Fenómenos de explosión en variedades Riemannianas

Autor:

Daimon Santiago Mayorga Carreño

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Maestría en matemáticas

Bucaramanga

2025

Fenómenos de explosión en variedades Riemannianas

Autor:

Daimon Santiago Mayorga Carreño

Trabajo de grado para optar al título de:

Magister en matemáticas

Director:

Jurgen Alfredo Julio Batalla

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Maestría en matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A mi amada esposa Lucía, por su amor incondicional, su paciencia y su apoyo constante en cada paso de este camino. Gracias por creer en mí aun en los momentos más difíciles y por ser mi compañera de vida.

A mi querida hija Gabriela, luz y alegría de mis días, cuya sonricita me recuerda siempre la razón más importante para seguir adelante. Que este logro sea también un ejemplo de que con esfuerzo, dedicación y perseverancia los sueños pueden alcanzarse.

Con todo mi amor, a ustedes les dedico este trabajo, fruto no solo de estudio y disciplina, sino también del cariño y motivación que me brindan cada día.

Agradecimientos

El presente trabajo de investigación ha sido posible gracias al apoyo y colaboración de diversas personas, a quienes expreso mi más sincero reconocimiento.

En primer lugar, manifiesto mi gratitud a mi director de tesis, Jurgen Alfredo Julio Batalla, por su orientación, sus valiosas sugerencias y su constante disposición para el diálogo académico. Su experiencia y compromiso fueron determinantes para la calidad y culminación de este estudio.

Agradezco igualmente a los docentes que con sus enseñanzas, comentarios y observaciones contribuyeron de manera significativa al desarrollo de esta investigación.

Finalmente, expreso mi agradecimiento a aquellas personas, por su apoyo moral constante, ya que resultaron indispensables durante todo el proceso de formación y redacción de esta tesis.

Lista de contenido

RESUMEN

TÍTULO: Fenómenos de explosión en variedades Riemannianas *

AUTOR: Daimon Santiago Mayorga Carreño **

PALABRAS CLAVE: Fenómenos de explosión, Compacidad, Variedades Riemannianas.

DESCRIPCIÓN:

Para este trabajo se estudian los fenómenos de explosión asociados a ecuaciones tipo Yamabe sobre variedades Riemannianas compactas. Estas ecuaciones aparecen en problemas geométricos fundamentales como la curvatura escalar y la obtención de métricas conformes con curvatura escalar constante. Se abordan aspectos analíticos clave como la existencia de sucesiones de Palais–Smale, y la construcción de soluciones fuertes de energía mínima. Se incluye un análisis detallado del caso de la esfera, donde aparecen soluciones tipo burbuja, que concentran su masa en puntos específicos al variar ciertos parámetros. Además, el resultado principal de este trabajo es mostrar el resultado de (Struwe, 1984) aplicando la teoría blow-up para describir la descomposición de soluciones como una función limite más una suma finitas de burbujas . Este estudio no solo permite entender el comportamiento cualitativo de las soluciones, sino también aporta herramientas para abordar problemas de existencia, compacidad y multiplicidad en ecuaciones con exponentes críticos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas

ABSTRACT

TITLE: Blow-up Phenomena in Riemannian Manifolds *

AUTHOR: Daimon Santiago Mayorga **

KEYWORDS: Blow-up Phenomena, Compactness, Riemannian Manifolds.

DESCRIPTION:

In this work, we study the blow-up phenomena associated with Yamabe-type equations on compact Riemannian manifolds. These equations arise in fundamental geometric problems such as scalar curvature and the construction of conformal metrics with constant scalar curvature. Key analytical aspects are addressed, such as the existence of Palais–Smale sequences and the construction of strong solutions with minimal energy. A detailed analysis of the case of the sphere is included, where bubble-type solutions appear, concentrating their mass at specific points as certain parameters vary. Moreover, the main result of this work is to present the result of (Struwe, 1984), applying blow-up theory to describe the decomposition of solutions as a limit function plus a finite sum of bubbles. This study not only helps to understand the qualitative behavior of the solutions, but also provides tools to address problems of existence, compactness, and multiplicity in equations with critical exponents.

---

* Master Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor in math Ciense

1. Introducción

En el contexto de las variedades Riemannianas es común encontrar estructuras geométricas especiales definidas a partir de soluciones de una ecuación diferencial. En particular, en una variedad Riemanniana (M^n, g) se destacan las ecuaciones tipo-Yamabe

$$\triangle_g u + fu = wu^q,$$

donde f, w son funciones sobre M^n , $\triangle_g$ es el operador de Laplace-Beltrami y $q > 1$. Esta familia de ecuaciones incluye, por ejemplo, a la ecuación correspondiente al problema de prescribir curvatura escalar, es decir, dada una función $w(x)$ ¿ Es posible encontrar una métrica tal que su curvatura escalar sea igual a la función $w(x)$? Otra ecuación geométrica que aparece en esta familia es la ecuación de Yamabe. Las soluciones positivas de esta ecuación permiten resolver el siguiente problema geométrico (Hoy en día conocido como problema de Yamabe): Dada una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable cerrada (compacta y sin frontera) ¿Es posible encontrar una nueva métrica con curvatura escalar constante tal que sea conforme a la métrica original?

Estas ecuaciones reciben su nombre en honor al matemático japonés Hidehiko Yamabe, quien desempeñó un papel destacado en su desarrollo. Pues planteó las pautas para obtener una solución general y obtuvo los primeros resultados fundamentales a este problema.

La relevancia de este problema se debe, entre otras cosas, a que representa una generalización a dimensiones mayores del teorema de uniformización, el cual se considera el resultado más importante en la teoría de la geometría de superficies.

La solución del problema de Yamabe se obtuvo a mediados de los años ochentas y a partir de entonces se han desarrollado muchas líneas de investigación alrededor del tema, en gran parte por las distintas técnicas avanzadas que se utilizaron en la solución. Por otro lado, una de las dificultades en el estudio del problema radica en la aparición de fenómenos de concentración o explosión asociadas a la ecuación.

En este trabajo nos proponemos estudiar y comprender los fenómenos de explosión asociados a algunas ecuaciones tipo-Yamabe ver (Druet, Hebey, y Robert, 2009). Para ello será fundamental entender lo que ocurre en el caso de la ecuación de Yamabe. Finalmente destacamos que este estudio nos permitirá abordar problemas tales como, multiplicidad de soluciones al problema de Yamabe o, problemas sobre existencia y compacidad de soluciones a ecuaciones geométricas con exponente críticos y subcríticos.

2. Preliminares

El objetivo de esta sección es presentar conceptos, lemas y teoremas conocidos de la geometría Riemanniana, necesarios para comprender la temática de esta propuesta. Las demostraciones de dichos teoremas se pueden encontrar en varios libros de geometría Riemanniana, en este caso nos guiaremos de (Do Carmo y Flaherty Francis, 1992).

Antes de definir una variedad diferenciable (o suave), recordaremos la definición de una variedad topológica M^n de dimensión n; Esto es un espacio topológico que cumple lo siguiente:

1. M^n es un espacio topológico de Hausdorf segundo numerable.

2. Para cada $p \in M^n$ existe una vecindad U homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

3. Sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces

   $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ es un homeomorfismo.

La dupla (U, φ), donde U es un abierto de M^n y φ es el homeomorfismo de U con un abierto de $\mathbb{R}^n$ es llamada carta coordenada. Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas coordenadas tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Se dice que $(U, \varphi), (V, \psi)$ son compatibles si $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo entre $\psi(U \cap V)$ y $\varphi(U \cap V)$ abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Una estructura diferenciable sobre una variedad topológica M^n es una familia $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartas coordenadas tal que

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M^n$,

2. Para cualesquiera $i, j \in I$ tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces las cartas $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ son compatibles,

3. Si una carta (V, ψ) es compatible con cualquier carta $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$, entonces $(V, \psi) \in \mathcal{U}$

Ahora bien, se dice que variedad diferencial es una variedad topológica M^n dotada con una estructura diferenciable.

Por otro lado se tiene que una función $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in M^n$ si existe (U, φ) una carta local de p tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual. De manera más general, se tiene que una función $f\colon M^n \to N^m$ es diferenciable en $p \in M^n$ si existen (U, φ),(V, ψ) cartas locales de p y $f(p)$ en M^n y N^m respectivamente, tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual, ver (Munkres, 2018). Se dice que f es diferenciable si lo es para todo punto.

Por otra partel, dada M^n una variedad diferencial. Una métrica de Riemann g sobre M^n es una correspondencia, la cual asocia a cada punto $p \in M^n$ un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ sobre el espacio tangente en p denotado como T_pM^n, es decir $g_p\colon T_pM^n \times T_pM^n \to \mathbb{R}$ es una función bilineal, simétrica y definida positiva. Además, las funciones $g.(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \in C^\infty(M^n)$ para cada par de campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ asociados al sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Así mismo se denomina a una variedad diferencial junto con una métrica Riemanniana (M^n, g), como variedad Riemanniana.

Ahora bien, dadas (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f\colon M \to N$ es conocida como isometría si:

$$g_p(u, v) = h_{(f(p))}(df_p(u), df_p(v)),\ \text{para todo } p \in M \text{ y para todo } u, v \in T_pM.$$

Sean M y N variedades Riemannianas. Una función diferenciable $f\colon M \to N$ es una isometría local en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ tal que $f\colon U \to f(U)$ es un difeomorfismo

Se dice que dos variedades son iguales desde el punto de vista geométrico si existe una isometría entre ellos.

Por otra parte, dado $\Gamma(TM)$ el conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ sobre M^n. Una conexión afín $(\triangledown)$ sobre una variedad diferenciable M^n es una función

$$\triangledown\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM).$$

La cual es denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\triangledown} \triangledown_X Y$ y satisface las siguientes propiedades:

1. $\triangledown_{fX+gY} Z = f\triangledown_X Z + g\triangledown_Y Z$.
2. $\triangledown_X (Z + Y) = \triangledown_X Z + \triangledown_X Y$.
3. $\triangledown_X (fY) = f\triangledown XY + X(f)Y$,

donde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y $f, g \in C^\infty(M^n)$.

Más aún, dada M una variedad diferenciable con una conexión afín $\triangledown$. Existe una única correspondencia que asocia un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\gamma\colon I \to M$ con otro campo vectorial $D_t V$a lo largo de γ, llamada la derivada covariante de V a lo largo de γ, tal que

1. $D_t(V + W) = D_t V + D_t W$.
2. $D_t fV = \frac{df}{dt} V + fD_t V$, donde W es un campo vectorial a lo largo de γ y f es una función diferenciable sobre I.

3. Si V es un campo vectoral inducido por un campo vectorial $Y \in \Gamma(TM)$, es decir, $V(t) = Y(\gamma(t))$, entonces $D_t V = \nabla_{\dot{\gamma}} Y$.

Además. dada M una variedad diferenciable con una conexión afín $\triangledown$, un campo vectorial V a lo largo de una curva $\gamma \colon I \to M$ es llamado paralelo cuando $D_t V = 0$ para todo $t \in I$.

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín $\triangledown$. Sea $\gamma \colon I \to M$ una curva diferenciable en M y sea V_0 un vector tangente a M tal que $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo V a lo largo de γ, tal que $V(t_o) = V_0$. $V(t)$ es llamado transporte paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de γ.

Por otro lado, si M una variedad diferencial con una conexión afín $\triangledown$ y una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se dice que la conexión es compatible con la métrica, si para toda curva suave γ y cualquier par de campos vectoriales paralelos P y P' a lo largo de γ, se tiene que $\langle P, P' \rangle =$ constante.

Mas aún, si se tiene, (M, g) una variedad Riemanniana, una conexión sobre M se dice compatible con la métrica g si, y solo si, para cualquier campo vectorial V y W a lo largo de una curva diferenciable $\gamma \colon I \to M$ se tiene que

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W), t \in I.$$

De igual manera una conexión afín $\triangledown$ sobre una variedad suave M se dice simétrica si

$$\triangledown_X Y - \triangledown_Y X = [X, Y],$$

donde $[X, Y](f) = X[Y(f)] - Y[X(f)]$, es el corchete de Lie. Esto se conoce como libre de torsión.

Ahora bien, dada una variedad Riemanniana (M, g), existe una única conexión afín (conexión de Levi- Civita) $\triangledown$ sobre M que satisface las siguientes condiciones:

1. $\triangledown$ es simétrica.

2. $\triangledown$ es compatible con la métrica g.

De ahora en adelante la conexión $\triangledown$ que se utilizará, es la conexión de Levi-Civita.

Dada una variedad Riemanniana compacta y suave M de dimensión n con una métrica g, se pueden definir fácilmente los siguientes espacios: Si $p \geq 1$, el ***espacio de Lebesgue*** $L^p(M)$ es el conjunto de funciones localmente integrables u sobre M para las cuales la norma

$$\|u\|_p = \left(\int_M |u|^p \, dV_g \right)^{1/p}$$

es finita.

Los espacios de Sobolev $H_k^p(M)$, siguiendo lo que se hace en el contexto euclidiano más tradicional. Por ejemplo, cuando $k = 1$ y $p > 1$, se puede definir el espacio de Sobolev $H_1^p(M)$ de la siguiente manera: para $u \in C^\infty(M)$, con

$$\|u\|_{H_1^p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p,$$

donde $\|.\|_p$ es la norma L^p con respecto a la medida Riemanniana dv_g. Entonces, definimos $H_1^p(M)$ como la clausura de $C^\infty(M)$ con respecto a $\|.\|_{H_1^p}$. Una definición similar se aplica para $H_k^p(M)$, donde

$$\|u\|_{H_k^p} = \sum_{i=0}^{k} \|\nabla^i u\|_p.$$

Algunas propiedades muy útiles de $H_1^p(M)$ son que las funciones Lipschitz en M pertenecen a los espacios de Sobolev $H_1^p(M)$ para todo p, y que si $u \in H_1^p(M)$ para algún p, entonces $|u| \in H_1^p(M)$ y $\|\nabla|u|\| = |\nabla u|$ casi en todas partes.

(Teoremas de inmersión de Sobolev para variedades compactas).

Supongamos que M es una variedad Riemanniana compacta de dimensión n (posiblemente con frontera de clase C^1).

(a) Si

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n},$$

entonces $H_k^q(M)$ está encajado continuamente en $L^r(M)$.

(b) (**Teorema de Rellich–Kondrakov**) Supongamos que la desigualdad estricta se cumple en (a). Entonces la el encaje $H_k^q(M) \subset L^r(M)$ es un operador compacto.

(c) Supongamos que $0 < \alpha < 1$, y

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k - \alpha}{n},$$

entonces $H_k^q(M)$ está encajado continuamente en $C^\alpha(M)$.

Al igual que para subconjuntos abiertos acotados del espacio euclidiano, el teorema de encaje de Sobolev (encaje continua) y el teorema de Rellich-Kondrakov (encaje compacta) se cumplen. Para fijar ideas, tomemos $k = 1$ y $p = 2$. Sea

$$p_n = \frac{2n}{n-2}$$

el exponente crítico de Sobolev. Entonces, para cualquier $q \in [1, p_n]$, $H_1^2(M) \subset L^q(M)$ y esta encaje es continua, con la propiedad de que la encaje también es compacta si $q < p_n$.

La desigualdad de Sobolev correspondiente a la encaje continua $H_1^2(M) \subset L^{p_n}(M)$ es la siguiente: Para cualquier $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{p_n} \leq A\|\nabla u\|_2 + B\|u\|_2,$$

donde A y B son constantes positivas independientes de u, pero que pueden depender de la variedad.

Otra desigualdad muy útil es la llamada desigualdad de Poincaré. Al tratar con $H_1^2(M)$, esta establece la existencia de una constante positiva A tal que, para cualquier $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u - \bar{u}\|_2 \leq A\|\nabla u\|_2,$$

donde

$$\bar{u} = \frac{1}{V_g} \int_M u \, dv_g$$

es el promedio de u, y V_g el volumen de M con respecto a g. En este caso particular, gracias a la caracterización de Rayleigh del primer autovalor no nulo del laplaciano, A

puede tomarse como el inverso de la raíz cuadrada de este autovalor.

Combinando la desigualdad de Sobolev y la de Poincaré, se obtiene la llamada desigualdad de Sobolev-Poincaré: para cualquier $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u - \bar{u}\|_{p_n} \leq A \|\nabla u\|_2,$$

donde A es una constante positiva, independiente de u, como es habitual.

Una noción muy útil relacionada con las inmersiones de Sobolev, que resulta crucial en muchos problemas como el problema de Yamabe, es la de las mejores constantes. En el caso particular $k = 1$ y $p = 2$, la desigualdad de Sobolev en el espacio euclidiano se escribe como:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} \, dx \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde la mejor constante A en esta desigualdad, que denotamos por K_n, está dada por:

$$K_n = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}}, \tag{2.1}$$

donde ω_n es el volumen de la n-esfera unitaria.

Tomando $A = K_n$ en la desigualdad anterior, obtenemos lo que se conoce como la desigualdad de Sobolev euclidiana aguda. Sus funciones extremales son conocidas y se expresan como:

$$u_{\lambda,a,\mu}(x) = \mu \left(\lambda + |x - a|^2 \right)^{\frac{1-n}{2}},$$

donde $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, y $a \in \mathbb{R}^n$ son arbitrarios.

Para variedades compactas, consideramos la desigualdad de Sobolev:

$$\|u\|_{p_n}^2 \leq A\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2.$$

Como se verifica fácilmente, cualquier constante A debe satisfacer $A \geq K_n^2$. Por otro lado, según (Hebey y Vaugon, 1995) y (Hebey y Vaugon, 1996), se puede probar que existe una constante positiva B tal que, para cualquier $u \in H_1^2(M)$:

$$\|u\|_{p_n}^2 \leq K_n^2\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2.$$

Más desarrollos sobre espacios de Sobolev, desigualdades de Sobolev y la noción de mejores constantes se encuentran en (Hebey, 2000)

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta y suave. Las ecuaciones que nos interesan tienen básicamente la forma:

$$\Delta_g u + au = f,$$

donde a y f son funciones dadas en M. Se dice que una función $u \in H_1^2(M)$ es una solución débil de esta ecuación si, para todo $\varphi \in H_1^2(M)$, se cumple:

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \, dv_g + \int_M a(x) u \varphi \, dv_g = \int_M f(x) \varphi \, dv_g.$$

Existen resultados de regularidad para esta ecuación, similares a los expresados en el contexto Euclidiano (esto no es muy sorprendente, ya que la regularidad es una noción local). El resultado de regularidad que utilizaremos principalmente es el siguiente: si a es suave y $f \in H_k^p(M)$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $p > 1$, entonces una solución débil u de la ecuación anterior pertenece a $H_{k+2}^p(M)$. En particular, de este resultado y del teorema de encaje de Sobolev se deduce que, si f es suave, entonces u también es suave.

En paralelo con la regularidad, los principios del máximo, muy útiles para el Laplaciano en variedades Riemannianas, también se cumplen. Una forma actualmente utilizada es la siguiente: si $u \in C^2(M)$ es no negativa y satisface, para todo $x \in M$,

$$\Delta_g u(x) \geq u(x) f(x, u(x)),$$

para algunas funciones continuas $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces u es estrictamente positiva en todas partes, o bien u es la función nula. Esto se deduce fácilmente del principio del máximo de Hopf, como se suele enunciar.

Para terminar, vemos los resultados de regularidad elíptica global. Sea M una variedad Riemanniana compacta, y supongamos que $u \in L^1_{\text{loc}}(M)$ es una solución débil de $\Delta u = f$.

(a) Si $f \in H_k^q(M)$, entonces $u \in H_{k+2}^q(M)$, y

(b) Si $f \in C^{k,\alpha}(M)$, entonces $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$.

3. La ecuación modelo

Sea (M, g) una variedad diferencial compacta de dimensión $n \geq 3$. Sea (h_α) una sucesión de funciones diferenciables sobre M y considere la siguiente ecuación.

$$\triangle_g u + h_\alpha u = u^{p_n - 1} \quad (E_\alpha)$$

donde $\triangle_g = -div_g \nabla$ es el operador de Laplace-Beltrami, $p_n = \frac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de Sobolev para el encaje del espacio de Solbolev $H_1^2(M)$ en el espacio de Lebesgue $L^p(M)$.

Se discutirá brevemente en este capítulo introductorio la existencia de secuencias de Palais–Smale y la existencia de soluciones fuertes de energía mínima para (E_α).

3.1. Sucesiones de Palais Smale

Sea h una función diferenciable sobre M. Se dice que el operador $L_g = \triangle_g + h$ es coercivo si existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{H_1^2}^2 \leq C \int_M (L_g u) u dv_g = C \int_M |\nabla u|^2 + hu^2 dv_g$$

para todo $u \in H_1^2(M)$. Un ejemplo de operador coercivo es el siguiente.

Ejemplo 3.1.1. *Si $h(x) > 0$, entonces L_g es coercivo. Dado $u \in H_1^2(M)$ se tiene que*

$$||u||_{H_1^2}^2 = (||\nabla u||_2 + ||u||_2)^2 = ||\nabla u||_2^2 + 2||\nabla u||_2 ||u||_2 + ||u||_2^2,$$

usando la desigualdad de Young se sigue que

$$||u||^2_{H_1^2} \leq 2\left(||\nabla u||_2^2 + ||u||_2^2\right) \tag{3.1}$$

Por otro lado, como h es diferenciable y por tanto continua, además M es compacto, entonces h alcanza su mínimo K. Por hipótesis sabemos que $h > 0$, luego $K > 0$. Así existe $C_1 > 0$ tal que $C_1 h > 1$. De lo anterior se obtiene que $C_1 h u^2 > u^2$. Tomando $C = max\{C_1, 1\}$ se obtiene que $Chu^2 > u^2$ y $C|\nabla u|^2 > |\nabla u|^2$. De las desigualdades anteriores y comparando con (3.1) se tiene

$$||u||^2_{H_1^2} \leq 2\left(\int_M C|\nabla u|^2 dv_g + \int_M Chu^2 dv_g\right) = 2C\int_M \left(|\nabla u|^2 + hu^2\right) dv_g$$

Por tanto L_g es coercivo.

Observación 3.1.2. *La existencia de una función $u_\alpha > 0$ solución de (E_α) implica que el operador $L_g^\alpha = \triangle_g + h_\alpha$ en la parte izquierda de la ecuación (E_α) es coercivo.*

De ahora en adelante, se define el funcional I_g^α sobre el espacio de Sobolev $H_1^2(M)$ por

$$I_g^\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M h_\alpha u^2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u|^{p_n} dv_g.$$

Definición 3.1.3. *Sea (u_α) una sucesión de funciones en H_1^2. Se dice que (u_α) es una sucesión de Palais-Smale para I_g^α, si se cumplen las siguientes proposiciones.*

1. *la sucesión $(I_g^\alpha(u_\alpha))$ es acotada, y*

2. *$DI_g^\alpha(u_\alpha) \to 0$ fuertemente en $H_1^2(M)'$ siempre que $\alpha \to \infty$, donde $H_1^2(M)'$ es el*

espacio dual de $H_1^2(M)$

Definición 3.1.4. *Se dice que el operador* L_g^α *es uniformemente coercivo si existe una función* h *diferenciable, tal que* $\triangle_g + h$ *es coercivo y* $h_\alpha \geq h$ *para todo* α*.*

Proposición 3.1.5. *Sea* (M, g) *una variedad diferencial compacta de dimensión* $n \geq 3$*, y* (h_α) *una sucesión de funciones suaves sobre* M*. Suponga que* L_g^α *es uniformemente coercivo, entonces existe una sucesión de Palais-Smale de funciones diferenciables que satisfacen* (E_α)*.*

Demostración. Sean (ε_α) una sucesión de numeros reales tal que $\varepsilon_\alpha \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$ y $q \in (1, p_n - 1)$. Fije α y defina Φ_α el funcional sobre $H_1^2(M)$ dado por

$$\Phi_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M h_\alpha u^2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M (u^+)^{p_n} dv_g - \frac{\varepsilon_\alpha}{q+1}\int_M (u^+)^{q+1} dv_g$$

donde $u^+ = max(u, 0)$.

Es fácil ver que el lema de paso de montaña de (Ambrosetti y Rabinowitz, 1973) puede ser aplicado a Φ_α. Se sigue que existe $c_\alpha > 0$ y una sucesión (φ_j) en $H_1^2(M)$ tal que

$$\begin{gathered} \Phi_\alpha(\varphi_j) = c_\alpha + o(1) \text{ y} \\ ||D\Phi_\alpha(\varphi_j)||_{(H_1^2)'} = o(1). \end{gathered} \tag{3.2}$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Más aún, dado $u_0 \in H_1^2(M)$, $u_0 \geq 0$ y $u_0 \not\equiv 0$, se puede tomar c_α tal que

$$c_\alpha \leq \sup_{t \geq 0}\{\Phi_\alpha(tu_0)\}.$$

Afirmación 3.1.6. $c_\alpha < \frac{1}{n}K_n^{-n}$. *(donde K_n es es como en 2.1)*

Para la demostración de esta afirmación nos basamos en las funciones test locales de Aubin como aparece en (Lee y Parker, 1987). Sea u_θ una función test local. Más precisamente sea $\varepsilon > 0$ pequeño, $x_0 \in M$ y $\theta > 0$ definimos la función

$$u_\theta(x) = \eta(x)\underbrace{(\theta^2 + d_g(x_0, x)^2)^{1-\frac{n}{2}}}_{u}$$

donde d_g es la distancia con respecto a g y η es una función de corte diferenciable tal que $\eta = 1$ en $B(x_0, \varepsilon)$ y $\eta = 0$ en $M \setminus B(x_0, 2\varepsilon)$ las bolas geodésicas de radios ε y 2ε. Veamos que

$$\sup_{t\geq 0} \Phi_\alpha\left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}\right) = \frac{1}{nK_n^n}$$

calculando

$$\Phi_\alpha\left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}\right) = \frac{1}{2}\int_M \left|\nabla\left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}\right)\right|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M h_\alpha \left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}\right)^2 dv_g$$
$$- \frac{1}{p_n}\int_M \left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}^+\right)^{p_n} dv_g - \frac{\varepsilon_\alpha}{q+1}\int_M \left(t\frac{u_\theta}{||u_\theta||_{p_n}}^+\right)^{q+1} dv_g \quad (3.3)$$

Realizando una estimación para $\int_M |\nabla u_\theta|^2 dv_g$

$$\int_M |\nabla u_\theta|^2 dv_g = \int_M \langle \nabla u_\theta, \nabla u_\theta\rangle dv_g = \int_M \langle \nabla(\eta u), \nabla(\eta u)\rangle dv_g$$
$$= \int_M \langle u\nabla\eta + \eta\nabla u, u\nabla\eta + \eta\nabla u\rangle dv_g$$
$$= \int_M \left(u^2 |\nabla\eta|^2 + 2u\eta\langle\nabla\eta, \nabla u\rangle + \eta^2 |\nabla u|^2\right) dv_g$$

como η es una función de corte luego $\eta = 1$ en B_ε y $\eta = 0$ en $M \setminus B_{2\varepsilon}$. Entonces, se tiene que

$$\int_M \left(u^2 |\nabla \eta|^2 + 2u\eta \langle \nabla \eta, \nabla u \rangle + \eta^2 |\nabla u|^2\right) dv_g$$
$$= \int_{B_{2\varepsilon}} \left(\eta^2 |\nabla u|^2\right) + \int_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \left(2\eta u \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle + u^2 |\nabla \eta|^2\right) dv_g$$
$$\leq \int_M |\nabla u|^2 dv_g + C \int_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \left(u |\nabla u| + u^2\right) dv_g \quad (3.4)$$

Ahora bien, dado que M es una variedad compacta y pasando $u_\theta = \eta \cdot u$ en coordenadas normales, en una vecindad de x_0. Como u es una función radial y $g^{rr} \equiv 1$ (g^{ij} es la matríz inversa formada por la métrica g) en coordenadas normales, entonces tenemos que $|\nabla u|^2 = |\partial_r u|^2$. Además teniendo en cuenta el cambio de diferencial de volumen al diferencial en coordenadas exponenciales, se tiene que $dv_g = (1 + o(r))dx$. De lo anterior tenemos que $u = (\theta^2 + r^2)^{1-\frac{n}{2}}$, luego se tiene que

$$|\nabla u| = |\partial_r u| = \left| \frac{2-n}{2} \left(\theta^2 + r^2\right)^{\frac{-n}{2}} \cdot 2r \right|$$

$$= (n-2)\left(\theta^2 + r^2\right)^{\frac{-n}{2}} \cdot r \leq (n-2)\left(r^2\right)^{\frac{-n}{2}} \cdot r = (n-2)\,(r)^{1-n}$$

más aún, se tiene que $u = (\theta^2 + r^2)^{1-\frac{n}{2}} \leq (r^2)^{1-\frac{n}{2}} = r^{2-n}$. En coordenadas exponenciales esto se traduce en lo siguiente:

$$\int_M |\nabla u|^2 dv_g + c \int_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \left(u |\nabla u| + u^2\right) dv_g$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_r u|^2 (1 + o(r))\, dx + C \int_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \left(u |\partial_r u| + u^2\right) (1 + o(r))\, dx$$

Por otra parte, considerando la desigualdad de Sobolev para $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$K_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_r u|^2 \, dx = \frac{1}{K_n^2} \left(\int_{B_\varepsilon} u^{p_n} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} u^{p_n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}}$$

$$\leq \frac{1}{K_n^2} \left(\int_{B_{2\varepsilon}} u_\theta^{p_n} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} r^{-2n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}} = \frac{1}{K_n^2} \left(\int_{B_{2\varepsilon}} u_\theta^{p_n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}} + o(1) = \frac{1}{K_n^2} \|u_\theta\|_{p_n}^2 + o(1)$$

Por otro lado, la estimación para $\int_M h_\alpha u^2 dv_g$. Note que $\int_M h_\alpha u^2 dv_g \leq C \int_M u^2 dv_g$ dado que h es diferenciable sobre M y M es compacto. Luego basta estimar $\int_M u^2 dv_g$. Pasando a coordenadas exponenciales, se tiene que $\int_M u^2 dv_g = \int_{B_{2\varepsilon}} u_\theta^2 (1+o(r)) dx$. Ahora bien, pasando a coordenadas polares, se tiene que

$$\int_{B_{2\varepsilon}} u_\theta^2 dx \leq \int_0^{2\varepsilon} \int_{S_r} u^2 r^{n-1} dS_r dr = \int_0^{2\varepsilon} \int_{S_r} (\theta^2 + r^2)^{2-n} r^{n-1} dS_r dr.$$

Realizando el cambio de variable $\theta \cdot s = r$ se obtiene que lo anterior es igual a

$$\int_0^{\frac{2\varepsilon}{\theta}} \int_{S_m} (s^2\theta^2 + \theta^2)^{2-n} (s\theta)^{n-1} \theta dS_m ds \leq \int_0^{\frac{2\varepsilon}{\theta}} \int_{S_m} \theta^{4-n} s^{3-n} dS_m ds = o(\theta^{4-n})$$

Por tanto tenemos que la estimación para las dos primeras expresiones queda como sigue:

$$\int_M |\nabla u_\theta|^2 + h_\alpha u_\theta^2 \, dv_g \leq (1 + C\varepsilon) \left(\frac{1}{K_n^2} ||u_\theta||_{p_n}^2 + o(1) + o(\theta^{4-n}) \right)$$

Luego tenemos que

$$\frac{1}{2||u_\theta||_{p_n}^2}t^2\int_M |\nabla u_\theta|^2 + h_\alpha u_\theta^2\,dv_g \leq \frac{1}{2||u_\theta||_{p_n}^2}t^2(1+C\varepsilon)\left(\frac{1}{K_n^2}||u_\theta||_{p_n}^2 + o(1) + o(\theta^{4-n})\right)$$

Tomando θ y ε pequeños, se concluye que

$$\frac{1}{2||u_\theta||_{p_n}^2}t^2\int_M |\nabla u_\theta|^2 + h_\alpha u_\theta^2\,dv_g \leq \frac{1}{2}t^2\left(\frac{1}{K_n^2}\right). \tag{3.5}$$

El segundo término a estimar sería

$$\frac{-1}{p_n}\int_M\left(t\frac{u_\theta^+}{||u_\theta||_{p_n}}\right)^{p_n}dv_g = \frac{-1}{p_n}\frac{t^{p_n}}{||u_\theta||_{p_n}^{p_n}}\int_M u_\theta^{p_n}dv_g = \frac{-t^{p_n}}{p_n}.$$

El último término a estimar sería

$$\frac{-\varepsilon_\alpha}{q+1}\int_M\left(\frac{tu_\theta^+}{||u_\theta||_{p_n}}\right)^{q+1}dv_g = \frac{-\varepsilon_\alpha}{q+1}\frac{t^{q+1}}{||u_\theta||_{p_n}^{q+1}}\int_M u_\theta^{q+1}dv_g$$

Realizando un procedimiento similar a la estimación de $\int_M u_\theta^2 dv_g$ obtenemos lo siguiente:

$$\int_M u_\theta^{q+1}dv_g \leq \int_{2\varepsilon}\left(r^2+\theta^2\right)^{\frac{2-n}{2}(q+1)}(1+o(r))dx$$

Ahora bien, estimando y pasando a coordenadas polares tenemos que

$$\int_{2\varepsilon}\left(r^2+\theta^2\right)^{\frac{2-n}{2}(q+1)}dx = \int_0^{2\varepsilon}\int_{S_r}(r^2+\theta^2)^{\frac{2-n}{2}(q+1)}r^{n-1}dwdr$$

haciendo cambio de variable $r = s\theta$ obtenemos

$$\int_0^{\frac{2\varepsilon}{\theta}}\int_{S_r}(s^2\theta^2+\theta^2)^{\frac{2-n}{2}(q+1)}(s\theta)^{n-1}\theta dwds \leq \int_0^{\frac{2\varepsilon}{\theta}}\int_{S_r}\theta^{(2-n)(q+1)+n}s^{(2-n)(q+1)+n-1}dwds$$

Luego, el último término es de $o(\theta^{(2-n)(q+1)+n})$, por lo que la estimación para el supremo queda de la siguiente forma:

$$S = \sup_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2K_n^2}-\frac{t^{p_n}}{p_n}-\frac{\varepsilon_\alpha}{q+1}\frac{t^{q+1}}{||u_\theta||_{p_n}^{q+1}}o(\theta^{(2-n)(q+1)+n})\right\}.$$

Tomando un valor de θ muy cercano a cero, se sigue que $S < \sup_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2K_n^2}-\frac{t^{p_n}}{p_n}\right\}$. Luego, derivando la expresión e igualando a cero, se obtiene

$$0=\frac{1}{K_n^2}t-t^{p_n-1}\Leftrightarrow \frac{1}{K_n^2}-t^{p_n-2}=0$$

luego se tiene que $t=\frac{1}{K_n^{\frac{n-2}{2}}}$. Reemplazando obtenemos que

$$S<\frac{\frac{1}{K_n^{n-2}}}{2K_n^2}-\frac{\frac{1}{K_n^{\frac{n-2}{2}p_n}}}{p_n}=\frac{1}{2K_n^n}-\frac{1}{p_nK_n^n}=\frac{1}{n}K_n^{-n}$$

De esta manera tomando a $u_0=u_\theta$ con θ suficientemente pequeño queda demostrada la afirmación. Se sigue de (3.2) que

$$\frac{1}{2}\int_M\left(|\nabla\varphi_j|^2+h_\alpha\varphi_j^2\right)dv_g=\frac{1}{p_n}\int_M(\varphi_j^+)^{p_n}dv_g+\frac{\varepsilon_\alpha}{q+1}\int_M(\varphi_j^+)^{q+1}dv_g+c_\alpha+o(1) \tag{3.6}$$

y

$$\int_M \left(|\nabla\varphi_j|^2 + h_\alpha\varphi_j^2\right) dv_g = \int_M (\varphi_j^+)^{p_n} dv_g + \varepsilon_\alpha \int_M (\varphi_j^+)^{q+1} dv_g + ||\varphi||_{H_1^2} o(1). \tag{3.7}$$

Realizando (3.6)-$\frac{1}{q+1}$(3.7) se tiene que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_M \left(|\nabla\varphi_j|^2 + h_\alpha\varphi_j^2\right) dv_g \leq c_\alpha + o(1) + ||\varphi||_{H_1^2} o(1).$$

Por hipótesis L_g^α es uniformemente coercivo y por la afirmación 3.1.6 tenemos que existe $C > 0$ independiente de α tal quepara cualquier j se tiene que $||\varphi_j||_{H_1^2} < C$. Por teorema de Banach Alaoglu se tiene que existe una subsucesión (φ_j) tal que $\varphi_j \to u_\alpha$ debilmente en $H_1^2(M)$, por la compacidad del encaje de $H_1^2(M) \to L^p(M)$ que $\varphi_j \to u_\alpha$ fuertemente en $L^p(M)$ cuando $p < p_n$ y por último se tiene que $\varphi_j \to u_\alpha$ en casi todas partes cuando $j \to \infty$. Teniendo en cuenta la segunda condición de (3.2), se tiene que para todo $w \in C^\infty(M)$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_M \left(\langle\nabla\varphi_j, \nabla w\rangle + h_\alpha\varphi_j w\right) dv_g = \lim_{j\to\infty} \int_M (\varphi_j^+)^{p_n-1} w dv_g + \varepsilon_\alpha \lim_{j\to\infty} \int_M (\varphi_j^+)^q w dv_g, \tag{3.8}$$

Por otro lado, por la condición de convergencia débil, se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \int_M \left(\langle\nabla\varphi_j, \nabla w\rangle + h_\alpha\varphi_j w\right) dv_g = \int_M \left(\langle\nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w\right) dv_g \tag{3.9}$$

de esta misma forma, por la convergencia fuerte en $L^p(M)$ para $p < p_n$ se concluye que

$$\varepsilon_\alpha \lim_{j\to\infty} \int_M (\varphi_j^+)^q w dv_g = \varepsilon_\alpha \int_M (u_\alpha^+)^q w dv_g \tag{3.10}$$

Por último, despejando de (3.8) y teniendo en cuenta (3.9) y (3.10) se llega a

$$\lim_{j\to\infty}\int_M (\varphi_j^+)^{p_n-1} w dv_g = \int_M (\langle \nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w)\, dv_g - \varepsilon_\alpha \int_M (u_\alpha^+)^q w dv_g$$

entonces $\varphi_j^{p_n-1} \to \langle \nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w - \varepsilon_\alpha (u_\alpha^+)^q w$ en $L^1(M)$, luego existe una subsucesión $\varphi_j^{p_n-1} \to \langle \nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w - \varepsilon_\alpha (u_\alpha^+)^q w$ en casi toda parte, pero debido a que $\varphi_j \to u_\alpha$ en casi todas partes, se obtiene que $u_\alpha^{p_n-1} w = \langle \nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w - \varepsilon_\alpha (u_\alpha^+)^q w$ en casi todas partes y por tanto

$$\int_M (\langle \nabla u_\alpha, \nabla w\rangle + h_\alpha u_\alpha w)\, dv_g = \int_M u_\alpha^{p_n-1} w + \varepsilon_\alpha \int_M (u_\alpha^+)^q w dv_g$$

lo que se traduce en que la función u_α es solución débil de la siguiente ecuación.

$$\triangle_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = (u_\alpha^+)^{p_n-1} + \varepsilon_\alpha (u_\alpha^+)^q.$$

Gracias a los resultados de regularidad de (Trudinger, 1968) y (Gilbarg y Trudinger, 1977) se tiene que u_α es diferenciable y gracias al principio del máximo se concluye que $u_\alpha \equiv 0$ ó $u_\alpha > 0$ en todas partes. Por otro lado. Nomalizando a una subsucesión φ_j podemos asumir que $||\nabla \varphi_j||_2^2 \to \theta$ cuando $j \to \infty$. Supongamos que $u_\alpha \equiv 0$. Multiplicando a (3.6) por 2 e igualando con (3.7) se sigue

$$\frac{2}{p_n}\int_M (\varphi_j^+)^{p_n} dv_g + \frac{2\varepsilon_\alpha}{q+1}\int_M (\varphi_j^+)^{q+1} dv_g + 2c_\alpha + o(1) = \int_M (\varphi_j^+)^{p_n} dv_g + \varepsilon_\alpha \int_M (\varphi_j^+)^{q+1} dv_g + ||\varphi_j||_{H_1^2} o(1)$$

Se sigue que

$$\frac{2}{n}\int_M (\varphi_j^+)^{p_n} dv_g = \left(\frac{2\varepsilon_\alpha}{q+1} - \varepsilon_\alpha\right)\int_M (\varphi_j^+)^{q+1} dv_g = 2c_\alpha + o(1) - ||\varphi_j||_{H_1^2} o(1)$$

de esto llegamos que

$$||\varphi_j||_{p_n}^{p_n} = n\varepsilon_\alpha \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\int_M (\varphi_j^+)^{q+1} dv_g + nc_\alpha + o(1) - ||\varphi_j||_{H_1^2} o(1).$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$, y como $||\varphi_j||_{H_1^2} < C$ y $\varphi \to u_\alpha \equiv 0$ en $L^{q+1}(M)$ se tiene que $||\varphi_j||_{p_n}^{p_n} \to nc_\alpha$ lo que es aquivalente a $||\varphi_j||_{p_n} \to (nc_\alpha)^{\frac{1}{p_n}}$. Por otro lado de (3.7) se obtiene

$$\int_M |\nabla\varphi_j|^2 dv_g = -\int_M h_\alpha \varphi^2 dv_g + \int_M (\varphi_j^+)^{p_n} dv_g + \varepsilon_\alpha \int_M (\varphi_j^+)^{q+1} + ||\varphi_j||_{H_1^2} o(1).$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$ y teniendo en cuenta que $||\varphi_j||_{H_1^2} < C$ y $\varphi \to u_\alpha \equiv 0$ en $L^{q+1}(M)$ se concluye que $||\varphi_j||_{p_n}^{p_n} \to \theta$. Esto es $||\varphi_j||_{p_n} \to (\theta)^{\frac{1}{p_n}}$. Teniendo en cuenta estos dos resultados anteriores se tiene que $\theta = nc_\alpha$.

Ahora bien, por otro lado gracias a (Hebey y Vaugon, 1995) y (Hebey y Vaugon, 1996) existe $B > 0$ tal que

$$||\varphi_j^+||_{p_n}^2 \leq K_n^2 ||\nabla\varphi_j||_2^2 + B||\varphi_j^+||_2^2$$

Pasando al limite cuando $j \to \infty$ se obtiene $\theta^{\frac{2}{p_n}} \leq K_n^2\theta$, luego $\theta^{\frac{-2}{n}} \leq K_n^2$ y recordando que $\theta = nc_\alpha$, entonces $(nc_\alpha)^{\frac{-2}{n}} \leq K_n^2$, despejando, se tiene que $c_\alpha \geq \frac{1}{n}K_n^{-n}$ lo que contradice la escogencia de c_α. Por tanto $u_\alpha > 0$. Luego (u_α) es una sucesión de funciones diferenciables positivas que satisfacen

$$\triangle_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{p_n-1} + \varepsilon_\alpha u_\alpha^q \tag{3.11}$$

Más aún, como $||\varphi_j||_{H_1^2} \leq C$ y como $\varphi_j \to u_\alpha$ débilmente en $H_1^2(M)$, entonces $||u_\alpha||_{H_1^2} \leq C$. Luego, multiplicando (3.11) por u_α, integrando e igualando términos, queda que

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n}\right) \int_M u_\alpha^{p_n} dv_g + \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \int_M u_\alpha^q dv_g$$

y por tanto uniformemente acotado en α, esto debido a los encajes de sobolev y las desigualdades entre sus normas. De manera similar, multiplicando por φ (3.11) y calculando $DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi$ y despejando, se tiene que para todo $\varphi \in H_1^2(M)$

$$DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi = \varepsilon_\alpha \int_M u_\alpha^q \varphi dv_g$$

ahora bien, debido a que $q < p_n - 1$, y utilizando desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi \leq \varepsilon_\alpha \left(\int_M u_\alpha^{p_n \frac{q}{p_n-1}} dv_g\right)^{\frac{p_n-1}{p_n}} \left(\int_M \varphi^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Por los encajes de Sobolev y las desigualdades entre sus normas, tenemos que

$$DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi \leq C\varepsilon_\alpha ||\varphi||_{H_1^2}$$

donde $C > 0$ es independiente de α. En particular las condiciones de 3.1.3 se cumplen.

Esto prueba el teorema □

Una construcción más clásica de sucesiones de Palais–Smale involucra burbujas, como se define en el siguiente capítulo.

3.2. Soluciones fuertes de energía mínima

En esta sección asumiremos que, para cualquier α, el operador L_g^α es coercivo. Además se mostrará la existencia de soluciones fuertes de energía mínima. Dada $u \in H_1^2(M)$, se define la energía $E(u)$ de u por $E(u) = ||u||_{p_n}$. Si u es una solución fuerte de E_α, entonces se tiene que

$$I_g^\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_M (|\nabla u|^2 + h_\alpha u^2) dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u|^{p_n} dv_g =$$
$$\frac{1}{2}\int_M |u|^{p_n} dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u|^{p_n} dv_g = \frac{1}{n}\int_M |u|^{p_n} dv_g = \frac{1}{n}(E(u))^{p_n}.$$

Sea $\Lambda_{min} = K_n^{\frac{n-2}{2}}$ donde K_n es la mejor constante en la desigualdad de Sobolev en el caso euclideo $||\varphi||_{p_n} \leq K_n ||\nabla\varphi||_2, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Un resultado estandar es el siguiente.

Proposición 3.2.1. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$ y (h_α) una sucesión de funciones diferenciables sobre M. Si para cada α, $L_g^\alpha = \triangle_g + h_\alpha$ es coercivo y*

$$\inf_{u \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \int_M h_\alpha u^2 dv_g}{\left(\int_M |u|^{p_n} dv_g\right)^{2/p_n}} \leq \frac{1}{K_n^2}$$

entonces (E_α) posee una sucesión (u_α) de soluciones positivas diferenciables tales que para cada α, $E(u_\alpha) < \Lambda_{min}$

Demostración. Sea α fijo, y sea I el funcional definido sobre $H_1^2(M)$ por

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \int_M h_\alpha u^2 dv_g.$$

Sean tambien $\mathcal{H}$ un subconjunto de $H_1^2(M)$ definido por

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_1^2(M) | \int_M |u|^{p_n} dv_g = 1 \right\}$$

y

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} \{I(u)\}.$$

Como L_g^α es coercivo, entonces existe $C > 0$ tal que $||u||_{H_1^2} < C \int_M |\nabla u|^2 + h_\alpha u^2 dv_g$. De lo anterior se tiene que $\mu \geq 0$. Por definición, una sucesión es minimizante para μ si

1. $u_i \in \mathcal{H}$ para todo i y
2. $I(u_i) \to \mu$ siempre que $i \to \infty$.

Sea (u_i) una sucesión minimizante y suponga que $u_i's$ son nonegativas. Claramente, (u_i) es acotado en $H_1^2(M)$. Luego existen una subsucesión (u_i) y una función $u \in H_1^2(M)$ tales que $u_i \to u$ debimente en $H_1^2(M)$, $u_i \to u$ fuerte en $L^2(M)$ y $u_i \to u$ en casi toda parte cuando $i \to \infty$. En particular u es no negativa. Por otra parte de la convergencia débil, se tiene que

$$||\nabla u_i||_2^2 = ||\nabla (u_i - u)||_2^2 + ||\nabla u||_2^2 + o(1) \tag{3.12}$$

para todo i, donde $o(1) \to 0$ cuando $i \to \infty$. Se tiene por (Brézis y Lieb, 1983) que

$$||u_i||_{p_n}^{p_n} = ||u_i - u||_{p_n}^{p_n} + ||u||_{p_n}^{p_n} + o(1) \tag{3.13}$$

para todo i, donde $o(1) \to 0$ cuando $i \to \infty$. Además por (Hebey y Vaugon, 1995) y (Hebey y Vaugon, 1996) se tiene que existe $B > 0$ tal que para cualquier i se cumple que

$$||u_i - u||_{p_n}^2 \leq K_n^2 ||\nabla(u_i - u)||_2^2 + B||u_i - u||_2^2. \tag{3.14}$$

Como $u_i \in \mathcal{H}$, de (3.13) se obtiene que

$$1 - ||u||_{p_n}^{p_n} - o(1) = ||u_i - u||_{p_n}^{p_n};$$

además teniendo en cuenta (3.14) se sigue que

$$\left(1 - ||u||_{p_n}^{p_n} - o(1)\right)^{\frac{2}{p_n}} = ||u_i - u||_{p_n}^2 \leq K_n^2 ||\nabla(u_i - u)||_2^2 + B||u_i - u||_2^2.$$

Ahora bien, utilizando (3.12) y el hecho de que $u_i \to u$ en $L^2(M)$ de manera fuerte, se consigue lo siguiente

$$\left(1 - ||u||_{p_n}^{p_n}\right)^{\frac{2}{p_n}} \leq K_n^2 \left(||\nabla u_i||_2^2 - ||\nabla u||_2^2\right) + o(1). \tag{3.15}$$

Por otro lado, como $I(u_i) \to \mu$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
K_n^2(||\nabla u_i||_2^2 - ||\nabla u||_2^2) &= K_n^2 \left(\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g - \int_M |\nabla u|^2 dv_g \right) \\
&= K_n^2 \left(\int_M |\nabla u_i|^2 + h_\alpha u_i^2 dv_g - \int_M h_\alpha u_i^2 dv_g - \int_M |\nabla u|^2 + h_\alpha u^2 dv_g + \int_M h_\alpha u^2 dv_g \right) \\
&= K_n^2 I(u_i) - K_n^2 I(u) + o(1) \leq K_n^2 \mu - K_n^2 \mu ||u||_{p_n}^2 + o(1). \quad (3.16)
\end{aligned}
$$

De lo anterior, junto con (3.15) se concluye que

$$
\left(1 - ||u||_{p_n}^{p_n}\right)^{\frac{2}{p_n}} \leq K_n^2 \mu (1 - ||u||_{p_n}^2).
$$

Por hipótesis se sabe que $K_n^2 \mu < 1$ y note que $1 - ||u||_{p_n}^2 \leq (1 - ||u||_{p_n}^{p_n})^{\frac{2}{p_n}}$. Esto implica que $1 - ||u||_{p_n}^2 = 0$ y por ende $||u||_{p_n} = 1$. de esta manera, teniendo en cuenta (3.16) se tiene que $||\nabla u_i||_2 \to ||\nabla u||_2$, además, como $u_i \to u$ en $L^2(M)$ fuertemente, se concluye que $u_i \to u$ fuertemente en $H_1^2(M)$ cuando $i \to \infty$, en particular u es una función minimizante para μ. Luego $\mu > 0$ y u es solución no negativa para la ecuacuaión

$$
\triangle_g u + h_\alpha u = \mu u^{p_n - 1}.
$$

Por (Trudinger, 1968) y por el principio del máximo se concluye que u es positiva y diferenciable. Note que tomando $u_\alpha = \mu^{\frac{n-2}{4}} u$ es solución de (E_α) y u_α cumple con lo requerido, esto prueba la proposición. □

Sea S_g la curvatura escalar de g. Argumentos locales como los de (Aubin, 1976) dan a conocer que si $n \geq 4$ y si existe $x \in M$ tal que $h_\alpha(x) < \dfrac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$, entonces la desigualdad sobre el ínfimo de la proposición 3.13 se satisface. ESto es muy importante, ya que da ejemplos de funciones h_α en el cual (E_α) posee una sucesión de funciones u_α soluciones diferenciables tales que $E(u_\alpha) < \Lambda_{min}$

3.3. El caso de la esfera

Sea (S^n, h) la n-esfera unitaria con $n \geq 3$. sea S_h la curvatura escalar de h. Entonces S_h es constante y $S_h = n(n-1)$. Considere $h_\alpha = \dfrac{n-2}{4(n-1)S_h}$, de esta manera se tiene la ecuación

$$\triangle_h u + \frac{n(n-2)}{4} u = u^{p_n - 1}. \tag{3.17}$$

Las soluciones positivas de esta ecuación ya se conocen. Sea $x_0 \in S^n$ y r la distancia a x_0. Luego para cada $\beta > 1$,

$$u_\beta = \left(\frac{n(n-2)}{4} (\beta^2 - 1) \right)^{\frac{n-2}{4}} (\beta - cos(r))^{1 - \frac{n}{2}}$$

es solución de la ecuación anterior. Más aún, la energía de u_β es $E(u_\beta) = \Lambda_{min}$, ver (Hebey, 2000). Note que $u_\beta \to 0$ en $C^0_{Loc}(S^n \setminus \{x_0\})$ cuando $\beta \to 1$. Por otro lado $u_\beta(x_0) \to \infty$ cuando $\beta \to 1$. Esto es (u_β) tiene una singularidad en x_0 en otras palabras (explotan en x_0) cuando $\beta \to 1$. Sean x_β y μ_β dados por

$$u_\beta(x_\beta) = \max_{x \in S^n} u_\beta(x) = \mu_\beta^{1 - \frac{n}{2}}.$$

Entonces $x_\beta = x_0$ y

$$\mu_\beta = \sqrt{\frac{4(\beta-1)}{n(n-2)(\beta+1)}}.$$

En particular, $\mu_\beta \to 0$ siempre que $\beta \to 1$. Sea B_β la función dada por

$$B_\beta(x) = \left(\frac{\mu_\beta}{\mu_\beta^2 + \frac{d_h(x_\beta,x)^2}{n(n-2)}}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Se le conoce a B_β como la burbuja estandar con respecto a x_β y μ_β. Por la continuidad de u_β y de B_β junto con la compacidad de M es fácil ver que existe $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C} B_\beta(x) \le u_\beta(x) \le C B_\beta(x) \tag{3.18}$$

para todo $x \in S^n$ y para todo $\beta > 1$ muy cercano a 1. De la misma manera, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{1+\varepsilon} B_\beta(x) \le u_\beta(x) \le (1+\varepsilon) B_\beta(x) \tag{3.19}$$

para todo $x \in B_{x_0}(\delta_\varepsilon)$ cuando $B > 1$ muy cercano a 1. Sea R_β la función dada por

$$u_\beta = B_\beta + R_\beta.$$

Afirmación 3.3.1. *$R_\beta \to 0$ en $H_1^2(S^n)$ siempre que $\beta \to 1$*

Note que $\int_{S^n} B_\beta^2 dv_h \to 0$ cuando $beta \to 1$. De (3.18) se tiene que $u_\beta \to 0$ en $L^2(S^n)$ cuando $\beta \to 1$, luego $R_\beta \to 0$ en $L^2(S^n)$ cuando $\beta \to 1$. Por otro lado se conoce de (Hebey, 2000) que

$$\int_{S_n} |\nabla B_\beta|^2 dv_h \to \Lambda_{min}^{p_n} \text{ y } \int_{S^n} B_\beta^{p_n} dv_h \to \Lambda_{min}^{p_n} \tag{3.20}$$

cuando $\beta \to 1$. Más aún, como u_β es solución de la ecuación (3.17), entonces se tiene que

$$\int_{S^n} |\nabla u_\beta|^2 dv_h + \int_{S^n} \frac{n(n-2)}{4} u_\beta^2 dv_h = \int_{S^n} u_\beta^{p_n} dv_h.$$

además, como $E(u_\beta) = \Lambda_{min}$ y $u_\beta \to 0$ en $L^2(S^n)$ y tomando límite cuando $\beta \to 1$ a la ecuación anterior, queda que

$$\int_{S^n} |\nabla u_\beta|^2 dv_h \to \Lambda_{min}^{p_n} \tag{3.21}$$

cuando $\beta \to 1$. Ahora bien, como $R_\beta = u_\beta - B_\beta$, entonces tenemos que

$$|\nabla R_\beta|^2 = \langle \nabla R_\beta, \nabla R_\beta \rangle = \langle \nabla u_\beta - \nabla B_\beta, \nabla u_\beta - \nabla B_\beta \rangle = |\nabla u_\beta|^2 - 2\langle \nabla u_\beta, \nabla B_\beta \rangle + |\nabla B_\beta|^2. \tag{3.22}$$

Integrando lo anterior y por (3.20) junto con (3.21), se tiene que

$$\int_{S^n} |\nabla R_\beta|^2 dv_h = 2\Lambda_{min}^{p_n} - 2\int_{S^n} \langle \nabla u_\beta, \nabla B_\beta \rangle dv_h + o(1)$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\beta \to 1$. Como u_β cumple (3.17) y como $u_\beta B_\beta \leq \dfrac{u_\beta^2 + B_\beta^2}{2}$, $u_\beta \to 0$

y $B_\beta \to 0$ en $L^2(S^n)$, entonces

$$\int_{S^n} \langle \nabla u_\beta, \nabla B_\beta \rangle dv_h = \int_{S^n} u_\beta^{p_n - 1} B_\beta dv_h + o(1).$$

Dado $\delta > 0$, $u_\beta \to 0$ y $B_\beta \to 0$ en $C^0_{LOC}(S^n \setminus B_{x_0}(\delta))$ cuando $\beta \to 1$. Reescribiendo, tenemos que

$$\int_{S^n} u_\beta^{p_n - 1} B\beta dv_h = \int_{B_{x_0}(\delta)} u_\beta^{p_n - 1} B\beta dv_h + \int_{S^n \setminus B_{x_0}(\delta)} u_\beta^{p_n - 1} B\beta dv_h$$

y junto con 3.19, se sigue que

$$\int_{S^n} u_\beta^{p_n - 1} B_\beta dv_h = \Lambda_{min}^{p_n} + o(1).$$

Así

$$\int_{S^n} \langle \nabla u_\beta, \nabla B_\beta \rangle dv_h = \Lambda_{min}^{p_n} + o(1),$$

y retornando a 3.22, se obtiene que

$$\int_{S^n} |\nabla R_\beta|^2 dv_h \to 0$$

cuando $\beta \to 1$. En particular se tiene que $R_\beta \to 0$ en $H_1^2(S^n)$ cuando $\beta \to 1$. De esta manera queda demostrada la afirmación.

4. Teoría Blow-up en espacios de Sobolev

Un resultado muy importante de 1980 con respecto de las sucesiones de Palais-Smale asociadas a la ecuación

$$\triangle u = u^{p_n-1} \qquad (E) \tag{4.1}$$

donde $\triangle$ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$, u se anula en la frontera de un subconjunto abierto suave acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ fue mostrado en (Struwe, 1984).

Sea $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev homogeneo definido como la completación de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones diferenciables con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, con respecto a la norma

$$||u||_{D_1^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx}.$$

Soluciones no negativas en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ de (4.1) fueron clasificadas en (Caffarelli, Gidas, y Spruck, 1989). Donde se dice que si $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ y u es una solución no negativa y no trival de (4.1), entonces $u = u_a^\lambda$ para algún $a \in \mathbb{R}^n$ y algún $\lambda > 0$, donde

$$u_a^\lambda = \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda^2}{n(n-2)}|x-a|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

. Estas funciones dan la igualdad en la desigualdad euclidiana de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} dx \right)^{\frac{2}{p_n}} \leq K_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \tag{4.2}$$

Estas funciones salvo multiplicaciones por constantes no nulas, son las únicas funciones extremas para (4.2). Su energía es precisamente la energía mínima en el sentido de que $E(u_a^\lambda) = ||u_a^\lambda||_{p_n} = \Lambda_{min}$. Por otro lado la energía libre, E_f, definida para $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$E_f(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p_n}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} dx. \tag{4.3}$$

Note que si $u = u_a^\lambda$, y como u_a^λ es una función solución para (E), (ver 4.1) y es función extrema para (4.2), entonces $E_f(u) = \dfrac{1}{n}K_n^{-n}$

En este capítulo presentamos una prueba como la de (Struwe, 1984) para variedades Riemannianas compactas y ecuaciones como (E_α) consideradas en el capítulo anterior. Para este capítulo, se supondrá que las funciones h_α's son acotadas uniformemente y que ellas convergen en L^2 a alguna función limite.

4.1. La descomposición en H_1^2 para sucesiones de Palais-Smale.

Dada (M, g) una variedad Riemanniana diferencial compacta, de dimensión $n \geq 3$, sea (h_α) una sucesión de funciones diferenciales sobre M. Supongamos que existe $C > 0$ y una función diferenciable (o solamente continua) h_∞ sobre M tal que lo que sigue se cumpla:

$$\text{para cada } \alpha \text{ y para todo } x, |h_\alpha(x)| < C \text{ y } h_\alpha \to h_\infty \text{ en } L^2(M) \text{ cuando } \alpha \to \infty. \tag{4.4}$$

Claramente de la primer condición de (4.4) se tiene que para cada $p \geq 1$ $h_\alpha \to h_\infty$

en $L^p(M)$ cuando $\alpha \to \infty$. Sea (u_α) una sucesión de Palais-Smale de funciones no-negativas para (E_α). Sea

$$I_g^\infty(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{1}{2}\int_M h_\infty u^2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u|^{p_n} dv_g$$

y (E_∞) la ecuación

$$\triangle_g u + h_\infty u = u^{p_n - 1}$$

donde h_∞ es la función límite de (h_α). En esta sección, se tendrá en cuenta lo siguiente, para $\delta > 0$, η_δ denotará la función diferencial de corte en $\mathbb{R}^n$ tal que $\eta_\delta = 1$ en $B_0(\delta)$ y $\eta_\delta = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_0(2\delta)$. Para $x \in M$ y $\delta < i_g/2$, donde i_g es el radio de inyectividad, $\eta_{\delta,x}(y)$ es la funcion diferenciable de corte en M dada por

$$\eta_{\delta,x}(y) = \eta_\delta(exp_x^{-1}(y))$$

donde exp_x es la función exponencial en el punto x.

Dada una sucesión convergente (x_α) en M, y una sucesión R_α de números positivos tales que $R_\alpha \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$, se define una burbuja B_α como se sigue:

$$B_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u_a^\lambda(R_\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(x))$$

donde $\eta_\alpha = \eta_{\delta,x_\alpha}, \delta < \frac{i_g}{2}$ y u_a^λ es una solución no negativa no trivial de 4.1. En conclusión, en esta sección se mostrará que si (u_α) es una sucesión de Palais-Smale para (E_α), entonces, en H_1^2, se tiene que

$$u_\alpha = \text{ solución de la ecuación límite } + \text{ suma de burbujas}$$

con la propiedad adicional de que las energías tambien se dividen. Más precisamente el resultado es el siguiente:

Teorema 4.1.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana diferencial y compacta de dimensión $n \geq 3, (h_\alpha)$ una sucesión de funciones diferenciables sobre M tal que la condición (4.4) se satisface y (u_α) una sucesión de Palais-Smale de funciones no negativas para (E_α). Entonces existe $m \in \mathbb{N}$, sucesiones $(R_\alpha^j), R_\alpha^j > 0$ y $R_\alpha^j \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$, una sucesión convergente $(x_\alpha^j) \subset M$, una solución no negativa $u^0 \in H_1^2(M)$ de (E_∞), y una solución no negativa y no trivial $u^j = u_{a_j}^{\lambda_j} \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ de (4.1), con $j = 1, \ldots, m$ tal que, por subsucesiones,*

$$u_\alpha = u^0 + \sum_{j=1}^{m} \eta_\alpha^j u_\alpha^j + o(1)$$

donde

$$u_\alpha^j(x) = (R_\alpha^j)^{\frac{n-2}{2}} u^j(R_\alpha^j exp_{x_\alpha^j}^{-1}(x)),$$

$\eta_\alpha^j = \eta_{\delta, x_\alpha^j}, \delta < \frac{i_g}{2}$, y $||o(1)||_{H_1^2} \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$. Más aún,

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = I_g^\infty(u^0) + \frac{m}{n} K_n^{-n} + o(1)$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$.

Demostración. La prueba del Teorema4.1.1 procede en varios pasos. Esta se sigue de la prueba de (Struwe, 1984).

Paso 1 Sea (u_α) una sucesión de Palais-Smale para (E_α), entonces (u_α) está acotada en $H_1^2(M)$.

Demostración. Sea (u_α) una sucesión de Palais-Smale para (E_α). Entonces por la definición (3.1.3) se tiene que $DI_g^\alpha(u_\alpha)\dfrac{u_\alpha}{||u_\alpha||_{H_1^2}} \to 0$, es decir

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^2 dv_g + \int_M h_\alpha u_\alpha^2 dv_g - \int_M |u_\alpha|^{p_n} = o(||u_\alpha||_{H_1^2}),$$

luego multiplicando por $\frac{1}{2}$ y restando a ambos lados $\dfrac{1}{p_n}\int_M |u_\alpha|^{p_n} dv_g$ y despejando de la igualdad anterior, se tiene que

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = \frac{1}{n}\int_M |u_\alpha|^{p_n} dv_g + o(||u_\alpha||_{H_1^2})$$

y nuevamente por la definición (3.1.3), se tiene que $I_g^\alpha(u_\alpha) \leq C$, para algún $C > 0$ independiente del α, así

$$\int_M |u_\alpha|^{p_n} dv_g \leq C + o(||u_\alpha||_{H_1^2}).$$

Realizando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int_M u_\alpha^2 dv_g \leq \left(\int_M 1^k dv_g\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_M u^{2\frac{p_n}{2}} dv_g\right)^{\frac{2}{p_n}} = Vol(M)^{\frac{1}{k}} \left(\int_M u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{2}{p_n}} = C_1 + o(||u_\alpha||_{H_!^2}^{\frac{2}{p_n}})$$

donde C_1 es independiente de α. Note que

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^2 dv_g + \int_M h_\alpha u_\alpha^2 dv_g = 2I_g^\alpha(u_\alpha) + \frac{2}{p_n}\int_M |u_\alpha|^{p_n},$$

de esta manera se obtiene que

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^2 dv_g + \int_M h_\alpha u_\alpha^2 dv_g \leq C_2 + o(||u_\alpha||_{H_1^2}).$$

Por otra parte, es claro que

$$||u_\alpha||_{H_1^2}^2 = (||u_\alpha||_2 + ||\nabla u_\alpha||_2)^2 \leq ||u_\alpha||_2^2 + ||\nabla u_\alpha||_2^2 = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \int_M u^2 dv_g,$$

y gracias a (4.4) junto con una cota uniforme tal que $h_\alpha + C_0 > 1$ se concluye que

$$||u_\alpha||_{H_1^2}^2 \leq \int_M (|\nabla u|^2 + h_\alpha u^2) dv_g + C_0 ||u_\alpha||_2^2.$$

Ahora bien, tomando las estimaciones anteriores, se obtiene la siguiente desigualdad

$$||u_\alpha||_{H_1^2}^2 \leq C + o(||u_\alpha||_{H_1^2}) + o(||u_\alpha||_{H_1^2}^{\frac{2}{p_n}}).$$

Esto claramente implica que (u_α) es acotado en $H_1^2(M)$. Por tanto la afirmación (4.1) está demostrada.

□

Antes de empezar el paso 2 se define I_g el funcional definido en $H_1^2(M)$ dado por

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \frac{1}{p_n} \int_M |u|^{p_n} dv_g,$$

esto es que $I_g = I_g^\alpha$ cuando $h_\alpha \equiv 0$

Paso 2 Sea (u_α) una sucesión de Palais-Smale de funciones no negativas para (E_α) y $u^0 \in H_1^2(M)$ una función no negativa tal que $u_\alpha \to u^0$ débilmente en $H_1^2(M)$,$u_\alpha \to u^0$ fuertemente en $L^2(M)$, y $u_\alpha \to u^0$ en casi toda parte cuando $\alpha \to \infty$. Sea $\hat{u}_\alpha = u_\alpha - u^0$. Entonces $(\hat{u}_\alpha)$ es una sucesión de Palais-Smale para (4.1) y además se tiene que

$$I_g(\hat{u}_\alpha) = I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1)$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$. Más aún u^0 es solución de (E_∞).

Demostración. Primero observe que para cualquier $\varphi \in C^\infty(M)$

$$DI_g^\alpha(u_\alpha)\varphi = \int_M \langle \nabla u_\alpha, \nabla \varphi \rangle dv_g + \int_M h_\alpha u_\alpha \varphi dv_g - \int_M u_\alpha^{p_n-1} \varphi dv_g = o(1) \tag{4.5}$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$ y $\langle \nabla u_\alpha, \nabla \varphi \rangle$ es el producto escalar con respecto a g de ∇u_α y $\nabla \varphi$. Por (4.4), $h_\alpha \to h_\infty$ en $L^p(M)$ para cualquier $p \geq 1$ cuando $\alpha \to \infty$. Realizando el mismo análisis de (3.8),(3.9) y (3.10), entonces pasando al límite (4.5) y despejando se tiene que

$$\int_M \langle \nabla u^0, \nabla \varphi \rangle dv_g + \int_M h_\infty u^0 \varphi dv_g = \int_M (u^0)^{p_m-1} \varphi dv_g.$$

Así , u^0 es solución de (E_∞).Ahora se analiza la energía de $\hat{u}_\alpha$, reescribiendo se tiene

$$\int_M h_\alpha u_\alpha \varphi dv_g = \int_M (h_\alpha - h_\infty) u_\alpha \varphi dv_g + \int_M h_\infty u_\alpha \varphi dv_g. \tag{4.6}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de valor absoluto de las integrales tenemos que

$$\left|\int_M (h_\alpha - h_\infty)u_\alpha \varphi dv_g\right| \leq \left(\int_M |(h_\alpha - h_\infty)u_\alpha|^{\frac{2n}{n+2}} dv_g\right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_M |\varphi|^{p_n} dv_g\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Realizando nuevamente la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\leq \left(\left(\int_M (h_\alpha - h_\infty)^{\frac{2n}{n+2}\cdot\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{2}{n+2}} \left(\int_M u_\alpha^{\frac{2n}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n}}\right)^{\frac{n}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_M |\varphi|^{p_n} dv_g\right)^{\frac{1}{p_n}}$$

quedando así lo siguiente.

$$\left|\int_M (h_\alpha - h_\infty)u_\alpha \varphi dv_g\right| \leq ||u_\alpha||_2 ||h_\alpha - h_\infty||_n ||\varphi||_{p_n}. \tag{4.7}$$

Por el paso 1, se tiene que u_α es acotada en $H_1^2(M)$ para todo α. Del encaje de Sobolev, junto con (4.6) y (4.7) con $\varphi = u_\alpha$, se tiene

$$\int_M h_\alpha u_\alpha^2 dv_g = \int_M h_\infty (u^0)2 dv_g + o(1).$$

Sumando a cada lado

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla u_\alpha|^2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u_\alpha|^{p_n} dv_g$$

se tiene

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u_\alpha|^2 dv_g + \int_M h_\infty (u^0)2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |u_\alpha|^{p_n} dv_g + o(1).$$

Ahora sumando y restando los terminos

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla u^0|^2 dv_g,\ \frac{1}{p_n}\int_M |u^0|^{p_n} dv_g,\ \frac{1}{2}\int_M |\nabla(u_\alpha - u^0)|^2 dv_g \text{ y } \frac{1}{p_n}\int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n} dv_g,$$

agrupando adecuadamente, teniendo en cuenta que $u_\alpha = \hat{u}_\alpha + u^0$ y la convergencia débil, se obtiene

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = I_g^\infty(u^0) + I_g(\hat{u}_\alpha) - \frac{1}{p_n}\int_M \left(|\hat{u}_\alpha + u^0|^{p_n} - |\hat{u}_\alpha|^{p_n} - |u^0|^{p_n}\right) dv_g + o(1).$$

Sea $\Phi_\alpha = |\hat{u}_\alpha + u^0|^{p_n} - |\hat{u}_\alpha|^{p_n} - |u^0|^{p_n}$. Claramente, existe $C > 0$, independiente de α, tal que

$$\int_M |\Phi_\alpha|\, dv_g \leq C\int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n-1}|u^0|\, dv_g + C\int_M |u^0|^{p_n-1}|\hat{u}_\alpha|\, dv_g,$$

mientras que la teoría básica de integración da que

$$\int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n-1}|u^0|\, dv_g = o(1) \quad \text{y} \quad \int_M |u^0|^{p_n-1}|\hat{u}_\alpha|\, dv_g = o(1).$$

Por lo tanto, $\int_M \Phi_\alpha\, dv_g = o(1)$. Se sigue que

$$I_g(\hat{u}_\alpha) = I_g^\alpha(\hat{u}_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1).$$

Ahora, queda probar en el paso 2 que $(\hat{u}_\alpha)$ es una secuencia de Palais–Smale para I_g. Sea $\varphi \in C^\infty(M)$. A partir de (4.6), (4.7) y el teorema de encaje de Sobolev,

$$\int_M h_\alpha u_\alpha \varphi \, dv_g = \int_M h_\infty u^0 \varphi \, dv_g + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right).$$

Luego, haciendo un proceso análogo al anterior, sumando y restando términos adecuados y agrupando se tiene que

$$DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi = DI_g(\hat{u}_\alpha) \cdot \varphi - \int_M \Psi_\alpha \varphi \, dv_g + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right),$$

donde $\Psi_\alpha = |\hat{u}_\alpha + u^0|^{p_n-2}(\hat{u}_\alpha + u^0) - |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2}\hat{u}_\alpha - |u^0|^{p_n-2}u^0$. Nuevamente, es fácil comprobar que existe $C > 0$, independiente de α, tal que

$$\int_M |\Psi_\alpha \varphi| \, dv_g \leq C \int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2}|u^0||\varphi| \, dv_g + C \int_M |u^0|^{p_n-2}|\hat{u}_\alpha||\varphi| \, dv_g.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, así como en los casos anteriores,se sigue que

$$\int_M |\Psi_\alpha \varphi| dv_g \leq C \left(\left\| |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2} u^0 \right\|_{L^{p_n/(p_n-1)}} + \left\| |\hat{u}^0|^{p_n-2} \hat{u}_\alpha \right\|_{L^{p_n/(p_n-1)}} \right) \|\varphi\|_{L^{p_n}}$$

Por teoría básica de integración, se concluye que

$$\left\| |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2} u^0 \right\|_{L^{p_n/(p_n-1)}} = o(1) \quad \text{y} \quad \left\| |\hat{u}^0|^{p_n-2} \hat{u}_\alpha \right\|_{L^{p_n/(p_n-1)}} = o(1).$$

Así se obtiene

$$DI_g^\alpha(u_\alpha) \cdot \varphi = DI_g(\hat{u}_\alpha) \cdot \varphi + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right).$$

Finalizando con esto la demostración del paso 2.

□

Un tercer paso para la prueba es el siguiente. Sea $\beta^\star = \frac{1}{n}K_n^{-n}$ el valor de la energía libre E_f cuando consideramos las funciones u_a^λ.

Paso 3. Sea $(\hat{u}_\alpha)$ una Sucesión de Palais-Smale para (4.1) tal que $\hat{u}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$ cuando $\alpha \to \infty$ y $I_g(\hat{u}_\alpha) \to \beta$ cuando $\alpha \to \infty$, donde $\beta < \beta^\star$. Entonces $\hat{u}_\alpha \to 0$ fuertemente en $H_1^2(M)$.

Demostración. Por el paso 1, la sucesión $(\hat{u}_\alpha)$ es acotada en $H_1^2(M)$. Independientemente,

$$DI_g(\hat{u}_\alpha)\hat{u}_\alpha = \int_M |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g - \int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n} dv_g = o(||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2}).$$

Así, multiplicando por las constantes necesarias y sumando términos adecuados podemos ver que

$$I_g(\hat{u}_\alpha) = \frac{1}{n}||\hat{u}_\alpha||_{p_n}^{p_n} + o(||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2}) = \frac{1}{n}||\nabla \hat{u}_\alpha||_2^2 + o(||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2}) = \beta + o(||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2}).$$

Como $||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2} \leq C$, para algún $C > 0$, entonces $o(||\hat{u}_\alpha||_{H_1^2}) = o(1)$. Es decir

$$I_g(\hat{u}_\alpha) = \frac{1}{n}||\hat{u}_\alpha||_{p_n}^{p_n} + o(1) = \frac{1}{n}||\nabla \hat{u}_\alpha||_2^2 + o(1) = \beta + o(1). \tag{4.8}$$

Esto implica directamente que $\beta \geq 0$.

Por (Hebey y Vaugon, 1995) y (Hebey y Vaugon, 1996), existe $B > 0$ independiente de α tal que

$$||\hat{u}_\alpha||_{p_n}^2 \leq K_n^2 ||\nabla \hat{u}_\alpha||_2^2 + B||\hat{u}_\alpha||_2^2.$$

Más aún, como el encaje $H_1^2(M) \subset L^2(M)$ es compacto , entonces $\hat{u}_\alpha \to 0$ fuertemente en $L^2(M)$ cuando $\alpha \to \infty$. Tomando límite cuando $\alpha \to \infty$ la desigualdad de Sobolev y de (4.8) se tiene que

$$(n\beta)^{\frac{2}{p_n}} \leq K_n^2 n\beta.$$

Como $\beta < \beta^\star$, entonces $\beta = 0$. Por (4.8), se tiene que $\hat{u}_\alpha \to$ fuertemente en $H_1^2(M)$. Esto prueba el paso 3. □

Se sigue de los pasos $1-3$ que si (u_α) es una sucesión de Palais-Smale para (E_α), y $I_g^\alpha(u_\alpha) \to \beta$ cuando $\alpha \to \infty$, donde $\beta < \beta^\star$, entonces existe una subsucesión (u_α) que converge fuertemente a u^0 en $H_1^2(M)$. En otras palabras, la compacidad se mantiene para las sucesiones de Palais-Smale cuando la energía está por debajo de la energía mínima. Otra ilustración de este hecho está dado por la Proposición 3.13.

Paso 4 Sea $(\hat{u}_\alpha)$ una sucesión de Palais-Smale para I_g tal que $\hat{u}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$ pero no fuertemente. Entonces, existen una sucesión (R_α) de números reales positivos, $R_\alpha \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$, una sucesión convergente (x_α) en M y una solución no trivial $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación euclidiana

$$\Delta u = |u|^{p_n - 2} u \tag{4.9}$$

tal que, por subsucesiones, se cumple lo siguiente: si

$$\hat{v}_\alpha = \hat{u}_\alpha - \eta_\alpha B_\alpha$$

donde

$$B_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)$$

y $\eta_\alpha = \eta_{\delta, x_\alpha}$, con $\delta < i_g/2$, entonces $(\hat{v}_\alpha)$ es también una sucesión de Palais-Smale para I_g, $\hat{v}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$ cuando $\alpha \to \infty$, y

$$I_g(\hat{v}_\alpha) = I_g(\hat{u}_\alpha) - E_f(u) + o(1),$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$.

Demostración. Por subsucesiones, podemos asumir que $I_g(\hat{u}_\alpha) \to \beta$ cuando $\alpha \to \infty$. Ya que $\hat{u}_\alpha$ es de Palais - Smale. También podemos asumir que $\hat{u}_\alpha$ es suave, ya que si no, siempre existe $\bar{u}_\alpha$ diferenciable tal que $\|\bar{u}_\alpha - \hat{u}_\alpha\|_{H_1^2} \to 0$. Entonces, $(\bar{u}_\alpha)$ es una sucesión de Palais–Smale para I_g tal que $\bar{u}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$ pero no fuertemente, y, como se verifica fácilmente, si la afirmación es válida para $(\bar{u}_\alpha)$, entonces también lo es para $(\hat{u}_\alpha)$. Dado que $DI_g(\hat{u}_\alpha) \to 0$, obtenemos, como en el paso 3 de la sección 3.1, que

$$\int_M |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dvg = n\beta + o(1) \tag{4.10}$$

y que $n\beta \geq K_n^{-n}$. Para $t > 0$, se define

$$\mu_\alpha(t) = \max_{x \in M} \int_{B_x(t)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dvg.$$

Dado $t_0 > 0$ pequeño, se deduce de (4.10) que existen $x_0 \in M$ y $\lambda_0 > 0$ tales que, por subsucesiones se tiene

$$\int_{B_{x_0}(t_0)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dvg \geq \lambda_0$$

para todo α. Luego, dado que $t \mapsto \mu_\alpha(t)$ es continuo, obtenemos que para cualquier $\lambda \in (0, \lambda_0)$, existe $t_\alpha \in (0, t_0)$ tal que $\mu_\alpha(t_\alpha) = \lambda$. Claramente, también existe $x_\alpha \in M$ tal que

$$\mu_\alpha(t_\alpha) = \int_{B_{x_\alpha}(t_\alpha)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dvg.$$

Por subsucesion, (x_α) converge. Sea $r_0 \in (0, i_g/2)$ tal que para todo $x \in M$ y para todo $y, z \in \mathbb{R}^n$, si $|y| \leq r_0$ y $|z| \leq r_0$, entonces

$$d_g(\exp_x(y), \exp_x(z)) \leq C_0 |z - y|.$$

Para algún $C_0 \in [1, 2]$ independiente de x, y, y z. Dado $R_\alpha \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| < i_g R_\alpha$, definimos

$$\tilde{u}_\alpha(x) = R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \hat{u}_\alpha(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1} x)), \quad \tilde{g}_\alpha(x) = (\exp_{x_\alpha}^* g)(R_\alpha^{-1} x).$$

Entonces,

$$|\nabla \tilde{u}_\alpha|^2(x) = \left\langle \nabla \left[R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \hat{u}_\alpha(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1} x)) \right], \nabla \left[R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \hat{u}_\alpha(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1} x)) \right] \right\rangle$$

$$= \left\langle R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \nabla \hat{u}_\alpha(exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)) \cdot R_\alpha^{-1}, R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \nabla \hat{u}_\alpha(exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)) \cdot R_\alpha^{-1} \right\rangle,$$

operando y agrupando términos, se consigue lo que sigue

$$R_\alpha^n |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2(x) = |\nabla \hat{u}_\alpha|^2(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)),$$

donde la norma en el lado izquierdo de esta ecuación es con respecto a $\tilde{g}_\alpha$ y la norma en el lado derecho es con respecto a g. Se deduce que, si $|z| + r < i_g R_\alpha$, entonces

$$\int_{B_r(z)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dvg_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{exp_{x_\alpha}(B_z(r))} R_\alpha^{-n} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2(exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)) dv_g,$$

y realizando el cambio de variable $y = R_\alpha^{-1}x$ se obtiene la siguiente igualdad

$$\int_{B_r(z)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dvg_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}B_z(r))} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dvg, \tag{4.11}$$

y note que

$$\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}B_z(r)) \subset B_{\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}z)}(C_0 r R_\alpha^{-1}). \tag{4.12}$$

Mientras que

$$\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}B_0(C_0 r)) = B_{x_\alpha}(C_0 r R_\alpha^{-1}). \tag{4.13}$$

Dado $r \in (0, r_0)$, fijamos t_α tal que $C_0 r t_\alpha \geq 1$. Entonces, para cualquier $\lambda \in (0, \lambda_0)$, fijado más adelante, definimos $R_\alpha \geq 1$ tal que $C_0 r R_\alpha^{-1} = t_\alpha$. Por (4.11) y (4.13), para cualquier

$z \in \mathbb{R}^n$ tal que $|z| < r_0 R_\alpha - r$,

$$\int_{B_r(z)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \lambda \quad \text{y} \quad \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} = \lambda. \tag{4.14}$$

Sea $\delta \in (0, i_g)$ y $C_1 > 1$ tal que, para cualquier $x \in M$, y cualquier $R \geq 1$, si $\tilde{g}_x, R(y) = \exp_x^* g(R^{-1}y)$ (Pullback de la métrica), entonces

$$\frac{1}{C_1}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dv_{\tilde{g}_{x,R}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \tag{4.15}$$

para todo $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ tal que supp $u \subset B_0(\delta R)$.

Sin pérdida de generalidad, también asumimos que

$$\frac{1}{C_1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dv_{\tilde{g}_{x,R}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx. \tag{4.16}$$

Para todo $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que supp $u \subset B_0(\delta R)$. Sea $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función de corte tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ en $B_0(1/4)$, y $\eta = 0$ en $\mathbb{R}^n \backslash B_0(3/4)$. Se define $\tilde{\eta}_\alpha(x) = \tilde{\eta}(\delta^{-1} R_\alpha^{-1} x)$, donde δ es como se definió anteriormente. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} = O(1),$$

y se deduce de (4.15) que la sucesión $(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha)$ está acotada en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$. En particular, hasta una subsucesión, existe $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u$ débilmente en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$. Ahora, se divide la prueba en 3 diferentes pasos.

Paso 4-1 Para r y λ suficientemente pequeños,

$$\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u \quad \text{fuertemente en } H_1^2(B_0(C_0 r)) \tag{4.17}$$

cuando $\alpha \to p\infty$.

Demostración. Demostración del paso 1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y para $\rho > 0$, sea h_ρ la métrica estándar en $\partial B_{x_0}(\rho)$. Por el lema de Fatou,

$$\int_r^{2r} \left(\liminf_{\alpha \to \infty} \int_{\partial B_{x_0}(\rho)} N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \; dv_{h_\rho} \right) d\rho \leq \liminf_{\alpha \to \infty} \int_{B_{x_0}(2r)} N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \, dx \leq C, \tag{4.18}$$

donde $N_h(u) = |\nabla u|^2 + u^2$, la norma en N_h es respecto a h, y ξ es la métrica euclidiana. Se sigue que existe $\rho \in [r, 2r]$ tal que, hasta una subsecuencia, y para todo α,

$$\int_{\partial B_{x_0}(\rho)} N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \, dv_{h_\rho} \leq C. \tag{4.19}$$

Como consecuencia inmediata, obtenemos que

$$\|\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha\|_{H_1^2(\partial B_{x_0}(\rho))} \leq C, \tag{4.20}$$

donde $C > 0$ es independiente de α. El encaje

$$H_1^2(\partial B_{x_0}(\rho)) \subset H_{1/2}^2(\partial B_{x_0}(\rho)) \tag{4.21}$$

es compacta, y el operador traza $u \to u|_{\partial B}$ es continuo. Se sigue que, por subsucesión,

$$\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u \quad \text{en } H^2_{1/2}(\partial B_{x_0}(\rho)) \text{ cuando } \alpha \to \infty. \tag{4.22}$$

Sea A el anillo $A = B_{x_0}(3r) \backslash B_{x_0}(\rho)$. Sea además $\varphi_\alpha \in D^2_1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\alpha = \tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha - u$ en $B_{x_0}(\rho + \varepsilon)$, y $\varphi_\alpha = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{x_0}(3r - \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ pequeño. Entonces,

$$\|\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha - u\|_{H^2_{1/2}(\partial B_{x_0}(\rho))} = \|\varphi_\alpha\|_{H^2_{1/2}(\partial B_{x_0}(\rho))}. \tag{4.23}$$

Mientras que existe $\varphi^0_\alpha \in D^2_1(A)$, la clausura de $C^\infty_0(A)$ en $H^2_1(A)$, tal que

$$\|\varphi_\alpha + \varphi^0_\alpha\|_{H^2_1(A)} \leq C \|\varphi_\alpha\|_{H^2_{1/2}(\partial A)}. \tag{4.24}$$

Por (Gilbarg y Trudinger, 1977, Cap 2), existe $z_\alpha \in H^2_1(A)$ tal que

$$\Delta z_\alpha = 0 \quad \text{en } A, \tag{4.25}$$

$$z_\alpha - \varphi_\alpha - \varphi^0_\alpha \in D^2_1(A), \tag{4.26}$$

y

$$\|z_\alpha\|_{H^2_1(A)} \leq C \|\varphi_\alpha + \varphi^0_\alpha\|_{H^2_1(A)}. \tag{4.27}$$

Por lo tanto, $z_\alpha \to 0$ fuertemente en $H^2_1(\mathcal{A})$ cuando $\alpha \to \infty$. Sea $\psi_\alpha \in D^2_1(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\psi_\alpha = \tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha - u \quad \text{en } \overline{B}_{x_0}(\rho),$$

$$\psi_\alpha = z_\alpha \quad \text{en } \overline{B}_{x_0}(3r) \setminus B_{x_0}(\rho),$$

y $\psi_\alpha = 0$ en otro caso. Sea $r > 0$ tal que $r < \text{mín}(i_g/6, \delta/24)$, y sea $\tilde{\psi}_\alpha$ tal que

$$\tilde{\psi}_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \psi_\alpha \left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x) \right)$$

si $d_g(x_\alpha, x) < 6r$, y $\tilde{\psi}_\alpha = 0$ en otro caso. Claramente, $\tilde{\eta}\left(\delta^{-1} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right) = 1$ si $d_g(x_\alpha, x) < 6r$. Si además $|x_0| < 3r$, entonces:

$$DI_g(\hat{u}_\alpha) \cdot \hat{\psi}_\alpha = DI_g(\hat{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \cdot \tilde{\psi}_\alpha = \int_{B_{x_0}(3r)} (\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \nabla \psi_\alpha)\, dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{B_{x_0}(3r)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{p_n - 2} (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \psi_\alpha \, dv_{\tilde{g}_\alpha}$$

donde $\hat{\eta}_\alpha(x) = \tilde{\eta}\left(\delta^{-1} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)$. Tenemos que $\|\tilde{\psi}_\alpha\|_{H_1^2(M)} \leq C \|\psi_\alpha\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}$. En particular, los $\tilde{\psi}_\alpha$ están acotados en $H_1^2(M)$. Se sigue que $DI_g(\hat{u}_\alpha) \cdot \tilde{\psi}_\alpha = o(1)$. Note que $\psi_\alpha \to 0$ fuertemente en $H_1^2(\mathcal{A})$, y $\psi_\alpha \to 0$ débilmente en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\int_{B_{x_0}(3r)} (\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \nabla \psi_\alpha)\, dv_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{B_{x_0}(\rho)} (\nabla(\psi_\alpha + u) \nabla \psi_\alpha)\, dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).$$

Análogamente, se obtiene fácilmente que:

$$\int_{B_{x_0}(3r)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{p_n - 2} (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \psi_\alpha \, dv_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p_n} \, dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1),$$

y como $DI_g(\hat{u}_\alpha) \cdot \tilde{\psi}_\alpha = o(1)$, se ha probado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p_n} dv_{\tilde{g}_\alpha} = o(1). \tag{4.28}$$

Por la convergencia fuerte $\psi_\alpha \to 0$ en $H_1^2(A)$ y la convergencia débil $\psi_\alpha \to 0$ en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha - u)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla u|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).$$

Sea N un entero tal que $B_0(2)$ esté cubierto por N bolas de radio 1 y centradas en $B_0(2)$. Entonces existen N puntos $x_i \in B_{x_0}(2r)$, $i = 1, \ldots, N$, tales que

$$B_{x_0}(\rho) \subset B_{x_0}(2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i}(r)$$

y obtenemos con (4.14) que para x_0 y r tales que $|x_0| + 3r < r_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq N\lambda + o(1). \tag{4.29}$$

Independientemente, por la desigualdad de Sobolev, para C_1 como en (4.15) y

(4.16), y x_0 y r tales que $|x_0| + 3r < \delta$, también tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p_n} dv_{\tilde{g}_\alpha}\right)^{2/p_n} &\leq C_1^{2/p_n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p_n} dx\right)^{2/p_n} \\ &\leq C_1^{2/p_n} K_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dx \\ &\leq C_1^{1+(2/p_n)} K_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha}.\end{aligned}$$

Siguiendo (4.28) y (4.29), podemos escribir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq K \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \tag{4.30}$$

donde

$$K = C_1^{1+(p_n/2)} K_n^{p_n} (N\lambda + o(1))^{(p_n/2)-1}.$$

Sea $\lambda > 0$ tal que $C_1^{1+(p_n/2)} K_n^{p_n} (N\lambda)^{(p_n/2)-1} < 1$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} = o(1)$$

de modo que $\psi_\alpha \to 0$ fuertemente en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $\alpha \to \infty$. Como $r \leq \rho$, se sigue que

$$\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u \text{ fuertemente en } H_1^2(B_{x_0}(r)) \tag{4.31}$$

y la convergencia se cumple tan pronto como $C_1^{1+(p_n/2)} K_n^{p_n} (N\lambda)^{(p_n/2)-1} < 1,\ |x_0| < 3r,\quad |x_0| + 3r < r_0,\quad |x_0| + 3r < \delta,\quad r < \text{mín}(i_g/6, \delta/24)$. Fijamos $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$C_1^{1+(p_n/2)} K_n^{p_n} (N\lambda)^{(p_n/2)-1} < 1,$$

y luego $r > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$r < \text{mín}(i_g/6, \delta/24, r_0/6).$$

Entonces (4.31) se cumple para cualquier x_0 tal que $|x_0| < 2r$. Como $C_0 \leq 2$, $B_0(C_0 r)$ está cubierto por N bolas de radio r centradas en $B_0(2r)$. Se sigue que $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u$ fuertemente en $H_1^2(B_0(C_0 r))$. Esto prueba (4.17). □

De (4.14) y (4.17), podemos escribir que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&= \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&\leq C_1 \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla u|^2 dx + o(1).
\end{aligned}$$

Se deduce que $u \not\equiv 0$. Supongamos que $R_\alpha \to R$ cuando $\alpha \to \infty$, $R \geq 1$. Si $R < \infty$, entonces $\tilde{u}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(B_0(C_0 r))$ ya que $\hat{u}_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$. Por (4.17), y ya que $u \neq 0$, se obtiene que

$$\lim_{\alpha \to \infty} R_\alpha = \infty. \tag{4.32}$$

Paso 4-2 Para cada $R > 0$

$$\tilde{u}_\alpha \to u \text{ fuertemente en } H_1^2(B_0(R)) \tag{4.33}$$

cuando $\alpha \to \infty$ y u es una solución de la ecuación euclidea $\Delta u = |u|^{p_n - 2}u$.

Demostración. Sea $R \geq 1$. Por (4.32), $R_\alpha \geq R$ para α suficientemente grande, y (4.14) es válida para z tal que $|z| < r_0 R - r$. Luego, como es fácil verificar a partir de la demostración del paso 1, (4.31) es válida si $|x_0| < 3r(2R-1)$, $|x_0| + 3r < r_0 R$, y $|x_0| + 3r < \delta R$. En particular, (4.31) es válida si $|x_0| < 2rR$. Por lo tanto, $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u$ fuertemente en $H_1^2(B_0(2rR))$.

Note que para x en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\eta}_\alpha(x) = 1$ para α suficientemente grande, y que $R \geq 1$ es arbitrario, fácilmente se obtiene que (4.33) se cumple. Ahora se prueba que u es una solución de la ecuación crítica euclidiana $\Delta u = |u|^{p_n-2}u$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $R_0 > 0$ tal que supp$\varphi \subset B_0(R_0)$. Sea $\hat{\varphi}_\alpha$ definida como

$$\hat{\varphi}_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \varphi(R_\alpha x).$$

Entonces supp$\hat{\varphi}_\alpha \subset B_0(R_\alpha^{-1} R_0)$. Para α suficientemente grande, sea φ_α la función suave en M dada por $\hat{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ \exp_{x_\alpha}$. Para α suficientemente grande,

$$\int_M (\nabla \hat{u}_\alpha \nabla \varphi_\alpha) dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha) \nabla \varphi) dv_{\tilde{g}_\alpha},$$

y

$$\int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2}\hat{u}_\alpha\varphi_\alpha dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\eta}_\alpha\tilde{u}_\alpha|^{p_n-2}(\tilde{\eta}_\alpha\tilde{u}_\alpha)\varphi dv_{g_\alpha}.$$

A partir de (4.32), $g_\alpha \to \xi$ en $C^1(B_0(R))$ para cualquier $R > 0$. Además, (φ_α) está acotada en $H_1^2(M)$. Dado que $(\tilde{u}_\alpha)$ es una sucesión de Palais-Smale para I_g, y $\tilde{\eta}_\alpha\tilde{u}_\alpha \to u$ en $D_1^2(\mathbb{R}^n)$, obtenemos al pasar al límite cuando $\alpha \to \infty$ en las ecuaciones anteriores que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n-2} u\varphi dx.$$

En otras palabras, $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta u = |u|^{p_n-2}u$. Esto demuestra el paso 2. □

Para $x \in M$ y $\hat{\delta} \in (0, \delta/8)$, definimos V_α por

$$V_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right) \tag{4.34}$$

donde $\eta_\alpha = \eta_{\hat{\delta},x_\alpha}$. Definimos $w_\alpha = \hat{u}_\alpha - V_\alpha$ y afirmamos que se cumplen las siguientes relaciones.

Paso 4-3 Se cumplen las siguientes relaciones. Por un lado,

$$w_\alpha \to 0 \quad \text{débilmente en } H_1^2(M) \tag{4.35}$$

por otro lado,

$$DI_g(V_\alpha) \to 0 \quad \text{y} \quad DI_g(w_\alpha) \to 0 \tag{4.36}$$

fuertemente cuando $\alpha \to \infty$. Finalmente

$$I_g(w_\alpha) = I_g(\hat{u}_\alpha) - E_f(u) + o(1) \tag{4.37}$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$.

Demostración. Empezamos con la demostración de (4.35). Basta probar que $V_\alpha \to 0$ débilmente en $H_1^2(M)$. Dado $R > 0$, definimos $\Omega_\alpha(R) = B_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}R)$. Para una función suave φ sobre M y α grande y pasando a $\mathbb{R}^n$ por la exponencial se obtiene lo que sigue

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} V_\alpha \varphi \, dv_g = R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} \eta_{\hat{\delta}}(x) u(R_\alpha x) \varphi(\exp_{x_\alpha}(x)) \, dv_{g_\alpha}$$

donde $g_\alpha = \exp_{x_\alpha}^* g$. Así se tiene que

$$\left| \int_{\Omega_\alpha(R)} V_\alpha \varphi \, dv_g \right| \leq \|\varphi\|_\infty R_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} |u(R_\alpha x)| dv_{g_\alpha}.$$

Realizando el cambio de variable $y = Rx$ y además como las metricas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, existe una constante $C > 0$ tal que $dv_{g_\alpha} \leq C dx$, por tanto se sigue:

$$\left| \int_{\Omega_\alpha(R)} V_\alpha \varphi \, dv_g \right| \leq C \|\varphi\|_\infty R_\alpha^{-\frac{n+2}{2}} \int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} |u(y)| dy = o(1),$$

cuando $\alpha \to \infty$. Haciendo un proceso análogo teniendo en cuenta las características de la función η. se llega a que

$$\left| \int_{M \setminus \Omega_\alpha(R)} V_\alpha \varphi \, dv_g \right| \leq C \|\varphi\|_\infty R_\alpha^{-\frac{n+2}{2}} \int_{B_0(2\delta R) \setminus B_0(R_\alpha^{-1}R)} |u(y)| dy = o(1),$$

siempre que $\alpha \to \infty$. De esta forma tomando $R > 0$ suficientemente grande y usando (4.32), se obtiene que

$$\int_M V_\alpha \varphi \, dv_g \to 0 \quad \text{cuando } \alpha \to \infty.$$

Bajo el mismo razonamiento, se concluye que $\int_M (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) dv_g \to 0 \quad$ cuando $\alpha \to \infty$. Esto prueba la ecuación (4.35). Ahora probamos (4.36). Sea nuevamente φ una función suave en M. Entonces,

$$DI_g(V_\alpha) \cdot \varphi = \int_M (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g - \int_M |V_\alpha|^{p_n - 2} V_\alpha \varphi \, dv_g.$$

Dado $R > 0$, escribimos que

$$\int_M (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g = \int_{\Omega_\alpha(R)} (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(\delta) \setminus \Omega_\alpha(R)} (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g.$$

Note que

$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta) \setminus \Omega_\alpha(R)} (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g = O\left(\|\varphi\|_{H^2}\right) \varepsilon_R,$$

donde $\varepsilon_R \to 0$ cuando $R \to \infty$. Sea $\overline{\varphi}_\alpha$ la función de $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\overline{\varphi}_\alpha(x) = R_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} \eta_{\alpha,\hat{\delta}}(x) \left(\varphi \circ \exp_{x_\alpha}\right) (R_\alpha^{-1} x),$$

donde $\eta_{\alpha,\hat{\delta}}(x) = \eta_{\hat{\delta}}(R_\alpha^{-1} x)$. Entonces, para α grande,

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} (\nabla V_\alpha \nabla \varphi) \, dv_g = \int_{B_0(R)} (\nabla u \nabla \overline{\varphi}_\alpha) \, dv_{\tilde{g}_\alpha}.$$

Observe que $\tilde{g}_\alpha \to \xi$ en $C^1(B_0(R'))$, con $R' > R$, y que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla\varphi|^2 \, dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla\overline{\varphi}_\alpha|^2 \, dv_{\tilde{g}_\alpha},$$

se obtiene que

$$\int_{B_0(R)} (\nabla u \nabla\overline{\varphi}_\alpha) \, dv_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{B_0(R)} (\nabla u \nabla\overline{\varphi}_\alpha) \, dx + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right).$$

También tenemos que

$$\int_{B_0(R)} (\nabla u \nabla\overline{\varphi}_\alpha) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla\overline{\varphi}_\alpha) \, dx + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) \varepsilon_R,$$

donde ε_R es como antes. Por lo tanto,

$$\int_M (\nabla V_\alpha \nabla\varphi) \, dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla\overline{\varphi}_\alpha) \, dx + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) \varepsilon_R. \tag{4.38}$$

De manera similar, podemos probar que

$$\int_M |V_\alpha|^{p_n-2} V_\alpha \varphi \, dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n-2} u \overline{\varphi}_\alpha \, dx + o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) \varepsilon_R. \tag{4.39}$$

Dado que u es solución de $\Delta u = |u|^{p_n-2}u$, se sigue de (4.38) y (4.39) que

$$DI_g(V_\alpha) \cdot \varphi = o\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) + O\left(\|\varphi\|_{H_1^2}\right) \varepsilon_R.$$

Dado que $R > 0$ es arbitrario, obtenemos que $DI_g(V_\alpha) \to 0$ fuertemente cuando $\alpha \to \infty$.

Esto prueba la primera afirmación de (4.36). Ahora escribimos

$$DI_g(w_\alpha)\cdot\varphi = DI_g(\hat{u}_\alpha)\cdot\varphi - DI_g(V_\alpha)\cdot\varphi - A(\alpha)\cdot\varphi, \tag{4.40}$$

donde

$$A(\alpha)\cdot\varphi = \int_M \Phi_\alpha\varphi\, dv_g = \int_{B_{x_\alpha}(2\hat{\delta})} \Phi_\alpha\varphi\, dv_g,$$

y

$$\Phi_\alpha = |w_\alpha|^{p_n-2}w_\alpha - |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2}\hat{u}_\alpha + |V_\alpha|^{p_n-2}V_\alpha.$$

Por las desigualdades de Hölder y Sobolev,

$$|A(\alpha)\cdot\varphi| \leq \|\Phi_\alpha\|_{p_n/(p_n-1)}\|\varphi\|_{H_1^2}.$$

Dado $R>0$, definimos $\Omega_\alpha(R)^c = B_{x_\alpha}(2\hat{\delta})\setminus\Omega_\alpha(R)$, donde $\Omega_\alpha(R)$ es como antes. Entonces, para α grande,

$$\|\Phi_\alpha\|_{p_n/(p_n-1)} \leq \|\Phi_\alpha\|_{L^{p_n/(p_n-1)}(\Omega_\alpha(R))} + \|\Phi_\alpha\|_{L^{p_n/(p_n-1)}(\Omega_\alpha(R)^c)}.$$

Como en la demostración del paso 2 de la sección 3.1, podemos escribir

$$\|\Phi_\alpha\|_{L^{p_n/p_n-1}(\Omega_\alpha(R)^c)} \leq C\left(\|\Phi_\alpha^1\|_{L^{p_n/p_n-1}(\Omega_\alpha(R)^c)} + \|\Phi_\alpha^2\|_{L^{p_n/p_n-1}(\Omega_\alpha(R)^c)}\right)$$

donde $\Phi_\alpha^1 = |\hat{u}_\alpha|^{p_n-2}V_\alpha$ y $\Phi_\alpha^2 = |V_\alpha|^{p_n-2}\hat{u}_\alpha$. Ahora bien, pasando a $\mathbb{R}^n$ mediante la exponencial se ontiene que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\Phi_\alpha|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_g = \int_{B_0(R)} |\tilde{\Phi}_\alpha|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_{\tilde{g}_\alpha}$$

con

$$\tilde{\Phi}_\alpha = |\tilde{u}_\alpha - u|^{p_n-2}(\tilde{u}_\alpha - u) - |\tilde{u}_\alpha|^{p_n-2}\tilde{u}_\alpha + |u|^{p_n-2}u.$$

Usando (4.33), obtenemos que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\Phi_\alpha|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_g = o(1).$$

De manera independiente,

$$\int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\Phi^1_\alpha|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_g = \int_{B_0(2\hat{\delta}R_\alpha)\setminus B_0(R)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{\frac{p_n(p_n-2)}{p_n-1}} |u|^{\frac{p_n}{p_n-1}} \hat{\eta}^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_{\tilde{g}_\alpha}$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{\frac{p_n(p_n-2)}{p_n-1}} |u|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dx,$$

donde

$$\hat{\eta}_\alpha(x) = \eta_{\hat{\delta},x_\alpha}\left(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)\right)$$

y $C > 0$ tal que $dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq C dx$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha \to u$ casi en todas partes en $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$f_\alpha = |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{\frac{p_n(p_n-2)}{p_n-1}}, \quad \text{y} \quad f = |u|^{\frac{p_n(p_n-2)}{p_n-1}}.$$

Entonces (f_α) está acotada en $L^{\frac{p_n-1}{p_n-2}}(\mathbb{R}^n)$ y (f_α) converge casi en todas partes a f. Por la teoría estándar de integración, se sigue que

$$f_\alpha \to f \quad \text{débilmente en } L^{\frac{p_n-1}{p_n-2}}(\mathbb{R}^n)$$

cuando $\alpha \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{u}_\alpha|^{\frac{p_n(p_n-2)}{p_n-1}} |u|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(R)} |u|^{p_n} dx,$$

y obtenemos que

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\alpha\to\infty} \int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\Phi_\alpha^1|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_g = 0.$$

De forma similar, podemos probar que

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\alpha\to\infty} \int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\Phi_\alpha^2|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dv_g = 0.$$

Volviendo a (4.40), y dado que $R > 0$ es arbitrario, obtenemos que $DI_g(w_\alpha) \to 0$ fuertemente cuando $\alpha \to \infty$. Esto prueba (4.36). Ahora queda probar (4.37). Tenemos que

$$I_g(w_\alpha) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g - \frac{1}{p_n}\int_M |w_\alpha|^{p_n} dv_g. \tag{4.41}$$

Respecto al primer término en (4.41), escribimos

$$\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_{B_{x_\alpha}(2\hat{\delta})} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g + \int_{M\setminus B_{x_\alpha}(2\hat{\delta})} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g.$$

Dado $R > 0$, se tiene

$$\int_{B_{x_\alpha}(2\hat{\delta})} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g + \int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g,$$

donde $\Omega_\alpha(R)$ y $\Omega_\alpha(R)^c$ son como antes. Tenemos

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla(\tilde{u}_\alpha - u)|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha}.$$

Así que, a partir de (4.33),

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = o(1).$$

Por otra parte note que

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\alpha\to\infty} \int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\nabla V_\alpha|^2 dv_g = 0.$$

Como $w_\alpha = \hat{u}_\alpha - V_\alpha$, y $(\hat{u}_\alpha)$ está acotada en $H_1^2(M)$, tenemos que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_{\Omega_\alpha(R)^c} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g + B_R(\alpha),$$

donde

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\alpha\to\infty} B_R(\alpha) = 0. \tag{4.42}$$

Por lo tanto,

$$\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_M |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g - \int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g + B_R(\alpha) + o(1),$$

donde $B_R(\alpha)$ satisface (4.42). Mediante el proceso ya utilizado anteriormente se llega a que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_{\tilde{g}_\alpha},$$

y que $\tilde{g}_\alpha \to \xi$ en $C^1(B_0(R))$, obtenemos con (4.33) que

$$\int_{\Omega_\alpha(R)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla u|^2 dx + o(1) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon_R + o(1),$$

donde $\varepsilon_R \to 0$ cuando $R \to \infty$. Por lo tanto,

$$\int_M |\nabla w_\alpha|^2 dv_g = \int_M |\nabla \hat{u}_\alpha|^2 dv_g - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + B_R(\alpha) + o(1) \tag{4.43}$$

donde $B_R(\alpha)$ satisface (4.42). De manera similar, se puede probar que

$$\int_M |w_\alpha|^{p_n} dv_g = \int_M |\hat{u}_\alpha|^{p_n} dv_g - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} dx + B_R(\alpha) + o(1) \tag{4.44}$$

donde $B_R(\alpha)$ satisface (4.42). Combinando (4.41), (4.43) y (4.44), obtenemos que

$$I_g(w_\alpha) = I_g(\hat{u}_\alpha) - E_f(u) + B_R(\alpha) + o(1),$$

y como $R > 0$ es arbitrario, se deduce que

$$I_g(w_\alpha) = I_g(\hat{u}_\alpha) - E_f(u) + o(1).$$

Esto prueba (4.37) y el paso 3. $\square$

Ya teniendo estos pasos, procedemos a la demostración del Teorema 4.1.1.

Demostración del Teorema 4.1.1. Sean $u \in {D_1}^2(\mathbb{R}^n)$ una solución no trivial de (4.9), entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} dx.$$

Por la desigualdad de Sobolev en el espacio euclideo, tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_n} dx \right)^{1/p_n} \leq K_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

luego reemplazando y operando, se concluye que

$$E_f(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n} \right) K_n^{-n}$$

por tanto

$$E_f(u) \geq \frac{1}{n} K_n^{-n} = \beta^*.$$

Por otro lado, sea (u_α) una sucesión de Palais-Smale de funciones no negativas para I_g^α. Por el paso 1, (u_α) es acotada en $H_1^2(M)$, luego existe una subsucesión (u_α) tal que $u_\alpha \to u^0$débilmente en $H_1^2(M)$, $u_\alpha \to u^0$ fuertemente en L^2 y $u_\alpha \to u^0$ en casi todas partes cuando $\alpha \to \infty$.

Asumamos que $I_g^\alpha(u_\alpha) \to C$ cuando $\alpha \to \infty$. Por el paso 2, u^0 es una solución no negativa de (4.1) $[\triangle u = u^{p_n - 1}]$ y $\hat{u}_\alpha = u_\alpha - u^0$ es una sucesión de Palais-Smale para I_g, tal que

$$I_g(\hat{u}_\alpha) = I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1).$$

Si $\hat{u}_\alpha \to 0$ fuertemente en $H_1^2(M)$, entonces $u_\alpha = u^0 + o(1)$, y quedaría probado el teorema. Si no, por la afirmación del principio, aplicamos el paso 4 para conseguir una nueva sucesión$(x_\alpha^1) \subset M$ convergente, una sucesión $(R_\alpha^1) \subset \mathbb{R}$ que tiende a infinito y una sucesión (u_α^1) de Palais-Smale tal que la energía sea

$$I_g(\hat{u}_\alpha^1) = I_g(\hat{u}_\alpha) - E_f(u) + o(1).$$

$$I_g(\hat{u}_\alpha^1) \leq I_g(\hat{u}_\alpha) - \beta^* + o(1).$$

Aquí nuevamente, o bien $\hat{u}_\alpha^1 \to 0$ fuertemente en $H_1^2(M)$, en cuyo caso el teorema está demostrado, o $\hat{u}_\alpha^1 \to 0$ débilmente pero no fuertemente en $H_1^2(M)$, en cuyo caso aplicamos nuevamente el paso 4. Así obteniendo nuevamente una sucesión $(x_\alpha^2) \subset M$ convergente,una sucesión $(R_\alpha^2) \subset \mathbb{R}$ que tiende a infinito y una sucesion (u_α^2) de Palais-Smale cuya energía es

$$I_g(\hat{u}_\alpha^2) = I_g(\hat{u}_\alpha^1) - E_f(u) + o(1) \leq I_g(\hat{u}_\alpha) - 2\beta^\star + o(1).$$

Por inducción, en algún punto, las sucesiones $(x_\alpha^m) \subset M$ y $(R_\alpha^m) \subset \mathbb{R}$ con las caracteristicas antes mencionadas junto con la sucesión de Palais-Smale $(\hat{u}_\alpha^m)$ que obtenemos con este proceso tiene una energía que converge a algún $\beta < \beta^*$. Entonces, por el paso 3, $\hat{u}_\alpha^m \to 0$ fuertemente en $H_1^2(M)$. Luego se tiene que $u_\alpha = u^0 + \sum_{j=1}^m u_\alpha^j + o(1)$. Por (Caffarelli y cols., 1989) las funciones u_α^j con $j = 1, \ldots, m$ son no negativos, esto concluye la demostración del Teorema.

$\square$

La descomposición de sucesiones de Palais–Smale en burbujas en el espacio de Sobolev $H_1^2(M)$ constituye una herramienta fundamental en el análisis de ecuaciones elípticas no lineales sobre variedades Riemannianas. Esta técnica permite comprender de manera precisa los fenómenos de concentración de energía que ocurren cuando las soluciones se comportan de forma no compacta, especialmente en presencia de no linealidades críticas, como en el caso de la ecuación de Yamabe. Mediante esta descomposición, es posible identificar las partes de la sucesión que convergen fuertemente, así como las llamadas burbujas, que representan soluciones límite en el espacio euclídeo y capturan la pérdida de compacidad.

El desarrollo de esta técnica ha dado lugar a múltiples investigaciones influyentes. Entre ellas, destacan los trabajos de Thierry Aubin y Richard Schoen, quienes aplicaron estas ideas al problema de Yamabe y al estudio de métricas con curvatura escalar constante. Posteriormente, el análisis de burbujas fue refinado por O. Druet y E. Hebey en (Druet y cols., 2009), quienes profundizaron en la descomposición en burbujas para problemas con no linealidades críticas en geometría.

Gracias a estos avances, la descomposición en burbujas se ha consolidado como una herramienta indispensable para establecer resultados de existencia, multiplicidad, y comportamiento asintótico de soluciones en problemas geométricos variacionales. Su impacto se extiende a áreas como la teoría de campos escalares, el análisis de ecuaciones de tipo Yamabe, y más generalmente al estudio de ecuaciones elípticas críticas.

5. Apéndice

5.1. Teoremas sobre los espacios L^p

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(X)$ se define como el conjunto de clases de funciones medibles $f : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tales que:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, se define:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Los espacios L^p son espacios de Banach, y cuando $p = 2$, se convierten en espacios de Hilbert.

Teorema de encaje de L^p en L^q: Si $\mu(X) < \infty$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces: $L^q(X) \subset L^p(X), \quad$ con inclusión continua.

Desigualdades Clásicas

1. Desigualdad de Hölder

   Para $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, con $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\left| \int_X f g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

2. Desigualdad de Young

   Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

   con igualdad si y sólo si $a^p = b^q$

3. Desigualdad de Poincaré

   Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular, y $u \in (H_1^p)_0(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Operadores y Encajes Compactos

Definición: Un operador lineal $T : X \to Y$ entre espacios de Banach es compacto si transforma subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y.

Teorema de Rellich–Kondrachov: Sea Ω un dominio acotado con frontera Lipschitz. Si $1 \leq p < n$, entonces:

$$H_1^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p},$$

es un encaje compacto.

5.2. Teoremas Funcionales Clásicos

Teorema de Banach–Alaoglu La bola unidad cerrada de $X^{'}$ es compacta en la topología débil.

Espacios Duales El dual de un espacio normado X es:

$$X^{'} = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineal y continua}\},$$

y se convierte en un espacio de Banach con la norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Ejemplos

- $(L^p(X))^{'} = L^q(X)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- $(L^1)^{'} = L^{\infty}$, pero $(L^{\infty})^{'}$ no es L^1.

Teorema de Representación de Riesz Si H es un espacio de Hilbert, entonces para todo $f \in H^{'}$ existe un único $y \in H$ tal que:

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \|f\| = \|y\|.$$

Reflexividad y Bidual La aplicación canónica $J : X \to X^{''}$ definida por $J(x)(f) = f(x)$ es un isomorfismo si y solo si X es reflexivo. Los espacios L^p con $1 < p < \infty$ son reflexivos.

Referencias

Ambrosetti, A., y Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, *14*(4), 349–381.

Aubin, T. (1976). Équations différentielles non linéaires et problème de yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.(9)*, *55*, 269–296.

Brézis, H., y Lieb, E. (1983). A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *88*(3), 486–490.

Caffarelli, L. A., Gidas, B., y Spruck, J. (1989). Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical sobolev growth. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *42*(3), 271–297.

Do Carmo, M. P., y Flaherty Francis, J. (1992). *Riemannian geometry* (Vol. 2). Springer.

Druet, O., Hebey, E., y Robert, F. (2009). *Blow-up theory for elliptic pdes in riemannian geometry* (Vol. 45). Princeton University Press.

Gilbarg, D., y Trudinger, N. S. (1977). *Elliptic partial differential equations of second order* (Vol. 224) (n.º 2). Springer.

Hebey, E. (2000). *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities: Sobolev spaces and inequalities* (Vol. 5). American Mathematical Soc.

Hebey, E., y Vaugon, M. (1995). The best constant problem in the sobolev embedding theorem for complete riemannian manifolds.

Hebey, E., y Vaugon, M. (1996). Meilleures constantes dans le théoreme d'inclusion de sobolev. En *Annales de l'institut henri poincaré c, analyse non linéaire* (Vol. 13, pp. 57–93).

Lee, J. M., y Parker, T. H. (1987). The yamabe problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *17*(1), 37–91.

Munkres, J. R. (2018). *Analysis on manifolds*. CRC Press.

Struwe, M. (1984). A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. *Mathematische zeitschrift*, *187*, 511–517.

Trudinger, N. S. (1968). Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, *22*(2), 265–274.