

**CAMPOS GRAVITACIONALES ESTACIONARIOS AXIALMENTE
SIMETRICOS EN COORDENADAS ESFEROIDALES
GENERALIZADAS**

JAVIER FERNANDO RAMOS CARO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FISICA
2003**

**CAMPOS GRAVITACIONALES ESTACIONARIOS AXIALMENTE
SIMETRICOS EN COORDENADAS ESFEROIDALES
GENERALIZADAS**

JAVIER FERNANDO RAMOS CARO

Tesis para optar al título de Magíster en Física

**Director
DR. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ V.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FISICA
2003**

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

A la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

Índice general

Introducción	1
1. El Espacio-tiempo Estacionario con Simetría Axial	5
1.1. La Métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou	6
1.2. Ecuaciones de Einstein en el vacío en Coordenadas Cilíndricas de Weyl	14
1.3. El sistema de las Coordenadas Esferoidales Generalizadas (CEG)	16
1.4. La Métrica Estacionaria Axialmente Simétrica en CEG	19

	2
2. Método de Papapetrou	23
2.1. Soluciones Tipo Weyl	24
2.2. Soluciones Tipo Papapetrou	25
2.3. Algunas Soluciones Particulares	31
3. El Método de Ernst	36
3.1. Soluciones Tipo Weyl	41
3.2. Soluciones Tipo Taub-NUT	44
3.3. Soluciones Tipo Kerr	47
3.4. Soluciones Tipo Kerr-NUT	49
3.5. Soluciones Tipo Tomimatsu-Sato	51
3.6. Otras Soluciones	52

	3
Conclusiones	56
Bibliografía	60

**TITULO: Campos Gravitacionales Estacionarios Axialmente
Simétricos en Coordenadas Esferoidales Generalizadas.¹**

Palabras Claves: 1. Relatividad General. 2. Soluciones Exactas. 3.coordenadas esferoidales generalizadas . 4. Campos estacionarios axialmente simétricos. 5. Formalismo de Papapetrou. 6. Formalismo de Ernst.

Resumen

Se presentan los formalismos de Papapetrou y Ernst como métodos de obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, para espacio-tiempos estacionarios con simetría axial. Se muestra de que forma, partiendo de ciertas soluciones estáticas relativamente simples, pueden ser generadas soluciones estacionarias de mayor complejidad. Estas, a su vez, sirven de base para generar otros resultados, siendo este el esquema para obtener nuevas expresiones que, posiblemente, representen campos gravitacionales reales.

Se utiliza el sistema de las coordenadas esferoidales generalizadas (CEG), el cual contiene como casos particulares a las coordenadas esféricas, prolatas y oblatas. Cada solución generada por tales métodos y expresada en CEG incluye, por tanto,

¹Trabajo de Investigación.

tres casos especiales correspondientes a cada uno de los sistemas coordenados mencionados anteriormente. Son estudiados los métodos de obtención de métricas tipo Papapetrou, Taub-NUT, Kerr, Kerr-NUT y Tomimatsu-Sato.

Una de las conclusiones principales es la obtención de ciertas soluciones con asintoticidad plana y otras con asintoticidad curva, de posible interés físico. Se concluye también que la introducción del sistema CEG resulta ser de gran conveniencia e importancia. Su carácter generalizado y su estructura permiten, tanto una presentación unificada de las soluciones, como el adecuamiento de los métodos de generación abordados.

**TITLE: Axially Simetric Stationary Gravitational Fields in
Generalized Spheroidal Coordinates ²**

Key Words: 1. General Relativity. 2. Exact Solutions. 3. Generalized Spheroidal Coordinates. 4. Stationary Axially Simetric Fields. 5. Papapetrou's Formalism. 6. Ernst's Formalism.

Abstract

Papapetrou and Ernst's formalisms are presented as methods to obtain exact solutions of Einstein's equations, in stationary space-times with axial simetry. It is shown the way in that, starting with some relatively simple static solutions, more complex stationary solutions can be generated. These are also used as base for generating other results, this being the general scheme for obtaining new expressions that, possibly, can represent real gravitational fields.

The generalized spheroidal coordinate system (GSC) is introduced. This one contains spherical, prolate and oblate coordinates as special cases. Therefore, every solution generated by such methods, and expressed in CSG, includes three particular cases corresponding to every coordinate system referred later. Obtention

²Research Work

methods of Papapetrou, Taub-NUT, Kerr, Kerr-NUT and Tomimatsu-Sato metrics are studied.

One of the principal remarks is the obtention of some asymptotically flat and curved solutions, which can be physically interesting. It is also remarkable that GEC system's introduction is very helpful and important. Its structure and generalized character aid to obtain a unified presentation of solutions, as much as, a more easy ensemble of generating methods studied.

Introducción

La teoría general de la relatividad, la descripción más satisfactoria hasta el momento de lo que constituye la interacción gravitatoria, propone un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que determinan el campo gravitacional producido por una distribución de materia y energía. Son las conocidas ecuaciones de Einstein para la gravedad [13]. Dado el número de ecuaciones (diez en total), y su naturaleza no lineal, este conjunto constituye un sistema enormemente complicado de solucionar de manera analítica. Sólo para algunos pocos casos de gran simetría (entre los más conocidos encontramos espacio-tiempos con simetrías temporal, esférica o axial) ha sido posible, mediante diversas técnicas matemáticas, obtener soluciones exactas. Algunos ejemplos de éstas son la métrica de Swarzschild [13] y la métrica de Weyl³ [14], la cual representa la descripción más simple de espacio-tiempos estáticos con simetría axial [2].

³Este problema lo abordé en la tesis de grado, titulada “Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales generalizadas” [11]. El presente trabajo pretende plantear una extensión del anterior a espacio-tiempos estacionarios con simetría axial.

La búsqueda de soluciones exactas ha llegado, a través de las últimas décadas, a constituirse en una vasta rama de la teoría de la relatividad general, y su importancia radica en varios factores. Uno de ellos es la sorprendente cantidad de sistemas astrofísicos que pueden modelarse con apreciable exactitud, apelando a modelos de espacio-tiempos altamente simétricos y simples, como los comentados anteriormente. Otro factor que define su importancia es el papel que determinan las soluciones exactas dentro de la estructura general de la teoría. Ellas pueden desempeñar un rol similar al del “Hamiltoniano no perturbado” de la teoría de perturbaciones, si queremos abordar el problema de campos gravitacionales más complejos y de difícil solución analítica. Consideramos entonces el campo general como una “suma” de dos contribuciones: el telón de fondo (una solución exacta) y la “perturbación” [9]. Esto sin mencionar la vasta gama de resultados y métodos que en los últimos años se han venido desarrollando para la consecución de soluciones exactas, y que constituyen todo un avance en la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Precisamente, el objetivo central del trabajo que proponemos es abordar el problema del campo gravitacional estacionario con simetría axial a través de dos de estos métodos, ya conocidos ampliamente en la literatura científica especializada: el método de Papapetrou [8] y el método de Ernst [6]. Ambos formalismos se ocupan de la obtención de clases específicas de soluciones particulares. Como veremos, la clase de soluciones, tanto de Papapetrou como de Ernst, guardan una estrecha

relación con las soluciones de Weyl. Mostraremos que, a la luz de dichos formalismos, es posible obtener soluciones estacionarias a partir de soluciones estáticas conocidas. En el caso de las soluciones tipo Papapetrou este hecho es evidente, ya que constituye prácticamente una exigencia dentro del método. El caso del formalismo de Ernst es un poco diferente, ya que sólo apoyados en ciertas propiedades de simetría, se revela la conexión entre los casos estático y estacionario.

Como veremos, gran parte de las soluciones estacionarias que obtendremos partirán de un núcleo común: la solución de Schwarzschild. Por medio de la aplicación sucesiva de las propiedades de simetría en la ecuación de Ernst podemos pasar de la métrica estática isotrópica a espacio-tiempos estacionarios más complejos, como por ejemplo las métricas de Kerr y Taub-NUT, o inclusive nuevas soluciones. Una de las mencionadas propiedades de simetría está íntimamente ligada con la naturaleza de los sistemas de coordenadas esferoidales prolatas, oblatas y esféricas. Por este hecho introduciremos el sistema CEG (Coordenadas Esferoidales Generalizadas) que contiene como casos particulares a cada uno de los anteriores. Mostraremos, a lo largo del trabajo, algunas de las nuevas soluciones que se pueden obtener a través de los procedimientos antes mencionados, verificando su respectiva asintoticidad. Dado que estarán expresadas en CEG, cada una de ellas contendrá tres casos particulares, dependiendo del valor que tome un determinado parámetro característico.

Comenzaremos presentando el procedimiento general para obtener la forma estándar de la métrica estacionaria axisimétrica y sus correspondientes ecuaciones de campo. Introduciremos luego el sistema de las CEG junto con las respectivas modificaciones en las expresiones, tanto de la métrica como de las ecuaciones de campo y abordaremos, seguidamente, el método de Papapetrou, examinando algunos casos particulares de interés. Finalmente nos centraremos en el formalismo de Ernst. A través del estudio de ciertos resultados, unos ya conocidas y otros no, ejemplificaremos el mecanismo de generación de soluciones que conducirá, como veremos hacia el final del trabajo, a la obtención de algunas nuevas soluciones, cuyas características asintóticas serán examinadas.

Capítulo 1

El Espacio-tiempo Estacionario con Simetría Axial

Comenzaremos este trabajo delimitando los elementos esenciales que describen la geometría espacio-temporal determinada por un campo gravitacional estacionario y axialmente simétrico. Así como asociamos los campos estáticos a fuentes en reposo, en este caso diremos que los campos estacionarios con simetría axial son generados por fuentes (de la misma simetría) en permanente movimiento de rotación. El campo gravitacional en cuestión, deberá presentar además un comportamiento totalmente independiente del tiempo y de alguna coordenada asociada a la rotación de la fuente. Esto quizás imponga algunas restricciones al tipo de movimiento del cuerpo generador, pero no nos centraremos en este hecho por ahora.

En este capítulo, lo que haremos será ocuparnos tan sólo de la naturaleza del campo gravitacional y, por tanto, de la geometría espacio-temporal. Nos centraremos en el análisis de las ecuaciones de Einstein en el vacío y, en capítulos posteriores, de sus correspondientes soluciones exteriores; todo esto a partir de una estructura concreta del tensor métrico que delimitaremos en la siguiente sección. Las consideraciones enunciadas antes, entre otros argumentos de tipo matemático, impuestas sobre la expresión general para el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1)$$

nos ayudarán a concretar una forma particular para la estructura geométrica del espacio-tiempo. La forma particular que deseamos obtener se expresa a través de lo que comúnmente se conoce como el elemento de línea de Weyl-Lewis-Papapetrou, que esbozaremos a continuación.

1.1. La Métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou

Para empezar a referirnos a un espacio-tiempo con las características antes mencionadas, tenemos que definir, antes que todo, las coordenadas que determinan intrínsecamente este tipo de simetría (temporal y axial). Llamaremos, como es usual, t a la coordenada temporal y ϕ , como en el caso del sistema de coordenadas cilíndricas, al ángulo acimutal que describe las rotaciones alrededor de cierto

eje de simetría¹. Diremos, por lo pronto, que el primer requisito de simetría axial y temporal es, evidentemente, que las componentes del tensor métrico no dependan de ninguna de estas coordenadas. Esto es:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^2, x^3).$$

donde x^2, x^3 son las otras dos coordenadas que componen la tétrada ordenada, las cuales, por el momento, son totalmente arbitrarias.

Por otra parte, dado que estamos considerando campos gravitacionales producidos por objetos que rotan alrededor de su eje de simetría, la forma del espacio-tiempo debe comportarse de un modo acorde con dicho comportamiento. Es decir, así como el estado de rotación de un objeto se mantiene invariante ante la transformación simultánea $t \rightarrow -t, \phi \rightarrow -\phi$, así mismo la geometría espacio-temporal, al no verse modificada (pues el estado de rotación es el mismo), ha de ser también invariante ante tal transformación. Esto significa que en la expresión (1.1), tomando $x^0 = t$ y $x^1 = \phi$, para que se cumpla dicha invarianza, es necesario que

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0.$$

Podemos por tanto escribir la métrica de la siguiente manera²:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + g_{AB}dx^A dx^B, \tag{1.2}$$

¹Dicho eje de simetría puede ser el de la fuente que genera el campo gravitacional.

²La notación de índices introducida en esta ecuación será utilizada ampliamente en lo que sigue del presente capítulo. Los índices representados con letras latinas minúsculas sólo tomarán los valores 0, 1, mientras que los representados con letras latinas mayúsculas tomarán los valores 2, 3.

donde $a, b = 0, 1$ y $A, B = 2, 3$.

Esta forma particular, resultado de los anteriores requerimientos de simetría, expresa una propiedad bastante interesante que será de gran utilidad en desarrollos posteriores. La matriz $[g_{\alpha\beta}]$ de orden cuatro, está conformada por cuatro bloques: dos matrices de orden dos $[g_{ab}]$ y $[g_{AB}]$, y dos matrices nulas, también de orden dos, distribuidas de la siguiente forma:

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [g_{ab}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [g_{AB}] \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Aquí, evidentemente, $\mathbf{0}$ representa la matriz nula de orden dos. Podemos aún simplificar la expresión (1.2) teniendo en cuenta que el segundo término del lado izquierdo puede ser diagonalizable [4]. Es decir, debemos probar que existe una transformación de coordenadas

$$x'^2 = z(x^2, x^3), \quad x'^3 = \rho(x^2, x^3),$$

tal que podamos convertir el término $g_{AB}dx^A dx^B$ en $e^{2\mu}(d\rho^2 + dz^2)$, por ejemplo. Por supuesto, μ sería una función de las coordenadas ρ, z . Recordemos entonces que el tensor métrico transforma de acuerdo con [13]:

$$g'^{AB} = \frac{\partial x'^A}{\partial x^C} \frac{\partial x'^B}{\partial x^D} g^{CD}.$$

Tendremos entonces las siguientes relaciones:

$$g'^{23} = g^{22}z_{,2}\rho_{,2} + g^{23}(z_{,2}\rho_{,3} + z_{,3}\rho_{,2}) + g^{33}z_{,3}\rho_{,3} = 0,$$

$$g'^{22} - g'^{33} = g^{22}(z^2_{,2} - \rho^2_{,2}) + 2g^{23}(z_{,2}z_{,3} - \rho_{,2}\rho_{,3}) + g^{33}(z^2_{,3} - \rho^2_{,3}) = 0.$$

Es fácil probar que la primera de estas ecuaciones se satisface mediante la siguiente escogencia (siendo k una función arbitraria):

$$z_{,2} = k(g^{32}\rho_{,2} + g^{33}\rho_{,3}), \quad z_{,3} = -k(g^{22}\rho_{,2} + g^{23}\rho_{,3}), \quad (1.4)$$

la cual, al ser introducida en la segunda ecuación, da como resultado

$$\{k^2 [g^{22}g^{33} - (g^{23})^2] - 1\}(g^{22}\rho^2_{,2} + 2g^{23}\rho_{,2}\rho_{,3} + g^{33}\rho^2_{,3}) = 0.$$

Dado que el término entre paréntesis no puede anularse (g^{AB} es una métrica bidimensional positivo-definida), es necesario que

$$k^2 = \frac{1}{g^{22}g^{33} - (g^{23})^2} = g,$$

recordando que g es la representación que comunmente damos para el valor absoluto del determinante de g_{AB} .

Sabiendo ahora que $k = g^{1/2}$, podemos notar que la condición de integrabilidad de (1.4), está dada por

$$(g^{1/2}g^{AB}\rho_{,B})_{,A} = 0. \quad (1.5)$$

Esta ecuación no es otra cosa que la expresión general de la ecuación de Laplace para ρ . El hecho de que ρ satisfaga la ecuación de Laplace es una prueba directa de su existencia. La existencia de z puede ser corroborada de las relaciones (1.4).

Bajo estas circunstancias podemos escribir

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + e^{2\mu}\delta^{AB}dx^A dx^B, \quad (1.6)$$

siendo ahora $x^2 = \rho$ y $x^3 = z$. La ecuación (1.6) representa una forma simplificada bastante general de la métrica estacionaria con simetría axial. Queremos sin embargo establecer algunas modificaciones que nos llevarán a una expresión más adecuada para este trabajo. Se trata de la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou (WLP)[6]. Para tal efecto, establezcamos primero la siguiente definición³:

$$\det(g_{ab}) = -U^2,$$

siendo U una función real de las variables ρ, z . Con esto, podemos esbozar una expresión para el valor absoluto del determinante de $g_{\alpha\beta}$:

$$g = |\det(g_{\alpha\beta})| = e^{4\mu}U^2, \quad (1.7)$$

con

$$U^2 = g_{01}^2 - g_{00}g_{11}. \quad (1.8)$$

Mostraremos ahora el camino que nos conducirá a ciertos requerimientos que debe satisfacer U , de tal manera que nos permita transformar la expresión (1.6) en la métrica WLP.

Si recordamos la forma general de la conexión afín (símbolos de Christoffel):

$$\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = (1/2)g^{\alpha\nu}(g_{\nu\beta,\lambda} + g_{\lambda\nu,\beta} - g_{\lambda\beta,\nu}),$$

entonces, en nuestro caso, con la notación de índices introducida anteriormente, tendremos

$$\Gamma_{BC}^A = \delta_B^A \mu_{,C} + \delta_C^A \mu_{,B} - \delta^{AD} \delta_{BC} \mu_{,D} \quad , \quad (1.9)$$

³El signo negativo en el determinante es escogido para preservar la signatura apropiada de la métrica.

$$\Gamma_{ab}^A = -\frac{1}{2}e^{-2\mu}\delta^{AD}g_{ab,D} \quad , \quad (1.10)$$

$$\Gamma_{Ab}^a = \Gamma_{bA}^a = \frac{1}{2}g^{ac}g_{cb,A} \quad , \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{Ba}^A = \Gamma_{AB}^a = \Gamma_{bc}^a = 0. \quad (1.12)$$

Al introducir estas relaciones en la expresión para el tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = (\ln \sqrt{g})_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(\ln \sqrt{g})_{,\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\beta}^{\nu},$$

obtendremos

$$\begin{aligned} R_{AB} = & (\ln U)_{,AB} - (\ln U)_{,A}\mu_{,B} - (\ln U)_{,B}\mu_{,A} + \\ & + \delta_{AB}\delta^{CD}[(\ln U)_{,C}\mu_{,D} + \mu_{,CD}] + \frac{1}{4}g^{bc}g_{ca,A}g^{ae}g_{eb,B}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2U}e^{-2\mu}\delta^{AB}(Ug_{ab,B})_{,A} + \frac{1}{4}e^{-2\mu}\delta^{AB}g^{ec}_{,A}(g_{ea}g_{cb,B} + g_{eb}g_{ca,B}), \quad (1.14)$$

$$R_{aB} = R_{Ab} = 0. \quad (1.15)$$

Vemos que $R_{\alpha\beta}$, al igual que el tensor métrico, también se compone de dos bloques no nulos: R_{ab} y R_{AB} .

Examinando las ecuaciones de Einstein en el vacío ($R_{\alpha\beta} = 0$), es fácil notar que, en virtud de (1.13), la combinación

$$R^a_b = g^{ac}R_{cb} = 0,$$

conduce a

$$\delta^{AB}(Ug_{ab,A}g^{bc})_{,B} = 0. \quad (1.16)$$

Si ahora contraemos los índices a y c , obtendremos

$$\delta^{AB}U_{,AB} = U_{,22} + U_{,33} = 0.$$

En otras palabras, U satisface la ecuación de Laplace. Este hecho sugiere que, recordando (1.5), podemos establecer la siguiente escogencia:

$$U = \rho,$$

con la cual, como veremos un poco más adelante, obtendremos una simplificación sustancial en las ecuaciones del campo gravitacional, pues U ya no lo tomaremos como una función sino como una coordenada más.

Introduciremos ahora algunas definiciones que nos permitirán poner la métrica (1.6) en la forma deseada. Comenzaremos por redefinir g_{00} y g_{01} en términos de dos nuevas funciones f y ω , de la siguiente forma:

$$g_{00} = -f, \quad g_{01} = -\omega f. \quad (1.17)$$

Con esto, recordando (1.8) junto con la nueva definición $U = \rho$, tendremos

$$g_{11} = f^{-1}\rho^2 - \omega^2 f. \quad (1.18)$$

Finalmente, si escogemos⁴

$$e^{2\mu} = f^{-1}e^{2\Lambda}, \quad (1.19)$$

vemos que, reemplazando estas últimas relaciones en (1.6), llegamos a la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou:

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\Lambda}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (1.20)$$

⁴Aquí utilizamos la libertad en la escogencia de la función $e^{2\mu}$.

Esta es la expresión para el espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico que estudiaremos en este trabajo. Está escrita en lo que comúnmente se denomina el sistema de coordenadas cilíndricas de Weyl (t, ϕ, ρ, z) , y veremos más adelante su forma correspondiente en coordenadas esferoidales generalizadas que, como apreciaremos claramente, bajo el formalismo de Ernst, es un sistema de coordenadas bastante útil en el tratamiento y búsqueda de soluciones exactas. Como vemos, a la luz del presente esquema, la geometría de este espacio-tiempo particular está dada por tres funciones reales : f , ω y Λ . Lo que haremos a continuación será señalar ciertas características de la métrica, determinar tanto las componentes de la conexión afín como del tensor de Ricci, obtener las ecuaciones de campo en el vacío y así llegar a las ecuaciones diferenciales que deben obedecer dichas funciones.

Como podemos notar, la matriz que representa al tensor métrico está dada por:

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [g_{ab}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f^{-1}e^{2\Lambda}[\delta_{AB}] \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Aquí, resulta claro que:

$$[g_{ab}] = \begin{bmatrix} -f & -f\omega \\ -f\omega & f^{-1}\rho^2 - f\omega^2 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Además, su correspondiente tensor contravariante (matriz inversa), después de ciertos cálculos, lo podemos escribir así:

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [g^{ab}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & fe^{-2\Lambda}[\delta^{AB}] \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

donde la matriz $[g^{ab}]$ está dada por

$$[g^{ab}] = \begin{bmatrix} \omega^2 \rho^{-2} f - f^{-1} & -f \omega \rho^{-2} \\ -f \omega \rho^{-2} & f \rho^{-2} \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

En la próxima sección hallaremos, apoyados en estos últimos resultados, las componentes del tensor de Ricci para obtener las ecuaciones de campo que determinan f , ω y Λ .

1.2. Ecuaciones de Einstein en el vacío en Coordenadas Cilíndricas de Weyl

Con las modificaciones impuestas a la métrica general (1.6), de la sección anterior, tras algunos cálculos elementales, vemos que las expresiones (1.13) y (1.14) para el tensor de Ricci se pueden escribir así:

$$R_{ab} = \frac{1}{2} f e^{-2\Lambda} [\nabla^2 g_{ab} - g^{cd} \nabla g_{ca} \cdot \nabla g_{db}], \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} R_{AB} = & -(\ln \rho)_{,AB} + \frac{1}{2\chi} [\chi_{,A} (\ln \rho)_{,B} + \chi_{,B} (\ln \rho)_{,A} + \\ & -(\nabla \chi \cdot \nabla \ln \rho + \nabla^2 \chi) \delta_{AB}] - \frac{1}{4} g^{ad} g^{be} g_{db,A} g_{ea,B}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde hemos definido χ de la siguiente forma ⁵:

$$\chi = f^{-1}e^{2\Lambda}. \quad (1.27)$$

Combinando $R_{00} = 0$ con $R_{11} = 0$ y $R_{33} = 0$ con $R_{22} = 0$, tenemos

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \rho^{-2}f^4\nabla\omega \cdot \nabla\omega, \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot (\rho^{-2}f^2\nabla\omega) = 0, \quad (1.29)$$

$$4\Lambda_{,\rho} = \rho f^{-2}[f^2_{,\rho} - f^2_{,z}] - \rho^{-1}f^2[\omega^2_{,\rho} - \omega^2_{,z}], \quad (1.30)$$

$$2\Lambda_{,z} = \rho f^{-2}f_{,\rho}f_{,z} - \rho^{-1}f^2\omega_{,\rho}\omega_{,z}. \quad (1.31)$$

Las ecuaciones (1.28) y (1.29) constituyen las condiciones de integrabilidad del sistema (1.30)-(1.31).

El anterior sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que determina las funciones f , ω y Λ , tiene una importante característica. Está compuesto por dos subsistemas de dos ecuaciones: el primero, (1.28)-(1.29), es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para f y ω ; el segundo, (1.30)-(1.31), es un sistema sobredeterminado para Λ y contiene a su vez derivadas de f y ω . Esto sugiere que el camino hacia su solución debe comenzar resolviendo el primer subsistema de ecuaciones. Una vez obtenidas las expresiones para f y ω , las

⁵En (1.25) y (1.26), aprovechando la estrecha analogía con las coordenadas cilíndricas usuales y con el propósito de simplificar la notación, hemos introducido las siguientes definiciones [1]:

$$\begin{aligned} \nabla F &= F_{,\rho} \mathbf{e}_\rho + F_{,z} \mathbf{e}_z, \\ \nabla^2 F &= F_{,\rho\rho} + F_{,zz} + (1/\rho)F_{,\rho}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= (1/\rho) (\rho A_\rho)_{,\rho} + (A_z)_{,z}, \end{aligned}$$

donde F y \mathbf{A} son dos funciones, una escalar y otra vectorial, independientes de ϕ .

introducimos en (1.30)-(1.31) e integramos Λ . De esta manera empezamos a esbozar el procedimiento que nos conducirá a la obtención de soluciones particulares. Debemos sin embargo, antes de abordar la resolución directa de estas ecuaciones, observar que el sistema de coordenadas en que están escritas no nos ofrece ventajas sustanciales para nuestros propósitos. Esperamos obtener y manejar expresiones que estén claramente definidas en términos de funciones elementales: polinomiales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc. Las anteriores ecuaciones, en coordenadas cilíndricas de Weyl, como ya se ha observado, no nos ofrecen esta oportunidad⁶. Por esta razón introduciremos a continuación un sistema de coordenadas que, además de facilitar la consecución de los objetivos planteados antes, simplificará el proceso de obtención de soluciones.

1.3. El sistema de las Coordenadas Esferoidales Generalizadas (CEG)

En este trabajo utilizaremos el sistema de las coordenadas esferoidales generalizadas (CEG), a través del cual podemos ver como casos particulares las coordenadas prolatas, oblatas y esféricas. La reducción a cada uno de dichos casos particulares se establece por medio de un parámetro σ que toma tres posibles valores: uno

⁶Es un hecho que, en el caso más simple correspondiente a campos gravitacionales estáticos axisimétricos (espacio-tiempo de Weyl) se prefiere utilizar coordenadas esferoidales, ya sea prolatas u oblatas [10, 12]. Sabemos que la solución general de la ecuación de Laplace, en coordenadas cilíndricas, se expresa en términos de funciones de Bessel [1].

real, otro imaginario y cero. Cada uno de estos valores define el tipo de sistema de coordenadas que escogemos. Si σ es real, imaginario o cero entonces tendremos, respectivamente, coordenadas prolatas, oblatas o esféricas.

La definición de este sistema de coordenadas se basa en dos hechos: (i) Las superficies coordenadas prolatas y oblatas se obtienen de la rotación acimutal (respecto al eje Z) de las curvas coordenadas elípticas [11]. (ii) Las superficies coordenadas esféricas se obtienen cuando reducimos a cero la distancia focal de las anteriores [11]. Con base en esto, podemos considerar que cada punto del espacio tridimensional está representado por una terna ordenada de números reales (\tilde{x}, y, ϕ) , definidos de la siguiente forma [11]:

$$\tilde{x} = \frac{R_+ + R_-}{2\kappa}, \quad \tilde{x} \geq \frac{\sigma^2 + \kappa^2}{2\kappa^2}, \quad (1.32)$$

$$y = \frac{R_+ - R_-}{2\sigma}, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (1.33)$$

El número ϕ corresponde al ángulo acimutal, definido en el sistema de coordenadas cilíndricas; el factor σ representa, de alguna manera, la distancia focal de los elipsoides e hiperboloides coordenados y sólo toma tres posibles valores: real, imaginario puro y cero. El término κ está relacionado con σ así:

$$2\kappa = (1 - i)\sigma + (1 + i)\sigma^*, \quad (1.34)$$

y los términos R_+ , R_- representan, en cierta forma, las distancias a cada uno de los focos del punto en cuestión.

Estos términos están relacionados con las coordenadas cilíndricas a través de [10]:

$$R_+ = \sqrt{\rho^2 + (z + \sigma)^2}, \quad (1.35)$$

$$R_- = \sqrt{\rho^2 + (z - \sigma)^2}. \quad (1.36)$$

Combinando adecuadamente las anteriores relaciones obtenemos las siguientes fórmulas de transformación:

$$\rho^2 = (\kappa^2 \tilde{x}^2 - \sigma^2)(1 - y^2), \quad (1.37)$$

$$z = \kappa \tilde{x} y. \quad (1.38)$$

Puede notarse que en los casos en que escogemos σ real (o imaginario puro), estas expresiones adquieren la estructura de las fórmulas de transformación entre las coordenadas cilíndricas y las prolatas (u oblatas). Si observamos las relaciones (1.32),(1.35),(1.36) y recordamos la relación entre las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , puede mostrarse lo siguiente [11]:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \kappa \tilde{x} = r \quad , \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} y = \cos \theta.$$

Esto significa que cuando σ toma el valor de cero, las expresiones (1.37) y (1.38) obtienen la forma de la transformación entre coordenadas cilíndricas y esféricas.

Como veremos más adelante, para efectos prácticos en los cálculos, resulta conveniente establecer la siguiente definición:

$$\kappa \tilde{x} = \sigma x, \quad (1.39)$$

con la cual, las fórmulas de transformación (1.40) y (1.41) quedan

$$\rho^2 = \sigma^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad (1.40)$$

$$z = \sigma xy. \quad (1.41)$$

Esta forma, que es bastante similar a la transformación entre coordenadas prolatas y cilíndricas, es mucho más manejable que (1.37),(1.38) y la utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Sin embargo, es preciso aclarar que, en últimas, cada vez que se necesite analizar alguna solución en cualquiera de los tres casos particulares (prolatas, oblatas o esféricas) nos tendremos que remitir a la relación (1.39). En la siguiente sección procederemos a determinar la forma que, tanto la métrica como las ecuaciones de campo, adquieren bajo la introducción de este sistema de coordenadas.

1.4. La Métrica Estacionaria Axialmente Simétrica en CEG

Habiendo definido el sistema CEG y su relación con las coordenadas cilíndricas de Weyl, podemos conocer la nueva forma que adoptará la métrica WLP. En efecto, de acuerdo con (1.40)-(1.41), tendremos

$$d\rho = \sigma x \sqrt{\frac{1 - y^2}{x^2 - 1}} dx - \sigma y \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}} dy,$$

$$dz = \sigma(y dx + x dy),$$

que, al introducirlo en (1.20), obtenemos

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + \sigma^2 f^{-1} \left[e^{2\Lambda} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right]. \quad (1.42)$$

Esta expresión para la métrica WLP, en CEG, será de gran utilidad en capítulos posteriores, cuando examinemos algunas soluciones particulares en este sistema de coordenadas. Es importante también conocer la forma que adoptan las ecuaciones de campo en CEG. Este hecho, como veremos, constituirá un elemento fundamental cuando, mas adelante, introduzcamos el formalismo de Ernst.

Para esto, comenzaremos por determinar la expresión para los operadores ∇ y ∇^2 . Recordemos, antes que todo, las fórmulas generales en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla = \sum_{m=1}^3 \mathbf{e}_m \frac{1}{h_m} \frac{\partial}{\partial q_m} \quad \text{y} \quad \nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_m^2} \frac{\partial}{\partial q_m} \right], \quad (1.43)$$

donde los coeficientes h_m son los factores de escala, que relacionan las coordenadas curvilíneas (q_1, q_2, q_3) con las coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) , y están definidos mediante $h_m^2 = \sum_{i=1}^3 (\partial x^i / \partial q_m)^2$. En nuestro caso resultará [11]:

$$h_x = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 1}}, \quad h_y = \sigma \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{1 - y^2}}, \quad h_\phi = \sigma \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)};$$

además, $h_x h_y h_\phi = \sigma^2 (x^2 - y^2)$. Finalmente, obviando la dependencia de ϕ , efec-

tuando las correspondientes operaciones y combinaciones algebraicas, obtenemos

$$\nabla = \frac{1}{\sigma\sqrt{x^2-y^2}} \left[\sqrt{x^2-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \sqrt{1-y^2} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y \right], \quad (1.44)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sigma^2(x^2-y^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2-1) \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-y^2) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\}. \quad (1.45)$$

Así, teniendo en cuenta estas últimas relaciones y las fórmulas de transformación (1.40)-(1.41), podemos escribir las ecuaciones para f y ω de la siguiente forma:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \frac{f^4}{\sigma^2(x^2-1)(1-y^2)} \nabla\omega \cdot \nabla\omega, \quad (1.46)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{f^2}{(x^2-1)(1-y^2)} \nabla\omega \right) = 0. \quad (1.47)$$

De la misma forma, el sistema sobredeterminado para Λ queda:

$$4\Lambda_{,x} = f^{-2} \frac{1-y^2}{x^2-y^2} [x(x^2-1)f^2_{,x} - x(1-y^2)f^2_{,y} - 2y(x^2-1)f_{,x}f_{,y}] +$$

$$- \frac{f^2}{\sigma^2(x^2-y^2)} [x\omega^2_{,x} - \frac{1-y^2}{x^2-1}x\omega^2_{,y} - 2y\omega_{,x}\omega_{,y}] \quad (1.48)$$

$$4\Lambda_{,y} = f^{-2} \frac{x^2-1}{x^2-y^2} [y(x^2-1)f^2_{,x} - y(1-y^2)f^2_{,y} - 2x(1-y^2)f_{,x}f_{,y}] +$$

$$+ \frac{f^2}{\sigma^2(x^2-y^2)} [y\omega^2_{,y} - \frac{x^2-1}{1-y^2}y\omega^2_{,x} - 2x\omega_{,x}\omega_{,y}] \quad (1.49)$$

Como ya lo hemos recalado, definir la métrica y las ecuaciones de campo en este sistema de coordenadas es de fundamental importancia aquí, pues se hace más práctico el desarrollo de los formalismos que introduciremos en los próximos

capítulos. Se trata de los métodos de Papapetrou y de Ernst. Ambos métodos se concentran en la búsqueda de soluciones particulares del sistema de ecuaciones de campo, y su escritura en CEG, como veremos, simplifica la forma de las expresiones y el empleo de ciertas propiedades de simetría que, en el caso del formalismo de Ernst, constituyen un medio para obtener nuevas soluciones.

Capítulo 2

Método de Papapetrou

El método de Papapetrou conduce al establecimiento de un tipo particular de soluciones estacionarias que guardan una estrecha relación con las soluciones de Weyl. Por lo tanto, es preciso examinar primero dichas soluciones y su correspondiente mecanismo de obtención, el cual, como veremos, además guarda muchos elementos en común con el método de Papapetrou. Dicho formalismo nos conducirá a establecer un importante resultado: a cada solución estática de Weyl le corresponde una solución estacionaria de Papapetrou, de tal forma que el problema del campo gravitacional estacionario axialmente simétrico prácticamente queda resuelto, en gran parte, con la solución del problema estático. Por simplicidad trabajaremos inicialmente en coordenadas cilíndricas, pero es claro que este hecho se cumple independientemente del sistema de coordenadas que utilicemos.

2.1. Soluciones Tipo Weyl

Evidentemente, la métrica estática axialmente simétrica corresponde a tomar $\omega = 0$ en la expresión general (1.20). Las ecuaciones de campo, en este caso, adoptan la forma:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f, \quad (2.1)$$

$$4\Lambda_{,\rho} = \rho f^{-2} [f^2_{,\rho} - f^2_{,z}], \quad (2.2)$$

$$2\Lambda_{,z} = \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z}. \quad (2.3)$$

El método clásico de solucionar este sistema de ecuaciones consiste en expresar el campo gravitacional en términos de una función auxiliar $U(\rho, z)$ que satisfaga ciertas condiciones conocidas. Para esto suponemos que $f = f(U)$, con lo cual la ecuación (2.1) se escribe

$$\left[f \frac{d^2 f}{dU^2} - \left(\frac{df}{dU} \right)^2 \right] (\nabla U)^2 + f \frac{df}{dU} \nabla^2 U = 0. \quad (2.4)$$

Si definimos $U(\rho, z)$ como una solución de la ecuación de Laplace, es decir, tal que $\nabla^2 U = 0$, entonces la relación funcional $f(U)$ estará determinada por la expresión:

$$f \frac{d^2 f}{dU^2} - \left(\frac{df}{dU} \right)^2 = 0,$$

cuya solución es trivial, y, escogiendo las constantes de integración convenientemente, podemos establecer que

$$f = e^{2U}. \quad (2.5)$$

De esta manera, podemos decir que la métrica estática axialmente simétrica está determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\nabla^2 U = 0, \quad (2.6)$$

$$\Lambda_{,\rho} = \rho(U^2_{,\rho} - U^2_{,z}), \quad (2.7)$$

$$\Lambda_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}, \quad (2.8)$$

que, en esencia, es más simple que (2.1)-(2.3). Basta elegir alguna de las soluciones conocidas de la ecuación de Laplace e integrar el sistema sobredeterminado que satisface Λ , para obtener una solución particular de Weyl. Es un problema ampliamente conocido y estudiado [11].

2.2. Soluciones Tipo Papapetrou

Ahora estudiaremos el caso estacionario, es decir $\omega \neq 0$. Mediante la introducción de algunas funciones auxiliares y el uso de ciertas identidades del cálculo vectorial elemental, veremos que está estrechamente relacionado con el caso estático. Para empezar, es necesario observar que para cualquier función $\varphi(\rho, z)$ se cumple lo siguiente [6]:

$$\nabla \cdot [\rho^{-1} \mathbf{e}_\phi \times \nabla \varphi] = 0, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{e}_ϕ es el vector unitario en la dirección acimutal. Podemos proponer entonces que, de acuerdo con (1.29), el campo ω está relacionado con φ de la siguiente forma:

$$\nabla\omega = \rho f^{-2} \mathbf{e}_\phi \times \nabla\varphi. \quad (2.10)$$

Con esta nueva relación, veremos que las ecuaciones de campo (1.28)-(1.31) adquieren una forma más simple.

Observemos primero que ω también debe satisfacer la misma relación que cumple φ :

$$\nabla \cdot [\rho^{-1} \mathbf{e}_\phi \times \nabla\omega] = 0. \quad (2.11)$$

Este hecho, y el empleo de ciertas identidades vectoriales conocidas nos conducen a determinar los siguientes resultados:

$$\nabla\omega \cdot \nabla\omega = \rho^2 f^{-4} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi, \quad \mathbf{e}_\phi \times (\mathbf{e}_\phi \times \nabla\varphi) = -\nabla\varphi.$$

Al introducir estas igualdades en (1.28), (1.29) y (2.10) obtenemos finalmente

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot (f^{-2} \nabla\varphi) = 0. \quad (2.13)$$

Este sistema, que en principio es más simple que (1.28)-(1.29), junto con la relación (2.10), son ahora las ecuaciones que definen f y ω . Para esto es preciso determinar, ya sea alguna forma particular para φ , o ciertas condiciones que delimiten esta función auxiliar.

Dada su presupuesta arbitrariedad, comenzaremos por suponer que existe, en principio, alguna φ tal que el campo f puede ser expresado como su funcional. Es decir, supondremos que

$$f = f(\varphi).$$

Así, el sistema (2.12)-(2.13) queda modificado de la siguiente forma:

$$[ff'' - (f')^2 + 1]\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + ff'\nabla^2\varphi = 0,$$

$$f\nabla^2\varphi = 2f'\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi,$$

donde hemos introducido la notación $f' = df/d\varphi$, $f'' = d^2f/d\varphi^2$. Si combinamos estas dos igualdades obtenemos

$$[ff'' + (f')^2 + 1]\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = 0. \quad (2.14)$$

Sabemos de antemano que $\nabla\varphi \neq 0$ (de lo contrario φ sería constante y no correspondería a un caso estacionario), y por lo tanto debe cumplirse que:

$$f\frac{d^2f}{d\varphi^2} + \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + 1 = 0. \quad (2.15)$$

Tenemos entonces una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que determina la dependencia funcional entre f y φ . Su resolución es bastante sencilla.

Si definimos $F = df/d\varphi$ se puede ver que

$$d(fF) + d\varphi = 0,$$

por lo tanto $f df/d\varphi = -\varphi + A$ y tendremos entonces

$$f^2 = -\varphi^2 + A\varphi + B,$$

donde A y B son constantes reales arbitrarias. Estas constantes deberán estar sujetas a ciertas condiciones satisfechas por f . Por una parte, si retornamos al sistema (2.12)-(2.13), se puede observar que dicho sistema queda invariante bajo una transformación $\varphi \rightarrow -\varphi$. Esto implica que si proponemos f como una función de φ , debe ser ésta una función par; de otra forma, el sistema no satisfaría la condición de invarianza. Por otra parte, para que la solución obtenida sea asintóticamente plana, el mínimo valor que debe tomar f es 1. Es decir, el campo f debe ser tal que

$$f(-\varphi) = f(\varphi), \quad f > 1.$$

Estas condiciones implican que debemos escoger las constantes A y B de la siguiente forma¹:

$$A = 0, \quad B = k^2 > 1,$$

siendo k una constante real tal que $|k| > 1$.

Bajo estas consideraciones, podemos concluir que f y φ están relacionados a través de

$$f^2 = k^2 - \varphi^2, \quad |k| > 1. \tag{2.16}$$

¹Las condiciones de paridad y asintoticidad de f determinan, respectivamente, los valores de A y B .

Esta igualdad implica que el sistema (2.12)-(2.13) se reduce a tan sólo una ecuación para φ :

$$(k^2 - \varphi^2)\nabla^2\varphi + 2\varphi\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = 0.$$

Ahora, de manera similar en que fue abordado el problema de la sección anterior, proponemos una nueva función auxiliar $U(\rho, z)$ tal que sea solución de la ecuación de Laplace y que $\varphi = \varphi(U)$. Así, la anterior ecuación queda expresada, en términos de U , de la siguiente manera:

$$[(k^2 - \varphi^2)\varphi'' + 2\varphi(\varphi')^2](\nabla U)^2 + (k^2 - \varphi^2)\varphi'\nabla^2 U = 0. \quad (2.17)$$

Donde $\varphi' = d\varphi/dU$ y $\varphi'' = d^2\varphi/dU^2$. Dada la definición de U , sabemos que $\nabla^2 U = 0$ y por lo tanto se cumple que

$$(k^2 - \varphi^2)\frac{d^2\varphi}{d^2U} + 2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dU}\right)^2 = 0. \quad (2.18)$$

Esta ecuación diferencial, que define la relación entre φ y U , puede solucionarse fácilmente si definimos $G = d\varphi/dU$. Entonces $(k^2 - \varphi^2)dG = -2\varphi G d\varphi$ y tendremos

$$G = \frac{d\varphi}{dU} = k^2 - \varphi^2,$$

de aquí, resolviendo para U^2 :

$$2kU = \ln\left(\frac{k + \varphi}{k - \varphi}\right),$$

y despejando φ , finalmente obtenemos

$$\varphi = k \tanh(kU). \quad (2.19)$$

²Las constantes de integración involucradas en el proceso de resolución las escogemos, por simplicidad, equivalentes a cero, pues la contribución de U dentro del presente formalismo se efectúa a través de sus derivadas.

Esta última expresión nos permite escribir las ecuaciones que determinan f , ω y Λ en términos de U exclusivamente.

Se puede verificar que:

$$\nabla\omega = \rho\mathbf{e}_\phi \times \nabla U, \quad (2.20)$$

$$4\Lambda_{,\rho} = \rho k^2 (U_{,\rho}^2 - U_{,z}^2), \quad (2.21)$$

$$2\Lambda_{,z} = \rho k^2 U_{,\rho} U_{,z}. \quad (2.22)$$

De esta manera, si deseamos obtener una forma particular para el campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, basta escoger una de las múltiples soluciones de la ecuación de Laplace, introducirla en las ecuaciones de campo ya simplificadas por el formalismo y proceder a integrarlas. Este mismo procedimiento lo empleamos en la sección anterior, en el caso del campo estático. Este hecho sugiere que debe existir una conexión entre las soluciones estáticas (soluciones de Weyl) y las estacionarias del tipo Papapetrou, ya que ambas se obtienen de la misma forma, es decir, partiendo de soluciones de la ecuación de Laplace. Comparando las expresiones (2.6), (2.7), (2.8) y (2.16) con (2.19), (2.21) y (2.22), combinándolas adecuadamente e introduciendo el sistema CEG, se puede mostrar fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 1. *A cada solución estática de Weyl (U, Λ_0) se encuentra asociada una solución estacionaria de Papapetrou (f, ω, Λ) dada por*

$$f = k \operatorname{sech}(kU), \quad (2.23)$$

$$\omega_{,x} = -\sigma(1 - y^2)U_{,y}, \quad (2.24)$$

$$\omega_{,y} = \sigma(x^2 - 1)U_{,x}, \quad (2.25)$$

$$\Lambda = (k^2/4)\Lambda_0. \quad (2.26)$$

En la siguiente sección, consideraremos algunos casos particulares que ilustrarán la importancia del teorema anterior, con lo que mostraremos que constituye una herramienta interesante en la búsqueda de soluciones exactas.

2.3. Algunas Soluciones Particulares

Sabemos que la solución general asintóticamente plana y de valor real, de la ecuación de Laplace en CEG³ está dada por [11]:

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sigma^{n+1}} Q_n(x) P_n(y), \quad (2.27)$$

siendo las a_n constantes reales. Los P_n y Q_n , son polinomios y funciones asociadas de Legendre, respectivamente. Consideremos un par de ejemplos ilustrativos.

³Hablamos de la condición de asintoticidad de la ecuación de Laplace en el sentido de que ésta es precisamente una de las ecuaciones de campo gravitacional para el espacio-tiempo estático y axialmente simétrico (métrica de Weyl).

Tomemos primero la solución estática correspondiente a escoger $a_0 = -\mu\kappa$ y $a_n = 0$ para $n > 0$:

$$U(x, y) = -\frac{\mu\kappa}{\sigma}Q_0(x)P_0(y).$$

Aquí, μ es una constante real positiva. Observemos que κ/σ equivale a 1 o $-i$ si σ es real o imaginario puro, respectivamente. Por otra parte sabemos que

$$P_0(y) = 1, \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right),$$

por lo que U , para esta escogencia resultará

$$U = \frac{\mu\kappa}{2\sigma} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad (2.28)$$

y la correspondiente expresión para Λ estará dada por [11]:

$$\Lambda_0 = 2 \left(\frac{\mu\kappa}{2\sigma} \right)^2 \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right). \quad (2.29)$$

Con esto hemos fijado una solución de Weyl (U, Λ_0) . Dado que está escrita en CEG, sabemos que contiene tres casos particulares. Como veremos a continuación, estos tres casos corresponden a las soluciones de Chazy-Curzon, Zipoy-Voorhees y Bonnor-Sackfield.

Si tomamos σ real y diferente de cero tendremos coordenadas esferoidales prolatas.

Recordando la ecuación (1.39), obtendremos

$$U = \frac{\mu}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x}-1}{\tilde{x}+1} \right), \quad \Lambda_0 = \frac{\mu^2}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x}^2-1}{\tilde{x}^2-y^2} \right). \quad (2.30)$$

Esta es la conocida solución de Zipoy-Voorhees que representa el potencial gravitacional de una barra delgada de longitud 2σ situada en el eje z con extremos

en $z = \pm\sigma$. Por otra parte, sabemos que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} (1/\sigma^{n+1})Q_n(x) = 1/r^{n+1}$ [11] y $\lim_{\sigma \rightarrow 0} y = \cos \theta$. De manera que, bajo esta escogencia particular de las constantes de expansión, la solución estática en coordenadas esféricas estará dada por

$$U = -\frac{\mu}{r}, \quad \Lambda_0 = -\frac{\mu^2 \sin^2 \theta}{2r^2}, \quad (2.31)$$

que es la solución de Chazy-Curzon, el potencial gravitacional de una masa puntual μ localizada en el origen, en coordenadas esféricas. El siguiente caso, coordenadas esferoidales oblatas, se obtiene para σ imaginario puro:

$$U = -\frac{i\mu}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x} - i}{\tilde{x} + i} \right), \quad \Lambda_0 = -\frac{\mu^2}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x}^2 + 1}{\tilde{x}^2 + y^2} \right), \quad (2.32)$$

que representa la solución de Bonnor-Sackfield, considerada como el campo gravitacional generado por un disco delgado de radio $|\sigma|$ situado en el plano $z = 0$.

Estas son las tres soluciones particulares que contiene el par (2.28)-(2.29). Cada una de ellas representa un tipo de campo gravitacional estático asintóticamente plano y presentan, hasta el momento, una interpretación física relativamente clara. Como vemos, los parámetros asociados con cada una de estas tres soluciones están relacionados con las características de la fuente que genera el campo gravitacional. Ahora, a la luz del teorema 1, sabemos que podemos generar soluciones estacionarias a partir de las anteriores simplemente introduciendo (2.28) en el sistema (2.23)-(2.26). Así, resolviendo (2.24)-(2.25) y haciendo $p = \mu(\kappa/\sigma)$, obtenemos

$$f = \frac{2k(x^2 - 1)^{kp/2}}{(x - 1)^{kp} + (x + 1)^{kp}}, \quad (2.33)$$

$$\Lambda = \frac{k^2 p^2}{8} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \quad (2.34)$$

$$\omega = \sigma p y + b, \quad (2.35)$$

siendo b una constante de integración arbitraria. Esta solución estacionaria, al contrario de la estática que la genera, no presenta una significación física clara, ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f = k$ y no es asintóticamente plana.

Podemos considerar otra solución particular de (2.27) escogiendo $a_0 = a_n = 0$ para $n > 1$, y $a_1 = -\lambda \kappa^2$, siendo λ una constante real positiva. Con esto obtenemos para U^4

$$U(x, y) = \lambda \left(\frac{\kappa}{\sigma} \right)^2 y \left[\frac{1}{2} x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 1 \right]. \quad (2.36)$$

La función Λ_0 , como sabemos, está determinada por las siguientes ecuaciones [11]:

$$\Lambda_{0,x} = \frac{1-y^2}{x^2-y^2} \left[x(x^2-1)U_{,x}^2 - x(1-y^2)U_{,y}^2 - 2y(x^2-1)U_{,x}U_{,y} \right], \quad (2.37)$$

$$\Lambda_{0,y} = \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \left[y(x^2-1)U_{,x}^2 - y(1-y^2)U_{,y}^2 + 2x(1-y^2)U_{,x}U_{,y} \right]. \quad (2.38)$$

Este sistema sobredeterminado, cuya integración es relativamente sencilla para este caso, tiene como solución

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = & \frac{\lambda^2}{4} \left\{ y^2 [1 + 4 \ln(x^2 - 1)] - \ln(-x - y) - (y^2 + 1)^2 \ln(x - y) \right. \\ & \left. - y^2(y^2 + 2) \ln(x + y) - (x^2 - 1)(1 - y^2) \left[\ln \frac{x-1}{x+1} \right]^2 \right\}. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Haciendo $q = \lambda(\kappa/\sigma)^2$, introduciendo (2.36) y (2.39) en (2.23)-(2.26) y resolviendo

⁴Recordemos que $Q_1(x) = (1/2)x \ln[(x+1)/(x-1)] - 1$ (ver [1]).

(2.24)-(2.25) obtenemos

$$f = k \operatorname{sech} \left\{ kpy \left[x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 1 \right] \right\}, \quad (2.40)$$

$$\omega = -\frac{\lambda k^2}{4\sigma} (x^2 - 1)(1 - y^2) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{k^2 \lambda^2}{16} \left\{ y^2 [1 + 4 \ln(x^2 - 1)] - \ln(-x - y) - (y^2 + 1)^2 \ln(x - y) \right. \\ & \left. - y^2 (y^2 + 2) \ln(x + y) - (x^2 - 1)(1 - y^2) \left[\ln \frac{x-1}{x+1} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} U = \infty$ el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$ es cero, lo que significa que la anterior no es una solución asintóticamente plana. Valdría la pena verificar si existe alguna otra solución particular de (2.27) que al superponerla con (2.27) e introducir el resultado en el formalismo de Papapetrou, llegue a generar una solución estacionaria asintóticamente plana. Aunque en esta sección no efectuaremos tal verificación, en el siguiente capítulo encontraremos que, bajo el formalismo de Ernst, es posible generar soluciones que satisfacen la condición de asintoticidad, a partir de otras que no lo hacen.

Capítulo 3

El Método de Ernst

Como ya señalamos antes, el procedimiento estándar para la resolución de las ecuaciones de campo se compone de dos etapas: determinación de f y ω e integración del sistema que satisface Λ . Precisamente, el método de Ernst es un formalismo que se concentra tan sólo en la primera etapa que, en términos generales, es más complicada que la segunda, pues se trata de la integración de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas. Mediante la definición de ciertas funciones auxiliares que satisfacen condiciones matemáticas especiales, como veremos a continuación, reduciremos el sistema original de dos ecuaciones reales a una ecuación diferencial compleja, la conocida “Ecuación de Ernst”. La ventaja esencial del método radica en que esta ecuación, como resaltaremos mas adelante, obedece ciertos principios de simetría que, a su vez, constituirán una poderosa herramienta en la búsqueda de soluciones. Uno de estos principios de

simetría está íntimamente ligado a la introducción del sistema CEG. Por esto, a lo largo del presente capítulo, casi todas las definiciones y resultados matemáticos estarán expresados en dicho sistema de coordenadas.

Al igual que en capítulo anterior, introducimos una función auxiliar φ independiente de ϕ que satisface la condición (2.9). Como se mostró, las ecuaciones de campo para f y ω quedan modificadas de la siguiente forma:

$$\nabla\omega = \rho f^{-2} \mathbf{e}_\phi \times \nabla\varphi, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot (f^{-2} \nabla\varphi) = 0, \quad (3.2)$$

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi. \quad (3.3)$$

Ahora, en vez de suponer la dependencia $\varphi(U)$, como es el caso del método de Papapetrou, aprovecharemos la estructura del sistema (3.2)-(3.3) para reducirlo a una sola ecuación diferencial en términos de una nueva función auxiliar. Después de algunos pasos elementales, vemos que (3.2) se puede escribir así:

$$-f\nabla^2\varphi + 2\nabla f \cdot \nabla\varphi = 0.$$

Multiplicando esta última por i (la unidad imaginaria) y sumándola a (3.3), tendremos

$$f(\nabla^2 f + i\nabla^2\varphi) = (\nabla f + i\nabla\varphi) \cdot (\nabla f + i\nabla\varphi).$$

Entonces, si definimos una función compleja \mathcal{E} , de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = f + i\varphi, \quad (3.4)$$

podemos escribir

$$(\operatorname{Re} \mathcal{E}) \nabla^2 \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E}. \quad (3.5)$$

De esta manera, a través de la definición (3.4), la labor de determinar f y φ consiste ahora, ya no en integrar el sistema (3.2)-(3.3), sino en resolver (3.5). Esto constituye una complejificación del problema inicialmente planteado. Por lo general, resulta conveniente establecer la siguiente definición:

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}. \quad (3.6)$$

Al introducir la expresión anterior en (3.5), toma la siguiente forma:

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi. \quad (3.7)$$

Esta última ecuación, que denominaremos comunmente como “Ecuación de Ernst”, en apariencia más complicada que (3.5), será en adelante, nuestra referencia básica en la búsqueda de soluciones particulares¹, como lo veremos más adelante.

Es muy importante resaltar dos características determinantes que posee la ecuación de Ernst. Son determinantes en el sentido de que se trata de dos propiedades de simetría, a través de las cuales, como veremos más adelante, es posible encontrar soluciones a partir de otras ya previamente determinadas.

Es fácil verificar que si reemplazamos, en la ecuación (3.7), ξ por $e^{i\alpha} \xi$, siendo α

¹Se considera por el momento que el problema de hallar una solución general de (3.7) es bastante complicado pues, como vemos, se trata de una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo grado para una función compleja ξ . Nos limitaremos entonces, por lo menos en este trabajo, a tratar de determinar algunas soluciones particulares de interés.

una constante real, dicha ecuación queda invariante. También, bajo la introducción del sistema CEG en la ecuación de Ernst, podemos descubrir otra propiedad de invarianza. Si recordamos las expresiones (1.44) y (1.45) del primer capítulo, que describen los operadores nabla y laplaciano, podemos notar que dichos operadores son invariantes ante la transformación $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$. Es decir, la ecuación (3.7) en CEG, es invariante ante el intercambio simultáneo de las coordenadas esferoidales x, y . Estas consideraciones dan lugar al siguiente teorema:

Teorema 2. *Si $\xi(x, y)$ es solución de (3.7), entonces:*

- (i). *La función $e^{i\alpha}\xi(x, y)$, siendo α una constante real, es solución de la ecuación de Ernst.*
- (ii). *La función $\xi(y, x)$, que resulta de efectuar el intercambio simultáneo de las coordenadas (x, y) , también es solución de (3.7).*

Estas dos propiedades de simetría constituyen, en si mismas, un mecanismo de obtención de soluciones, el cual será, en adelante, una de las herramientas fundamentales de este trabajo. Es importante observar el efecto que la propiedad (ii) genera sobre el campo gravitacional mismo, es decir sobre las funciones f, ω y Λ . Introduzcamos para esto una transformación T , tal que

$$T[h(x, y)] = h(y, x) = \mathbf{h}(x, y). \quad (3.8)$$

Si denotamos además por $h_1(x, y)$ y $h_2(x, y)$ a las soluciones resultantes de tomar

$\xi(x, y)$ y $\xi(y, x)$, respectivamente, puede verse fácilmente que se satisface

$$f_2(x, y) = \mathbf{f}_1(x, y) = f_1(y, x), \quad (3.9)$$

$$\varphi_2(x, y) = \boldsymbol{\varphi}_1(x, y) = \varphi_1(y, x). \quad (3.10)$$

El efecto de esta transformación sobre ω se puede observar si recordamos la ecuación (2.10):

$$\omega_{1,x} = -\sigma f_1^{-2}(1 - y^2)\varphi_{1,y}, \quad (3.11)$$

$$\omega_{1,y} = \sigma f_1^{-2}(1 - y^2)\varphi_{1,x}. \quad (3.12)$$

La solución ω_2 , correspondiente a aplicar la transformación T sobre $\xi(x, y)$, satisface el mismo sistema, pero intercambiando el subíndice 1 por el subíndice 2.

Introduciendo las relaciones (3.9)-(3.10), tendremos:

$$\omega_{2,x} = -\sigma \mathbf{f}_1^{-2}(1 - y^2)\boldsymbol{\varphi}_{1,y} \quad (3.13)$$

$$\omega_{2,y} = \sigma \mathbf{f}_1^{-2}(x^2 - 1)\boldsymbol{\varphi}_{1,x}. \quad (3.14)$$

Si aplicamos la transformación T al sistema (3.11)-(3.12) y comparamos el resultado con las dos ecuaciones anteriores, es fácil verificar que

$$\omega_{2,x} = \boldsymbol{\omega}_{1,x} \quad , \quad \omega_{2,y} = \boldsymbol{\omega}_{1,y}.$$

Esto implica simplemente que:

$$\omega_2(x, y) = T[\omega_1(x, y) + C] = \omega_1(y, x) + C, \quad (3.15)$$

donde C es una constante de integración. Si establecemos un análisis similar al anterior, llegamos a la misma conclusión para Λ :

$$\Lambda_2(x, y) = T[\Lambda_1(x, y) + D] = \Lambda_1(y, x) + D, \quad (3.16)$$

siendo D otra constante de integración. De las consideraciones anteriores, establecidas a la luz del formalismo de Ernst, podemos proponer el siguiente corolario del teorema 2:

Corolario. *Si $f(x, y)$, $\omega(x, y)$ y $\Lambda(x, y)$ son soluciones de las ecuaciones de campo (1.46)-(1.49), también lo son $f(y, x)$, $\omega(y, x) + C$ y $\Lambda(y, x) + D$, siendo C y D dos constantes de integración arbitrarias.*

La elección adecuada de las constantes C y D dependerá, por supuesto, de la condición de asintoticidad del campo gravitacional. En las siguientes secciones, a través de varios casos que tomaremos en consideración (soluciones tipo Weyl, Kerr, Kerr-Nut, Tomimatsu-Sato, entre otras), veremos la importancia de este método que, con relativa sencillez, proporciona un camino práctico en la búsqueda de soluciones exactas. Podremos observar que partiendo de una solución bastante simple, como lo es la solución de Schwarzschild, podemos construir soluciones estacionarias más complicadas.

3.1. Soluciones Tipo Weyl

Como sabemos, el caso estático corresponde a tomar $\omega = 0$ y la métrica estacionaria de Weyl-Lewis-Papapetrou adquiere la forma del espacio-tiempo de Weyl. Ya

vimos que en este caso resulta apropiado definir un potencial U tal que $f = e^{2U}$.

Es decir, la función \mathcal{E} estará dada por

$$\mathcal{E} = e^{2U}.$$

En virtud de (3.6) se puede notar que

$$\xi = -\coth U. \quad (3.17)$$

Si introducimos esta expresión en la ecuación de Ernst obtenemos, como es de esperarse, la ecuación de Laplace para U . Como sabemos, su solución general asintóticamente plana en CEG está dada por (2.27).

Tomemos ahora la solución particular correspondiente a escoger $a_0 = \sigma$ y $a_n = 0$ para $n > 0$. Recordando que $P_0(y) = 1$ y $Q_0(x) = -\coth^{-1} x$, tendremos

$$U = -\coth^{-1} x = \coth^{-1}(-x),$$

y por consiguiente

$$\xi = -\coth U = x,$$

con lo cual, la expresión para f adopta la siguiente forma:

$$f = \frac{x-1}{x+1}. \quad (3.18)$$

Introduciendo este resultado en (1.48)-(1.49), después de algunos cálculos elementales, obtenemos para Λ :

$$\Lambda_{,x} = \frac{x(1-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-1)},$$

$$\Lambda_{,y} = \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

El anterior sistema sobredeterminado, como vemos, tiene una integración sencilla si comenzamos con la segunda ecuación:

$$\Lambda(x, y) = \int \frac{y}{x^2 - y^2} dy + g(x),$$

siendo $g(x)$ una función diferenciable, por ahora arbitraria. Efectuando la integral, vemos que:

$$\Lambda(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - y^2) + g(x).$$

Hallaremos ahora la forma particular de $g(x)$. Para esto, derivamos la anterior expresión con respecto a x e igualamos con la primera ecuación del sistema. Tendremos entonces

$$\Lambda_{,x} = -\frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{x(1 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 - 1)},$$

con lo cual:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1).$$

Así, finalmente obtenemos para Λ :

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}. \quad (3.19)$$

Si introducimos (3.18) y (3.19) en la expresión para la métrica estacionaria axisimétrica, en CEG (y haciendo $\omega = 0$), nos encontramos con la siguiente forma, ya familiar para nosotros [11]:

$$ds^2 = \frac{1-x}{x+1} dt^2 + \sigma^2(x+1)^2 \left[\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right] + \sigma^2(x+1)^2(1-y^2) d\phi^2. \quad (3.20)$$

Esta última no es más que la métrica de Schwarzschild escrita en CEG. Para observarla en su forma usual (en coordenadas esféricas de Schwarzschild) tan sólo basta efectuar la siguiente transformación:

$$x = \frac{r}{m} - 1, \quad y = m \cos \theta,$$

y tendremos entonces

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.21)$$

La solución particular dada por (3.18) y que, como vemos, encarna el espacio-tiempo estático e isotrópico, será tomada como nuestro punto de partida para la obtención de otras soluciones más complicadas. A través de las siguientes secciones, aplicando las ya mencionadas propiedades de simetría de la ecuación de Ernst, observaremos, entre otras cosas, que partiendo de una solución estática es relativamente sencillo obtener soluciones estacionarias.

3.2. Soluciones Tipo Taub-NUT

Como pudimos observar en la sección anterior, la solución de Schwarzschild, dentro del formalismo de Ernst, corresponde a tomar $\xi = x$. Estudiaremos ahora, amparados en la primera propiedad de simetría de la ecuación de Ernst, el caso correspondiente a tomar esta solución multiplicada por un factor complejo de fase

constante:

$$\xi = e^{i\alpha}x.$$

Con esta escogencia podemos ver que:

$$\mathcal{E} = \frac{x^2 + 2ix \sin \alpha - 1}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}.$$

La parte real de \mathcal{E} , es decir f , será

$$f = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}. \quad (3.22)$$

Así mismo, para $\varphi = \text{Im}(\mathcal{E})$, tendremos

$$\varphi = \frac{2x \sin \alpha}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}. \quad (3.23)$$

Como sabemos, conociendo φ podemos determinar ω a partir de la ecuación (2.10), que en este caso adoptará la siguiente forma:

$$\sqrt{x^2 - 1}\omega_{,x} \mathbf{e}_x + \sqrt{1 - y^2}\omega_{,y} \mathbf{e}_y = \rho f^{-2} \sqrt{x^2 - 1} \varphi_{,x} \mathbf{e}_y.$$

De aquí se desprende que

$$\omega_{,x} = 0, \quad \omega_{,y} = -2\sigma \sin \alpha,$$

es decir

$$\omega = -2\sigma y \sin \alpha. \quad (3.24)$$

Si introducimos (3.22)-(3.24) en (1.48)-(1.49) obtendremos

$$\Lambda_{,x} = \frac{x(1 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 - 1)}, \quad \Lambda_{,y} = \frac{y}{x^2 - y^2},$$

cuya solución ya fue calculada en la sección anterior:

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} . \quad (3.25)$$

De esta manera, si hacemos $a = \cos \alpha$ y $b = \sin \alpha$ y reemplazamos las expresiones para f, ω y Λ en la fórmula general de la métrica, tenemos

$$ds^2 = \sigma^2 \frac{x^2 + 2ax + 1}{x^2 - 1} \left[dx^2 + \frac{x^2 - 1}{1 - y^2} dy^2 + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right] + \\ - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2ax + 1} (dt - 2\sigma by d\phi)^2. \quad (3.26)$$

Esta igualdad representa la métrica de Taub-NUT en CEG. Como pudimos notar, la transformación $\xi \rightarrow e^{i\alpha}\xi$ nos permite, en este caso, obtener una solución estacionaria (Taub-NUT) a partir de una solución estática (Schwarzschild).

Empleemos ahora la segunda propiedad de simetría, es decir, tomemos la solución particular $\xi = e^{i\alpha}y$. Evidentemente las expresiones para f, ω y Λ , en virtud del corolario del teorema 2, estarán dadas por²

$$f = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 2y \cos \alpha + 1}, \quad \omega = -2\sigma x \sin \alpha, \quad \Lambda(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2}. \quad (3.27)$$

Como vemos, el caso estático lo obtenemos para $\alpha = 0$:

$$f = \frac{y - 1}{y + 1}, \quad \omega = 0, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2}. \quad (3.28)$$

Según la anterior expresión, dado que $-1 < y < 1$, tendremos que $f < 0$ en todo el dominio, lo que implica que la signatura de la métrica se invierte (las otras

²Las constantes que hacen parte de ω y Λ las hemos escogido iguales a cero, por conveniencia.

componentes de la métrica son ahora negativo-definidas). En este caso particular, a través de la transformación $\xi(x, y) \rightarrow \xi(y, x)$, obtuvimos una solución que presenta una signatura apropiada (pero invertida, con respecto a la solución inicial), es decir, físicamente aceptable³. Veremos en la siguiente sección, a través de un conocido ejemplo, que también por medio de una superposición de ambas, es posible obtener soluciones físicamente permisibles.

3.3. Soluciones Tipo Kerr

Como ya lo anticipamos, veremos lo que ocurre si efectuamos la superposición de dos soluciones tipo Schwarzschild, es decir, si tomamos ahora

$$\xi = \alpha x + \beta y. \quad (3.29)$$

Dado que la ecuación de Ernst es no lineal, para que la anterior escogencia constituya una solución, es de esperar que los complejos α y β estén supeditados a cumplir alguna condición específica. Para hallar dicha condición introduzcamos (3.29) en la ecuación de Ernst. Esto conduce a

$$(\beta^2 - \alpha^2)\alpha^* + \alpha = 0, \quad (\beta^2 - \alpha^2)\beta^* - \beta = 0.$$

Podemos combinar ambas relaciones para obtener:

$$(\beta - \alpha) [(\beta + \alpha)(\beta^* + \alpha^*) - 1] = 0.$$

³Aunque por el momento a la solución de Taub-NUT no se le ha encontrado un significado físico preciso, es por lo menos asintóticamente plana y conserva la signatura apropiada de la métrica. Se le considera, por tanto, una solución de interés físico.

Dado que suponemos de antemano que $\beta \neq \alpha$, tendremos

$$\operatorname{Re}^2(\beta + \alpha) + \operatorname{Im}^2(\beta + \alpha) = 1.$$

Esto simplemente significa que, para algún λ real arbitrario, se debe cumplir

$$\alpha + \beta = e^{i\lambda}. \quad (3.30)$$

La anterior condición queda satisfecha si escogemos

$$\alpha = \cos \lambda, \quad \beta = i \sin \lambda. \quad (3.31)$$

Podemos establecer, por consiguiente, que

$$\xi = x \cos \lambda + iy \sin \lambda, \quad (3.32)$$

es una solución particular de la ecuación de Ernst.

De manera que, definiendo

$$a = \cos \lambda, \quad b = \sin \lambda \quad (3.33)$$

las correspondientes expresiones para f y φ quedan

$$f = \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1}{(ax + 1)^2 + b^2 y^2}, \quad (3.34)$$

$$\varphi = \frac{2by}{(ax + 1)^2 + b^2 y^2}. \quad (3.35)$$

Dadas estas relaciones, resolviendo para ω , obtenemos

$$\omega = \frac{2\sigma b}{a} \frac{(1 - y^2)(ax + 1)}{(a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1)}. \quad (3.36)$$

Así mismo, introduciendo el resultado anterior en (1.48)-(1.49) e integrando para Λ , tenemos

$$\Lambda = \ln \left[\frac{a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1}{a^2 (x^2 - y^2)} \right]. \quad (3.37)$$

Las expresiones (3.34), (3.36) y (3.37) determinan lo que se conoce como la solución de Kerr en CEG [7], y se considera que representa un agujero negro en rotación. En este caso, la superposición de dos soluciones estáticas, una de ellas asintóticamente plana y la otra no, nos condujo a la generación de una solución de tipo estacionario y con asintoticidad bien comportada.

3.4. Soluciones Tipo Kerr-NUT

En esta sección, aplicando la propiedad de invarianza (i) sobre la solución anterior, llegaremos a un resultado interesante: la solución de Kerr-NUT. Tendremos en este caso dos tipos de parámetros, cada uno de ellos relacionados ya sea con λ (ver sección anterior) o con α , el factor de fase. Aplicando la mencionada propiedad sobre (3.32) tenemos

$$\xi = e^{i\alpha}(ax + iby), \quad (3.38)$$

y si definimos los siguientes parámetros:

$$c = \sin \alpha \quad , \quad d = \cos \alpha, \quad (3.39)$$

entonces podemos simplificar la notación para los resultados de f y φ que se obtienen:

$$f = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{(ax + d)^2 + (by - c)^2}, \quad (3.40)$$

$$\varphi = \frac{2(acx + bdy)}{(ax + d)^2 + (by - c)^2}. \quad (3.41)$$

El sistema sobredeterminado que satisface ω en términos de φ toma la siguiente forma:

$$\omega_{,x} = -2b\sigma(1 - y^2) \frac{d(a^2x^2 - b^2y^2 + 1) + 2ax(1 - bcy)}{(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)^2}, \quad (3.42)$$

$$\omega_{,y} = -2a\sigma(x^2 - 1) \frac{c(a^2x^2 - b^2y^2 - 1) + 2by(1 + adx)}{(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)^2}, \quad (3.43)$$

cuya integración y posterior aplicación de condiciones de asintoticidad, da como resultado:

$$\omega = \frac{2\sigma}{a} \left[\frac{b(1 - y^2)(adx + cby + 1)}{a^2x^2 + b^2y^2 - 1} + cy \right]. \quad (3.44)$$

La función Λ , tras introducir la expresión anterior en (1.48) y (1.49), toma la siguiente forma:

$$\Lambda = \ln \left[\frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{a^2(x^2 - y^2)} \right]. \quad (3.45)$$

Estas dos últimas expresiones, junto con (3.44), constituyen lo que se conoce como la solución de Kerr-NUT en CEG [7]. Observemos que para $c = 0$ y $d = 1$, es decir $\alpha = 0$, ésta se reduce a la solución de Kerr. Si, por el contrario, hacemos $a = 1$ y $b = 0$, es decir $\lambda = 0$, obtenemos la solución que describe el espacio-tiempo de Taub-NUT.

3.5. Soluciones Tipo Tomimatsu-Sato

Consideraremos ahora el caso en que la función de Ernst está dada en términos de combinaciones polinomiales de las coordenadas esferoidales (x, y) . En la década de los ochenta, Tomimatsu y Sato formularon independientemente, tomando como punto de partida la solución de Kerr y usando el formalismo de Ernst, un tipo de solución estacionaria generada a partir de la siguiente escogencia:

$$\xi = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}, \quad (3.46)$$

en donde $A(x, y)$ y $B(x, y)$ son dos polinomios de grado δ^2 y $\delta^2 - 1$ en (x, y) , respectivamente. No entraremos aquí en los detalles de examinar las condiciones bajo las cuales esta expresión satisface la ecuación de Ernst. Sólo tendremos en cuenta los casos $\delta = 1$ y $\delta = 2$, con los cuales ya se tiene una expresión determinada para ξ .

En el primero caso, la forma explícita de A y B está dada por [9]

$$A(x, y) = ax + iby, \quad B(x, y) = 1. \quad (3.47)$$

Como puede verse fácilmente, este resultado encarna la solución de Kerr, ya abordada en la sección (3.3). Para el siguiente caso, $\delta = 2$, las expresiones para A y B son [9]

$$A(x, y) = a^2(x^4 - 1) + 2iabxy(x^2 - y^2) - b^2(1 - y^4), \quad (3.48)$$

$$B(x, y) = 2ax(x^2 - 1) + 2iby(1 - y^2). \quad (3.49)$$

Notemos que estos polinomios están dados en términos de los mismos parámetros en que está expresada la solución de Kerr. Es decir, aquí a y b también satisfacen la condición $a^2 + b^2 = 1$, lo cual facilita la obtención de las funciones que determinan el campo gravitacional:

$$f = C/D, \quad \omega = 2\sigma bE(1 - y^2)/C, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{A}{a^4(x^2 - y^2)^4} \right], \quad (3.50)$$

en donde los C , D y E son relaciones polinomiales dadas por

$$C = [a^2(x^2 - 1)^2 + b^2(1 - y^2)^2]^2 - 4a^2b^2(x^2 - 1)(1 - y^2)(x^2 - y^2)^2, \quad (3.51)$$

$$D = [a^2x^4 + b^2y^4 - 1 + 2ax(x^2 - 1)]^2 + 4b^2y^2(ax^3 - axy^2 + 1 - y^2)^2, \quad (3.52)$$

$$E = a^2(x^2 - 1)[(x^2 - 1)(1 - y^2) - 4x^2(x^2 - y^2)] - a^3x(x^2 - 1) \quad (3.53) \\ \times [2(x^4 - 1) + (x^2 + 3)(1 - y^2)] + b^2(1 + ax)(1 - y^2)^3.$$

Esta solución de Tomimatsu-Sato, aunque es asintóticamente plana, hasta el momento no se le ha establecido una interpretación física clara. En la próxima sección, mediante la aplicación de la propiedad de simetría (ii) obtendremos una expresión muy similar, cuya asintoticidad será examinada.

3.6. Otras Soluciones

En esta sección, mediante la aplicación de la segunda propiedad de simetría, expresada en el teorema 2, sobre las soluciones de Kerr-NUT y Tomimatsu-Sato,

obtendremos un conjunto de soluciones estacionarias de características similares, una de ellas asintóticamente plana, las restantes no. Empezaremos con la solución de Kerr-NUT, la cual, como sabemos, contiene las soluciones de Kerr y Taub-NUT como casos particulares.

Aplicando la propiedad (ii) sobre (3.40), (3.44) y (3.45), a la luz del corolario del teorema 2, tendremos las siguientes expresiones:

$$f = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - 1}{(ay + d)^2 + (bx - c)^2}, \quad (3.54)$$

$$\omega = \frac{2\sigma}{a} \left[\frac{b(1 - x^2)(ady + cbx + 1)}{a^2y^2 + b^2x^2 - 1} + cx \right] + C, \quad (3.55)$$

$$\Lambda = \ln \left[\frac{a^2y^2 + b^2x^2 - 1}{a^2(y^2 - x^2)} \right] + D. \quad (3.56)$$

El límite asintótico ($x \rightarrow \infty$) de esta solución es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \omega = -\frac{2\sigma(ady + 1)}{ab} + C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda = i\pi + 2 \ln(b/a) + D. \quad (3.57)$$

Veamos las implicaciones que de estos resultados se desprenden. La función f se comporta apropiadamente bajo este límite, pero para ω no sucede exactamente lo mismo. Dado que para $x \rightarrow \infty$ esta función debe anularse, sin importar el valor de y o de σ , la única opción que tenemos para esto es que $d = 0$ y escoger $C = 2\sigma/(ab)$. En el caso de Λ , para que cumpla con el requisito de asintoticidad plana, simplemente basta escoger $D = \ln(-a^2/b^2)$. Esto significa que la solución determinada por las siguientes ecuaciones:

$$f = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - 1}{a^2y^2 + (bx - 1)^2}, \quad (3.58)$$

$$\omega = \frac{2\sigma}{ab} \left[\frac{b^2(1-x^2)(bx+1)}{a^2y^2 + b^2x^2 - 1} + bx + 1 \right], \quad (3.59)$$

$$\Lambda = \ln \left[\frac{(a^2y^2 + b^2x^2 - 1)}{b^2(x^2 - y^2)} \right], \quad (3.60)$$

es asintóticamente plana y puede llegar a representar un campo gravitacional real. Para el caso $b = 0$, que significaría aplicar la propiedad (ii) sobre la solución de Taub-NUT, de acuerdo con (3.57), no se obtiene una solución asintóticamente plana. Lo mismo podemos decir para el caso $c = 0$, que correspondería a introducir la transformación sobre la solución de Kerr.

Si efectuamos el mismo procedimiento a la solución de Tomimatsu-Sato, obtenemos

$$f = C/D, \quad \omega = 2\sigma bE(1-x^2)/C + F, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{A}{a^4(y^2 - x^2)^4} \right] + G, \quad (3.61)$$

donde F y G son constantes arbitrarias y C , D , E , A están dados por

$$C = [a^2(y^2 - 1)^2 + b^2(1 - x^2)^2]^2 - 4a^2b^2(y^2 - 1)(1 - x^2)(y^2 - x^2)^2 \quad (3.62)$$

$$D = [a^2y^4 + b^2x^4 - 1 + 2ay(y^2 - 1)]^2 + 4b^2x^2(ay^3 - ayx^2 + 1 - x^2)^2 \quad (3.63)$$

$$E = a^2(y^2 - 1)[(y^2 - 1)(1 - x^2) - 4y^2(y^2 - x^2)] - a^3y(y^2 - 1) \quad (3.64)$$

$$\times [2(y^4 - 1) + (y^2 + 3)(1 - x^2)] + b^2(1 + ay)(1 - x^2)^3$$

$$A(x, y) = a^2(y^4 - 1) + 2iabxy(y^2 - x^2) - b^2(1 - x^4). \quad (3.65)$$

En esta ocasión, el límite asintótico de la anterior solución es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \omega = -\frac{2m(ay + 1)}{b} + C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda = -\infty, \quad (3.66)$$

evidenciando que no se trata de un campo asintóticamente plano.

Podríamos, a partir de estos resultados, obtener otras soluciones estacionarias mediante la aplicación sucesiva de las propiedades (i) y (ii), o ensayando con combinaciones de las mismas. Por el momento, para evitar extendernos demasiado, no efectuaremos esta labor; sin embargo planteamos esta inquietud para que sea abordada en trabajos posteriores.

Conclusiones

El presente estudio constituyó una extensión del trabajo titulado “Solución General Estática Axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el Vacío, en Coordenadas Esferoidales Generalizadas” [11], a campos gravitacionales estacionarios. En este caso, dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones de campo, no está claro si es posible obtener una solución general. Examinamos entonces, dos clases de soluciones particulares. La primera clase corresponde a los resultados obtenidos a partir del formalismo de Papapetrou (soluciones tipo Papapetrou), y la segunda clase está conformada por las soluciones estacionarias obtenidas a partir del formalismo de Ernst. Todo esto bajo la introducción del sistema CEG, el cual constituyó una poderosa herramienta a lo largo del trabajo. Además de incluir como casos particulares tres sistemas de coordenadas distintos (prolatas, oblatas y esféricas), permitió la simplificación en la escritura de las soluciones y facilitó la introducción de propiedades de simetría. Con estos elementos, se logró probar que una forma práctica de generación de soluciones exactas, de tipo estacionario, se establece a través de los formalismos de Papapetrou y de Ernst.

El formalismo de Papapetrou constituye un mecanismo de obtención de soluciones estacionarias a partir de soluciones estáticas conocidas. El método de generación de soluciones tipo Papapetrou se efectúa, podríamos decirlo, de forma directa, mediante la introducción de soluciones de la Ecuación de Laplace en el sistema (2.23)-(2.26). Empleamos dicho método con dos casos particulares de (2.27) y se obtuvieron dos soluciones estacionarias en CEG. Una de ellas es generada a partir de (2.28), que contiene tres casos ampliamente conocidos: los campos gravitacionales de Chazy-Curzon, Zipoy-Voorhees y Bonnor- Sackfield. La otra solución es obtenida a partir de (2.36) y, al igual que la primera, no presenta un significado físico claro, ya que no es asintóticamente plana.

El método de Ernst, que también es un mecanismo de obtención de soluciones estacionarias, difiere del formalismo de Papapetrou en dos aspectos esenciales. Primero que todo, la generación de resultados se establece de una forma no tan directa como en el caso de Papapetrou. Es necesario emplear dos propiedades de simetría, en las cuales radica la fuerza del método: la propiedad (i), que es inherente a la estructura de la ecuación de Ernst, y la propiedad (ii), que sólo se evidencia bajo la introducción del sistema CEG. Como segunda medida, a través del formalismo de Ernst, es posible generar soluciones estacionarias a partir, tanto de campos estáticos, como de campos estacionarios conocidos. Así es como, partiendo de la solución estática de Schwarzschild, generamos la solución estacionaria de Taub-NUT y, posteriormente, las soluciones de Kerr y Kerr-NUT. Este hecho

resulta bastante sugestivo, no sólo matemáticamente, sino también desde el punto de vista de la interpretación física de las soluciones. El que exista una conexión entre campos de naturaleza estática y estacionaria, a través de la introducción de factores de fase y de intercambio de las coordenadas esferoidales, esboza, por decirlo así, una posible relación entre los parámetros⁴ que caracterizan dichos campos. Aunque el problema de la interpretación física de los resultados no constituyó un aspecto central del presente trabajo, podemos citar ahora, para concretar lo dicho anteriormente, el ejemplo de la solución de Taub-NUT, sección 3.2. Cuando el parámetro α (que está asociado con el parámetro de NUT y se encuentra relacionado estrechamente con la primera propiedad de simetría de la ecuación de Ernst) se anula, obtenemos la solución de Schwarzschild, que presenta hasta el momento una interpretación relativamente clara, lo que no sucede con la de Taub-NUT. Se le podría asociar a dicho parámetro alguna característica relacionada con la rotación de la fuente que genera el campo. Es claro que, en este caso, la propiedad (i) señala la transición de fuentes desprovistas de rotación a fuentes que si la tienen.

Mediante el formalismo de Ernst obtuvimos dos clases de soluciones estacionarias, presentadas en la sección 3.6, que hasta el momento no han sido estudiadas. Una de ellas presenta un caso particular que está dado por las ecuaciones (3.58)-(3.60); constituye una solución asintóticamente plana y podría llegar a tener una inter-

⁴Estos parámetros no son más que las constantes que hacen parte de la estructura de una solución. Dependiendo del caso, estas constantes se encuentran asociadas con las características de la fuente que genera el campo gravitacional, tales como masa, momento angular, carga eléctrica, etc.

pretación física interesante. Los otros casos particulares, en cambio, no presentan un comportamiento asintótico usual. La otra solución, que fue generada a través de la aplicación de la propiedad (ii) sobre la solución de Tomimatsu-Sato de orden $\delta = 2$, tampoco presenta un comportamiento asintótico regular y su posible interpretación física no es clara.

Bibliografía

- [1] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*, Third Edition. Academic Press, (1985).
- [2] BERGMAN, P. G. *Introduction to Theory of Relativity*. Dover, (1976).
- [3] BONNOR, W. B. and SACKFIELD, A. *The Interpretation of Some Spheroidal Metrics*. Comm. Math. Phys. vol 8, p 338 (1968).
- [4] CHANDRASEKAR, A. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, (1992).
- [5] CURZON, H. E. J. *Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations*. Proc. London Math. Soc. vol 23, p 477 (1924).
- [6] ERNST, F. *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem*. Phys. Rev. vol 167, num 5, p 1175 (1968).

- [7] GONZALEZ, G. *Construção de Modelos Relativísticos de Discos com Suporte de Esforço na Direção Radial*. Tesis de Doctorado. Universidade Estadual de Campinas, (1998).
- [8] GONZALEZ, G. *Soluciones de las Ecuaciones de Einstein Mediante el Procedimiento de Papapetrou*. Aceptada para publicación, Revista Integración, U.I.S.
- [9] KRAMER, D.; STEPHANI, H. ; HERLT, E. and MAC CALLUM, M. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, (1980).
- [10] QUEVEDO, H. *General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates*. Phys. Rev. D, vol 39, No 10, p 2904, (1989).
- [11] RAMOS, J. *Solución General Estática Axialmente Simétrica de las Ecuaciones de Einstein en el Vacío, en Coordenadas Esferoidales Generalizadas*. Trabajo de Grado, Universidad Industrial de Santander (2000).
- [12] VORHEES, B. H. *Static Axially Symmetric Gravitational Fields*. Phys. Rev. D, vol 2, No 10, p 2119 (1970).
- [13] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley (1972).
- [14] WEYL, H. *Bemerkung Über die Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*. Ann. Physik. vol 59, p. 185 (1919).

- [15] ZIPOY, D. M. *Topology of Some Spheroidal Metrics*. J. Math. Phys. vol 7, p 1137 (1966).