

# **TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS**

**WÍLMER PEÑA ORTEGA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

2006

# **TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS**

**WÍLMER PEÑA ORTEGA**

**Trabajo presentado para optar el título de  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Director  
M.Sc. Gilberto ARENAS DÍAZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2006**

## *DEDICATORIA*

A mis padres JOSE ELVER PEÑA ALVAREZ Y EUTICIA ORTEGA VEGA quienes con su gran apoyo hicieron posible que alcanzara tan preciada meta.

# AGRADECIMIENTOS

**A DIOS**, por acompañarme en todos los instantes de mi vida.

**A mis padres y hermana** por su apoyo incondicional.

**A Gilberto Arenas Díaz**, profesor y director de la presente monografía por su orientación en la elección del tema y por su constante apoyo en la realización de este trabajo.

**A los profesores** de la escuela de matemáticas.

**A todas aquellas personas** que de manera indirecta colaboraron en la realización de este trabajo.

**TITLE:** TRANSFORMATIONS THE MÖBIUS \*

**AUTHOR:** WÍLMER PEÑA ORTEGA \*\*

**KEY WORDS:**

Plane

Complex

Function

Transformation

Möbius

**DESCRIPTION**

The topic of this monograph is located inside the theory of the complex analysis which is largely one of the mathematics's more important branches due to its diverse applications, I eat for example in physics.

It is sought with this work to carry out a study of the according transformations, and in particular of the transformations of Möbius that are very important for the solution of problems in physics.

This work consists of two chapters. The first chapter presents some basic concepts of the theory of the complex numbers as the definition of complex number and its different representation forms, the stereographic projection, subsequently the functions of complex variable are analyzed and some elementary examples are shown, basic concepts of topology, analytic functions, equations of Cauchy-Riemann and harmonic functions, lastly some elementary functions are deduced and examples related with these are presented.

The second chapter begins with the general transformations, the lineal transformation, the according transformations, some special applications are shown and you concludes with the transformations of Möbius: their general properties, among which it is demonstrated that the transformations of Möbius form a group and lastly some aspects related with the physical applications are presented.

---

\* Monograph

\*\* Faculty of Sciences. School of Mathematics. Paredes, Marlio.  
Director Gilberto Arenas.

**TITULO: TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS \***

**AUTOR: WÍLMER PEÑA ORTEGA \*\***

**PALABRAS CLAVES:**

Plano

Complejo

Función

Transformación

Möbius

## **DESCRIPCIÓN**

El tema de esta monografía está ubicado dentro de la teoría del análisis complejo la cual es una de las ramas más importantes de la matemática en gran parte debido a sus diversas aplicaciones, como por ejemplo en física.

Se pretende con este trabajo realizar un estudio de las transformaciones conformes, y en particular de las transformaciones de Möbius, que son muy importantes para la solución de problemas en física

Este trabajo consta de dos capítulos. El primer capítulo presenta algunos conceptos básicos de la teoría de los números complejos como la definición de número complejo y sus distintas formas de representación, la proyección estereográfica, seguidamente se analizan las funciones de variable compleja y se muestran algunos ejemplos elementales, conceptos básicos de topología, funciones analíticas, ecuaciones de Cauchy-Riemann y funciones armónicas, por último se deducen algunas funciones elementales y se presentan ejemplos relacionados con estas.

El segundo capítulo se inicia con las transformaciones generales, la transformación lineal, las transformaciones conformes, se muestran algunas aplicaciones especiales y se concluye con las transformaciones de Möbius: sus propiedades generales, entre las cuales se demuestra que las transformaciones de Möbius forman un grupo y por último se presentan algunos aspectos relacionados con las aplicaciones físicas.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Paredes, Marlio.  
Director Gilberto Arenas.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Números complejos</b>	<b>1</b>
1.1. El campo de los números complejos . . . . .	1
1.1.1. Representación polar de los números complejos . . . . .	4
1.2. Algunas consideraciones geométricas de los números complejos . . . . .	8
1.2.1. Círculos, líneas y semiplanos en $\mathbb{C}$ . . . . .	8
1.2.2. Proyección estereográfica . . . . .	9
1.3. Funciones de variable compleja, límites y continuidad . . . . .	11
1.3.1. Funciones de variable compleja . . . . .	11
1.3.2. Límites . . . . .	16
1.3.3. Continuidad . . . . .	18
1.3.4. Diferenciación . . . . .	20
1.4. Topología sobre el campo complejo . . . . .	21
1.4.1. Conjuntos compactos . . . . .	24
1.5. Funciones analíticas y ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	25
1.5.1. Funciones armónicas . . . . .	28
1.6. Funciones elementales . . . . .	29
<b>2. Aplicaciones y transformaciones de Möbius</b>	<b>37</b>
2.1. Transformaciones generales . . . . .	37
2.1.1. Transformaciones sucesivas . . . . .	40
2.1.2. La transformación lineal . . . . .	41
2.2. Transformaciones conformes . . . . .	41

2.3. Transformaciones especiales . . . . .	43
2.4. Transformaciones de Möbius . . . . .	46
2.4.1. Propiedades generales . . . . .	47
2.4.2. Puntos fijos . . . . .	54
2.4.3. Algunas aplicaciones físicas que involucran transformaciones de Möbius. Soluciones a los problemas de Dirichlet y de Neumann por medio de aplicaciones conformes . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Introducción

La teoría de funciones de una variable compleja, o análisis complejo, es una rama muy importante en la formación de matemáticos, ingenieros, físicos y otros científicos.

En cuanto a la parte matemática el análisis complejo ayuda a un mejor entendimiento de ciertos conceptos y permite la relación entre ellos; en lo que respecta a la práctica, la variable compleja tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo en la solución de problemas de flujo de calor, teoría potencial, mecánica de fluidos, teoría electromagnética, aerodinámica y muchos otros campos de la ciencia y la ingeniería.

La presente monografía está dedicada a exponer los resultados básicos relacionados con variable compleja y presentar un análisis detallado de las transformaciones conformes, y en particular de las transformaciones de Möbius.

Mediante una función analítica  $w = f(z)$  no constante podemos transformar un dominio  $D$  del plano complejo, en otro dominio  $f(D)$  del plano complejo. Una aplicación analítica en la que  $f'(z) \neq 0$  en una cierta región  $R$  se dice que es conforme, lo que significa que si dos curvas cualesquiera se cortan en un punto de  $D$  formando un ángulo  $\theta$ , sus imágenes en  $f(D)$  se cortan formando el mismo ángulo.

Las aplicaciones conformes son importantes, ya que mediante estas se pueden transformar muchos problemas de los mencionados anteriormente en problemas más sencillos y del mismo tipo en  $f(D)$ ; así, resolviendo el problema en  $f(D)$  se tienen las soluciones del problema original en  $D$ .

Este trabajo consta de dos capítulos. En el primer capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la teoría de los números complejos, como la definición de número complejo y sus distintas formas de representación y la proyección estereográfica.

fica; seguidamente se analizan las funciones de variable compleja y se muestran algunos ejemplos elementales, conceptos básicos de topología, funciones analíticas y las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las funciones armónicas y por último deducimos algunas funciones elementales y se presentan ejemplos relacionados con estas.

En el segundo capítulo iniciamos con las transformaciones generales, la transformación lineal, las transformaciones conformes, mostramos algunas aplicaciones especiales y concluimos con las transformaciones de Möbius y sus propiedades generales, entre las cuales se muestra que las transformaciones de Möbius forman un grupo; finalizamos con algunos aspectos relacionados con las aplicaciones físicas.

# Capítulo 1

## Números complejos

En este capítulo revisaremos algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de los números complejos, como sus formas de representación, algunas consideraciones geométricas como la proyección estereográfica, funciones, topología y funciones analíticas, las cuales utilizaremos para el estudio de las aplicaciones conformes, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, funciones armónicas y funciones elementales.

### 1.1. El campo de los números complejos

El conjunto de los números complejos, denotado por  $\mathbb{C}$ , es constituido por todos los elementos  $z = a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i$  es la unidad imaginaria, la cual es caracterizada por que  $i^2 = -1$ , es decir,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}. \quad (1.1)$$

La adición y la multiplicación son definidas por:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ ,
- $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .

Es fácil verificar que  $\mathbb{C}$  junto con estas operaciones satisface las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas para la adición y la multiplicación;  $w_0 = 0 + 0i = 0$

y  $w_1 = 1 + 0i = 1$  son las identidades para la adición y la multiplicación respectivamente, y existe el inverso multiplicativo para cada elemento distinto de cero en  $\mathbb{C}$ . En consecuencia  $\mathbb{C}$  es un campo.

Los números reales  $a$  y  $b$  de la expresión binómica  $z = a + bi$  están unívocamente determinados. Se llaman respectivamente parte real ( $\text{Re } z$ ) y parte imaginaria ( $\text{Im } z$ ) de  $z$ . Esta unicidad nos permite identificar el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos con el espacio  $\mathbb{R}^2$ , asociando a cada número  $a + bi$  el par ordenado  $(a, b)$ . Esto nos da una interpretación geométrica de  $\mathbb{C}$  como el conjunto de todos los puntos de un plano coordenado, de modo que los números reales ocupan el eje horizontal (eje real) mientras que el eje vertical (eje imaginario) está ocupado por los números de la forma  $bi$ , llamados también imaginarios puros (ver Figura 1.1).

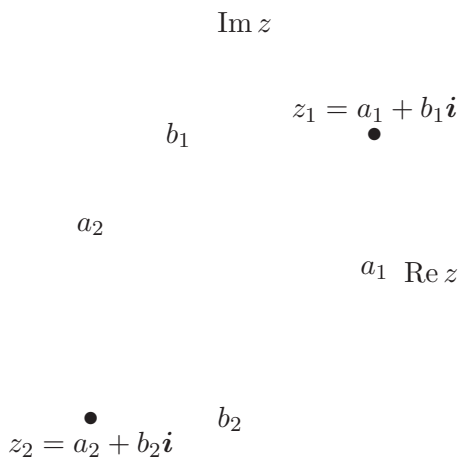


Figura 1.1. Plano complejo.

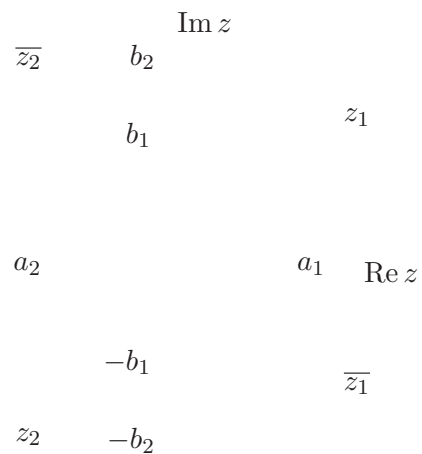


Figura 1.2. Representación de  $z$  y  $\bar{z}$ .

La ecuación  $z^2 + 1 = 0$  tiene dos raíces en  $\mathbb{C}$ ; es sencillo verificar que a partir de la condición que se da para  $i$  ( $i^2 = -1$ ), las raíces de esta ecuación son  $\pm i$ . En efecto, para cada  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ . En forma más general, si  $z$  y  $w$  son números complejos, tenemos

$$z^2 + w^2 = (z + wi)(z - wi). \tag{1.2}$$

Si se reemplaza a  $z$  y  $w$  por los números reales no nulos  $a$  y  $b$ , obtenemos

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi). \tag{1.3}$$

Escribiendo esto apropiadamente, obtenemos la fórmula para el recíproco de un número complejo  $z = a + bi$ :

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Existe un único automorfismo de  $\mathbb{C}$  que fija a los números reales (y no es la identidad), llamado conjugación, y que viene dado por  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ . Geométricamente  $\bar{z}$  es el simétrico de  $z$  respecto al eje real (véase Figura 1.2).

Dado que la conjugación es un automorfismo tenemos que;

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

La norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$  se corresponde con el módulo de un número complejo, esto es, si  $z = a + bi = (a, b)$  entonces  $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z| = |a + bi|$ .

Dado que el módulo es una extensión del valor absoluto en  $\mathbb{R}$ , se usa la misma notación.

Observe que en la ecuación  $a^2 + b^2 = (a + bi)(\overline{a + bi})$ , es decir, si  $z = a + bi$ , entonces  $a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$ , o de otra manera  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ . En particular, si  $z \neq 0$  entonces otra forma de ver el inverso multiplicativo de  $z$  es:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Algunas propiedades básicas de los números complejos relacionadas con las operaciones antes mencionadas se dan a continuación. Se demostrarán aquí algunas de estas propiedades.

1.  $\overline{\bar{z}} = z$ ,
2.  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ,  $w \neq 0$ ,
3.  $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,
4.  $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ,
5.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,
6.  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ,
7.  $|zw| = |z| |w|$ ,
8.  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ,  $w \neq 0$ ,
9.  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ,
10.  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ .

*Demostración.* Demostremos los numerales 7, 9 y 10.

7.

$$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{(zw)(\overline{z\overline{w}})} = \sqrt{z\overline{w}\overline{z}w} \\ &= \sqrt{(z\overline{z})(w\overline{w})} = \sqrt{|z|^2|w|^2} = |z||w|. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|zw| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

10.

$$|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w| \implies |z| - |w| \leq |z-w|. \quad (1.4)$$

$$|w| = |w-z+z| \leq |w-z| + |z| \implies |w| - |z| \leq |z-w|. \quad (1.5)$$

Entonces de (1.4) y (1.5), tenemos que  $||z| - |w|| \leq |z-w|$ .  $\square$

### 1.1.1. Representación polar de los números complejos

Otra manera de escribir un número complejo es mediante su representación polar. Consideremos el punto  $z = x + yi$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Este punto se puede representar en la forma polar  $(r, \theta)$ :  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Claramente  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y  $\theta$ , llamado el argumento o amplitud de  $z$  y denotado por  $\theta = \arg z$ , es el ángulo entre el eje real positivo y el segmento de línea de 0 a  $z$  (ver Figura 1.3). Recordemos que  $\theta$  más cualquier múltiplo entero de  $2\pi$  puede ser sustituido simplemente por  $\theta$ . Dada la ambigüedad del ángulo  $\theta$ , la aplicación  $\arg$  no es una función.

Empleando estas relaciones tenemos que la representación polar de un número complejo es

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.6)$$

Esta ecuación se puede abreviar introduciendo la notación

$$\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1.7)$$

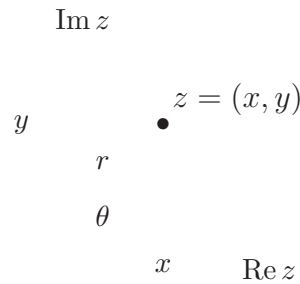


Figura 1.3. Representación polar de los números complejos.

es decir,

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \operatorname{cis} \theta. \quad (1.8)$$

Al considerar dos números complejos  $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$  y  $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$  tenemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \operatorname{cis} \theta_1) (r_2 \operatorname{cis} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)]; \end{aligned}$$

aplicando la fórmula para la suma de ángulos para el seno y el coseno, tenemos que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2). \quad (1.9)$$

De esta ecuación se puede observar que  $\arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ . De forma natural, esta fórmula puede extenderse a productos arbitrarios; es decir, si

$z_k = r_k \operatorname{cis} \theta_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tenemos:

$$\prod_{k=1}^n z_k = \left[ \prod_{k=1}^n r_k \right] \left[ \operatorname{cis} \left( \sum_{k=1}^n \theta_k \right) \right]. \quad (1.10)$$

En particular, si  $z_k$  es el mismo para todo  $k$ , entonces

$$z^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta), \quad (1.11)$$

para cada entero  $n \geq 0$ . Además, si  $|z| = 1$ , tenemos:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (n\theta) + i \sin (n\theta), \quad (1.12)$$

es decir,

$$(\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis} (n\theta).$$

Las ecuaciones (1.11) y (1.12) se conocen como las fórmulas de De Moivre.

Por otra parte, si  $z \neq 0$ , es fácil deducir que  $z^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)$ , es decir, la fórmula (1.11) se puede aplicar también para números enteros negativos.

Nos surge entonces la siguiente pregunta: dado un número complejo  $w \neq 0$  y un entero  $n \geq 0$ , ¿podemos encontrar otro número complejo  $z$  tal que  $z^n = w$ ? ¿Cuántos  $z$  podemos encontrar? El teorema fundamental del álgebra nos garantiza que existen  $n$  números complejos  $z$  que satisfacen esta ecuación; estos complejos  $z$  son llamados las raíces  $n$ -ésimas de  $w$ . No es difícil deducir de la ecuación (1.11), que si  $w = |w| \operatorname{cis} \alpha$ , entonces una de tales raíces es  $z = |w|^{1/n} \operatorname{cis}(\alpha/n)$ . Es claro, que esta raíz no es la única; en efecto, podemos verificar que cada número complejo de la forma

$$|w|^{1/n} \operatorname{cis} \left( \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (1.13)$$

es una raíz  $n$ -ésima de  $w$ . En conclusión, existen  $n$  raíces  $n$ -ésimas de cualquier número complejo no nulo; todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de  $2\pi/n$  (ver Figura 1.4), y son dadas por la fórmula (1.13).

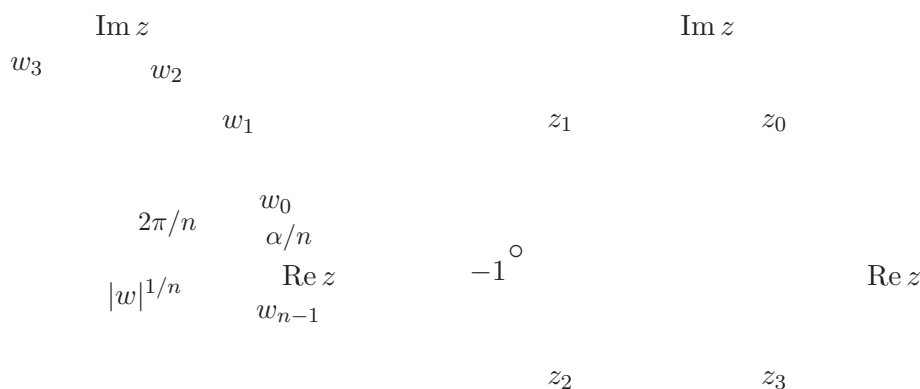


Figura 1.4. Raíces  $n$ -ésimas de  $w$ .

Figura 1.5. Raíces cuartas de  $-1$ .

**Ejemplo 1.1.1.** *Calcular las raíces  $n$ -ésimas de la unidad negativa  $-1$ .*

**Solución.** *Dado que  $-1 = \operatorname{cis}(\pi)$ , la ecuación (1.13) nos dice que las raíces son de la forma*

$$\operatorname{cis} \frac{\pi}{n}, \operatorname{cis} \frac{\pi + 2\pi}{n}, \dots, \operatorname{cis} \frac{\pi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

En particular, las raíces cuartas de  $-1$  son (ver Figura 1.5)

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Por las conocidas fórmulas en series de potencias, sabemos que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ahora bien, si  $z = \theta i$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , podemos obtener

$$\begin{aligned} e^{\theta i} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta i)^k}{k!} \\ &= 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6}i + \frac{\theta^4}{24} + \frac{\theta^5}{120}i - \frac{\theta^6}{720} - \frac{\theta^7}{5040}i + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \dots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \theta + i \text{sen } \theta. \end{aligned}$$

En general, podemos expresar

$$re^{\theta i} = r(\cos \theta + i \text{sen } \theta) = z. \quad (1.14)$$

La forma  $z = re^{\theta i}$  es conocida como la representación exponencial de  $z$ , o también llamada la forma exponencial de  $z$ .

Ya vimos que un punto en el plano complejo se puede representar por sus coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , por sus coordenadas polares  $(r, \theta)$  o por su representación exponencial  $re^{\theta i}$ . Otra posibilidad es utilizando el hecho de que

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

donde  $z = x + yi$ . Las coordenadas  $(z, \bar{z})$  se llaman coordenadas conjugadas del punto.

## 1.2. Algunas consideraciones geométricas de los números complejos

### 1.2.1. Círculos, líneas y semiplanos en $\mathbb{C}$

La ecuación general de una circunferencia con centro en  $(a, b)$  y radio  $r$  en el plano  $xy$  es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (1.15)$$

Tomando como centro  $(0, 0)$ , la ecuación se transforma en

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Considerando  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ , y reemplazando, se tiene

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = r^2, \quad \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = r^2, \\ \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} = r^2, \quad z\bar{z} = r^2. \end{aligned}$$

De aquí podemos concluir que la ecuación de una circunferencia en  $\mathbb{C}$  tiene la forma:

$$|z| = r \quad |z - z_0| = r.$$

De esto se puede ver que la ecuación de un círculo es  $|z - z_0| \leq r$ .

Otra forma de escribir la ecuación de una circunferencia o recta en el plano complejo  $Z$  es:

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}\bar{z} + \beta z + \gamma = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

De hecho sabemos que la ecuación general de una circunferencia en el plano  $xy$  se puede escribir como

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

que en coordenadas conjugadas será

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + D = 0$$

ó

$$Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{z} + D = 0,$$

así  $A = \alpha$ ,  $\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} = \beta$  y  $D = \gamma$ .

En el caso especial en que  $A = 0$ , la circunferencia degenera en una recta.

La línea que pasa por  $w_0 = a+bi$  y tiene dirección  $w = c+di$  tiene la forma  $z = w_0 + tw$ , donde  $t \in \mathbb{R}$ . Si despejamos  $t$ , tenemos  $t = \frac{z - w_0}{w}$ ; como  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\text{Im} \left( \frac{z - w_0}{w} \right) = 0$ , es decir, la ecuación de una recta está dada por  $\text{Im} \left( \frac{z - w_0}{w} \right) = 0$ .

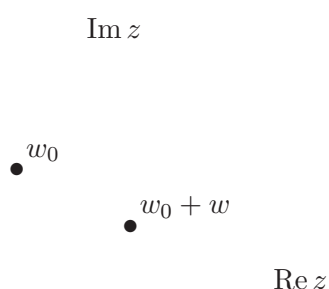


Figura 1.6. Recta que pasa por el punto  $w_0$  y tiene la dirección  $w$ .

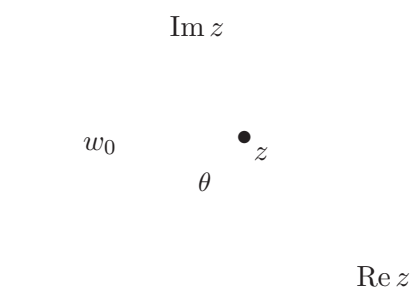


Figura 1.7. Semiplano a la izquierda de la línea que pasa por  $w_0$  y tiene dirección  $w$ .

Si cambiamos por una desigualdad, nos encontramos con un semiplano

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left( \frac{z - w_0}{w} \right) \geq 0 \right\}.$$

Si  $z$  está a la izquierda de la línea que pasa por  $w_0$  y tiene dirección  $w$ , el argumento de  $\frac{z - w_0}{w}$  está entre  $0$  y  $\pi$ .

### 1.2.2. Proyección estereográfica

Es común en el análisis complejo encontrarnos con funciones que tienden a infinito cuando se acercan a un punto dado; por eso es necesario introducir la noción de plano extendido, plano entero o plano entero  $Z$  (ver [1]), el cual es denotado por  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$ ; es claro que en el plano no se puede visualizar tal punto, pero se puede introducir dicho punto ideal, que llamaremos punto infinito o punto del infinito.

Es entonces necesario dar una idea geométrica en la cual podamos visualizar esto. Con este propósito se introduce la esfera unidad  $\mathbb{S}$ , esfera de Riemann (ver [1]) o esfera estereográfica (ver [5])

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

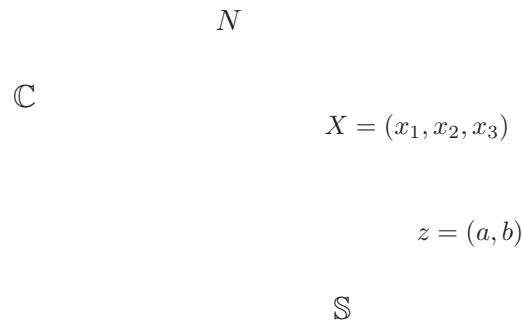


Figura 1.8. Proyección estereográfica.

Podemos identificar a cada punto de  $\mathbb{C}$  con un único punto de  $\mathbb{S}$ , de la siguiente forma, (denotando los elementos de  $\mathbb{S}$  con letras mayúsculas  $N, X, Y, Z$  y los elementos de  $\mathbb{C}$  con letras minúsculas  $x, y, z$ ). Consideremos el polo norte de  $\mathbb{S}$   $N = (0, 0, 1)$ . Hagamos que el plano  $\{z = (a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{C}$  corte a  $\mathbb{S}$  a lo largo del ecuador. Ahora para cada punto  $z \in \mathbb{C}$  tomemos la recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $z$  y  $N$ . La intersección con la esfera  $\mathbb{S}$  determina un único punto  $X \neq N$  (ver Figura 1.8), el cual es la imagen en  $\mathbb{S}$  del complejo  $z$ . Podemos apreciar que si  $|z| > 1$  entonces  $X$  está en el hemisferio norte, y si  $|z| < 1$  entonces  $X$  se ubica en el hemisferio sur; además, si  $|z| = 1$ , tenemos que  $X \equiv z$ . También podemos ver que cuando  $|z| \rightarrow \infty$  entonces  $X$  se aproxima a  $N$ , por lo cual podemos identificar a  $N$  con el punto  $\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . En consecuencia, es natural el hecho de que podamos representar a  $\mathbb{C}_\infty$  con la esfera  $\mathbb{S}$ . Esta correspondencia entre los puntos de  $\mathbb{C}_\infty$  y  $\mathbb{S}$  es conocida como la proyección estereográfica.

Surge ahora la siguiente pregunta: Dado un número complejo  $z = a + bi$  ¿cómo encontrar el  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}$  que le hace corresponder la proyección estereográfica?

Es conocido que si  $A, B \in \mathbb{R}^n$ , la recta que pasa por  $A$  y  $B$  está dada por

$$tA + (1 - t)B, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego, como tenemos los puntos  $z = a + bi \equiv (a, b, 0)$  y  $N = (0, 0, 1)$ , podemos comprobar que la recta que pasa por estos dos puntos es

$$r(t) = (ta, tb, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ahora,  $(ta, tb, 1 - t) \in \mathbb{S}$ , si  $\|((ta, tb, 1 - t))\| = 1$ , es decir,

$$1 = (ta)^2 + (tb)^2 + (1 - t)^2 = t^2 (a^2 + b^2 + 1) + 1 - 2t.$$

Teniendo en cuenta que  $|z|^2 = a^2 + b^2$ , obtenemos

$$t (t (|z|^2 + 1) + 2) = 0.$$

pero  $t$  no puede ser cero (ya que en este caso  $X = N$ ); entonces se tiene que

$$t = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Luego el punto que le asigna la proyección estereográfica a  $z = a + bi$  es

$$\left( \frac{2a}{|z|^2 + 1}, \frac{2b}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Podemos responder también la otra pregunta que surge: Dado un punto

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}$ , ¿cómo encontrar el  $z = a + bi$  correspondiente?

Nuevamente, aplicando la ecuación de la recta tenemos

$$t(x_1, x_2, x_3) + (1 - t)(0, 0, 1) = (a, b, 0)$$

$$(tx_1, tx_2, tx_3 + 1 - t) = (a, b, 0).$$

Al considerar la ecuación  $tx_3 + 1 - t = 0$  podemos despejar  $t$ , obteniendo que

$$t = \frac{1}{1 - x_3},$$

y en consecuencia, el punto que le corresponde a  $(x_1, x_2, x_3)$  es

$$z = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right) \equiv \frac{x_1}{1 - x_3} + \frac{x_2}{1 - x_3}i.$$

Es claro que  $x_3$  no puede ser 1 para puntos concretos del plano. Y si  $x_3 \rightarrow 1$ , entonces  $z \rightarrow \infty$ .

## 1.3. Funciones de variable compleja, límites y continuidad

### 1.3.1. Funciones de variable compleja

Una función de variable compleja es una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Suponga  $\Omega$  y  $\Theta$  el dominio y recorrido de  $f$  respectivamente, esto es,

$f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \Theta \subset \mathbb{C}$ . Si para cada  $z \in \Omega$  existe una única imagen  $w = f(z)$ , se dice que  $f$  es unívoca; si existen dos  $w_1, w_2 : w_1 = f(z)$  y  $w_2 = f(z)$  o más se dice que  $f$  es una función multívoca o multiforme de  $z$ . Las funciones de una variable real admiten una extensión natural a funciones de variable compleja. Es el caso de las funciones polinómicas, racionales y exponenciales.

Es conveniente introducir la siguiente notación: si  $z = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{C}$ , entonces  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  representa el elemento  $w = (u, v) \in \Theta \subset \mathbb{C}$ , es decir,  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  representan la parte real e imaginaria de la función compleja  $f$  y son funciones reales de dos variables.

Se requerirán cuatro dimensiones para hacer un modelo cartesiano de una función compleja de una variable compleja: dos para representar la variable independiente (una para la parte real y una para la parte imaginaria) y dos para representar la variable dependiente. Por eso en las funciones complejas no se utiliza realmente la gráfica de la función, sino que generalmente se dibujan por aparte el dominio y el recorrido.

En otras palabras las cantidades complejas  $z$  (variable independiente) y  $w$  (variable dependiente) se representan en planos complejos distintos que llamaremos plano  $Z$  y plano  $W$  respectivamente. Entonces, la relación funcional  $w = f(z)$  establece una correspondencia entre los puntos  $(x, y)$  del plano  $Z$  en el dominio de  $f(z)$  y los puntos  $(u, v)$  del plano  $W$  en el recorrido de  $f$ .

La gráfica de  $w = f(z)$  se obtiene tomando valores de  $z$  en el plano  $Z$  y dibujando los puntos que representan los valores correspondientes de  $w$  en el plano  $W$  (Figura 1.9).



Figura 1.9.  $w = f(z)$ .

La correspondencia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(u, v)$  se denomina una aplicación o una transformación de los puntos  $(x, y)$  del plano  $Z$  en los puntos  $(u, v)$  del plano  $W$  bajo

la función  $f$ .

**Ejemplo 1.3.1.** Una forma para visualizar geoméricamente el efecto que produce una función compleja es a través de la representación de las transformaciones que produce a curvas y conjuntos en general de un plano a otro. Por ejemplo, analicemos la función

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longrightarrow z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Es decir,  $u(x, y) = x^2 - y^2$  y  $v(x, y) = 2xy$ . Veamos qué efecto produce la transformación a las familias de curvas  $\psi_1$  y  $\psi_2$  dadas por:

$\psi_1$  : rectas paralelas al eje  $y$ , a la derecha;       $\psi_2$  : rectas paralelas al eje  $x$ , arriba.

$$\psi_1 = \begin{cases} x = k, & k \geq 0 \\ y = y, & y \in \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{f(\psi_1)} \Psi_1 = \begin{cases} u(k, y) = k^2 - y^2, \\ v(k, y) = 2ky. \end{cases}$$

Reemplazando se tiene

$$\Psi_1 = \begin{cases} u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}, & \text{si } k > 0, \\ \begin{cases} u \leq 0 \\ v = 0 \end{cases} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} x = x, & x \in \mathbb{R} \\ y = t, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{f(\psi_2)} \Psi_2 = \begin{cases} u(x, t) = x^2 - t^2, \\ v(x, t) = 2xt, \end{cases}$$

reemplazando se tiene

$$\Psi_2 = \begin{cases} u = \frac{v^2}{4t^2} - t^2, & \text{si } t > 0, \\ \begin{cases} u \geq 0 \\ v = 0 \end{cases} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Plano  $Z$

Plano  $W$

Figura 1.10.  $w = z^2$ .

Lo anterior se puede visualizar en la Figura 1.10. La función  $f(z) = z^2$  transforma rectángulos del plano  $Z$  en rectángulos de lados parabólicos en el plano  $W$ . Podemos observar a partir de la Figura 1.10 que la transformación preserva ángulos (puede verificarse que  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son familias ortogonales\*); esta propiedad la satisface cierto tipo de funciones complejas que serán objeto de una discusión posterior.

**Ejemplo 1.3.2.** A continuación haremos un análisis detallado de la función  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ .

1. Halle la imagen en el plano  $W$  de una curva  $f(x, y)$  en el plano  $Z$  bajo la transformación  $w = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ .

**Solución.** Puesto que

$$z = x + yi = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{v}{u^2 + v^2}i$$

entonces

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

por tanto la imagen de  $f(x, y) = 0$  es

$$f\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, -\frac{v}{u^2 + v^2}\right) = 0.$$

2. Demostremos que la transformación  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$  preserva circunferencias que no contengan el origen y aplica rectas que no pasan por el origen en circunferencias que pasan por el origen del plano  $W$ .

**Solución.** Nótese que si  $A = B = C = 0$  en

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

entonces la gráfica es una recta. Luego

$$f(x, y) = A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.16}$$

representa una recta si  $A = 0$  y una circunferencia si  $A \neq 0$ . Su imagen es

$$f\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, -\frac{v}{u^2 + v^2}\right) = A\frac{1}{u^2 + v^2} + D\frac{u}{u^2 + v^2} - E\frac{v}{u^2 + v^2} + F = 0,$$

---

\*Cada elemento de una familia es perpendicular a cada elemento de la otra familia.

$$F(u^2 + v^2) + Du - Ev + A = 0. \quad (1.17)$$

Supongamos que  $A \neq 0$ ; entonces (1.16) representa una circunferencia, y como la circunferencia no pasa por el origen,  $F \neq 0$ . Entonces el lugar geométrico de (1.17) es una circunferencia en el plano  $W$ . Además, como  $A \neq 0$ , esta imagen no pasa por el origen del plano  $W$ .

Supongamos que  $A = 0$ ; entonces (1.16) representa una recta. Se requiere otra vez que  $F \neq 0$  para que la recta no pase por el origen del plano  $Z$ ; entonces la imagen de esta recta es una circunferencia que pasa por el origen del plano  $W$ , pues  $A = 0$ .

3. Demostremos que la transformación  $w = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ , transforma circunferencias que pasan por el origen del plano  $Z$  en rectas en el plano  $W$ . Demostremos también que rectas que pasan por el origen en el plano  $Z$  tienen por imágenes rectas que pasan por el origen en el plano  $W$ .

**Solución.** Supongamos que el lugar geométrico de (1.16) es una circunferencia en el plano  $Z$  que pasa por el origen. Entonces  $A \neq 0$  y  $F = 0$ . En este caso la imagen del lugar geométrico de (1.16) es

$$Du - Ev + A = 0, \quad A \neq 0,$$

esta es una recta que no pasa por el origen del plano  $W$ .

Supongamos que el lugar geométrico de (1.16) es una recta que pasa por el origen del plano  $Z$ . Así,  $A = F = 0$  y su imagen en el plano  $W$  es el lugar geométrico dado por

$$Du - Ev = 0,$$

el cual es una recta que pasa por el origen del plano  $W$ .

4. Demostremos que la circunferencia unitaria  $|z| = 1$  es invariante bajo  $\frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ .

**Solución.** Como  $w = \frac{1}{z}$ ,  $|w| = \frac{1}{|z|}$ , entonces si  $|z| = r$ ,  $|w| = \frac{1}{r}$ . Por tanto, si  $r = 1$  la imagen de la circunferencia unitaria  $|z| = 1$  es la circunferencia unitaria  $|w| = 1$ .

5. Demostremos que  $w = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$  intercambia el interior y el exterior de la circunferencia  $|z| = 1$  (ver Figura 1.11).

**Solución.** Todo punto en el exterior de  $|z| = 1$  tiene módulo  $r > 1$  y por tanto es aplicado en un punto  $w$  para el cual  $|w| = \frac{1}{r} < 1$ , que está en el interior de  $|w| = 1$ . En forma similar todo punto que está en el interior de  $|z| = 1$  tiene módulo  $r < 1$  y por tanto es aplicado en un punto  $w$  para el cual  $|w| > 1$ , el cual está en el exterior de  $|w| = 1$ .

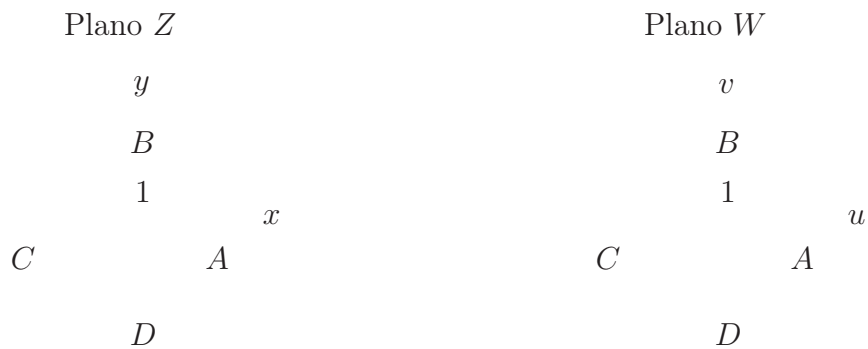


Figura 1.11.  $w = \frac{1}{z}$ .

### 1.3.2. Límites

**Definición 1.3.1.** Una vecindad de radio  $\delta$  de un punto  $z_0$ ,  $V_\delta(z_0)$  es el conjunto de todos los puntos  $z$  tales que  $|z - z_0| < \delta$ , donde  $\delta$  es cualquier número positivo dado. Una vecindad perforada o reducida de  $z_0$  es una vecindad de  $z_0$  en la que el punto  $z_0$  se omite, es decir,  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

**Definición 1.3.2.** Sea  $f(z)$  una función definida y unívoca en una vecindad de  $z = z_0$  con la posible excepción de  $z_0$ . Decimos que el número  $L$  es el límite de  $f(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$  y escribimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L,$$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $|f(z) - L| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

**Ejemplo 1.3.3.** Apliquemos la definición para probar que  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2$ .

**Solución.** Hay que probar que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si

$$0 < |z - 1| < \delta \Rightarrow |f(z) - 2| < \epsilon.$$

Puesto que

$$z \neq 1 \Rightarrow f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - 1)} = z + 1.$$

Entonces

$$|f(z) - 2| = |z + 1 - 2| = |z - 1|,$$

por tanto, si tomamos un  $\epsilon > 0$  y hacemos  $\delta = \epsilon$ , entonces

$$0 < |z - 1| < \delta \Rightarrow |z - 1| = |f(z) - 2| < \epsilon.$$

**Ejemplo 1.3.4.** Demostrar que  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$ .

**Solución.** Hay que probar que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |z - z_0| < \delta$ , entonces  $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ .

Si tomamos  $\delta \geq 1$ , entonces si  $0 < |z - z_0| < \delta$  tenemos que

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| &= |z - z_0||z + z_0| < \delta|z - z_0 + 2z_0| \\ &\leq \delta(|z - z_0| + |2z_0|) < \delta(1 + 2|z_0|). \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\delta(1 + 2|z_0|) < \epsilon$ , lo que implica que

$$\delta < \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|};$$

por consiguiente, si

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|} \right\},$$

entonces

$$|z^2 - z_0^2| < \delta(1 + 2|z_0|) < \left( \frac{\epsilon}{1 + 2|z_0|} \right) (1 + 2|z_0|) = \epsilon.$$

Luego  $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$  cuando  $|z - z_0| < \delta$ , lo cual demuestra que  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$ .

Dado que lo que se ha hecho es extender a  $\mathbb{C}$  la definición de límite para funciones de una variable real, entonces se siguen cumpliendo las mismas propiedades básicas para límites en  $\mathbb{C}$  que se tienen para límites en  $\mathbb{R}$ , es decir:

Si  $\lim f(z) = A$  y  $\lim g(z) = B$ , entonces

- i)  $\lim[f(z) + g(z)] = \lim f(z) + \lim g(z) = A + B.$
- ii)  $\lim[f(z) - g(z)] = \lim f(z) - \lim g(z) = A - B.$
- iii)  $\lim[f(z) \cdot g(z)] = \lim f(z) \cdot \lim g(z) = A \cdot B.$
- iv)  $\lim \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim f(z)}{\lim g(z)} = \frac{A}{B},$  si  $B \neq 0.$

Teniendo en cuenta la noción de plano complejo extendido  $\mathbb{C}_\infty$  tenemos las siguientes definiciones.

**Definición 1.3.3.** Decimos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$  tal que  $|f(z) - L| < \epsilon$  siempre que  $|z| > M.$

**Definición 1.3.4.** Decimos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  si  $\forall N > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $|f(z)| > N$  siempre que  $0 < |z - z_0| < \delta.$

### 1.3.3. Continuidad

**Definición 1.3.5.** Sea  $f(z)$  una función definida y unívoca en una vecindad de  $z = z_0,$  así como en  $z_0.$  Decimos que  $f(z)$  es continua en  $z = z_0$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$  siempre que  $|z - z_0| < \delta.$

Una definición alternativa sería:  $f(z)$  es continua en  $z = z_0$  si se satisfacen las condiciones siguientes:

- i)  $f(z_0)$  existe;
- ii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  existe;
- iii)  $f(z_0) = L.$

Diremos que una función que no es continua en el punto  $z_0,$  es discontinua en  $z_0,$  o que tiene una discontinuidad en  $z_0.$

Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe pero es distinto de  $f(z_0)$  diremos que  $z_0$  es una discontinuidad removible, ya que si tomamos  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  la función será continua en  $z_0.$

**Definición 1.3.6.** Una función  $f(z)$  es continua en una región  $\Omega$  si es continua en  $z$ ,  $\forall z \in \Omega$ .

Nuevamente podemos dar los mismos resultados que tenemos para funciones de variable real.

**Teorema 1.3.1.** Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son continuas en  $z = z_0$ , entonces:

- i)  $f(z) + g(z)$  es continua en  $z = z_0$ ;
- ii)  $f(z) - g(z)$  es continua en  $z = z_0$ ;
- iii)  $f(z) \cdot g(z)$  es continua en  $z = z_0$ ;
- iv)  $\frac{f(z)}{g(z)}$  es continua en  $z = z_0$ , si  $g(z_0) \neq 0$ .

Resultados similares se tienen para la continuidad en una región.

**Teorema 1.3.2.** La compuesta de dos funciones continuas es continua.

*Demostración.* Lo que hay que demostrar es que si  $w = g(z)$  es continua en  $z = z_0$  y si  $w_0 = g(z_0)$ , entonces  $f[g(z)]$  es continua en  $z = z_0$  si  $f$  es continua en  $w = w_0$ .

Puesto que  $f$  es continua en  $w = w_0$ ,  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$  tal que

$$|f(w) - f(w_0)| < \epsilon \quad \forall w \in V_{\delta_1}(w_0),$$

es decir,

$$|f(w) - f(w_0)| = |f[g(z)] - f[g(z_0)]| < \epsilon,$$

siempre que  $|w - w_0| < \delta_1$ .

Pero como  $g$  es continua en  $z = z_0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|g(z) - g(z_0)| < \delta_1 \forall z \in V_\delta(z_0)$ .

Por tanto, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que

$$|f[g(z)] - f[g(z_0)]| < \epsilon, \quad \forall z \in V_\delta(z_0),$$

luego  $f[g(z)]$  es continua en  $z = z_0$ . □

**Teorema 1.3.3.** Si  $f(z)$  es continua en una región  $R$ , entonces las partes real e imaginaria de  $f(z)$  son también continuas en la región.

### 1.3.4. Diferenciación

**Definición 1.3.7.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , una función unívoca, se dice que  $f$  es diferenciable en  $z_0 \in \Omega$  si

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existe. En tal caso decimos que  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$  y lo denotamos por

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Otra forma de ver la derivada es

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

**Teorema 1.3.4.** Si  $f(z)$  tiene una derivada en  $z_0$ , entonces  $f(z)$  es continua en  $z_0$ .

*Demostración.* Si  $z \neq z_0$ ,

$$f(z) - f(z_0) = \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] (z - z_0),$$

de donde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] (z - z_0) = f'(z_0)0 = 0,$$

por lo cual

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

luego  $f$  es continua en  $z_0$ . □

Del mismo modo que para la continuidad, se tienen resultados similares para la diferenciación. Si  $f(z)$ ,  $g(z)$  son funciones y suponemos que  $f'(z)$  y  $g'(z)$  existen, entonces:

- i)  $\frac{d}{dz} [f(z) + g(z)] = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{d}{dz} g(z) = f'(z) + g'(z);$
- ii)  $\frac{d}{dz} [f(z) - g(z)] = \frac{d}{dz} f(z) - \frac{d}{dz} g(z) = f'(z) - g'(z);$
- iii)  $\frac{d}{dz} [f(z) \cdot g(z)] = \frac{d}{dz} f(z) \cdot \frac{d}{dz} g(z) = f'(z) \cdot g'(z);$

iv)  $\frac{d}{dz}[cf(z)] = c\frac{d}{dz}f(z) = cf'(z)$ , donde  $c$  es una constante cualquiera.

v)  $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ , si  $g(z) \neq 0$ .

**Ejemplo 1.3.5.** Si  $f(z) = z^3 - 2z$ , hallemos  $f'(z)$  utilizando la definición.

**Solución.**

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^3 - 2(z + \Delta z) - (z^3 - 2z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z - 2\Delta z - z^3 + 2z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 3z^2 + 3z\Delta z + (\Delta z)^2 - 2 = 3z^2 - 2; \end{aligned}$$

entonces

$$f'(z) = 3z^2 - 2 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

## 1.4. Topología sobre el campo complejo

En esta sección intentamos presentar los elementos básicos de topología sobre el espacio de los números complejos.

Se dota a  $\mathbb{C}$  de la métrica inducida por la norma, es decir

$$d(z, z_0) = d((a + bi), (a_0 + b_0i)) = |z - z_0| = \sqrt{(a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}.$$

Es fácil demostrar que esta definición satisface las condiciones para ser métrica; adicionalmente, se puede ver que es la misma métrica euclidiana que se define en  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto, podemos considerar a  $\mathbb{C}$  como un espacio topológico con la topología acostumbrada en  $\mathbb{R}^2$ . En el contexto del análisis complejo es usual llamar discos a lo que generalmente se llaman bolas. Se usa la notación

$$D(z_0; \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

para denotar el disco abierto con centro en  $z_0$  y radio  $\epsilon$ . Los discos cerrados se expresan con la clausura de los discos abiertos (ver Figuras 1.12 y 1.13):

$$\overline{D}(z_0; \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}.$$



Figura 1.12. Disco abierto  $D(z_0; \epsilon)$ .



Figura 1.13. Disco cerrado  $\bar{D}(z_0; \epsilon)$ .

Un subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  se considera abierto, si  $\forall z_0 \in \Omega, \exists D(z_0; \epsilon)$  tal que  $D(z_0; \epsilon) \subset \Omega$ . Se ilustra un abierto en la Figura 1.14.

Un ejemplo básico de conjunto abierto es un semiplano:  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 1\}$ ; o en general cualquier semiplano  $\left\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\left(\frac{z - w_0}{w}\right) > 0\right\}$ .

Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son conjuntos abiertos, entonces  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  son abiertos.

Diremos que  $\bar{\Omega}$  es un conjunto cerrado si  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  es un conjunto abierto. Un ejemplo de conjunto cerrado es el semiplano cerrado  $\left\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\left(\frac{z - w_0}{w}\right) \geq 0\right\}$ .

¿El conjunto  $L = \left\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\left(\frac{z - w_0}{w}\right) = 0\right\}$  es abierto o cerrado?

$\epsilon$

Figura 1.14. Conjunto abierto.

Nótese que el radio  $\epsilon$  depende de la ubicación del punto  $z_0$ . Cuando  $z_0$  se acerca a la frontera de  $\Omega$ , el radio  $\epsilon$  del disco será más pequeño.

Un ejemplo sencillo de conjunto abierto es el semiplano (ver Figura 1.7). Un punto frontera de  $\Omega$  es un punto  $z$  tal que para todo disco  $D(z, \epsilon)$  contiene un punto de  $\Omega$  y puntos que no están en  $\Omega$ . Para el ejemplo del semiplano, los puntos en la recta son la frontera del semiplano. Un punto  $z$  se dice que es un punto interior de  $\Omega$ , si existe

un disco  $D(z, \epsilon)$  contenido en  $\Omega$ . Un punto  $z$  se dice que es adherente a  $\Omega$  si cada disco  $D(z, \epsilon)$  contiene algún elemento de  $\Omega$ ; para el caso del ejemplo los puntos del plano y los puntos de la recta son puntos adherentes. Es así como un punto adherente puede ser un punto frontera o un punto interior de  $\Omega$ . Un conjunto se llama cerrado si él contiene todos los puntos frontera de  $\Omega$ . El complemento de un conjunto cerrado es un conjunto abierto. Un conjunto  $\Omega$  se dice acotado si existe un número  $M > 0$  tal que  $|z| \leq M$  para todo  $z \in \Omega$ . El semiplano es un conjunto no acotado (ver Figura 1.7).

Si  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números complejos entonces se dice que

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

si se satisface:

Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $|z_n - v| < \epsilon$ .

Si existe tal  $v \in \mathbb{C}$ , decimos que la sucesión es convergente; de lo contrario se dice que es divergente.

Una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice de Cauchy si, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq N$ , entonces  $|z_n - z_m| < \epsilon$ .

Podemos escribir  $z_n = a_n + b_n i$ . En consecuencia

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2};$$

luego

$$|a_n - a_m| \leq |z_n - z_m| \quad y \quad |b_n - b_m| \leq |z_n - z_m|,$$

con lo cual podemos afirmar que  $\{z_n\}$  es de Cauchy si y sólo si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  (las partes real e imaginaria) son también de Cauchy. Ahora bien, si sabemos que  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son convergentes, podemos concluir que también es convergente la sucesión de Cauchy compleja  $\{z_n\}$ .

Nuevamente, es de aclarar que todos los teoremas clásicos sobre límites de sucesiones se cumplen para los números complejos: límites de una suma, límites de producto y cocientes, y composición.

### 1.4.1. Conjuntos compactos

Daremos a continuación los resultados básicos concernientes a conjuntos compactos. Consideremos nuevamente que  $\Omega$  es un conjunto de números complejos. Sea  $\{z_n\}$  una sucesión en  $\Omega$ . Consideraremos como un punto de acumulación de  $\{z_n\}$  a un número complejo  $\eta$  tal que dado  $\epsilon > 0$  existen infinidad de enteros tales que

$$|z_n - \eta| < \epsilon.$$

Podemos decir que dado un abierto  $A$  que contiene a  $\eta$ , existe un número infinito de enteros  $n$  tal que  $z_n \in A$ .

Se dice que un conjunto de números complejos  $\Omega$  es compacto si cada sucesión de elementos de  $\Omega$  tiene un punto de acumulación en  $\Omega$ . Las siguientes propiedades son equivalentes a las dadas aquí por lo cual pueden considerarse como definiciones alternativas:

- i) Cada subconjunto no finito de  $\Omega$  tiene un punto de acumulación en  $\Omega$ .
- ii) Cada sucesión de elementos de  $\Omega$  tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en  $\Omega$ .

**Teorema 1.4.1.** *Un conjunto de números complejos es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

La demostración de este teorema puede verse en [3].

**Teorema 1.4.2.** *Si  $\Omega$  es un subconjunto de números complejos compacto, y  $f$  es una función continua sobre  $\Omega$ , entonces la imagen  $f(\Omega)$  es compacta.*

*Demostración.* Sea  $\{w_n\}$  una sucesión en la imagen de  $f$ , esto es, para cada  $w_n$  existe  $z_n \in \Omega$  tal que

$$w_n = f(z_n).$$

La sucesión tiene una subsucesión  $\{z_{n_k}\}$ , con límite  $v \in \Omega$ , si  $w_{n_k} = f(z_{n_k})$  dado que  $f$  es continua, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(v).$$

En consecuencia la sucesión dada  $\{w_n\}$  tiene una subsucesión que converge en  $f(\Omega)$  comprobándose que  $f(\Omega)$  es compacto.  $\square$

**Teorema 1.4.3.** *Sea  $\Omega$  un subconjunto compacto y sea  $f$  una función continua sobre  $\Omega$ . Entonces  $f$  es uniformemente continua, es decir, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $z, w \in \Omega$  y  $|z - w| < \delta$  entonces  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ .*

*Demostración.* Supongamos por absurdo que  $\exists \epsilon > 0$  tal que para cada  $n$  existen elementos  $z_n$  y  $w_n \in \Omega$  tales que

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n} \quad \text{pero} \quad |f(z_n) - f(w_n)| > \epsilon.$$

Entonces existe un subconjunto infinito  $E_1$  de números enteros positivos y algún  $v \in \Omega$  tales que  $z_n \rightarrow v$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $n \in E_1$ . Existen también un subconjunto  $E_2$  de  $E_1$  y  $\mu \in \Omega$  tal que  $w_n \rightarrow \mu$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $n \in E_2$ . Entonces, tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $n \in E_2$  se obtiene

$$|v - \mu| \leq |v - z_n + z_n - w_n + w_n - \mu| \leq |v - z_n| + |z_n - w_n| + |w_n - \mu|;$$

luego aplicando el límite,  $|v - \mu| = 0$  y  $v = \mu$ . En consecuencia  $f(v) - f(\mu) = 0$ . Además

$$\begin{aligned} |f(z_n) - f(w_n)| &\leq |f(z_n) - f(v) + f(v) - f(\mu) + f(\mu) - f(w_n)| \\ &\leq |f(z_n) - f(v)| + |f(v) - f(\mu)| + |f(\mu) - f(w_n)|; \end{aligned}$$

tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $n \in E_2$ , se concluye que  $f(z_n) - f(w_n)$  se aproxima a 0. Es decir, se contradice la suposición inicial  $|f(z_n) - f(w_n)| > \epsilon$ , por lo cual se concluye el teorema.  $\square$

## 1.5. Funciones analíticas y ecuaciones de Cauchy-Riemann

**Definición 1.5.1.** *Una función  $f(z)$  es analítica (regular u holomorfa) en un punto  $z_0$  si y sólo si esta definida y es derivable no sólo en  $z_0$  sino en todo punto  $z$  de alguna vecindad de  $z_0$ . Si  $f(z)$  es analítica en todos los puntos de alguna región  $R$ , entonces se dice que  $f(z)$  es analítica en  $R$ .*

**Definición 1.5.2.** Se dice que una función es entera si es analítica en todos los puntos del plano  $Z$ .

**Teorema 1.5.1.** Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son funciones analíticas en un conjunto abierto  $S$ , entonces:

- i)  $f(z) + g(z)$  es analítica en  $S$ ;
- ii)  $f(z) \cdot g(z)$  es analítica en  $S$ ;
- iii)  $\frac{f(z)}{g(z)}$  es analítica en  $S$  excepto en los puntos  $z$  tales que  $g(z) = 0$ .

La demostración la podemos encontrar en [1].

**Ejemplo 1.5.1.**  $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$  es una función analítica para todos los valores finitos de  $z$ , excepto en  $z = 1$  ya que  $f'(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$  no está definida en  $z = 1$ .

A continuación investigaremos la relación que existe entre la parte real y la imaginaria de una función analítica.

Si la función  $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$  es diferenciable (es decir analítica) en el punto  $z_0 = a + \mathbf{b}\mathbf{i}$ , entonces el límite

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

puede ser calculado aproximando  $\Delta z = \Delta x + \mathbf{i}\Delta y$  a cero en cualquier dirección que nos convenga en el plano complejo. Si tomamos la aproximación horizontal, entonces  $\Delta z = \Delta x$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(a + \Delta x, b) + \mathbf{i}v(a + \Delta x, b) - u(a, b) - \mathbf{i}v(a, b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(a + \Delta x, b) - u(a, b)}{\Delta x} \right] + \mathbf{i} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(a + \Delta x, b) - v(a, b)}{\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

Dado que los límites en esta expresión corresponden a las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  con respecto a  $x$ , deducimos que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x}(a, b). \quad (1.18)$$

Por otro lado, si  $\Delta z$  se aproxima a cero verticalmente, entonces  $\Delta z = i\Delta y$ , y se tiene de forma equivalente que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(a, b + \Delta y) - u(a, b)}{i\Delta y} \right] + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{v(a, b + \Delta y) - v(a, b)}{i\Delta y} \right].$$

Es decir

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial v}{\partial y}(a, b). \quad (1.19)$$

Pero es claro que las ecuaciones (1.18) y (1.19) deben ser iguales, es decir

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b);$$

así que igualando partes reales e imaginarias tenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.20)$$

que se satisfacen en el punto  $z_0 = a + bi$ . Las ecuaciones (1.20) son llamadas "ecuaciones de Cauchy-Riemann".

El siguiente resultado establece formalmente lo anterior.

**Teorema 1.5.2.** *Una condición necesaria para que la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sea diferenciable en  $z_0$  es que satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z_0$ . Recíprocamente, si  $f(z)$  es analítica en un abierto  $\Omega$ , entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en cada punto de  $\Omega$ .*

**Ejemplo 1.5.2.** *Si  $w = \frac{1+z}{1-z}$  entonces podemos escribir  $w = u + vi = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$ . Derivando parcialmente con respecto a  $x$  e  $y$  obtenemos*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 - 2y^2 - 4x + 2}{[(x-1)^2 + y^2]} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x^2 - 2y^2 - 4x + 2}{[(x-1)^2 + y^2]}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

También

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4y + 4xy}{[(x-1)^2 + y^2]} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-4xy + 4y}{[(x-1)^2 + y^2]},$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Luego se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y con esto concluimos que  $w = \frac{1+z}{1-z}$  es analítica para todo complejo  $z$ , tal que  $z \neq 1$ , dado que en este punto  $w$  no es diferenciable.

### 1.5.1. Funciones armónicas

**Definición 1.5.3.** Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica en una región  $R$  si en esa región satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in R. \quad (1.21)$$

En algunos textos utilizan  $\nabla^2$  para representar el laplaciano  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

Podemos demostrar que si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un cierto dominio  $D$ , entonces si las partes real e imaginaria de  $f$ ,  $u$  y  $v$  respectivamente, tienen segundas derivadas parciales continuas con respecto a  $x$  y  $y$  en  $D$ , ambas son armónicas en  $D$ .

Puesto que  $f$  es analítica en  $D$  las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.22)$$

se satisfacen en  $D$ . Puesto que las segundas derivadas parciales existen, la derivación de ambos lados de ambas ecuaciones da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Más aún, por la continuidad de estas derivadas

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x};$$

por consiguiente, si sumamos obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } D.$$

Luego la parte real de  $f$  es una función armónica.

Derivando la primera ecuación de (1.22) con respecto a  $y$  y la segunda con respecto a  $x$  tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Debido a la continuidad de estas derivadas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } D.$$

Con esto demostramos que la parte imaginaria de  $f$  es una función armónica.

## 1.6. Funciones elementales

Dadas dos funciones  $f(z)$  y  $g(z)$  podemos realizar las operaciones básicas entre funciones:  $f(z) + g(z)$ ,  $f(z)g(z)$ ,  $f(z)/g(z)$ ,  $[f(z)]^a$  y  $a^{f(z)}$  donde  $a$  es una constante compleja. A tales operaciones las llamaremos operaciones elementales.

Una función elemental es una función, generada a partir de constantes y cuya variable independiente se puede expresar por medio de una sucesión finita de operaciones elementales.

**Función exponencial.** Sabemos que si  $x$  y  $y \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Esta fórmula nos conduce a examinar el producto  $e^z e^w$  donde  $z$  y  $w \in \mathbb{C}$ . Con base en las conocidas fórmulas mencionadas en la Sección 1.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{w}{1!} + \frac{zw}{1!1!} + \frac{z^2 w}{2!1!} + \frac{z^3 w}{3!1!} + \dots + \\ &\quad \frac{w^2}{2!} + \frac{zw^2}{1!2!} + \frac{z^2 w^2}{2!2!} + \frac{z^3 w^2}{3!2!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} (z + w) + \frac{1}{2!} (z^2 + 2zw + w^2) + \frac{1}{3!} (z^3 + 3z^2 w + 3zw^2 + w^3) + \dots \\ &\quad \frac{1}{4!} (z^4 + 4z^3 w + 6z^2 w^2 + 4zw^3 + w^4) + \dots \\ &= 1 + \frac{(z+w)}{1!} + \frac{(z+w)^2}{2!} + \frac{(z+w)^3}{3!} + \frac{(z+w)^4}{4!} + \dots \\ &= e^{z+w} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Por tanto,

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Observemos que si  $w = yi$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ; en la Sección 1.1.1 dedujimos que

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y;$$

por tanto si  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  entonces

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

luego

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

que es la función exponencial.

**Funciones trigonométricas.** Para las funciones trigonométricas  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  procedemos de igual forma que para la función exponencial. Observemos la relación entre las tres series mencionadas en la Sección 1.1.1 al realizar las expansiones

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (1.25)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots \quad (1.26)$$

Es claro que los signos en las últimas dos series se repiten en períodos de cuatro y las potencias de  $i$  tienen la misma clase de período:

$$i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1.$$

Entonces, si sustituimos  $zi$  por  $z$  en la primera serie y arreglando convenientemente los términos, podemos escribir:

$$e^{zi} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + i \left( \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right).$$

Por tanto,

$$e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.27)$$

Si sustituimos  $-z$  por  $z$  en (1.25) y (1.26) deducimos inmediatamente que

$$\cos(-z) = \cos z \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z.$$

Ahora si bien, hacemos tal sustitución en (1.27), se obtiene:

$$e^{-zi} = \cos z - i \operatorname{sen} z \quad (1.28)$$

combinando (1.27) y (1.28) se obtiene

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}.$$

De esta manera hemos obtenido expresiones para las funciones trigonométricas seno y coseno en términos de la función exponencial; por tanto, el estudio de las funciones trigonométricas se reduce al estudio de la función exponencial.

Las otras cuatro funciones trigonométricas se deducen a partir del seno y el coseno, formalmente igual a sus homónimas reales:

$$\begin{aligned} 1. \quad \tan z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i(e^{zi} + e^{-zi})}, & 3. \quad \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{zi} + e^{-zi}}, \\ 2. \quad \cot z &= \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{i(e^{zi} + e^{-zi})}{e^{zi} - e^{-zi}}, & 4. \quad \csc z &= \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{zi} - e^{-zi}}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.1.** Demostremos que  $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ .

*Solución.* Utilizando las definiciones de seno y coseno tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \frac{1}{4} \left[ (e^{zi} + e^{-zi})^2 - (e^{zi} - e^{-zi})^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (e^{zi} + e^{-zi}) + (e^{zi} - e^{-zi}) \right] \left[ (e^{zi} + e^{-zi}) - (e^{zi} - e^{-zi}) \right] \\ &= \frac{1}{4} (2e^{zi}) (2e^{-zi}) \\ &= \frac{4}{4} e^0 = 1. \end{aligned}$$

**Funciones hiperbólicas.** Como

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \operatorname{cosh} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots, \end{aligned}$$

las funciones hiperbólicas se pueden deducir similarmente a las funciones trigonométricas y obtendremos:

$$\begin{array}{ll}
1. \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & 4. \quad \coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, \\
2. \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & 5. \quad \operatorname{sech} z = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \\
3. \quad \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, & 6. \quad \operatorname{csch} z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}.
\end{array}$$

**Ejemplo 1.6.2.** Probar que  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \frac{1}{4} \left[ (e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ (e^z + e^{-z}) + (e^z - e^{-z}) \right] \left[ (e^z + e^{-z}) - (e^z - e^{-z}) \right] \\
&= \frac{1}{4} (2e^z) (2e^{-z}) \\
&= \frac{4}{4} e^0 = 1.
\end{aligned}$$

**La función logarítmica.** Se dice que  $w \in \mathbb{C}$  es el logaritmo de  $z \in \mathbb{C}$ , escribimos

$$w = \log z \quad (1.29)$$

si y sólo si

$$z = e^w. \quad (1.30)$$

Si  $z = re^{\theta i}$  y  $w = u + vi$ , donde  $\theta, u, v \in \mathbb{R}$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ , entonces podemos escribir (1.30) en la forma

$$z = re^{\theta i} = e^{u+vi} = e^u e^{vi}.$$

El módulo del miembro izquierdo es  $r$ , y su argumento  $\theta$ . Sabemos que si dos números complejos son iguales, sus módulos también lo son, y la diferencia de sus argumentos es un múltiplo entero de  $2\pi$ , entonces:

$$e^u = r \quad v = \theta + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, como  $r \in \mathbb{R}^+$  y  $u \in \mathbb{R}$ , entonces por la teoría de funciones reales

$$u = \log r \quad v = \theta + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.31)$$

Por (1.29), (1.31), y como  $w = u + vi$ , entonces

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.32)$$

que podemos escribir en la forma

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.33)$$

Observemos que:

1.  $\log$  se usa con dos significados diferentes en ambos miembros de (1.32) y (1.33): en el miembro izquierdo se toman logaritmos de números complejos, mientras que en el miembro derecho se toma el logaritmo del número positivo  $r = |z|$ .
2. Una consecuencia directa es que el logaritmo tiene muchos valores, es decir, es una función multivaluada, ya que  $\arg z$  tiene infinidad de valores.
3. De entre el número infinito de valores de  $\log z$  se selecciona el valor cuya parte imaginaria está entre 0 y  $2\pi$ , y se llama el valor principal del logaritmo.

**Ejemplo 1.6.3.** Probar que  $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

*Solución.*

$$\begin{aligned} \log z_1 z_2 &= \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log |z_1| |z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2) \\ &= \log |z_1| + i \arg z_1 + \log |z_2| + i \arg z_2 \\ &= \log z_1 + \log z_2. \end{aligned}$$

**Funciones polinomiales.** Son las definidas por:

$$w = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

donde  $a_0 \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ .

**Funciones algebraicas racionales.** Son las definidas por:

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios.

**Funciones trigonométricas inversas.** Si  $w = \text{sen}^{-1} z$ , entonces, por definición

$$z = \text{sen } w = \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i};$$

multiplicando por  $2ie^{wi}$  y reordenando términos, tenemos

$$(e^{wi})^2 - 2iz(e^{wi}) - 1 = 0,$$

la cual es una ecuación de segundo grado en  $e^{wi}$ ; entonces

$$e^{wi} = \frac{1}{2} \left( 2zi + \sqrt{-4z^2 + 4} \right) = zi + \sqrt{1 - z^2},$$

y por tanto

$$w = \frac{1}{i} \ln \left( \sqrt{1 - z^2} + zi \right).$$

Omitimos  $\pm$ , por que se sobreentiende que  $\sqrt{1 - z^2}$  es de dos valores. Si  $a$  denota cualquiera de los dos valores de  $\sqrt{1 - z^2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{sen } w &= \text{sen} \left[ \frac{1}{i} \ln (a + zi) \right] \\ &= \frac{e^{\ln(a+zi)} - e^{-\ln(a+zi)}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \left( a + zi - \frac{1}{a + zi} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{(a + zi)^2 - 1}{a + zi} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{a^2 + 2azi - z^2 - 1}{a + zi} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1 - z^2 + 2azi - z^2 - 1}{a + zi} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{2azi - 2z^2}{a + zi} \right) \\ &= \frac{2zi}{2i} \left( \frac{a + zi}{a + zi} \right) = z. \end{aligned}$$

Similarmente podemos obtener las otras funciones trigonométricas inversas:

$$1. \quad \operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln (z i + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$4. \quad \operatorname{cot}^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{z + i}{z - i} \right),$$

$$2. \quad \operatorname{cos}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$5. \quad \operatorname{sec}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} \right),$$

$$3. \quad \operatorname{tan}^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{1 + z i}{1 - z i} \right),$$

$$6. \quad \operatorname{csc}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left( \frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right).$$

**Funciones hiperbólicas inversas.** Si  $w = \operatorname{senh}^{-1} z$ , entonces, por definición:

$$z = \operatorname{senh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2};$$

multiplicando por  $2e^w$  y reordenando términos,

$$(e^w)^2 - 2z(e^w) - 1 = 0;$$

entonces

$$e^w = \frac{1}{2} (2z + \sqrt{4z^2 + 4}) = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

luego

$$w = \ln (\sqrt{z^2 + 1} + z),$$

y por tanto  $\operatorname{senh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1})$ .

De forma análoga podemos obtener las otras funciones hiperbólicas inversas:

$$1. \quad \operatorname{senh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$4. \quad \operatorname{coth}^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right),$$

$$2. \quad \operatorname{cosh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$5. \quad \operatorname{sech}^{-1} z = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} \right),$$

$$3. \quad \operatorname{tanh}^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right),$$

$$6. \quad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z} \right).$$

**Función potencial.** La función  $z^\alpha$ , donde  $\alpha$  puede ser complejo, está definida como  $e^{\alpha \ln z}$ .

Veamos algunos ejemplos con funciones trigonométricas.

**Ejemplo 1.6.4.** Probar que  $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\
 &= \frac{e^{z_1 i} e^{z_2 i} - e^{-z_1 i} e^{-z_2 i}}{2i} \\
 &= \frac{(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2)}{2i} \\
 &\quad - \frac{(\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 - i \operatorname{sen} z_2)}{2i} \\
 &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.5.** Probar que  $\operatorname{sen}(zi) = i \operatorname{senh} z$ .

*Solución.*

$$\operatorname{sen}(zi) = \frac{e^{i(zi)} - e^{-i(zi)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \operatorname{senh} z.$$

**Ejemplo 1.6.6.** Probar que  $\cos(zi) = \operatorname{cosh} z$ .

*Solución.*

$$\cos(zi) = \frac{e^{i(zi)} + e^{-i(zi)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{cosh} z.$$

A partir de los tres últimos ejemplos podemos deducir fácilmente que

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \operatorname{sen} x \cos(yi) + \cos x \operatorname{sen}(yi) = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

# Capítulo 2

## Aplicaciones y transformaciones de Möbius

### 2.1. Transformaciones generales

Recordemos de la Sección 1.3.1 que una transformación o aplicación establece una correspondencia entre puntos  $(x, y)$  del plano  $Z$  en puntos  $(u, v)$  del plano  $W$ .

Consideremos  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $a, \theta \in \mathbb{R}$ ; entre las transformaciones mas importantes tenemos:

1. **Traslación.**  $w = z + \beta$ . Esta transformación traslada las figuras del plano  $Z$ , en la dirección del vector  $\beta$ .
2. **Rotación.**  $w = e^{\theta i} z$ . Esta transformación rota un ángulo  $\theta$  las figuras del plano  $Z$ . Si  $\theta > 0$ , la rotación es en sentido positivo, y si  $\theta < 0$  en sentido negativo.
3. **Dilatación.**  $w = az$ . Esta transformación dilata (o contrae) las figuras del plano  $Z$  en la dirección de  $z$ , si  $a > 1$  (ó  $0 < a < 1$ ).
4. **Inversión.**  $w = \frac{1}{z}$ . Esta transformación representa reflexión en el eje real e inversión en el origen.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $R$  es la región rectangular en el plano  $Z$  limitada por  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$ . Determinemos la región  $R'$  del plano  $W$  en la cual  $R$  se aplica bajo las siguientes transformaciones:

1.  $w = z + (1 - 2i)$ .                      2.  $w = e^{\frac{\pi i}{2}} z$ .                      3.  $w = 2z$ .

**Solución.**

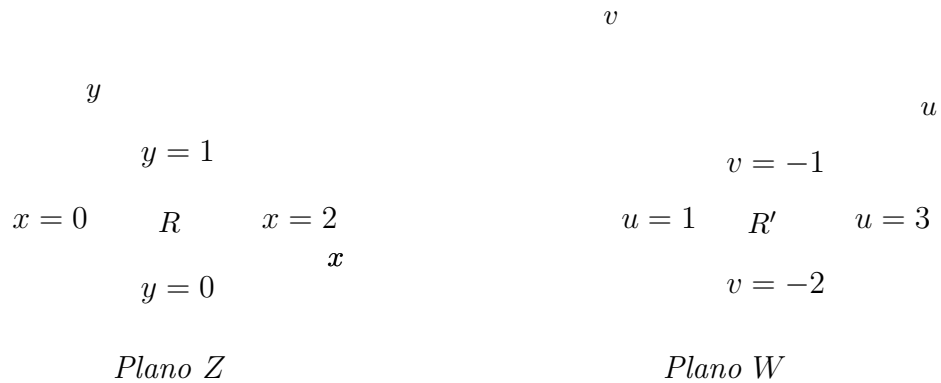
1. Como  $w = z + (1 - 2i)$ , entonces

$$w = u + vi = x + yi + 1 - 2i = (x + 1) + (y - 2)i.$$

Esto implica que  $u = x + 1$  y  $v = y - 2$ .

Luego la recta  $x = 0$  se aplica en  $u = 1$ ;  $y = 0$  en  $v = -2$ ;  $x = 2$  en  $u = 3$ ;  $y = 1$  en  $v = -1$ .

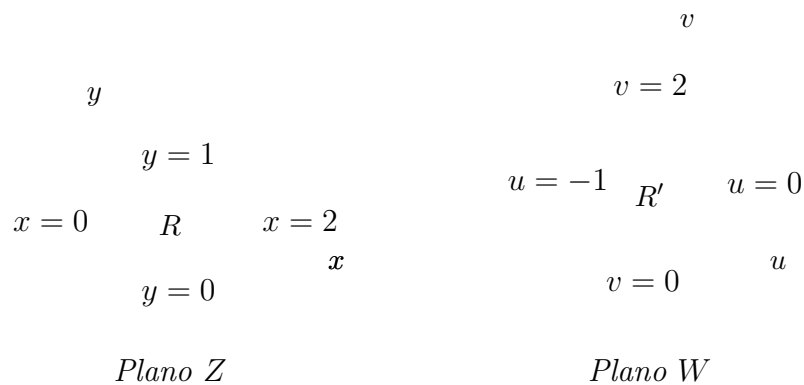
Análogamente, cada punto de  $R$  se aplica en uno y solo un punto de  $R'$  y recíprocamente.



2. Como  $w = e^{\frac{\pi i}{2}} z = zi$ , entonces

$$w = u + vi = (x + yi)i = xi - y = -y + xi \Rightarrow u = -y, v = x.$$

Entonces la recta  $x = 0$  se aplica en  $v = 0$ ;  $y = 0$  en  $u = 0$ ;  $x = 2$  en  $v = 2$ ;  $y = 1$  en  $u = -1$ .





iii) Si  $w = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , entonces  $z = \frac{w}{a}$  y  $\bar{z} = \frac{\bar{w}}{\bar{a}}$ , por tanto

$$\begin{aligned} A \left( \frac{w}{a} \right) \left( \frac{\bar{w}}{\bar{a}} \right) + \bar{B} \left( \frac{\bar{w}}{\bar{a}} \right) + B \left( \frac{w}{a} \right) + C &= 0, \\ Aw\bar{w} + \bar{B}a\bar{w} + B\bar{a}w + Ca\bar{a} &= 0, \\ Aw\bar{w} + (\bar{B}a)\bar{w} + (B\bar{a})w + Ca\bar{a} &= 0, \end{aligned}$$

que también es la ecuación de una circunferencia en el plano  $W$ .

iv) Si  $w = \frac{1}{z}$ , entonces  $z = \frac{1}{w}$  y  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ , lo cual implica que

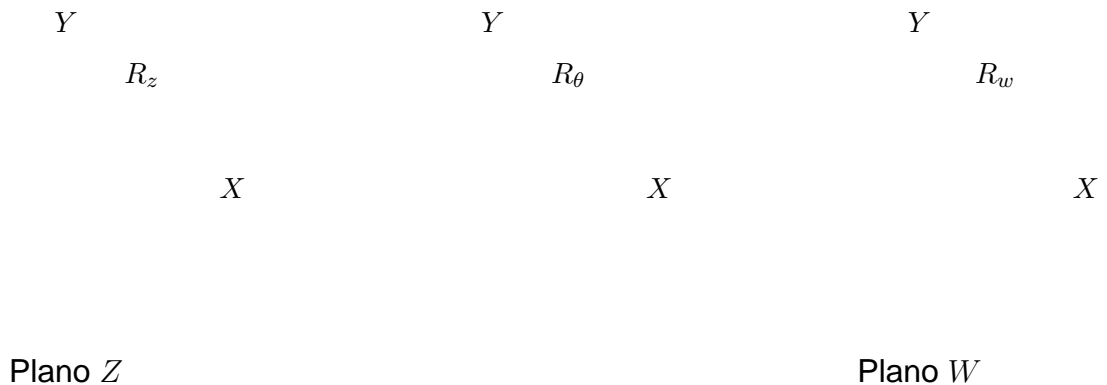
$$\begin{aligned} A \left( \frac{1}{w} \right) \left( \frac{1}{\bar{w}} \right) + \bar{B} \left( \frac{1}{\bar{w}} \right) + B \left( \frac{1}{w} \right) + C &= 0, \\ A + \bar{B}w + B\bar{w} + Cw\bar{w} &= 0, \\ Cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w + A &= 0, \end{aligned}$$

que de nuevo es la ecuación de una circunferencia en el plano  $W$ .

Por tanto las transformaciones generales son transformaciones circulares. □

### 2.1.1. Transformaciones sucesivas

Supongamos que  $w = f_1(\theta)$  aplica la región  $R_\theta$  del plano  $\Theta$  en la región  $R_w$  del plano  $W$ , mientras que  $\theta = f_2(z)$  aplica la región  $R_z$  del plano  $Z$  en la región  $R_\theta$ , entonces  $w = f_1[f_2(z)]$  aplica  $R_z$  en  $R_w$ . Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  definen transformaciones sucesivas de un plano a otro las cuales son equivalentes a una única transformación.



### 2.1.2. La transformación lineal

**Definición 2.1.2.** Una aplicación de la forma

$$w = \alpha z + \beta, \quad (2.1)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , se llama una transformación lineal.

Puesto que podemos escribir (2.1) en términos de las transformaciones sucesivas  $w = \xi + \beta$ ,  $\xi = e^{\theta_0 i} \tau$ ,  $\tau = az$ , donde  $\alpha = ae^{\theta_0 i}$ , vemos que una transformación lineal general es una combinación de las transformaciones de traslación, rotación y dilatación.

## 2.2. Transformaciones conformes

**Definición 2.2.1.** Decimos que una transformación  $w = f(z)$  es conforme en  $z_0$  si conserva la magnitud y el sentido del ángulo de intersección de dos curvas cualesquiera que se intersecan en  $z_0$ .

A veces se habla de transformaciones isogonales. Estas transformaciones conservan la magnitud de los ángulos de intersección, aunque no necesariamente el sentido.

En la Sección 1.3 analizamos las funciones  $w = z^2$  y  $w = \frac{1}{z}$ ; en el ejemplo siguiente analizamos la conformidad de la función  $w = \frac{1}{z}$ .

**Ejemplo 2.2.1.** Consideremos las rectas  $C$  y  $C_1$  definidas por  $x = y$ ,  $x > 0$  y  $x = 1$ ,  $y \geq 1$  respectivamente. Obtenga las imágenes de estas rectas con la transformación  $w = \frac{1}{z}$  y compruebe que el ángulo de intersección conserva magnitud y dirección.

**Solución.** La transformación es

$$w = \frac{1}{z} = u + vi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2};$$

entonces

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

$y$

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (2.3)$$

Sobre  $C$ , tenemos  $y = x$ ; sustituyendo en (2.2) y (2.3) obtenemos

$$u = \frac{1}{2x} = -v; \quad (2.4)$$

como  $x > 0$ , tenemos  $u \geq 0$  y  $v \leq 0$ . La recta definida por la ecuación (2.4) aparece como  $C'$  en la Figura 2.1(b). A medida que nos alejamos del origen a lo largo de  $C$ , el punto imagen correspondiente se aproxima al origen a lo largo de  $C'$ , ya que, de acuerdo con (2.4), tanto  $u$  como  $v$  tienden a cero al aumentar  $x$ .

Sobre  $C_1$ , tenemos  $x = 1$ ; sustituyendo en (2.2) y (2.3) tenemos

$$u = \frac{1}{1 + y^2}, \quad (2.5)$$

$$v = \frac{-y}{1 + y^2}; \quad (2.6)$$

entonces

$$v = -uy. \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.5) obtenemos fácilmente

$$y = \sqrt{\frac{1-u}{u}}.$$

Combinando este resultado con (2.7) se tiene

$$v = -\sqrt{u - u^2}.$$

Elevando ambos lados al cuadrado y reordenando, tenemos que  $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = (\frac{1}{2})^2$ .

Por tanto las imágenes de los puntos de  $C_1$  están sobre un círculo de radio  $\frac{1}{2}$  centrado en  $(\frac{1}{2}, 0)$  en el plano  $W$ . Cuando  $y$  pasa de 1 a  $\infty$  a lo largo de  $C_1$ , entonces según (2.5) la coordenada  $u$  del punto imagen varía de  $\frac{1}{2}$  a 0 a lo largo del círculo. Como  $v$  es siempre negativo (2.6), la imagen de  $C_1$  es el arco  $C'_1$  de la Figura 2.1(b).

Recordemos que un ángulo semiinscrita en una circunferencia es aquel cuyo vértice,  $P'$ , está sobre ella, uno de sus lados la corta y el otro es tangente en  $P'$ . La medida de un ángulo semiinscrita es la mitad de la del arco que abarca.

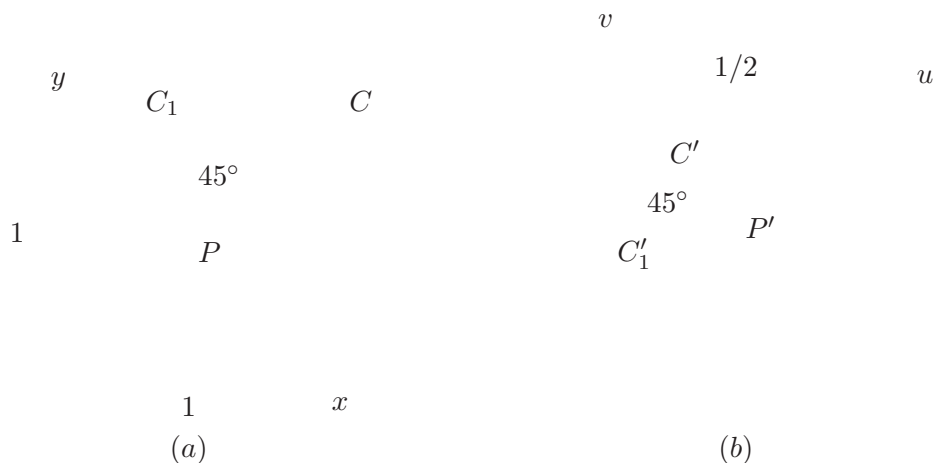


Figura 2.1.

Así, el ángulo de intersección de  $C'_1$  y  $C'$  en la Figura 2.1(b) es igual a  $45^\circ$ , que es el ángulo que forman  $C_1$  y  $C$ . Obsérvese en las Figuras 2.1 (a) y (b) que el sentido de la separación angular entre las tangentes a  $C$  y  $C_1$  es igual que el de la separación angular entre  $C'$  y  $C'_1$ .

El siguiente teorema nos brinda una condición para deducir fácilmente cuándo una transformación es conforme con base en las funciones analíticas.

**Teorema 2.2.1.** Si  $w = f(z)$  es analítica en  $z_0$  y si  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ .

La demostración de este teorema se puede ver en [6].

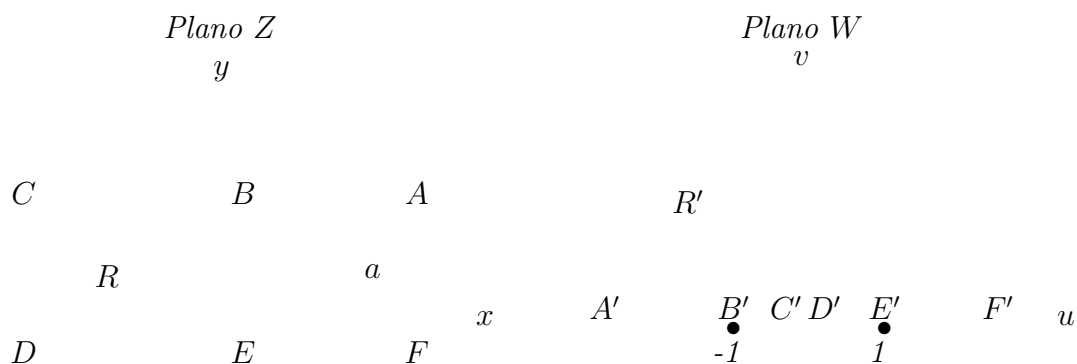
**Ejemplo 2.2.2.** Analice la conformidad de la función  $w = z^2$ , basándose en el teorema anterior.

**Solución.** Como  $\frac{dw}{dz} = 2z$ , que es continua  $\forall z$  finito  $z \neq 0$ , entonces  $w = z^2$  es conforme en cualquier región finita del plano  $Z$  que no contenga al punto  $z = 0$ , en una región correspondiente del plano  $W$ .

## 2.3. Transformaciones especiales

Mostraremos a continuación algunas transformaciones especiales importantes para algunas aplicaciones que presentaremos más adelante.

**Ejemplo 2.3.1.** (Banda infinita de ancho  $a$ ). Verificar que la región  $R$  del plano  $Z$  se transforma en la región  $R'$  del plano  $W$  por medio de transformación  $w = e^{\frac{\pi z}{a}}$ .



**Solución.** Si  $z = x + yi$ , entonces

$$w = u + vi = e^{\frac{\pi z}{a}} = e^{\frac{\pi(x+yi)}{a}} = e^{\frac{\pi x}{a}} \left( \cos \frac{\pi y}{a} + i \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} \right),$$

por tanto,

$$w = e^{\frac{\pi x}{a}} \left( \cos \frac{\pi y}{a} \right) + i e^{\frac{\pi x}{a}} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} \right),$$

es decir,

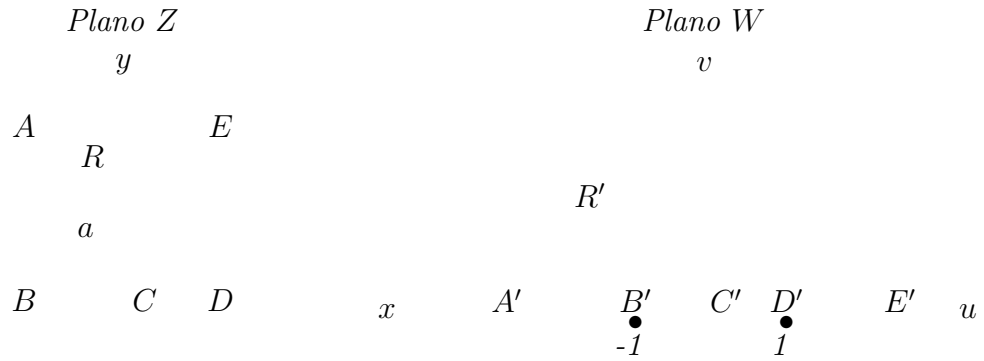
$$u = e^{\frac{\pi x}{a}} \left( \cos \frac{\pi y}{a} \right), \quad v = e^{\frac{\pi x}{a}} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} \right).$$

La recta  $y = 0$  en el plano  $Z$  se aplica en  $u = e^{\frac{\pi x}{a}}$ ,  $v = 0$  el eje real positivo en el plano  $W$ . El origen del plano  $Z$  se aplica en  $w = 1$ , el punto  $D$  se aplica en  $w = 0$  y el punto  $F$  se aplica en  $w = \infty$ .

La recta  $y = a$  se aplica en  $u = -e^{\frac{\pi x}{a}}$ ,  $v = 0$ , los puntos  $A$  y  $C$  se aplican en  $w = -\infty$  y  $w = 0$  respectivamente.

Cualquier punto que satisfaga  $0 < y < a$ ,  $-\infty < x < \infty$  se aplica de manera única en un punto del plano  $W$  para el cual  $v > 0$ .

**Ejemplo 2.3.2.** (Banda semiinfinita de ancho  $a$ ). Verificar que la región  $R$  del plano  $z$  es transformada en la región  $R'$  del plano  $W$  por medio de transformación  $w = \operatorname{sen} \frac{\pi z}{a}$ .



**Solución.** Si  $z = x + yi$ , entonces

$$\begin{aligned} w &= u + vi = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi z}{a} \right) \\ &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(x + yi)}{a} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi yi}{a} \right). \end{aligned}$$

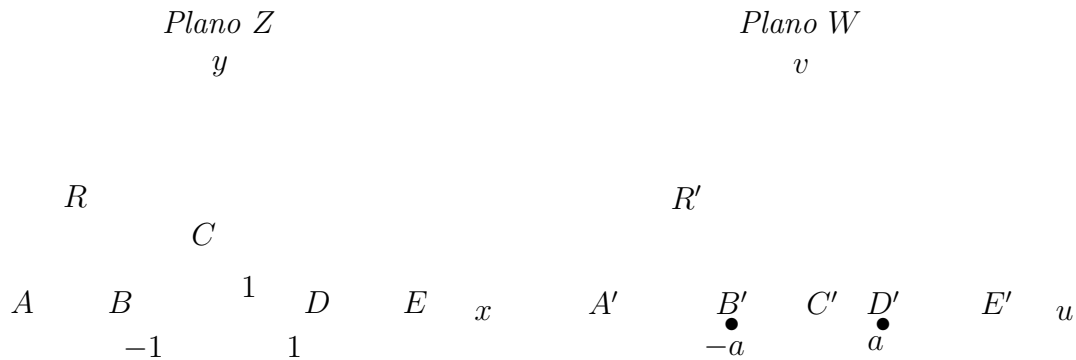
Con base en los Ejemplos 1.6.4 a 1.6.6, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi yi}{a} \right) &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cosh \left( \frac{\pi y}{a} \right) + i \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{\pi y}{a} \right) \\ &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \left( \frac{e^{\frac{\pi y}{a}} + e^{-\frac{\pi y}{a}}}{2} \right) + i \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \left( \frac{e^{\frac{\pi y}{a}} - e^{-\frac{\pi y}{a}}}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces:

la recta  $\frac{-a}{2} < x < \frac{a}{2}$ ,  $y = 0$  se transforma en la recta  $-1 < u < 1$ ,  $v = 0$ . Las rectas  $x = \frac{-a}{2}$ ,  $y > 0$  y  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y > 0$  del plano  $Z$  se transforman en las rectas  $u \leq -1$ ,  $v = 0$  y  $u \geq 1$ ,  $v = 0$ , respectivamente. Cualquier punto que satisfaga  $\frac{-a}{2} < x < \frac{a}{2}$ ,  $y > 0$  se aplica de manera única en un punto del plano  $W$  para el cual  $v > 0$ .

**Ejemplo 2.3.3.** (Semiplano sin un semicírculo). Verificar que la región  $R$  del plano  $Z$  se transforma en la región  $R'$  del plano  $W$  por medio de transformación  $w = \frac{a}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .



**Solución.** Si  $z = re^{\theta i}$ , entonces

$$w = u + vi = \frac{a}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{a}{2} \left( re^{\theta i} + \frac{1}{r} e^{-\theta i} \right) = \frac{a}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{ai}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta,$$

y

$$u = \frac{a}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{a}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta.$$

El semicírculo  $BCD$  [ $r = 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ] se aplica en el segmento  $B'C'D'$  [ $u = a \cos \theta, v = 0, 0 \leq \theta \leq \pi, ie, -a \leq u \leq a$ ].

La recta  $DE$  [ $\theta = 0, r > 1$ ] se aplica en la recta  $D'E'$  [ $u = \frac{a}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), v = 0$ ]; la recta  $AB$  [ $\theta = \pi, r > 1$ ] se aplica en  $A'B'$  [ $u = -\frac{a}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), v = 0$ ]. Cualquier punto del plano  $Z$  para el cual  $r \geq 1$  y  $0 < \theta < \pi$  se aplica de manera única en uno de los puntos del plano  $W$  para el cual  $v \geq 0$ .

Hay otro tipo de transformación que se puede obtener a partir de transformaciones sucesivas (Sección 2.1.1), que es el tema principal de la presente monografía. Esta es la **transformación bilineal o transformación de Möbius**, que analizaremos en la siguiente sección.

## 2.4. Transformaciones de Möbius

**Definición 2.4.1.** La transformación  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , se llama una transformación racional, bilineal o de Möbius.

### 2.4.1. Propiedades generales

**Teorema 2.4.1.** *La transformación bilineal es 1-1 a través del plano complejo completo.*

*Demostración.* Es sencillo comprobar que la transformación bilineal asigna a cada punto del plano  $Z$ , excepto al punto  $z = \frac{-d}{c}$ ,  $c \neq 0$ , un único punto del plano  $W$ . El punto  $z = \frac{-d}{c}$ ,  $c \neq 0$  se transforma en  $w = \infty$ .  $\square$

Una característica importante de las transformaciones de Möbius es que son equivalentes a combinación de transformaciones generales.

**Teorema 2.4.2.** *La transformación  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , representa traslación, rotación, dilatación e inversión.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} w = \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{c^2 (az + b)}{c^2 (cz + d)} \\ &= \frac{ac^2 z + bc^2}{c^2 (cz + d)} \\ &= \frac{ac^2 z + acd + bc^2 - acd}{c^2 (cz + d)} \\ &= \frac{ac (cz + d) + c (bc - ad)}{c^2 (cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)}{c (cz + d)} \\ &= \lambda + \frac{\mu}{z + \nu}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda = \frac{a}{c}$ ,  $\mu = \frac{(bc - ad)}{c^2}$  y  $\nu = \frac{d}{c}$  son constantes. La transformación es equivalente a  $\xi = z + \nu$ ,  $\tau = \frac{1}{\xi}$  y  $w = \lambda + \mu\tau$ , las cuales son combinaciones de las transformaciones generales.  $\square$

Las transformaciones de Möbius son conformes. Para probar esto demostremos que una transformación de este tipo es analítica, y luego podremos deducir la conformidad más fácilmente.

**Teorema 2.4.3.** *La transformación de Möbius  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $z \neq \frac{-d}{c}$ , es analítica en todo punto del plano excepto en  $z = \frac{-d}{c}$ .*

*Demostración.* Como  $f(z) = az + b$  es analítica  $\forall z \in \mathbb{C}$ , y  $g(z) = \frac{1}{cz + d}$  es analítica  $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-d}{c}$ , entonces  $w = f(z)g(z)$  es analítica  $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-d}{c}$ .  $\square$

Ahora analicemos si  $w = \frac{az + b}{cz + d}, z \neq \frac{-d}{c}$  es conforme.

Como

$$\begin{aligned} w' &= \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} \\ &= \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-d}{c}$ , entonces por el Teorema 2.2.1  $w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0, z \neq \frac{-d}{c}$ , es conforme en  $z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-d}{c}$ .

**Teorema 2.4.4.** *La transformación bilineal es una transformación circular.*

*Demostración.* Puesto que las transformaciones bilineales se pueden expresar como combinación de transformaciones generales que son transformaciones circulares, entonces las transformaciones bilineales son transformaciones circulares.  $\square$

Hay una forma útil de representar una transformación bilineal  $T$ , y es mediante una matriz cuadrada de sus coeficientes,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dónde  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Ahora bien, si  $T'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$  es una segunda transformación, probemos que la transformación  $T[T'(z)]$  puede escribirse como

$$TT' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
T[T'(z)] &= \frac{a \left( \frac{a'z + b}{c'z + d'} \right) + b}{c \left( \frac{a'z + b}{c'z + d'} \right) + d} \\
&= \frac{\left( \frac{aa'z + ab'}{c'z + d'} \right) + b}{\left( \frac{ca'z + cb'}{c'z + d'} \right) + d} \\
&= \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{ca'z + cb' + dc'z + dd'} \\
&= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir  $TT' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ .

**Teorema 2.4.5.** *El conjunto de las transformaciones bilineales forma un grupo.*

*Demostración.* i) Si  $T$ ,  $T'$  y  $T''$  son transformaciones bilineales, demostremos que  $(TT')T'' = T(T'T'')$ .

Supongamos que  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ;  $T'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$  y  $T''(z) = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}$ , entonces

$$\begin{aligned}
(TT')T'' &= \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right] \\
&= T(T'T'').
\end{aligned}$$

Por tanto, el producto de transformaciones lineales es asociativo.

ii) Si  $T_0(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a = d = 1$  y  $b = c = 0$ , entonces  $T_0(z) = z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , luego

$$TT_0 = T_0T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y por consiguiente  $T_0$  es el módulo.

iii) Para cada elemento  $T$  existe  $T^{-1}$  tal que  $TT^{-1} = T^{-1}T = T_0$  tal elemento es

$$T^{-1} = \frac{-dz + b}{cz - a};$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -ad + bc & ab - ad \\ -dc + dc & cb - ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} \\ &= \frac{(bc - ad)z}{(bc - ad)} = z = T_0. \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que el conjunto de las transformaciones bilineales forma un grupo.  $\square$

La transformación bilineal  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$  la podemos escribir en la forma

$$Azw + Bz + Cw + D = 0. \quad (2.8)$$

Si  $A \neq 0$ , podemos probar que existe una transformación bilineal única, es decir, un conjunto  $\{A, B, C, D\}$  único, excepto que puede tener un factor común, que aplica tres puntos dados distintos  $z_1, z_2, z_3$  del plano  $Z$  sobre tres puntos distintos  $w_1, w_2, w_3$  del plano  $W$ , respectivamente.

En efecto como  $A \neq 0$ , al dividir (2.8) por  $A$  obtenemos

$$\alpha z + \beta z + \delta = -zw, \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{B}{A}, \beta = \frac{C}{A} \text{ y } \delta = \frac{D}{A}. \quad (2.9)$$

Como  $z_i$  se aplica en  $w_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , tenemos

$$\alpha z_1 + \beta w_1 + \delta = -z_1 w_1,$$

$$\alpha z_2 + \beta w_2 + \delta = -z_2 w_2,$$

$$\alpha z_3 + \beta w_3 + \delta = -z_3 w_3,$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

que es un sistema de tres ecuaciones lineales en  $\alpha, \beta$  y  $\delta$ .

Este sistema es no homogéneo, ya que si  $z_i = 0$  para algún  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $z_j \neq 0$  para todo  $j = 1, 2, 3$ ,  $j \neq i$ , puesto que son tres puntos distintos. Análogamente para  $w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Luego siempre deben existir  $z_i \neq 0$  y  $w_i \neq 0$  para por lo menos un  $i$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

- Si  $\Delta \neq 0$ , con  $\Delta = \det A$  entonces existe una solución única para  $\alpha, \beta$  y  $\delta$ .
- Si  $\Delta = 0$ , la primera columna de  $\Delta$  es una combinación lineal de las columnas segunda y tercera; entonces

$$z_1 = mw_1 + n,$$

$$z_2 = mw_2 + n,$$

$$z_3 = mw_3 + n,$$

luego  $w = \frac{1}{m}z - \frac{n}{m}$  es una transformación lineal única que es un caso especial de las transformaciones bilineales y efectúa la aplicación.

Ya habiendo demostrado que existe tal transformación, ahora deduzcámosla.

Si  $w_1, w_2, w_3$  corresponde a  $z_1, z_2, z_3$ , tenemos

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)},$$

entonces

$$w - w_1 = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}, \quad (2.11)$$

$$w - w_3 = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)}, \quad (2.12)$$

reemplazando  $w$  por  $w_2$  y  $z$  por  $z_2$ , tenemos

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}, \quad (2.13)$$

$$w_2 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}, \quad (2.14)$$

dividiendo (2.11) entre (2.13), y como  $ad - bc \neq 0$ ,

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

La parte del lado derecho de la ecuación se llama la razón cruzada de la transformación, que podemos escribir en la forma (2.11) por desarrollo de los productos.

Por otra parte,

$$(z - z_3)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1). \quad (2.15)$$

Tenemos entonces:

- Si  $z = z_1$  entonces  $w = w_1$ .
- Si  $z = z_3$  entonces  $w = w_3$ .
- Si  $z = z_2$ , hay un factor común en ambos miembros de la ecuación (2.15), y esta se reduce a

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1),$$

y por tanto la solución es  $w = w_2$ .

El punto del infinito lo podemos introducir como uno de los puntos prescritos en el plano  $Z$  o en el plano  $W$ .

**Ejemplo 2.4.1.** Encuentre la transformación bilineal que aplica los puntos  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 1$ ;  $z_3 = i$ , en los puntos  $w_1 = 0$ ;  $w_2 = i$ ;  $w_3 = -1$ , respectivamente.

**Solución.**

$$\frac{(w - 0)(i + 1)}{(w + 1)(i - 0)} = \frac{(z - 0)(1 - 2)}{(z - i)(1 - 0)},$$

entonces

$$\begin{aligned} w(i + 1)(z - i) &= z(1 - i)(w + 1)i, \\ wz i + w + zw - wi &= zw i + z i + zw + z, \\ w(1 - i) &= z(1 + i), \\ w &= \frac{z(1 + i)}{(1 - i)}, \\ w &= z i. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.4.2.** Hallar una transformación bilineal que aplica los puntos  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = -1$ , en  $w_1 = i$ ,  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = \infty$ , respectivamente.

**Solución.** Poniendo  $w_3 = \frac{1}{w'_3}$ , podemos escribir la transformación en la forma

$$\frac{(w - w_1)(w'_3 w_2 - 1)}{(w'_3 w - 1)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Cuando  $w'_3 = 0$  e introducimos los valores de las restantes constantes, la ecuación queda

$$\frac{w - i}{1 - i} = \frac{z - 1}{-(z + 1)}$$

entonces

$$w = \frac{(-1 + 2i)z + 1}{z + 1}.$$

**Ejemplo 2.4.3.** Hallar una transformación que aplique el semiplano superior del plano  $Z$  en el círculo unidad de plano  $W$  de tal manera que  $z = i$  se aplica en  $w = 0$ , el punto en el infinito se aplique en  $w = -1$ .

**Solución.** Se puede demostrar que la transformación  $w = e^{i\theta_0} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$  transforma el semiplano superior en el interior del círculo unidad, donde  $z_0$  es cualquier punto  $p$  en el semiplano superior.

Dado que  $w = 0$  si  $z = i$  y  $w = -1$  si  $z = \infty$ . Entonces, de  $w = e^{i\theta_0} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$  tenemos  $0 = e^{i\theta_0} \left( \frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0} \right)$ , de modo que  $z_0 = i$ . Para  $z = \infty$  tenemos  $w = e^{i\theta_0} = -1$ . Por tanto la transformación buscada es

$$w = (-1) \left( \frac{z - i}{z + i} \right) = \frac{i - z}{i + z}.$$

La situación se describe gráficamente en la Figura 2.2.

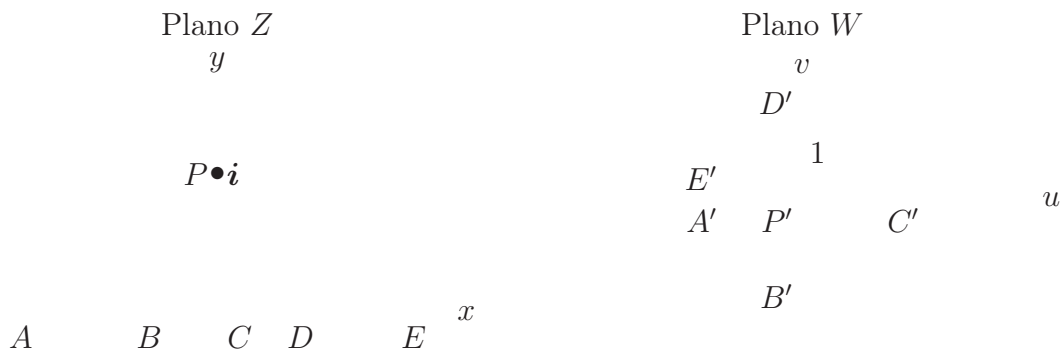


Figura 2.2.

## 2.4.2. Puntos fijos

**Definición 2.4.2.** Se dice que un punto  $z_1$  es un punto fijo de una transformación  $w = f(z)$  si  $z_1 = f(z_1)$ .

**Teorema 2.4.6.** La transformación bilineal  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , tiene dos puntos fijos:

$$z_1 = \frac{a - d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} \quad y \quad z_2 = \frac{a - d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

*Demostración.* Haciendo  $w = z$  tenemos

$$z = \frac{az + b}{cz + d};$$

entonces obtenemos la ecuación

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

cuyas raíces son

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad \square$$

Una transformación bilineal se puede expresar en función de sus dos puntos fijos. Antes de enunciar tal teorema demostremos el siguiente resultado, que nos será útil mas adelante.

**Teorema 2.4.7.** Sean  $z_1, w_1$  y  $z_2, w_2$  dos parejas de puntos correspondientes finitos de la transformación bilineal  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ; entonces

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

*Demostración.* Tenemos

$$w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d},$$

donde  $cz_1 + d \neq 0$ , porque de otra manera  $w_1 = \infty$ ; entonces,

$$w - w_1 = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}, \quad (2.16)$$

y análogamente

$$w - w_2 = \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)}. \quad (2.17)$$

Dividiendo (2.16) entre (2.17) obtenemos

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad \square$$

**Teorema 2.4.8.** *La transformación bilineal  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad - bc \neq 0, c \neq 0$ , expresada en función de sus puntos fijos  $z_1$  y  $z_2$ , es*

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

donde

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}.$$

*Demostración.* En el Teorema 2.4.7 tomemos  $w_1 = z_1$  y  $w_2 = z_2$ , y como  $cz_1 + d \neq 0$ , entonces

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (2.18)$$

Ahora bien, si sustituimos los puntos fijos  $z_1$  y  $z_2$  garantizados por el Teorema 2.4.6 en  $\frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}$ , obtenemos a partir (2.18) el resultado esperado.  $\square$

**Teorema 2.4.9.** *Una transformación bilineal está determinada en forma única por los puntos fijos y alguna otra pareja de puntos correspondientes.*

*Demostración.* Este se deduce inmediatamente del Teorema 2.4.7.  $\square$

La constante  $K$  del Teorema 2.4.8 es conocida como la invariante de la transformación bilineal.

Basándonos en el Teorema 2.4.8 y la constante  $K$ , podemos deducir el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.10.** *Una transformación bilineal está determinada en forma única por los puntos fijos y la invariante.*

### 2.4.3. Algunas aplicaciones físicas que involucran transformaciones de Möbius. Soluciones a los problemas de Dirichlet y de Neumann por medio de aplicaciones conformes

Una condición de frontera es una condición que debe satisfacer una ecuación diferencial parcial sobre la frontera de un dominio especificado.

Un problema de valores de frontera es el problema de determinar la solución de una ecuación diferencial parcial que satisfaga las condiciones de frontera dadas.

Es muy importante tanto desde el punto de vista matemático como físico que la solución de estos problemas sea única.

La ecuación de Laplace (1.21) aparece en muchas ramas de la física, por ejemplo en el potencial electrostático, la temperatura en el caso de conducción de calor en estado estacionario, el potencial de velocidad en el caso de flujo irrotacional estacionario de un flujo ideal, y en otras situaciones físicas donde prevalecen condiciones de equilibrio.

Sea  $R$  una región simplemente conexa\* acotada por una curva simple cerrada  $C$ ; hay dos tipos de problemas de frontera de gran importancia.

### El problema de Dirichlet.

Este problema busca determinar una función  $\phi$  que satisfaga la ecuación de Laplace en  $R$  y tome valores prescritos sobre la frontera  $C$ .

### El problema de Neumann.

Este problema busca determinar una función  $\phi$  que satisfaga la ecuación de Laplace en  $R$  y cuya derivada normal  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  tome valores prescritos sobre la frontera de  $C$ .

La región  $R$  puede estar no acotada. Por ejemplo,  $R$  puede ser el semiplano superior con el eje  $x$  como frontera  $C$ .

Los problemas de Dirichlet y de Neumann pueden ser resueltos para una región  $R$  simplemente conexa, la cual se puede aplicar conformemente por una función analítica sobre el interior de un círculo unidad o semiplano. El método que suele emplearse para obtener una solución es el siguiente:

**Paso 1:** Hallar una transformación conforme que aplique el dominio dado sobre un dominio más simple (círculo unidad o semiplano).

**Paso 2:** Resolver el problema para el círculo o semiplano.

**Paso 3:** Transformar la solución, utilizando la inversa de la aplicación, para obtener la solución al problema dado.

A continuación resolveremos un problema de Dirichlet para el semiplano superior.

**Ejemplo 2.4.4.** *Encontrar una función armónica en el semiplano superior del plano  $Z$ ,  $\text{Im } z > 0$ , el cual toma los valores prescritos sobre el eje  $x$  dados por*

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

---

\*Si cualquier curva simple cerrada contenida en la región se puede contraer a un punto sin salirnos de ella.

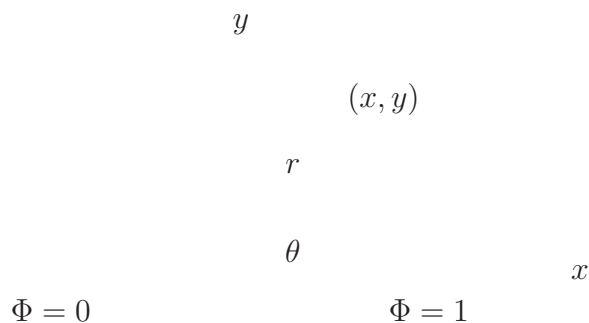


Figura 2.3.

**Solución.** Debemos resolver para  $\Phi(x, y)$  el problema de frontera

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0; \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \Phi(x, y) = G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Este es un problema de Dirichlet para el semiplano superior (Figura 2.3). Con base en el Teorema 1.5.2 y la Definición 1.5.3 se puede concluir que la función  $A\theta + B$ , donde  $A, B \in \mathbb{R}$ , es armónica, puesto que ella es la parte imaginaria de  $A \ln z + B$ .

Para determinar  $A$  y  $B$  observemos que las condiciones de frontera son  $\Phi = 1$  para  $x > 0$ , o sea  $\theta = 0$  y  $\Phi = 0$  para  $x < 0$ , o sea  $\theta = \pi$ . De este modo

$$1 = A(0) + B, \quad 0 = A(\pi) + B,$$

de lo cual  $A = \frac{-1}{\pi}$  y  $B = 1$ .

Entonces la solución buscada es

$$\Phi(x, y) = A\theta + B = 1 - \frac{\theta}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$

**Ejemplo 2.4.5.** Resolver el problema de frontera

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \Phi(x, y) = G(x) = \begin{cases} T_0 & x < -1, \\ T_1 & -1 < x < 1, \\ T_2 & x > 1, \end{cases}$$

donde  $T_0, T_1, T_2$ , son constantes.

**Solución.** La función  $A\theta_1 + B\theta_2 + C$ , donde  $A, B, y C$  son constantes reales, es armónica, puesto que ella es la parte imaginaria de

$$A \ln(z + 1) + B \ln(z - 1) + C.$$

$y$

$(x, y)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \theta_1 & & \theta_2 & & x \\ & & & & & & \\ \Phi = T_0 & -1 & \Phi = T_1 & 1 & \Phi = T_2 & & \end{array}$$

Para determinar  $A, B, C$  obsérvese que las condiciones de frontera son  $\Phi = T_2$  para  $x > 1$ , o sea  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ;  $\Phi = T_1$  para  $-1 < x < 1$ , o sea  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ ;  $\Phi = T_0$  para  $x < -1$ , o sea  $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$ . En este caso,

$$T_2 = A(0) + B(0) + C, \quad T_1 = A(0) + B(\pi) + C, \quad T_0 = A(\pi) + B(\pi) + C,$$

de lo cual  $C = T_2, B = \frac{(T_1 - T_2)}{\pi}$  y  $A = \frac{(T_0 - T_1)}{\pi}$ .

Entonces la solución buscada es

$$\Phi(x, y) = A(\theta_1) + B(\theta_2) + C = \frac{(T_0 - T_1)}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x+1} \right) + \frac{(T_1 - T_2)}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x-1} \right) + T_2.$$

**Ejemplo 2.4.6.** Encontrar una función armónica dentro del círculo unidad  $|z| = 1$  y que toma los valores prescritos dados por

$$G(x) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi, \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

sobre la circunferencia.

**Solución.** Este es un problema de Dirichlet para el círculo unidad (Figura 2.4), en el cual buscamos una función que satisfaga la ecuación de Laplace dentro de  $|z| = 1$  y que toma los valores 0 sobre el arco ABC y 1 sobre el arco CDE.

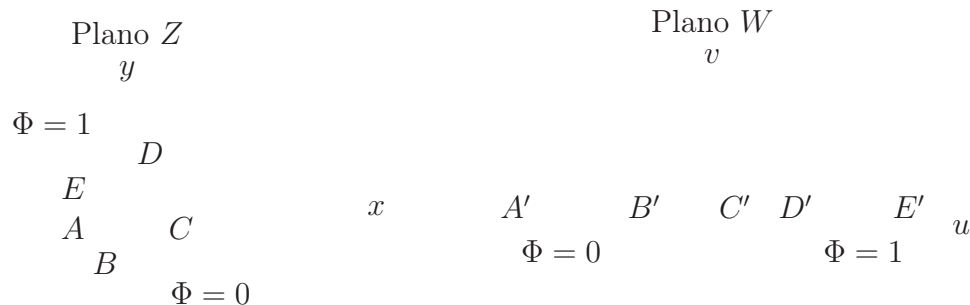


Figura 2.4.

Utilizando la aplicación conforme aplicamos el interior del círculo  $|z| \leq 1$  hacia el semiplano superior del plano  $W$  (Figura 2.4) utilizando la aplicación  $z = \frac{i-w}{i+w}$  ó  $w = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$  (ver Ejemplo 2.4.3 e intercambiar  $z$  y  $w$ ).

Con esta transformación los arcos  $ABC$  y  $CDE$  se aplican sobre el eje real (negativo y positivo)  $A'B'C'$  y  $C'D'E'$  del plano  $W$  respectivamente; entonces las condiciones de frontera  $\Phi = 0$  sobre el arco  $ABC$  y  $\Phi = 1$  sobre  $CDE$  llegan a ser respectivamente  $\Phi = 0$  sobre  $A'B'C'$  y  $\Phi = 1$  sobre  $C'D'E'$ .

De este modo, hemos reducido el problema a encontrar una función  $\Phi$  armónica en el semiplano superior  $w$  y que tome los valores 0 para  $u < 0$  y 1 para  $u > 0$ . Pero este problema ya fue resuelto en el Ejemplo 2.4.4, y la solución (reemplazando  $x$  por  $u$  y  $y$  por  $v$ ) está dada por

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right). \quad (2.19)$$

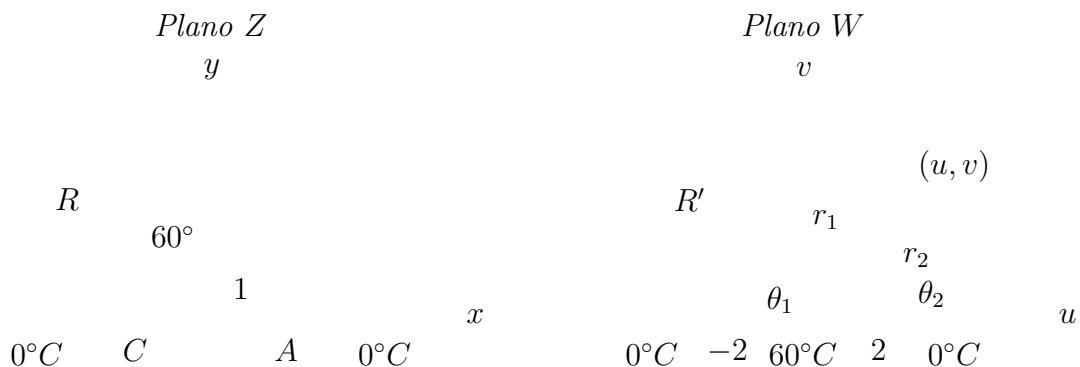
Ahora bien, de  $w = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$ , encontramos  $u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2}$ . Luego sustituyendo  $u$  y  $v$  en (2.19) encontramos la solución que se busca,

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2y}{1 - (x^2 + y^2)} \right), \quad (2.20)$$

o en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , donde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right).$$

**Ejemplo 2.4.7.** Encontrar el estado estacionario de temperatura en un punto de la región sombreada del plano  $Z$  si las temperaturas se mantienen como se indica.



**Solución.** La región sombreada del plano  $Z$  se aplica en el semiplano superior del plano  $W$  por medio de la aplicación  $w = z + \frac{1}{z}$ , la cual es equivalente a

$$u + vi = x + yi + \frac{1}{x + yi} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) i;$$

entonces,

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

La solución al problema en el plano  $W$  es, utilizando el método del Ejemplo 2.4.5,

$$\frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{v}{u-2} \right) - \frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{v}{u+2} \right).$$

Luego, sustituyendo los valores de  $u$  y  $v$  la solución buscada al problema en el plano  $Z$  es

$$\frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)x - 2(x^2 + y^2)} \right\} - \frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)x + 2(x^2 + y^2)} \right\},$$

o en coordenadas polares

$$\frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sen \theta}{(r^2 + 1) \cos \theta - 2r} \right\} - \frac{60}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sen \theta}{(r^2 + 1) \cos \theta + 2r} \right\}.$$

Existen muchas otras aplicaciones físicas: flujo de fluidos, electrostática, flujo de calor, etcétera; dichas aplicaciones no son incluidas en este trabajo, puesto que requieren de un conocimiento previo acerca de estos temas, e incluirlos sería extendernos demasiado. El lector interesado puede consultar la bibliografía.

# Bibliografía

- [1] SPIEGEL Murray. Variable compleja. McGraw-Hill, Mexico D.F., 1991.
- [2] HAUSER Arthur. Variable compleja. Centro regional de ayuda técnica, México D.F., 1971.
- [3] LANG Serge. Complex Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines, 1977.
- [4] SAFF E.B and SNIDER A.D. Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey. 1976.
- [5] SACERDOTI Juan. Análisis de funciones de variable compleja. Facultad de ingeniería, Departamento de Matemáticas, Universidad de Buenos Aires.
- [6] WUNSCH David A. Variable compleja con aplicaciones, segunda edición. Addison-Wesley Ibersamericana S.A., Wilmington, Delaware, E.U.A., 1997.
- [7] CHURCHILL Ruel V. Teoría de funciones de variable compleja, segunda edición. McGraw-Hill, Madrid, 1965.
- [8] CHARRIS Jairo. Fundamentos de análisis complejo de una variable. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.