpo que puede ser medible, y que para la situación específica de la actividad, eran la masa y la longitud. Asociaron como magnitud constante al cociente, porque el resultado de este siempre era igual a cinco. Se puede apreciar en las respuestas que identifican que las magnitudes que varían son la masa y la longitud.

La pregunta *¿Cuál de las magnitudes involucradas en la situación es conveniente tomar como variable independiente? Justifica.* Permitió precisar el concepto de variable, de variable dependiente e independiente, lo que permite que las identifiquen de manera correcta dentro de una situación determinada. Esto puede observarse en las respuestas dadas por los estudiantes:

> *Mayra: "la longitud porque la masa depende de ella"*
>
> *Johan: "es conveniente tomar la longitud independiente porque si la longitud aumenta la masa también aumentará, en el eje x irá longitud y en el eje y irá el peso"*
>
> *Jhon: "longitud porque la masa depende de ella"*
>
> *Jerly**:** "la longitud es la independiente porque la masa depende de la longitud"*

Cuando se observan en conjunto las respuestas a las tres preguntas anteriores, se aprecia que logran identificar variables dependientes e independientes en situaciones determinadas, pero que no logran expresar de alguna manera la relación existente entre ellas; ejemplo de ello es el hecho de mencionar que la masa va a depender de la longitud, pero ninguno de los estudiantes explica de que forma depende o que relación existe entre la masa y la longitud.

El siguiente numeral pide a los estudiantes graficar en el plano cartesiano la información obtenida en la tabla *“Con la información obtenida en la tabla construye un gráfico de la masa respecto a la longitud”* Las gráficas de los estudiantes se presentan a continuación:

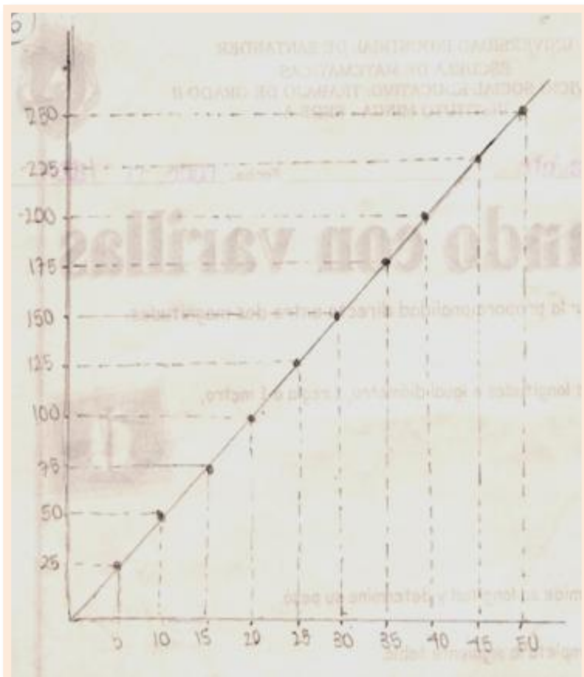


Figura 14: gráfico de la masa respecto a la longitud realizado por Mayra.

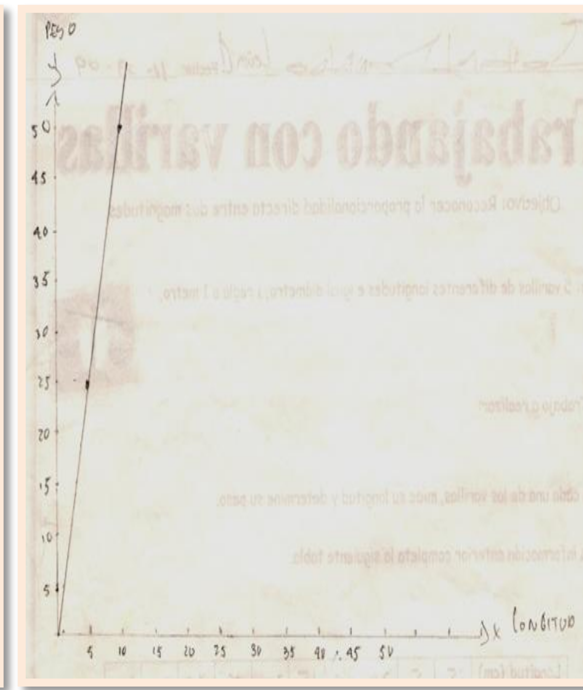


Figura 15: gráfico de la masa respecto a la longitud realizado por Johan.

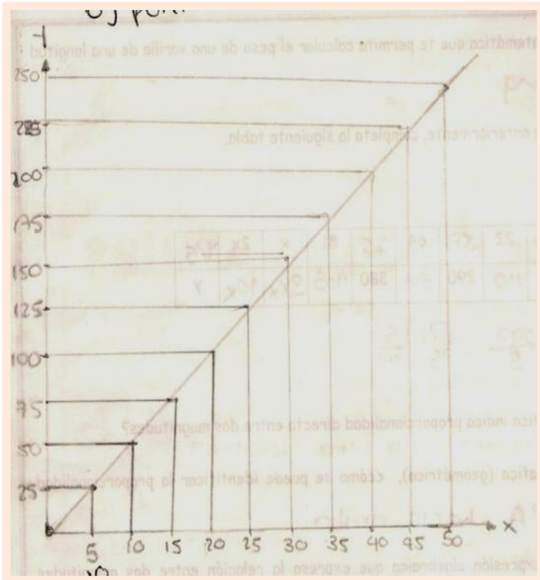


Figura 16: gráfico de la masa respecto a la longitud realizado por Jerly.

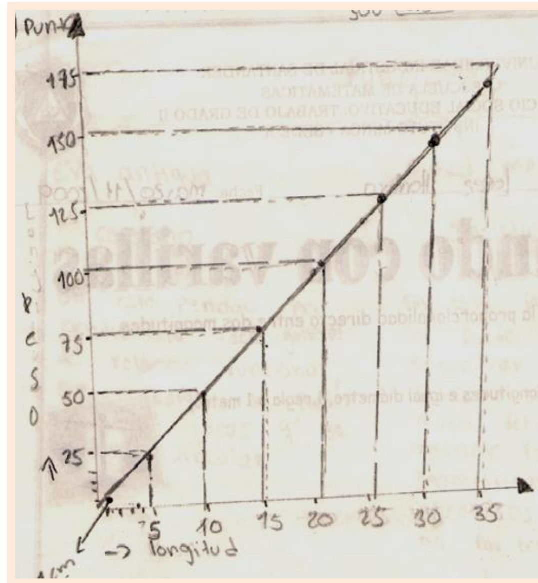


Figura 17: gráfico de la masa respecto a la longitud realizado por John.

Los estudiantes ubican los puntos que se encuentran en la tabla de manera correcta en el plano cartesiano, pues se puede apreciar que gradúan adecuadamente los ejes y ubican la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical.

Una de las concepciones que alrededor de la función lineal se encuentra y que no fue identificada por los estudiantes fue la *concepción discreta de los puntos de la recta.* Es decir, no ven la recta como un conjunto de puntos si no como puntos aislados. Esto se puede observar con las respuestas dadas por los estudiantes en el numeral siete del taller *¿puedes estimar los pesos de varillas cuyas longitudes son: 1cm, 3.5 cm, 4 cm, 8cm, 13 cm y 18 cm? Justifica tu respuesta.*

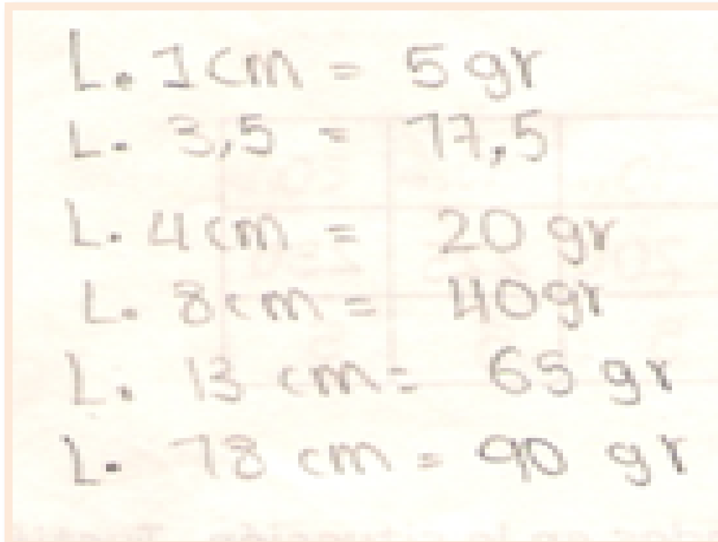


Figura 18: Procedimiento utilizado por Mayra y John para calcular la masa de las varillas.

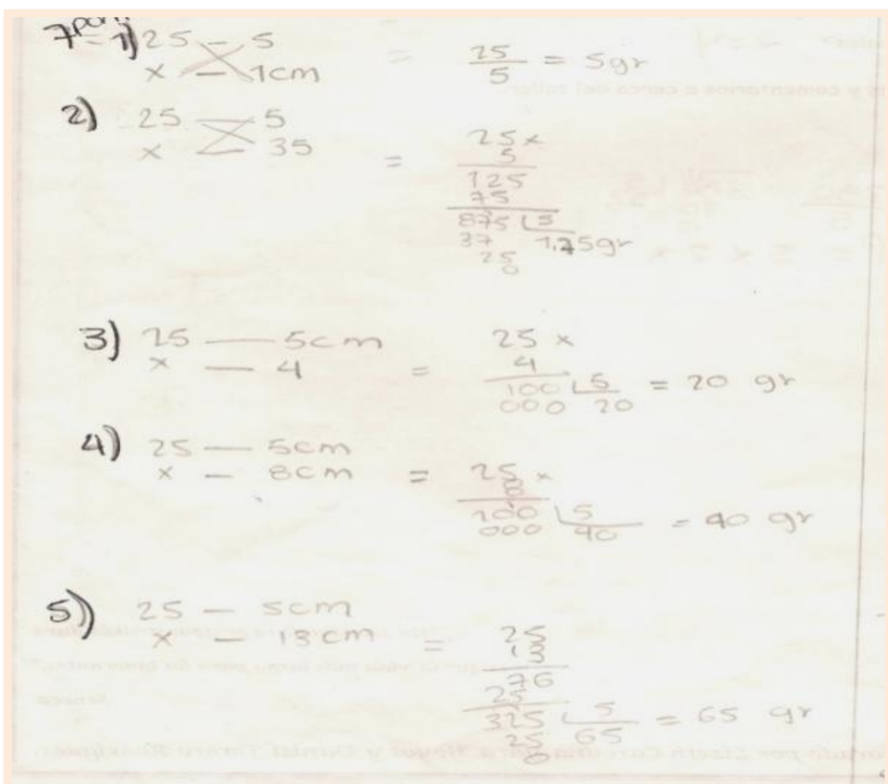


Figura 19: Procedimiento utilizado por Jerly, para calcular la masa de las varillas (regla de tres).

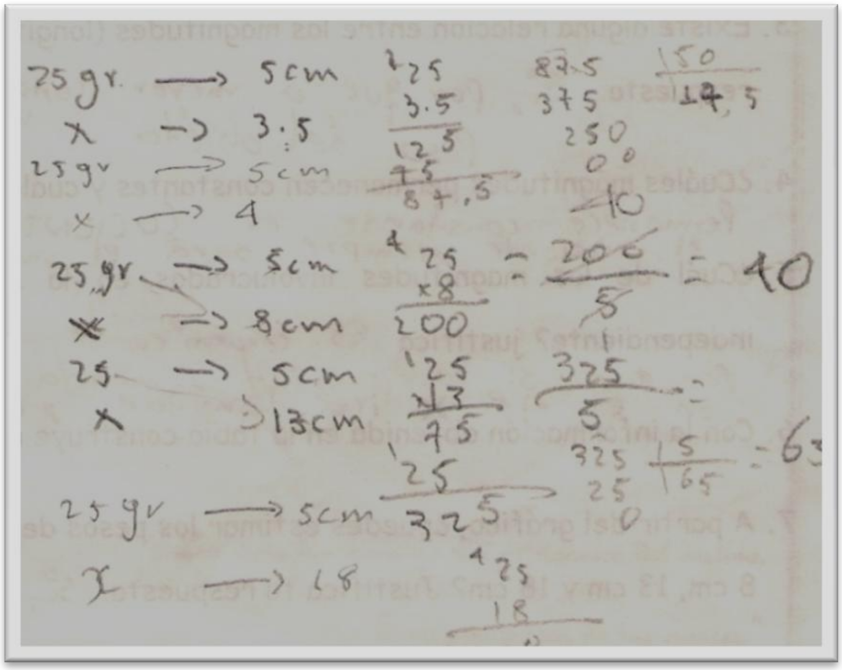


Figura 20: Procedimiento utilizado por Johan, para calcular la de las varillas (regla de tres)

Ninguno de los estudiantes estimó las masas a partir del gráfico. Cuando se le preguntó a Mayra por que no había utilizado el gráfico para obtener la información que se pedía respondió: *"…lo que pasa es que yo me di cuenta que en la tabla si yo multiplico el cociente que es cinco, por la longitud me va a dar como resultado la masa de la varilla"* (Marzo 11 de 2009).

En los casos de Johan y Jerly se puede ver que recurren al uso de la regla de tres para hallar las masas, teniendo la longitud y el cociente. Con estas respuestas se puede apreciar que en la lectura que los estudiantes le hacen a la gráfica, sólo tienen en cuenta los datos que tabularon y no analizan el hecho de que hayan unidos los puntos de la gráfica, es decir, no tienen la noción de que la gráfica es continua porque para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función; que para la situación trabajada a valores cercanos de longitudes le corresponden pequeñas variaciones de peso.

Con el siguiente ítem *"Encuentra una expresión matemática que te permita calcular la masa de una varilla de una longitud determinada",* se buscaba encontrar ideas en los estudiantes relacionadas con la representación algebraica de una función lineal, es decir; si los estudiantes logran expresar a través del lenguaje algebraico las relaciones existentes entre dos variables, consiguiendo ubicar, además, de manera correcta las variables independiente y dependiente. Al respecto los Principios y Estándares para la educación Matemática hacen referencia *"…Una comprensión de los significados y usos de las variables se desarrolla gradualmente a medida que los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas, y las relacionan con las representaciones verbales, gráficas y tabulares. Frecuentemente, las relaciones entre cantidades pueden expresarse simbólicamente en más de una forma, lo que proporciona oportunidades para que los alumnos examinen la equivalencia de varias expresiones algebraicas" (p.230)*

Las respuestas dadas por los estudiantes fueron las siguientes:

Mayra: "$P = l \times 5$"
Johan: "$Peso = 5 \times longitud$"
Jhon: "$P = l \cdot c(5)$"
Jerly: "$P = 5 \cdot long$"

Las respuestas de los cuatro estudiantes muestran como cada uno de ellos logró expresar de manera correcta y a través del lenguaje algebraico, el modelo de la situación que describe la situación particular. Cabe resaltar que cada uno de ellos expresó de diferentes formas las variables relacionadas en dicho modelo. Lo anterior muestra que los estudiantes de manera implícita lograron a través de esta actividad, reconocer y expresar algebraicamente la relación entre las dos variables.

Las respuestas de los cuatro estudiantes muestran como cada uno de ellos logró expresar de manera correcta y a través del lenguaje algebraico, el modelo de la situación que describe la situación particular. Cabe resaltar que cada uno de ellos expresó de diferentes formas las variables relacionadas en dicho modelo. Lo anterior muestra que los estudiantes de manera implícita lograron a través de esta actividad, reconocer y expresar algebraicamente la relación entre las dos variables.

En la siguiente pregunta "*¿Qué condición o característica indica proporcionalidad directa entre dos magnitudes?"* se pretendía, que los estudiantes lograran ver la proporcionalidad directa como un modelo de función lineal; el objetivo es precisar que significado tiene la frase *"una magnitud es directamente proporcional a otra, es decir, que características tiene una función que admita esta expresión, en cada uno de los distintos lenguajes en que esta pueda expresarse* (Azcarate y Deulofeu, p.92). A esta pregunta los estudiantes respondieron:

> *Mayra: "a medida que una magnitud aumenta la otra también y el cociente siempre se mantiene constante"*
>
> *Johan:*

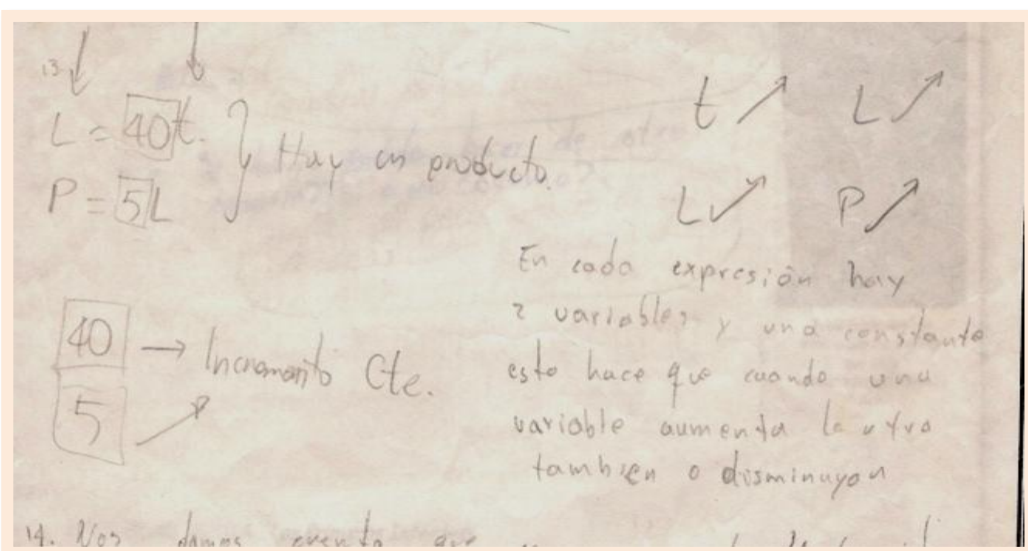


Figura 21: Respuesta dada por Johan a la pregunta N° 13 taller "Trabajando con varillas"

Jhon: "Si una magnitud aumenta la otra también aumenta y el cociente se mantiene constante"

Jerly: "si una condición aumenta la otra también aumenta"

Mayra, Johan, Jhon y Jerly tienen la idea de que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una aumenta la otra, y esa manera en la que aumenta se relaciona con la noción de factor de proporción o coeficiente de proporción. Por otra parte se dan cuenta de que la función es creciente, pero que el crecimiento sigue una regla determinada, es decir, que la variable dependiente (la masa) es 5 veces el valor de la independiente (longitud) y que teniendo esa forma se puede calcular la masa de cualquier varilla que mantenga las mismas características.

En la pregunta *"Desde el punto de vista gráfico (geométrico), ¿cómo se puede identificar la proporcionalidad directa entre dos magnitudes?"* se pretendía que los estudiantes reconocieran la proporcionalidad directa a través de la representación gráfica en el plano cartesiano de una función lineal. Observar además, si los estudiantes identifican que la razón de cambio en una función lineal es constante. A esta pregunta los estudiantes respondieron:

Mayra: "por medio de la línea recta que se forma al unir los puntos"
Johan: "*nos damos cuenta que como aumenta la longitud también aumenta el peso y que nos va a dar una línea recta y hacia arriba"*
Jhon: "porque se forma una línea recta al unir los puntos"
Jerly: "A=hacia arriba"

Se observa que los estudiantes logran identificar de manera geométrica la proporcionalidad directa como la línea recta que se forma al unir los puntos. Esta concepción crea una limitación para llegar a la interpretación de la grafica, como la expresión de una función en la que cada punto de la curva determina un par de valores, uno de cada variable; y puede favorecer la idea de que la gráfica de una función es una línea que une unos puntos determinados por la tabla.

Como última pregunta hecha a los estudiantes se planteó *¿Cómo es la forma de la expresión algebraica que expresa la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales?* Esta pregunta buscaba observar si los estudiantes identificaban el modelo general de una función lineal a través de la proporcionalidad directa y si logran, además, expresarlo a través del lenguaje algebraico de manera correcta.

> *Mayra:* "$y = xm$"
> *Johan:* "$masa = en\ y\ longitud = en\ x$"
> *Jhon:* "$y = xm$"
> *Jerly:* "$x = y$"

La respuesta dada por Mayra y Jhon es acertada, en ella se puede identificar que para ellos m es un valor constante pues aun no la identifican como la pendiente de la recta. También se identifica la variable dependiente y la variable independiente de manera general, lo cual muestra una comprensión del concepto de función lineal y de los conceptos que implícitamente se encuentran ligados a él.

Johan y Jerly no expresaron adecuadamente el modelo de la situación. Cuando se pidió a Johan que explicara su respuesta dijo lo siguiente: *"la masa va ubicada en el eje y, y la longitud en el eje x."* Lo cual da a entender que no comprendió la pregunta pues creyó que debía explicar como debían ubicarse las variables en el plano cartesiano.

Cuando se pidió a Jerly que explicara su respuesta, manifestó no haber entendido la pregunta por lo tanto no pudo explicarla. Se aclaró que la forma de su expresión "$x = y$" indicaba que las dos variables eran iguales hecho que no era cierto. Se tomó el punto $(10, 50)$ del grafico y se le explicó las coordenadas de ese punto donde 10 representaba el valor de x y 50 el de y, se le hizo ver que 10 no era igual a 50.

La explicación que Mayra dio a su respuesta fue la siguiente: *"M representa la masa y M es la variable dependiente o sea la variable que se ubica en el eje y, y el valor de y lo obtengo haciendo la multiplicación del cociente con la longitud, entonces $M = l \times 5$ se podría escribir como $y = x5$, porque la longitud son los valores que ubico en el eje x porque x es la variable independiente. Y como la expresión esta relacionando magnitudes directamente proporcionales y nos preguntan la expresión para relacionar magnitudes directamente proporcionales, yo creo que es de forma general y como 5 es un valor constante esto lo puedo representar con cualquier letra yo escogí $m = 5$, por eso creo que la expresión es $y = xm$"*.

Teniendo en cuenta el análisis descrito para la actividad "Trabajando con varillas", se puede concluir que:

Identificar en la situación planteada la presencia de un cambio, es el primer momento para tener un acercamiento con el concepto de función lineal, pero reconocer ese cambio y cómo está cambiando, es fundamental para poder definir la función en todas sus formas y representaciones**.**

Es posible que el identificar e interpretar la proporcionalidad directa, permita entender el concepto de función como una forma de representar el cambio que ocurre entre las variables dependiente e independiente, siempre y cuando el estudiante reconozca que el modelo $y = mx$ indica proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

La experiencia con las varillas permitió a los estudiantes identificar las magnitudes involucradas en la situación e identificar como era la relación entre ellas, esto se logró gracias a la toma de datos y al contacto con el material. Los estudiantes observaron y concluyeron que entre más longitud mayor masa y que por cada cm de longitud la masa aumentaría 5 gramos.

Existen numerosas situaciones del mundo real cuyo comportamiento corresponde al modelo de la función afín, es decir, magnitudes que mantienen una relación proporcional pero con un valor constante añadido. “Aprendiendo con resortes” (ver anexo 4), es una actividad que se diseño con el objetivo de construir el modelo de función afín $y = mx + b$ como modelo de predicción del estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza.

Al igual que la experiencia anterior (Trabajando con varillas) los estudiantes manipulaban los materiales para la toma de sus propios datos, necesarios para dar respuesta a las preguntas planteadas en el taller. Esto permite que el estudiante se familiarice con el contexto de la situación para obtener la información requerida. Como primera medida se quería que los estudiantes identificaran las magnitudes y describieran como se relacionaban, por eso la pregunta: *“¿Qué magnitudes intervienen en este fenómeno? Describe cómo se relacionan”,* a la cual los estudiantes respondieron:

> *Mayra: “masa y longitud, a medida que la masa aumenta la longitud también aumenta”*

Johan: "intervienen la longitud porque averiguamos la longitud de un determinado número de maras, y interviene la masa porque averiguamos la cantidad de masa de cada mara"

Jhon: "en este fenómeno intervienen las magnitudes: masa y longitud. Se relacionan a medida que el peso o masa aumenta, la longitud del resorte aumenta y cambia"

Jerly: No responde la pregunta.

En las respuestas de Mayra, Johan y Jhon se puede apreciar que identifican las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Sin embargo la relación que hallan entre ellas es que cuando una aumenta la otra también lo hace, es decir identifican que las magnitudes están directamente relacionadas, pero aún no les es posible identificar como influye una magnitud en la otra para que se produzca el cambio, que para este caso es el de hallar cuánto se estira el resorte al ir incrementando la masa que se cuelga de el. Se destaca el hecho de que los estudiantes identifiquen que al cambiar la masa que se pende del resorte la longitud también debe cambiar.

La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto. Al tratar de entender cómo y cuánto cambia el cuerpo, sistema u objeto dado, es cuando surge la noción de variación, ya que ésta se entiende como una cuantificación del cambio. En este sentido, decimos que una persona utiliza argumentos y estrategias de tipo variacional, cuando hace uso de ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio de un cuerpo, sistema u objeto que se esté estudiando (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005).

Para poder llegar a que los estudiantes lograran identificar como es el cambio que se produce al ir incrementando la masa, es decir, al ir aumentando la fuerza que se le aplica al resorte, se hizo necesario continuar con una secuencia de preguntas que les ayudaran a lograrlo. Para ello en la actividad debían tabular los datos identificar la variable dependiente y la variable independiente, y representar en el plano cartesiano las parejas ordenadas obtenidas en la tabulación de los datos,. A continuación se presentan la tabulación de los datos registrados por los estudiantes.

Mayra:

Masa (gr)	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
	10 gr	15 gr	18 gr	20 gr	25 gr
Longitud (cm)	8/2 cm	11/2 cm	15 cm	16 cm	20 cm

Figura 22: Tabla realizada por Mayra
Taller "trabajando con resortes"

Johan:

Masa (gr)	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
	25	50	75	100	125
Longitud (cm)	0,5	3,6	8	12	14,6

Figura 23: Tabla realizada por Johan
Taller "trabajando con resortes"

Jhon:

Masa (gr)	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
	50	65	85	105	12,5
Longitud (cm)	3cm	5 cm	8,3cm	11.2cm	14.4cm

Figura 24: Tabla realizada por John.
Taller "trabajando con resortes"

Jerly:

Masa (gr)	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
	25gr	45gr	85gr	110	125
Longitud (cm)	1,5cm	8,5cm	9,5cm	13,5cm	15,5cm

Figura 25: Tabla realizada por Jerly.
Taller “trabajando con resortes”

En los datos obtenidos por los estudiantes no se observa claramente alguna regularidad, ya que a aumentos constantes de masas, aparentemente no hay aumentos constantes en la elongación del resorte. Esto se debe a las imperfecciones de los instrumentos usados y a las condiciones en las que se realizó el experimento. Cabe mencionar que los puntos son obtenidos por observación que, aunque minuciosa, está sujeta a imperfecciones y limitantes. Con la toma de datos al inicio y la tabulación de los mismos, los estudiantes lograron identificar cuál era la variable dependiente e independiente. Esto se puede apreciar en las siguientes respuestas:

> *Mayra: “La variable independiente es la masa y la dependiente la longitud, porque para poder hallar la longitud se necesita que la masa aumente”.*

> *Johan: “La variable dependiente es la longitud porque si utilizamos más maras van a medir y la independiente es la masa porque la longitud depende de la cantidad de masa en las maras”.*

> *Jhon: “Dependiente es la longitud, independiente es la masa. Porque según la cantidad de masa que se aplique se determina la longitud del resorte”.*

> *Jerly: “La independiente es la masa porque la longitud depende de la masa”.*

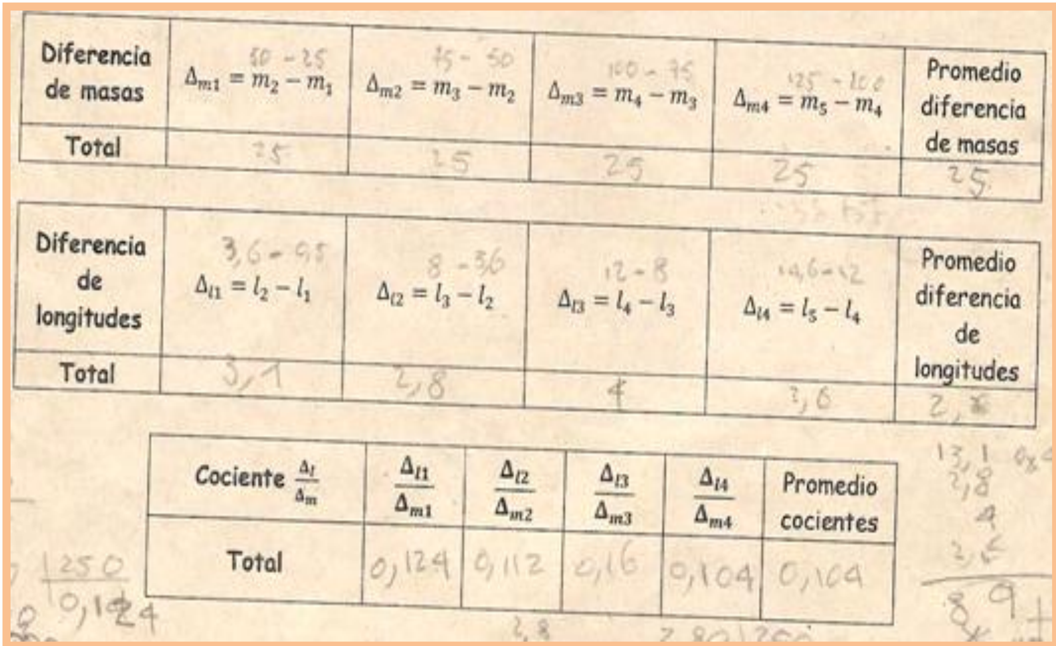
Como se puede apreciar, los cuatro estudiantes logran identificar que la variable independiente es la masa y la dependiente es la longitud, con esto se destaca el hecho de que al realizar la discriminación de la variable dependiente y la variable independiente, lo cual Sierpinska (1992) lo identifica en una de sus 19 categorías para la comprensión del concepto de función, pero establecer una relación entre las variables no era sencillo para los estudiantes. Por eso se redactó un numeral con el fin de que pudieran observar mejor cómo estaban incrementando las magnitudes involucradas en la situación. "*Ahora, realiza las diferencias de masas, las diferencias de longitudes y el cociente entre estas (diferencias de longitudes/diferencias de masas), luego registra los datos en las siguientes tablas.*" A continuación se muestra la tabulación de los datos obtenidos por los estudiantes:

Diferencia de masas	$\Delta_{m1} = m_2 - m_1$ 15 - 10	$\Delta_{m2} = m_3 - m_2$ 18 - 15	$\Delta_{m3} = m_4 - m_3$ 20 - 18	$\Delta_{m4} = m_5 - m_4$ 25 - 20	Promedio diferencia de masas
Total	5	3	2	5	3.75

Diferencia de longitudes	$\Delta_{l1} = l_2 - l_1$ 11/2 - 8/2	$\Delta_{l2} = l_3 - l_2$ 15 - 11/2	$\Delta_{l3} = l_4 - l_3$ 16 - 15	$\Delta_{l4} = l_5 - l_4$ 20 - 16	Promedio diferencia de longitudes
Total	3	3.8	1	4	2.95

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$ $\frac{3.8}{3}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$ $\frac{4}{5}$	Promedio cocientes
Total	0.6	1.26	0.5	0.8	0.79

Figura 26: Tabla realizada por Mayra
Taller "trabajando con resortes"

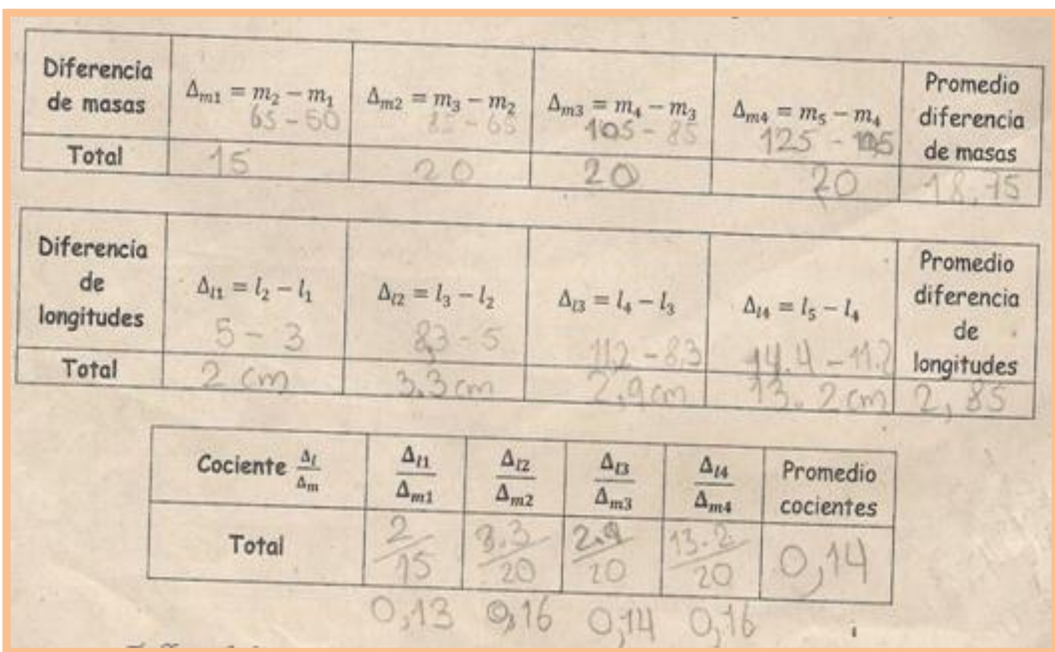


Diferencia de masas	$\Delta_{m1} = m_2 - m_1$ 50 − 25	$\Delta_{m2} = m_3 - m_2$ 75 − 50	$\Delta_{m3} = m_4 - m_3$ 100 − 75	$\Delta_{m4} = m_5 - m_4$ 125 − 100	Promedio diferencia de masas
Total	25	25	25	25	25

Diferencia de longitudes	$\Delta_{l1} = l_2 - l_1$ 3,6 − 0,5	$\Delta_{l2} = l_3 - l_2$ 8 − 3,6	$\Delta_{l3} = l_4 - l_3$ 12 − 8	$\Delta_{l4} = l_5 - l_4$ 14,6 − 12	Promedio diferencia de longitudes
Total	3,1	2,8	4	3,6	2,8

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$	Promedio cocientes
Total	0,124	0,112	0,16	0,104	0,104

Figura 27: Tabla realizada por Johan
Taller "trabajando con resortes"



Diferencia de masas	$\Delta_{m1} = m_2 - m_1$ 65 − 50	$\Delta_{m2} = m_3 - m_2$ 85 − 65	$\Delta_{m3} = m_4 - m_3$ 105 − 85	$\Delta_{m4} = m_5 - m_4$ 125 − 105	Promedio diferencia de masas
Total	15	20	20	20	18,75

Diferencia de longitudes	$\Delta_{l1} = l_2 - l_1$ 5 − 3	$\Delta_{l2} = l_3 - l_2$ 8,3 − 5	$\Delta_{l3} = l_4 - l_3$ 11,2 − 8,3	$\Delta_{l4} = l_5 - l_4$ 14,4 − 11,2	Promedio diferencia de longitudes
Total	2 cm	3,3 cm	2,9 cm	13,2 cm	2,85

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$	Promedio cocientes
Total	2/15	3.3/20	2.9/20	13.2/20	0,14
	0,13	0,16	0,14	0,16	

Figura 28: Tabla realizada por John.
Taller "trabajando con resortes"

Diferencia de masas	$\Delta_{m1} = m_2 - m_1$ 45-25	$\Delta_{m2} = m_3 - m_2$ 85-45	$\Delta_{m3} = m_4 - m_3$ 110-85	$\Delta_{m4} = m_5 - m_4$ 125-110	Promedio diferencia de masas
Total	20	35	25	15	23,5

Diferencia de longitudes	$\Delta_{l1} = l_2 - l_1$ 3,5-1,5	$\Delta_{l2} = l_3 - l_2$ 9,5-3,5	$\Delta_{l3} = l_4 - l_3$ 13,5-9,5	$\Delta_{l4} = l_5 - l_4$ 15,5-13,5	Promedio diferencia de longitudes
Total	2	6	4	2	3.5

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$	Promedio cocientes
Total	0.1	0.6	1.3	0.1	0.5

Figura 29: Tabla realizada por Jerly.
Taller "trabajando con resortes"

La lectura de los datos calculados y registrados en las tablas por los estudiantes les creó un poco de confusión, ya que en la experiencia del taller trabajado anteriormente "Trabajando y aprendiendo con varillas" el cálculo del cociente siempre daba el mismo valor, es decir, era constante. Se les explicó a los estudiantes que el cociente no resultó como ellos esperaban dado que las condiciones del experimento se prestaba para errores en los cálculos de medición ya que muchas veces tomaban la medida con el resorte aun moviéndose. Sin embargo a pesar de que el cociente no fuera constante se les hizo ver que sí tomaban valores cercanos entre ellos (ver figura 28); por eso se les pedía que calcularan el promedio de los valores de los cocientes para trabajar con un valor representativo.

Es en esta medida que las tablas cobran especial importancia, pues le permite al estudiante interpretar mejor la información de los datos obtenidos, que para este caso les cuestionaba porque no les daba el mismo valor en el cociente, aspecto que fue fundamental para que los estudiantes se interesaran en saber como estaban variando las magnitudes. Esto se reflejó cuando mencionaban que si los aumentos de masa eran constantes por qué lo que el resorte se estiraba no lo era.

El que el estudiante identificara como estaban variando las magnitudes involucradas en la situación no era tarea fácil. Por eso teniendo en cuenta el gráfico que habían realizado después de haber registrado los datos tomados se les pidió: "*A partir del gráfico construido, ¿qué significado geométrico tienen las diferencias de masas? ¿Qué significado geométrico tienen las diferencias de longitudes? Explica tu respuesta".* A continuación las respuestas dadas por los estudiantes:

> *Mayra:* "*la diferencia de masa indica el incremento que hay de una masa a otra. La diferencia de longitud es el aumento que hay de una longitud a otra"*
>
> *Johan: "el significado es que en cada masa hay un aumento este aumento es de 25 y en las longitudes sucede el mismo caso también aumentan"*
>
> *John:* "*el significado geométrico que hay entre las diferentes masas es el aumento en la cantidad a medida que vamos ascendiendo. Igualmente el significado geométrico entre las diferentes longitudes.*"
>
> *Jerly: "es un incremento para las dos magnitudes"*

En las respuestas dadas por los estudiantes se observa que interpretaron las diferencias de ambas magnitudes como el incremento entre una masa y otra, y de manera similar para la longitud, es decir, en términos de las variables estaban encontrando que la variable x (masa) estaba sufriendo un cambio entre cada pareja ordenada de datos, de igual forma sucedía con la variable y (longitud), lo que indica que por cada cambio de la variable independiente (Δx), produce un cambio de la variable dependiente (Δy).

Teniendo en cuenta que a partir de la experiencia no se evidenciaba fácilmente la forma en la que se relacionaban las magnitudes, se hizo necesario que los estudiantes calcularan el promedio de los cocientes, con el fin de encontrar ese valor constante representativo para interpretar mejor como estaban variando las magnitudes involucradas. Este cálculo del cociente se puede apreciar en las figuras 26, 27, 28 y 29 (tablas que muestran el registro de las diferencias de masas, diferencias de longitudes y los cocientes). En este sentido se estaba integrando el pensamiento estadístico con el variacional, los cuales se relacionan a través del tratamiento de los datos y de las regresiones.

Teniendo el promedio de los cocientes, se redactó la siguiente pregunta: *¿Qué indica el promedio de las diferencias de masas y las diferencias de longitudes? Justifica tu respuesta,* con el objetivo de que los estudiantes interpretaran este promedio como el valor que representaría a todos los cocientes, el cual sería ese valor constante necesario para la construcción de la expresión algebraica que modelaría la situación. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

> *Mayra:* "*un incremento representativo en las masas y longitudes"*
>
> *Johan: "el promedio de masas nos indica cuál es el incremento más representativo y que en la longitud cambia drásticamente"*
>
> *John:* "*indica el promedio de diferencias de masas al igual que diferencias de longitudes, es la suma de los datos de aumento y la división entre el número de datos ejemplo:*

$$m_1 = 20gr$$
$$m_2 = 15gr.$$
$$m_3 = 25gr$$

Aumenta 5 gr

Aumenta 10 gr

Incremento representativo de la masa y la longitud."

Jerly: "es el incremento representativo de masa y diferencias"

Las respuestas dadas por los estudiantes fueron las esperadas. Se puede evidenciar que toman el promedio como un valor representativo de los datos, en este caso de las diferencias de masas y de las diferencias de longitudes.

Encontrado ese promedio, el siguiente paso era la construcción de un modelo algebraico que representara la situación. Para ello se llevaron a generalizar la forma de calcular los cocientes, partiendo del numeral 10 del taller: *"Recordemos que para el primer cociente se tiene que* $\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}} = \frac{l_2 - l_1}{m_2 - m_1}$*; para el segundo* $\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}} = \frac{l_3 - l_2}{m_3 - m_2}$*; para el tercero* $\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}} = \frac{l_4 - l_3}{m_4 - m_3}$ *y así sucesivamente…". De lo anterior ¿Qué puedes concluir?* A continuación las respuestas dadas por los estudiantes.

Mayra: "que siempre se le quita a la longitud siguiente la dada. Que el cociente siempre se va a hallar entre dos parejas ordenadas consecutivas"

Johan: "para hallar los cocientes se le resta la cantidad anterior o siguiente a la que nos dan"

John: "para hallar el promedio se le quita siempre la longitud siguiente a la longitud dada"

Jerly: "que siempre se le quita a la cantidad siguiente la cantidad dada."

Se puede observar en las respuestas, que los estudiantes identifican que son necesarias dos parejas ordenadas para poder hallar $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$, lo cual se conoce en términos de la función como el "cambio de la longitud" entre el "cambio de la masa" respectivo en cualesquiera dos datos elegidos, es decir los cambios de las variables involucradas en la situación.

Ya con la forma de calcular el cociente y con el promedio calculado, lo siguiente era encontrar la expresión algebraica que permitiera calcular la distancia que se deforma el resorte de acuerdo a una masa determinada. Esta construcción por su grado de dificultad se socializó para todos.

En esta parte algunos estudiantes dijeron que nombrarían simbólicamente el promedio del cociente como c. Luego se les decía que para calcular c se tenía una expresión que se había utilizado anteriormente, entonces $c = \frac{l_2 - l_1}{m_2 - m_1}$, donde los valores de l eran los de la variable dependiente por lo tanto estos se podían escribir cómo $y_2 - y_1$, y los valores de la m correspondían a los valores de la variable independiente así que estos podían escribirse como $x_2 - x_1$, luego remplazando en la expresión anterior se tenía que:

$$c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Posteriormente un estudiante mencionó que para obtener una expresión se buscaba hallar el valor de y, y que con la expresión dada no era posible pues habían dos y; ante la reflexión del estudiante se comentó que la expresión $c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se podía escribir como $c = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, y que con esta ecuación se podía despejar y, puesto que la y con subíndice hacen referencia a valores de y ya dados o encontrados mientras que la y indica que aún no se conoce su valor. Entonces al despejar se llega a la siguiente expresión.

$$c(x - x_1) = y - y_1$$
$$c(x - x_1) + y_1 = y$$

Luego Johan mencionó que c se podía remplazar por k o por m porque representaba un valor constante. Así que $y = m(x - x_1) + y_1$. Encontrada la expresión los estudiantes debían calcular el estiramiento del resorte para los pesos que habían utilizado anteriormente e ir registrándolos en una nueva tabla.

A continuación se presentan las expresiones encontradas por los estudiantes y la nueva tabulación de los datos.

Mayra:
$y = 0.79x - 3.9$

Masa (gr)	10	15	18	20	25
Longitud (cm)	4	7.95	10.32	11.9	15.85

Figura 30: tabla realizada por Mayra con la expresión algebraica encontrada para modelar la situación trabajada.

Johan:
$y = 0.104x - 2.1$

Masa (gr)	25	50	75	100	125
Longitud (cm)	-0,5	3,1	5.7	8.31	10.9

Figura 31: tabla realizada por Johan con la expresión algebraica encontrada para modelar la situación trabajada.

Jhon:
$y = 0.14x - 4$

Masa (gr)	50	65	85	10,5	12,5
Longitud (cm)	3	5.1	7,9	11,2	14,4

Figura 32: tabla realizada por John con la expresión algebraica encontrada para modelar la situación trabajada.

Jerly:

$y = 0{,}5x - 11$

Masa (gr)	25	45	85	110	125
Longitud (cm)	1,5	11.5	31.5	44,5	51.5

Figura 33: tabla realizada por Jerly con la expresión algebraica encontrada para modelar la situación trabajada.

Como se puede apreciar, la expresión algebraica de los cuatro estudiantes son diferentes y ninguna de ellas describe verdaderamente la relación entre las variables; lo que nos lleva a concluir que la toma de datos influyó mucho en los resultados obtenidos.

Entre las posibles causas de las diferencias entre las ecuaciones par modelar la situación obtenidas por los estudiantes, se encuentra el hecho de errores en la toma de datos que pueden haber sido por mal manejo o lectura en los instrumentos de medición, o porque las condiciones en las que se tomaron no fueron óptimas, tal como se puede evidenciar en los datos registrados en varias de las tablas (ver figuras 22, 23, 24 y 25). Por ejemplo en las figuras 22, 23 y 25 se observa que para una masa de $25gr$, las elongaciones fueron $20cm, 0.5cm$ y $1{,}5\ cm$ respectivamente, cálculos que se diferencian en mucho.

Teniendo en cuenta el análisis descrito para la actividad "Aprendiendo con resortes", se puede concluir que:

El estudio del cambio entre las variables es muy importante para significar la noción de función, lo cual guarda relación con lo que menciona (Youschkevitch, 1976) sobre el surgimiento del concepto como relación funcional. Los estudiantes tienen la noción de cambio al expresar el comportamiento de las magnitudes involucradas en la situación, en este caso, sabiendo que si la masa aumentaba la elongación del resorte también debía aumentar.

Debido a las condiciones del experimento, los estudiantes tuvieron dificultades para ver la variación entre la longitud y la masa, las cuales de acuerdo a los datos tomados guardaban una estrecha relación con la función lineal. Así que la expresión encontrada les permitió el registro de nuevos datos de tal manera que estos si se comportaran linealmente.

Los estudiantes lograron construir el modelo lineal $y = mx + b$, gracias a la orientación que se dio en la realización de esta experiencia. Los estudiantes comentaban que cuando no se observara con claridad como era la relación entre las magnitudes utilizarían la formula $y = c(x - x_1) + y_1$, para hallar la expresión algebraica que modelara la situación.

Era necesario trabajar en otros conceptos asociados al concepto de función, con el fin de fortalecer y ayudar en la conceptualización de la función lineal de los estudiantes y pensando en ello se elaboró la tercera actividad de verificación *"Midiendo el agua"* (ver anexo 5), la cual tenía como objetivo estudiar, analizar y hallar el modelo matemático que relaciona el volumen del agua con su altura a partir de una situación concreta, y afianzar el concepto de pendiente e identificar el dominio y recorrido de una función en una situación particular

Teniendo en cuenta la secuencia de los talleres anteriores, este se realizó retomando algunos aspectos como el identificar variables, la relación entre ellas y la construcción de un modelo que explique lo que ocurre en la situación, pero con un componente más: reconocer la pendiente como algo más que el cociente entre dos términos, reconocerla como un factor importante de inclinación y dirección de una recta y además de ello, establecer el dominio y recorrido de la función que representa la situación.

Luego de que los estudiantes tomaran información, tabularan y graficaran los datos obtenidos de la situación, el quinto punto hacia referencia a la forma del gráfico obtenido en el plano cartesiano: *“¿Qué gráfico obtuviste?, ¿Cuál es la condición que hace que el gráfico tome ésta forma?”*

> *Mayra: “Obtuve una línea recta”, “la variable dependiente es el doble de la independiente”.*
>
> *Johan: “Obtuve un gráfico en línea recta”, “y toma esta condición porque las dos variables aumentan al mismo tiempo”.*
>
> *Jhon: “El gráfico muestra una línea recta, la cual demuestra que la pareja ordenada* (x, y) *esta bien, y van en aumento las dos”*
>
> Jerly no da solución a la pregunta.

La respuesta dada por Mayra tiene un ingrediente importante ya que ella menciona que la variable dependiente es el doble de la independiente, factor importante para identificar la relación existe entre las magnitudes. La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera cómo estas magnitudes se comportan en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar algunas conclusiones a cerca de las predicciones que se pueden obtener del valor de una variable dado un valor en la otra.

En las respuestas de Johan y Jhon se puede inferir que sólo identifican la variación en las magnitudes (altura y volumen), sin determinar de manera explicita la relación existente entre ellas. Al identificar en las situaciones planteadas la presencia de un cambio entre las magnitudes se observa el tránsito por la primera categoría determinada por Sierpinska (1992) para la comprensión del concepto de función en el análisis epistemológico, aunque no se justifique o explicite la forma que ese cambio tiene.

Durante la actividad los estudiantes calcularon los cocientes $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y registraron los datos de este cálculo en una tabla, el cociente daba como resultado dos; en esta parte no hubo ninguna dificultad porque en la situación trabajada anteriormente (actividad de los resortes) los estudiantes habían comprendido que este se hacia teniendo en cuenta dos parejas ordenadas. Este cociente se les pidió para ir fortaleciendo la conceptualización de la función lineal puesto que es de suma importancia que los estudiantes relacionen todos los conceptos que se asocian a ella, como es el caso de la pendiente y que lo interpreten como ese factor determinante en la inclinación de la recta; es por eso que se redactó la siguiente pregunta: *Geométricamente, ¿Qué significado tiene el cociente?*

> *Mayra: "el cociente es como la forma en la que se inclina la pendiente"*
>
> *Johan: "geométricamente creo que el cociente seria la inclinación que tomaría la pendiente"*
>
> *Jhon: "el cociente es el que determina la inclinación de una pendiente"*
>
> *Jerly: "que es una pendiente"*

Camargo y Guzmán (2005, p. 52) mencionan:

> "[…] Las situaciones problema deben permitir un recorrido que parta de la identificación de situaciones de cambio y la matematización de dichos cambios en registros numéricos, gráficos, geométricos y analíticos; enfocar la atención en la cuantificación de los cambios […]

> Y finalmente identificar que el invariante que caracteriza el cambio constante, corresponde a la pendiente de la recta que modela gráficamente la variación lineal"

Las respuestas dadas por Mayra, Johan y Jhon muestran tener claro que el cociente indica una inclinación, pero no logran expresar correctamente que es la inclinación de la recta, dado que se puede inferir en sus respuestas, que para ellos es diferente el cociente de la pendiente, y pareciera que asocian el concepto de pendiente con el modelo geométrico de la recta. En cambio la respuesta de Jerly se muestra que ha asociado el cociente con la pendiente de la recta, esto evidencia que ella caracteriza ese cambio constante corresponde a la pendiente de la recta que modela gráficamente la variación que se está dando en la situación.

La concepción de función como una relación entre variables, hace que las funciones sean definidas y utilizadas para asignar a determinados valores de la variable independiente el correspondiente valor de la variable dependiente, y no como una forma de representar los cambios identificados. Es posible que el identificar e interpretar en contexto el factor de proporción, permita entender el concepto de función como una forma de representar el cambio entre dos magnitudes. Es por eso que a través del numeral ocho del taller: *Selecciona un punto de la grafica dibujada y explica: ¿qué significado en el contexto de esta situación tienen las coordenadas de ese punto?* se quería observar si los estudiantes identificaban ese factor de proporción.

> *Mayra: "*$(25{,}50)$ *que a* $25ml$ *le corresponden* $50mm$*".*

> *Johan: "si tomo el punto* $(3{,}6)$ *me dice que si tomo* $3ml$ *aumentaran a* $6mm$ *o sea el doble".*

Jhon: "el significado que hay en un punto en la grafica es la pareja ordenada la cual indica las diferencias de longitudes y de volumen (x, y)".

Jerly: "los $33ml$ son la cantidad de agua que tomé en la jeringa para analizar la altura después de agregarla a la probeta".

En estas respuestas puede verse claramente que dos de los estudiantes expresan correctamente la relación existente entre las variables x e y, en la cual identifican que a un valor de la variable dependiente le corresponde el doble de un valor de la independiente (factor de proporción). Jhon y Jerly presentan dificultad al momento de explicar la relación entre las variables, lo que demuestra que no realizaron la lectura que se esperaba le hicieran al gráfico.

En el camino hacia la conceptualización de la Función Lineal es importante que los estudiantes identifiquen la función en varias de sus representaciones. Para ello en este taller se quería que el estudiante también expresara con sus palabras lo que ocurría en la situación de una forma general, por eso se redactó el siguiente ítem: "*Escribe una regla general que se cumpla para cualquier punto de la gráfica de acuerdo a la situación."*

Mayra: "siempre los mm van a ser el doble de los ml"

Johan: "que en la variable dependiente el número de milímetros aumentan el doble de los mililitros de la variable independiente"

Jhon: "que los mm (milímetros) aumentan el doble según el volumen en ml (mililitros)"

Jerly: "y igual al doble de x"

Puede evidenciarse que los estudiantes comprendieron la relación existente entre las dos variables ya que expresan con sus palabras de manera general lo que ocurre en la situación. Comparando las respuestas anteriores, se evidencia que para ellos resultó más sencillo pasar de lo general a lo particular que de lo particular a lo general, dado que logran explicar de manera general la situación, pero presentan dificultad al momento de analizar un punto especifico, es el caso de Jhon y de Jerly. Con el objetivo de observar si la relación existente entre las magnitudes involucradas en la situación era clara para los estudiantes se redactó el numeral 11 del taller: *¿Qué crees que sucedería si se cambia la jeringa por una cuchara, o un recipiente pequeño?*

> *Mayra: "va a aumentar de igual manera"*
>
> *Johan: "no pasaría nada porque de todas formas sabríamos como aumentarían los milímetros"*
>
> *Jhon: "no pasaría nada, siempre los milímetros aumentan el doble"*
>
> *Jerly: "ocurre lo mismo que con la jeringa"*

Se puede apreciar que los cuatro estudiantes comprendieron que no importa que recipiente se escoja para llenar de agua la probeta, pues los mm van a ser el doble de los ml, lo que evidencia que para ellos es claro que la relación existente entre las variables es independiente de los recipientes que se tomen para medir. Como ya se tenía la relación entre las variables de forma verbal, tabular y grafica, hacía falta la expresión que modelara la situación, por eso numeral 12 se redactó con ese objetivo: *Encuentra una expresión algebraica que describa la relación entre las dos variables.*

Mayra: $y = x2$

Johan:

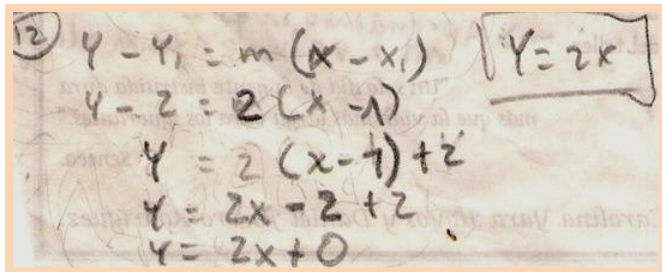

$y - y_1 = m(x - x_1)$ $\boxed{y = 2x}$
$y - 2 = 2(x - 1)$
$y = 2(x - 1) + 2$
$y = 2x - 2 + 2$
$y = 2x + 0$

Figura 34: Expresión algebraica de Johan punto 12 del taller "Midiendo el agua"

Jhon: $y = 2x$

Jerly:

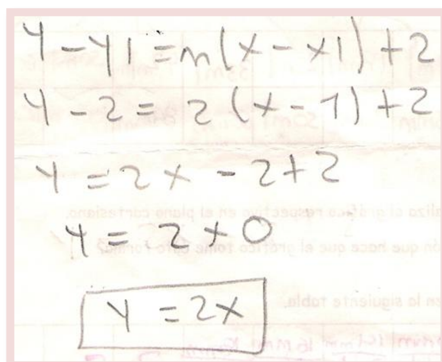

$y - y1 = m(x - x1) + 2$
$y - 2 = 2(x - 1) + 2$
$y = 2x - 2 + 2$
$y = 2 + 0$
$\boxed{y = 2x}$

Figura 35: Expresión algebraica de Jerly punto 12 del taller "Midiendo el agua"

Se destaca el manejo de operaciones algebraicas en el proceso utilizado por Jerly y Johan. En cuanto a las respuestas dadas por Mayra y Jhon no se evidencia operación alguna, cuando se les preguntó por ello respondieron que no era necesario dado que el valor de la variable dependiente era el doble de la independiente.

Es importante que en el camino hacia la conceptualización de Función Lineal los estudiantes identifiquen otros conceptos asociados a ella como lo son el Dominio y el Recorrido en situaciones de variación, relacionando el Dominio con el conjunto de los valores que toma la variable independiente y el recorrido como el conjunto de los valores que toma la variable dependiente. Según Sierpinska (1992), estas relaciones o procesos tienen que estar bien definidos ya que se refieren a las reglas, patrones, leyes que hacen alusión a la definición de función. Teniendo en cuenta esto se redactaron los numerales 13 y 14 del taller. A continuación se muestran las preguntas que se realizaron a los estudiantes y las respuestas dadas por ellos.

> *“¿Cuál es la mínima cantidad de agua que se le puede echar a la probeta y cual la máxima?”*

La respuesta de los cuatro estudiantes coincide en que la mínima cantidad de agua es $0\ ml$ y la máxima $119{,}5\ ml$.

> *“¿Cuál es la mínima altura que puede tener el agua y cuál la máxima?”*

Mayra, Johan, Jhon y Jerly coinciden en que la mínima altura dentro de la probeta es $0\ mm$ y la máxima es $239\ mm$.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes a las anteriores dos preguntas, se evidencia en ellas, que hicieron una conceptualización acertada a cerca de los conceptos de dominio y recorrido. Se les explicó que estos valores se daban en un intervalo cerrado, en este caso para el dominio el intervalo correspondiente es$[0, 119.5]$, dado que la mínima cantidad de agua seria cero y la máxima posible dentro de la probeta $119{,}5\ ml$; y para el recorrido el intervalo es $[0, 239]$ puesto que la altura mínima es cero y la máxima posible corresponde a $239\ mm$.

Teniendo en cuenta el análisis descrito para la actividad “Midiendo el agua”, se puede concluir que:

Los estudiantes lograron describir la relación existente entre las variables involucradas, puesto que a través de la experiencia realizada, identificaron el factor de proporcionalidad entre las magnitudes relacionadas.

La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera cómo las magnitudes se comportaban en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno, que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones que se pueden obtener del valor de una variable dado un valor a la otra.

Hallar la expresión algebraica que modelara la situación no fue difícil después de que los estudiantes describieron como estaban cambiando las magnitudes involucradas. Esto se puede apreciar en las respuestas que dieron Mayra y Jhon, pues ellos no siguieron el mismo proceso utilizado en el taller de los resortes como lo hicieron Johan y Jerly (ver figura 34 y 35).

Se logró que los estudiantes identificaran la pendiente como una medida que influye en la inclinación de una recta. El dominio y el recorrido lo asociaron como el conjunto de valores que podían tomar el volumen y la altura en dicha situación.

Luego de la experiencia con la situación concreta titulada midiendo el agua, se llevó otra situación al aula que permitía ampliar los conceptos de función ya trabajados. En los talleres anteriores se había trabajado en la construcción del modelo de la función lineal y el modelo afín, pero en ambos casos con pendientes positivas se diseño una actividad para la cual la pendiente fuese negativa. Por eso se creó y aplicó la cuarta actividad de verificación: “Midiendo el agua II” (ver anexo 6),que tenía como objetivo estudiar, analizar y hallar el modelo matemático que relaciona el volumen del agua con su altura a partir de una situación concreta, afianzar los conceptos de dominio y recorrido de una función en una situación particular.

En esta ocasión se propuso lo contrario que en la situación trabajada anteriormente, en vez de agregar agua a la probeta, se le sacaba con la jeringa. Inicialmente se les dijo a los estudiantes que la altura que tenía el agua que estaba dentro de la probeta media $220\,mm$, luego como aún no se había sacado agua los ml serian igual a cero. Los cuatro estudiantes identificaron las variables, tabularon los datos y graficaron en el plano cartesiano obteniendo el siguiente gráfico.

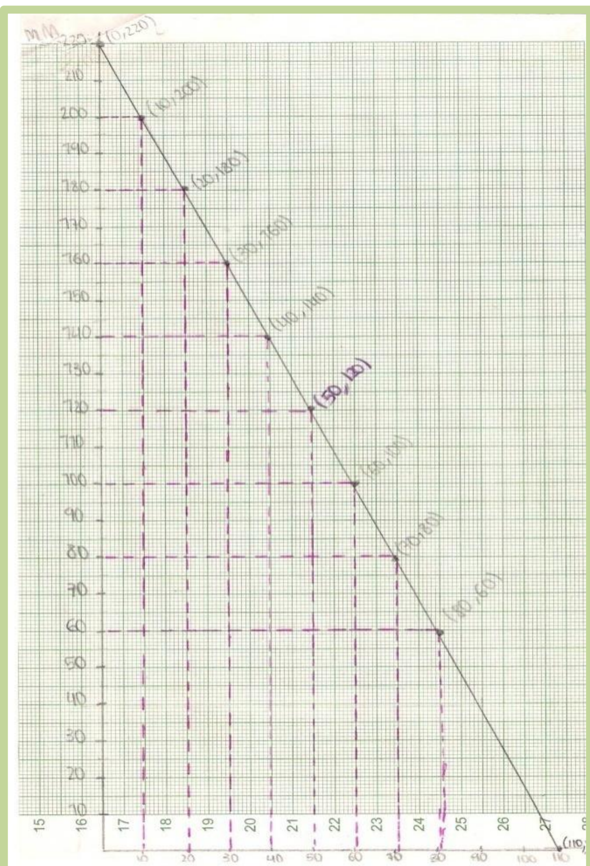


Figura 36: gráfico obtenido por Mayra, Johan y John "altura respecto al volumen"

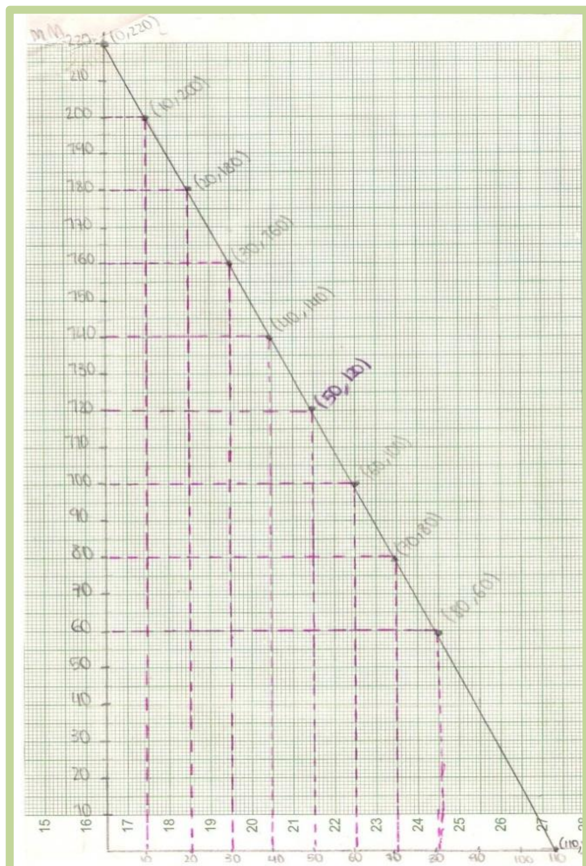


Figura 37: gráfico realizado por Jerly "altura respecto al volumen"

El gráfico obtenido por los estudiantes muestra que realizan la asociación entre pares de valores y puntos del plano. Además de que tuvieron en cuenta de que la hoja milimetrada les permitía trabajar con los puntos obtenidos sin necesidad de tener que trabajar a escala los ejes. Se destaca el hecho que los cuatro identificaron que para cuando la altura del agua en la probeta era $220\,mm$, el volumen del líquido sacado de la probeta debía ser cero. En el gráfico obtenido por Jerly se aprecia que para cuando la altura es cero el valor en el eje x no es $110\,ml$ sino $130\,ml$, hecho que indica que no tuvo en cuenta cual era el valor de x para cuando la altura es cero, sino que trazó la línea con los puntos obtenidos por ella hasta que tocara el eje x en cero. Cuando a Jerly se le hizo ver que esa coordenada no correspondía con la relación entre las magnitudes, dijo que no había tenido en cuenta para qué valor de x la altura debía ser cero.

Luego de realizar el gráfico se quería trabajar en la interpretación del mismo, es decir que los estudiantes describieran la relación entre las magnitudes a través de este; por eso se realizaron las preguntas: *¿Qué gráfico obtuviste?, ¿Cuál es la condición que hace que el gráfico tome ésta forma?, ¿Por qué el gráfico no pasa por el origen?* A continuación se muestran las respuestas dadas por los estudiantes.

> *Mayra: "Obtuve una línea recta. A medida que voy sacando cierta cantidad de mm la altura va disminuyendo el doble. La gráfica no pasa por el origen porque la altura va disminuyendo mas no aumenta"*

> *Johan: "Obtuve un gráfico de línea recta haciendo que por cada ml disminuyan 2mm no pasa por el origen porque empieza de atrás para adelante es decir no existe la pareja (0, 0) si no que empieza en (0, 220) y porque una magnitud aumenta y la otra disminuye"*

Jhon: "Una recta. Que según el doble del volumen la altura disminuye, y porque en este caso la altura no aumenta esta disminuye".

Jerly: "Una línea recta, ml disminuye el doble de los mm"

En las respuestas se aprecia que los estudiantes describen muy bien la relación que se da entre las magnitudes y utilizan términos como: "el doble de" hecho que refleja que identifican como están variando las magnitudes. Cuando los estudiantes logran describir verbalmente la relación entre las variables involucradas, se encuentran muy cerca de poder dar una regla o generalización de la relación entre las mismas para dicha situación. Hasta este momento se puede afirmar que los estudiantes han pasado por tres de las categorías de los actos de entendimiento de un concepto matemático, que para este caso es el concepto de función que son según Sierpinska (1992), la identificación, la discriminación y la generalización.

Aprovechando la dirección e inclinación de la recta obtenida por los estudiantes para esta situación, la cual es era diferente a todas las obtenidas en las situaciones trabajadas anteriormente (trabajando con varillas, aprendiendo con resortes, midiendo el agua), se redactó la siguiente pregunta: *¿Qué signo tiene la pendiente de la recta?, ¿Por qué?* A continuación se muestran las respuestas dadas por los estudiantes.

Mayra: "menos, se debe a que la altura disminuye"

Johan: "Tiene signo negativo (-) y quiere decir que la pendiente será negativa y que va de atrás para adelante"

Jhon: "El signo es (-) menos porque en este caso la pendiente es negativa, primero no pasa por el origen y segundo no aumenta, disminuye".

Jerly: "negativo, a que la altura va disminuyendo"

En las respuestas dadas por Mayra y Jerly, ellas asocian el signo de la pendiente con el hecho de que una magnitud va disminuyendo que para este caso es la altura. Johan menciona que "va de atrás para adelante", él explicaba su respuesta haciendo énfasis que la recta no empezada en el punto $(0, 0)$ sino que para un valor de x igual a cero el valor de y no era cero, que por eso la gráfica empezaba de atrás para adelante. Aun cuando no es totalmente explicito, se puede inferir de la respuesta dada por Johan, que asocia el signo de la pendiente al decrecimiento de la función, ya que menciona que la recta no aumenta sino que disminuye.

Como ya los estudiantes habían representado la situación verbalmente, tabularmente y gráficamente, faltaba generalizarla hallando un modelo que describiera la variación entre las magnitudes. Por eso se redactó el numeral 12 del taller: *Encuentra una expresión algebraica que describa la relación entre las dos variables.*

Mayra: $y = -2x$

Johan:

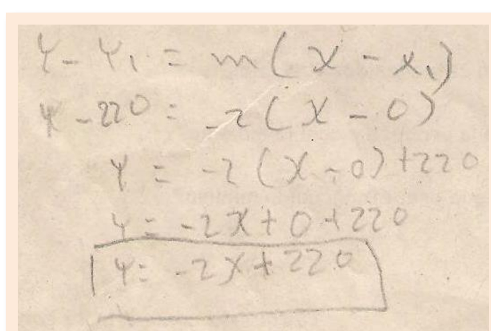


Figura 38: expresión realizada por Johan.
Punto 11 del taller "Midiendo el agua II"

Jhon: $y = 2x + 220$

Jerly:

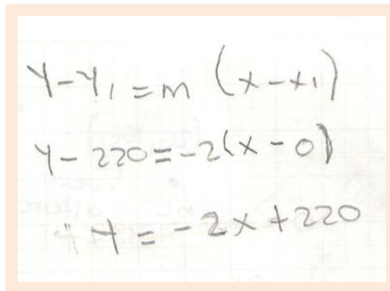


Figura 39: expresión realizada por Jerly. Punto 11 del taller "Midiendo el agua II"

Johan y Jerly muestran en sus repuestas un buen manejo de las operaciones algebraicas y conocimiento sobre ciertos presaberes, llegando a la expresión que les permitía generalizar la relación entre las variables, explicando que el -2 representaba la forma como disminuían los milímetros, la x a la cantidad de mililitros que se sacaban de la probeta y 220 porque esa era la altura inicial del nivel del agua al inicio de la situación. Con esta conclusión a la que llegaron los dos estudiantes, se evidencia que para ellos cada uno de los términos de la expresión representa algo en la situación, ya que a cada término le atribuyen un significado apropiado según la situación planteada.

Mayra quiso expresar la relación entre las variables sin necesidad de realizar ninguna operación algebraica pero no tuvo en cuenta que para un valor de x igual a cero la variable y no era cero sino 220, es decir, paso por alto varios detalles entre ellos, el no comprobar que su expresión se cumpliera para todo valor de x en la situación. Jhon tampoco realizó operaciones algebraicas, se le pasó el hecho de que la pendiente tenía signo negativo y que la expresión dada por él tampoco describe la relación entre las variables.

Los cuatro estudiantes identificaron el dominio y el recorrido de la función que modelaba la situación (esto se les pedía en el numeral 12 y 13 del taller) y lo expresaron en intervalos cerrados. La respuesta dada –por los cuatro- fue la siguiente: el dominio son los $x \in [0,110]$, y el recorrido los $y \in [0,220]$.

En la entrevista que se le realizó a los estudiantes para que compartieran sus respuestas y el por qué de ellas, identificaban que los mililitros podían tomar el valor de cero porque así representa el momento en el cual aún no se sacaba agua de la probeta y la altura seguía siendo la misma; que a medida que se seguía sacando agua hasta que no quedara nada dentro de la probeta, la altura del agua debía ser cero. Esto refleja que los estudiantes han identificado el conjunto de valores para los cuales se cumple la relación entre las variables, que de acuerdo a Sierpinska (1992), es importante que esa relación entre dominio y recorrido quede bien definida para que los estudiantes.

Teniendo en cuenta el análisis descrito para la actividad “Midiendo el agua II”, se puede concluir que:

Los estudiantes asocian el signo de la pendiente con la inclinación y dirección que esta debe tener.

Que los conjuntos dominio y recorrido tienen un significado importante. Ya que a través de ellos pueden describir para qué valores de x e y se cumple la relación entre las variables en la situación dada.

Jerly y Johan lograron hallar el modelo algebraico que describía la relación entre las variables, mostrando comprensión de los términos que conforman la expresión.

Para mirar si se cumplió con el objetivo propuesto para esta investigación se diseñó la evaluación titulada “Poniendo en práctica mi aprendizaje” (ver Anexo 7). Con esta se quiso que los estudiantes representaran una función de todas las formas trabajadas durante la experiencia (verbalmente, tabularmente, gráficamente y algebraicamente), y detectar si reconocían la variabilidad en diferentes tipos de situaciones. A continuación se presenta el análisis hecho a las evaluaciones de los cuatro estudiantes que son el centro de esta investigación.

En el primer punto de la evaluación se buscaba que los estudiantes identificaran si las situaciones que se les presentaban se podían modelar mediante una función lineal (ver punto 1 del Anexo 7), a continuación se relacionan las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las situaciones:

Para la situación a), b), c) y d), Mayra, Johan, Jhon y Jerly responden.

> *Mayra:*
> *a) “Esta si se puede modelar por medio de una función lineal ya que el automóvil se mueve a una velocidad constante y tiene las dos variables tiempo y distancia”*
> *b) “No se puede modelar ya que para cada peso no hay una estatura determinada”.*
> *c) “Si porque a medida que el motor trabaja más el combustible va disminuyendo”*
> *d) “No porque la cantidad de botellas de gaseosa vendidas no depende del número de cervezas vendidas”*
>
> *Johan:*
> *a) “Si pues si corre más distancia, más tiempo gastará”*
> *b) “El peso no depende de la estatura ni la estatura depende del peso, pues si pesa más no crecerá o si es más alto no aumentara el peso”.*
> *c) “Si se pude porque depende una de la otra y porque si trabajan más menos combustible le quedará”*

d): "No porque vender las botellas no depende de vender la cerveza, aunque entre más se venda cerveza más envases quedarán"

Jhon:

a) "Si se pude modelar como una función lineal intervienen dos magnitudes, una independiente y la otra dependiente"

b) "No se pude modelar como función lineal, porque el peso no se puede dar por estatura ya que puede tener la misma estatura más no pude pesar igual"

c) "Si porque allí intervienen las dos magnitudes cantidad y tiempo, donde según el tiempo la cantidad se mide por el tiempo trabajado"

d) "No porque allí solo intervienen una sola magnitud, cantidad"

Jerly:

a) "Si se puede porque la distancia depende del tiempo"

b) "No se pude porque no hay relación en las magnitudes"

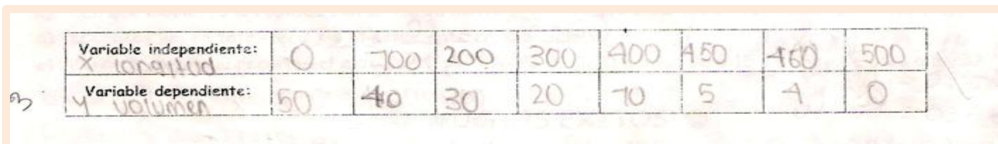
c) "Si se pude la cantidad depende del tiempo que trabaje"

d) "No se puede porque no hay relación alguna"

Al analizar las respuestas dadas a las preguntas en mención, se puede apreciar que los estudiantes lograron identificar en cuales de las situaciones se daba una relación entre las variables involucradas y en cuáles no. Es en este sentido, en el que los estudiantes identifican, reconocen y avanzan en la comprensión de la variación, y relación entre dos magnitudes en una situación determinada, que permitirá precisar y afianzar el concepto relacionado con la función lineal, así como de las diferentes formas de representación de la misma y conceptos asociados a ella.

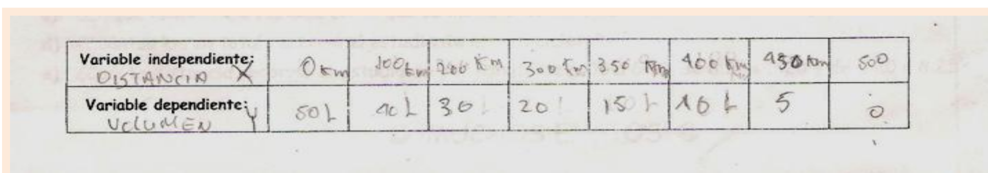
En el segundo punto de la evaluación se presentó la siguiente situación: *"Un automóvil gasta 10 litros de gasolina cada 100 km y en su tanque hay 50 litros.*

Supongamos que ha recorrido 383 km, ¿Cuántos litros de gasolina quedan en el tanque?" Con esta pregunta se esperaba que los estudiantes encontraran la cantidad de gasolina restante en el automóvil conociendo la distancia recorrida. Para ello se les pidió a los estudiantes que identificaran las magnitudes y la relación entre ellas, registraran los datos en una tabla numérica, graficaran en el plano cartesiano, calcularan la pendiente, identificaran el dominio y el recorrido de la situación, y hallaran la expresión algebraica que relacionaba las variables. A continuación se muestra los datos registrados por los estudiantes.



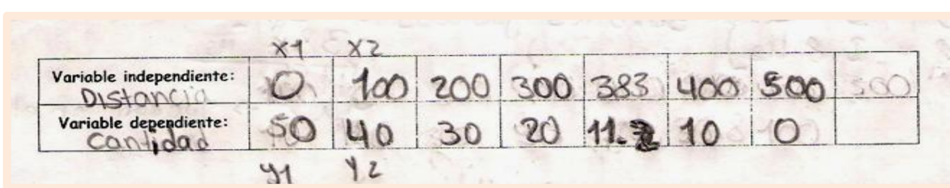
Variable independiente: X longitud	0	100	200	300	400	450	460	500
Variable dependiente: Y volumen	50	40	30	20	10	5	4	0

Figura 40: Tabla de datos de Mayra



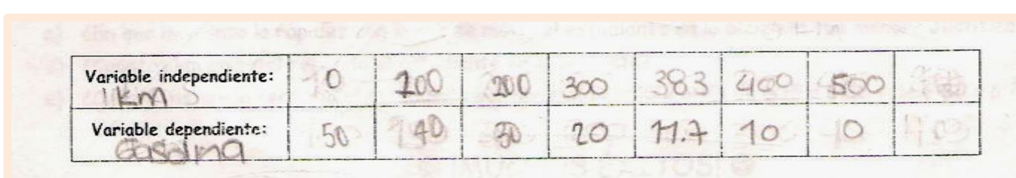
Variable independiente: DISTANCIA X	0 km	100 km	200 km	300 km	350 km	400 km	450 km	500
Variable dependiente: VOLUMEN Y	50 L	40 L	30 L	20 L	15 L	10 L	5	0

Figura 41: Tabla de datos de Johan.



	x1	x2						
Variable independiente: Distancia	0	100	200	300	383	400	500	500
Variable dependiente: cantidad	50	40	30	20	11.[illegible]	10	0	
	y1	y2						

Figura 42: Tabla de datos de John.



Variable independiente: 1 km	0	100	200	300	383	400	500	[illegible]
Variable dependiente: Gasolina	50	40	30	20	11.7	10	0	[illegible]

Figura 43: Tabla de datos de Jerly.

Como se puede apreciar en las figuras 42 y 43 los estudiantes (Jhon y Jerly) hallaron el valor para cuando la variable independiente es igual a 383 la dependiente debe ser 11.7, la cual responde a la pregunta realizada cuando se dio la situación. Esto demuestra que los estudiantes hallaron primero la expresión algebraica y luego tabularon los datos, mientras que Mayra y Johan, tabularon los datos haciendo cálculos sencillos, como por ejemplo, si no se había recorrido alguna distancia la cantidad de litros de combustible en el tanque seguiría siendo la misma, cuando han recorrido $100\ km$ disminuirá el volumen $10\ l$ de manera que quedarían $40\ l$, y así continuaron hasta que no quedara gasolina en el tanque.

Los gráficos obtenidos después de la tabulación de los datos fueron las siguientes:

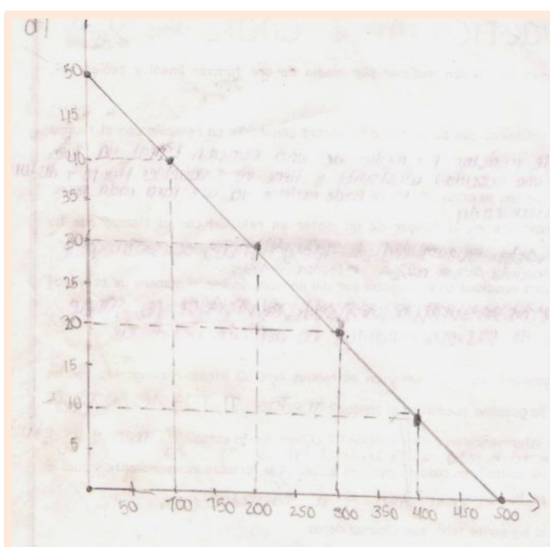


Figura 44: Gráfico de Mayra. Distancia respecto al volumen.

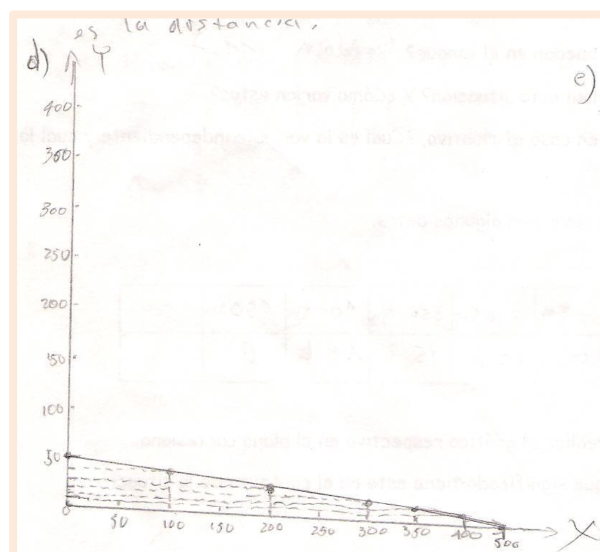


Figura 45: Gráfico de Johan. Distancia respecto al volumen.

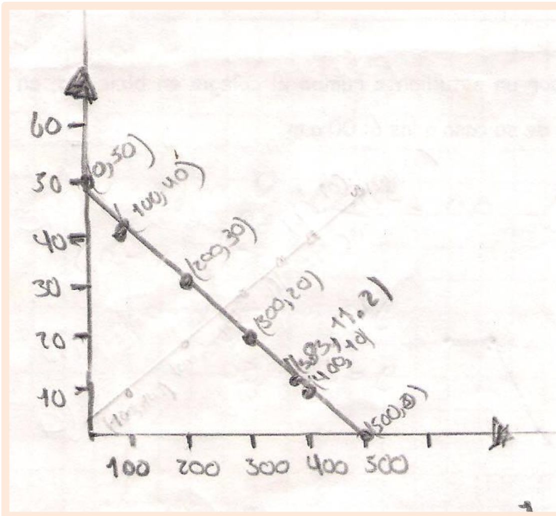


Figura 46: Gráfico de John. Distancia respecto al volumen.

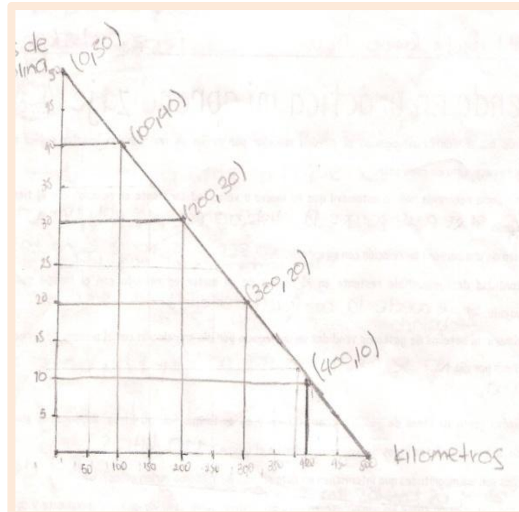


Figura 47: Gráfico de Jerly. Distancia respecto al volumen.

En estos cuatro gráficos se puede apreciar que los estudiantes realizan una muy buena graduación de los ejes, es decir, determinan la unidad de cada uno de de ellos y así establecen la correspondencia entre puntos y números del plano. La dirección de la recta y su inclinación les muestra a los estudiantes que la pendiente de ésta es negativa por la forma como están variando las magnitudes. Los cálculos realizados para hallar la pendiente de la recta fueron los siguientes:

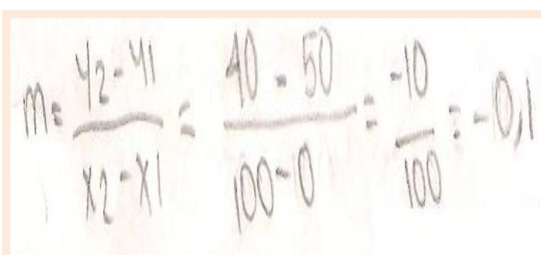


Figura 48: pendiente encontrada por Mayra.

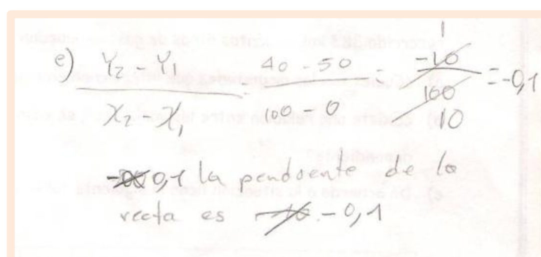


Figura 49: pendiente encontrada por Johan.

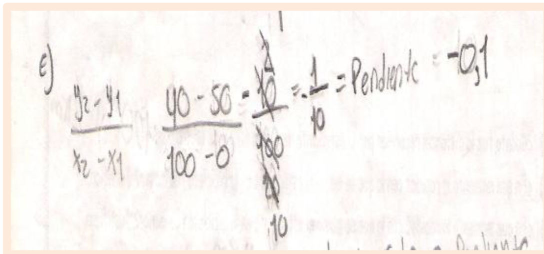


Figura 50: pendiente encontrada por Jhon.

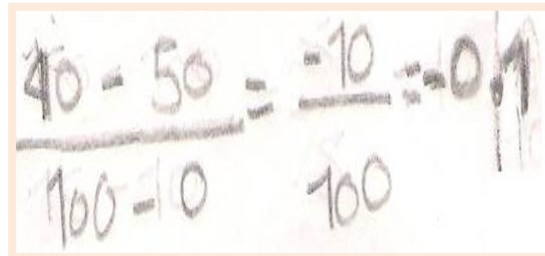


Figura 51: pendiente encontrada por Jerly.

Se destaca el hecho que para este caso, que los estudiantes calcularon el valor constante que indicaba como estaban variando las magnitudes no se veía a simple vista. Los educandos recurrieron a lo aprendido en el taller de los resortes en el cual se generalizó la forma de obtener esa razón de cambio constante entre las magnitudes, conocida como pendiente. Con el cálculo de la pendiente reemplazaron en la formula que les permite obtener el modelo algebraico $y = mx + b$.

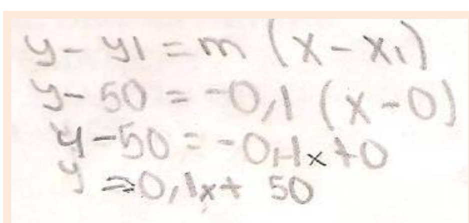


Figura 52: expresión algebraica dada por Mayra

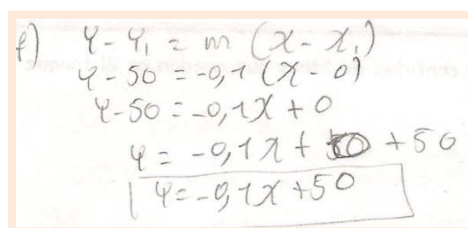


Figura 53: expresión algebraica dada por Johan

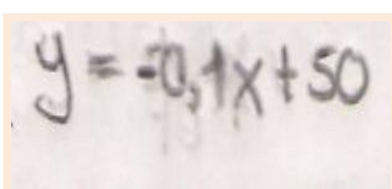


Figura 54: expresión algebraica dada por John

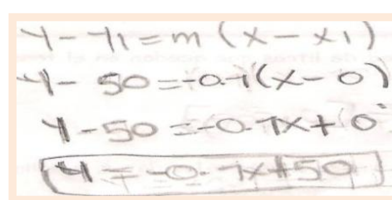


Figura 55: expresión algebraica dada por Jerly.

En estas expresiones se observa que los estudiantes tienen un buen manejo de las variables y de operaciones algebraicas, hecho que les facilita la obtención del modelo algebraico para describir cualquier situación que se comporte linealmente, y así poder obtener otros puntos de la recta que no se identifican tan fácilmente como es el caso de esta situación en la que se les pidió que calcularan la cantidad de combustible restante en el tanque cuando el automóvil había recorrido $383\ km$. Al final los cuatro estudiantes llegaron a la respuesta correcta: *"Quedan $11{,}7\ lt$ de gasolina en el tanque"*.

En esta situación los cuatro estudiantes pasaron por las cuatro categorías identificadas por Sierpinska (1992), de los actos de entendimiento de un concepto matemático que son: La identificación, cuando los estudiantes reconocen las magnitudes que están presentes en la relación; la discriminación, discriminación entre las variables dependiente e independiente; generalización, interpretación de la situación a través de un modelo algebraico o verbal y la síntesis, al poder organizar todas las representaciones trabajadas de la función y obtener información más detallada de ellas.

Es importante que los estudiantes identifiquen el dominio y recorrido de la función, para que los puedan asociar como los conjuntos de valores para los cuales la función es verdadera. Para la situación dada no tuvieron ningún problema en identificarlos: "*"El dominio son los $x \in [0{,}500]$ y el recorrido son los $y \in [0{,}50]$"* (respuesta dada por los estudiantes).

En el tercer punto (ver anexo 7) de la evaluación, se buscaba que el estudiante a través de una tabla de valores dada, obtuvieran la información suficiente para plantear una situación que se ajustara a los datos y hallaran el modelo algebraico que describía la situación. A continuación se muestran las situaciones redactadas por los estudiantes.

> *Mayra: "Un escalador se encuentra a* $30\,mt$ *de altura a las* $6{:}00$ *am, cada* 30 *minutos sube* $30mt.$ *¿Cuántos metros sube el escalador en 3 horas y media?"*
>
> *Johan: "Un señor está a* 30 *metros de su casa pero él empieza a caminar a* $60m$ *por hora ¿a cuántos metros se encuentra en* 9 *horas?"*
>
> *Jhon: "Un piloto recorre el país en su avión de ciudad en su ciudad, según todas las ciudades de una a la otra se llevan* 30 *km de distancia, ¿a cuanto tiempo demora en llegar de una ciudad a otra sabiendo que entre ellas hay* $0{,}5$ *minutos de diferencia, calcula el tiempo de cada una?*
>
> *Jerly:* No plantea una situación para los datos dados.

Las situaciones redactadas por Mayra y Johan, muestra que los estudiantes lograron interpretar los datos que se les presento en la tabla, e identificaron como era la relación entre las dos variables. Los dos tomaron las magnitudes distancia y tiempo, tomando el tiempo como la variable independiente y la distancia como la dependiente, además de ello también identificaron que cuando x toma el valor de cero y es igual a 30.

En cambio la situación dada por Jhon no es clara en el sentido que al parecer él toma la distancia como la variable independiente y el tiempo como la dependiente. Hecho que muestra que no dio una adecuada interpretación a los datos de la tabla.

Jerly no plantea una situación para los datos de la tabla, lo que se traduce que a pesar del avance que Jerly a tenido en la conceptualización de la función, al momento de interpretar la información y pasar a la parte propositiva no es capaz de hacerlo, ya que mencionaba que no había sido capaz de ajustar los datos a una situación y que no sabía con que magnitudes trabajar. Además de que no se dio cuenta como variaban los datos de la tabla.

Por último, el cuarto punto decía: "*El siguiente grafico representa la distancia recorrida por un estudiante rumbo al colegio en bicicleta, en relación con el tiempo empleado. Nota: el estudiante sale de su casa a las 6: 00 a.m.*" Aquí se buscó que los estudiantes interpretaran la información presentaba en el gráfico y sacaran conclusiones a través de él.

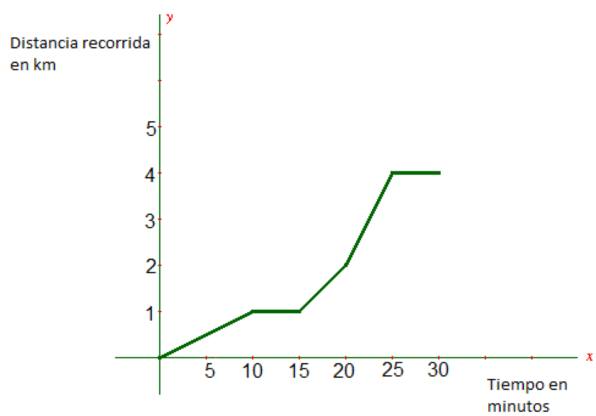


Figura 56: gráfico de la distancia respecto al tiempo punto 4 de la evaluación "Poniendo en práctica mi aprendizaje"

A continuación se muestra el análisis que los estudiantes realizaron a cada intervalo de tiempo.

"¿Cuánto fue la distancia recorrida por el estudiante de 6:10 a 6:15 y de 6:25 a 6:30?"

Mayra: "6:10 a 6:15, 0 km; 6:25 a 6:30, 0 km"

Johan: "6:10 a 6:15 no recorrió nada, de 6:25 a 6:30 no recorrió nada"

Jhon: "100 mt. y 2 km"

Jerly: "ninguna"

Mayra, Johan y Jerly asociaron que en esos lapsos de tiempo el estudiante que iba en la bicicleta se había quedado quieto y por lo tanto la distancia recorrida era cero. Mientras que Jhon no interpretó que la línea en ese lapso de tiempo no crecía, y que en ese tiempo el estudiante seguía en movimiento.
"¿En qué momento la rapidez con la que se movió el estudiante en la bicicleta fue mayor? Justifica."

Mayra: "la distancia que recorrió de 6:20 a 6:25 porque recorrió 2km."

Johan: "Fue más rápido de 6:20 a 6:25 porque recorrió 2 km"

Jhon: "De 6:20 a 6:25 la misma distancia recorrida en 5 minutos fueron 2 km"

Jerly: "De 6:20 a 6:25 recorrió en 5 minutos 2km"

En esta ocasión los cuatro estudiantes, nuevamente realizaron la lectura correcta del gráfico identificando que en 5 minutos la distancia recorrida fue de $2\ Km$.

"¿En qué momento la rapidez con la que se movió el estudiante en la bicicleta fue menor? Justifica." Esta pregunta hace referencia al momento en el cual el estudiante se movió con menor velocidad.

Mayra: "En la distancia de 6:15 a 6:20 porque solo recorrió un km"

Johan: "Fue menor de 6 a 6:10 recorrió solo un km"

Jhon: "De 6 a 6:10 distancia un km"

Jerly: "De 6 a 10 a 6:15 él recorre un km en 5 minutos"

Mayra y Jerly no se dieron cuenta que en el intervalo de $6:00$ a $6:10$, el estudiante solo recorría un km; mientras que Johan y Jhon, interpretaron que ese fue el intervalo de tiempo en el cual la rapidez con la que se había movido el estudiante fue menor.

"¿Cuántos km en total recorrió el estudiante en la bicicleta?"

Para este punto Mayra, Johan y Jerly realizan la suma de las distancias y concluyen que la distancia total recorrida por el estudiante fue de 4 Km.

En las respuestas dadas por los estudiantes, se destaca el hecho de que lograron interpretar la información que el gráfico les mostraba, reflejando su avance en la conceptualización de función lineal, que la representación gráfica también es importante al momento de extraer información, y que no es un ente abstracto en unos ejes de coordenadas, lo cual Sierpinska (1992), lo identifica en una de los concepciones que inicialmente tienen los estudiantes de la función (visión analítica de la curva).

También se identifica que los estudiantes observaron los cambios existentes en la gráfica para poder responder a las preguntas planteadas. El identificar los cambios y la aplicación que los estudiantes le dieron a los mismos, Sierpinska (1992), lo identifica como una de las categorías para la comprensión del concepto de función.

CONCLUSIONES

A través de situaciones concretas como lo fueron: trabajando con varillas, aprendiendo con resortes, midiendo el agua I y midiendo el agua II, se mostraron a los estudiantes, las aplicaciones de la función lineal en diversas situaciones cotidianas.

En la aplicación del taller “trabajando con varillas”, se observó que identificar e interpretar la proporcionalidad directa, permitió que los estudiantes entendieran el concepto de función como una forma de representar el cambio que ocurre entre las variables involucradas en la situación, siempre y cuando el estudiante reconozca que el modelo $y = mx$ indica proporcionalidad directa entre dos magnitudes, representadas en este caso por las variables x e y.

Identificar en la situación planteada la presencia de la relación de cambio entre dos magnitudes, es el primer momento para tener un acercamiento con el concepto de función lineal, fundamental para poder definir la función en todas sus formas y representaciones**.**

En la experiencia con el taller “aprendiendo con resortes”, se observó que la situación aplicada no favoreció la conceptualización de la función, pues ni la representación gráfica ni la tabular, le proporcionaron al estudiante la información necesaria para que interpretara la relación existente entre las variables involucradas en la situación. Solo la expresión algebraica les permitía hallar los valores exactos que reflejaban el comportamiento de las variables, pero la expresión construida por los cuatro estudiantes resultó diferente, de manera que este modelo no representaba el comportamiento real de las variables.

Esta experiencia que dejó la actividad “trabajando con los resortes”, mostró que las situaciones que involucran medición causan un poco de dificultad en los estudiantes, lo cual los lleva a errores en la toma de datos y por lo tanto a que el modelo hallado no exprese correctamente la relación entre las variables.

En la actividad “midiendo el agua”, se destaca el hecho que los estudiantes lograron identificar las variables involucradas en la situación y la forma en la que estas se relacionaban, representando la relación en forma verbal, tabular y gráfica, hallando la expresión algebraica que modelaba la situación. Además, se logró que asociaran la pendiente como ese valor constante que influye en la dirección e inclinación de una recta.

En este taller también se destaca que el dominio y el recorrido tienen sentido para los estudiantes, puesto que lograron identificarlos como el conjunto de los valores que pueden tomar las variables para la situación en la cual se está trabajando.

La experiencia con la última situación concreta trabajada con los estudiantes titulada “midiendo el agua II”, permitió que los estudiantes se dieran cuenta que no siempre las situaciones de función lineal se representan mediante una gráfica que tiene pendiente positiva. Que el signo de la pendiente va a depender de la relación que tienen las magnitudes, que para esta situación particular, mientras más agua se sacara de la probeta más disminuiría la altura en la misma (la probeta).

La aplicación de la evaluación reflejó que el uso de las situaciones concretas para la conceptualización de la función lineal dio el fruto esperado, puesto que los estudiantes lograron representar las situaciones ya sea: verbalmente, al describir con sus palabras la relación entre las variables comprometidas en la situación; tabular, cuando organizan los datos en una tabla numérica para visualizar el cambio existente entre las variables; gráfica, al ubicar los datos obtenidos en el plano cartesiano y observar que el comportamiento de las variables describe un modelo lineal y el generalizar el comportamiento de las variables o relación entre las mismas, al hallar una expresión algebraica que permite determinar información más detallada de la situación

La metodología aplicada en esta experiencia, permitió por medio de cada una de las actividades que se llevaron al aula de clase, que los estudiantes observaran que la función lineal permite modelar varias situaciones que se presentan en la vida diaria, encontrándole sentido al concepto de Función Lineal y a otros con los cuales se relaciona, como lo son los conceptos de dominio y recorrido.

Las situaciones concretas en las cuales está presente la variación lineal, y en las que participa activamente el estudiante en la toma y registro de la información, favorecen a la conceptualización de la función lineal.

Considero que si el uso de las situaciones concretas se llevara con más frecuencia a las aulas de clase para el aprendizaje de las matemáticas, los conceptos matemáticos serian construidos con mayor sentido, consiguiendo con ello que los estudiantes relacionen los conceptos aprendidos con sus campos de aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZCÁRATE, C., DEULOFEU, J. (1990). Funciones y graficas, Madrid: Editorial Síntesis, S. A.

CARREÑO, J. (2007). *Pensamiento variacional: De la proporcionalidad directa simple a la noción de función lineal de la forma* $f(x) = kx$. Tesis de especialización. Bucaramanga: UIS.

BURGOS, M., CAMACHO, J. (2007). Mapas conceptuales: Estrategia metacognitiva en el aprendizaje de función y función lineal. Tesis de grado. Bucaramanga: UIS.

ALTMAN, S., COMPARATORE, C., KURZROK, L., (recuperado 13 de octubre de 2008). Función lineal, una propuesta diferente. Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática. Buenos Aires: http: //www.Gratisweb.com/unvm/cap19.pdf.

MONZOY, J., C.C.H. Naucalpan & Endash, (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. México: UNAM.
http://www.fismat.umich.mx/mateduca/carlos/mem9sem/monsoy/monsoy.htm.

GARCÍA, M. (2007). Resignificando en concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia. Tesis de maestría en ciencias en Matemática Educativa. México: INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL.

GARCIA, M (2007). Notas sobre la didáctica de la función (anexos), pág. 195-211. Resignificando en concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia. Tesis de maestría en ciencias en Matemática Educativa. México: INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL.

CABRA, D., GÓMEZ, J. (2006), MEN. La función lineal en diferentes contextos. Programa de capacitación y acompañamiento a docentes de Cundinamarca y Duitama para el desarrollo de los niveles de competencia de matemáticas y diseño de secuencias didácticas a partir de las experiencias significativas de los maestros. Cali: UNIVERSIDAD DEL VALLE. http://www.colombiaaprende.edu.co/html/1607/articles-110456-archivo.pdf.

HERNÁNDEZ, R., FERNÁNDEZ, C., BAPTISTA, P. (1999). Metodología de la investigación. Segunda edición, México: Editorial Mc Graw Hill.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá. Editorial Magisterio.

Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OBANDO, G., (2005) Proporcionalidad: del pensamiento numérico al variacional. Memorias séptimo encuentro colombiano de Matemática Educativa.

ANEXOS

ANEXO 1

TRABAJANDO Y APRENDIENDO

Pablo y Emilio son dos hermanos en busca de empleo, que desean iniciar sus estudios profesionales y colaborar con los gastos de su casa. Después de pasar varias hojas de vida, los llamaron de la constructora MARVAL, la cual está realizando un proyecto de vivienda en Floridablanca. Los contratan como obreros y el ingeniero encargado de la obra les indica lo que deben hacer.

Ingeniero: ¡Buenos días, bienvenidos a nuestra empresa!

Pablo y Emilio: ¡Buenos días!

Ingeniero: Estamos realizando un proyecto de vivienda social que tiene como objetivo la construcción de 150 casas que serán entregadas a las víctimas del invierno.

Pablo: ¡Que bueno! Porque esas familias lo han perdido todo y necesitan un hogar donde vivir…

Emilio: ¿Para qué tiempo debe estar terminada la obra?

Ingeniero: Para dentro de tres meses.

Pablo: ¿De qué estaremos encargados?

Ingeniero: Inicialmente pegarán ladrillos; con el tiempo se les asignará otra tarea. ¿Alguna otra pregunta?

Pablo y Emilio: ¡No señor!

Ingeniero: ¡Entonces manos a la obra!

Una vez asignados los cargos se ubicaron en su sitio de trabajo y comenzaron con su labor. Después de unas horas Pablo le pregunta a Emilio.

Pablo: Emilio, ¿cuántos ladrillos pegas en una hora?

Emilio: Alrededor de 20 ¿Por qué?

Pablo: ¡Que casualidad! Yo también pego los mismos ladrillos en una hora.

Emilio: Como tenemos el mismo ritmo de trabajo, ¡nos rendirá mucho en el día!

Pablo: ¡Seguro que así será!

Así, continuaron los hermanos trabajando y llevan 5 horas.

☺ *¿Cuántos ladrillos crees que han pegado los hermanos?*

Emilio: Pablo, han transcurrido cinco horas desde el momento en que empezamos a trabajar, ¿cuántos ladrillos crees que hayamos pegado?

Pablo: 200 ladrillos, ¿por qué?

Emilio: ¿Cómo sabes eso?

Pablo: Pues es muy fácil, porque si cada uno de nosotros pega 20 ladrillos en una hora, en total serían 40 ladrillos pegados por hora. Y como han transcurrido 5 horas, entonces hemos pegado 200 ladrillos.

☺ *¿Cómo lo supo Pablo?*

En ese momento suena el timbre de receso para que los obreros almuercen. Mientras tanto, Emilio le comenta a su hermano:

Emilio: Ese cálculo fue muy interesante. Entonces, ¿podríamos saber cuántos ladrillos pegaremos durante todo el día?

Pablo: ¡Por supuesto! Iniciamos labores de 7:00 a.m. a 12:00 m. y luego de 1:00 a 5:00 p.m. entonces trabajaremos 9 horas diarias. Te propongo que hagamos una tabla que resuma los ladrillos que hemos pegado en cada hora transcurrida.

En ese momento Emilio interrumpe a Pablo diciéndole:

Emilio: ¡Espera! Déjame hacerla. Ahora si, mira la tabla que hice:

HORA	LADRILLOS PEGADOS
1	40
2	80
3	
4	
5	200
6	
7	280
8	
9	

☺ *Por favor, ayúdales a completar la tabla.*

☺ *¿Qué ventajas tiene esa tabla?*

Luego de tener la tabla completa Pablo se queda pensativo por un momento y le dice a Emilio.

Pablo: Sabes Emilio, la tabla nos muestra datos muy a la mano, pero no todos. Por ejemplo ¿cuántos ladrillos llevaremos pegados transcurridas 5 horas con 27 minutos?

☺ *¿Cómo puede saber Pablo la cantidad de ladrillos que han pegado en ese lapso de tiempo?*

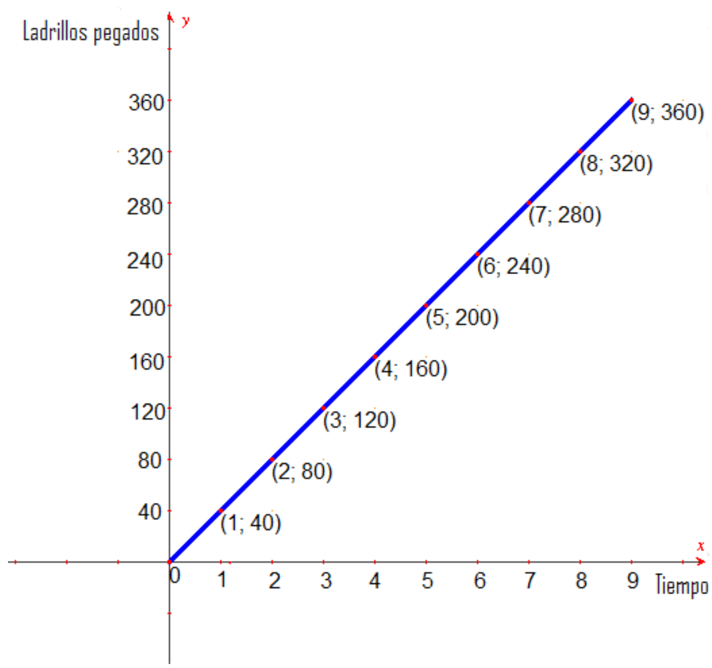
☺ *¿Crees que los ladrillos pegados están en* ***función*** *del tiempo? Si o no ¿Porqué?*

Pablo: Creo que si representamos esos datos en un plano cartesiano podríamos ver mejor la información.

☺ *¿Cuáles son las magnitudes que se deben relacionar en el plano cartesiano?*

☺ *¿Cuál es el gráfico obtenido por los hermanos?*

Pablo y Emilio realizaron el gráfico correspondiente. En el eje *x* establecieron el tiempo, mientras que en el eje *y* el número de ladrillos pegados.



☺ *¿Qué características tiene este gráfico?*

Emilio: ¡Tienes toda la razón! El gráfico nos permite ver mejor la información; además podemos ver cómo se relacionan las magnitudes. ¡Pablo! ¿Será que existe alguna expresión que dado el tiempo nos permita determinar exactamente cuántos ladrillos hemos pegado?

☺ *¿Qué le dirías a Emilio? Sí o no. Escríbela si la conoces.*

Pablo: Ladrillos pegados es igual a 40 por el número de horas, es decir, el tiempo. Para resumirlo lo podemos escribir simbólicamente o algebraicamente así: $\boldsymbol{L = 40 \cdot t}$

Emilio: Entonces a las 5 de la tarde, tendríamos 40 por 10, eso es 400 ladrillos.

☺ *¿Está bien el cálculo realizado por Emilio?*

Pablo: Pues, tú cálculo no coincide con el dato que está en la tabla.

Emilio: Tienes razón, ¿qué hice mal?

☺ *¿Qué le dirías a Emilio?*

Pablo: Tienes que tener en cuenta el tiempo transcurrido, recuerda que empezamos a laborar a las 7: 00 a.m. hasta las 12:00 m. y luego de 1:00 p.m. a 5:00 p.m.

Pablo escribió al lado de la tabla que había hecho Emilio las siguientes expresiones:

Emilio: Claro cómo no lo pensé antes, esta expresión si parece concordar.

Tomando una nueva hoja Emilio decía:

Emilio: Supongamos que trabajamos más de 9 horas y vamos a calcular los ladrillos pegados cuando llevamos 10 horas y media. Entonces,

$$L = 40[(10{,}30)] = 412$$

Pablo: ¡Emilio! Has cometido un error.

Emilio: ¿Cómo? ¡No lo puedo creer!

☺ *¿Qué error cometió Emilio?*

☺ *Emilio desea saber si 10 y ½ hora es igual a 10,30. ¿Qué opinas? Si o no. ¿Por qué?*

Pablo tomó una hoja y le explicó a su hermano de la siguiente manera:

Pablo: Hablar de 10:30 es igual a 10 y ½ hora; como ½ es igual a 0,5 se tiene que 10 y ½ hora es 10+0,5 que es igual a 10,5 horas. Ahora si te diste cuenta en que fallaste.

Emilio: ¡Claro! Entonces 9 y ¼ de hora son equivalentes a 9,25 horas.

Pablo: Exacto, pero… ¿A cuántas horas equivalen 8:21 horas?

☺ *¿Qué responderías?*

☺ *¿Cómo se convierten minutos a horas?*

Emilio afirmó que 8:21 horas son equivalentes a 8,35 horas, lo que sorprendió mucho a Pablo, ya que su hermano había encontrado la forma general de hacerlo con solo un ejemplo.

Emilio: El ejemplo que me diste me sugirió una regla de tres: si 60 minutos corresponden a una 1 hora, entonces una cantidad *m* de minutos corresponden a *x* horas. Es decir,

$$\frac{60}{m} = \frac{1}{x}$$

Luego, $x = \frac{m}{60}$

Pablo: Muy bien, existe una proporcionalidad entre el número de horas y el número de minutos, por lo que conociendo el tiempo exacto con horas y minutos podemos reducirlo todo a horas con la siguiente expresión:

$$Tiempo = horas + \frac{1}{60} minutos$$

☺ *¿Cuántos ladrillos han pegado Pablo y Emilio a las 9:43 horas?*

Emilio: Pablo, creo que ya encontré una expresión final que me va a permitir conocer los ladrillos pegados por los dos sabiendo las horas trabajadas.

$$L = 40 \cdot t$$

O una equivalente como

$$L = 40 \cdot \left[horas + \frac{minutos}{60}\right]$$

☺ *¿Cuántos ladrillos han pegado Pablo y Emilio transcurridas 11:12 horas?*

Pablo: Emilio, ¿cuántas horas necesitaremos para pegar 3000 ladrillos?

☺ *Podrías ayudarle a Pablo a responder su inquietud.*

Emilio: Bueno Pablo ya es hora de que regresemos al trabajo. Aprendimos mucho en tan poco tiempo.

Pablo: Tienes razón, pero… se me acaba de ocurrir algo.

Emilio: ¿Qué estás pensando?

Pablo: En cómo nos van a pagar, ¿será que nos pagarán por ladrillos pegados durante el día o por horas trabajadas?

Emilio: Pues… no lo sé, pero deberíamos preguntarle al ingeniero.

Pablo: ¿Cuál crees que sea la mejor opción de pago?

Los dos hermanos regresaron al trabajo; pero ahora mientras trabajan piensan en cómo les van a pagar.

☺ *Si fueras el ingeniero ¿Cómo les pagarías?*

ANEXO 2

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

Conozcamos Algo De Historia

Objetivo: conocer el origen del concepto de función a través de la historia.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA HISTORIA

A pesar de los numerosos estudios sobre la historia de las matemáticas, existen pocos trabajos dedicados específicamente al origen del concepto de función. Además, las opiniones de los autores son distintas e incluso contradictorias ya que algunos admiten cierto carácter funcional en algunas operaciones matemáticas de la antigüedad (especialmente los trabajos de astronomía de los babilonios, Ptolomeo o de los árabes), otros sitúan su nacimiento junto a la aparición de la geometría analítica (Descartes) y algunos otros lo sitúan en el siglo XIX con las definiciones dadas por Dirichlet y Lobatchevsky. Uno de los trabajos más relevantes es el de Youschkevitch (1976) que muestra el desarrollo de la noción del concepto función hasta mediados del siglo XIX a través de tres grandes períodos.

- ✓ **EL MUNDO ANTIGUO** (*Las Bases Para La Formación Del Concepto*):
  Período en el que a pesar de la existencia de estudios sobre casos particulares de dependencia entre dos cantidades, no aparecen nociones generales de cantidades variables y funciones. Es decir, en este período no existía la idea general de relación funcional. A pesar de esto, es posible encontrar ideas que pueden vincularse con la misma y que, sin duda, estuvieron ligadas con su aparición. Tal es el caso de las tablas babilónicas, utilizadas para realizar cálculos y para la astronomía, la trigonometría de las cuerdas de la época alejandrina y el estudio de las cónicas realizado por los griegos.

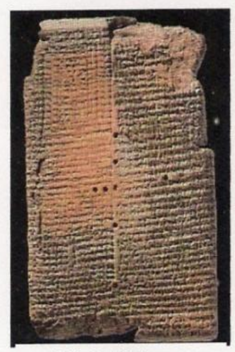


Tabla Babilónica con información astronómica que data, aproximadamente del año 550 a.C

- ✓ **LA EDAD MEDIA** (*Los Primeros Intentos*):
  Es en este período las nociones generales se expresaron por primera vez de un modo definido, mediante formas geométricas o mecánicas, pero sólo se hicieron por medio de una expresión verbal o una gráfica, y no por medio de una fórmula. En el comienzo de esta etapa es necesario mencionar el trabajo realizado por los árabes ya que hubo un incremento en el número de funciones consideradas, una mejora en los métodos de estudio de las mismas

y un perfeccionamiento en los métodos para su tabulación. Sin embargo, no hubo ningún desarrollo esencialmente nuevo del concepto de función.

Este concepto apareció por primera vez en forma general, en el siglo XIV, en las escuelas de filosofía natural de Oxford y París, quienes declararon que las matemáticas eran el instrumento principal para el estudio de los fenómenos naturales. El mayor aporte de estas escuelas es el estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme, abordado en Inglaterra en dirección aritmética – cinemática, y en Francia, además, en dirección geométrica. Se analizaron cualidades y formas, según la terminología aristotélica, de fenómenos diversos como calor, luz, densidad, que podían poseer varios grados de intensidad (o latitud) que cambiaban entre dos límites establecidos. El principal representante de la escuela francesa es Nicolás Oresme, quien propone una aproximación geométrica al estudio de los fenómenos que cambian.

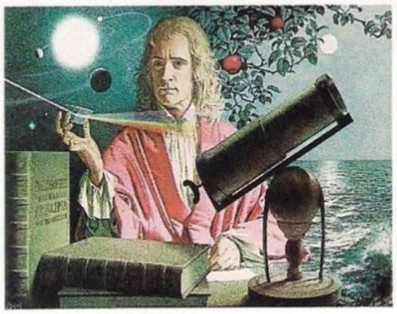
- ✓ **LA EDAD MODERNA** (*El Desarrollo Del concepto*):

Etapa en la que empiezan a prevalecer las expresiones analíticas de las funciones. De acuerdo con Youschkevitch (1976), el desarrollo de la teoría de funciones se basó fundamentalmente en tres pilares: *el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos*, *la creación del álgebra simbólica-literal* y *la extensión del concepto de número*. Por otra parte, a principios del siglo XVII, comenzó a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidió notablemente en la evolución del la noción de función. El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat y a Descartes el descubrimiento de las representaciones analíticas.

Para Youschkevitch (1976), es Descartes quien por primera vez, y de una forma totalmente clara, sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra. La introducción de funciones bajo forma de ecuaciones tuvo el efecto de una revolución en el desarrollo de las matemáticas. La utilización de expresiones analíticas junto con las reglas para operar con ellas conferiría al estudio de funciones un status de verdadero cálculo.

Al principio, las funciones que se expresaban analíticamente se limitaban a las algebraicas. Pocos años más tarde, Newton hizo posible representar analíticamente cualquier relación funcional de las que se estudiaban en la época y fue de gran importancia, hasta el punto de convertirse en el método fundamental para el estudio de las funciones.

Es en este período cuando surge el cálculo diferencial e integral como una parte independiente de las matemáticas, Newton y Leibniz. La palabra "función" aparece por primera vez en 1673 en un manuscrito de Leibniz, en el contexto de un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de la tangente, pero es en 1718 cuando aparece la primera definición explícita de la función como una expresión analítica, en un artículo de Johann Bernoulli. Es Euler, discípulo de Johann Bernoulli, quien desarrolla en el siglo XVIII, en *Introduction in analysis infinitorum*, un estudio detallado del concepto de función. Comienza por definir nociones iniciales, en la definición de función sigue a su maestro Bernoulli y posteriormente aborda el problema de establecer qué se entiende por expresión analítica.



Isaac Newton

El principal impulso para el posterior desarrollo del concepto de función proviene de los trabajos de Euler sobre física – matemática.

Con base en la lectura contesta las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál período se podría situar el nacimiento del concepto de función?

2. ¿Quién dio la primera definición del concepto de función?

3. ¿Qué revolucionó las matemáticas en el período moderno?

4. ¿Para qué se usaron las funciones?

5. Según tu criterio ¿Por qué surgieron las funciones?

6. Realiza un mapa conceptual a cerca del concepto de función a través de la historia.

"Los seres humanos no son prisioneros del destino,
Sino prisioneros de sus mentes."
Franklin D. Roosevelt

ANEXO 3

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

Nombre: ______________________________________ Fecha: ____________________

Trabajando con varillas

Objetivo: Reconocer la proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

Materiales: 5 varillas de diferentes longitudes e igual diámetro, 1 regla o 1 metro, 1 gramera.

Trabajo a realizar:

1. Toma cada una de las varillas, mide su longitud y determine su peso.
2. Con la información anterior completa la siguiente tabla.

Longitud (cm)										
Peso (gr)										
Cociente P/L										

3. Existe alguna relación entre las magnitudes (longitud, peso) involucradas en la situación. Justifica tu respuesta.
4. ¿Cuáles magnitudes permanecen constantes y cuáles varían? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuál de las magnitudes involucradas en la situación es conveniente tomar como variable independiente? Justifica.

6. Con la información obtenida en la tabla construye un grafico del peso respecto a la longitud.
7. A partir del gráfico, ¿puedes estimar los pesos de varillas cuyas longitudes son: 1 cm, 3.5 cm, 4 cm, 8 cm, 13 cm y 18 cm? Justifica tu respuesta.
8. ¿Qué pesos corresponden a una longitud de 30cm, 55cm y 80cm?
9. ¿Cuál sería una forma de calcular el peso de las varillas para cualquier longitud dada en cm? Explica.
10. ¿En cuanto incrementa el peso de las varillas por cada cm?
11. Encuentra una expresión matemática que te permita calcular el peso de una varilla de una longitud determinada.
12. Con la expresión encontrada anteriormente, completa la siguiente tabla.

Longitud (cm)	22		64		81	x	2x	
Peso (gr)		290		380				y

13. ¿Qué condición o característica indica proporcionalidad directa entre dos magnitudes?
14. Desde el punto de vista grafico (geométrico), ¿cómo se puede identificar la proporcionalidad directa entre dos magnitudes?
15. ¿Cómo es la forma de la expresión algebraica que expresa la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales?
16. Escribe tus conclusiones y comentarios a cerca del taller.

"Un solo día de la gente instruida dura
más que la vida más larga para los ignorantes."

Seneca.

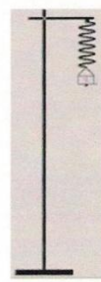
ANEXO 4

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

NOMBRE:
______________________________________Fecha:_______________

APRENDIENDO CON RESORTES

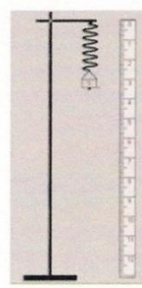
Objetivo: Construir el modelo lineal $y = mx + b$ para predecir el estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza.



Materiales: Resorte, regla, malla con 25 maras y hoja milimetrada.

Trabajo a realizar:

1. Mide la longitud del resorte y anota el dato.
2. Toma la bolsa con maras y arma diferentes paquetes con ellas.
   Nota: cada mara tiene aproximadamente 5 gr.
3. Toma cada paquete y cuélgalos en el resorte, así como aparece en el arreglo anterior. Con cada paquete que le pongas al resorte toma la regla y mide la nueva longitud del resorte. ¿Cuánto se estiró el resorte con cada uno de los paquetes? Ten en cuenta registrar cada dato.



4. ¿Qué magnitudes intervienen en este fenómeno? Describe cómo se relacionan.
5. Con la información que tienes, organiza los datos en la siguiente tabla.

Masa (gr)	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
Longitud (cm)					

6. ¿Cuál es la variable independiente?, y ¿Cuál la dependiente? Justifica tu respuesta.
7. Con la información registrada en la tabla, construye un gráfico de la longitud del resorte respecto a la masa.
8. Ahora, realiza las diferencias de masas, las diferencias de longitudes y el cociente entre éstas (diferencias de longitudes/diferencias de masas), luego registra los datos en las siguientes tablas.

Diferencia de masas	$\Delta_{m1} = m_2 - m_1$	$\Delta_{m2} = m_3 - m_2$	$\Delta_{m3} = m_4 - m_3$	$\Delta_{m4} = m_5 - m_4$	Promedio diferencia de masas
Total					

Diferencia de longitudes	$\Delta_{l1} = l_2 - l_1$	$\Delta_{l2} = l_3 - l_2$	$\Delta_{l3} = l_4 - l_3$	$\Delta_{l4} = l_5 - l_4$	Promedio diferencia de longitudes
Total					

Cociente $\frac{\Delta_l}{\Delta_m}$	$\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}}$	$\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}}$	$\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}}$	$\frac{\Delta_{l4}}{\Delta_{m4}}$	Promedio cocientes
Total					

9. A partir del grafico construido, ¿qué significado geométrico tienen las diferencias de masas? ¿Qué significado geométrico tienen las diferencias de longitudes? Explica tu respuesta.

10. ¿Qué indica el promedio de las diferencias de masas y las diferencias de longitudes? Justifica tu respuesta.

Recordemos que para el primer cociente se tiene que $\frac{\Delta_{l1}}{\Delta_{m1}} = \frac{l_2 - l_1}{m_2 - m_1}$; para el segundo $\frac{\Delta_{l2}}{\Delta_{m2}} = \frac{l_3 - l_2}{m_3 - m_2}$; para el tercero $\frac{\Delta_{l3}}{\Delta_{m3}} =$ ______ y así sucesivamente...

11. De lo anterior ¿Qué puedes concluir?

12. ¿Qué puedes decir a cerca de los resultados de los cocientes? ¿Qué muestra el promedio del cociente?
13. Encuentra una expresión algebraica que te permita calcular la distancia que se deforma el resorte de acuerdo a una masa determinada. (apóyate en las respuestas 11 y 12)
14. Una vez obtenida la expresión, calcula el estiramiento para las masas que utilizaste anteriormente y anota los datos en la siguiente tabla.

Masa (gr)					
Longitud (cm)					

15. Con la información registrada en la tabla, construye un gráfico de la longitud del resorte respecto a la masa.
NOTA: utiliza otro color, para realizar el gráfico en el mismo plano cartesiano elaborado en el numeral siete.
16. ¿En que se diferencian los gráficos? ¿Qué similitudes tienen? Justifica.
17. ¿Escribe tus conclusiones y comentarios a cerca del taller?

ANEXO 5

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

Nombre: ____ Fecha: ______________

Midiendo el agua

Objetivos: ☺ Estudiar, analizar y hallar el modelo matemático que relaciona el volumen del agua con su altura a partir de una situación concreta.
☺ Afianzar el concepto de pendiente de una recta e identificar el dominio y recorrido de una función en una situación particular.

Materiales: una probeta, un metro, una jeringa, agua de color.

PARA TENER EN CUENTA:

Para realizar la actividad debes tomar nota de la situación que se trabajara al inicio del taller, para que así puedas responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuales son las magnitudes que intervienen en esta situación? Y como varían estas.
2. ¿cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
3. Con los datos que tomaste llena la siguiente tabla.

Variable independiente:									
Variable dependiente:									

4. Con la información registrada en la tabla realiza el gráfico respectivo en el plano cartesiano.
5. ¿Qué grafico obtuviste?, ¿Cuál es la condición que hace que el gráfico tome ésta forma?
6. Calcula los cocientes $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, y regístralos en la siguiente tabla.

Cociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$									

7. Geométricamente, ¿Qué significado tiene el cociente?
8. Selecciona un punto de la grafica dibujada y explica: ¿qué significado en el contexto de esta situación tienen las coordenadas de ese punto?
9. ¿Hay alguna relación entre los mililitros de agua que se echan en la probeta y la altura de la misma?
10. Escribe una regla general que se cumpla para cualquier punto de la gráfica de acuerdo a la situación.
11. ¿Qué crees que sucedería si se cambia la jeringa por una cuchara, o un recipiente pequeño?
12. Encuentra una expresión algebraica que describa la relación entre las dos variables.
13. ¿Cuál es la mínima cantidad de agua que se le puede echar a la probeta y cual la máxima?
14. ¿Cuál es la mínima altura que puede tener el agua y cuál la máxima?
15. Escribe tus conclusiones y comentarios acerca del taller.

ANEXO 6

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

Nombre: ____ Fecha: ____________

Midiendo el agua II

Objetivos: ☺ Estudiar, analizar y hallar el modelo matemático que relaciona el volumen del agua con su altura a partir de una situación concreta.
☺ Afianzar el concepto de pendiente de una recta e identificar el dominio y recorrido de una función en una situación particular.

Materiales: una probeta, un metro, una jeringa, agua de color.

PARA TENER EN CUENTA: La altura del agua dentro de la probeta es de 220mm; con la jeringa empieza a sacar mililitros de agua y mide la nueva altura del agua.

Nota: no olvides ir registrando los datos tomados.

1. ¿Cuales son las magnitudes que intervienen en esta situación? Y como varían estas.
2. ¿cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
3. Con los datos que tomaste llena la siguiente tabla.

Variable independiente:									
Variable dependiente:									

4. Con la información registrada en la tabla realiza el gráfico respectivo en el plano cartesiano.
5. ¿Qué grafico obtuviste?, ¿Cuál es la condición que hace que el gráfico tome ésta forma?, ¿Por qué el gráfico no pasa por el origen?
6. Calcula la pendiente de la recta.
7. ¿Qué signo tiene la pendiente de la recta?, ¿A qué se le puede atribuir el signo de la pendiente de la recta, o que significado se le puede dar?
8. Selecciona un punto de la grafica dibujada y explica: ¿qué significado en el contexto de esta situación tienen las coordenadas de ese punto?
9. ¿Hay alguna relación entre los mililitros de agua que se sacan en la probeta y la altura del agua?
10. De acuerdo a la situación, exprese la relación que existe entre las dos magnitudes.
11. Encuentra una expresión algebraica que describa la relación entre las dos variables.
12. ¿Cuál es la mínima cantidad de agua que se le puede sacar a la probeta y cual la máxima?
13. ¿Cuál es la máxima altura que puede tener el agua dentro de la probeta y cuál la mínima?
14. Escribe tus conclusiones de lo aprendido con el taller.

ANEXO 7

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO: TRABAJO DE GRADO II
INSTITUTO MINCA - SEDE A

Nombre: ____ Fecha: ______________

Poniendo en práctica mi aprendizaje

1. ¿Cuáles de las siguientes situaciones se pueden modelar por medio de una función lineal y cuáles no?, justifica tu respuesta en cada caso.
   a) La distancia recorrida por un automóvil que se mueve a velocidad constante en relación con el tiempo empleado.
   b) El peso de una persona en relación con su estatura.
   c) La cantidad de combustible restante en el tanque de un motor en relación con el tiempo que ha trabajado.
   d) El número de botellas de gaseosas vendidas en un negocio por día en relación con el número de cervezas vendidas por día.

2. Un automóvil gasta 10 litros de gasolina cada 100 km y en su tanque hay 50 litros. Supongamos que ha recorrido 383 km, ¿Cuántos litros de gasolina quedan en el tanque?
   a) ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en esta situación? Y ¿Cómo varían estas?
   b) ¿Existe una relación entre las variables?, en caso afirmativo, ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
   c) De acuerdo a la situación llena la siguiente tabla con algunos datos.

Variable independiente:								
Variable dependiente:								

   d) Con la información registrada en la tabla realiza el gráfico respectivo en el plano cartesiano.
   e) Calcula la pendiente de la recta y explica que significado tiene esta en el contexto de la situación.

Evaluación elaborada por Lizeth Carolina Yara Hoyos.

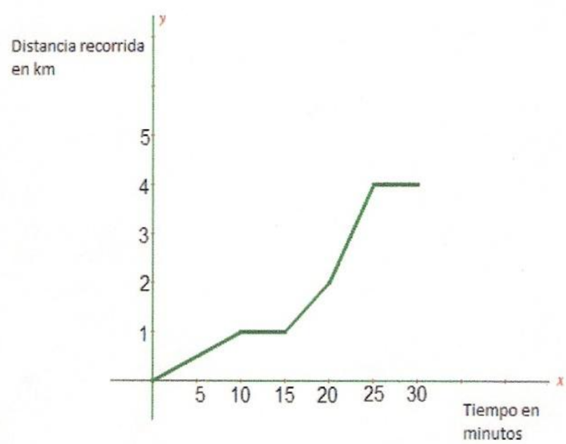
f) Encuentra una expresión algebraica que permita calcular la cantidad de litros que quedan en el tanque dependiendo de la cantidad de kilómetros recorridos.

g) Escribe el dominio y recorrido de esta situación.

3. Teniendo en cuenta la tabla adjunta de valores, plantea una situación que se ajuste a los datos, y halla la expresión algebraica que relaciona las variables.

Variable independiente:	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Variable dependiente:	30	60	90	120	150	180	210	240

4. El siguiente grafico representa la distancia recorrida por un estudiante rumbo al colegio en bicicleta, en relación con el tiempo empleado. Nota: el estudiante sale de su casa a las 6: 00 a.m.



a) ¿Cuánto fue la distancia recorrida por el estudiante de 6:10 a 6:15 y de 6:25 a 6:30?
b) ¿En que momento la rapidez con la que se movió el estudiante en la bicicleta fue mayor? Justifica.
c) ¿En que momento la rapidez con la que se movió el estudiante en la bicicleta fue menor? Justifica.
d) ¿Cuántos km en total recorrió el estudiante en la bicicleta?
e) ¿Cuánta distancia recorrió el estudiante por minuto de 6:00 a 6:10, de 6:15 a 6:20 y de 6:20 a 6:25?

☺ ¡MUCHOS ÉXITOS! ☺

"Pensar es el trabajo más difícil que existe,
tal vez por ello tan pocos lo hacen."

Henry Ford

Evaluación elaborada por Lizeth Carolina Yara Hoyos.