

ESTUDIO DE UN PROBLEMA DIFERENCIAL MODELANDO DEFORMACIÓN DE
MEMBRANAS VESICULARES

ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

ESTUDIO DE UN PROBLEMA DIFERENCIAL MODELANDO DEFORMACIÓN DE
MEMBRANAS VESICULARES

ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director

DIEGO ARMANDO RUEDA GÓMEZ
Ph.D en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2021

Dedicado: A mi familia, en especial a mi madre y hermana.

AGRADECIMIENTOS

- ◇ Agradezco a Dios por conducir mi vida y permitirme alcanzar este gran logro.
- ◇ Agradezco a mi madre: **Karoll E. Fernández** y a mi hermana **Wendy S. Fernández** por ser mi fundamental apoyo y motivación durante mi formación.
- ◇ Agradezco al profesor **Diego Rueda**, por su paciencia, colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y enseñanzas durante este proceso.
- ◇ Agradezco a mis familiares y amigos con los cuales tuve la oportunidad de compartir y aprender durante toda esta etapa.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. PRELIMINARES	19
1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES	19
1.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL	23
1.3. ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS	29
2. ANÁLISIS TEÓRICO	32
2.1. EL MODELO DE CAHN-HILLIARD-NAVIER-STOKES	32
2.2. UN PROBLEMA EQUIVALENTE DE MEDIA CERO	37
2.3. SOLUCIONES DÉBILES	39
2.3.1. Existencia de soluciones débiles	40
3. ANÁLISIS NUMÉRICO	44
3.1. UN MODELO EQUIVALENTE	44
3.1.1. Acoplamiento de los efectos de flexión con un fluido circundante	48
3.2. ESQUEMAS NUMÉRICOS	52
3.2.1. Esquema totalmente discreto para el problema de las vesículas	53
3.2.2. Esquema numérico para el problema acoplado con un fluido	77
4. SIMULACIONES NUMÉRICAS	82
4.1. ALGORITMO ITERATIVO	82
4.2. RESULTADOS NUMÉRICOS	83
BIBLIOGRAFÍA	88

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Evolución en el tiempo de una vesícula con forma bicóncava cuando el área superficial impuesta es inferior a la superficie inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$).	84
Figura 2. Evolución en el tiempo de una vesícula con forma bicóncava cuando el área superficial impuesta es superior a la superficie inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).	85
Figura 3. Evolución en el tiempo del área superficial para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).	86
Figura 4. Evolución en el tiempo de la energía de flexión elástica para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial: intervalo de tiempo $[0, 10^{-3}]$. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).	86
Figura 5. Evolución en el tiempo de la energía de flexión elástica para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial: intervalo de tiempo $[0, 10^{-5}]$. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).	87

Figura 6. Evolución en el tiempo del volumen para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$). 87

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1.	Parámetros para la deformación de la vesícula cuando el área de superficie impuesta β es diferente de la superficie inicial $\mathcal{A}(\phi_0)$ (sin fluido).	84
----------	---	----

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Demostraciones del Capítulo 1	91
Anexo B. Demostraciones del Capítulo 2	93
Anexo C. Demostraciones del Capítulo 3	105

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE UN PROBLEMA DIFERENCIAL MODELANDO DEFORMACIÓN DE MEMBRANAS VESICULARES. *

AUTOR: ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ **

PALABRAS CLAVE: MEMBRANA DE VESÍCULA, ECUACIONES DE NAVIER-STOKES, ECUACIÓN DE CAHN-HILLIARD, ENERGÍA DE FLEXIÓN, ESTABILIDAD ENERGÉTICA.

DESCRIPCIÓN:

Los esquemas numéricos para simular la deformación de las membranas de las vesículas se han estudiado ampliamente en los últimos tiempos debido a su conexión con algunos problemas de motivación biológica. El presente trabajo se enfoca en el estudio de un modelo que describe la deformación de una membrana vesicular con un fluido circundante, el cual es denominado como modelo de Cahn-Hilliard-Navier-Stokes (CHNS). En la primera parte, usando el método de aproximaciones de Galerkin, se estudia la existencia de soluciones débiles del modelo CHNS. En la segunda parte, se realiza un estudio numérico, en el que se analizan dos esquemas de aproximación para el problema bajo estudio, usando el método de elementos finitos para la aproximación espacial y el método de diferencias finitas para la aproximación temporal. Para estos esquemas se prueban algunas propiedades tales como: buen planteamiento, conservación del volumen, estabilidad energética y convergencia hacia soluciones débiles. Finalmente, se muestran los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas usando el software Freefem++.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF A DIFFERENTIAL PROBLEM MODELING DEFORMATION OF VESICLE MEMBRANES *

AUTHOR: ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ **

KEYWORDS: VESICLE MEMBRANE, NAVIER-STOKES EQUATIONS, CAHN-HILLIARD EQUATION, BENDING ENERGY, ENERGY STABILITY.

DESCRIPTION:

The numerical schemes to simulate the deformation of the vesicle membranes have been widely studied in recent times due to their connection with some problems of biological motivation. The present work focuses on the study of a model that describes the deformation of a vesicular membrane with a surrounding fluid, which is called Cahn-Hilliard-Navier-Stokes (CHNS) model. In the first part, using the Galerkin approximation method, the existence of weak solutions of the CHNS model is studied. In the second part, a numerical study is carried out, in which two approximation schemes are analyzed for the problem CHNS, by using the finite element method for the spatial approximation and the finite differences method for the approximation in time. For these schemes, some properties such as: well-posedness, conservation of volume, energy stability and convergence towards weak solutions are proved. Finally, the results of some numerical simulations performed using the FreeFem++ software are displayed.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D in Mathematics

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se enmarca en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales del tipo parabólico; específicamente, se enfoca en el estudio teórico y numérico de un modelo que describe la deformación de una membrana vesicular. Este modelo consiste en un sistema de EDP que acopla las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) con las ecuaciones de Cahn-Hilliard (CH). Por un lado, las ecuaciones de NS describen la dinámica de un fluido viscoso incompresible; y por otro lado, las ecuaciones de CH describen el proceso de separación de fases, por el cual los dos componentes de un fluido binario (fluido bifásico o fluido de dos fases) se separan espontáneamente y forman dominios puros en cada componente.

Diversos estudios, tanto teóricos como numéricos, analizando la deformación de las membranas de las vesículas mediante la minimización de la energía de flexión se han realizado en los últimos tiempos debido a su conexión con muchos problemas biológicos (ver por ejemplo, ¹, ², ³, ⁴, ⁵ y referencias citadas en

-
- ¹ B. CLIMENT-EZQUERRA y F. GUILLÉN-GONZÁLEZ. “Convergence to equilibrium of global weak solutions for a Cahn–Hilliard–Navier–Stokes vesicle model”. En: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 70.4 (2019), págs. 1-27.
 - ² F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y G. TIERRA. “Unconditionally energy stable numerical schemes for phase-field vesicle membrane model”. En: *Journal of computational physics* 354 (2018), págs. 67-85.
 - ³ J. ZHANG, S. DAS y Q. DU. “A phase field model for vesicle–substrate adhesion”. En: *Journal of Computational Physics* 228.20 (2009), págs. 7837-7849.
 - ⁴ Q. DU, C. LIU y X. WANG. “A phase field approach in the numerical study of the elastic bending energy for vesicle membranes”. En: *Journal of Computational Physics* 198.2 (2004), págs. 450-468.
 - ⁵ Q. DU y J. ZHANG. “Adaptive finite element method for a phase field bending elasticity model

ellos). Las membranas de vesículas biológicas son estructuras cerradas hechas de dos mono-capas lipídicas opuestas con proteínas ancladas que separan dos compartimientos acuosos. El estudio de la formación y dinámica de las membranas vesiculares ha sido una fuente activa de investigaciones experimentales y teóricas en biología, biofísica y bioingeniería durante las últimas décadas.

En este trabajo, se considera un modelo que describe la dinámica de las membranas vesiculares dentro de un fluido viscoso incompresible. Como se ha mencionado anteriormente, el sistema consta de las ecuaciones de NS, con un tensor adicional dependiendo de la membrana, junto con una ecuación de campo de fase de tipo CH asociada con una energía de flexión. Membranas de vesículas dentro de fluidos viscosos incompresibles en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, en un intervalo de tiempo $[0, +\infty)$, se modelan mediante una función de campo de fase $\phi : \bar{\Omega} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dos valores estables $\phi = 1$ y $\phi = -1$ representan el exterior y el interior de las membranas de las vesículas, respectivamente, y $-1 < \phi < 1$ en la interfaz. Específicamente, analizaremos el caso donde la llamada energía de flexión elástica $\mathcal{E}_{bp}(\phi)$ viene dada por una energía elástica más una penalización de la restricción del área de superficie (ver ²):

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} G(\phi) \right)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2, \quad (1)$$

donde

$$G(\phi) := F'(\phi) - \varepsilon k(\mathbf{x}) H'(\phi), \quad F(\phi) := \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2, \quad H(\phi) := \frac{1}{3} (\phi^3 - \phi), \quad (2)$$

siendo $k(\mathbf{x})$ una función dada que representa la curvatura, $\eta > 0$ una constante de

of vesicle membrane deformations". En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.3 (2008), págs. 1634-1657.

penalización, $\varepsilon > 0$ un parámetro relacionado con el ancho de la interfaz, y

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi) \right) dx \quad (3)$$

una aproximación del área de la superficie. Para modelar la dinámica en el tiempo de las interacciones vesícula-fluido, presentaremos las siguientes ecuaciones de Navier-Stokes-Cahn-Hilliard en $Q = \Omega \times (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda w \nabla \phi + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \gamma \Delta w = 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde

$$w := \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi}$$

es el potencial químico. Los coeficientes $\nu > 0$, $\lambda > 0$ y $\gamma > 0$ dependen de la viscosidad del fluido y la elasticidad y la movilidad de la función de campo de fase, respectivamente. Recuerde que las variables $\mathbf{u}$ y p denotan el campo de velocidades y la presión hidrostática del fluido, respectivamente y ϕ denota la función campo de fase. El sistema (4) se complementa con las condiciones de contorno

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}} \phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}} (\Delta \phi)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}} w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

(donde $\partial\Omega$ denota la frontera del dominio Ω y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal hacia afuera a $\bar{\Omega}$) y las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (6)$$

Por compatibilidad, asumimos $\mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0$ con $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ en Ω y $\partial_{\mathbf{n}} \phi_0|_{\partial\Omega} = 0$. Por otro

lado, para todo $\phi, \bar{\phi} \in H^1(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle = \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \bar{\phi} \right)$$

y por lo tanto, si $\phi \in H^2(\Omega)$ y $\partial_{\mathbf{n}} \phi|_{\partial\Omega} = 0$, integrando por partes podemos observar

$$\frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi} = -\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi). \quad (7)$$

Además, note que si $\phi \in H^3(\Omega)$ y $\partial_{\mathbf{n}} \phi|_{\partial\Omega} = 0$, entonces $\partial_{\mathbf{n}} \Delta \phi|_{\partial\Omega} = 0$ es equivalente a $\partial_{\mathbf{n}} \mu(\phi)|_{\partial\Omega} = 0$. Por otra parte, denotando por

$$\mu(\phi) := -\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} G(\phi),$$

la energía de flexión elástica (1) se puede reescribir como

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2.$$

Entonces, para todo $\phi, \bar{\phi} \in H^2(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi) \left(-\varepsilon \Delta \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \bar{\phi} \right) + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle.$$

Si $\phi \in H_1^4$ y $\bar{\phi} \in H_1^2$, después de algunas integraciones por partes, usando $\nabla \mu(\phi) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ y $\nabla \bar{\phi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, podemos observar que

$$w = \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi} = -\Delta \mu(\phi) + \frac{1}{\varepsilon^2} G'(\phi) \mu(\phi) + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right). \quad (8)$$

En los Capítulos 2 y 3 se dan más detalles del problema. Los cambios morfológicos de las vesículas presentan desafíos interesantes para llevar a cabo simulaciones numéricas eficientes y precisas, modelos matemáticos efectivos y análisis rigurosos

debido a la variedad de formas de equilibrio asumidas por las vesículas en experimentos biológicos, que se corresponden con minimizadores de diferentes energías de superficie, como la energía de flexión elástica. Sin embargo, al estudiar los respectivos cambios estructurales y la deformación de las vesículas, uno debe tener en cuenta adicionalmente el acoplamiento de estas configuraciones con campos externos. En particular, nos enfocaremos en el caso en que la vesícula se encuentra rodeada por un fluido.

En el presente trabajo se realiza una revisión de los resultados obtenidos en ¹ y ², y está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se realiza una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Se inicia con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Posteriormente, se presenta un repaso de algunos resultados conocidos del análisis funcional; y se finaliza con una revisión de algunos resultados previos obtenidos en ¹, que serán útiles para la comprensión y el análisis del modelo bajo estudio.

En el Capítulo 2, se presenta el análisis teórico del modelo de Cahn-Hilliard-Navier-Stokes. Específicamente, se demuestra la existencia de soluciones débiles del modelo usando el método de aproximaciones de Galerkin.

En el Capítulo 3, se estudian dos esquemas para aproximar numéricamente la deformación de una membrana vesicular. En el primero de ellos, no se considerará la interacción con un fluido circundante; mientras que, en el segundo sí se asume este tipo de interacción. Se prueban algunas propiedades para estos esquemas, incluyendo la existencia y unicidad de soluciones, estimaciones de estabilidad y convergencia hacia soluciones débiles.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados de algunos experimentos numéricos realizados. Específicamente, las simulaciones se centran en dos tipos diferentes de fenómenos: la deformación de una vesícula cuando el área de superficie impuesta

es mayor que el área de superficie inicial; y cuando el área de superficie impuesta es menor que el área de superficie inicial.

1. PRELIMINARES

En este capítulo haremos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Posteriormente, presentamos una revisión de algunos resultados conocidos del análisis funcional; y finalizamos, con una revisión de algunos resultados previos obtenidos en ¹, que serán útiles para la comprensión y el análisis del modelo (4).

1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde $\partial\Omega$ suficientemente regular. Para $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, el espacio de Banach $L^p(\Omega)$ es definido como

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso $p = 2$, el espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y con norma definida por $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$. Se muestra fácilmente que si $p \geq q$, el espacio $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$. Así mismo, el espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } |u(\mathbf{x})| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess } |u(\mathbf{x})|.$$

Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de $L^p(\Omega)$ denotado por $(L^p(\Omega))'$ es dado por

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para espacios $L^p(\Omega)$ de funciones vectoriales de dimensión n , se usará la notación $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$, es decir,

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

y su norma asociada está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\partial\Omega$ es acotada y regular, se define el espacio traza $L^q(\partial\Omega)$ como

$$L^q(\partial\Omega) := \left\{ u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } \int_{\partial\Omega} |u|^q dS < \infty \right\},$$

con norma

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^q dS \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definimos los espacios $C_0^\infty(\Omega)$ y $L_{loc}^1(\Omega)$ como:

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ con soporte compacto en } \Omega\},$$

$$L_{loc}^1(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_K |f| < +\infty, \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}.$$

Partiendo de estos espacios, definiremos el concepto de derivada débil.

Definición 1.1.1. (*Derivada débil*). Suponga que $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ y α es multi-índice

diremos que v es la α -ésima derivada débil de u , si

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Para $k \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son definidos por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}v \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

donde D^{α} es el operador diferencial

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} (\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^{\alpha}u(\mathbf{x})|), \quad p = \infty.$$

El espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$ y reflexivo para $1 < p < \infty$. Además, cuando $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(\mathbf{x}) D^{\alpha}v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y cuya norma es definida por $\|v\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$. De ahora en adelante $(\cdot, \cdot)$ denota el producto escalar de $L^2(\Omega)$.

El espacio $H_0^m(\Omega)$ es definido como la clausura de $C_0^{\infty}(\Omega)$ en la norma $H^m(\Omega)$. En

particular, $H_0^1(\Omega)$ es caracterizado por

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Para espacios de Sobolev de dimensión n , se usará la notación $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = (W^{k,p}(\Omega))^n$ y $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^n$, es decir,

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in W^{k,p}(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in H^m(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

y sus respectivas normas asociadas están dadas por

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{W^{k,p}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por simplicidad de notación, a lo largo del trabajo usamos $\|\cdot\|_X$ para referirnos a la norma del espacio $X(\Omega)$. Sea $\mathcal{V}$ el espacio formado por todos los campos $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)^n$ satisfaciendo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en Ω . Denotamos por $\mathbf{H}$ (respectivamente $\mathbf{V}$) la clausura de $\mathcal{V}$ en $L^2(\Omega)$ (respectivamente $H^1(\Omega)$). $\mathbf{H}$ y $\mathbf{V}$ son espacios de Hilbert bajo las normas de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ respectivamente. Además,

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Consideramos los siguientes espacios de media cero:

$$L_*^2 = \left\{ \psi \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} \psi = 0 \right\},$$

$$H_*^1 = H^1 \cap L_*^2,$$

$$H_1^k = \{ \psi \in H^k(\Omega) \cap L_*^2; \partial_n \psi|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad \text{donde } k = 2, 3,$$

y el espacio dual $H_*^{-1} = (H_*^1)'$.

Observación 1.1.2. *A menos que sea estrictamente necesario, para evitar ambigüedades, usaremos (para las normas en espacios de funciones vectoriales) la notación $\|u\|_{X(\Omega)} = \|u\|_{X(\Omega)}$, es decir, omitiremos la negrita en el espacio X .*

Finalmente, definiremos los espacios de Bochner. Sea X un espacio de Banach y a, b tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Para $1 \leq \alpha < +\infty$, diremos que $f \in L^\alpha(a, b, X)$ si f es medible y

$$\|f\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{1/\alpha} < +\infty.$$

En el caso, $\alpha = +\infty$:

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in [a,b]} \text{ess } \|f(t)\|_X.$$

1.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

En esta sección, se citarán algunas definiciones y resultados del área de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Definición 1.2.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ se dice que es acotado, si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Denotamos por $\mathbf{B}(X, Y)$ el conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y .

Definición 1.2.2. *Sean X y Y espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, tales que $X \subseteq Y$. Diremos que X está inmerso continuamente*

en Y , y lo denotaremos por $X \hookrightarrow Y$, si el operador inclusión es continuo, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

El siguiente teorema fue tomado de ⁶ y será utilizado en los capítulos posteriores para realizar algunas estimaciones.

Teorema 1.2.3. *(Teorema de las inmersiones de Sobolev). Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ y $k \geq 0$. Si $kp \leq n$ entonces*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo $r \in [p, \frac{np}{n-kp}]$ si $kp < n$, y para todo $r \in [p, \infty)$ si $kp = n$. En particular, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ que dependen únicamente de k, p, r y n tales que para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^r} \leq c_1 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in [p, \frac{np}{n-kp}], \text{ si } kp < n,$$

$$\|u\|_{L^r} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in [p, \infty), \text{ si } kp = n.$$

Finalmente, si $kp > n$, cada $u \in W^{k,p}(\Omega)$ es igual en c.t.p. en Ω a una única función en $C^l(\overline{\Omega})$, con $0 \leq l < k - \frac{n}{p}$ y la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{C^l} \leq c_3 \|u\|_{W^{k,p}}.$$

Teorema 1.2.4. *(Teorema de Lax-Milgram). Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ un operador bilineal continuo y coercivo, esto es, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{para todo } u, v \in H$$

⁶ G. GALDI. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.

y

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \text{ para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada $f \in H'$ existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \text{ para todo } v \in H.$$

Lema 1.2.5. Sea Σ un subconjunto de $\partial\Omega$ de medida positiva. Entonces para todo $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{L^q} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^q} + \int_{\Sigma} |u| \right), \quad (9)$$

donde la constante C depende de n, q, Ω, Σ , es decir $C = C(n, q, \Omega, \Sigma)$.

Demostración. Véase ⁶. □

Observación 1.2.6. Note que si $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, es tal que $u = 0$ sobre Σ , para algún subconjunto Σ de $\partial\Omega$ con medida positiva, entonces la desigualdad del Lema 1.2.5 se reduce a

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^q}, \quad (10)$$

con $C = C(n, q, \Omega, \Sigma)$. Como consecuencia de esto, se deduce que si $u \in H^1(\Omega)$ es tal que $u = 0$ sobre Σ , para algún subconjunto Σ de $\partial\Omega$ de medida positiva, entonces

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (11)$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (12)$$

Lema 1.2.7. Denotemos por

$$\langle u \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x},$$

lo cual se denomina como la media de u . Entonces, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, se tiene que

$$\|u - \langle u \rangle\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},$$

donde $C = C(n, p)$.

Observación 1.2.8. En particular, el Lema 1.2.7 implica que para todo $u \in H^1(\Omega)$, con $\langle u \rangle = 0$, la estimación (12) también es válida.

A lo largo de este documento, usaremos repetidamente las siguientes desigualdades de Sobolev, interpolación y Gagliardo-Nirenberg:

$$\|v\|_{L^6} \leq C \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\|v\|_{L^3} \leq C \|v\|_{L^2}^{1/2} \|v\|_{H^1}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C \|v\|_{H^1}^{1/2} \|v\|_{H^2}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

Las dos desigualdades que se citan a continuación son usadas frecuentemente y sus respectivas demostraciones se encuentran en ⁷.

Lema 1.2.9. (Desigualdad de Young). Sean a, b, p, q números reales positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.2.10. (Desigualdad de Hölder Generalizada). Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y las funciones $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, con $p_i, p \geq 1$ y satisfaciendo $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Entonces, para $f = f_1 f_2 \cdots f_{k-1} f_k \in L^p(\Omega)$ se tiene

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

⁷ H. BRÉZIS y J. R. ESTEBAN. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza, 1984.

El siguiente resultado es utilizado en el Capítulo 3 para probar la existencia de solución del esquema derivado del problema que abordaremos en esta tesis.

Lema 1.2.11. *Sea X un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $(\cdot, \cdot)$ y norma $|\cdot|$ y sea P un mapeo continuo de X en sí mismo. Asuma que existe $\rho > 0$ tal que $(P(\xi), \xi) > 0$ para $|\xi| = \rho > 0$. Entonces, existe $\xi \in X$, $|\xi| < \rho$, tal que $P(\xi) = 0$.*

Teorema 1.2.12. *(Fórmula de Green). Sea Ω un conjunto abierto regular de clase C^1 . Sea w una función $C^1(\bar{\Omega})$ con soporte acotado en la clausura $\bar{\Omega}$. Entonces w satisface la fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} w(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds,$$

donde n_i es el i -ésimo componente de un vector unitario normal hacia afuera de $\bar{\Omega}$.

Corolario 1.2.13. *(Integración por partes). Sea Ω un conjunto abierto regular de clase C^1 . Sean u y v dos funciones $C^1(\bar{\Omega})$ con soporte acotado en el conjunto cerrado $\bar{\Omega}$. Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds.$$

Demostración. Es suficiente tomar $w = uv$ en el Teorema 1.2.12. □

Corolario 1.2.14. *Sean Ω un conjunto abierto regular de clase C^1 y u una función de $C^2(\bar{\Omega})$ y v una función de $C^1(\bar{\Omega})$, ambas con soporte acotado en el conjunto cerrado $\bar{\Omega}$. Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds$$

donde $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$ es el gradiente de u , y $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$.

Teorema 1.2.15. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $(x_n) \subseteq X$ una sucesión acotada en X . Entonces, existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ y $\bar{x} \in X$ tal que x_{n_k} converge débilmente a $\bar{x}$.*

Teorema 1.2.16. *Sean X Banach separable, X' el espacio dual asociado a X y $(x'_n) \subseteq X'$ una sucesión acotada en X' . Entonces, existe una subsucesión $(x'_{n_k}) \subseteq (x'_n)$ y $x' \in X'$ tal que x'_{n_k} converge débil* a x' .*

Teorema 1.2.17. *Sean X_0, X y X_1 espacios de Banach tales que X_0 y X_1 son reflexivos y*

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1,$$

donde la primera inmersión es compacta y la segunda es continua. Asuma que $1 < p_0, p_1 < +\infty$ y defina

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) = \{z \in L^{p_0}(0, T; X_0) : z_t \in L^{p_1}(0, T; X_1)\},$$

dotado de la norma natural

$$\|z\|_{W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)} = \|z\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|z_t\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}.$$

Entonces $W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)$ es un espacio de Banach reflexivo y la inmersión

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$$

es compacta.

Lema 1.2.18. *Sean $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ espacios de Banach con inmersiones continuas, siendo además la de X en B compacta. Se tienen entonces las siguientes inyecciones compactas:*

$$\blacksquare L^\infty(0, T; X) \cap \left\{ \phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y) \right\} \hookrightarrow C([0, T]; B) \quad \text{si } 1 < r \leq +\infty,$$

$$\blacksquare L^q(0, T; X) \cap \left\{ \phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y) \right\} \longmapsto L^q(0, T; B) \quad \text{si } 1 \leq q \leq +\infty.$$

1.3. ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS

Supongamos Ω suficientemente regular (por ejemplo $\partial\Omega \in C^3$) para tener la regularidad H^3 del siguiente problema elíptico de Poisson-Neumann de segundo orden

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_n v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} v \, d\mathbf{x} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

donde $f \in H_*^1(\Omega)$. Entonces, la regularidad H^2 y H^3 de (13) proporcionan, respectivamente, la existencia de algunas constantes $C > 0$, tales que

$$\|v\|_{H^2} \leq C \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_1^2 \quad \text{y} \quad \|v\|_{H^3} \leq C \|\Delta v\|_{H^1} \quad \forall v \in H_1^3. \quad (14)$$

En particular, ya que $\Delta v \in L_*^2$, al aplicar la desigualdad de Poincaré (Lema 1.2.7) para las funciones de media cero, tenemos que

$$\|v\|_{H^3} \leq C \|\nabla \Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_1^3. \quad (15)$$

En lo que resta de esta sección, se resumirán algunos resultados previos obtenidos en ¹, que clarifican algunos aspectos relativos al modelo estudiado en este trabajo y que serán útiles en los capítulos posteriores. Para definir el producto interno en H_*^{-1} , observe que si $r \in H_*^{-1}$, entonces aplicando el teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.4), existe un único $u_r \in H_*^1$ tal que $\langle r, v \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1} = (u_r, v)_{H_*^1} = (\nabla u_r, \nabla v)_{L^2}$ para toda $v \in H_*^1$. Por lo tanto, $\|r\|_{H^{-1}} = \|\nabla u_r\|_{L^2}$ y $(r, s)_{H_*^{-1}} = (\nabla u_r, \nabla u_s)_{L^2}$ para toda $r, s \in H_*^{-1}$.

Para dar un sentido débil al operador $\Delta^2 v$ junto con la condición de frontera $\partial_n(\Delta v)|_{\partial\Omega} = 0$ para cualquier $v \in H_1^3$, se introduce el operador $A : D(A) = H_1^3 \subset$

$H_*^{-1} \mapsto H_*^{-1}$ como

$$\langle A\psi, \tilde{\psi} \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1} = -(\nabla \Delta \psi, \nabla \tilde{\psi})_{L^2} \quad \forall \psi \in H_1^3, \forall \tilde{\psi} \in H_*^1. \quad (16)$$

En particular, denotando $r = A\psi$ y $s = A\tilde{\psi}$, entonces $u_r = -\Delta \psi$ y $u_s = -\Delta \tilde{\psi}$; por lo tanto, el producto interno en H_*^{-1} sería $(A\psi, A\tilde{\psi})_{H_*^{-1}} = (\nabla \Delta \psi, \nabla \Delta \tilde{\psi})_{L^2}$. Observe que $A \in \mathcal{L}(H_1^3, H_*^{-1})$ y es auto-adjunto y definitivo positivo. De hecho, A es continuo porque

$$\|A\psi\|_{H_*^{-1}} = \sup_{\tilde{\psi}} \frac{\langle A\psi, \tilde{\psi} \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1}}{\|\tilde{\psi}\|_{H_*^1}} = \sup_{\tilde{\psi}} \frac{-(\nabla \Delta \psi, \nabla \tilde{\psi})_{L^2}}{\|\nabla \tilde{\psi}\|_{L^2}}, \quad (17)$$

en particular, tomando $\tilde{\psi} = \Delta \psi \in H_*^1$, se obtiene

$$\|A\psi\|_{H_*^{-1}} = \|\nabla \Delta \psi\|_{L^2} \leq C\|\psi\|_{H^3}. \quad (18)$$

Por otro lado, para todo $\psi, \tilde{\psi} \in H_1^3$, teniendo en cuenta que $\partial_n \psi|_{\partial\Omega} = \partial_n \tilde{\psi}|_{\partial\Omega} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle A\psi, \tilde{\psi} \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1} &= -(\nabla \Delta \psi, \nabla \tilde{\psi})_{L^2} = (\Delta \psi, \Delta \tilde{\psi})_{L^2} \\ &= -(\nabla \psi, \nabla \Delta \tilde{\psi})_{L^2} = \langle A\tilde{\psi}, \psi \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es simétrico. En particular, $\langle A\psi, \psi \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1} = \|\Delta \psi\|_{L^2}^2 \geq C\|\psi\|_{H^2}^2$ para toda $\psi \in H_1^3$, de lo cual se deduce que A es definido positivo.

Finalmente, el siguiente lema da algunas propiedades globales Lipschitz de $F(\phi)$ (definida en (2)), sus derivadas y $\mathcal{A}(\phi)$ (definida en (3)). Su demostración se puede ver en el Anexo 1.

Lema 1.3.1. Sean $K > 0$ una constante y algunas funciones $\phi_i \in H^2(\Omega)$ con $\|\phi_i\|_{H^2} < K$, para $i = 1, 2$, entonces se cumplen las siguientes desigualdades para

cualquier p con $1 \leq p \leq \infty$:

$$\begin{aligned} \|F^{(j)}(\phi_i)\|_{L^p} &\leq C(K), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \|F^{(j)}(\phi_1) - F^{(j)}(\phi_2)\|_{L^p} &\leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^p}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ |\mathcal{A}(\phi_1) - \mathcal{A}(\phi_2)| &\leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^1}, \end{aligned}$$

donde $C(K) > 0$ son constantes diferentes dependiendo de K .

2. ANÁLISIS TEÓRICO

En este capítulo nos centramos en analizar teóricamente el modelo de Cahn-Hilliard-Navier-Stokes. Específicamente, nos enfocamos en demostrar la existencia de soluciones débiles del modelo (4) usando el método de aproximaciones de Galerkin. Tomaremos como base de estudio ¹.

2.1. EL MODELO DE CAHN-HILLIARD-NAVIER-STOKES

Como se ha dicho en la introducción, la deformación de membranas de vesículas dentro de fluidos viscosos incompresibles en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, en un intervalo de tiempo $[0, +\infty)$, se pueden modelar mediante una función de campo de fase $\phi : \bar{\Omega} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dos valores estables $\phi = 1$ y $\phi = -1$ representan el exterior y el interior de las membranas de las vesículas, respectivamente, y $-1 < \phi < 1$ en la interfaz. Siguiendo las ideas presentadas en (¹), en este capítulo nos centraremos en el caso en el que $k(x) = 0$ en la definición de $G(\phi)$ dada en (2); por lo tanto, consideraremos la energía de flexión elástica $\mathcal{E}_{bp}(\phi)$ dada por:

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right)^2 dx + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2, \quad (19)$$

donde $F(\phi)$ y $\mathcal{A}(\phi)$ denotan el potencial polinomial definido en (2) y el área superficial definida en (3), respectivamente. Entonces, para modelar la dinámica en el tiempo de las interacciones vesícula-fluido, consideramos las ecuaciones de

Cahn-Hilliard-Navier-Stokes en $Q = \Omega \times (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda w \nabla \phi + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \gamma \Delta w = 0, \end{cases} \quad (20)$$

donde

$$w := \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi}$$

es el potencial químico. Recuerde que, los coeficientes $\nu > 0$, $\lambda > 0$ y $\gamma > 0$ dependen de la viscosidad del fluido, la elasticidad y la movilidad de la función de campo de fase, respectivamente; y las variables ϕ , $\mathbf{u}$ y p denotan la función campo de fase, el campo de velocidades y la presión hidrostática del fluido, respectivamente. El sistema (20) se completa con las condiciones de contorno

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n \phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n (\Delta \phi)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n w|_{\partial\Omega} = 0 \quad (21)$$

y las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (22)$$

Por compatibilidad, asumimos $\mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0$ con $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ en Ω y $\partial_n \phi_0|_{\partial\Omega} = 0$. En el siguiente lema, probaremos que el volumen total $\int_{\Omega} \phi$ se conserva en el tiempo.

Lema 2.1.1. *El volumen total de ϕ en Ω se conserva, esto es,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (23)$$

Demostración. Integrando (20)₃ en Ω y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, tenemos

$$\int_{\Omega} \partial_t \phi + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \gamma \int_{\Omega} \Delta w = \int_{\Omega} \partial_t \phi + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) - \gamma \int_{\Omega} \Delta w = 0.$$

Aplicando los Corolarios 1.2.13 y 1.2.14, obtenemos

$$\int_{\Omega} \partial_t \phi + \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \gamma \int_{\partial\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{n} = 0,$$

de lo cual, usando las condiciones de contorno (21), deducimos

$$\int_{\Omega} \partial_t \phi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

□

Por otro lado, para todo $\phi, \bar{\phi} \in H^1(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle = \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \bar{\phi} \right) \quad (24)$$

y por lo tanto, si $\phi \in H^2(\Omega)$ y $\partial_{\mathbf{n}} \phi|_{\partial\Omega} = 0$, integrando por partes podemos observar que

$$\mu(\phi) := \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi} = -\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi). \quad (25)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle &= \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \bar{\phi} \right) \\ &= - \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \cdot (\nabla \phi) \bar{\phi} + \int_{\partial\Omega} \varepsilon (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) \bar{\phi} + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \bar{\phi} \\ &= - \int_{\Omega} \varepsilon (\Delta \phi) \bar{\phi} + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \bar{\phi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es claro que se obtiene (25). Además, note que si $\phi \in H^3(\Omega)$ y $\partial_{\mathbf{n}} \phi|_{\partial\Omega} =$

0, entonces $\partial_{\mathbf{n}}\Delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$ es equivalente a $\partial_{\mathbf{n}}\mu(\phi)|_{\partial\Omega} = 0$. Por otra parte, utilizando (25) se puede reescribir la energía de flexión elástica (19) como

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2.$$

Entonces, para todo $\phi, \bar{\phi} \in H^2(\Omega)$ (¹):

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi) \left(-\varepsilon \Delta \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} F''(\phi) \bar{\phi} \right) + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle. \quad (26)$$

Si $\phi \in H_1^4$ y $\bar{\phi} \in H_1^2$, después de algunas integraciones por partes, usando $\nabla \mu(\phi) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ y $\nabla \bar{\phi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, podemos observar que

$$w = \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi} = -\Delta \mu(\phi) + \frac{1}{\varepsilon^2} F''(\phi) \mu(\phi) + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \mu(\phi). \quad (27)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi) \left(-\varepsilon \Delta \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} F''(\phi) \bar{\phi} \right) + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left\langle \frac{\delta \mathcal{A}(\phi)}{\delta \phi}, \bar{\phi} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \mu(\phi) \varepsilon \Delta \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\phi) F''(\phi) \bar{\phi} + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \langle \mu(\phi), \bar{\phi} \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\mu(\phi)) \cdot \nabla \bar{\phi} - \int_{\partial\Omega} \mu(\phi) (\nabla \bar{\phi} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\phi) F''(\phi) \bar{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \langle \mu(\phi), \bar{\phi} \rangle \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla(\mu(\phi))) \bar{\phi} + \int_{\partial\Omega} (\nabla(\mu(\phi)) \cdot \mathbf{n}) \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\phi) F''(\phi) \bar{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \langle \mu(\phi), \bar{\phi} \rangle \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta \mu(\phi)) \bar{\phi} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\phi) F''(\phi) \bar{\phi} + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \langle \mu(\phi), \bar{\phi} \rangle, \end{aligned}$$

y por lo tanto se cumple (27). Ahora, de (25) y (27), podemos reescribir a w . Note

que

$$\begin{aligned}
w &= -\Delta\mu(\phi) + \frac{1}{\varepsilon^2}F''(\phi)\mu(\phi) + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)\mu(\phi) \\
&= -\Delta\left(-\varepsilon\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon}F'(\phi)\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}F''(\phi)\left(-\varepsilon\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon}F'(\phi)\right) + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)(-\varepsilon\Delta\phi) \\
&\quad + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)\left(\frac{1}{\varepsilon}F'(\phi)\right) \\
&= \varepsilon\Delta^2\phi - \frac{1}{\varepsilon}\Delta(F'(\phi)) - \frac{1}{\varepsilon}F''(\phi)(\Delta\phi) \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^3}F'''(\phi)F'(\phi) + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)\left(-\varepsilon\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon}F'(\phi)\right)
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\Delta(F'(\phi)) = F''(\phi)(\Delta\phi) + F'''(\phi)|\nabla\phi|^2$, deducimos que

$$w = \varepsilon\Delta^2\phi + R(\phi), \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned}
R(\phi) &:= -\frac{1}{\varepsilon}\Delta(F'(\phi)) + \frac{1}{\varepsilon^2}F''(\phi)\mu(\phi) + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)\mu(\phi) \\
&= -\frac{2}{\varepsilon}F''(\phi)\Delta\phi - \frac{1}{\varepsilon}F'''(\phi)|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}F'''(\phi)F'(\phi) \\
&\quad + \frac{1}{\eta}(\mathcal{A}(\phi) - \beta)\left(-\varepsilon\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon}F'(\phi)\right).
\end{aligned} \quad (29)$$

Lema 2.1.2. *El mapeo $R = R(\phi)$ dado en (29) está bien planteado de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Además, para algunas funciones $\phi_i \in H^2(\Omega)$ con $\|\phi_i\|_{H^2} < K$, $i = 1, 2$, existe $C = C(K) > 0$ tal que*

$$\|R(\phi_1) - R(\phi_2)\|_{L^2} \leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2}.$$

Demostración. Ver Anexo2

□

Observación 2.1.3. *En particular, ya que $R(0) = 0$ el Lema 2.1.2 implica*

$$\|R(\phi)\|_{L^2} \leq C(K)\|\phi\|_{H^2} \leq C(K).$$

2.2. UN PROBLEMA EQUIVALENTE DE MEDIA CERO

Usando (23), definimos

$$m_0 = \langle \phi_0 \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (30)$$

e introducimos las siguientes variables de media cero:

$$\psi(\mathbf{x}, t) := \phi(\mathbf{x}, t) - m_0 \quad \text{y} \quad z := w - \langle R(\phi) \rangle.$$

Observe que

$$\int_{\Omega} \psi(t, \cdot) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} z(t, \cdot) d\mathbf{x} = 0.$$

En efecto, de (23) y (30) tenemos que

$$\int_{\Omega} \psi = \int_{\Omega} \phi - \int_{\Omega} m_0 = \int_{\Omega} \phi - m_0 |\Omega| = \int_{\Omega} \phi - \int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}) = 0.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (28), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z &= \int_{\Omega} w - \langle R(\phi) \rangle \int_{\Omega} dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \Delta^2 \phi + \int_{\Omega} R(\phi) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} R(\phi) |\Omega| \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \Delta^2 \phi = - \int_{\Omega} \varepsilon \nabla(\Delta \phi) \nabla(1) + \int_{\partial \Omega} \varepsilon \nabla(\Delta \phi) \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_{\partial \Omega} \varepsilon \nabla(\Delta \phi) \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ pues } \partial_{\mathbf{n}}(\Delta \phi) |_{\partial \Omega} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Ahora, dado que $\partial_{\mathbf{n}} \phi |_{\partial \Omega} = 0$ entonces $\partial_{\mathbf{n}}(F'(\phi)) |_{\partial \Omega} = 0$, con lo cual usando el Corolario 1.2.14 se puede obtener que

$$\int_{\Omega} -\Delta(F'(\phi)) dx = 0. \quad (32)$$

Además, integrando (28) y (29) en Ω , procediendo como en (31) y usando (32), tenemos que

$$\langle w \rangle = \langle R(\phi) \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2} \langle F''(\phi) \mu(\phi) \rangle + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \langle \mu(\phi) \rangle. \quad (33)$$

Recíprocamente, dado (ψ, z) podemos reescribir (ϕ, w) como

$$\phi = \psi + m_0 \quad \text{y} \quad w = z + \langle R(\phi) \rangle. \quad (34)$$

Entonces, podemos reescribir el sistema (20) y (28) en términos de (ψ, z) , llegando a (ver Anexo 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda z \nabla \psi + \nabla \tilde{p} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi - \gamma \Delta z = 0, \\ \varepsilon \Delta^2 \psi + \bar{R}(\psi) - z = 0, \end{array} \right. \quad (35)$$

donde

$$\bar{R}(\psi) = R(\psi + m_0) - \langle R(\psi + m_0) \rangle \quad \text{y} \quad \tilde{p} = p - \lambda \langle R(\psi + m_0) \rangle \psi.$$

Observe que, usando (29) y (33) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}(\psi) = & -\frac{2}{\varepsilon} F''(\psi + m_0) \Delta(\psi + m_0) - \frac{1}{\varepsilon} F'''(\psi + m_0) |\nabla(\psi + m_0)|^2 \\ & + \frac{1}{\varepsilon^3} F''(\psi + m_0) F'(\psi + m_0) \\ & + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta(\psi + m_0) + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \langle F''(\psi + m_0) \mu(\psi + m_0) \rangle - \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \langle \mu(\psi + m_0) \rangle, \end{aligned}$$

de lo cual, reemplazando términos y teniendo en cuenta que $\nabla m_0 = \Delta m_0 = 0$ pues m_0 es constante, se deduce

$$\begin{aligned}\bar{R}(\psi) = & -\frac{2}{\varepsilon} F''(\psi + m_0) \Delta \psi - \frac{1}{\varepsilon} F'''(\psi + m_0) |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^3} F''(\psi + m_0) F'(\psi + m_0) \\ & + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left[\left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) F''(\psi + m_0) \right] \\ & - \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right).\end{aligned}$$

El sistema (35) se complementa con las condiciones de frontera y condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}}\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}}(\Delta\psi)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}}z|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 := \phi_0 - \langle \phi_0 \rangle \quad \text{en } \Omega.\end{aligned}\tag{36}$$

En consecuencia, el modelo (20)-(22) es equivalente al modelo (35)-(36). Además, tenga en cuenta que, al denotar la energía de flexión elástica con respecto a la incógnita de media cero ψ como

$$\bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi) = \mathcal{E}_{bp}(\psi + m_0),\tag{37}$$

entonces es fácil comprobar que (ver Anexo 2)

$$z = \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi} = \varepsilon \Delta^2 \psi + \bar{R}(\psi) \quad \forall \psi \in H_1^4(\Omega).\tag{38}$$

2.3. SOLUCIONES DÉBILES

Definimos la energía total como $\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}, \psi) = \mathcal{E}_{kin}(\mathbf{u}) + \lambda \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)$, donde $\mathcal{E}_{kin}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2$ es la energía cinética y $\bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)$ es la energía de flexión elástica definida

en (37); esto es,

$$\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \frac{\lambda}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right)^2 dx + \frac{\lambda}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta)^2.$$

Definición 2.3.1. Sea $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ y $\psi_0 = \phi_0 - m_0 \in H_1^2(\Omega)$, decimos que $(\mathbf{u}, \psi, z)$ es una solución débil global de (35)-(36) en $(0, +\infty)$, si

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{H}) \cap L^2(0, +\infty; \mathbf{V}), \\ \psi &\in L^\infty(0, +\infty; H_1^2) \cap L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_1^3), \quad z \in L^2(0, +\infty; H_*^1), \end{aligned} \quad (39)$$

satisfaciendo la formulación variacional en c.t.p $t \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \lambda (z \nabla \psi, \bar{\mathbf{u}}) &= 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}, \\ \langle \partial_t \psi, \bar{z} \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi, \bar{z}) + \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) &= 0, \quad \forall \bar{z} \in H_*^1, \\ -\varepsilon (\nabla \Delta \psi, \nabla \bar{\psi}) + (\bar{R}(\psi), \bar{\psi}) - (z, \bar{\psi}) &= 0, \quad \forall \bar{\psi} \in H_*^1, \end{aligned} \quad (40)$$

y las condiciones iniciales (36).

Para ver una justificación de la Definición 2.3.1, ver Anexo 2. Además, de (39), (40)₁ y (40)₂, uno puede deducir que (ver Anexo 2)

$$\partial_t \mathbf{u} \in L_{\text{loc}}^{4/3}([0, +\infty); \mathbf{V}') \quad \text{y} \quad \partial_t \psi \in L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_*^{-1}). \quad (41)$$

2.3.1. Existencia de soluciones débiles Fijado el dato inicial $(\mathbf{u}_0, \psi_0) \in \mathbf{H} \times H_1^2(\Omega)$, la existencia de soluciones débiles de (35) en $(0, +\infty)$ puede ser probada usando aproximaciones de Galerkin adecuadas. De hecho, sea $\{\mathbf{w}_i\}_{i \geq 1}$ y $\{\phi_i\}_{i \geq 1}$ bases especiales de $\mathbf{V}$ y $H_1^2(\Omega)$, respectivamente, conformadas por funciones propias del problema de Stokes

$$\mathbf{w}_i \in \mathbf{V} \quad \text{tal que} \quad S \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad \text{con} \quad \|\mathbf{w}_i\|_{L^2} = 1, \quad \lambda_i \nearrow +\infty,$$

y del problema de Poisson-Neumann

$$\phi_i \in H_1^2(\Omega) \quad \text{tal que} \quad -\Delta \phi_i = \mu_i \phi_i, \quad \text{con} \quad \|\phi_i\|_{L^2} = 1, \quad \mu_i \nearrow +\infty. \quad (42)$$

Sean $\mathbf{V}^m$ y W^m los subespacios finito-dimensionales generados por $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, respectivamente. Note que, por (42), si $\phi \in W^m$ entonces $\Delta \phi \in W^m$ y $\Delta^2 \phi \in W^m$. Entonces, para cada $m \geq 1$, decimos que $(\mathbf{u}_m, \psi_m)$ es una solución de Galerkin, si $\mathbf{u}_m : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{V}^m$, $\psi_m : [0, +\infty) \mapsto W^m$ y se satisface, para c.t.p $t > 0$,

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}_m, \bar{\mathbf{u}}_m) + ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \bar{\mathbf{u}}_m) + \nu (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \bar{\mathbf{u}}_m) - \lambda (z_m \nabla \psi_m, \bar{\mathbf{u}}_m) &= 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}_m \in \mathbf{V}^m, \\ (\partial_t \psi_m, \bar{z}_m) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \psi_m, \bar{z}_m) + \gamma (\nabla z_m, \nabla \bar{z}_m) &= 0, \quad \forall \bar{z}_m \in W^m, \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} := P_m(\mathbf{u}_0), \quad \psi_m(0) = \psi_{0m} = Q_m(\psi_0) &\quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (43)$$

donde $z_m : [0, +\infty) \mapsto W^m$ está definida como $z_m := Q_m(\varepsilon \Delta^2 \psi_m + \bar{R}(\psi_m))$. Aquí, $P_m : L^2(\Omega) \mapsto \mathbf{V}^m$ denota la proyección de $L^2(\Omega)$ sobre $\mathbf{V}^m$ y $Q_m : L^2(\Omega) \mapsto W^m$ la proyección de $L^2(\Omega)$ sobre W^m .

De (43), siguiendo las ideas presentadas en el Anexo 2, es posible obtener la siguiente desigualdad de energía:

$$\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_m(t), \psi_m(t)) - \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_m(t_0), \psi_m(t_0)) + \int_{t_0}^t (\nu \|\mathbf{u}_m\|_{H^1}^2 + \lambda \gamma \|\nabla z_m\|_{L^2}^2) ds \leq 0, \quad (44)$$

para c.t.p $t, t_0 : t \geq t_0 \geq 0$. Por lo tanto, siguiendo el mismo argumento usado en la Definición 2.3.1, se pueden obtener las siguientes estimaciones uniformes en tiempo (independientes de m):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &\in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{H}) \cap L^2(0, +\infty; \mathbf{V}), \\ \psi_m &\in L^\infty(0, +\infty; H_1^2) \cap L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_1^3), \quad z_m \in L^2(0, +\infty; H_*^1), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\partial_t \mathbf{u}_m \in L_{\text{loc}}^{4/3}([0, +\infty); \mathbf{V}') \quad \text{y} \quad \partial_t \psi_m \in L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_*^{-1}).$$

Utilizando resultados de compacidad del tipo de Aubin-Lions (ver Teorema 1.2.17 y Lema 1.2.18) para los espacios $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{V}'$ y $H_1^2 \subset W_*^{1,p}(\Omega) \subset H_*^{-1}$ con $p < 6$, tenemos las siguientes compacidades (para todo $T > 0$):

- $\mathbf{u}_m$ es relativamente compacta en $L^2(0, T; \mathbf{H})$. En efecto, tome $X_0 = \mathbf{V}$, $X = \mathbf{H}$, $X_1 = \mathbf{V}'$, $p_0 = 2$ y $p_1 = 4/3$ en el Teorema 1.2.17, por lo tanto

$$W^{2,4/3}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{V}') \hookrightarrow L^2(0, T; \mathbf{H})$$

es compacta. Luego $\mathbf{u}_m$ es relativamente compacta en $L^2(0, T; \mathbf{H})$.

- ψ_m es relativamente compacta en $C([0, T] \times \bar{\Omega})$. En efecto, tome $X = H_1^2$, $Y = H_*^{-1}$, $B = C(\bar{\Omega})$ y $r = 2$ en el Lema 1.2.18; por lo tanto, la inmersión

$$L^\infty(0, T; H_1^2) \cap \left\{ \phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(0, T; H_*^{-1}) \right\} \hookrightarrow C([0, T]; \bar{\Omega})$$

es compacta. Así, ψ_m es relativamente compacta en $C([0, T] \times \bar{\Omega})$.

- $\nabla \psi_m$ es relativamente compacta en $C([0, T]; L^2(\Omega))$. En efecto, dado que $\psi_m \in L^\infty(0, T; H_1^2)$ entonces $\nabla \psi_m \in L^\infty(0, T; H_1^1)$. Ahora, tome $X = H_1^1$, $Y = H_*^{-1}$, $B = L^2$ y $r = 2$ en el Lema 1.2.18; por lo tanto, la inmersión

$$L^\infty(0, T; H_1^1) \cap \left\{ \phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(0, T; H_*^{-1}) \right\} \hookrightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$$

es compacta. Luego, $\nabla \psi_m$ es relativamente compacta en $C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Por lo anterior y por el Lema 1.3.1, $F(\psi_m)$, $F'(\psi_m)$, $F''(\psi_m)$ y $F'''(\psi_m)$ son relativamente compactas en $C([0, T] \times \bar{\Omega})$. Finalmente, usando de nuevo el Teorema

1.2.17 para los espacios $H_1^3 \subset H_1^2 \subset H_*^{-1}$, deducimos que ψ_m es relativamente compacta en $L^2(0, T; H_1^2)$. En efecto, tome $X_0 = H_1^3, X = H_1^2, X_1 = H_*^{-1}, p_0 = 2$ y $p_1 = 2$ en el Teorema 1.2.17, luego la inmersión

$$W^{2,2}(0, T; H_1^3, H_*^{-1}) \hookrightarrow L^2(0, T; H_1^2)$$

es compacta. Así, ψ_m es relativamente compacta en $L^2(0, T; H_1^2)$.

Para probar la existencia de una solución débil (u, ψ, z) del problema variacional (40) para c.t.p $t \in (0, +\infty)$, obtenido como el límite de una subsucesión de (u_m, ψ_m, z_m) , basta con pasar al límite en (43), que será posible debido a las estimaciones y compacidades obtenidas anteriormente. Específicamente, usando que

- u_m converge a u fuertemente en $L^2(0, T; \mathbf{H})$ y débilmente en $L^2(0, T; \mathbf{V})$,
- z_m converge a z débilmente en $L^2(0, T; H_*^1)$,
- ψ_m converge a ψ fuertemente en $C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap L^2(0, T; H_1^2)$, débilmente en $L^2(0, T; H_1^3)$ y $\nabla \psi_m$ converge a $\nabla \psi$ fuertemente en $C([0, T]; L^2(\Omega))$,

siguiendo argumentos similares a los aplicados para las ecuaciones de Navier-Stokes, se concluye la existencia de solución débil del problema (40). Por ser argumentos estándar, y con el objetivo de reducir la extensión del presente trabajo, omitiremos este proceso, pero referimos al lector interesado a ^{1, 8, 9}.

⁸ E. FERNÁNDEZ CARA. "A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations". En: *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 32, 45-73. (2005).

⁹ R. TEMAM. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. Vol. 343. American Mathematical Soc., 2001.

3. ANÁLISIS NUMÉRICO

En este capítulo, se estudiarán dos esquemas para aproximar numéricamente la deformación de membranas vesiculares. En el primero, no se considera la interacción con un fluido circundante; mientras que, en el segundo sí se asume este tipo de interacción. Se probarán algunas propiedades para estos esquemas, incluyendo el buen planteamiento, estimaciones de estabilidad y convergencia hacia soluciones débiles. Este capítulo toma como base de estudio ².

3.1. UN MODELO EQUIVALENTE

En el Capítulo 2 se observó que un aspecto clave para la prueba de la existencia de soluciones débiles de (35)-(36) en el sentido de la Definición 2.3.1, es la obtención de una ley de energía (ver (44)). Así, con el objetivo de obtener esquemas numéricos que conserven a nivel discreto esta ley de energía, y poder probar buenas propiedades para estos esquemas, usaremos la reformulación introducida en ². Para esto, considere

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi) := \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \omega^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2, \quad (45)$$

donde

$$\omega := -\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon^2} G(\phi), \quad (46)$$

con $G(\phi)$ definida en (2). Recuerde que, el volumen de la vesícula se define como

$$V(\phi) := \int_{\Omega} \phi d\mathbf{x} \quad (47)$$

y el área de superficie $\mathcal{A}(\phi)$ ha sido definida en (3). Así mismo, procediendo como en (26)-(27), introducimos la siguiente variable

$$\mu := \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\phi)}{\delta \phi} = -\varepsilon \Delta \omega + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right). \quad (48)$$

Teniendo en cuenta las variables definidas anteriormente, es posible escribir la correspondiente ecuación de Cahn-Hilliard de sexto orden (ver (4)₃ sin el término de transporte) como el siguiente sistema de segundo orden en las variables (μ, ω, ϕ) :

$$\begin{cases} \phi_t - \gamma \Delta \mu = 0, \\ -\varepsilon \Delta \omega + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) - \mu = 0, \\ \varepsilon \omega + \varepsilon \Delta \phi - \frac{1}{\varepsilon} G(\phi) = 0, \end{cases} \quad (49)$$

donde $\beta = \mathcal{A}(\phi_0)$. El sistema (49) es complementado con la condición inicial $\phi|_{t=0} = \phi_0$ en Ω y alguno de los siguientes grupos de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \text{(CC1)} & \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \omega \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \mu \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \text{(CC2)} & \phi|_{\partial\Omega} = -1, \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \mu \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Lema 3.1.1. *El sistema (49) complementado con cualquiera de las condiciones de contorno propuestas en (50) satisface la siguiente ley de energía disipativa:*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{bp}(\phi(t)) + \gamma \|\nabla \mu(t)\|_{L^2}^2 = 0. \quad (51)$$

Demostración. Realizaremos la demostración para las condiciones (50)₁. Formalmente, multiplicando a (49)₁ por μ e integrando en Ω tenemos

$$\int_{\Omega} \phi_t \mu - \gamma \int_{\Omega} (\Delta \mu) \mu = 0.$$

Note que al aplicar el Corolario 1.2.14 y teniendo en cuenta que $\nabla\mu \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, obtenemos

$$-\gamma \int_{\Omega} (\Delta\mu) \mu = \gamma \int_{\Omega} \nabla\mu \cdot \nabla\mu - \gamma \int_{\partial\Omega} \mu (\nabla\mu \cdot \mathbf{n}) = \gamma \|\nabla\mu\|_{L^2}^2,$$

con lo cual, concluimos

$$\int_{\Omega} \phi_t \mu + \gamma \|\nabla\mu\|_{L^2}^2 = 0. \quad (52)$$

Por otro lado, multiplicando (49)₂ por ϕ_t e integrando en Ω , encontramos

$$\int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta\omega + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega \right) \phi_t + \int_{\Omega} \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) \phi_t - \int_{\Omega} \mu \phi_t = 0. \quad (53)$$

Veamos cada término de (53). Por un lado, aplicando el Corolario 1.2.14 y teniendo en cuenta que $\nabla\omega \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, tenemos

$$-\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta\omega) \phi_t = \varepsilon \int_{\Omega} \nabla\omega \cdot \nabla\phi_t - \varepsilon \int_{\Omega} \phi_t (\nabla\omega \cdot \mathbf{n}) = \varepsilon \int_{\Omega} \nabla\omega \cdot \nabla\phi_t. \quad (54)$$

Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right) &= \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\phi) \right) \\ &= \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(\int_{\Omega} \varepsilon \nabla\phi \cdot \nabla\phi_t + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \phi_t \right), \end{aligned}$$

pero usando el Corolario 1.2.13 y teniendo en cuenta que $\nabla\phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, se tiene que

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\phi_t = -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta\phi) \phi_t + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \phi_t (\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) = -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta\phi) \phi_t,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right) &= \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(\int_{\Omega} -\varepsilon(\Delta\phi)\phi_t + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi)\phi_t \right) \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) \phi_t \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Así, reemplazando (54)-(55) en (53), deducimos que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \omega \cdot \nabla \phi_t + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega \phi_t + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right) - \int_{\Omega} \mu \phi_t = 0. \quad (56)$$

Finalmente, derivando (49)₃ respecto a t , multiplicando por ω e integrando en Ω , tenemos

$$\varepsilon \int_{\Omega} \omega_t \omega + \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta \phi_t) \omega - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G'(\phi) \phi_t \omega = 0. \quad (57)$$

Note que aplicando el Corolario 1.2.14 y teniendo en cuenta que $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ implica $\nabla \phi_t \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} \omega_t \omega + \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta \phi_t) \omega &= \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega^2 \right) - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \omega (\nabla \phi_t \cdot \mathbf{n}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega, \end{aligned} \quad (58)$$

y así, de (57) y (58), llegamos a

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G'(\phi) \phi_t \omega = 0. \quad (59)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (52), (56) y (59), obtenemos

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right) + \gamma \|\nabla \mu\|_{L^2}^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{bp}(\phi) + \gamma \|\nabla \mu\|_{L^2}^2 = 0.$$

□

3.1.1. Acoplamiento de los efectos de flexión con un fluido circundante

Recuerde que para modelar la interacción de las vesículas dentro de un fluido incompresible, la energía total del sistema se define como la suma de las energías cinética y de flexión:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi) := \mathcal{E}_{kin}(\mathbf{u}) + \lambda \mathcal{E}_{bp}(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \lambda \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \omega^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right), \quad (60)$$

donde $\lambda > 0$ es un coeficiente de capilaridad. Ahora, teniendo en cuenta la reformulación (49), reescribimos el sistema (20), (25) y (27), en el siguiente problema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda \mu \nabla \phi = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \gamma \Delta \mu = 0, \\ -\varepsilon \Delta \omega + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) - \mu = 0, \\ \varepsilon \omega + \varepsilon \Delta \phi - \frac{1}{\varepsilon} G(\phi) = 0. \end{array} \right. \quad (61)$$

Además, reescribimos algunos términos del sistema (61) teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mu \nabla \phi &= \nabla(\phi \mu) - \phi \nabla \mu, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (62)$$

Luego, redefiniendo el término de presión como $\tilde{p} = p - \phi \mu$, podemos llegar (reescribiendo p en lugar de $\tilde{p}$ para simplificar la notación) a la siguiente

reformulación de (61):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} + \lambda \phi \nabla \mu = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \phi_t + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) - \gamma \Delta \mu = 0, \\ -\varepsilon \Delta \omega + \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) - \mu = 0, \\ \varepsilon \omega + \varepsilon \Delta \phi - \frac{1}{\varepsilon} G(\phi) = 0. \end{array} \right. \quad (63)$$

Este problema diferencial se complementa con las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad (64)$$

la condición

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad (65)$$

y una de las condiciones de contorno para (ϕ, ω, μ) dadas en (50).

Lema 3.1.2. *El sistema (63)-(65) complementado con cualquiera de las condiciones de contorno propuestas en (50) satisface la siguiente ley de energía disipativa:*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{u}(t), \phi(t)) + \nu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \lambda \gamma \|\nabla \mu(t)\|_{L^2}^2 = 0. \quad (66)$$

Demostración. Realizaremos la demostración para las condiciones $(50)_1$. Formalmente, multiplicando $(63)_1$ por $\mathbf{u}$ e integrando en Ω , tenemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \lambda \phi \nabla \mu \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (67)$$

De (63)₂ y (65), aplicando el Corolario 1.2.13 obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 u_1 + \dots + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 u_3 \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) + \dots + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) \\
&= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) \\
&\quad - \dots - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{68}$$

Así mismo,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2, \tag{69}$$

y

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{70}$$

Por lo tanto, usando (68)-(70) en (67), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \lambda \phi \nabla \mu \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{71}$$

Por otro lado, multiplicando (63)₂ por p , integrando en Ω , usando (65) y aplicando el Corolario 1.2.13,

$$0 = \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p. \tag{72}$$

Ahora, multiplicando (63)₃ por $\lambda \mu$ e integrando en Ω ,

$$\lambda \int_{\Omega} \phi_t \mu + \lambda \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})) \mu - \lambda \gamma \int_{\Omega} (\Delta \mu) \mu = 0. \tag{73}$$

Teniendo en cuenta (50)₁, (65) y aplicando el Corolario 1.2.13, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})) \mu &= -\lambda \int_{\Omega} \phi \mathbf{u} \cdot \nabla \mu + \lambda \int_{\partial \Omega} \phi \mu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = -\lambda \int_{\Omega} \phi \mathbf{u} \cdot \nabla \mu \\ &= -\lambda \int_{\Omega} \phi \nabla \mu \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (74)$$

y

$$-\lambda \gamma \int_{\Omega} (\Delta \mu) \mu = \lambda \gamma \int_{\Omega} \nabla \mu \cdot \nabla \mu - \lambda \gamma \int_{\partial \Omega} \mu (\nabla \mu \cdot \mathbf{n}) = \lambda \gamma \|\nabla \mu\|_{L^2}^2. \quad (75)$$

Así, usando (74) y (75) en (73), llegamos a

$$\lambda \int_{\Omega} \phi_t \mu - \lambda \int_{\Omega} \phi \nabla \mu \cdot \mathbf{u} + \lambda \gamma \|\nabla \mu\|_{L^2}^2 = 0. \quad (76)$$

Ahora, multiplicando a (63)₄ por $\lambda \phi_t$ e integrando en Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \lambda \int_{\Omega} (\Delta \omega) \phi_t + \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\phi) \right) \phi_t \right] \\ & + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega \phi_t - \lambda \int_{\Omega} \mu \phi_t = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Aplicando el Corolario 1.2.14 y teniendo en cuenta (50)₁, tenemos que

$$-\varepsilon \lambda \int_{\Omega} (\Delta \omega) \phi_t = \varepsilon \lambda \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \phi_t - \varepsilon \lambda \int_{\partial \Omega} \phi_t (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) = \varepsilon \lambda \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \phi_t. \quad (78)$$

Reemplazando (55) y (78) en (77), obtenemos

$$\varepsilon \lambda \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \phi_t + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G'(\phi) \omega \phi_t + \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi) - \beta)^2 \right) - \lambda \int_{\Omega} \mu \phi_t = 0. \quad (79)$$

Finalmente, derivando con respecto al tiempo a (63)₅, multiplicando por $\lambda \omega$ e

integrando en Ω , tenemos

$$\lambda \varepsilon \int_{\Omega} \omega_t \omega + \lambda \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta \phi_t) \omega - \lambda \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G'(\phi) \phi_t \omega = 0. \quad (80)$$

Usando el Corolario 1.2.13 y el hecho que de $(50)_1$, $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ implica $\nabla \phi_t \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, obtenemos

$$\lambda \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta \phi_t) \omega = -\lambda \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega + \lambda \varepsilon \int_{\partial\Omega} \omega (\nabla \phi_t \cdot \mathbf{n}) = -\lambda \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega. \quad (81)$$

Por lo tanto, reemplazando (81) en (80) y usando que

$$\varepsilon \lambda \int_{\Omega} \omega_t \omega = \lambda \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\omega|^2,$$

obtenemos

$$\lambda \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\omega|^2 - \lambda \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \omega - \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{\Omega} G'(\phi) \phi_t \omega = 0. \quad (82)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (71), (72), (76), (79) y (82), y teniendo en cuenta (60), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{u}(t), \phi(t)) + \nu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \lambda \gamma \|\nabla \mu(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

□

3.2. ESQUEMAS NUMÉRICOS

En esta sección, primero presentamos un esquema completamente discreto para aproximar el sistema (49) modelando el comportamiento de las membranas de las vesículas sin interacciones con un fluido circundante, satisfaciendo una versión discreta de la ley de energía disipativa (51). Posteriormente, presentamos

un esquema numérico para aproximar el sistema acoplado (63) modelando la deformación de la vesícula cuando esta se encuentra inmersa en un fluido, satisfaciendo también una versión discreta de la ley de energía (66). El segundo esquema propuesto pertenece a la configuración de esquemas de división, es decir, divide el cálculo de las incógnitas del fluido $(\mathbf{u}, p)$ y las incógnitas de la vesícula (ϕ, μ, ω) en dos subpasos diferentes. Este tipo de ideas permite obtener un esquema eficiente que reduce el costo computacional en comparación con una aproximación directa al sistema acoplado (63).

3.2.1. Esquema totalmente discreto para el problema de las vesículas Para la discretización temporal, asumimos una partición uniforme del intervalo de tiempo $[0, T] : t_n = n\Delta t$ con $\Delta t = T/N$ denotando el paso del tiempo. Para la discretización espacial, considere una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ conformadas por símlices K (triángulos en 2D y tetraedros en 3D), tales que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, con h_K siendo el diámetro de K . Escogemos los siguientes espacios de elementos finitos para $(\phi, \mu, \omega) : (\Phi_h, M_h, W_h) \subset H^1(\Omega)^3$ generados por $\mathbb{P}_s, \mathbb{P}_r, \mathbb{P}_l$ respectivamente, $s, r, l \geq 1$.

Consideramos el siguiente esquema de diferencias finitas semi-implícito de primer orden para aproximar (49):

Inicialización: Sea $\phi^0 = P_{\Phi_h} \phi(0)$ y $\omega^0 = P_{W_h} \omega(0)$, considerando la condición inicial

$$\omega(0) = \omega_0 = -\Delta \phi_0 + \frac{1}{\varepsilon^2} G(\phi_0), \quad (83)$$

donde P_X denota el operador proyector de $L^2(\Omega)$ en el espacio X .

Paso $n+1$: Sea $(\phi^n, \omega^n) \in \Phi_h \times W_h$ dado, calcular $(\phi^{n+1}, \mu^{n+1}, \omega^{n+1}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$

tal que para cualquier $(\bar{\phi}, \bar{\mu}, \bar{\omega}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_t \phi^{n+1}, \bar{\mu}) + \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla \bar{\mu}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \bar{\phi}) - (\mu^{n+1}, \bar{\phi}) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(\varepsilon (\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), \bar{\phi}) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega^{n+1}, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi^{n+1}), \bar{\omega}) = 0, \end{array} \right. \quad (84)$$

donde $\delta_t a^{n+1} := \frac{a^{n+1} - a^n}{\Delta t}$ y $a^{n+\frac{1}{2}} := \frac{a^{n+1} + a^n}{2}$, y $F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n)$ y $G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n)$ denotan aproximaciones de tipo secante (ver ¹⁰, ¹¹, ¹² y las referencias citadas en ellos para diferentes formas de manejar este tipo de potenciales):

$$F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) := \frac{F(\phi^{n+1}) - F(\phi^n)}{\phi^{n+1} - \phi^n} = \frac{1}{4} (\phi^{n+1} + \phi^n) \left((\phi^{n+1})^2 + (\phi^n)^2 - 2 \right), \quad (85)$$

y

$$G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) := \frac{G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)}{\phi^{n+1} - \phi^n} = 3(\phi^{n+1}\phi^n - 1 - \varepsilon k(\mathbf{x})(\phi^{n+1} + \phi^n)) + (\phi^{n+1} - \phi^n)^2. \quad (86)$$

-
- ¹⁰ F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y G. TIERRA. “On linear schemes for a Cahn–Hilliard diffuse interface model”. En: *Journal of Computational Physics* 234 (2013), págs. 140-171.
- ¹¹ F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y G. TIERRA. “Second order schemes and time-step adaptivity for Allen–Cahn and Cahn–Hilliard models”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 68.8 (2014), págs. 821-846.
- ¹² G. TIERRA y F. GUILLÉN-GONZÁLEZ. “Numerical methods for solving the Cahn–Hilliard equation and its applicability to related energy-based models”. En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 22.2 (2015), págs. 269-289.

Lema 3.2.1. *El esquema (84) satisface la conservación de la masa, es decir,*

$$\int_{\Omega} \phi^{n+1} = \int_{\Omega} \phi^n = \dots = \int_{\Omega} \phi^0. \quad (87)$$

Demostración. Tomando $\bar{\mu} = 1$ en $(84)_1$, tenemos

$$\int_{\Omega} \delta_t \phi^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \right) = 0,$$

de lo cual,

$$\int_{\Omega} \phi^{n+1} - \int_{\Omega} \phi^n = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi^{n+1} = \int_{\Omega} \phi^n, \quad \forall n \geq 0.$$

□

Estabilidad energética

Lema 3.2.2. *El esquema (84) satisface la siguiente ley de energía disipativa discreta (que es una versión discreta de la ley de energía (51)):*

$$\delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + ND_{\omega}^{n+1} = 0, \quad (88)$$

donde ND_{ω}^{n+1} denota el término de disipación numérica

$$ND_{\omega}^{n+1} := \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left(\|\delta_t \omega^{n+1}\|_{L^2}^2 \right) \geq 0. \quad (89)$$

Demostración. Se puede probar que (ver Anexo 3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \delta_t \phi^{n+1}) &= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \omega^{n+1}), \\ \left(\varepsilon \left(\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \delta_t \phi^{n+1} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), \delta_t \phi^{n+1}) \right) &= \mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n). \end{aligned} \quad (90)$$

Ahora, tomando $\bar{\mu} = \mu^{n+1}$ en $(84)_1$ tenemos

$$\int_{\Omega} (\delta_t \phi^{n+1}) \mu^{n+1} + \gamma \int_{\Omega} \nabla \mu^{n+1} \cdot \nabla \mu^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} (\delta_t \phi^{n+1}) \mu^{n+1} + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0. \quad (91)$$

Por otro lado, tomando $\bar{\phi} = \delta_t \phi^{n+1}$ en $(84)_2$ y teniendo en cuenta las igualdades en (90), obtenemos

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^{n+1} \cdot \nabla \delta_t \phi^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \int_{\Omega} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)) \omega^{n+1} \\ & - \int_{\Omega} \mu^{n+1} (\delta_t \phi^{n+1}) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \frac{1}{\Delta t} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)) = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Sumando (91) y (92), llegamos a

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^{n+1} \cdot \nabla \delta_t \phi^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \int_{\Omega} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)) \omega^{n+1} \\ & + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \frac{1}{\Delta t} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)) = 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Note que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)) \frac{1}{\Delta t} \\ & = \frac{1}{2\eta} \left[\frac{(\mathcal{A}(\phi^{n+1}))^2 - (\mathcal{A}(\phi^n))^2}{\Delta t} - \frac{2\beta}{\Delta t} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)) \right] \\ & = \frac{1}{2\eta} \delta_t \left((\mathcal{A}(\phi^{n+1}))^2 - 2\beta \mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \beta^2 \right) \\ & = \frac{1}{2\eta} \delta_t (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \beta)^2. \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (93), se obtiene

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^{n+1} \cdot \nabla \delta_t \phi^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \int_{\Omega} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)) \omega^{n+1} \\ & + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\eta} \delta_t (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \beta)^2 = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

Finalmente, computaremos la derivada discreta de $(84)_3$ con respecto al tiempo y tomaremos como función test $\bar{\omega} = \omega^{n+1}$. Para esto, considere $(84)_3$ en los tiempos $n + 1$ y n , obteniendo

$$\varepsilon (\omega^{n+1}, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi^{n+1}), \bar{\omega}) = 0,$$

$$\varepsilon (\omega^n, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi^n, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi^n), \bar{\omega}) = 0.$$

Restando estas dos últimas ecuaciones y multiplicando por $1/\Delta t$, obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t}, \bar{\omega} \right) - \varepsilon \left(\frac{\nabla (\phi^{n+1} - \phi^n)}{\Delta t}, \nabla \bar{\omega} \right) - \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \bar{\omega}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon (\delta_t \omega^{n+1}, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \delta_t \phi^{n+1}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \bar{\omega}) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, tomando en la ecuación anterior $\bar{\omega} = \omega^{n+1}$, tenemos

$$\varepsilon (\delta_t \omega^{n+1}, \omega^{n+1}) - \varepsilon (\nabla \delta_t \phi^{n+1}, \nabla \omega^{n+1}) - \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \omega^{n+1}) = 0. \quad (95)$$

Note que, usando la igualdad $(a - b)a = (a^2 - b^2)/2 + (a - b)^2/2$, tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon (\delta_t \omega^{n+1}, \omega) &= \frac{\varepsilon}{\Delta t} \int_{\Omega} (\omega^{n+1} - \omega^n) \omega^{n+1} \\ &= \frac{\varepsilon}{2\Delta t} \int_{\Omega} ((\omega^{n+1})^2 - (\omega^n)^2 + (\omega^{n+1} - \omega^n)^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \delta_t \|\omega^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \|\delta_t \omega^{n+1}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (95), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \delta_t \|\omega^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \|\delta_t \omega^{n+1}\|_{L^2}^2 - \varepsilon (\nabla \delta_t \phi^{n+1}, \nabla \omega^{n+1}) \\ - \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \omega^{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Ahora, sumando (94) y (96), deducimos

$$\frac{\varepsilon}{2} \delta_t \|\omega^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \|\delta_t \omega^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\eta} \delta_t (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \beta)^2 = 0, \quad (97)$$

de lo cual se concluye (88). $\square$

A partir de la ley de energía discreta (88), vamos a deducir algunas estimaciones a priori para las variables discretas $(\phi^{n+1}, \mu^{n+1}, \omega^{n+1})$, que serán útiles para probar el buen planteamiento del esquema (84) y la convergencia hacia soluciones débiles de (49).

Estimaciones a priori Suponemos que inicialmente $\phi^0 \in H^2(\Omega)$. Veamos que la energía inicial $\mathcal{E}_{bp}(\phi^0)$ es finita. En efecto, primero probaremos que $\omega^0 \in L^2(\Omega)$.

Como $\phi^0 \in H^2(\Omega)$ entonces $\Delta \phi^0 \in L^2(\Omega)$, es decir

$$\int_{\Omega} (\Delta \phi^0)^2 \leq C.$$

Por otro lado, de (2) tenemos

$$G(\phi^0) = F'(\phi^0) - \varepsilon k(\mathbf{x}) H'(\phi^0),$$

pero, tanto $F'(\phi^0)$ como $H'(\phi^0)$ pertenecen $L^2(\Omega)$, por lo tanto $G(\phi^0) \in L^2(\Omega)$ y así

$$\|\omega^0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\omega^0)^2 = \int_{\Omega} \left(-\Delta \phi^0 + \frac{1}{\varepsilon^2} G(\phi^0) \right)^2 \leq C.$$

Ahora, dado que $\mathcal{A}(\phi^0) = \beta$ y $\omega^0 \in L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi^0) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (\omega^0)^2 + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^0) - \beta)^2 = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (\omega^0)^2 \leq C,$$

es decir, la energía inicial $\mathcal{E}_{bp}(\phi^0)$ es finita.

Ahora, multiplicando la ley de energía discreta (88) por Δt y sumando desde $n = 0$ hasta $n = r$, obtenemos:

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi^{r+1}) + \gamma \Delta t \sum_{n=0}^r \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{E}_{bp}(\phi^0) \leq C. \quad (98)$$

Entonces, de (98) obtenemos

$$\nabla \mu^{n+1} \in l^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (99)$$

y además

$$\mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) \in l^\infty(0, T). \quad (100)$$

De (100) se tienen directamente las siguientes estimaciones

$$\omega^{n+1} \in l^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}(\phi^{n+1}) \in l^\infty(0, T). \quad (101)$$

En particular, por definición

$$\mathcal{A}(\phi^{n+1}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi^{n+1}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi^{n+1}) \right) d\mathbf{x},$$

de lo cual, teniendo en cuenta (101), deducimos

$$\nabla \phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (102)$$

y como tenemos que se cumple la conservación de la masa (ver (87)), deducimos la estimación

$$\phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (103)$$

Ahora, para obtener una regularidad tipo $H^2(\Omega)$ discreta para la fase, definimos el operador discreto A_h a partir del operador $A = -\Delta + I$ con condición de frontera

Neumann homogénea, que se define de la siguiente manera: para cada $\phi \in \Phi_h$, $A_h\phi \in \Phi_h$,

$$(A_h\phi, \bar{\phi}) = (\nabla\phi, \nabla\bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}) \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_h. \quad (104)$$

Lema 3.2.3. *Sea $\Phi_h \subset W_h$. Entonces, las soluciones del esquema (84) satisfacen la siguiente estimación*

$$A_h\phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (105)$$

la cual es la versión discreta de la regularidad $\phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; H^2(\Omega))$.

Demostración. Dado que $\Phi_h \subset W_h$, por (104) y (84)₃ tenemos, para todo $\bar{\phi} \in \Phi_h$,

$$(A_h\phi^{n+1}, \bar{\phi}) = (\nabla\phi^{n+1}, \nabla\bar{\phi}) + (\phi^{n+1}, \bar{\phi}), \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega^{n+1}, \bar{\phi}) - \varepsilon(\nabla\phi^{n+1}, \nabla\bar{\phi}) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^{n+1}), \bar{\phi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\omega^{n+1}, \bar{\phi}) - (\nabla\phi^{n+1}, \nabla\bar{\phi}) - \frac{1}{\varepsilon^2}(G(\phi^{n+1}), \bar{\phi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\omega^{n+1}, \bar{\phi}) - \frac{1}{\varepsilon^2}(G(\phi^{n+1}), \bar{\phi}) &= (\nabla\phi^{n+1}, \nabla\bar{\phi}), \end{aligned} \quad (107)$$

y reemplazando (107) en (106), tenemos

$$(A_h\phi^{n+1}, \bar{\phi}) = (\omega^{n+1}, \bar{\phi}) - \frac{1}{\varepsilon^2}(G(\phi^{n+1}), \bar{\phi}) + (\phi^{n+1}, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_h. \quad (108)$$

Por otro lado,

$$G(\phi) = F'(\phi) - \varepsilon k(\mathbf{x})H'(\phi) = \phi^3 - \phi - \varepsilon k(\mathbf{x})\phi^2 + \varepsilon k(\mathbf{x}),$$

luego

$$\begin{aligned}
\|G(\phi)\|_{L^2} &= \|\phi^3 - \phi - \varepsilon k(\mathbf{x})\phi^2 + \varepsilon k(\mathbf{x})\|_{L^2} \\
&\leq \|\phi^3\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} + \varepsilon \|k(\mathbf{x})\|_{L^\infty} \|\phi^2\|_{L^2} + \varepsilon \|k(\mathbf{x})\|_{L^\infty} \\
&= \|\phi^3\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} + C \|\phi^2\|_{L^2} + C.
\end{aligned} \tag{109}$$

Observe que

$$\|\phi^3\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} (\phi^3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \phi^6 \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3}} = \left(\left(\int_{\Omega} \phi^6 \right)^{\frac{1}{6}} \right)^3 = \|\phi\|_{L^6}^3, \tag{110}$$

y

$$\|\phi^2\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} (\phi^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \phi^4 \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \left(\left(\int_{\Omega} \phi^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 = \|\phi\|_{L^4}^2, \tag{111}$$

con lo cual, reemplazando (110) y (111) en (109), obtenemos

$$\|G(\phi)\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^6}^3 + \|\phi\|_{L^2} + C \|\phi\|_{L^4}^2 + C.$$

Por el Teorema 1.2.3,

$$\|\phi\|_{L^6} \leq C \|\phi\|_{H^1} \quad \text{y} \quad \|\phi\|_{L^4} \leq C \|\phi\|_{H^1},$$

luego,

$$\|G(\phi)\|_{L^2} \leq C \|\phi\|_{H^1}^3 + \|\phi\|_{L^2} + C \|\phi\|_{H^1}^2 + C. \tag{112}$$

Pero, de (103) tenemos

$$\sup_{0 \leq r \leq N} (\|\phi^{r+1}\|_{H^1}) \leq C,$$

de lo cual, se concluye que

$$\sup_{0 \leq r \leq N} (\|G(\phi^{r+1})\|_{L^2}) \leq C,$$

es decir,

$$G(\phi^{n+1}) \in l^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (113)$$

Ahora, note que de (108)

$$A_h \phi^{n+1} = \omega^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} G(\phi^{n+1}) + \phi^{n+1}.$$

Luego, aplicando la norma en $L^2(\Omega)$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \|A_h \phi^{n+1}\|_{L^2} &= \left\| \omega^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} G(\phi^{n+1}) + \phi^{n+1} \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\omega^{n+1}\|_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|G(\phi^{n+1})\|_{L^2} + \|\phi^{n+1}\|_{L^2} \end{aligned} \quad (114)$$

y tomando el supremo en n en la desigualdad (114), llegamos a

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} (\|A_h \phi^{n+1}\|_{L^2}) &\leq \sup_{0 \leq n \leq N} (\|\omega^{n+1}\|_{L^2}) + \sup_{0 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|G(\phi^{n+1})\|_{L^2} \right) \\ &\quad + \sup_{0 \leq n \leq N} (\|\phi^{n+1}\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (115)$$

Por lo tanto, usando (101), (103) y (113) encontramos

$$\sup_{0 \leq n \leq N} (\|A_h \phi^{n+1}\|_{L^2}) \leq C,$$

es decir, $A_h \phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. □

Ahora, usando la siguiente estimación (para su demostración ver Anexo 3)

$$\|\phi^{n+1}\|_{W^{1,6}} \leq C \|A_h \phi^{n+1}\|_{L^2}, \quad (116)$$

y teniendo en cuenta (105), se tiene la estimación complementaria

$$\phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega)). \quad (117)$$

Por lo tanto, usando la inmersión de Sobolev $W^{1,6}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, llegamos a la estimación

$$\phi^{n+1} \in l^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)). \quad (118)$$

Existencia de solución del esquema

Teorema 3.2.4. *Existe $(\phi^{n+1}, \mu^{n+1}, \omega^{n+1}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$ solución del esquema (84).*

Demostración. Probaremos el resultado para el caso en el que se consideran las condiciones de contorno $(50)_1$. Primero, introducimos el cambio de variables

$$\psi = \phi^{n+1} - \phi^n, \quad \omega = \omega^{n+1}, \quad z = \mu^{n+1} - \oint \mu^{n+1}, \quad (119)$$

donde

$$\oint \mu^{n+1} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mu^{n+1}.$$

De (87), se obtiene $\oint \psi = 0$. Por otro lado, de $(84)_2$, si las funciones constantes pertenecen a Φ_h , tenemos

$$\begin{aligned} \oint \mu^{n+1} &= \frac{1}{\varepsilon} \oint \left(G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \oint \left(G_{sec}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n) \omega^{n+1} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) F_{sec}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n) \right). \end{aligned} \quad (120)$$

Además, se puede probar que $\oint z = 0$. En efecto, por (119)

$$\begin{aligned}
\oint z &= \oint \left(\mu^{n+1} - \oint \mu^{n+1} \right) \\
&= \oint \mu^{n+1} - \oint \left(\oint \mu^{n+1} \right) \\
&= \oint \mu^{n+1} - \left(\oint \mu^{n+1} \right) \oint 1, \quad (\text{pues } \oint \mu^{n+1} \text{ ya es una constante}) \quad (121) \\
&= \oint \mu^{n+1} - \left(\oint \mu^{n+1} \right) \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} 1 \\
&= \oint \mu^{n+1} - \oint \mu^{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Dado que los términos constantes $\oint \mu^{n+1}$ se desvanecen cuando se multiplican por cualquier $\bar{\psi}$ tal que $\oint \psi = 0$, luego usando los espacios de media cero

$$\tilde{\Phi}_h := \left\{ \psi \in \Phi_h \text{ tal que } \oint_{\Omega} \psi = 0 \right\}, \quad \tilde{M}_h := \left\{ z \in M_h \text{ tal que } \oint_{\Omega} z = 0 \right\},$$

el problema (84) se puede reescribir como: Encontrar $(\psi, z, w) \in \tilde{\Phi}_h \times \tilde{M}_h \times W_h$ tal que para cada $(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{w}) \in \tilde{\Phi}_h \times \tilde{M}_h \times W_h$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi, \bar{z}) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n) \omega, \bar{\psi}) - (z, \bar{\psi}) \\ + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \right) \\ + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla (\psi + \phi^n), \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\psi + \phi^n), \bar{\omega}) = 0. \end{array} \right. \quad (122)$$

En efecto, primero veamos que de $(84)_1$ se obtiene $(122)_1$. De $(84)_1$

$$(\delta_t \phi^{n+1}, \bar{\mu}) + \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla \bar{\mu}) = 0 \Leftrightarrow (\phi^{n+1} - \phi^n, \bar{\mu}) + \Delta t \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla \bar{\mu}) = 0,$$

y por (119) tenemos

$$\phi^{n+1} = \psi + \phi^n, \quad \mu^{n+1} = z + \oint \mu^{n+1}, \quad (123)$$

luego

$$(\phi^{n+1} - \phi^n, \bar{\mu}) + \Delta t \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla \bar{\mu}) = 0 \Leftrightarrow (\psi, \bar{\mu}) + \Delta t \gamma \left(\nabla \left(z + \oint \mu^{n+1} \right), \nabla \bar{\mu} \right) = 0,$$

pero $\oint \mu^{n+1}$ es constante, por lo tanto $\nabla (\oint \mu^{n+1}) = 0$, así tomando $\bar{z} \in \tilde{M}_h$ en lugar de $\bar{\mu} \in M_h$,

$$(\psi, \bar{\mu}) + \Delta t \gamma \left(\nabla \left(z + \oint \mu^{n+1} \right), \nabla \bar{\mu} \right) = 0 \Leftrightarrow (\psi, \bar{z}) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) = 0.$$

Ahora, veamos que de $(84)_2$ se obtiene $(122)_2$. Esto es algo casi inmediato, solo tome en cuenta (119), y el hecho de que los términos constantes $\oint \mu^{n+1}$ se desvanecen cuando se multiplican por cualquier $\bar{\psi}$ tal que $\oint \bar{\psi} = 0$. De hecho, tomando $\bar{\psi} \in \tilde{\Phi}_h$ en lugar de $\bar{\phi} \in \Phi_h$, tenemos

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\nabla \omega^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t} (\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \bar{\phi}) - (\mu^{n+1}, \bar{\phi}) \\ & + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(\varepsilon (\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t} (\phi^{n+1}, \phi^n), \bar{\phi}) \right) = 0, \\ & \Leftrightarrow \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n) \omega, \bar{\psi}) - \left(z + \oint \mu^{n+1}, \bar{\psi} \right) \\ & + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \right) = 0, \\ & \Leftrightarrow \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n) \omega, \bar{\psi}) - (z, \bar{\psi}) \\ & + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t} (\psi + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por último, veamos que de (84)₃ se obtiene (122)₃. De (84)₃

$$\varepsilon(\omega^{n+1}, \bar{\omega}) - \varepsilon(\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^{n+1}), \bar{\omega}) = 0,$$

y por (119), tenemos

$$\varepsilon(\omega, \bar{\omega}) - \varepsilon(\nabla(\psi + \phi^n), \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\psi + \phi^n), \bar{\omega}) = 0.$$

Por lo tanto, el problema (84) se puede reescribir como (122). Ahora usaremos el Lema 1.2.11 considerando

$$X = \tilde{\Phi}_h \times \tilde{M}_h \times W_h,$$

$$((\psi, z, \omega), (\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}))_X = (\psi, \bar{\psi}) + (z, \bar{z}) + (\omega, \bar{\omega})$$

y $P(\psi, z, \omega) \in X$ definido por

$$\begin{aligned} (P(\psi, z, \omega), (\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}))_X = & (\psi, \bar{z}) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) + \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{\text{sec}}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n) \omega, \bar{\psi}) \\ & + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (\nabla(\psi + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \right. \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (F_{\text{sec}}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \left. \right\} - (z, \bar{\psi}) \\ & + \varepsilon(\omega, \bar{\omega}) - \varepsilon(\nabla(\psi + \phi^n), \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\psi + \phi^n), \bar{\omega}) \\ & - \varepsilon(\omega^n, \bar{\omega}) + \varepsilon(\nabla \phi^n, \nabla \bar{\omega}) + \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^n), \bar{\omega}), \end{aligned} \tag{124}$$

para todo $(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}) \in X$ (tenga en cuenta que estamos usando la relación $-\varepsilon(\omega^n, \bar{\omega}) + \varepsilon(\nabla \phi^n, \nabla \bar{\omega}) + \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^n), \bar{\omega}) = 0$ para ϕ^n y ω^n soluciones del paso anterior n). Luego, tomando $(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}) = (\psi, z, \omega)$, algunos términos se cancelan y se obtiene

(ver Anexo 3)

$$\begin{aligned} (P(\psi, z, \omega), (\psi, z, \omega))_X = & \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\omega - \omega^n\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\omega^n\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \beta)^2 - \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^n) - \beta)^2. \end{aligned} \quad (125)$$

Por lo tanto, la hipótesis del Lema 1.2.11 se cumple para un $\rho = |(\psi, z, \omega)|$ suficientemente grande. En efecto, primero note que $\|\nabla z\|_{L^2} = \|z\|_{H^1}$ (pues z tiene media cero); y si $|(\psi, z, \omega)|$ es suficientemente grande, entonces los términos $\|\omega\|_{L^2}^2$ y $(\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \beta)^2$ dominan a $\|\omega^n\|_{L^2}^2$ (pues ω^n es un dato) y $(\mathcal{A}(\phi^n) - \beta)^2$ (pues $\mathcal{A}(\phi^n)$ es un dato), respectivamente. Por lo anterior, es claro que $(P(\psi, z, \omega), (\psi, z, \omega))_X > 0$, y por el Lema 1.2.11 existe $(\psi, z, \omega) \in X$ tal que $P(\psi, z, \omega) = 0$ y (ψ, z, ω) es una solución de (122), es decir, existe solución del esquema (84). $\square$

Unicidad de la solución del esquema

Lema 3.2.5. *Asuma que $\Phi_h \subset M_h$ y que $\Delta t C(h)^2 < 1/\gamma$ donde $C(h)$ es la constante de la desigualdad inversa $\|\phi\|_{H^1} \leq C(h) \|\phi\|_{(H^1)'}$ para cualquier $\phi \in \Phi_h$. Entonces, existe una única solución del esquema (84).*

Demostración. Tomando (ψ_i, z_i, ω_i) con $i = 1, 2$, dos posibles soluciones de (122), denotamos por $(\psi, z, \omega) = (\psi_1, z_1, \omega_1) - (\psi_2, z_2, \omega_2)$ el cual satisface, para cada

$(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{w}) \in \tilde{\Phi}_h \times \tilde{M}_h \times W_h$ (ver Anexo 3),

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi, \bar{z}) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi \omega_1, \bar{\psi} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega, \bar{\psi}) - (z, \bar{\psi}) \\ + \frac{1}{2\eta} \left(\int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \right) \\ + \frac{1}{2\eta} \left(\int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi}) \right) \\ + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla \psi, \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} \left((f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi, \bar{\psi} \right) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \psi, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (g'(\psi_\zeta) \psi, \bar{\omega}) = 0, \end{array} \right. \quad (126)$$

donde

$$g_{sec}^{\Delta t}(\psi) = G_{sec}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n), \quad f_{sec}^{\Delta t}(\psi) = F_{sec}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n), \quad g(\psi) = G(\psi + \phi^n), \quad (127)$$

y ψ_ζ es una función intermedia entre ψ_1 y ψ_2 .

Ahora, sea $\tilde{A}_h$ el mismo operador A_h definido en (104) pero utilizando solo el espacio de funciones de media cero $\tilde{\Phi}_h$, es decir

$$\begin{aligned} \tilde{A}_h : \tilde{\Phi}_h &\rightarrow \tilde{\Phi}_h \\ \phi &\rightarrow \tilde{A}_h \phi, \end{aligned}$$

definido por:

$$(\tilde{A}_h \phi, \bar{\phi}) = (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in \tilde{\Phi}_h. \quad (128)$$

Es inmediato que $\tilde{A}_h$ es un operador lineal e inyectivo. Por lo tanto, admite un

operador inverso. Observe que

$$\phi = \tilde{A}_h^{-1}\psi \Leftrightarrow \tilde{A}_h\phi = \psi, \quad (129)$$

y en el Anexo 3 demostramos que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\|\psi\|_{(H^1)'} \leq C_1 \|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1} \quad \text{y} \quad \|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1} \leq C_2 \|\psi\|_{(H^1)'}, \quad (130)$$

es decir, las normas son equivalentes. Por lo tanto, como $\Phi_h \subset M_h$ podemos tomar $\bar{z} = \tilde{A}_h^{-1}\psi$ en $(126)_1$, y obtenemos

$$\left(\psi, \tilde{A}_h^{-1}\psi\right) + \Delta t \gamma \left(\nabla z, \nabla \tilde{A}_h^{-1}\psi\right) = 0, \quad (131)$$

pero, por (225) se tiene que $\|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1}^2 = \left(\psi, \tilde{A}_h^{-1}\psi\right)$; luego, usando (131) y el Lema 1.2.10, deducimos

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1}^2 &= -\Delta t \gamma \int_{\Omega} \nabla z \nabla \tilde{A}_h^{-1}\psi \\ &\leq \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2} \|\nabla \tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{L^2} \\ &\leq \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2} \|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\|\tilde{A}_h^{-1}\psi\|_{H^1} \leq \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2},$$

lo cual, aplicando (130), implica que:

$$\|\psi\|_{(H^1)'} \leq \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}. \quad (132)$$

Ahora, considerando las estimaciones a priori probadas para las soluciones del esquema (84) (y (122)), uno tiene las siguientes estimaciones (ver Anexo 3):

1. $(g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\omega_1 \in l^\infty(L^2),$
2. $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), F'(\psi_\zeta), f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), (f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta), g'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty),$
3. $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \in l^\infty.$

Por lo tanto, tomando $(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}) = (\psi, z, \omega)$ en (126), obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi, z) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla z) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon} \left((g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi \omega_1, \psi \right) + \frac{1}{\varepsilon} (g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega, \psi) - (z, \psi) \\ + \frac{1}{2\eta} \left(\int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \psi) \right) \\ + \frac{1}{2\eta} \left(\int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \psi) \right) \\ + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla \psi, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon} \left((f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi, \psi \right) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega, \omega) - \varepsilon (\nabla \psi, \nabla \omega) - \frac{1}{\varepsilon} (g'(\psi_\zeta) \psi, \omega) = 0. \end{array} \right. \quad (133)$$

Antes de sumar las ecuaciones, tenga en cuenta los siguientes resultados

- Por el Lema 1.2.10 y dado que $(g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\omega_1 \in l^\infty(L^2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \left((g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi \omega_1, \psi \right) \right| &\leq \left\| (g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \omega_1 \right\|_{L^2} \|\psi\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \|\psi\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (134)$$

- Por el Lema 1.2.10 y dado $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \in l^\infty(L^\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| (g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega, \psi) \right| &\leq \|g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq C \|\omega\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (135)$$

- Por el Lema 1.2.10, (102) y dado que $\|\nabla\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^1}$, se llega a

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \nabla(\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla\psi) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\eta} \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\int_{\Omega} \nabla(\psi_1 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi \right)^2 \right| \\
&+ \left| \frac{1}{2\eta} \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\int_{\Omega} \nabla\psi_2 \cdot \nabla\psi \right) \left(\int_{\Omega} \nabla(\psi_1 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi \right) \right| \\
&\leq C \|\nabla(\psi_1 + 2\phi^n)\|_{L^2}^2 \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + C \|\nabla\psi_2\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2} \|\nabla(\psi_1 + 2\phi^n)\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2} \\
&\leq C \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + C \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \|\psi\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{136}$$

- Por el Lema 1.2.10, (102) y dado que $\|\nabla\psi\|_{L^2}, \|\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^1}$ y $f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) \in l^\infty(L^\infty)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \nabla(\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \psi) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{4\eta} \left(\int_{\Omega} \nabla(\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi \right) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \psi) \right| \\
&\leq C \|\nabla(\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n)\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2} \|f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\
&\leq C \|\psi\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{137}$$

- Por el Lema 1.2.10 y dado que $\|\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^1}$ y $F'(\psi_\zeta), f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) \in l^\infty(L^\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\eta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \psi) \right) \right| \leq C \|F'(\psi_\zeta)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \|f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\
&\leq C \|\psi\|_{L^2}^2 \leq C \|\psi\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{138}$$

- Por el Lema 1.2.10, (102) y dado que $\|\nabla\psi\|_{L^2}, \|\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^1}$ y $F'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$, se llega a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\eta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F'(\psi_\zeta) \psi \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla\psi) \right) \right| \\ & \leq C \|F'(\psi_\zeta)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \|\nabla(\psi_1 + 2\phi^n)\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2} \\ & \leq C \|\psi\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (139)$$

- Por el Lema 1.2.10 y dado que $\|\nabla\psi\|_{L^2}, \|\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^1}$ y $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \in l^\infty$ y $(f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla\psi, \nabla\psi) + \frac{1}{\varepsilon} ((f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\psi, \psi) \right) \right| \\ & \leq C \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + C \left\| (f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \right\|_{L^\infty} \|\psi\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \|\psi\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (140)$$

- Por el Lema 1.2.10 y dado que $g'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$, se tiene que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} (g'(\psi_\zeta)\psi, \omega) \right| \leq C \|g'(\psi_\zeta)\psi\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2} \leq C \|\psi\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2}. \quad (141)$$

Así mismo, observe que

$$\begin{aligned} \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla z) &= \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2, \\ \varepsilon (\omega, \omega) &= \varepsilon \|\omega\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (142)$$

Entonces, sumando las ecuaciones de (133) y usando las estimaciones (134)-(142), llegamos a

$$\Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\omega\|_{L^2}^2 \leq C (\|\omega\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{H^1}^2). \quad (143)$$

De (132) tenemos que

$$\|\psi\|_{(H^1)'}^2 \leq (\Delta t \gamma)^2 \|\nabla z\|_{L^2}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(\Delta t \gamma)^2} \|\psi\|_{(H^1)'}^2 \leq \|\nabla z\|_{L^2}^2,$$

y reemplazando en (143) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \gamma} \|\psi\|_{(H^1)'}^2 + \varepsilon \|\omega\|_{L^2}^2 &\leq C (\|\omega\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{H^1}^2) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\omega\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2}^2 + C \|\psi\|_{H^1}^2, \end{aligned} \tag{144}$$

donde en la última desigualdad fue usado el Lema 1.2.9. Finalmente, usando la desigualdad inversa $\|\phi\|_{H^1} \leq C(h) \|\phi\|_{(H^1)'}$, $\forall \phi \in \Phi_h$ (con $C(h) \rightarrow +\infty$ cuando $h \rightarrow 0$), tenemos que

$$\frac{1}{\Delta t \gamma} \|\psi\|_{(H^1)'}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq C(h)^2 \|\psi\|_{(H^1)'}^2,$$

es decir

$$\left(\frac{1}{\Delta t \gamma} - C(h)^2 \right) \|\psi\|_{(H^1)'}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Por lo tanto, si $(1/\Delta t \gamma - C(h)^2) > 0$ tenemos que

$$\|\psi\|_{(H^1)'}^2 = \|\omega\|_{L^2}^2 = 0,$$

lo cual implica que $\psi = \omega = 0$. Sustituyendo $\psi = \omega = 0$ en (126)₁, encontramos que

$$\Delta t \gamma (\nabla z, \nabla z) = 0 \Leftrightarrow \|\nabla z\|_{L^2}^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla z = 0 \Leftrightarrow z = cte,$$

y por lo tanto, ya que $\oint_\Omega z = 0$ deducimos que $z = 0$. Por lo tanto, se obtiene la unicidad del esquema. Por lo tanto el esquema (122) tiene única solución y, por ser

un sistema equivalente al esquema (84), entonces este tiene única solución. $\square$

Convergencia En esta sección, mostramos las ideas principales para obtener la convergencia de soluciones del esquema numérico (84) hacia soluciones débiles de (49). Para probar la convergencia, usaremos las estimaciones de estabilidad presentadas en la sección llamada estimaciones a priori, e introducimos las siguientes funciones:

- $\tilde{\phi}_{h,\Delta t}$ es una función continua en $[0, T]$, lineal en cada intervalo (t_n, t_{n+1}) e igual a ϕ^n en $t = t_n$.
- $(\phi_{h,\Delta t}^r, \omega_{h,\Delta t}^r, \mu_{h,\Delta t}^r)$ son funciones constantes por partes que toman valores $(\phi^{n+1}, \omega^{n+1}, \mu^{n+1})$ en $(t_n, t_{n+1}]$.
- $\phi_{h,\Delta t}^l$ es una función constante por partes tomando valores ϕ^n en $[t_n, t_{n+1})$.

Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.6. *Suponga que $\Phi_h \subset M_h$. Existe una subsucesión $(h', \Delta t')$ de $(h, \Delta t)$, con $(h', \Delta t') \rightarrow (0, 0)$, y una solución débil (ϕ, ω, μ) de (49) en $(0, T)$ (para toda $T > 0$), tal que cuando $(h', \Delta t') \rightarrow (0, 0)$ se tiene*

- $\tilde{\phi}_{h',\Delta t'}, \phi_{h',\Delta t'}^r$ y $\phi_{h',\Delta t'}^l$ convergen a ϕ débilmente* en $l^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ y fuertemente en $l^4(0, T; W^{1,3}(\Omega))$,
- $\omega_{h',\Delta t'}^r$ converge a ω débilmente* en $l^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\mu_{h',\Delta t'}^r$ converge a μ débilmente en $l^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Demostración. Observe que (84) se puede reescribir como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} \tilde{\phi}_{h,\Delta t}(t), \bar{\mu} \right) + \gamma (\nabla \mu_{h,\Delta t}^r(t), \nabla \bar{\mu}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega_{h,\Delta t}^r(t), \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi_{h,\Delta t}^r(t), \phi_{h,\Delta t}^l(t)) \omega_{h,\Delta t}^r(t), \bar{\phi}) - (\mu_{h,\Delta t}^r(t), \bar{\phi}) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi_{h,\Delta t}^r(t)) + \mathcal{A}(\phi_{h,\Delta t}^l(t))}{2} - \beta \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\phi_{h,\Delta t}^r(t) + \phi_{h,\Delta t}^l(t)), \nabla \bar{\phi}) \right) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi_{h,\Delta t}^r(t)) + \mathcal{A}(\phi_{h,\Delta t}^l(t))}{2} - \beta \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi_{h,\Delta t}^r(t), \phi_{h,\Delta t}^l(t)), \bar{\phi}) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega_{h,\Delta t}^r(t), \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi_{h,\Delta t}^r(t), \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi_{h,\Delta t}^r(t)), \bar{\omega}) = 0, \end{array} \right. \quad (145)$$

para cualquier $(\bar{\phi}, \bar{\mu}, \bar{\omega}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y todo $t \in [0, T] \setminus \{t_n\}$.

Note que, de (99) tenemos que $\nabla \mu_{h,\Delta t}^r$ está acotada en $l^2(0, T; L^2(\Omega))$ y usando la expresión (120) también podemos deducir que $\oint_{\Omega} \mu_{h,\Delta t}^r(t)$ está acotada en $l^\infty(0, T)$.

En efecto, por (120) y el Lema 1.2.10, se tiene que

$$\begin{aligned} \oint \mu^{n+1} &= \frac{1}{\varepsilon} \oint \left(G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1} + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \right) \\ &\leq C \|G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n)\|_{L^2} \|\omega^{n+1}\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta\|_{L^2} \|F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n)\|_{L^2} \leq C, \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \in l^\infty$, $\omega^{n+1} \in l^\infty(L^2)$ (ver (101)) y de (85), (86) y (118) se deduce que $G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \in l^\infty(0, T; L^\infty)$. Por lo tanto, $\oint_{\Omega} \mu_{h,\Delta t}^r(t)$ está acotada en $l^\infty(0, T)$, lo cual implica que $\int_{\Omega} \mu_{h,\Delta t}^r(t)$ está acotada en $l^\infty(0, T)$; luego

$$\mu_{h,\Delta t}^r(t) \quad \text{es acotada en } l^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (146)$$

Además, si $\Phi_h \subset M_h$, tomando $\bar{\mu} = A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)$ en (84)₁ (ver Apéndice 3):

$$\begin{aligned} \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}^2 &= \Delta t \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) \\ &\leq \Delta t \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2} \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (147)$$

Por lo tanto, usando (130) (es decir, $\|\phi^{n+1} - \phi^n\|_{(H^1)'} \leq C \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}$) en (147), obtenemos

$$\|(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{(H^1)'} \leq C \gamma \Delta t \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}. \quad (148)$$

Multiplicando (148) por Δt , sumando desde $n = 0$ hasta $n = r$ y por (99), obtenemos

$$\Delta t \sum_{n=0}^r \|\phi^{n+1} - \phi^n\|_{(H^1)'} \leq (\Delta t \gamma C) \sum_{n=0}^r \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2} \Delta t \leq C \Delta t.$$

Por lo tanto, $(\phi^{n+1} - \phi^n)$ converge a cero en $l^2(0, T; (H^1)')$ a medida que $(h, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$, es decir, $(\phi_{h, \Delta t}^r - \phi_{h, \Delta t}^l)$ converge a cero en $l^2(0, T; (H^1)')$ a medida que $(h, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$. En particular, si cualquier subsucesión de $\phi_{h, \Delta t}^r$ o de $\phi_{h, \Delta t}^l$ o de $\tilde{\phi}_{h, \Delta t}$ converge (pues note que $\tilde{\phi}_{h, \Delta t}$ se puede ver como combinación de $\phi_{h, \Delta t}^r$ y de $\phi_{h, \Delta t}^l$), las tres convergen al mismo límite.

Usando esto y las estimaciones de la subsección **estimaciones a priori**, podemos afirmar que existe una subsucesión $(h', \Delta t')$ de $(h, \Delta t)$ y un límite (ϕ, μ, ω) tal que, cuando $(h', \Delta t') \rightarrow (0, 0)$, se tiene:

- $\tilde{\phi}_{h', \Delta t'}, \phi_{h', \Delta t'}^r$ y $\phi_{h', \Delta t'}^l$ convergen a ϕ débilmente* en $l^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$: En efecto, note que $l^1(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ es un espacio de Banach separable donde su espacio dual asociado es $l^\infty(0, T; W^{1,6}(\Omega))$; luego, por (117) y por el Teorema 1.2.16 se cumple lo deseado.
- $\omega_{h', \Delta t'}^r$ converge a ω débilmente* en $l^\infty(0, T; L^2(\Omega))$: En efecto, note que $l^1(0, T; L^2(\Omega))$ es un espacio de Banach separable donde su espacio dual

asociado es $l^\infty(0, T; L^2(\Omega))$; luego, por (101) y por el Teorema 1.2.16 se cumple lo deseado.

- $\mu_{h', \Delta t'}^r$ converge a μ débilmente en $l^2(0, T; H^1(\Omega))$: En efecto, observe que $l^2(0, T; H^1(\Omega))$ es un espacio de Banach reflexivo; luego, por (146) y por el Teorema 1.2.15 se cumple lo deseado.

Finalmente, bastaría pasar el límite en (145) y concluir que (ϕ, μ, ω) es solución débil de (49). Este proceso sigue las mismas líneas detalladas en la Subsección 2.3 para la convergencia de una aproximación de Galerkin hacia soluciones débiles (vea también ¹³ para los detalles de la convergencia de un modelo relacionado, es decir, la convergencia de un esquema numérico de un modelo de dos fluidos con diferentes densidades). Específicamente, se usan las convergencias y estimaciones obtenidas en lo que va de esta demostración, se acotan convenientemente las derivadas temporales, se usan el Teorema 1.2.17 y el Lema 1.2.18 para obtener compacidad y, se pasa al límite (ver ^{1, 8, 9}). Por esta razón omitiremos los detalles. $\square$

3.2.2. Esquema numérico para el problema acoplado con un fluido Para definir un esquema numérico asociado al problema acoplado con un fluido, considere los siguientes espacios de elementos finitos para (u, p) : $(U_h, P_h) \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Consideramos un esquema semi-implícito de diferencias finitas para aproximar (63) siguiendo las ideas presentadas en ^{14, 15}. El esquema se define de

¹³ G. GRÜN, F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y S. METZGER. “On fully decoupled, convergent schemes for diffuse interface models for two-phase flow with general mass densities”. En: *Communications in Computational Physics* 19.5 (2016), págs. 1473-1502.

¹⁴ F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y G. TIERRA. “Splitting schemes for a Navier-Stokes-Cahn-Hilliard model for two fluids with different densities”. En: *Journal of Computational Mathematics* (2014), págs. 643-664.

¹⁵ R. C. CABRALES, F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y J. V. TIÉRREZ-SANTACREU. “A Time-Splitting Finite-Element Stable Approximation for the Ericksen–Leslie Equations”. En: *SIAM Journal on*

la siguiente manera:

Inicialización: $\mathbf{u}^0 = P_{U_h} \mathbf{u}(0)$, $\phi^0 = P_{\Phi_h} \phi(0)$ and $\omega^0 = P_{W_h} \omega(0)$.

Paso $n + 1$:

1. Sea $(\mathbf{u}^n, \phi^n, \omega^n) \in U_h \times \Phi_h \times W_h$ dado, computar $(\phi^{n+1}, \mu^{n+1}, \omega^{n+1}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$ tal que para cualquier $(\bar{\phi}, \bar{\mu}, \bar{\omega}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_t \phi^{n+1}, \bar{\mu}) - (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \bar{\mu}) + \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla \bar{\mu}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \bar{\phi}) - (\mu^{n+1}, \bar{\phi}) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{n+1}) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(\varepsilon (\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), \bar{\phi}) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega^{n+1}, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi^{n+1}), \bar{\omega}) = 0, \end{array} \right. \quad (149)$$

donde

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}^n - \lambda \Delta t \phi^n \nabla \mu^{n+1}. \quad (150)$$

2. Sea $\mathbf{u}^*$ conocido del item anterior, computar $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in U_h \times P_h$ tal que para cualquier $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \in U_h \times P_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*, \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \bar{p}) = 0, \end{array} \right. \quad (151)$$

donde $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ es la forma antisimétrica trilineal definida por

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}. \quad (152)$$

Así mismo, suponemos la siguiente condición de estabilidad inf-sup para los espacios discretos de velocidad-presión (U_h, P_h) :

$$\sup_{\mathbf{u} \in U_h \setminus \{0\}} \frac{(p, \nabla \cdot \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} \geq \beta \|p\|_{L^2} \quad \forall p \in P_h. \quad (153)$$

Por ejemplo, se podrían considerar las siguientes opciones: para el par (U_h, P_h) podemos considerar $(\mathbb{P}_1 - \text{burbuja}) \times \mathbb{P}_1$ o $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_1$ (ver ¹⁶). Por otro lado, dado que no encontraremos restricciones para elegir $(\Phi_h \times M_h \times W_h)$ podemos definir esta tripla, por ejemplo, considerando $(\mathbb{P}_s \times \mathbb{P}_r \times \mathbb{P}_l)$, con $s, r, l \geq 1$.

Lema 3.2.7. *El esquema (149)-(151) satisface la siguiente ley de energía disipativa (que es una versión discreta de la Ley de Energía (66)):*

$$\delta_t \mathcal{E}(\mathbf{u}^{n+1}, \phi^{n+1}) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda ND_\omega^{n+1} + ND_{\mathbf{u}}^{n+1} = 0, \quad (154)$$

donde ND_ω^{n+1} se define en (89) y $ND_{\mathbf{u}}^{n+1}$ denota el término extra numérico de disipación

$$ND_{\mathbf{u}}^{n+1} := \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \right) \geq 0. \quad (155)$$

Demostración. Observe que (149) no coincide con (84) solo por el término $(\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \bar{\mu})$; por lo tanto, por la prueba del Lema 3.2.2, tenemos

$$\delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + ND_\omega^{n+1} - (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}) = 0. \quad (156)$$

Multiplicando (150) por $\mathbf{u}^*$ e integrando en Ω obtenemos (ver Anexo 3)

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) = -\lambda (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}). \quad (157)$$

¹⁶ V. GIRAULT y P. A. RAVIART. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2012.

Por otro lado, tomando $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ en (151), tenemos (ver Anexo 3)

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0. \quad (158)$$

Finalmente, multiplicando a (156) por λ y reemplazando (157) deducimos

$$\lambda \delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} + \frac{1}{2\Delta t} (\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) = 0, \quad (159)$$

con lo cual, sumando (158) y (159), tenemos

$$\begin{aligned} & \lambda \delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} + \frac{1}{2\Delta t} (\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda \delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \right) + \lambda \delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \delta_t \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda \delta_t \mathcal{E}_{bp}(\phi^{n+1}) + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} + N D_{\mathbf{u}}^{n+1} \\ & + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \delta_t \mathcal{E}(\mathbf{u}^{n+1}, \phi^{n+1}) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2}^2 + \lambda N D_\omega^{n+1} + N D_{\mathbf{u}}^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.8. *El esquema (149)-(151) satisface la conservación de la masa, es decir,*

$$\int_{\Omega} \phi^{n+1} = \int_{\Omega} \phi^n = \dots = \int_{\Omega} \phi^0. \quad (160)$$

Demostración. Tome $\bar{\mu} = 1$ en $(149)_1$, entonces

$$\int_{\Omega} \delta_t \phi^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \frac{(\phi^{n+1} - \phi^n)}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi^{n+1} = \int_{\Omega} \phi^n, \quad \forall n \geq 0.$$

□

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección presentamos los resultados de algunos experimentos numéricos realizados. Todas las simulaciones se han ejecutado en dominios 2D utilizando software Freefem++¹⁷. Nos centramos en dos tipos diferentes de fenómenos: la deformación de una vesícula cuando el área de superficie impuesta es mayor que el área de superficie inicial; y cuando el área de superficie impuesta es menor que el área de superficie inicial. Además, detallamos en esta sección, el algoritmo iterativo que se consideró para aproximar el esquema no lineal (84).

4.1. ALGORITMO ITERATIVO

Note que, el esquema (84) es un sistema algebraico no lineal, por lo cual debemos considerar un algoritmo iterativo para aproximarlos. A continuación detallamos el algoritmo iterativo que hemos considerado el cual se basa en un método tipo Newton:

Inicialización ($l=0$): Sea $(\phi^{0,n}, \mu^{0,n}, \omega^{0,n}) = (\phi^n, \mu^n, \omega^n) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$.

Algoritmo: Dado $(\phi^{l,n}, \mu^{l,n}, \omega^{l,n}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$, calcular $(\phi^{l+1,n}, \mu^{l+1,n}, \omega^{l+1,n}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$ tal que, para todo $(\bar{\phi}, \bar{\mu}, \bar{\omega}) \in \Phi_h \times M_h \times W_h$:

¹⁷ F. HECHT. "New development in FreeFem++". En: *Journal of numerical mathematics* 20.3-4 (2012), págs. 251-266.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (\phi^{l+1,n} - \phi^n, \bar{\mu}) - (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \bar{\mu}) + \gamma (\nabla \mu^{l+1,n}, \nabla \bar{\mu}) = 0, \\ \varepsilon (\nabla \omega^{l+1,n}, \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} (G_{\text{sec}}^{\Delta t} (\phi^{l,n}, \phi^n) \omega^{l+1,n}, \bar{\phi}) - (\mu^{l+1,n}, \bar{\phi}) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{l,n}) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\phi^{l+1,n} + \phi^n), \nabla \bar{\phi}) \right) \\ + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\mathcal{A}(\phi^{l,n}) + \mathcal{A}(\phi^n)}{2} - \beta \right) \left(+ \frac{1}{\varepsilon} (\widehat{F}_{\text{sec}}^{\Delta t} (\phi^{l+1,n}, \phi^{l,n}, \phi^n), \bar{\phi}) \right) = 0, \\ \varepsilon (\omega^{l+1,n}, \bar{\omega}) - \varepsilon (\nabla \phi^{l+1,n}, \nabla \bar{\omega}) - \frac{1}{\varepsilon} (\widehat{G} (\phi^{l+1,n}, \phi^{l,n}), \bar{\omega}) = 0, \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \lambda \Delta t \phi^n \nabla \mu^{l+1,n}$,

$$\widehat{F}_{\text{sec}}^{\Delta t} (\phi^{l+1,n}, \phi^{l,n}, \phi^n) = F_{\text{sec}}^{\Delta t} (\phi^{l,n}, \phi^n) + (F_{\text{sec}}^{\Delta t})'(\cdot, \phi^n) \Big|_{\phi^{l,n}} (\phi^{l+1,n} - \phi^{l,n})$$

y

$$\widehat{G} (\phi^{l+1,n}, \phi^{l,n}) = G (\phi^{l,n}) + G' (\phi^{l,n}) (\phi^{l+1,n} - \phi^{l,n}).$$

Se realizan las iteraciones hasta que

$$\|(\phi^{l+1,n}, \mu^{l+1,n}, \omega^{l+1,n})\|_{L^2 \times L^2 \times L^2} \leq \text{tol},$$

con $\text{tol} > 0$ siendo una cierta tolerancia dada.

4.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta subsección, estamos interesados en estudiar la dinámica de la vesícula cuando el área de superficie impuesta $\beta > 0$ es diferente de la superficie inicial $\mathcal{A}(\phi_0)$. Consideramos una vesícula en forma bicóncava. Solo trabajamos con el sistema (84) para evitar las contribuciones del fluido a la dinámica de la vesícula y comparamos dos configuraciones, una en la que el área de superficie deseada

es mayor que la superficie inicial, y otra en la que el área de superficie deseada es menor. En ambos casos, la forma de la vesícula tiene que evolucionar en el tiempo para acomodar el área de superficie impuesta al tiempo que disminuye la energía total del sistema. Cualquiera de las condiciones de contorno presentadas en (50) se puede considerar en las simulaciones, pero hemos elegido trabajar con $(50)_2$ para asegurar que si la membrana toca la frontera la vesícula no se va a adherir. Los parámetros discretos y físicos se presentan en el Cuadro 1, donde por simplicidad estamos considerando $k(\mathbf{x}) = 0$ (en la definición de $G(\phi)$ dada en (2)).

Tabla 1 – Parámetros para la deformación de la vesícula cuando el área de superficie impuesta β es diferente de la superficie inicial $\mathcal{A}(\phi_0)$ (sin fluido).

Ω	$[0, T]$	h	Δt	γ	ε	λ	η	tol
$[0, 1]^2$	$[0, 10^{-3}]$	$1/120$	10^{-7}	0.01	0.01	1.0	0.001	10^{-5}

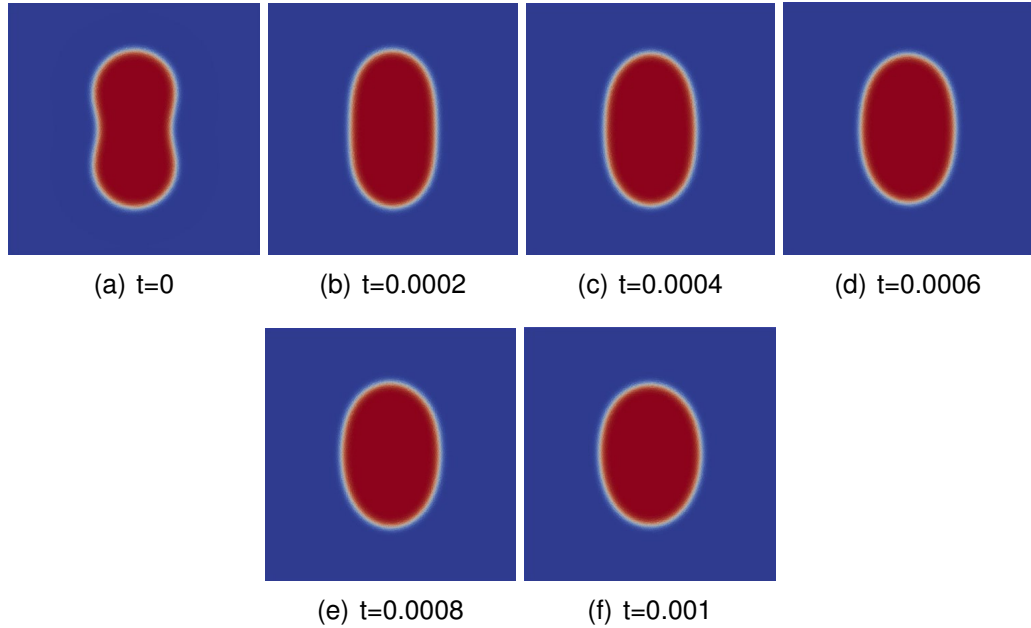


Figura 1 – Evolución en el tiempo de una vesícula con forma bicóncava cuando el área superficial impuesta es inferior a la superficie inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$).

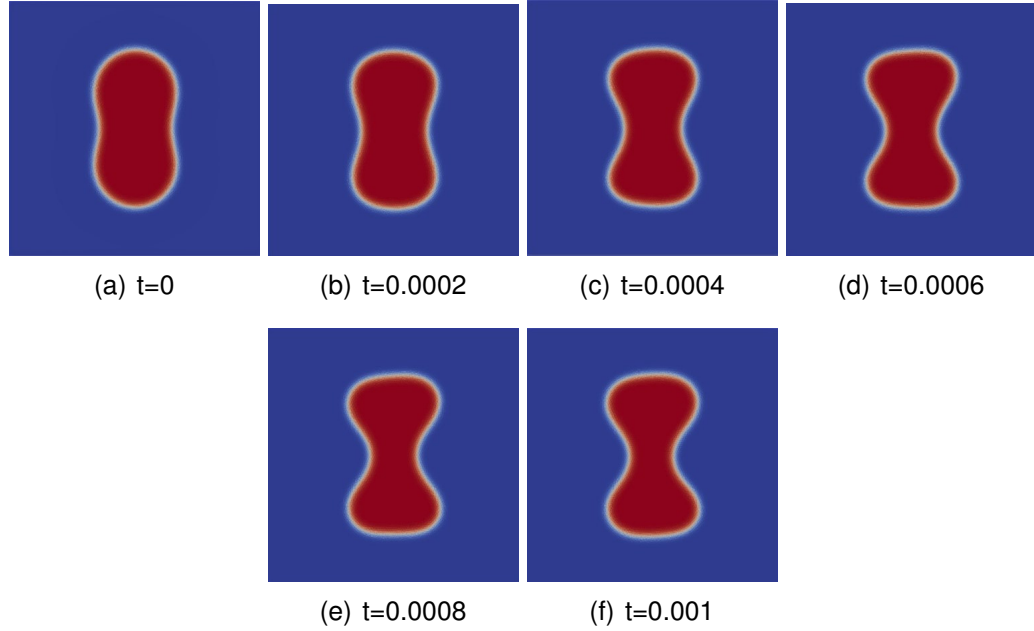


Figura 2 – Evolución en el tiempo de una vesícula con forma bicóncava cuando el área superficial impuesta es superior a la superficie inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).

La condición inicial considerada para la vesícula es una forma bicóncava que se asemeja a un glóbulo rojo bidimensional, cuya área de superficie asociada se calcula como $\mathcal{A}(\phi_0)$. Consideramos dos casos: en el primero, establecemos el área de superficie deseada de la vesícula como $\beta = 0.75 \cdot \mathcal{A}(\phi_0)$; y en el segundo caso establecimos $\beta = 1.25 \cdot \mathcal{A}(\phi_0)$. La dinámica del primer caso es presentado en la Figura 1. Podemos observar cómo el área de superficie de la vesícula está disminuyendo (ver Figura 1 y Figura 3) al aproximarse a una forma elíptica (el estrechamiento en el medio está desapareciendo) mientras disminuye la energía de flexión elástica $\mathcal{E}_{bp}(\phi)$ (ver Figura 4 y Figura 5) y conservando el volumen total (ver Figura 6). La dinámica del segundo caso es presentada en la Figura 2. Podemos observar cómo el área de superficie de la vesícula está aumentando (ver Figura 2 y Figura 3) al aumentar el estrechamiento en el medio de la forma bicóncava, mientras la energía de flexión elástica $\mathcal{E}_{bp}(\phi)$ está disminuyendo (ver Figura 4 y Figura 5) y se conserva el volumen total (ver Figura 6).

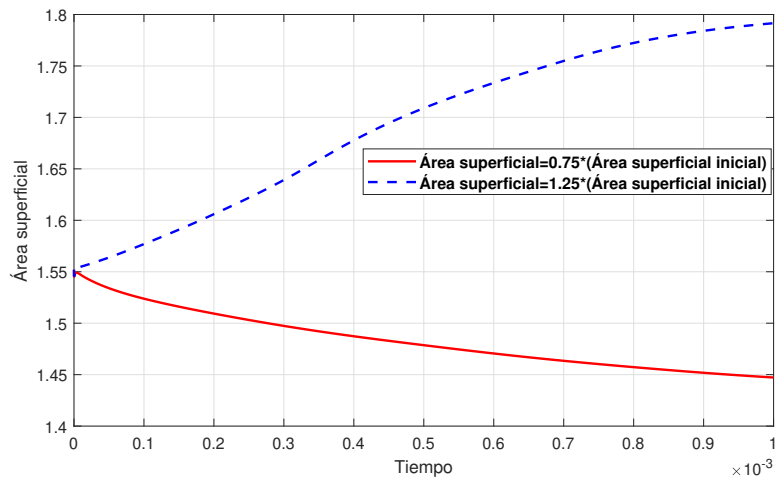


Figura 3 – Evolución en el tiempo del área superficial para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75A(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25A(\phi_0)$).

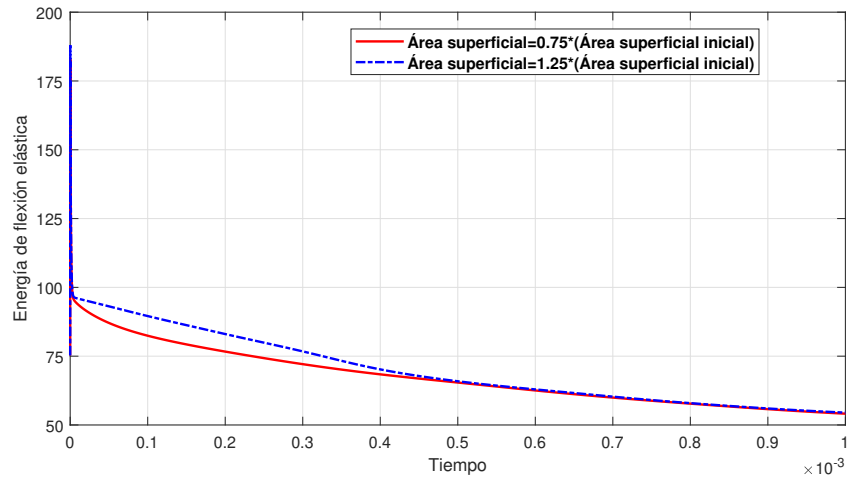


Figura 4 – Evolución en el tiempo de la energía de flexión elástica para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial: intervalo de tiempo $[0, 10^{-3}]$. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75A(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25A(\phi_0)$).

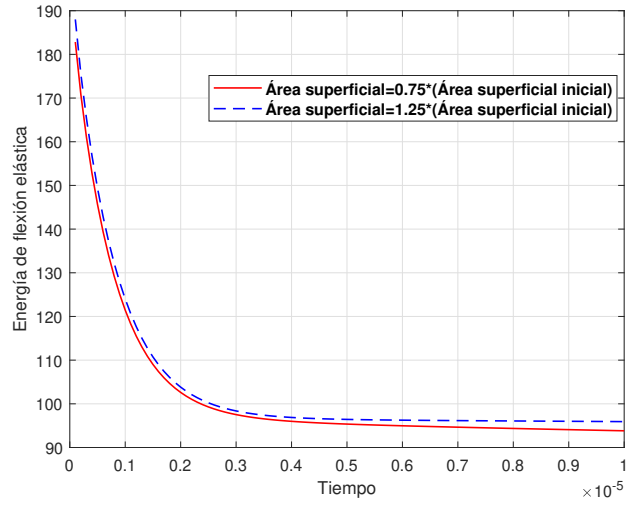


Figura 5 – Evolución en el tiempo de la energía de flexión elástica para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial: intervalo de tiempo $[0, 10^{-5}]$. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).

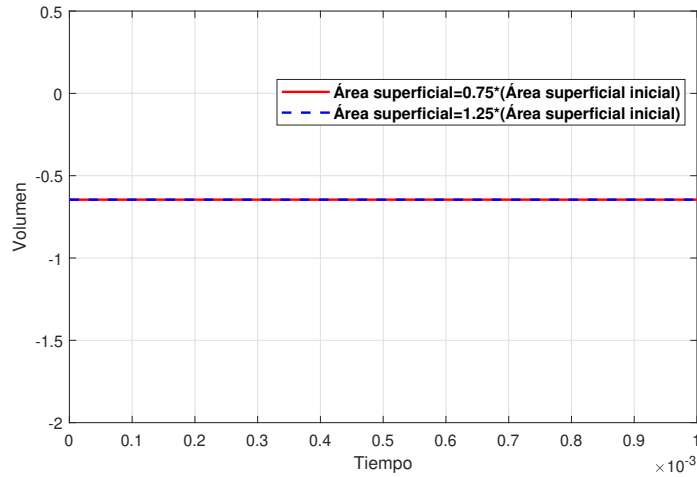


Figura 6 – Evolución en el tiempo del volumen para una vesícula con forma bicóncava cuando el área de superficie impuesta es diferente de la superficie inicial. Línea continua roja: área superficial impuesta inferior al área superficial inicial ($\beta = 0.75\mathcal{A}(\phi_0)$). Línea de puntos azul: área superficial impuesta superior al área superficial inicial ($\beta = 1.25\mathcal{A}(\phi_0)$).

BIBLIOGRAFÍA

- BRÉZIS, H. y J. R. ESTEBAN. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza, 1984 (vid. pág. 26).
- CABRALES, R. C., F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y J. V. TIÉRREZ-SANTACREU. “A Time-Splitting Finite-Element Stable Approximation for the Ericksen–Leslie Equations”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 37.2 (2015), B261-B282 (vid. pág. 77).
- CARA, E. FERNÁNDEZ. “A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations”. En: *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 32, 45-73. (2005) (vid. págs. 43, 77).
- CLIMENT-EZQUERRA, B. y F. GUILLÉN-GONZÁLEZ. “Convergence to equilibrium of global weak solutions for a Cahn–Hilliard–Navier–Stokes vesicle model”. En: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 70.4 (2019), págs. 1-27 (vid. págs. 13, 17, 19, 29, 32, 35, 43, 77).
- DU, Q., C. LIU y X. WANG. “A phase field approach in the numerical study of the elastic bending energy for vesicle membranes”. En: *Journal of Computational Physics* 198.2 (2004), págs. 450-468 (vid. pág. 13).
- DU, Q. y J. ZHANG. “Adaptive finite element method for a phase field bending elasticity model of vesicle membrane deformations”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.3 (2008), págs. 1634-1657 (vid. pág. 13).

- GALDI, G. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011 (vid. págs. 24, 25).
- GIRAULT, V. y P. A. RAVIART. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. pág. 79).
- GRÜN, G., F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y S. METZGER. “On fully decoupled, convergent schemes for diffuse interface models for two-phase flow with general mass densities”. En: *Communications in Computational Physics* 19.5 (2016), págs. 1473-1502 (vid. pág. 77).
- GUILLÉN-GONZÁLEZ, F. y G. TIERRA. “On linear schemes for a Cahn–Hilliard diffuse interface model”. En: *Journal of Computational Physics* 234 (2013), págs. 140-171 (vid. pág. 54).
- “Second order schemes and time-step adaptivity for Allen–Cahn and Cahn–Hilliard models”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 68.8 (2014), págs. 821-846 (vid. pág. 54).
- “Splitting schemes for a Navier-Stokes-Cahn-Hilliard model for two fluids with different densities”. En: *Journal of Computational Mathematics* (2014), págs. 643-664 (vid. pág. 77).
- “Unconditionally energy stable numerical schemes for phase-field vesicle membrane model”. En: *Journal of computational physics* 354 (2018), págs. 67-85 (vid. págs. 13, 14, 17, 44).

HECHT, F. “New development in FreeFem++”. En: *Journal of numerical mathematics* 20.3-4 (2012), págs. 251-266 (vid. pág. 82).

TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. Vol. 343. American Mathematical Soc., 2001 (vid. págs. 43, 77).

TIERRA, G. y F. GUILLÉN-GONZÁLEZ. “Numerical methods for solving the Cahn–Hilliard equation and its applicability to related energy-based models”. En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 22.2 (2015), págs. 269-289 (vid. pág. 54).

ZHANG, J., S. DAS y Q. DU. “A phase field model for vesicle–substrate adhesion”. En: *Journal of Computational Physics* 228.20 (2009), págs. 7837-7849 (vid. pág. 13).

ANEXOS

Anexo A. Demostraciones del Capítulo 1

Veamos que se cumple el Lema 1.3.1.

Demostración. Recuerde que

$$F(\phi) = \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2, \quad F'(\phi) = (\phi^2 - 1) \phi, \quad F''(\phi) = 3\phi^2 - 1, \quad F'''(\phi) = 6\phi,$$

y

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi) \right) d\mathbf{x}.$$

Probamos la primera desigualdad para $j = 0$:

$$\begin{aligned} \|F(\phi_i)\|_{L^p} &= \frac{1}{4} \|\phi_i^4 - 2\phi_i^2 + 1\|_{L^p} \leq C (\|\phi_i\|_{L^\infty}^4 + 2\|\phi_i\|_{L^\infty}^2 + 1) \\ &\leq C (\|\phi_i\|_{H^2}^4 + 2\|\phi_i\|_{H^2}^2 + 1) \\ &\leq C(K). \end{aligned}$$

Los casos $j = 1, 2, 3$ se pueden probar de manera análoga. Probemos ahora la segunda desigualdad para $j = 0$: usando el Teorema del valor medio, tenemos que para algún $\theta \in (0, 1)$,

$$\|F(\phi_1) - F(\phi_2)\|_{L^p} \leq \|F'(\theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2)\|_{L^\infty} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^p} \leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^p}. \quad (161)$$

Los casos $j = 1, 2, 3$ se pueden probar de manera análoga. Finalmente, para la tercera desigualdad observe que, usando (161), se tiene que

$$|\mathcal{A}(\phi_1) - \mathcal{A}(\phi_2)| \leq C \left| \|\nabla \phi_1\|_{L^2}^2 - \|\nabla \phi_2\|_{L^2}^2 \right| + C \int_{\Omega} |F(\phi_1) - F(\phi_2)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\nabla (\phi_1 + \phi_2)\|_{L^2} \|\nabla (\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2} + C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^1} \\
&\leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^1} .
\end{aligned}$$

□

Anexo B. Demostraciones del Capítulo 2

Demostraciones de la Sección 2.1

Veamos que se cumple el Lema 2.1.2.

Demostración. De (29)

$$\begin{aligned}
 \|R(\phi_1) - R(\phi_2)\|_{L^2} &\leq \frac{2}{\varepsilon} \|F''(\phi_1) \Delta \phi_1 - F''(\phi_2) \Delta \phi_2\|_{L^2} \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \|F'''(\phi_1) |\nabla \phi_1|^2 - F'''(\phi_2) |\nabla \phi_2|^2\|_{L^2} \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon^3} \|F'(\phi_1) F''(\phi_1) - F'(\phi_2) F''(\phi_2)\|_{L^2} \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{\eta} \|(\mathcal{A}(\phi_1) - \beta) \Delta \phi_1 - (\mathcal{A}(\phi_2) - \beta) \Delta \phi_2\|_{L^2} \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon \eta} \|(\mathcal{A}(\phi_1) - \beta) F'(\phi_1) - (\mathcal{A}(\phi_2) - \beta) F'(\phi_2)\|_{L^2} := \sum_{i=1}^5 I_i.
 \end{aligned} \tag{162}$$

Teniendo en cuenta el Lema 1.3.1, podemos estimar cada término I_i de (162) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{2}{\varepsilon} \|F''(\phi_1) \Delta \phi_1 - F''(\phi_2) \Delta \phi_2\|_{L^2} \\
 &\leq C (\|(F''(\phi_1) - F''(\phi_2)) \Delta \phi_1\|_{L^2} + \|F''(\phi_2) (\Delta \phi_1 - \Delta \phi_2)\|_{L^2}) \\
 &\leq C (\|\Delta \phi_1\|_{L^2} \|F''(\phi_1) - F''(\phi_2)\|_{L^\infty} + \|F''(\phi_2)\|_{L^\infty} \|\Delta \phi_1 - \Delta \phi_2\|_{L^2}) \\
 &\leq C (\|\phi_1\|_{H^2} C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^\infty} + C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2}) \\
 &\leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| F'''(\phi_1) |\nabla \phi_1|^2 - F'''(\phi_2) |\nabla \phi_2|^2 \right\|_{L^2} \\
&\leq C \left(\left\| (F'''(\phi_1) - F'''(\phi_2)) |\nabla \phi_1|^2 \right\|_{L^2} + \left\| F'''(\phi_2) (|\nabla \phi_1|^2 - |\nabla \phi_2|^2) \right\|_{L^2} \right) \\
&\leq C \left(\|\nabla \phi_1\|_{L^6}^2 \|F'''(\phi_1) - F'''(\phi_2)\|_{L^6} + \|F'''(\phi_2)\|_{L^6} \|\nabla \phi_1 + \nabla \phi_2\|_{L^6} \|\nabla \phi_1 - \nabla \phi_2\|_{L^6} \right) \\
&\leq C \left(\|\phi_1\|_{H^2}^2 C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^6} + C(K) \|\phi_1 + \phi_2\|_{H^2} \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2} \right) \\
&\leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Para I_3 se hace de manera análoga. Ahora, para I_4 observe que

$$|\mathcal{A}(\phi_2) - \beta| \leq C \left(\|\nabla \phi_2\|_{L^2}^2 + \|\phi_2^2 - 1\|_{L^2}^2 + 1 \right) \leq C \left(\|\phi_2\|_{H^1}^2 + \|\phi_2\|_{H^2}^4 + 1 \right) \leq C(K),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{\varepsilon}{\eta} \left\| (\mathcal{A}(\phi_1) - \beta) \Delta \phi_1 - (\mathcal{A}(\phi_2) - \beta) \Delta \phi_2 \right\|_{L^2} \\
&\leq C \left(|\mathcal{A}(\phi_1) - \mathcal{A}(\phi_2)| \|\Delta \phi_1\|_{L^2} + |\mathcal{A}(\phi_2) - \beta| \|\Delta(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2} \right) \\
&\leq C(K) (\|\phi_1 - \phi_2\|_{H^1} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2}) \leq C(K) \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Para I_5 se hace de manera análoga, y se concluye el resultado. $\square$

Demostraciones de la Sección 2.2

Reescritura del sistema (20) y (28) en términos de (ψ, z) .

Demostración. Reemplazando ϕ y w (dados en (34)) en $(20)_1$ tenemos

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda (z + \langle R(\psi + m_0) \rangle) \nabla (\psi + m_0) + \nabla p = 0.$$

Note que, $\nabla (\psi + m_0) = \nabla \psi$, pues m_0 es una constante; luego

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda z \nabla \psi - \lambda \langle R(\psi + m_0) \rangle \nabla \psi + \nabla p &= 0, \\ \Leftrightarrow \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda z \nabla \psi + \nabla (p - \lambda \langle R(\psi + m_0) \rangle \psi) &= 0, \\ \Leftrightarrow \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda z \nabla \psi + \nabla \tilde{p} &= 0, \end{aligned} \quad (163)$$

donde claramente, $\tilde{p} = p - \lambda \langle R(\psi + m_0) \rangle \psi$. Por otra parte, reemplazando ϕ y w en (20)₃ tenemos

$$\partial_t (\psi + m_0) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\psi + m_0) - \gamma \Delta (z + \langle R(\psi + m_0) \rangle) = 0,$$

pero teniendo en cuenta que $\partial_t m_0 = \nabla m_0 = \Delta (\langle G(\psi + m_0) \rangle) = 0$ pues todos son constantes, llegamos a

$$\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi - \gamma \Delta z = 0. \quad (164)$$

Finalmente, reemplazando ϕ y w en (28) obtenemos

$$\begin{aligned} z + \langle R(\psi + m_0) \rangle &= \varepsilon \Delta^2 (\psi + m_0) + R(\psi + m_0), \\ \Leftrightarrow \varepsilon \Delta^2 \psi + R(\psi + m_0) - \langle R(\psi + m_0) \rangle - z &= 0, \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que

$$\varepsilon \Delta^2 \psi + \bar{R}(\psi) - z = 0, \quad (165)$$

donde $\bar{R}(\psi) = R(\psi + m_0) - \langle R(\psi + m_0) \rangle$. Por lo tanto, por (163), (164) y (165) concluimos que el sistema (20) y (28) se puede escribir en términos de (ψ, z) . $\square$

Veamos que se cumple (38).

Demostración. Reemplazando ϕ y w (dados en (34)) en (27) se obtiene

$$z + \langle R(\psi + m_0) \rangle = \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi} = -\Delta \mu(\psi + m_0) + \frac{1}{\varepsilon^2} F''(\psi + m_0) \mu(\psi + m_0) \\ + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \mu(\psi + m_0),$$

y usando (25) en la ecuación anterior, tenemos

$$z + \langle R(\psi + m_0) \rangle = \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi} = -\Delta \left(-\varepsilon \Delta (\psi + m_0) + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} F''(\psi + m_0) \left(-\varepsilon \Delta (\psi + m_0) + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \\ + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \left(-\varepsilon \Delta (\psi + m_0) + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right).$$

De (29) y teniendo en cuenta que $-\Delta (-\varepsilon \Delta (\psi + m_0)) = \varepsilon \Delta^2 (\psi + m_0) = \varepsilon \Delta^2 \psi$, se obtiene

$$z + \langle R(\psi + m_0) \rangle = \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi} = \varepsilon \Delta^2 \psi + R(\psi + m_0),$$

lo cual implica que

$$z = \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi} = \varepsilon \Delta^2 \psi + \bar{R}(\psi),$$

y suponiendo que $\phi \in H_1^4$, tenemos que lo anterior se tiene para todo $\psi \in H_1^4$. $\square$

Demostraciones de la Sección 2.3

Justificación de (39).

Demostración. Desarrollaremos un argumento formal. Multiplicando por u a $(35)_1$ e

integrando en Ω , tenemos

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} (\nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \nu (\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \lambda z \nabla \psi \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (166)$$

de lo cual, teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, la condición $(36)_1$ y aplicando el Corolario 1.2.13, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 u_1 + \dots + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 u_3 \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) + \dots + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{2} u_1^2 \right) \\ &\quad - \dots - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{2} u_3^2 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (167)$$

Por otro lado,

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2. \quad (168)$$

Aplicando el Corolario 1.2.14, obtenemos

$$-\nu \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} ((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2. \quad (169)$$

Entonces, reemplazando (167), (168) y (169) en (166), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{kin}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} (\nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{u} + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} \lambda z \nabla \psi \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (170)$$

Por otro lado, multiplicando $(35)_2$ por $\tilde{p}$, integrando en Ω , usando por la condición

(36)₁ y aplicando el Corolario 1.2.13, deducimos

$$0 = \int_{\Omega} \tilde{p}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \tilde{p}) + \int_{\partial\Omega} \tilde{p}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \tilde{p}). \quad (171)$$

Ahora, multiplicando (35)₃ por λz e integrando en Ω , obtenemos

$$\lambda \int_{\Omega} \partial_t \psi z + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot z \nabla \psi - \lambda \gamma \int_{\Omega} (\Delta z) z = 0. \quad (172)$$

Aplicando el Corolario 1.2.14 y (36), se obtiene

$$-\lambda \gamma \int_{\Omega} (\Delta z) z = \lambda \gamma \int_{\Omega} (\nabla z) \cdot (\nabla z) - \lambda \gamma \int_{\partial\Omega} z (\nabla z \cdot \mathbf{n}) = \lambda \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2, \quad (173)$$

y reemplazado (173) en (172), obtenemos

$$\lambda \int_{\Omega} \partial_t \psi z + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot z \nabla \psi + \lambda \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 = 0. \quad (174)$$

Multiplicando (35)₄ por $\lambda \partial_t \psi$, obtenemos

$$\int_{\Omega} \lambda \varepsilon \Delta^2 \psi \partial_t \psi + \int_{\Omega} \lambda \bar{R}(\psi) \partial_t \psi - \int_{\Omega} \lambda z \partial_t \psi = 0, \quad (175)$$

pero observe que, usando (37) y (38) se puede llegar a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \varepsilon \Delta^2 \psi \partial_t \psi + \int_{\Omega} \lambda \bar{R}(\psi) \partial_t \psi &= \lambda \int_{\Omega} (\varepsilon \Delta^2 \psi + \bar{R}) \partial_t \psi \\ &= \lambda \left\langle \frac{\delta \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi)}{\delta \psi}, \partial_t \psi \right\rangle \\ &= \lambda \left\langle \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\psi + m_0)}{\delta \psi}, \partial_t \psi \right\rangle. \end{aligned} \quad (176)$$

Por otro lado, usando (24)-(26) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\delta \mathcal{E}_{bp}(\psi + m_0)}{\delta \psi}, \partial_t \psi \right\rangle &= \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \psi \cdot \nabla \partial_t \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \partial_t \psi \right) \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \left(-\varepsilon \Delta (\partial_t \psi) + \frac{1}{\varepsilon} F''(\psi + m_0) \partial_t \psi \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \left(\frac{d}{dt} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \left(\frac{d}{dt} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi + m_0) \right)^2 + \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + m_0) - \beta)^2 \right) \\
&= \frac{d}{dt} \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi).
\end{aligned} \tag{177}$$

Por lo tanto, reemplazando (176) y (177) en (175), obtenemos

$$\lambda \frac{d}{dt} \bar{\mathcal{E}}_{bp}(\psi) - \int_{\Omega} \lambda z \partial_t \psi = 0. \tag{178}$$

Ahora, sumando las ecuaciones (170), (171), (174) y (178) llegamos a

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}, \psi) + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \lambda \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 = 0,$$

pero como $\mathbf{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}, \psi) + \nu \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 + \lambda \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 = 0. \tag{179}$$

Ahora, sean $t_1, t_0 : t_1 \geq t_0 \geq 0$. Integrando (179) entre t_0 y t_1 y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo resulta

$$\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}(t_1), \psi(t_1)) - \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u}(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\nu \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 + \lambda \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2) ds = 0. \tag{180}$$

Note que de (180) se tiene

$$\overline{\mathcal{E}}(\mathbf{u}(t_1), \psi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \nu \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 + \lambda \gamma \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla z\|_{L^2}^2 \leq C = \overline{\mathcal{E}}(\mathbf{u}(t_0), \psi(t_0)). \quad (181)$$

De (181) se puede concluir que

- $\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; \mathbf{V})$ puesto que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \leq C.$$

- $z \in L^2(0, +\infty; H_*^1)$ ya que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\nabla z\|_{L^2}^2 \leq C,$$

y como $\int_{\Omega} z(t, \cdot) dx = 0$, tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z\|_{H^1}^2 \leq C.$$

- $\mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{H})$ y $\psi \in L^\infty(0, +\infty; H_1^2) \cap L_{loc}^2(0, +\infty; H_1^3)$. De hecho,

$$\overline{\mathcal{E}}(\mathbf{u}(t_1), \psi(t_1)) \leq C,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t_1)|^2 + \frac{\lambda}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \Delta \psi(t_1) + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi(t_1) + m_0) \right)^2 \\ + \frac{\lambda}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi(t_1) + m_0) - \beta)^2 \leq C, \end{aligned} \quad (182)$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{u}(t_1)\|_{L^2}^2 \leq C,$$

de lo que se concluye que $u \in L^\infty(0, +\infty; H)$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi(t_1) + m_0) - \beta)^2 \leq C &\Leftrightarrow \mathcal{A}(\psi(t_1) + m_0) \leq C \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla(\psi(t_1))|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\psi(t_1) + m_0) \right) \leq C. \end{aligned} \quad (183)$$

Así, teniendo en cuenta que $F(\psi(t_1) + m_0) \geq 0$ (ver definición de $F(\phi)$ en (2)) llegamos a

$$\|\nabla\psi(t_1)\|_{L^2}^2 \leq C,$$

y usando que $\int_{\Omega} \psi(t, \cdot) d\mathbf{x} = 0$, tenemos

$$\|\psi(t_1)\|_{H_1^2}^2 \leq C,$$

lo que implica que $\psi \in L^\infty(0, +\infty; H_1^2)$. Finalmente utilizando el operador A definido en (16), de (35)₄ deducimos

$$\begin{aligned} (z, \bar{\psi}) &= -\varepsilon(\nabla\Delta\psi, \nabla\bar{\psi}) + (\bar{R}(\psi), \bar{\psi}) \\ &= \langle A\psi, \bar{\psi} \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1} + (\bar{R}(\psi), \bar{\psi}). \end{aligned} \quad (184)$$

De la Observación 2.1.3 y la definición de $\bar{R}(\psi)$, como $\|\psi(t) + m_0\|_{H^2} \leq K$, obtenemos

$$\|\bar{R}(\psi(t))\|_{L^2} \leq \|R(\psi(t) + m_0)\|_{L^2} + \|\langle R(\psi(t) + m_0) \rangle\|_{L^2} \leq C,$$

y por lo tanto, usando (15), (17), (18) y (184), se tiene

$$\|\psi\|_{H^3} \leq C \|\nabla\Delta\psi\|_{L^2} = C \|A\psi\|_{H_*^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= C \sup_{\bar{\psi}} \frac{\langle A\psi, \bar{\psi} \rangle_{H_*^{-1}, H_*^1}}{\|\bar{\psi}\|_{H_*^1}} \\
&\leq C \sup_{\bar{\psi}} \frac{|(z, \bar{\psi})|}{\|\bar{\psi}\|_{H_*^1}} + C \sup_{\bar{\psi}} \frac{|(\bar{R}(\psi), \bar{\psi})|}{\|\bar{\psi}\|_{H_*^1}} \\
&\leq C (\|z\|_{L^2} + \|\bar{R}(\psi)\|_{L^2}) \\
&\leq C (1 + \|z\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Integrando entre t_0 y t_1 y usando que $z \in L^2(0, +\infty; H_*^1)$, tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\psi\|_{H^3} \leq C \int_{t_0}^{t_1} (1 + \|z\|_{L^2}),$$

es decir, $\psi \in L_{loc}^2([0, +\infty); H_1^3)$.

□

Veamos que se cumple (41).

Demostración. Por (39) y (40)₁ sabemos que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{H}) \cap L^2(0, +\infty; \mathbf{V})$ y satisface la formulación variacional para casi todo punto $t \in (0, +\infty)$:

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \lambda (z \nabla \psi, \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}. \quad (185)$$

Entonces usando el Lema 1.2.10, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} &= \sup_{\substack{\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V} \\ \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \leq 1}} |\langle \partial_t \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle| \leq \sup_{\substack{\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V} \\ \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \leq 1}} \left(\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}| + \int_{\Omega} |[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{u}}| + \lambda \int_{\Omega} |z \nabla \psi \cdot \bar{\mathbf{u}}| \right) \\
&\leq \sup_{\substack{\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V} \\ \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \leq 1}} (\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{L^3} \|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{L^6} + \lambda \|z \nabla \psi\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2}) \\
&\leq C (\|\mathbf{u}\|_{H^1} + \|\mathbf{u}\|_{L^3} \|\mathbf{u}\|_{L^6} + \lambda \|z\|_{L^4} \|\nabla \psi\|_{L^4}).
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de interpolación $\|\mathbf{u}\|_{L^3} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{1/2}$ y, dado que

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (lo cual implica que $\|\cdot\|_{L^6} \leq C \|\cdot\|_{H^1}$), se obtiene

$$\|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \leq C \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1} + \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{3/2} + \|z\|_{L^4} \|\nabla \psi\|_{L^4} \right), \quad (186)$$

de lo cual tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'}^p \leq C \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^p + \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{p/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{3p/2} + \int_{t_0}^{t_1} \|z\|_{L^4}^p \|\nabla \psi\|_{L^4}^p \right). \quad (187)$$

Veamos cuánto debe de valer p para que el lado derecho de (187) sea finito. Primero, note que para tener $\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^p < +\infty$ bastaría $p = 2$, pues por (39) $\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; \mathbf{V})$. Por otro lado, para obtener $\int_{t_0}^{t_1} \|z\|_{L^4}^p \|\nabla \psi\|_{L^4}^p < +\infty$ bastaría $p = 2$, pues $z \in L^2(0, +\infty; H_*^1)$ y $\nabla \psi \in L^\infty(0, +\infty; H_*^1)$. Por último, teniendo en cuenta que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{p/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{3p/2} \leq C \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{3p/2}, \quad (188)$$

y usando que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ se requiere $p = 4/3$ para que el lado derecho de (188) sea finito. Así, si $p = 4/3$, el lado derecho de (187) es finito y concluimos que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'}^{4/3} \leq C,$$

es decir, $\partial_t \mathbf{u} \in L_{\text{loc}}^{4/3}([0, +\infty); \mathbf{V}')$.

Por otro lado, por (39) y (40)₂ sabemos que $\psi \in L^\infty(0, +\infty; H_1^2) \cap L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_1^3)$ y satisface la formulación variacional para casi todo punto $t \in (0, +\infty)$:

$$\langle \partial_t \psi, \bar{z} \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi, \bar{z}) + \gamma (\nabla z, \nabla \bar{z}) = 0, \quad \forall \bar{z} \in H_*^1. \quad (189)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\partial_t \psi\|_{H_*^{-1}} &= \sup_{\substack{\bar{z} \in H_*^1 \\ \|\bar{z}\|_{H_*^1} \leq 1}} |\langle \partial_t \psi, \bar{z} \rangle| \leq \sup_{\substack{\bar{z} \in H_*^1 \\ \|\bar{z}\|_{H_*^1} \leq 1}} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u} \cdot \nabla \psi \bar{z}| + \gamma \int_{\Omega} |\nabla z \cdot \nabla \bar{z}| \right) \\ &\leq \sup_{\substack{\bar{z} \in H_*^1 \\ \|\bar{z}\|_{H_*^1} \leq 1}} (\|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla \psi\|_{L^2} \|\bar{z}\|_{L^4} + \gamma \|\nabla z\|_{L^2} \|\nabla \bar{z}\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (190)$$

Ahora, dado que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (lo cual implica que $\|\bar{z}\|_{L^4} \leq C \|\bar{z}\|_{H^1}$) y como $\|\nabla \bar{z}\|_{L^2} \leq \|\bar{z}\|_{H^1}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\partial_t \psi\|_{H_*^{-1}} &\leq \sup_{\substack{\bar{z} \in H_*^1 \\ \|\bar{z}\|_{H_*^1} \leq 1}} \left(\|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla \psi\|_{L^2} \|\bar{z}\|_{H_*^1} + \gamma \|\nabla z\|_{L^2} \|\bar{z}\|_{H_*^1} \right) \\ &\leq C (\|\mathbf{u}\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} + \|z\|_{H^1}). \end{aligned} \quad (191)$$

De (191) obtenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \psi\|_{H_*^{-1}}^p \leq C \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^p \|\psi\|_{H_*^1}^p + \int_{t_0}^{t_1} \|z\|_{H_*^1}^p \right), \quad (192)$$

y debemos determinar el valor de p para que el lado derecho de (192) sea finito.

Primero, dado que $\psi \in L^\infty(0, +\infty; H_1^2)$ (ver (39)) entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^p \|\psi\|_{H_*^1}^p \leq C \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^p, \quad (193)$$

y como $\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; \mathbf{V})$ (ver (39)), bastaría tomar $p = 2$ para que el lado derecho de (193) sea finito. Por otro lado, para obtener $\int_{t_0}^{t_1} \|z\|_{H_*^1}^p < +\infty$ bastaría $p = 2$, pues por (39) $z \in L^2(0, +\infty; H_*^1)$. Por lo tanto, si $p = 2$, por (192) tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \psi\|_{H_*^{-1}}^2 \leq C,$$

es decir, $\partial_t \psi \in L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); H_*^{-1})$. □

Anexo C. Demostraciones del Capítulo 3

Demostraciones de la Sección 3.2

Se puede probar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \delta_t \phi^{n+1}) &= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \omega^{n+1}), \\ \left(\varepsilon \left(\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \delta_t \phi^{n+1} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), \delta_t \phi^{n+1}) \right) &= \mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n). \end{aligned} \quad (194)$$

Demostración. Note que por (86) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n) \omega^{n+1}, \delta_t \phi^{n+1}) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)}{\phi^{n+1} - \phi^n} \right) \omega^{n+1} \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \int_{\Omega} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n)) \omega^{n+1} \\ &= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} (G(\phi^{n+1}) - G(\phi^n), \omega^{n+1}). \end{aligned}$$

Obteniendo así (194)₁. Por otro lado, de (85) tenemos

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon \left(\nabla \phi^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \delta_t \phi^{n+1} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\phi^{n+1}, \phi^n), \delta_t \phi^{n+1}) \right) &= \\ \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\phi^{n+1} + \phi^n}{2} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{F(\phi^{n+1}) - F(\phi^n)}{\phi^{n+1} - \phi^n} \right) \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \right) \right), \end{aligned}$$

de lo cual, cancelando y multiplicando términos se llega a

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \phi^{n+1}|^2 - |\nabla \phi^n|^2) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left(F(\phi^{n+1}) - F(\phi^n) \frac{1}{\Delta t} \right) \right),$$

y separando términos obtenemos

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi^{n+1}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi^{n+1}) \right) - \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi^n|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\phi^n) \right) \right). \quad (195)$$

Finalmente, por definición del área superficial $\mathcal{A}(\phi)$, tenemos que (195) es igual a

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathcal{A}(\phi^{n+1}) - \mathcal{A}(\phi^n)).$$

Por lo tanto, las igualdades mostradas en (194) se cumplen. $\square$

Veamos que (116) se cumple.

Demostración. Considere el operador $A : H^1(\Omega) \mapsto (H^1(\Omega))'$ dado por

$$(A\phi, \bar{\phi}) = (\nabla\phi, \nabla\bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in H^1(\Omega). \quad (196)$$

Asumiendo regularidad $H^2(\Omega)$ para el problema (196), considere $\phi \in H^2(\Omega)$ solución de

$$(A_h\phi^{n+1}, \bar{\phi}) = (\nabla\phi, \nabla\bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in H^1(\Omega). \quad (197)$$

Entonces, se tiene la siguiente estimación

$$\|\phi\|_{H^2} \leq C \|A_h\phi^{n+1}\|_{L^2}. \quad (198)$$

Así mismo, considere el siguiente operador de interpolación $R_h^\phi : H^1(\Omega) \mapsto \Phi_h$ el cual satisface, para todo $\bar{\phi}_h \in \Phi_h$,

$$\left(\nabla (R_h^\phi \phi - \phi), \nabla \bar{\phi}_h \right) + (R_h^\phi \phi - \phi, \bar{\phi}_h) = 0.$$

Por el Teorema 1.2.4, el operador R_h^ϕ esta bien definido. Además, las siguientes estimaciones de interpolación y estabilidad se tienen

$$\frac{1}{h} \left\| R_h^\phi \phi - \phi \right\|_{L^2} + \left\| R_h^\phi \phi - \phi \right\|_{H^1} \leq Ch^{s'} \|\phi\|_{H^{s'+1}}, \quad \forall \phi \in H^{s'+1}(\Omega), \quad (199)$$

con $1 \leq s' \leq s$ y

$$\left\| R_h^\phi \phi \right\|_{W^{1,6}} \leq C \|\phi\|_{H^2}. \quad (200)$$

Entonces, usando la desigualdad inversa $\|\phi_h\|_{W^{1,6}} \leq Ch^{-1} \|\phi_h\|_{H^1}$, $\forall \phi_h \in \Phi_h$ y (200), tenemos

$$\|\phi^{n+1}\|_{W^{1,6}} \leq \|\phi^{n+1} - R_h^\phi \phi\|_{W^{1,6}} + \|R_h^\phi \phi\|_{W^{1,6}} \leq Ch^{-1} \|\phi^{n+1} - R_h^\phi \phi\|_{H^1} + C\|\phi\|_{H^2}. \quad (201)$$

De (197), en particular se tiene

$$(A_h \phi^{n+1}, \bar{\phi}) = (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_h,$$

y usando la definición del operador A_h (ver (104)), deducimos

$$(\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) + (\phi^{n+1}, \bar{\phi}) = (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_h,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} & (\nabla(\phi^{n+1} - R_h^\phi \phi), \nabla \bar{\phi}) + (\phi^{n+1} - R_h^\phi \phi, \bar{\phi}) \\ &= \left(\nabla(\phi - R_h^\phi \phi), \nabla \bar{\phi} \right) + \left(\phi - R_h^\phi \phi, \bar{\phi} \right), \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_h. \end{aligned} \quad (202)$$

Tomando $\bar{\phi} = \phi^{n+1} - R_h^\phi \phi$ en (202) y usando la estimación de interpolación (199), obtenemos

$$\|\phi^{n+1} - R_h^\phi \phi\|_{H^1} \leq C \|\phi - R_h^\phi \phi\|_{H^1} \leq Ch \|\phi\|_{H^2}. \quad (203)$$

Finalmente, reemplazando (203) en (201) y teniendo en cuenta (198), concluimos

$$\|\phi^{n+1}\|_{W^{1,6}} \leq C \|\phi\|_{H^2} \leq C \|A_h \phi^{n+1}\|_{L^2}.$$

□

Veamos que (125) se cumple.

Demostración. Como $(\bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega}) = (\psi, z, \omega)$, entonces

$$(\psi, z) + \Delta t \gamma (\nabla z, \nabla z) = (\psi, z) + \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2. \quad (204)$$

Además,

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\nabla w, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{G(\psi + \phi^n) - G(\phi^n)}{\psi} w, \psi \right) - (z, \psi) \\ &= \varepsilon (\nabla w, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon} (G(\psi + \phi^n), w) - \frac{1}{\varepsilon} (G(\phi^n), w) - (z, \psi). \end{aligned} \quad (205)$$

Por otro lado, note lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi + 2\phi^n), \nabla \psi) &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 + 2\nabla \phi^n \cdot \nabla \psi) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 + 2\nabla \phi^n \cdot \nabla \psi + |\nabla \phi^n|^2 - |\nabla \phi^n|^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} ((\nabla \psi + \nabla \phi^n)^2 - |\nabla \phi^n|^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi + \nabla \phi^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi^n|^2, \end{aligned}$$

luego, teniendo en cuenta la igualdad anterior y la igualdad (85) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi + \nabla \phi^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi^n|^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} (F_{\text{sec}}^{\Delta t}(\psi + \phi^n, \phi^n), \psi) \right\} \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi + \nabla \phi^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi^n|^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{F(\psi + \phi^n) - F(\phi^n)}{\psi}, \psi \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi + \nabla \phi^n|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(\psi + \phi^n) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi^n|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(\phi^n) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \mathcal{A}(\phi^n)) \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) [\mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta] - (\mathcal{A}(\phi^n) [\mathcal{A}(\phi^n) + \mathcal{A}(\psi + \phi^n) - 2\beta])) \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n))^2 + \mathcal{A}(\psi + \phi^n) \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \mathcal{A}(\psi + \phi^n) \\
& \quad - \frac{1}{2\eta} [(\mathcal{A}(\phi^n))^2 + \mathcal{A}(\phi^n) \mathcal{A}(\psi + \phi^n) - 2\beta \mathcal{A}(\phi^n)],
\end{aligned} \tag{206}$$

de lo cual, cancelando términos, sumando y restando β^2 y usando (206) obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\eta} ((\mathcal{A}(\psi + \phi^n))^2 - 2\beta \mathcal{A}(\psi + \phi^n) + \beta^2 - [(\mathcal{A}(\phi^n))^2 - 2\beta \mathcal{A}(\phi^n) + \beta^2]) \\
&= \frac{1}{2\eta} ((\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \beta)^2 - (\mathcal{A}(\phi^n) - \beta)^2) \\
&= \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \beta)^2 - \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\phi^n) - \beta)^2.
\end{aligned} \tag{207}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(\omega, \omega) - \varepsilon(\nabla(\psi + \phi^n), \nabla\omega) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\psi + \phi^n), \omega) \\
& - \varepsilon(\omega^n, \omega) + \varepsilon(\nabla\phi^n, \nabla\omega) + \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^n), \omega) \\
& = \varepsilon(\omega, \omega) - \varepsilon(\nabla\psi, \nabla\omega) - \varepsilon(\nabla\phi^n, \nabla\omega) - \frac{1}{\varepsilon}(G(\psi + \phi^n), \omega) \\
& - \varepsilon(\omega^n, \omega) + \varepsilon(\nabla\phi^n, \nabla\omega) + \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^n), \omega).
\end{aligned} \tag{208}$$

Usando el hecho de que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \omega) - \varepsilon(\omega^n, \omega) &= \frac{\varepsilon}{2}(\omega, \omega) + \frac{\varepsilon}{2}(\omega, \omega) - \varepsilon(\omega^n, \omega) + \frac{\varepsilon}{2}(\omega^n, \omega^n) - \frac{\varepsilon}{2}(\omega^n, \omega^n) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}(\omega, \omega) + \frac{\varepsilon}{2}((\omega, \omega) - 2(\omega^n, \omega) + (\omega^n, \omega^n)) - \frac{\varepsilon}{2}(\omega^n, \omega^n) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\omega - \omega^n\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\omega^n\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

en (208), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon}{2}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\omega - \omega^n\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\omega^n\|_{L^2}^2 - \varepsilon(\nabla\psi, \nabla\omega) \\
& - \frac{1}{\varepsilon}(G(\psi + \phi^n), \omega) + \frac{1}{\varepsilon}(G(\phi^n), \omega).
\end{aligned} \tag{209}$$

Por lo tanto, sumando (204), (205), (207) y (209) se concluye que

$$\begin{aligned}
(P(\psi, z, \omega), (\psi, z, \omega))_X &= \Delta t \gamma \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\omega - \omega^n\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\omega^n\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{1}{2\eta}(\mathcal{A}(\psi + \phi^n) - \beta)^2 - \frac{1}{2\eta}(\mathcal{A}(\phi^n) - \beta)^2,
\end{aligned}$$

es decir, se cumple la igualdad (125). □

Veamos que (126) tiene sentido.

Demostración. La idea es reemplazar cada solución en el esquema (122) e ir restando ecuación por ecuación. Sea (122)ⁱ igual a (122) pero con $(\psi, z, \omega) =$

(ψ_i, z_i, ω_i) . Vamos a mostrar que al hacer este proceso llegamos al sistema (126).

Recuerde que $(\psi, z, \omega) = (\psi_1, z_1, \omega_1) - (\psi_2, z_2, \omega_2)$.

Miremos que restando $(122)_1^1$ con $(122)_1^2$ se llega a $(126)_1$. En efecto,

$$\begin{aligned} & (\psi_1, \bar{z}) + \Delta t \gamma(\nabla z_1, \nabla \bar{z}) - (\psi_2, \bar{z}) + \Delta t \gamma(\nabla z_2, \nabla \bar{z}) = 0, \\ \Leftrightarrow & (\psi_1 - \psi_2, \bar{z}) + \Delta t \gamma(\nabla(z_1 - z_2), \nabla \bar{z}) = 0, \\ \Leftrightarrow & (\psi, \bar{z}) + \Delta t \gamma(\nabla z, \nabla \bar{z}) = 0. \end{aligned} \quad (210)$$

Ahora, miremos que restando $(122)_2^1$ con $(122)_2^2$ se llega a $(126)_2$. Primero, note que

$$\varepsilon(\nabla \omega_1, \nabla \bar{\psi}) - \varepsilon(\nabla \omega_2, \nabla \bar{\psi}) = \varepsilon(\nabla \omega, \nabla \bar{\psi}) \quad \text{y} \quad (z_1, \bar{\psi}) - (z_2, \bar{\psi}) = (z, \bar{\psi}). \quad (211)$$

Por otro lado, observe lo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) \omega_1, \bar{\psi}) - \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega_2, \bar{\psi}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) \omega_1 - G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega_2, \bar{\psi}). \end{aligned} \quad (212)$$

Usando (86) en (212) obtenemos

$$\begin{aligned} & (G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) \omega_1 - G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega_2 \\ &= \frac{[G(\psi_1 + \phi^n) - G(\phi^n)] \omega_1}{\psi_1 + \phi^n - \phi^n} - \frac{[G(\psi_2 + \phi^n) - G(\phi^n)] \omega_2}{\psi_2 + \phi^n - \phi^n}, \end{aligned}$$

de lo cual, sumando y restando $G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega_1$ se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{[G(\psi_1 + \phi^n) - G(\phi^n)] \omega_1}{\psi_1 + \phi^n - \phi^n} - \frac{[G(\psi_2 + \phi^n) - G(\phi^n)] \omega_2}{\psi_2 + \phi^n - \phi^n} \\ &= \left[\frac{G(\psi_1 + \phi^n) - G(\phi^n)}{\psi_1} - \frac{G(\psi_2 + \phi^n) - G(\phi^n)}{\psi_2} \right] \omega_1 + G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega. \end{aligned}$$

Así mismo, usando (86) y multiplicando y dividiendo por $\psi = \psi_1 - \psi_2$ en el primer término, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left[\frac{G(\psi_1 + \phi^n) - G(\phi^n)}{\psi_1} - \frac{G(\psi_2 + \phi^n) - G(\phi^n)}{\psi_2} \right] \omega_1 + G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega \\ &= [G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) - G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n)] \omega_1 \frac{\psi}{\psi_1 - \psi_2} + G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega. \end{aligned} \quad (213)$$

Usando (127) en (213) obtenemos

$$\begin{aligned} & [G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) - G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n)] \omega_1 \frac{\psi}{\psi_1 - \psi_2} + G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega \\ &= \frac{[g_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)]}{\psi_1 - \psi_2} \psi \omega_1 + g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega \\ &= (g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi \omega_1 + g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega. \end{aligned} \quad (214)$$

Reemplazando (214) en (212) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} (G_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n) \omega_1 - G_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n) \omega_2, \bar{\psi}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} ((g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \psi \omega_1, \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \omega, \bar{\psi}). \end{aligned} \quad (215)$$

Finalmente, observe lo siguiente

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\ & - (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\nabla(\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\ &= \mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (\nabla(\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\ & + \mathcal{A}(\phi^n) (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n) - \nabla(\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\ & - 2\beta (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n) - \nabla(\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}), \end{aligned}$$

de lo cual, sumando y restando $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi})$ se llega a

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (\nabla (\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\
&\quad + \mathcal{A}(\phi^n) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n) - \nabla (\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\
&\quad - 2\beta (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n) - \nabla (\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\
&= \mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \quad (216) \\
&\quad + \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (\nabla \psi, \nabla \bar{\psi}) + \mathcal{A}(\phi^n) (\nabla \psi, \nabla \bar{\psi}) - 2\beta (\nabla \psi, \nabla \bar{\psi}) \\
&= (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n)) (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) \\
&\quad + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\nabla \psi, \nabla \bar{\psi}).
\end{aligned}$$

Pero, observe que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla (\psi_1 + \phi^n)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\psi_1 + \phi^n) \right) - \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla (\psi_2 + \phi^n)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(\psi_2 + \phi^n) \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} [|\nabla (\psi_1 + \phi^n)|^2 - |\nabla (\psi_2 + \phi^n)|^2] + \frac{1}{\varepsilon} [F(\psi_1 + \phi^n) - F(\psi_2 + \phi^n)] \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} [(\nabla (\psi_1 + \phi^n) - \nabla (\psi_2 + \phi^n)) \cdot (\nabla (\psi_1 + \phi^n) + \nabla (\psi_2 + \phi^n))] \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} [F(\psi_1 + \phi^n) - F(\psi_2 + \phi^n)] \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_1 - \psi_2} \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_{\zeta}) \psi \right). \quad (217)
\end{aligned}$$

Usando (217) en (216) obtenemos

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n)) (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla\bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\nabla\psi, \nabla\bar{\psi}) \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} \nabla(\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla\psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_{\zeta}) \psi \right) (\nabla(\psi_1 + 2\phi^n), \nabla\bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (\nabla\psi, \nabla\bar{\psi}).
\end{aligned} \tag{218}$$

Además, observe que, por (127) se obtiene

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \\
& - (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \\
& = \mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \\
& + \mathcal{A}(\phi^n) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), \bar{\psi}) - 2\beta (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), \bar{\psi}),
\end{aligned}$$

de lo cual, sumando y restando $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi})$ y multiplicando y dividiendo por ψ , se llega a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \\
& + \mathcal{A}(\phi^n) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), \bar{\psi}) - 2\beta (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), \bar{\psi}) \\
& = (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n)) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{[f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)] \psi}{\psi_1 - \psi_2}, \bar{\psi} \right).
\end{aligned} \tag{219}$$

Usando (217) en (219) se obtiene

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) - \mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n)) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n)) - 2\beta \left(\frac{[f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)] \psi}{\psi_1 - \psi_2}, \bar{\psi} \right) \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_{\zeta}) \psi \right) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n)) - 2\beta \left((f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_{\zeta}) \psi, \bar{\psi} \right). \tag{220}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (218) y (220) se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi_1 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi_1 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_1 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \right) \\
& - \frac{1}{2\eta} (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta) \left(\frac{\varepsilon}{2} (\nabla (\psi_2 + 2\phi^n), \nabla \bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} (F_{sec}^{\Delta t}(\psi_2 + \phi^n, \phi^n), \bar{\psi}) \right) \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} \nabla (\psi_1 + \psi_2 + 2\phi^n) \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon} F'(\psi_{\zeta}) \psi \right) (f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), \bar{\psi}) \\
& + (\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n)) - 2\beta \left((f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_{\zeta}) \psi, \bar{\psi} \right), \tag{221}
\end{aligned}$$

por lo tanto, por (211), (215) y (221) se cumple que restando $(122)_2^1$ con $(122)_2^2$ se llega a $(126)_2$.

Ahora, miremos que restando $(122)_3^1$ con $(122)_3^2$ se llega a $(126)_3$. Primero que todo, es claro que

$$\varepsilon(\omega_1, \bar{\omega}) - \varepsilon(\omega_2, \bar{\omega}) = \varepsilon(\omega, \bar{\omega}) \quad \mathbf{y} \quad \varepsilon(\nabla \psi_1, \nabla \bar{\omega}) - \varepsilon(\nabla \psi_2, \nabla \bar{\omega}) = \varepsilon(\nabla \psi, \nabla \bar{\omega}). \tag{222}$$

Además, observe lo siguiente, por (127) tenemos

$$\begin{aligned}
 (G(\psi_1 + \phi^n), \bar{\omega}) - (G(\psi_2 + \phi^n), \bar{\omega}) &= (g(\psi_1 - g(\psi_2)), \bar{\omega}) \\
 &= \left(\frac{(g(\psi_1) - g(\psi_2)) \psi}{\psi_1 - \psi_2}, \bar{\omega} \right) \\
 &= (g'(\psi_\zeta) \psi, \bar{\omega}),
 \end{aligned} \tag{223}$$

por lo tanto, por (222) y (223) se concluye que restando $(122)_3^1$ con $(122)_3^2$ se llega a $(126)_3$. $\square$

Veamos que (130) se cumple.

Demostración. Por (128) y (129) se obtiene

$$(\psi, \bar{\phi}) = (\tilde{A}_h \phi, \bar{\phi}) = (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (\phi, \bar{\phi}) = (\nabla \tilde{A}_h^{-1} \psi, \nabla \bar{\phi}) + (\tilde{A}_h^{-1} \psi, \bar{\phi}). \tag{224}$$

Como $\tilde{A}_h^{-1} \psi \in \tilde{\Phi}_h$ entonces, tomando $\bar{\phi} = \tilde{A}_h^{-1} \psi$ en (224) obtenemos

$$(\nabla \tilde{A}_h^{-1} \psi, \nabla \tilde{A}_h^{-1} \psi) + (\tilde{A}_h^{-1} \psi, \tilde{A}_h^{-1} \psi) = \|\tilde{A}_h^{-1} \psi\|_{H^1}^2 = (\psi, \tilde{A}_h^{-1} \psi). \tag{225}$$

Veamos que $\psi \in (H^1(\Omega))'$ y $\tilde{A}_h^{-1} \psi \in H^1(\Omega)$. En efecto, es claro que $\tilde{A}_h^{-1} \psi \in H^1(\Omega)$, pues $\tilde{A}_h^{-1} \psi \in \tilde{\Phi}_h$ y $\tilde{\Phi}_h \subset H^1(\Omega)$. Por otro lado, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ luego, $(L^2(\Omega))' \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$, pero $(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$ y a su vez $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ y $\tilde{\Phi}_h \subseteq H^1(\Omega)$ entonces tenemos lo siguiente

$$\tilde{\Phi}_h \subseteq H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subseteq (H^1(\Omega))',$$

dado que $\psi \in \tilde{\Phi}_h$ entonces es claro que $\psi \in (H^1(\Omega))'$.

Dado que $\psi \in (H^1(\Omega))'$ y $\tilde{A}_h^{-1} \psi \in H^1(\Omega)$, por el producto de dualidad en (225)

tenemos

$$\left\| \tilde{A}_h^{-1} \psi \right\|_{H^1}^2 = \left(\psi, \tilde{A}_h^{-1} \psi \right) \leq C \left\| \tilde{A}_h^{-1} \psi \right\|_{H^1} \|\psi\|_{(H^1)'} , \quad (226)$$

y por lo tanto, obtenemos

$$\left\| \tilde{A}_h^{-1} \psi \right\|_{H^1} \leq C \|\psi\|_{(H^1)'} .$$

Por otro lado, por definición de la norma de un espacio dual, (128) y (129) llegamos a

$$\|\psi\|_{(H^1)'} = \sup_{\|\bar{\phi}\|_{H^1} \leq 1} |(\psi, \bar{\phi})| = \sup_{\|\bar{\phi}\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} + \int_{\Omega} \phi \bar{\phi} \right| , \quad (227)$$

de lo cual, por el Lema 1.2.10 y teniendo en cuenta la restricción $\|\bar{\phi}\|_{H^1} \leq 1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{(H^1)'} &\leq \sup_{\|\bar{\phi}\|_{H^1} \leq 1} \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \bar{\phi}\|_{L^2} + \sup_{\|\bar{\phi}\|_{H^1} \leq 1} \|\phi\|_{L^2} \|\bar{\phi}\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla \phi\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{H^1} . \end{aligned} \quad (228)$$

Pero, por (129) tenemos que

$$\|\phi\|_{H^1} = \left\| \tilde{A}_h^{-1} \psi \right\|_{H^1} ,$$

por lo tanto, usando (228) obtenemos

$$\|\psi\|_{(H^1)'} \leq C \left\| \tilde{A}_h^{-1} \psi \right\|_{H^1} .$$

Por lo tanto, se cumple (130). □

Veamos que se tienen las siguientes estimaciones

1. $(g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\omega_1 \in l^\infty(L^2)$,
2. $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2), F'(\psi_\zeta), f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), (f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta), g'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$,
3. $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \in l^\infty$.

Demostración. 1. En efecto, note que

$$(g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\omega_1 = \left[\frac{g_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)}{\psi_1 - \psi_2} \right] \omega_1. \quad (229)$$

Por (101), $\omega_1 \in l^\infty(L^2)$; y por (118) y (119), ϕ^n, ψ_1, ψ_2 pertenecen a $l^\infty(L^\infty)$. Entonces, por (127) y (86) tanto $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_1)$ como $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)$ pertenecen a $l^\infty(L^\infty)$; y por lo tanto, $(g_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta)\omega_1 \in l^\infty(L^2)$.

2. Argumentando similarmente al ítem 1, se puede verificar que $g_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \in l^\infty(L^\infty)$. Por otro lado, observe que

$$F'(\psi_\zeta) = \frac{F(\psi_1) - F(\psi_2)}{\psi_1 - \psi_2},$$

y como $F(\psi) = \frac{1}{4}(\psi^2 - 1)^2$ y ψ_1, ψ_2 pertenecen a $l^\infty(L^\infty)$, es claro que $F'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$.

Además, por (127) y (85) tanto $f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1)$ como $f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)$ se pueden ver en términos de ϕ^n, ψ_1 y ψ_2 , y por (118) y (119) se obtiene $f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \in l^\infty(L^\infty)$.

Ahora, observe que

$$(f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) = \frac{f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1) - f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2)}{\psi_1 - \psi_2},$$

y dado que $\psi_1, \psi_2, f_{sec}^{\Delta t}(\psi_1), f_{sec}^{\Delta t}(\psi_2) \in l^\infty(L^\infty)$, entonces es claro que $(f_{sec}^{\Delta t})'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$.

Finalmente, note que

$$g'(\psi_\zeta) = \frac{g(\psi_1) - g(\psi_2)}{\psi_1 - \psi_2},$$

por (127), (2) y teniendo en cuenta que

$$F(\phi) := \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2 \quad \text{y} \quad H(\phi) := \frac{1}{3} \phi^3 - \phi,$$

por (118) y (119) es claro que $g'(\psi_\zeta) \in l^\infty(L^\infty)$.

3. Por (101) y (119) se tiene que $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n), \mathcal{A}(\phi^n)$ pertenecen a l^∞ ; y además, es claro que $\beta \in l^\infty$, pues β es una constante. Por lo tanto, $\mathcal{A}(\psi_2 + \phi^n) + \mathcal{A}(\phi^n) - 2\beta \in l^\infty$.

□

Veamos que (147) se cumple.

Demostración. Tomando $\bar{\mu} = A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)$ en (84)₁ se obtiene

$$\left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}, A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n) \right) + \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) = 0. \quad (230)$$

Por otro lado, tomando $\bar{\phi} = A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)$ en (104) tenemos

$$\begin{aligned} (A_h(A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)), A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) &= (A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n), A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) \\ &\quad + (\nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n), \nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) \\ &= \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (231)$$

Pero observe que

$$((\phi^{n+1} - \phi^n), A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) = (A_h(A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)), A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n))$$

de lo cual, por (231) se llega a

$$((\phi^{n+1} - \phi^n), A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) = \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}^2. \quad (232)$$

Reemplazando (232) en (230), obtenemos

$$\|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}^2 + \Delta t \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) = 0,$$

de lo cual, usando el Lema 1.2.10 se obtiene

$$\begin{aligned} \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}^2 &\leq \Delta t \gamma (\nabla \mu^{n+1}, \nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)) \\ &\leq \Delta t \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{L^2} \\ &\leq \Delta t \gamma \|\nabla \mu^{n+1}\|_{L^2} \|A_h^{-1}(\phi^{n+1} - \phi^n)\|_{H^1}. \end{aligned}$$

□

Veamos que (157) se cumple.

Demostración. Multiplicando (150) por $\mathbf{u}^*$ e integrando en Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* &= \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^* - \Delta t \lambda \phi^n (\nabla \mu^{n+1}) \mathbf{u}^*) \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^* &= -\Delta t \lambda (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}), \end{aligned}$$

de lo cual, sumando y restando el término $\frac{\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2}{2}$ en el lado izquierdo de la igualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} 2 \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^* + \frac{\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2}{2} &= -\Delta t \lambda (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}) \\ \Leftrightarrow \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2}{2} + \left(\frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^* + \frac{\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2}{2} \right) &= -\Delta t \lambda (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\Delta t} (\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) = -\lambda (\phi^n \mathbf{u}^*, \nabla \mu^{n+1}).$$

□

Veamos que (158) se cumple.

Demostración. Tomando $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ en (151), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}) + c(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{u}^{n+1}) - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) &= 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) &= 0, \end{aligned}$$

y sumando las ecuaciones anteriores y aplicando (152), deducimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{u}^{n+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^{n+1} \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Así, sumando y restando $\frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2}$, concluimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(2 \frac{\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^{n+1} \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} + \left(\frac{\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2}{2} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2}{2} \right) \right) \\ + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 &= 0. \end{aligned}$$

□